

Egydio Tadeu Gomes Ramos

Projeto de Controle Robusto Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares

Campina Grande, Brasil

3 de dezembro de 2019

Egydio Tadeu Gomes Ramos

Projeto de Controle Robusto Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: George Acioli Júnior, D.Sc.

Campina Grande, Brasil

3 de dezembro de 2019

Egydio Tadeu Gomes Ramos

Projeto de Controle Robusto Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado em: / /

George Acioli Júnior, D.Sc.
Orientador

Péricles Rezende Barros, Ph.D.
Convidado

Campina Grande, Brasil
3 de dezembro de 2019

Dedico este trabalho aos meus pais, Geralda Gomes Soares e José Egídio Sobrinho.

Agradecimentos

Aos meus pais, Geralda e Egídio, minha eterna gratidão pelo apoio, amor e carinho diário e por serem a minha base para toda e qualquer conquista que já alcancei e alcançarei.

Aos colegas do Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle, em especial à Adeilmo, Alequine, Anna, Arthur, Breno, Lucas Porto, Lucas Oliveira, Matheus, Moisés, Ravi, Renato e Simões, por toda ajuda e companheirismo durante essa caminhada. Agradeço também ao meu orientador, George Acioli Júnior, e aos professores Eustáquio Rangel, Péricles Rezende Barros e Rafael Bezerra Correia Lima pelos ensinamentos e por todas as oportunidades a mim concedidas durante a graduação.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, em especial Adail e Tchai, pela presteza sempre demonstrada diante de todo e qualquer problema. Agradeço também aos professores do departamento por todos os conhecimentos transmitidos.

Agradeço a mim mesmo por me permitir concluir a graduação, a Cícero pelos inúmeros domingos compartilhando vídeos de Naruto enquanto devíamos estar estudando, a Antonio pela parceria nos momentos de procrastinação no quiosque e a todos que fazem o Macharada.

"We're forever teetering on the brink of the unknowable, and trying to understand what can't be understood. It's what makes us men."

Isaac Asimov

Resumo

A representação de sistemas por modelos matemáticos não é perfeita devido às incertezas inerentes no processo de modelagem ou identificação, causadas por simplificações ou dinâmicas não consideradas. Um controlador é dito robusto quando é capaz de garantir estabilidade em malha fechada e atender as especificações de desempenho do sistema mesmo sob a influência das incertezas e perturbações externas. A principal técnica utilizada no projeto de controladores robustos consiste na minimização da norma \mathcal{H}_∞ , que pode ser formulado como um problema de otimização convexa utilizando desigualdades matriciais lineares. Neste trabalho são estudadas técnicas avançadas para o projeto de controladores ótimos e robustos, utilizando a abordagem de desigualdades matriciais lineares. Os procedimentos são aplicados no projeto de controle robusto para um sistema multivariável de temperatura.

Palavras-chaves: Sistemas Multivariáveis; Controle Robusto; LMI.

Abstract

The representation of systems by mathematical models is not perfect because uncertainties during the modeling or identification process, which can be caused by simplifications or dynamics not taken into account. A controller is said to be robust when it is capable of ensuring closed-loop stability and meeting system performance specifications even under the influence of external uncertainties and disturbances. The main technique used in the design of robust controllers is to minimize the \mathcal{H}_∞ norm, which can be formulated as a convex optimization problem using linear matrix inequalities. In this work, advanced techniques for the design of optimal and robust controllers are studied, using the linear matrix inequality approach. The procedures are used in the robust control design of a multivariable temperature system.

Key-words: Multivariable Systems; Robust Control; LMI.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada. | 6 |
| Figura 2 – Sistema em malha fechada com controlador LQG. | 11 |
| Figura 3 – Configuração sem incertezas adotada no projeto de controle \mathcal{H}_2 | 14 |
| Figura 4 – Configuração com incertezas adotada no projeto de controle \mathcal{H}_∞ | 18 |
| Figura 5 – Módulo didático de temperatura presente no LIEC. | 26 |
| Figura 6 – Esquema do módulo de temperatura. | 26 |
| Figura 7 – Modelo utilizado para a geração automática de código na etapa de identificação. | 27 |
| Figura 8 – Experimento de identificação: entrada 1. | 28 |
| Figura 9 – Experimento de identificação: entrada 2. | 28 |
| Figura 10 – Determinação da ponderação W_2 para as incertezas do modelo. | 31 |
| Figura 11 – Magnitudes das repostas em frequência das ponderações de desempenho e incertezas. | 32 |
| Figura 12 – Verificação da condição de desempenho robusto com o controlador projetado. | 34 |
| Figura 13 – Modelo utilizado para a geração automática de código na etapa de teste do controlador. | 35 |
| Figura 14 – Experimento em malha fechada. | 36 |
| Figura 15 – Comparação entre as saídas dos resultados experimentais e simulados. | 37 |
| Figura 16 – Comparação entre as entradas dos resultados experimentais e simulados. | 37 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Parâmetros dos modelos FOPTD identificados. | 30 |
|--|----|

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|------|------------------------------------|
| ARE | Algebraic Riccati equation |
| LQR | Linear-quadratic regulator |
| LQG | Linear-quadratic-Gaussian |
| LMI | Linear matrix inequality |
| LTR | Loop transfer recovery |
| SISO | Single-input and single-output |
| SVD | Singular value decomposition |
| MIMO | Multiple-input and multiple-output |

Lista de símbolos

| | |
|--------------------------------|--|
| \mathbb{C} | Conjunto dos números complexos |
| $\mathbb{C}^{m \times n}$ | Espaço das matrizes complexas de dimensão $m \times n$ |
| $\overline{\mathbb{C}}^+$ | Semiplano direito fechado do plano complexo |
| \mathcal{L}_2 | Espaço de funções de quadrado integrável |
| \mathcal{L}_∞ | Espaço de funções essencialmente limitadas |
| \mathcal{H}_2 | Espaço de Hardy de funções analíticas em $\overline{\mathbb{C}}^+$, subespaço de \mathcal{L}_2 |
| \mathcal{H}_∞ | Espaço de Hardy de funções analíticas em $\overline{\mathbb{C}}^+$, subespaço de \mathcal{L}_∞ |
| $\ \cdot\ _p$ | Norma- p de um sinal ou sistema |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Produto interno entre dois sinais ou sistemas |
| $\bar{\sigma}(\cdot)$ | Maior valor singular de uma matriz |
| $\text{Im}(\cdot)$ | Conjunto imagem de uma matriz |
| $\ker(\cdot)$ | Espaço nulo de uma matriz |

Sumário

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 2 | CONTROLE ÓTIMO E ROBUSTO | 3 |
| 2.1 | Controle Robusto | 3 |
| 2.1.1 | Representação das Incertezas no Modelo | 3 |
| 2.1.2 | Estabilidade Robusta | 5 |
| 2.1.3 | Desempenho Robusto | 7 |
| 2.2 | Controle Linear-Quadrático | 8 |
| 2.2.1 | Regulador Linear-Quadrático (LQR) | 8 |
| 2.2.2 | Filtro de Kalman | 9 |
| 2.2.3 | Controle Linear-Quadrático Gaussiano (LQG) | 10 |
| 2.2.4 | Robustez dos Controladores LQR e LQG | 11 |
| 2.3 | Controle \mathcal{H}_2 | 12 |
| 2.3.1 | Espaço de Hardy \mathcal{H}_2 | 12 |
| 2.3.2 | Formulação do Problema de Controle Ótimo \mathcal{H}_2 | 13 |
| 2.4 | Controle \mathcal{H}_∞ | 15 |
| 2.4.1 | Espaço de Hardy \mathcal{H}_∞ | 15 |
| 2.4.2 | Formulação do Problema de Controle \mathcal{H}_∞ | 16 |
| 2.4.3 | Projeto de Controle Robusto Utilizando \mathcal{H}_∞ | 18 |
| 3 | CONTROLE \mathcal{H}_∞ UTILIZANDO LMI | 20 |
| 3.1 | Desigualdades Matriciais Lineares | 20 |
| 3.1.1 | Descrição e Solução de uma LMI Utilizando o MATLAB | 21 |
| 3.2 | <i>Bounded Real Lemma</i> | 22 |
| 3.3 | Caracterização do Controlador \mathcal{H}_∞ | 22 |
| 4 | SINTONIA DE UM CONTROLADOR \mathcal{H}_∞ PARA UM SISTEMA DE TEMPERATURA | 25 |
| 4.1 | Definição do Problema | 25 |
| 4.2 | Descrição do Sistema | 25 |
| 4.3 | Obtenção dos Modelos do Sistema e das Incertezas | 27 |
| 4.3.1 | Identificação do Sistema | 27 |
| 4.3.2 | Obtenção do Modelo de Incertezas Não Estruturadas | 29 |
| 4.4 | Projeto do Controlador | 31 |
| 4.4.1 | Especificação de Desempenho | 32 |
| 4.4.2 | Sintonia do Controlador Utilizando LMI | 32 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4.3 | Experimento em Malha Fechada | 34 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 38 |
| | REFERÊNCIAS | 39 |

1 Introdução

De forma geral, um sistema de controle é realizado com o objetivo de manipular saídas de um determinado processo de forma a atender uma determinada especificação, a partir da manipulação das suas entradas (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992). O projeto do controlador necessita de uma representação do sistema, que normalmente consiste em um modelo matemático que descreva seu comportamento dinâmico.

Contudo, essa representação não é perfeita devido às incertezas inerentes ao modelo, que por mais detalhado que seja não conseguirá descrever fielmente o sistema real, devido por exemplo à alguma dinâmica não prevista ou perturbações externas desconhecidas. Além disso, modelos muito complexos não são desejáveis pela dificuldade de serem caracterizados ou simulados, o que resulta na necessidade de simplificações para o projeto do controlador (DULLERUD; PAGANINI, 2010).

Dessa forma, um controlador é dito robusto quando é capaz de garantir estabilidade em malha fechada e atender as especificações de desempenho do sistema mesmo sob a influência das incertezas no modelo e perturbações externas. O projeto de controle robusto considera o modelo da planta como sendo um conjunto de possíveis modelos. As incertezas podem ser estruturadas, quando este conjunto é parametrizado por um número finito de parâmetros escalares da estrutura do modelo, que variam dentro de uma faixa; ou não estruturadas, quando as estruturas dos modelos dentro do conjunto variam (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992).

Nas técnicas modernas para o projeto de controle ótimo utilizando espaço de estados, como o LQG, existe a dificuldade em se caracterizar parâmetros de robustez, que são classicamente expressos no domínio da frequência. Em determinados casos, as margens de estabilidade desses controladores podem ser arbitrariamente pequenas (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994). Abordagens mais avançadas para o projeto de controle ótimo no domínio da frequência consistem em problemas de otimização utilizando critérios de minimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (MACKENROTH, 2004).

Existem dois métodos normalmente aplicados na solução do problema de otimização \mathcal{H}_∞ : o primeiro é baseado na solução de equações de Riccati, similar ao que é utilizado nos métodos tradicionais, enquanto que o segundo consiste em formular o problema utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês linear matrix inequality). Em ambos os casos são obtidos controladores sub-ótimos utilizando especificações de desempenho no domínio da frequência (MACKENROTH, 2004). A abordagem LMI possui como principais vantagens o fato de que a solução pode ser obtida com técnicas matriciais relativamente diretas e com menos restrições impostas a estrutura do modelo (DULLERUD;

PAGANINI, 2010).

Neste trabalho objetiva-se estudar técnicas avançadas para o projeto de controle ótimo e robusto, com enfoque na utilização da abordagem de desigualdades matriciais lineares, e aplicá-las a um processo multivariável de temperatura. Um conjunto de modelos de primeira ordem com atraso é identificado, que são utilizados para se obter uma representação da incerteza. Por fim, os teoremas de existência e síntese são aplicados na sintonia de um controlador \mathcal{H}_∞ que resulta em desempenho robusto ao sistema.

2 Controle Ótimo e Robusto

2.1 Controle Robusto

Modelos matemáticos não são capazes de representar perfeitamente um sistema real. Sempre existirão dinâmicas não consideradas ou perturbações externas desconhecidas que não permitirão que o modelo preveja exatamente a saída da planta. Além disso, modelos muito complexos não são desejáveis pela dificuldade de serem analisados, o que resulta na necessidade de simplificações. Dito isto, um sistema de controle é considerado robusto se for insensível a diferenças nas dinâmicas da planta real e do modelo utilizado para o projeto do controlador (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

A principal abordagem utilizada no projeto de controle robusto consiste em representar matematicamente as incertezas no sistema e sintonizar um controlador capaz de satisfazer critérios de estabilidade e desempenho levando em conta essas incertezas.

2.1.1 Representação das Incertezas no Modelo

Incerteza no modelo da planta podem surgir devido a vários fatores, como dinâmicas não consideradas durante a modelagem, imperfeições nos sensores, ou parâmetros cujos valores não são conhecidos com precisão ou variam de forma não linear dependendo das condições de operação do processo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

A abordagem do controle robusto consiste em assumir que a planta não é descrita por apenas um único modelo linear e invariante no tempo. Ao invés disso, considera-se um conjunto \mathcal{P} (possivelmente infinito) de possíveis modelos.

Considerando uma representação por funções de transferência, $G(s) \in \mathcal{P}$ denota o modelo nominal da planta, considerado como livre de incertezas, e $\tilde{G}(s) \in \mathcal{P}$ representa um possível modelo com perturbações.

O conjunto de incertezas pode ser paramétrico (ou estruturado), quando possui uma estrutura conhecida mas contém um ou mais parâmetros cujo valor pode variar em uma determinada faixa. Esse tipo de modelo é utilizado quando não se conhece com precisão o valor de um determinado parâmetro. Como exemplo, pode-se citar um circuito elétrico com resistores cuja resistência varia dentro de uma faixa de tolerância (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992).

Na maioria dos casos a estrutura do modelo não é conhecida devido as dinâmicas, particularmente em altas frequências, que não foram consideradas na obtenção do modelo. Esse conjunto de incertezas é denominado não estruturado.

Uma forma de representar incertezas não estruturadas é baseada em discos multiplicativos em torno do modelo nominal. Para um sistema com uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *single-input and single-output*), essas perturbações multiplicativas são representadas em termos do modelo nominal pela seguinte expressão:

$$\tilde{G}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))G(s) \quad (2.1)$$

onde W_2 é uma função de transferência fixa e estável de ponderação e Δ é uma função de transferência variável e estável que satisfaz $\|\Delta\|_\infty < 1$. Assume-se que não há cancelamento de polos instáveis de G em \tilde{G} .

O termo ΔW_2 representa o desvio do modelo normalizado da planta em relação à 1:

$$\frac{\tilde{G}}{G} - 1 = \Delta W_2 \quad (2.2)$$

Aplicando a condição $\|\Delta\|_\infty < 1$, obtém-se:

$$\left| \frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.3)$$

Essa desigualdade implica que a magnitude de $W_2(j\omega)$ pode ser utilizada como um perfil para caracterizar a incerteza, que tipicamente cresce com ω . O Δ é utilizado para refletir incertezas na fase e como um fator de escala na magnitude da perturbação.

Em determinadas situações o modelo de perturbações multiplicativas pode não ser adequado. Outros modelos possíveis são apresentados nas equações (2.4) à (2.6).

$$\tilde{G} = G + \Delta W_2 \quad (2.4)$$

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_2 G} \quad (2.5)$$

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_2} \quad (2.6)$$

Estes conceitos podem ser estendidos para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple-input and multiple-output*) (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). A incerteza Δ é normalmente expressa como uma matriz diagonal de funções de transferência estáveis:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \Delta_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Delta_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A ponderação escalar $W_2(s)$ pode ser substituída por uma matriz $\mathbf{W}_2(s)$, o que em geral não é feito devido ao aumento da complexidade do problema. Incertezas multiplicativas no caso MIMO podem ser na entrada ou na saída, cujas estruturas são, respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(\mathbf{I} + W_2\mathbf{\Delta}) \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{I} + W_2\mathbf{\Delta})\mathbf{G} \quad (2.9)$$

Em termos de restrições no desempenho do controlador, as incertezas multiplicativas na saída são mais adotadas por resultarem em condições menos restritivas.

Uma técnica para determinação da ponderação W_2 para incertezas multiplicativas na saída em sistemas MIMO é apresentada em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). A partir do conjunto de modelos \mathcal{P} e do modelo nominal \mathbf{G} , para cada ponto em frequência é calculado um raio $l(j\omega)$ de um círculo que inclua todas as plantas de \mathcal{P} . Para o modelo de incertezas multiplicativas na saída, esse raio é expresso por:

$$l(\omega) = \max_{\tilde{\mathbf{G}} \in \mathcal{P}} \bar{\sigma}((\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G})\mathbf{G}^{-1}) \quad (2.10)$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ denota o maior valor singular de uma matriz. A ponderação $W_2(s)$ deve ser escolhida como uma função de transferência cuja magnitude da resposta em frequência satisfaz:

$$|W_2(j\omega)| \geq l(\omega), \quad \forall \omega \quad (2.11)$$

2.1.2 Estabilidade Robusta

Dado um sistema representado por $G \in \mathcal{P}$ em malha fechada com um controlador C . O controlador é considerado robusto do ponto de vista da estabilidade se a condição de estabilidade interna for satisfeita para todos os modelos do conjunto \mathcal{P} .

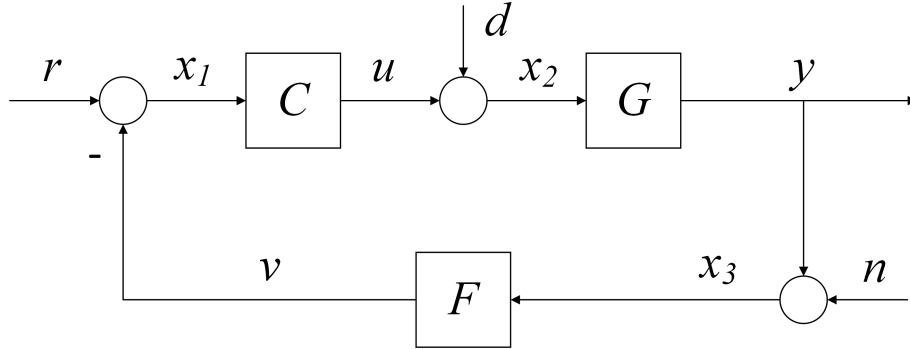
A condição de estabilidade interna de um processo SISO G em malha fechada pode ser determinada utilizando o diagrama de blocos da figura 1, onde y é a saída, r é a referência, u é o sinal de controle, d é uma perturbação atuando sobre o processo, n é o ruído de medição, v é a leitura do sensor e F é a função de transferência do sensor. Utilizando álgebra de blocos obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -G & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -GF & -F \\ C & 1 & -CF \\ GC & G & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.



Fonte: Adaptado de (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992).

Teorema 2.1.1. *Um sistema em malha fechada é internamente estável se, e somente se, todas as funções de transferência da matriz:*

$$\frac{1}{1 + GCF} \begin{bmatrix} 1 & -GF & -F \\ C & 1 & -CF \\ GC & G & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

são estáveis.

Como o conjunto \mathcal{P} pode conter infinitos elementos, a análise de estabilidade interna não é factível. No caso específico do modelo de perturbações multiplicativas, uma condição necessária e suficiente pode ser obtida em termos do modelo nominal G e da ponderação W_2 . A função sensibilidade complementar calculada para o modelo nominal é expressa por:

$$T = \frac{GC}{1 + GC} \quad (2.15)$$

Uma condição necessária e suficiente para estabilidade robusta, válida para sistemas SISO e MIMO, pode ser obtida utilizando a ponderação W_2 e a função de sensibilidade complementar:

Teorema 2.1.2. *Para o modelo de perturbações multiplicativas, C provê estabilidade robusta se, e somente se, $\|W_2 T\|_\infty < 1$.*

A prova deste teorema é descrita em (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992). Em termos do ganho de malha $L = GC$, a condição de estabilidade robusta pode ser reescrita como:

$$\left| \frac{W_2(j\omega)L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \quad (2.16)$$

ou:

$$|W_2(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.17)$$

que implica dizer que para cada frequência ω_i , o ponto crítico -1 está fora do círculo centrado em $L(j\omega_i)$ e raio $|W_2(j\omega_i)L(j\omega_i)|$.

Como W_2 normalmente possui uma resposta em frequência com um comportamento passa-alta, para garantir estabilidade robusta T deve possuir ganhos baixos nas altas frequências.

2.1.3 Desempenho Robusto

Observando a figura 1, as seguintes expressões no domínio da frequência podem ser derivadas utilizando álgebra de blocos:

$$Y(s) = TR(s) + SGD(s) - TN(s) \quad (2.18)$$

$$E(s) = SR(s) - SD(s) + TN(s) \quad (2.19)$$

onde T é a função sensibilidade complementar, expressa pela equação (2.15), e S é a função de sensibilidade, definida como:

$$S = \frac{1}{1 + GC} = 1 - T \quad (2.20)$$

O desempenho de um sistema em malha fechada com relação ao rastreamento de referência e rejeição de perturbações pode ser relacionado a função de sensibilidade. Pelas equações (2.18) e (2.19), especificações referentes a redução no erro de controle em relação a referência r e a rejeição da perturbação d podem ser alcançadas reduzindo S . Contudo, a relação entre S e T expressa em (2.20) limita o desempenho que se pode alcançar sem perder a estabilidade robusta.

De forma geral os sinais de referência e perturbação são concentrados nas baixas frequências. Assim, as especificações de desempenho podem se restringir a essas regiões. Isso é feito ao adicionar uma ponderação $W_1(s)$, cuja resposta em frequência possui um comportamento passa-baixa. Dessa forma, a seguinte condição de desempenho nominal pode ser estabelecida:

$$\|W_1S\|_\infty < 1 \quad (2.21)$$

Para alcançar o desempenho nominal, S deve possuir ganhos baixos nas baixas frequências.

Um controlador C é robusto do ponto de vista de desempenho se garante o desempenho a cada elemento do conjunto \mathcal{P} de modelos do sistema. No caso das perturbações

multiplicativas, as condições de estabilidade robusta e desempenho nominal podem ser combinadas em uma condição de desempenho robusto, válida tanto para sistemas SISO quanto MIMO.

Teorema 2.1.3. *Uma condição necessária e suficiente para alcançar o desempenho robusto é:*

$$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1 \quad (2.22)$$

2.2 Controle Linear-Quadrático

Uma das classes de problemas de controle ótimo mais estudadas consiste no projeto em malha fechada para sistemas representados por modelos lineares, utilizando critérios de otimização quadráticos para penalizar os estados e as variáveis de controle (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994).

A teoria de controle linear-quadrático possui várias características que possibilitam sua aplicação a uma ampla gama de problemas, dentre as quais cabem destaque:

- Possui métodos analíticos para o projeto de controle de sistemas MIMO;
- Pode ser aplicado a sistemas variantes no tempo;
- Possui abordagens para tratar modelos estocásticos onde são adicionadas perturbações ou ruídos de medição.

No problema de controle regulatório, o procedimento mais usual consiste em utilizar a representação em espaço de estados para projetar o regulador linear-quadrático (LQR, do inglês *linear-quadratic regulator*). Quando existem estados que não podem ser medidos diretamente, projeta-se o observador ótimo utilizando o filtro de Kalman. A junção do LQR com o filtro de Kalman resulta no controlador linear-quadrático gaussiano (LQG).

2.2.1 Regulador Linear-Quadrático (LQR)

Considerando um processo MIMO representado pelo seguinte modelo determinístico com n estados e m entradas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de estados e entradas, respectivamente.

O problema de otimização básico consiste em determinar uma lei de controle que minimiza a seguinte função de custo:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.24)$$

sujeito à restrição imposta pela dinâmica do sistema, expressa pela equação (2.23). As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são positiva definidas, normalmente diagonais, e representam as ponderações dos estados ou das entradas na função de custo, que podem ser ajustadas a depender da necessidade do problema. Aumentar o valor de um elemento de \mathbf{Q} implica em uma maior precisão no controle do estado correspondente, enquanto que aumentar o valor de algum elemento em \mathbf{R} reduz o esforço de controle com relação a entrada correspondente (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994).

Se todos os estados são mensuráveis e o sistema é controlável, então existe uma matriz \mathbf{K} expressa por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.25)$$

tal que o sinal de controle $\mathbf{u}^* = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ é solução do problema de otimização. A matriz \mathbf{P} é obtida com a solução da seguinte equação algébrica de Riccati (ARE, do inglês *algebraic Riccati equation*):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

Esse problema de controle regulatório de um sistema linear utilizando um critério quadrático é denominado de regulador linear-quadrático. A principal desvantagem dessa formulação consiste na necessidade de que todos os estados estejam disponíveis para medição, o que não acontece na maioria das situações práticas. Isso pode ser contornado com a adição de um observador de estados utilizando o filtro de Kalman.

2.2.2 Filtro de Kalman

Na formulação do filtro de Kalman, considera-se um sistema representado por um modelo em espaço de estados com perturbações estocásticas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \xi \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \theta \quad (2.28)$$

onde $\xi(t)$ e $\theta(t)$ representam perturbações estocásticas no processo e ruídos de medição, respectivamente, e são processos estocásticos do tipo ruído branco, decorrelacionados, com média nula e matrizes de correlações:

$$E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} = \Xi\delta(t - \tau) \quad (2.29)$$

$$E\{\theta(t)\theta^T(\tau)\} = \Theta\delta(t - \tau) \quad (2.30)$$

onde $\delta(t)$ é a função impulso unitário e Ξ e Θ são as matrizes de covariâncias.

O observador é uma categoria de sensor virtual utilizado para calcular estimativas dos estados do processo ($\hat{\mathbf{x}}$) a partir das entradas e saídas mensuráveis, utilizando o modelo do sistema. Sua estrutura em espaço de estados pode ser expressa por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_f(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.31)$$

onde \mathbf{K}_f é o ganho do observador. A evolução no tempo do erro de predição $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ é expressa pela equação diferencial em (2.32), que é estável se o sistema for detectável. O ganho do observador deve ser projetado de forma que o erro de predição tenda a zero em um intervalo de tempo desejado.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.32)$$

No filtro de Kalman, calcula-se o valor de \mathbf{K}_f que minimiza $E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\}$. A solução desse problema de otimização é:

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{S}\mathbf{C}^T\Theta^{-1} \quad (2.33)$$

onde \mathbf{S} é uma matriz positiva definida obtida com a solução da seguinte ARE:

$$\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \Xi - \mathbf{S}\mathbf{C}^T\Theta^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

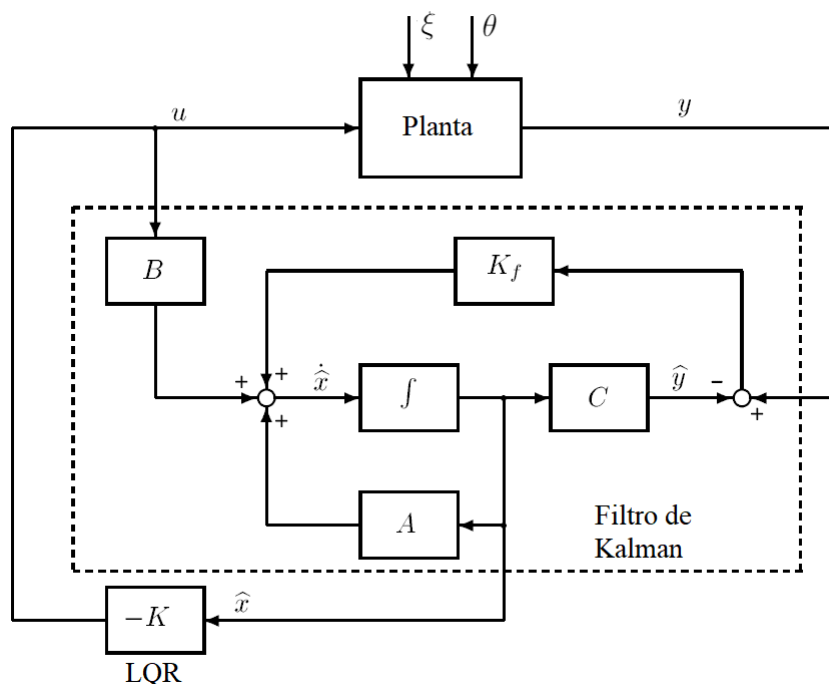
Na maioria das situações práticas as matrizes Ξ e Θ são utilizadas como ponderações no projeto do filtro de Kalman. Se existe uma maior incerteza por parte do modelo com relação a um determinado estado, aumenta-se o valor do elemento correspondente em Ξ para que sua ponderação será menor no cálculo da estimativa. Por outro lado, se alguma saída medida é mais sujeita a ruídos, pode-se aumentar o valor do elemento correspondente em Θ para diminuir sua ponderação no cálculo da estimativa (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994).

2.2.3 Controle Linear-Quadrático Gaussiano (LQG)

O problema LQG consiste em determinar um compensador que utilize medições de \mathbf{u} e \mathbf{y} para gerar um sinal de controle que minimiza a função de custo expressa pela equação (2.24). Sua solução consiste na aplicação do Teorema da Separação, no qual resolve-se um problema LQR do sistema sem as perturbações estocásticas para determinar a matriz \mathbf{K} da lei de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Em seguida projeta-se o filtro de Kalman de maneira independente e substitui-se \mathbf{x} por $\hat{\mathbf{x}}$ na lei de controle.

O diagrama de blocos da figura 2 apresenta um esquema com o controlador LQG aplicada a uma planta sujeita à ruídos. As entradas e saídas medidas do processo são utilizadas para computar a estimativa dos estados pelo filtro de Kalman, que são aplicados na malha de realimentação para produzir novas entradas de controle.

Figura 2 – Sistema em malha fechada com controlador LQG.



Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

2.2.4 Robustez dos Controladores LQR e LQG

Considerando que todos os estados estão disponíveis para a medição e desprezando as perturbações estocásticas, um sistema controlado por um LQR possui a seguinte função de sensibilidade:

$$\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})^{-1} \quad (2.35)$$

É possível mostrar que essa função satisfaz a seguinte propriedade (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994):

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \leq 1, \quad \forall \omega \quad (2.36)$$

a qual implica que o sistema terá margem de ganho infinita e margem de fase de no mínimo 60° .

No caso de sistemas SISO, a desigualdade expressa em (2.36) implica que o diagrama de Nyquist da função ganho de malha $\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ está fora do círculo de raio unitário centrado no ponto -1 .

Essas propriedades de robustez do LQR não são válidas ao introduzir o filtro de Kalman. A função sensibilidade do LQG não satisfaz a desigualdade (2.36) e não há margens de estabilidade garantidas. Além disso, a utilização do LQG em alguns casos pode levar a margens de ganho arbitrariamente pequenas.

Um método para recuperar as propriedades de robustez do LQR consiste em modificar a matriz de ponderações Ξ do filtro de Kalman de tal forma que a função ganho de malha com o LQG seja assintoticamente igual a do problema LQR correspondente. Esse procedimento é denominado recuperação da função de transferência de malha (LTR, do inglês *loop transfer recovery*) e requer que o processo possua fase mínima (DOYLE J.; STEIN, 1979).

2.3 Controle \mathcal{H}_2

Uma generalização do LQG consiste na formulação do problema de minimização da norma \mathcal{H}_2 de um sistema. A vantagem da utilização dessa técnica consiste na representação dos modelos em termos da frequência, possibilitando a definição de uma metodologia para sua aplicação em diferentes estruturas de controle, que podem ser convertidas para uma estrutura generalizada. A solução do problema \mathcal{H}_2 envolve duas equações de Riccati e envolve a suposição de restrições ao modelo que em alguns casos podem ser impraticáveis.

2.3.1 Espaço de Hardy \mathcal{H}_2

Seja $\mathbf{G}(s)$ uma matriz $n \times m$ de funções de transferência que representa um sistema MIMO. Define-se o espaço de funções $\mathcal{L}_2^{n \times m}(j\mathbb{R})$ das funções matriciais $\mathbf{G}(j\omega)$ definidas sobre o eixo imaginário que são integráveis ao quadrado:

$$\mathcal{L}_2^{n \times m}(j\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{G} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2^2 d\omega < \infty \right\} \quad (2.37)$$

O espaço de Hardy \mathcal{H}_2 representa o conjunto de matrizes de transferência $\mathbf{G}(s)$ estáveis definidas no plano complexo. Quando restrito a $s = j\omega$, \mathcal{H}_2 é um subespaço de $\mathcal{L}_2^{n \times m}(j\mathbb{R})$, herdando a norma e produto interno definidos neste (MACKENROTH, 2004).

Definição 2.3.1. *Um sistema $\mathbf{G}(s) : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ pertence ao espaço \mathcal{H}_2 se:*

1. $\mathbf{G}(s)$ é analítica em \mathbb{C}^+ ;
2. Para todo número real ω ,

$$\lim_{\sigma < 0^+} \mathbf{G}(\sigma + j\omega) = \mathbf{G}(j\omega);$$

3. $\mathbf{G}(s)$ é limitada:

$$\sup_{\sigma \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\mathbf{G}^*(\sigma + j\omega)\mathbf{G}(\sigma + j\omega)) d\omega < \infty,$$

onde $\text{tr}(\mathbf{G})$ representa o traço da matriz \mathbf{G} e \mathbf{G}^* é a conjugada transposta de \mathbf{G} .

O espaço \mathcal{H}_2 também pode ser definido para funções $\mathbf{u}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nesse caso, a condição (3) é modificada para:

$$\sup_{\sigma \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}(\sigma + j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

A norma \mathcal{H}_2 de um sistema é definida como a norma-2 no espaço $\mathcal{L}_2^{n \times m}(j\mathbb{R})$:

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)) d\omega} \quad (2.38)$$

Em particular, o subespaço de \mathcal{H}_2 que consiste nas matrizes de transferência racionais, estáveis e estritamente próprias é denotado \mathcal{RH}_2 .

2.3.2 Formulação do Problema de Controle Ótimo \mathcal{H}_2

A formulação do problema de controle \mathcal{H}_2 leva em conta o modelo generalizado do processo, ilustrado no diagrama da figura 3, que representa uma configuração de sistema de controle sem a presença de incertezas, onde \mathbf{w} são entradas exógenas que podem ser perturbações ou sinais de referência, \mathbf{u} são as variáveis manipuláveis, \mathbf{z} são as saídas do processo, \mathbf{y} são as saídas medidas, \mathbf{K} é o controlador e \mathbf{P} é o modelo generalizado da planta, cuja representação em espaço de estados é:

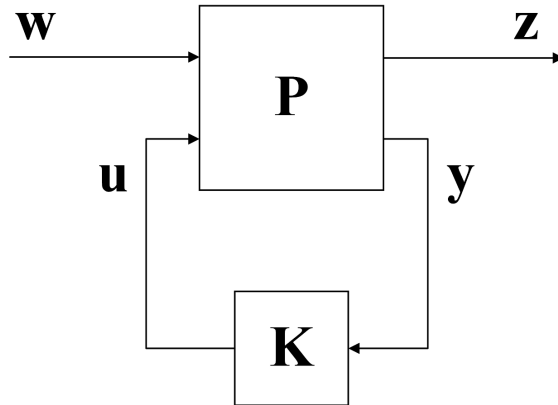
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \quad (2.41)$$

que pode ser reescrita utilizando a seguinte notação equivalente:

$$\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.42)$$

Figura 3 – Configuração sem incertezas adotada no projeto de controle \mathcal{H}_2 .

Fonte: Adaptado de (MACKENROTH, 2004).

A função de transferência em malha fechada que relaciona \mathbf{z} e \mathbf{w} é denotada por $\mathbf{F}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)$. O problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 consiste em determinar um controlador $\mathbf{K}(s)$ pelo qual seja possível garantir estabilidade interna de $\mathbf{P}(s)$ e minimizar a norma \mathcal{H}_2 de $\mathbf{F}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)$.

As condições necessárias e suficientes para a solução do problema de controle são:

1. O par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ é estabilizável;
2. O par $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ é detectável;
3. \mathbf{D}_{12} e \mathbf{D}_{21} possuem posto completo;
4. As colunas da seguinte matriz são linearmente independentes para todo ω real:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix};$$

5. As linhas da seguinte matriz são linearmente independentes para todo ω real:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}.$$

Se essas condições foram satisfeitas, o problema de controle \mathcal{H}_2 possui solução única e resulta no seguinte controlador:

$$\mathbf{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.43)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{L}_2 = -(\mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{F}_2 = -(\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1) \quad (2.46)$$

As matrizes \mathbf{X}_2 e \mathbf{Y}_2 são soluções de equações algébricas de Riccati associadas as matrizes hamiltonianas \mathbf{H}_2 e \mathbf{J}_2 , respectivamente, que são expressas por:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_\perp \mathbf{D}_\perp^T \mathbf{C}_1 & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1)^T \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T - \mathbf{C}_2^T \mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{D}}_\perp^T \bar{\mathbf{D}}_\perp \mathbf{B}_1^T & -(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}_2^T \mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_1^T)^T \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

onde \mathbf{D}_\perp e $\bar{\mathbf{D}}_\perp$ são obtidas de forma a tornar as seguintes matrizes unitárias:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_\perp \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21} \\ \bar{\mathbf{D}}_\perp \end{bmatrix}$$

Mais detalhes acerca de ARE's associadas a matrizes hamiltonianas podem ser obtidos em (DORATO; CERONE; ABDALLAH, 1994).

Este controlador pode ser reescrito no espaço de estados como a junção de um observador e um regulador, de forma análoga ao LQG:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_2 \hat{\mathbf{x}} \quad (2.50)$$

2.4 Controle \mathcal{H}_∞

De forma semelhante ao controle \mathcal{H}_2 , o controlador \mathcal{H}_∞ é projetado com o intuito de minimizar a norma- ∞ do sistema, que representa o valor pico da magnitude da resposta em frequência. É o principal método para o projeto de controladores robustos pois possibilita a inclusão das ponderações de desempenho e das incertezas no modelo generalizado da planta. Devido a dificuldade de se computar uma solução ótima para esse problema, a abordagem mais adotada consiste no projeto de controladores subótimos.

2.4.1 Espaço de Hardy \mathcal{H}_∞

O espaço de Hardy \mathcal{H}_∞ representa o conjunto de matrizes de transferência $\mathbf{G}(s)$ que são analíticas e limitadas. Definindo o seguinte operador multiplicativo:

$$M_G(\mathbf{f}) = \mathbf{G}(s) \mathbf{f}(s) \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{f}(s) \in \mathcal{H}_2$. Para que a imagem $\mathbf{G}\mathbf{f} \in \mathcal{H}_2$, é necessário que a matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ seja analítica e limitada, o que leva a definição do espaço \mathcal{H}_∞ , ao qual \mathbf{G} deve pertencer.

Definição 2.4.1. *Uma função matricial $\mathbf{G} : \overline{\mathbb{C}}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ pertence a \mathcal{H}_∞ se:*

1. $\mathbf{G}(s)$ é analítica no semiplano direito aberto do plano real \mathbb{C}^+ ;
2. Para todo número real ω :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \mathbf{G}(\sigma + j\omega) = \mathbf{G}(j\omega);$$

3. $\mathbf{G}(s)$ é limitado:

$$\sup_{s \in \overline{\mathbb{C}}^+} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(s)) < \infty.$$

De forma análoga ao \mathcal{H}_2 , no eixo imaginário \mathcal{H}_∞ é um subespaço do espaço de funções matriciais limitadas $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$, do qual herda a seguinte norma:

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \quad (2.52)$$

Em particular, o subespaço de \mathcal{H}_∞ que consiste nas matrizes de transferência racionais, estáveis e estritamente próprias é denotado \mathcal{RH}_∞ .

2.4.2 Formulação do Problema de Controle \mathcal{H}_∞

Considerando novamente o diagrama da figura 3 para representar um modelo mais geral da planta, que possui as seguintes equações de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (2.55)$$

Ou de forma equivalente:

$$\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \quad (2.56)$$

O problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ consiste em obter todos os controladores $\mathbf{K}(s)$ admissíveis (i.e., próprios e que tornam $\mathbf{F}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)$ internamente estável) que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

Na maioria dos casos, determinar o controlador ótimo se mostra uma tarefa difícil pois não há garantia de solução única. Devido a isto, opta-se pela busca de uma solução subótima, onde para um dado $\gamma > 0$ deseja-se obter os controladores $\mathbf{K}(s)$ admissíveis tais que $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma$.

O seguinte conjunto de suposições permite obter condições suficientes para uma solução \mathcal{H}_∞ subótima:

1. Os pares $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ são estabilizáveis;
2. Os pares $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$ e $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ são detectáveis;
3. $\mathbf{D}_{11} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$;
4. $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}$;
5. $\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T = \mathbf{0}$ e $\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T = \mathbf{I}$.

Dadas as seguintes matrizes hamiltonianas:

$$\mathbf{H}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{J}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

e as matrizes \mathbf{X}_∞ e \mathbf{Y}_∞ , que são soluções das equações algébricas de Riccati associadas à \mathbf{H}_∞ e \mathbf{J}_∞ , respectivamente. Sobre o conjunto de suposições (1) à (5), existe um controlador admissível que resulte em $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, as matrizes \mathbf{X}_∞ e \mathbf{Y}_∞ são semipositiva definidas e o raio espectral $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$. Nesse caso, a solução é expressa por:

$$\mathbf{K}_{\text{sub}} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \\ \hline \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.59)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 \quad (2.60)$$

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \quad (2.61)$$

$$\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T \quad (2.62)$$

$$\mathbf{Z}_\infty = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty \right)^{-1} \quad (2.63)$$

Uma forma equivalente deste controlador é obtido com a junção de um observador e um regulador. A equação em espaço de estados é expressa por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{w}}_r + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty(\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (2.64)$$

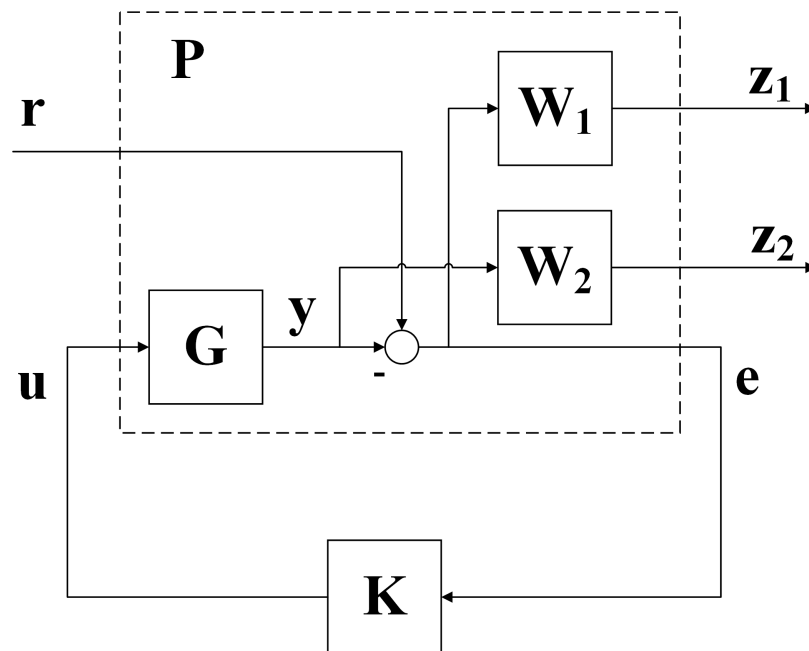
$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_\infty\hat{\mathbf{x}} \quad (2.65)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_r = \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\hat{\mathbf{x}} \quad (2.66)$$

2.4.3 Projeto de Controle Robusto Utilizando \mathcal{H}_∞

O projeto de controle \mathcal{H}_∞ pode ser reformulado de forma a incluir as ponderações \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 para moldar as matrizes de sensibilidade (\mathbf{S}) e sensibilidade complementar (\mathbf{T}). A estrutura do sistema em malha fechada é apresentada no diagrama em blocos da figura 4. Comparando com a figura 3, o modelo generalizado (\mathbf{P}) inclui o modelo nominal (\mathbf{G}) e as ponderações. As entradas exógenas (\mathbf{w}) são sinais de referência (\mathbf{r}), as entradas do controlador (\mathbf{x}) são os erros de controle (\mathbf{e}) e $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2]^T$.

Figura 4 – Configuração com incertezas adotada no projeto de controle \mathcal{H}_∞ .



Fonte: Adaptado de (MACKENROTH, 2004).

As matrizes de transferência do modelo generalizado (\mathbf{P}) e do sistema em malha

fechada (\mathbf{F}_{zr}) são expressas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & -\mathbf{W}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2\mathbf{G} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{F}_{\text{zr}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_2\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Dessa forma, a aplicação do método de otimização da norma \mathcal{H}_∞ resulta em um controlador subótimo que satisfaz:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_2\mathbf{T} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.69)$$

3 Controle \mathcal{H}_∞ utilizando LMI

3.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear (LMI, do inglês *linear matrix inequality*) consiste em um conjunto de inequações que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ é a variável e as matrizes simétricas $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ são constantes.

A desigualdade $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ deve ser positiva definida, ou de forma equivalente:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (3.2)$$

A solução consiste em um problema de viabilidade convexo, onde busca-se determinar se a LMI é viável ou não, e se for, computar um ponto \mathbf{x}^* tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) > \mathbf{0}$. O método dos pontos interiores é a ferramenta mais eficiente para se obter a solução do problema LMI.

Uma das principais vantagens da utilização de LMI's se deve ao fato de que desigualdades lineares, quadráticas, normas de matrizes e restrições em problemas de controle tais como desigualdades de Lyapunov podem ser reescritas na forma de uma LMI (BOYD et al., 1997).

Em particular, utilizando o complemento de Schur é possível converter desigualdades não lineares e convexas em uma LMI. Considerando a seguinte matriz em blocos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde \mathbf{Q} e \mathbf{R} são simétricas. Aplicando o complemento de Schur, a LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ é equivalente às seguintes desigualdades:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Nota-se que a desigualdade expressa em (3.5) é não linear com relação a variável \mathbf{x} . Essa equivalência será utilizada na formulação do problema \mathcal{H}_∞ como uma LMI utilizando o *bounded real lemma*.

3.1.1 Descrição e Solução de uma LMI Utilizando o MATLAB

Para se definir uma LMI utilizando o MATLAB, inicialmente é necessária a chamada da função `setlmis(LMISYS)` para inicializar a descrição a partir de uma LMI anterior ou iniciar uma nova descrição (nesse caso um vetor nulo `[]` é passado como argumento da função).

As variáveis da LMI são especificadas utilizando a função `lmivar(type,struct)`, onde o argumento `type` é igual a 1 para matrizes diagonais e 2 para matrizes retangulares $m \times n$. O argumento `struct` consiste na dimensão da matriz e uma flag para especificar a estrutura (normalmente ajustada em 1) para matrizes diagonais ou as dimensões m e n para matrizes retangulares. Essa função retorna um identificador para a variável.

Para a descrição da LMI utiliza-se a função `lmiterm(termId,A,B,flag)`, onde `termId` é um vetor de quatro posições constituído pelo número da LMI, a linha e coluna do bloco que está sendo especificado e o identificador da variável (ou o valor 0 caso esteja-se especificando uma constante), `A` e `B` são matrizes constantes que multiplicam a variável a esquerda e a direita, respectivamente, e `flag` é um argumento opcional para se especificar expressões da forma:

$$\mathbf{AXB} + (\mathbf{AXB})^T$$

Nesse caso utiliza-se `flag = 's'`.

Após descritas as LMI's, o comando `LMISYS = getlmis` é utilizado para armazenar a descrição em uma variável.

A solução de uma LMI pode ser obtida com a função `feasp(LMISYS)` que retorna um vetor de decisão que representa a solução de um problema de viabilidade. A variável matricial pode então ser recuperada utilizando a função `dec2mat(LMISYS,lmisol,Id)`, onde `lmisol` é o vetor de decisão obtido e `Id` é o identificador da variável.

Por exemplo, dada a seguinte LMI :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} & \mathbf{X} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{X} & \mathbf{C} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

onde a variável \mathbf{X} é uma matriz simétrica de dimensão 5×5 e \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são constantes. A solução dessa LMI pode ser obtida no MATLAB com a aplicação dos comandos:

```
setlmis([]);
```

```
X = lmivar(1,[5 1]);
```

```
lmiterm([1 1 1 X], A, 1, 's');
```

```
lmiterm([1 1 2 X], 1, B);
```

```
lmiterm([1 2 2 0], C);
```

```
LMISYS = getlmis;
```

```
[~,lmiSolution] = feasp(LMISYS);
```

```
Xsolution = dec2mat(LMISYS,lmiSolution,X);
```

3.2 Bounded Real Lemma

Obtido a partir do teorema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), o *bounded real lemma* é utilizado para relacionar desigualdades no domínio da frequência e características no espaço de estados a um problema LMI (DULLERUD; PAGANINI, 2010).

Teorema 3.2.1. *Para uma matriz de transferência qualquer:*

$$\mathbf{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (3.6)$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

1. \mathbf{A} é estável e $\|\mathbf{G}\|_\infty < 1$;
2. Existe uma matriz simétrica e positiva definida \mathbf{X} tal que:

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{X} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Por meio dessa condição, é possível expressar a desigualdade $\|\mathbf{F}_{\mathbf{zw}}\|_\infty < \gamma$ do projeto de controle \mathcal{H}_∞ por meio de uma LMI.

3.3 Caracterização do Controlador \mathcal{H}_∞

Considerando o modelos da planta (\mathbf{P}) e do controlador (\mathbf{K}) expressos pelas seguintes matrizes de transferência:

$$\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad \mathbf{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{array} \right] \quad (3.8)$$

O sistema em malha fechada correspondente possuirá a seguinte representação:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{zw}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right] \quad (3.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_k \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{bmatrix} & \mathbf{B}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_K \end{bmatrix} & \mathbf{D}_c &= \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \end{aligned}$$

Aplicando o *bounded real lemma* ao sistema de malha fechada, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. \mathbf{A}_c é estável e $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < 1$;
2. Existe uma matriz simétrica positiva definida \mathbf{Z} que satisfaz a seguinte LMI, obtida a com a aplicação do complemento de Schur à desigualdade expressa em (3.7):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c & \mathbf{Z} \mathbf{B}_c & \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T \mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Definindo a matriz em blocos \mathbf{J} constituída pelos elementos da realização em espaço de estados do controlador:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

As matrizes do modelo do sistema em malha fechada podem ser parametrizadas em função de \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{A}_e + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{J} \mathbf{C}_{2e}, & \mathbf{B}_c &= \mathbf{B}_{1e} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{J} \mathbf{D}_{21e} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{C}_{1e} + \mathbf{D}_{12e} \mathbf{J} \mathbf{C}_{2e}, & \mathbf{D}_c &= \mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{J} \mathbf{C}_{2e} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{1e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{2e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{1e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_{2e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{12e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_{21e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dois teoremas podem ser derivados para aplicação do controle \mathcal{H}_∞ utilizando LMI. No primeiro, denominado teorema de existência, é definida uma condição necessária e suficiente para existência da solução. No segundo, denominado teorema de síntese, é expressa a LMI cuja solução resulta no controlador \mathcal{H}_∞ .

Teorema 3.3.1. *Existe um controlador que satisfaz $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas positiva definidas \mathbf{X} e \mathbf{Y} que são soluções das seguintes desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.15)$$

\mathbf{N}_o e \mathbf{N}_c são matrizes de posto completo que satisfazem:

$$\text{Im } \mathbf{N}_o = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad \text{Im } \mathbf{N}_c = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T \end{bmatrix}$$

onde $\text{Im}(\cdot)$ e $\text{ker}(\cdot)$ denotam, respectivamente, o conjunto imagem e o espaço nulo de uma matriz.

Teorema 3.3.2. *Dadas as matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} que satisfazem as condições (3.13) à (3.15), e \mathbf{X}_2 tal que $\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^T = \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1} \geq \mathbf{0}$, então a matriz \mathbf{Z} da LMI em (3.10) é expressa por:*

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

E a matriz \mathbf{J} de parâmetros do controlador é obtida com a solução da seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c & \mathbf{Z} \mathbf{B}_c & \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T \mathbf{Z} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.17)$$

4 Sintonia de um Controlador \mathcal{H}_∞ para um Sistema de Temperatura

4.1 Definição do Problema

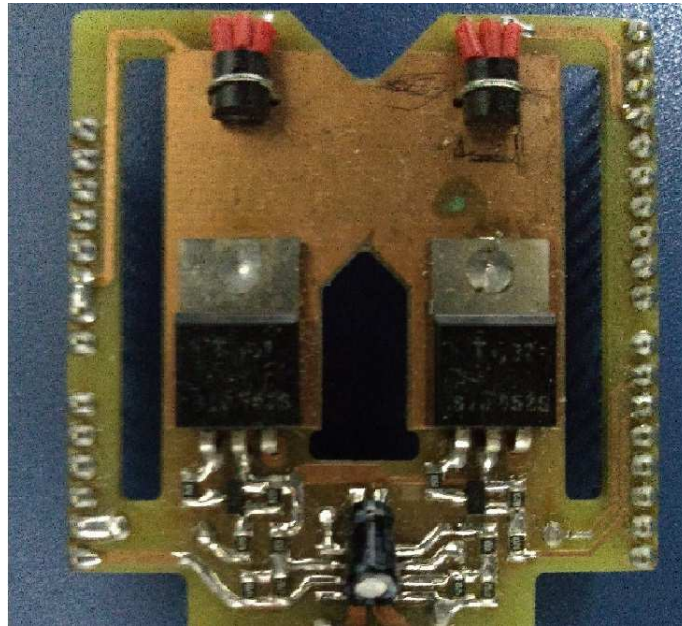
A técnica de controle robusto \mathcal{H}_∞ utilizando LMI foi aplicado no projeto de um controlador centralizado para um sistema multivariável. A metodologia utilizada na solução deste problema consistiu na seguinte sequência de passos:

1. Realização de um experimento no sistema;
2. Identificação de conjunto de modelos \mathcal{P} para a planta;
3. Definição de um modelo nominal do processo (\mathbf{G});
4. Obtenção de um modelo para as incertezas;
5. Especificação do desempenho no domínio da frequência;
6. Obtenção do modelo generalizado do processo;
7. Verificação da existência de um controlador utilizando LMI;
8. Síntese do controlador \mathcal{H}_∞ utilizando LMI;
9. Verificação da condição de desempenho robusto;
10. Testes em malha fechada.

4.2 Descrição do Sistema

Para a aplicação das técnicas apresentadas nas seções anteriores foi utilizado o módulo de temperatura ilustrado na Figura 5, que é um sistema multivariável constituído por dois transistores de efeito de campo e dois sensores de temperatura. As entradas são os ciclos de trabalho de sinais modulados em largura de pulso (PWM, do inglês *pulse width modulation*) aplicados a cada transistor e as saídas são as leituras de temperaturas medidas utilizando os sensores (RAMOS et al., 2019).

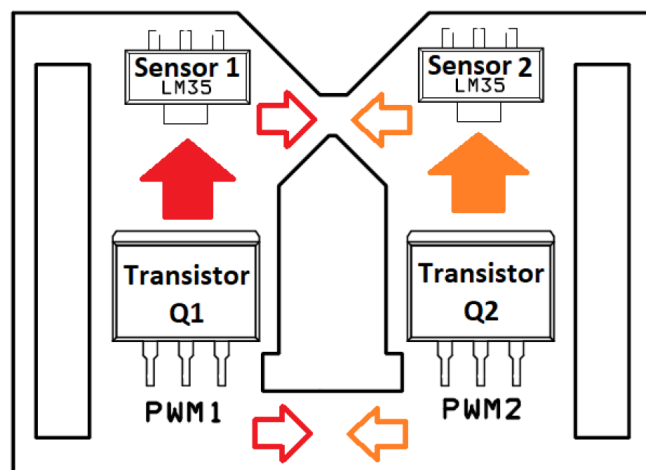
Figura 5 – Módulo didático de temperatura presente no LIEC.



Fonte: Autoria própria.

Um esquema de disposição dos componentes é apresentado na Figura 6. Devido a distância reduzida entre os componentes, a variação em um dos atuadores altera a resposta obtida pelos dois sensores. Diante disso, esse sistema pode ser representado como uma matriz de transferência 2×2 , contendo termos não nulos na diagonal secundária.

Figura 6 – Esquema do módulo de temperatura.



Fonte: (LIMA; BARROS; ACIOLI JÚNIOR, 2018).

Um microcontrolador ATMEGA328P foi utilizado para realizar a interface com a planta. Por meio deste foram adquiridos os dados de temperatura dos sensores, calculados os sinais de controle e gerados os sinais PWM para aplicação aos transistores.

4.3 Obtenção dos Modelos do Sistema e das Incertezas

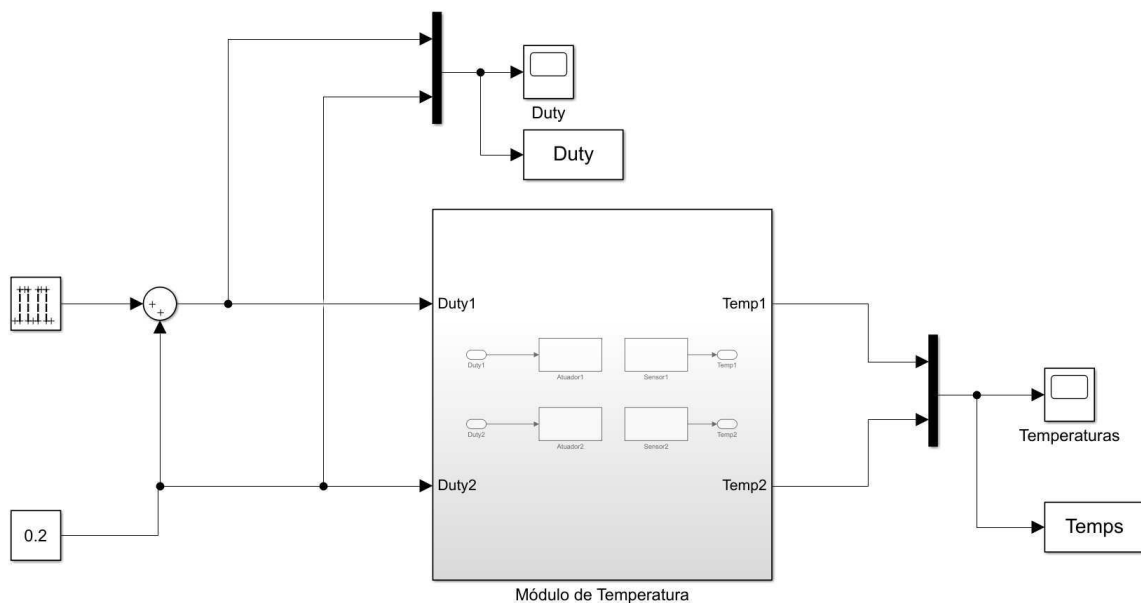
Para realização a aplicação das técnicas de controle \mathcal{H}_∞ utilizando LMI, é necessário se conhecer previamente um modelo do sistema e das incertezas. Na obtenção do modelo, foi optado pela realização de um teste do degrau para a identificação do sistema utilizando a técnica dos mínimos quadrados. O modelo da incerteza não estruturada foi obtido com a aplicação da metodologia proposta em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

4.3.1 Identificação do Sistema

Conforme fora exposto na seção 2.1.1, o projeto de um controlador robusto considera um conjunto de possíveis modelos para o processo. Desta forma, o experimento de identificação realizado consistiu na aplicação a cada entrada, mantendo a outra constante, de uma onda quadrada com amplitude de 10 %, período de 2000 s e 5 oscilações, partindo de um ponto de operação de 20 % no ciclo de trabalho.

Para a aplicação dos sinais de teste ao módulo de temperatura, foi desenvolvido o modelo em Simulink ilustrado na Figura 7, que é utilizado na geração automática de código para o microcontrolador. No bloco denominado Módulo de Temperatura são configurados os pinos de entrada e saída para comunicação com o sistema. Um gerador de pulsos foi utilizado para aplicação da onda quadrada.

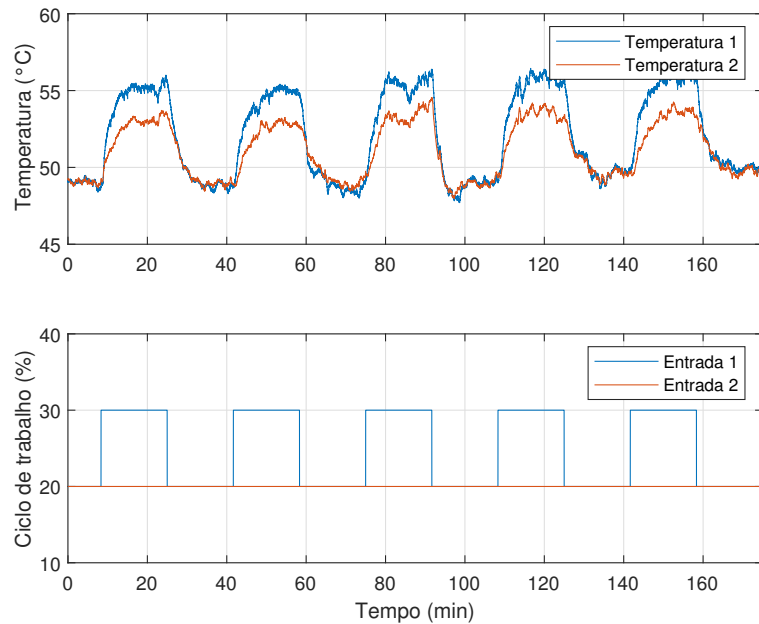
Figura 7 – Modelo utilizado para a geração automática de código na etapa de identificação.



Fonte: Autoria própria.

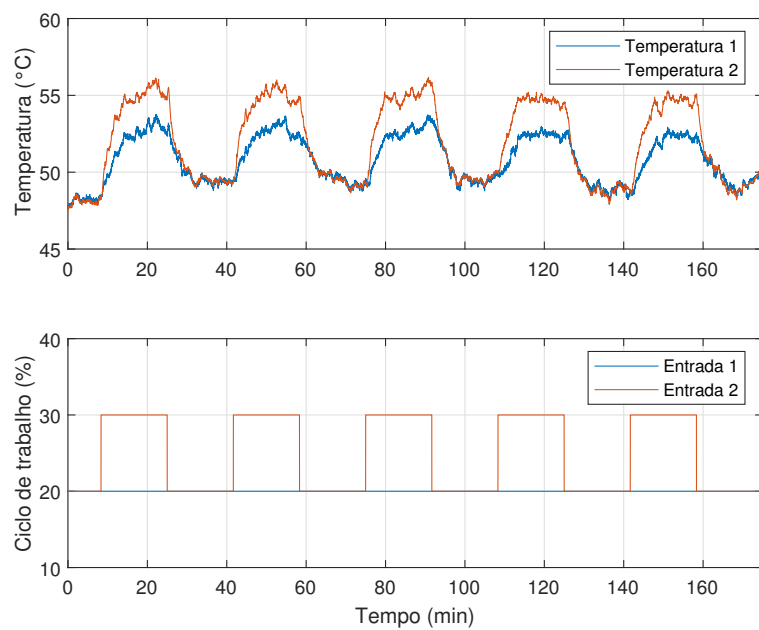
Nas Figuras 8 e 9 são apresentados os sinais aplicados às entradas e os valores das temperaturas medidos para cada experimento.

Figura 8 – Experimento de identificação: entrada 1.



Fonte: Autoria própria.

Figura 9 – Experimento de identificação: entrada 2.



Fonte: Autoria própria.

Para cada variação em degrau positiva ou negativa foi identificado um modelo para o processo, obtendo-se 10 modelos no total. Como a dinâmica observada em cada temperatura se assemelha a de um sistema de primeira ordem com atraso, foi utilizada a estrutura FOPTD (do inglês *first order plus time delay*) para representação dos modelos, a qual é expressa por:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{T_{11}s + 1} e^{-sL_{11}} & \frac{K_{12}}{T_{12}s + 1} e^{-sL_{12}} \\ \frac{K_{21}}{T_{21}s + 1} e^{-sL_{21}} & \frac{K_{22}}{T_{22}s + 1} e^{-sL_{22}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde K_{ij} , T_{ij} e L_{ij} são o ganho, a constante de tempo e o atraso temporal da função de transferência entre a j -ésima entrada e a i -ésima saída.

Na tabela 1 são apresentados os parâmetros dos modelos identificados e o calculado para o nominal. Foram observadas variações significativas nos parâmetros obtidos para cada modelo, superiores a 100 % em torno da média em alguns casos. Isso ocorre devido principalmente aos efeitos de perturbações externas desprezadas, causadas pelo ar-condicionado presente no local do experimento e o fluxo de pessoas que alteram a temperatura ambiente. Diante disso, verifica-se que um único modelo FOPTD não é capaz de descrever com precisão a dinâmica deste sistema.

O modelo nominal \mathbf{G} considerado foi uma estrutura FOPTD cujos parâmetros K , T e L são os valores médios dos correspondentes a cada modelo obtido na identificação. A matriz de transferência obtida foi:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{66,30}{160,54s + 1} e^{-11,10s} & \frac{35,60}{202,88s + 1} e^{-51,61s} \\ \frac{42,01}{157,38s + 1} e^{-38,28s} & \frac{58,74}{147,84s + 1} e^{-17,10s} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Os modelos obtidos na identificação, juntamente com o nominal, constituem o conjunto \mathcal{P} de modelos possíveis para o processo.

4.3.2 Obtenção do Modelo de Incertezas Não Estruturadas

Em posse do conjunto de modelos \mathcal{P} , a metodologia apresentada na seção 2.1.1 foi aplicada para determinar a ponderação $W_2(s)$, considerando a estrutura de incerteza multiplicativa na saída. Ao calcular o maior valor singular em uma faixa de frequências, utilizando a equação (2.10), verificou-se que a magnitude era próxima de 0,7 nas baixas frequências e 7,2 nas altas frequências. Foi utilizada uma estrutura de filtro passa-alta de primeira ordem para W_2 , expressa por:

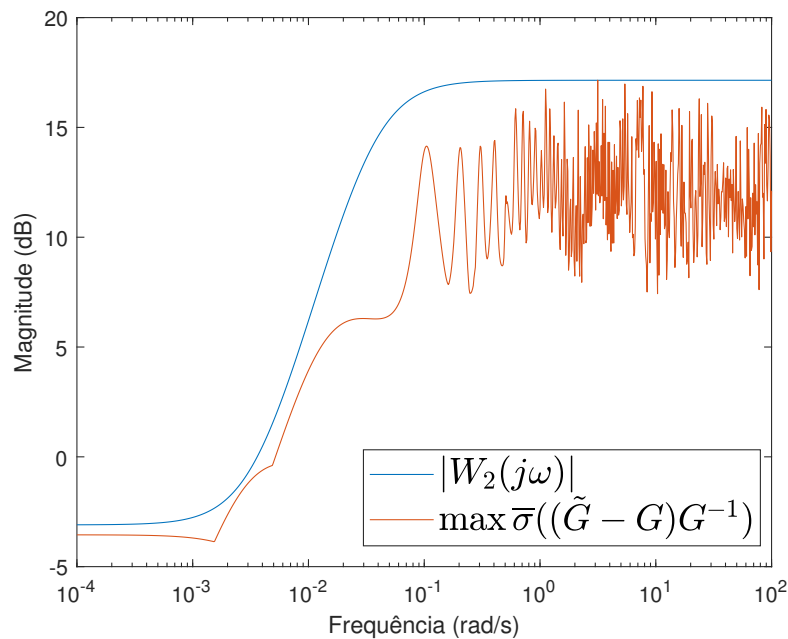
$$W_2(s) = \frac{Ts + g_\infty}{(T/g_0)s + 1} \quad (4.3)$$

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos FOPTD identificados.

| Modelo | K_{11} | T_{11} | L_{11} | K_{12} | T_{12} | L_{12} |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 67,97 | 175,97 | 0,07 | 49,64 | 258,11 | 0,08 |
| 2 | 68,65 | 154,01 | 10,88 | 30,24 | 157,02 | 47,09 |
| 3 | 63,34 | 175,43 | 6,42 | 35,47 | 165,42 | 30,09 |
| 4 | 66,60 | 125,92 | 1,15 | 31,03 | 236,92 | 59,04 |
| 5 | 59,03 | 111,85 | 35,80 | 36,00 | 195,14 | 51,64 |
| 6 | 75,69 | 70,43 | 14,09 | 39,24 | 137,15 | 67,92 |
| 7 | 67,88 | 128,15 | 20,83 | 21,31 | 115,21 | 150,25 |
| 8 | 75,11 | 381,66 | 0,00 | 39,49 | 147,82 | 61,88 |
| 9 | 62,25 | 153,63 | 16,82 | 40,41 | 432,31 | 42,64 |
| 10 | 56,45 | 128,36 | 4,94 | 44,16 | 185,72 | 5,48 |
| Modelo | K_{21} | T_{21} | L_{21} | K_{22} | T_{22} | L_{22} |
| 1 | 38,11 | 91,40 | 89,73 | 71,42 | 180,50 | 0,02 |
| 2 | 46,16 | 173,30 | 29,62 | 53,15 | 130,02 | 23,19 |
| 3 | 39,08 | 184,03 | 55,42 | 56,81 | 96,78 | 33,70 |
| 4 | 41,72 | 213,81 | 6,26 | 56,14 | 169,23 | 3,83 |
| 5 | 39,40 | 142,88 | 59,83 | 58,78 | 131,29 | 25,24 |
| 6 | 55,93 | 72,17 | 12,83 | 62,78 | 131,03 | 16,46 |
| 7 | 42,86 | 125,72 | 45,82 | 46,33 | 122,89 | 38,64 |
| 8 | 38,71 | 167,75 | 13,35 | 63,07 | 215,92 | 0,11 |
| 9 | 41,43 | 199,24 | 52,98 | 60,38 | 161,24 | 29,80 |
| 10 | 36,72 | 203,48 | 16,94 | 58,48 | 139,50 | 0,03 |

Fonte: Autoria própria.

onde $g_\infty = 7,2$, $g_0 = 0,7$ e $T = 200$ foi ajustado para que a condição $|W_2(j\omega)| > l(\omega)$ fosse satisfeita para todo ω . No gráfico da Figura 10 são apresentadas as magnitudes da resposta em frequência de W_2 e dos máximos valores singulares calculados utilizando a abordagem de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Figura 10 – Determinação da ponderação W_2 para as incertezas do modelo.

Fonte: Autoria própria.

4.4 Projeto do Controlador

O projeto do controlador se baseou na estrutura de controle \mathcal{H}_∞ apresentada na Figura 4. Uma função de transferência $W_1(s)$ foi definida para a ponderação do desempenho e, juntamente com $W_2(s)$ e o modelo nominal, foi calculada a matriz de transferência \mathbf{P} do modelo generalizado. Para levar em conta os atrasos temporais no modelo FOPTD do processo durante a transformação para o espaço de estados, foi utilizada uma aproximação de Padé de primeira ordem.

Após a realização em espaço de estados de \mathbf{P} , foi aplicada a condição do Teorema 3.3.1 para verificar a existência de um controlador dadas as especificações de projeto e o modelo nominal. Em seguida, foi resolvida a LMI expressa no teorema 3.3.2 para o cálculo dos parâmetros do modelo em espaço de estados do controlador. Por fim, foi verificada a condição de estabilidade robusta do sistema em malha fechada e realizados testes no módulo de temperatura.

Vale destacar que a matriz de transferência do modelo generalizado \mathbf{P} não satisfazia as condições 1, 2, 3 e 5 do projeto de controle \mathcal{H}_∞ por equações de Riccati. Por ser menos restritiva, a abordagem utilizando LMI pode ser aplicada nesse caso e possibilitou o projeto de um controlador robusto.

4.4.1 Especificação de Desempenho

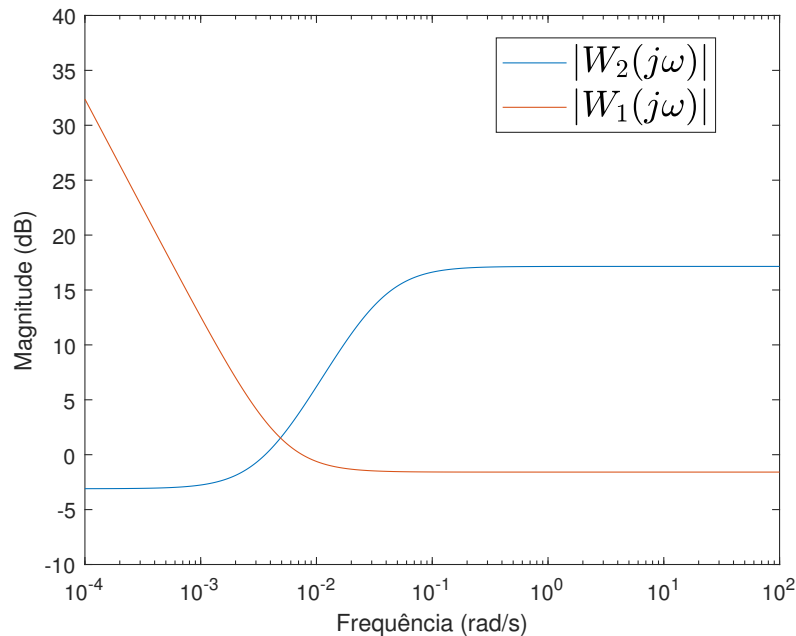
A especificação do desempenho no domínio da frequência é feita com a escolha apropriada da ponderação W_1 , que pode ter comportamento integrador para o rastreo de referências em degrau. No projeto do controlador para o sistema de temperatura, foi adotada uma estrutura de filtro passa-baixa de primeira ordem para W_1 , expressa por:

$$W_1(s) = \frac{1}{S_\infty} \frac{s + \omega_c}{s + 0,001\omega_c} \quad (4.4)$$

onde $S_\infty = 1,2$ foi ajustado como ponderação da função sensibilidade no regime permanente e $\omega_c = 1 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ é a frequência de corte. Na estrutura de controle adotada para o projeto utilizando \mathcal{H}_∞ , a ponderação W_1 deve ser uma função de transferência estável, o que impossibilita a escolha de um sistema integrador. Para contornar essa limitação, foi considerado um pólo estável em $-0,001\omega$, de forma que o comportamento em frequência fosse semelhante a de um integrador.

Na figura 11 são apresentadas as magnitudes das respostas em frequência das ponderações W_1 e W_2 para o projeto do controlador robusto.

Figura 11 – Magnitudes das repostas em frequência das ponderações de desempenho e incertezas.



Fonte: Autoria própria.

4.4.2 Sintonia do Controlador Utilizando LMI

Nesta etapa, os teoremas 3.3.1 e 3.3.2 foram implementados para avaliar as condições de existência do controlador e projetá-lo. Para aplicação do teorema de existência

considerou-se $\gamma = 1$ e as matrizes \mathbf{N}_c e \mathbf{N}_o são as bases do espaço nulo de $\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T \end{bmatrix}$, respectivamente.

A *toolbox* de LMI do MATLAB, foi utilizada como base para a implementação dos teoremas. As LMI's foram definidas em linha de comando e uma função nativa foi utilizada para solução do problema de viabilidade (GAHINET et al., 1995). A solução resulta nas matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} positiva definidas, que são utilizadas no teorema de síntese.

Na implementação do teorema de síntese, a matrix \mathbf{X}_2 foi calculada resolvendo a equação $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^T = \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1}$ aplicando a decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *singular value decomposition*).

O modelo generalizado do processo utilizando a aproximação de Padé possuía um total de 24 estados. Como a ordem do controlador projetado seria muito alta, foi aplicada uma técnica de redução de ordem disponível no MATLAB, que é baseada nos gramianos de controlabilidade e observabilidade (LAUB et al., 1987). O aproximação resultante foi o controlador representado pela seguinte matriz, em que cada elemento consiste em uma função de transferência de ordem 4:

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde:

$$K_{11}(s) \approx 0,0086 \frac{(s + 0,01)(s^2 + 0,42s + 0,06)}{s(s + 0,21)(s^2 + 0,58s + 0,12)} \quad (4.6)$$

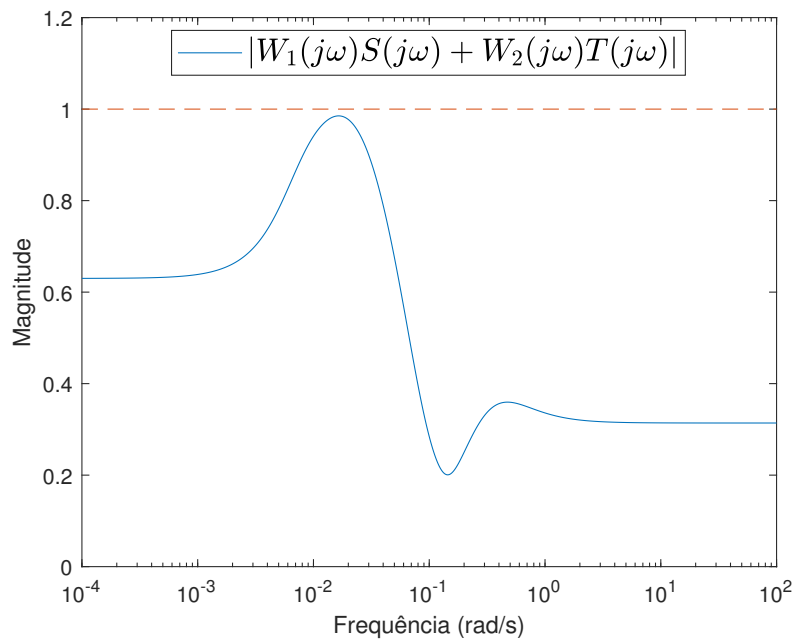
$$K_{21}(s) \approx 0,0074 \frac{(s - 0,07)(s + 0,03)(s + 0,22)}{s(s + 0,21)(s^2 + 0,58s + 0,12)} \quad (4.7)$$

$$K_{21}(s) \approx 0,0037 \frac{(s - 0,20)(s + 0,33)(s + 0,02)}{s(s + 0,21)(s^2 + 0,58s + 0,12)} \quad (4.8)$$

$$K_{22}(s) \approx 0,0161 \frac{(s + 0,01)(s^2 + 0,35s + 0,03)}{s(s + 0,21)(s^2 + 0,58s + 0,12)} \quad (4.9)$$

Para avaliar a robustez do controlador projetado, foram calculadas as funções de sensibilidade e sensibilidade complementar para aplicação na condição de desempenho robusto expressa no Teorema 2.1.3. Para isso foi obtida a magnitude da resposta em frequência da função $W_1\mathbf{S} + W_2\mathbf{T}$, expressa no gráfico da Figura 12.

Figura 12 – Verificação da condição de desempenho robusto com o controlador projetado.



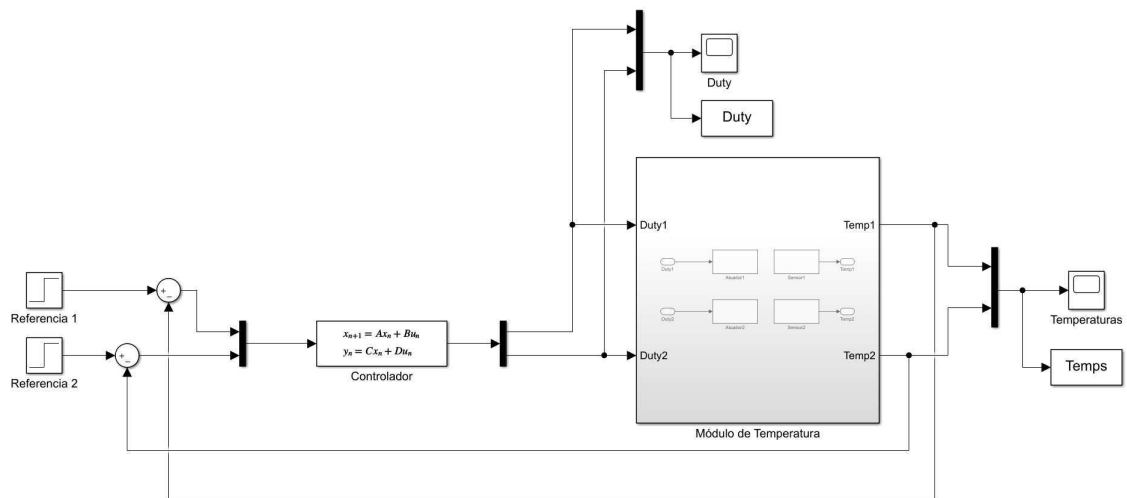
Fonte: Autoria própria.

Observou-se que a magnitude obtida da resposta em frequência era sempre abaixo de 1. Isto significa que o controlador projetado satisfaz a condição de desempenho robusto. O valor calculado da norma- ∞ foi de 0,985.

4.4.3 Experimento em Malha Fechada

Por fim, foi realizado um experimento em malha fechada com o sistema real para verificação do controlador projetado. Para implementação no microcontrolador, foi feita a discretização do modelo do controlador no espaço de estados utilizando segurador de ordem zero. Foi desenvolvido no Simulink o modelo ilustrado na Figura 13, que é utilizado na geração automática de código para o microcontrolador.

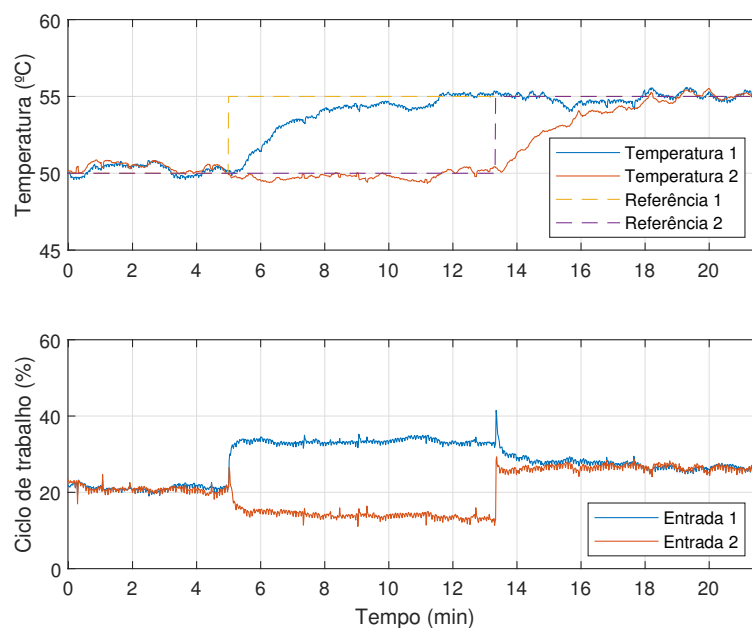
Figura 13 – Modelo utilizado para a geração automática de código na etapa de teste do controlador.



Fonte: Autoria própria.

Os testes realizados consistiram na aplicação de degraus com amplitudes iguais a $5\text{ }^\circ\text{C}$ na referência de cada malha, com um intervalo de 500 s de diferença, partindo do ponto de operação de $50\text{ }^\circ\text{C}$. Na figura 14 são apresentadas as temperaturas medidas e os sinais de controle. Verificou-se que o sistema em malha fechada é estável, foi capaz de seguir o sinal de referência e possui desacoplamento entre as malhas.

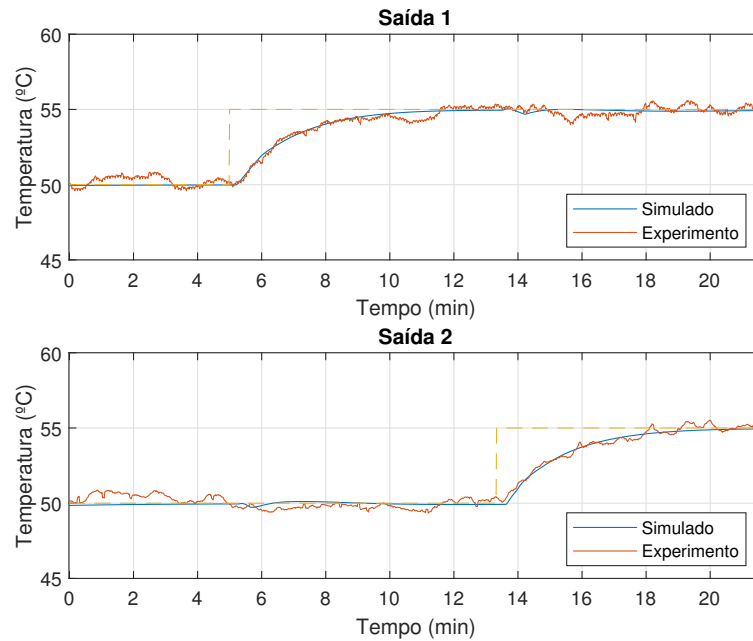
Figura 14 – Experimento em malha fechada.



Fonte: Autoria própria.

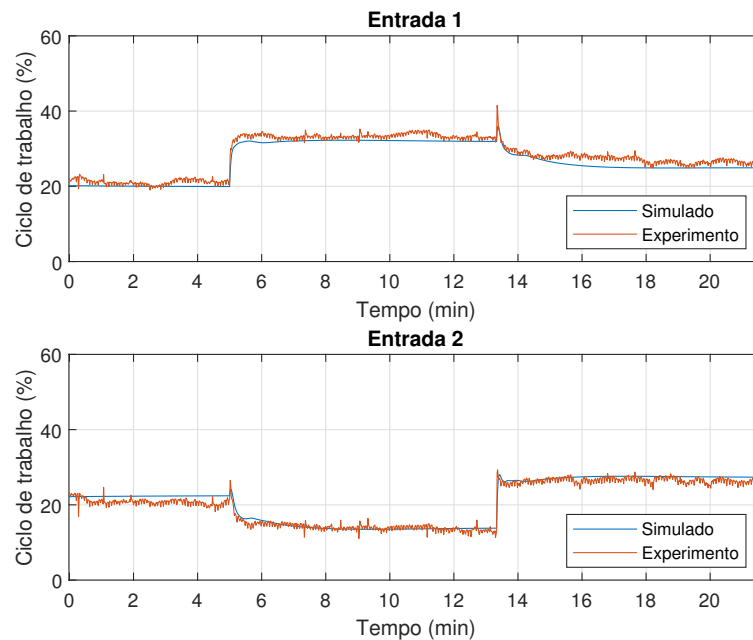
Para efeitos de comparação, foi simulado o sistema representado pelo modelo nominal em malha fechada com o controlador projetado. Nos gráficos das figuras 15 e 16 são exibidos as saídas e entradas dos resultados obtidos com os teste no sistema real e no simulado.

Figura 15 – Comparação entre as saídas dos resultados experimentais e simulados.



Fonte: Autoria própria.

Figura 16 – Comparação entre as entradas dos resultados experimentais e simulados.



Fonte: Autoria própria.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, foi apresentado o estudo e a aplicação de técnicas de projeto de controladores robustos utilizando desigualdades matriciais lineares. Foi abordada uma metodologia para projeto do controlador, desde a identificação do sistema e das incertezas até a validação e testes em malha fechada.

A teoria básica de controle ótimo e robusto foi apresentada, apontando os problemas existentes no LQG, que são contornados com as estratégias \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Foi dado maior enfoque ao controlador \mathcal{H}_∞ e suas técnicas de projeto utilizando equações de Riccati e a abordagem LMI. Baseado nesses conceitos foi feita a aplicação em uma planta didática, obtendo-se um controlador robusto.

Diante disso, os objetivos do trabalho foram alcançados, com a apresentação da base teórica necessária, bem como sua verificação prática durante a aplicação em um sistema real.

Com relação a trabalhos futuros, podem ser testadas outras ferramentas para solução das LMI's e demais métodos numéricos utilizados que produzam resultados mais precisos. Além disso, podem ser investigadas técnicas de projeto de controladores de ordem fixa utilizando técnicas de otimização convexa para se evitar a necessidade da aplicação posterior de técnicas de redução de ordem.

Referências

- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: Society for Industrial Mathematics, 1997. (Studies in Applied and Numerical Mathematics). Citado na página 20.
- DORATO, P.; CERONE, V.; ABDALLAH, C. *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. New York, NY, USA: Simon & Schuster, Inc., 1994. Citado 6 vezes nas páginas 1, 8, 9, 10, 11 e 15.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. *Feedback Control Theory*. [S.l.]: Macmillan Coll Div, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 1, 3 e 6.
- DOYLE J.; STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 24, p. 607–611, 1979. Citado na página 12.
- DULLERUD, G. E.; PAGANINI, F. *A Course In Robust Control Theory*. 1st ed. 2000. corr. 2nd printing. ed. [S.l.]: Springer, 2010. (Texts in Applied Mathematics). Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 22.
- GAHINET, P. et al. *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*. 1. ed. Natick, 1995. Citado na página 33.
- LAUB, A. et al. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 32, p. 115–122, 1987. Citado na página 33.
- LIMA, A. B. D.; BARROS, P. R.; ACIOLI JÚNIOR, G. Módulo didático para ensino de teoria de controle. In: *Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*. [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 26.
- MACKENROTH, U. *Robust Control Systems: Theory and Case Studies*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 1, 12, 14 e 18.
- RAMOS, E. T. G. et al. Controle descentralizado por desacoplamento aplicado a um módulo didático multivariável. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. [S.l.: s.n.], 2019. Citado na página 25.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 3, 4, 5, 11, 27 e 30.