UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

JOSÉ DE BRITO SILVA

Cuité - PB

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

JOSÉ DE BRITO SILVA

Cuité - PB

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586t Silva, José de Brito.

O teorema de ponto fixo de Banach e aplicações. / José de Brito Silva – Cuité: CES, 2011.

59 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2011.

Orientadora: Maria Cristina Silva Brito.
Co-orientadora: Maria Criśelia Vasconcelos.

1. Ponto fixo. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Picard. I. Título.

CDU 514.745.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

José de Brito Silva

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 08 de dezembro de 2010.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Maria Giselia Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)

Severino Horácio da Silva
Prof. Severino Horácio da Silva

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por esta conquista em minha vida. Sem o seu auxílio eu não teria conseguido.

À minha família e, em especial, aos meus pais Olivaldo e Josefa de Brito, e irmãos Luciano e Janaina.

À todos os meus amigos pela participação direta e indireta, meus sinceros agradecimentos. Em especial a Jackney Luan e Jarbas Dantas colegas de curso e de TCC.

À professora Márcia Cristina, pela orientação e o imenso incentivo neste trabalho. Ter trabalhado com ela foi um imenso prazer para mim.

À professora Gisélia Vasconcelos, por toda sua dedicação como co-orientadora, pelas sugestões feitas. Sem dúvidas também foi um imenso prazer trabalhar com ela.

Ao professor Severino Horácio Por fazer parte da banca examinadora é um imenso prazer.

À todos os professores de matemática.

À minha namorada Junara Almeida, pelo carinho e compreensão.

Por último e não menos especiais a todos os funcionários do campus.

"Para criar uma filosofia só é preciso renunciar à metafísica e tornar-se apenas um bom matemático."

Bertrand Russel

Resumo

O teorema do ponto fixo de Banach é um resultado sobre espaços métricos, com muitas aplicações, particularmente para se demonstrar a existência de soluções de equações diferenciais. Na verdade, muitos problemas na matemática se reduzem a encontrar pontos fixos de uma aplicação.

O objetivo deste trabalho é apresentar o teorema do ponto fixo, e considerar uma importante aplicação desse teorema nas EDO's, isto é, usaremos o teorema do ponto fixo de Banach para provar o famoso Teorema de Existência e Unicidade de Picard.

Palavras-chave: Ponto fixo; Equações diferenciais ordinárias; Picard.

Abstract

The fixed point theorem Banach is a result on metric spaces, with many applications, particularly to demonstrate the existence of solutions of differential equations. In fact, many problems in mathematics are reduced to finding fixed points of a application.

The objective of this work is to present fixed point theorem, and consider an important application of this theorem in ODE's, ie, we use the fixed point theorem for Banach prove the famous theorem of existence and uniqueness of Picard.

Keywords: Fixed point; contractions; ordinary differential equations..

Conteúdo

Introdução

Em matemática o teorema do **Ponto Fixo de Banach**, também conhecido como **Princípio da Contração**, é um dos resultados fundamentais em espaços métricos.

O Teorema de Ponto Fixo de Banach foi estabelecido por Banach em 1922. Uma das razões de sua importância reside no fato de fornecer, junto com seu enunciado, um método iterativo aproximativo para a determinação do ponto fixo, método este que é muito eficiente. Outra razão é o fato de o teorema reunir condições que garantem unicidade do ponto fixo.

Iremos tratar de uma das mais importantes aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach, a saber, a teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO's). O resultado que obteremos é o celebre Teorema de Picard-Lindelof que fornece condições suficientes para existência e unicidade de soluções de EDO's.

Aplicaremos o teorema do ponto fixo de Banach para analisar a existência e unicidade da solução do seguinte problema de valor inicial ou problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Resolver o Problema de Valor Inicial significa encontrar uma função x definida em torno de t_0 de modo que satisfaça a equação diferencial e cumpra a condição inicial dada. Provaremos que sob certas condições gerais o problema de Valor Inicial que mencionamos possui apenas uma solução única. Cabe salientar que toda a teoria pode ser aplicada igualmente ao caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Pois um sistema de equações diferenciais pode ser visto como uma única equação vetorial. As equações diferenciais que aparecem com maior freqüência em física e em geometria são de ordem dois. Felizmente, toda a teoria sobre existência e unicidade que precisamos para equações diferenciais de ordem superior se deduz do caso de ordem um. De fato, basta transformar a equação diferencial de ordem superior a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Originalmente, a demonstração de existência e unicidade de soluções para EDOs se deve a Lindelof [1]. Entretanto, o método [2] que aplicaremos aqui para a sua demonstração, fazendo uso explícito do Teorema de Ponto Fixo de Banach, deve-se a Picard [3]. Esses trabalhos datam da década de 90 do Século XIX.

[1] Ernest Leonard Lindelof (1870-1946)

[2] Chamado de Método das aproximações sucessivas

[3] Charles Émile Picard (1856-1941)

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Equação Diferencial Ordinária

Uma equação da forma $F(t, x, x^1, \ldots, x^m) = 0$, onde a incóngnita x é uma função de uma variável, é chamada de equação diferencial ordinária. Muitas leis da Física, Biologia e Economia encontram uma expressão natural em equações diferenciais, mas também várias questões dentro da própria Matemática, como topologia, Geometria Diferencial e Cálculo das variações, são formuladas por equações diferenciais ordinárias ou se reduzem a elas.

A evolução do estudo das EDO's confunde-se com a da Matemática. Tal evolução fica clara quando investigamos o conceito de solução ao longo dos séculos.

O primeiro conceito de solução é o de uma função explícita e elementar. Com o desenvolvimento da Análise passou-se a considerar soluções funções que pudessem ser expressas de maneiras mais gerais. Por exemplo funções dadas por integrais ou por séries de potências podem ser estimadas por métodos numéricos, o que para problemas práticos é mais do que suficiente.

Ao longo dos anos houve também uma tentativa de algebrização do problema através da Transformada de Laplace. O único inconveniente é que tal processo cai no problema de achar raízes de polinômios de grau muitas vezes superior a cinco.

Pode-se afirmar que as equações diferenciais surgiram a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos.

O estudo das equações diferenciais teve início com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral formulados por Newton e Leibniz, no final do século XVII.

Ainda que Newton tenha trabalhado pouco na área de equações diferenciais, seu desenvolvimento do cálculo e a compreensão dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicacão das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler.

Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli contribuíram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações. Ambos contribuíram significativamente em diversas áreas da matemática. Com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais.

Taylor, em seus estudos, introduziu o uso de séries na resolução de equações diferenciais. Esta técnica desenvolvida por ele também foi usada em outros problemas por alguns matemáticos. No início do século XVIII, Taylor, dentre outros matemáticos, conseguiram acumular muitos conhecimentos a cerca de equações diferenciais, no entanto, ainda eram insuficientes uma vez que muitas dessas equações não possuíam soluções e tinham suas propriedades desconhecidas. Eram muitas descobertas em casos particulares, mas não havia uma teoria geral, até então.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Topologia

Definição 2.1.1 *Dado um conjunto M , dizemos que uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma* **métrica** *em M se a cada par de pontos $x, y \in M$ associa um número real $d(x, y)$, a* **distância** *entre x e y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

i) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Exemplo 2.1.1 *Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a função*

$$\begin{aligned} d: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ &\to \mathbb{R} \\ (x, y) \ &\mapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

i) Se $x \neq y$ então $x - y \neq 0$ e portanto, $|x - y| > 0$, isto é, $d(x, y) > 0$ e $d(x, x) = |x - x| = 0$

ii) $d(x, y) = |x - y| = |(-1|y - x|)| = 1|y - x| = d(y, x)$

iii) Sejam x, y, z números reais quaisquer. Sabemos da desigualdade triangular que

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

Exemplo 2.1.2 *Seja M um conjunto qualquer não vazio e defina a função*

$$\begin{aligned} d: \ M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \begin{cases} 0, & se\ x = y \\ 1, & se\ x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

i) Por definição, $d(x,x) = 1 > 0$ sempre que $x \neq y$ e $d(x,x) = 0$ para qualquer $x \in M$.

ii) Claramente $d(x,y) = d(y,x)$ uma vez que $x = y \Leftrightarrow y = x$ e $x \neq y \Leftrightarrow y \neq x$.

iv) Sejam x, y, z elementos quaisquer em M. Então

$$d(x,z) = 0 \ ou \ d(x,z) = 1$$

$$d(x,y) = 0 \ ou \ d(x,y) = 1$$

$$d(y,z) = 0 \ ou \ d(y,z) = 1$$

Assim,

$$d(x,z) + d(y,z) = 0 \ ou \ d(x,z) + d(y,z) = 1 \ ou \ d(x,z) + d(y,z) = 2.$$

E de toda forma,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z).$$

Desta maneira, temos uma métrica, chamada **métrica zero-um**. *Isto mostra que em qualquer conjunto não vazio podemos definir uma métrica.*

Exemplo 2.1.3 *Considerando $M = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$, há três métricas "naturais"definidas em M:*

$$\begin{aligned}
d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \\
d' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto d'(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \cdots + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto d''(x,y) = max\{|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \cdots + |x_n-y_n|\}
\end{aligned}$$

As condições (i), (ii) e (iii) que caracterizam uma métrica podem ser facilmente provadas para d, d' e d''

Proposição 2.1.1 *Sejam d, d' e d'' as métricas naturais definidas em $\mathbb{R}^n$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos:*

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq nd''(x,y)$$

Prova Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k|$$

para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como

$$|x_k - y_k| = \sqrt{(x_k-y_k)^2} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_k-y_k)^2} = d(x,y)$$

segue que

$$d''(x,y) \leq d(x,y)$$

Observe ainda que

$$d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k|$$

implica que $|x_i - y_i| \leq |x_k - y_k|$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| \\ &\leq |x_k - y_k| + |x_k - y_k| + \ldots + |x_k - y_k| = n \cdot |x_k - y_k| \\ &= n \cdot d''(x,y) \end{aligned}$$

Resta ver que

$$d(x,y) \leq d'(x,y)$$

para isso, note que

$$[d(x,y)]^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$$

enquanto

$$\begin{aligned} [d'(x,y)]^2 &= [|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|]^2 \\ &= |x_1 - y_1|^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot \left[\sum_{i=2}^{n} x_i - y_i|\right] + \left[\sum_{i=2}^{n} x_i - y_i|\right]^2 \\ &= |x_1 - y_1|^2 + \left[\sum_{i=2}^{n} x_i - y_i|\right] + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot \left[\sum_{i=2}^{n} x_i - y_i|\right] \end{aligned}$$

Desenvolvendo $\left[\sum_{i=2}^{n} |x_1 - y_1|\right]^2$, termos

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|\right]^2 &= [|x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|]^2 \\ &= |x_2 - y_2|^2 + 2 \cdot |x_2 - y_2| \cdot \left[\sum_{i=3}^{n} x_i - y_i|\right] + \left[\sum_{i=3}^{n} x_i - y_i|\right]^2 \end{aligned}$$

Repetindo o processo, teremos

$$[d''(x,y)]^2 = |x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2 + \Gamma$$

onde $\Gamma \geq 0$. Desta forma

$$[d''(x,y)]^2 = [d(x,y)]^2 + \Gamma$$

e portanto

$$[d''(x,y)]^2 \leq [d'(x,y)]^2$$

que implica em

$$d(x,y) \leq d'(x,y)$$

uma vez que d, d' são não negativos.

$\square$

Exemplo 2.1.4 *As métricas d; d' e d'' no plano $\mathbb{R}^2$ são equivalentes, pois todo disco contém um quadrado com diagonais paralelas aos eixos, o qual contém um quadrado de lados paralelos aos eixos e este, por sua vez, contém um disco, etc., todas essas figuras com o mesmo centro.*

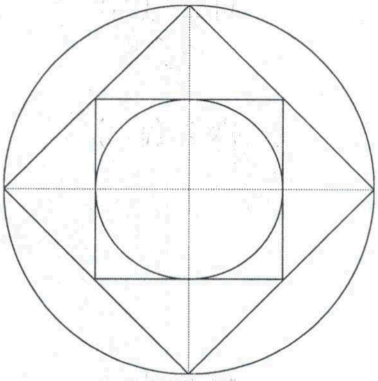

Figura 2.1: Bolas no $\mathbb{R}^2$, em relação as métricas d, d' e d''.

Definição 2.1.2 *Dado um conjunto não vazio M e uma métrica d definida em M, o par (M,d) será chamdo de* **espaço métrico**.[1]

[1] O conceito de espaço métrico é devido a Maurice Fréchet, que o introduziu em 1906, em sua famosa tese, juntamente com outras noções que se tornaram clássicas em Topologia.

Os elementos de um espaçoo métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas, chamaremos sempre de **pontos de** M.

Um subconjunto S qualquer de um espaço métrico (M, d) é, por sua vez, um espaço métrico natural com a métrica restrita a pares de pontos de S, dizemos que a restrição é a métrica induzida e que (S, d) é um subespaço métrico de (M, d).

Sequências

Definição 2.1.3 *Uma sequência em* M *é uma função* $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto x_n$ *denotada por* x_n *ou* $\{x_n\}$.

Exemplo 2.1.5 *Se definirmos* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *pondo* $x_n = (-1)^n$, *então obtemos a sequência* $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$, *cujo o conjunto de valores é* $\{-1, 1\}$.

Definição 2.1.4 *Uma sequência* $\{x_n\}$ *é dita uma* **subsequência** *de uma sequência* $\{y_n\}$ *se valer* $x_n = y_{k_n}$ *para cada* n *e alguma escolha crescente* $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ *de índices.*

Exemplo 2.1.6 *A sequência* $(4, 16, 64, \ldots, 4^k, \ldots)$ *é uma subsequência de* $(2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots)$.

Definição 2.1.5 *Sejam* (M, d) *um espaço métrico,* $a \in M$ *e* $\{x_n\}$ *uma sequência em* M. *Dizemos que* $\{x_n\}$ **converge** *para um ponto* $x \in M$, *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe um número natural* n_0 *tal que* $d(x_n, x) < \epsilon$, *para todo* $n \geq n_0$.

Exemplo 2.1.7 *:*

1. A sequência em $\mathbb{R}$ *definida por* $x_n = 1/n$ *converge para* $x = 0$, *pois dado* $\epsilon > 0$ *arbitrário, a propriedade arquimediana dos reais garante que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0\epsilon > 1$, *isto é* $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. *Mas, se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq n_0$, *então* $1/n < 1/n_0 < \epsilon$.

Temos que,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

2. A sequência definida por $x_n = (-1)^n$ *não é convergente.*

Definição 2.1.6 *Um subconjunto de um espaço métrico é um* **conjunto fechado** *de M se ele contém o limite de toda sequência convergente de pontos do subconjunto.*

Exemplo 2.1.8 *Se M é a reta real com a métrica euclidiana $d(x, y) = |x-y|$, então todo intervalo fechado $[a, b]$ é fechado em $\mathbb{R}$. Por outro lado, o intervalo aberto $(0, 1)$ não é fechado pois a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ de pontos de $(0, 1)$ converge a 0 mas $0 \notin (0, 1)$. É claro que o intervalo é aberto em $\mathbb{R}$, bem como qualquer outro intervalo aberto.*

Definição 2.1.7 *Seja (M, d) um espaço métrico.*

a) A **bola aberta** *de centro em a e raio r é o conjunto $B(a, r)$ dos pontos $x \in M$, tais que, a distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,*

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

b) A **bola fechada** *de centro em a e raio r é o conjunto $\overline{B(a, r)}$, formada pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Ou seja,*

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

c) A **esfera** *de centro em a e raio r é o conjunto $S(a, r)$, formada pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, a) = r$. Assim,*

$$S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Exemplo 2.1.9 *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, pois a condição $|x - a| < r$ equivale $-r < x - a < r$, ou seja: $a - r < x < a + r$.*

Analogamente, $\overline{B(a, r)}$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$. e a "esfera"$S(a, r)$ tem apenas dois pontos: $a - r$ e $a + r$.

Exemplo 2.1.10 *No plano $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a, r)$ é o interior de um círculo de centro a e raio r, ou o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, ou* *então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$.*

A esfera $S(a,r)$ é o bordo da figura correspondente e $\overline{B(a,r)}$ é igual a $B(a,r) \cup S(a,r)$.

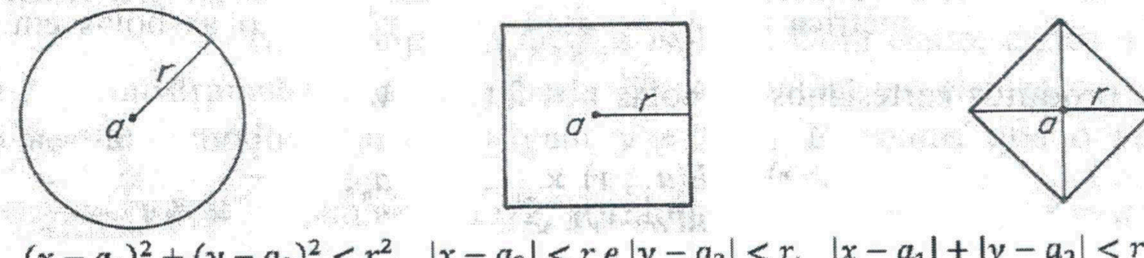

Figura 2.2: Bolas no $\mathbb{R}^2$, em relação as métricas d, d' e d''.

Nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ a bola fechada $\overline{B(a,r)}$ é o menor subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ que contém a bola aberta $B(x,r)$.

Definição 2.1.8 *O* **fecho** $\bar{C}$ *de um conjunto $C \subseteq M$ é o menor conjunto fechado de M que contém C.*

Definição 2.1.9 *Dizemos que um ponto $x \in M$ é um ponto* **aderente** *a C se existe uma sequência x_n de pontos de C tal que $\lim x_n = x$ em M.*

Definição 2.1.10 *Dizemos que $C \subseteq M$ é um conjunto* **denso** *em M se $\bar{C} = M$.*

Definição 2.1.11 *Um ponto $x \in C$ é dito* **ponto isolado** *se é o centro de uma bola aberta de M que só contém um único ponto de C (a saber, o centro da bola).*

Definição 2.1.12 *Dizemos que o* **interior** *$int(C)$ de um conjunto $C \subseteq M$ é o maior conjunto aberto de M contido em C.*

Definição 2.1.13 *Dizemos que o ponto $x \in M$ é* **ponto interior** *de C, se existir $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq X$.*

Definição 2.1.14 *Dizemos que o ponto $x \in m$ é* **ponto de fronteira** *de C, se existem duas sequências, uma de pontos de C e outra de pontos do complementar $M - C$ de C tais que ambas têm x como limite.*

A **fronteira** *de um conjunto C de M é o conjunto ∂C de todos seus pontos de fronteira.*

Exemplo 2.1.11 *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. O interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. Por outro lado a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$ porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.*

Os conceitos de conjunto aberto e fechado, bem como de interior e fecho, não são intrínsecos, ou seja dependem do espaço ambiente.

Definição 2.1.15 *Uma* **cisão** *de uma espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, de M como a reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ equivalem a dizer que $A = M - B$ e $B = M - A$. Por conseguinte, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M.*

Exemplo 2.1.12 $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *é uma cisão do espaço métrico* $\mathbb{R} - \{0\}$

A cisão $M = A \cup B$ diz-se **trivial** quando um dos abertos A ou B, é vazio(e portanto o outro é igual a M). Assim a cisão trivial é $M = M \cup \emptyset$.

Definição 2.1.16 *Um espaço métrico M chama-se* **conexo** *quando a única cisão possível em M é a trivial. Quando M admite a cisão não-trivial dizemos que M é* **desconexo**.

Em particular, o espaço métrico M todo é desconexo se puder ser escrito como a união de dois abertos disjuntos e não-vazios. Nesse caso, cada um desses dois abertos é também fechado (por ser complementar de um aberto). O conjunto vazio e o espaço métrico todo sempre são abertos e tembém fechados, mas nos espaços conexos não existem outros conjuntos com essas propriedades.

Exemplo 2.1.13 *O conjunto dos números racionais é desconexo e enumerável e o conjunto dos números irracionais é desconexo e não-enumerável.*

Definição 2.1.17 *Dizemos que um subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ é um* **intervalo** *se, dado quaisquer $x < z < y$ tais que $x, y \in I$, necessariamente vale $z \in I$.*

Exemplo 2.1.14 *A reta $\mathbb{R}$ é conexa.*

2.2 Espaços Métricos: Compactos e Completos

A partir do conceito de convergência de sequências, podemos apresentar os dois tipos mais importantes de espaços métricos, a saber, os compactos e os completos. Enquanto o conceito de compacidade é topológico (ou seja, é possível definir compacidade em espaços topológicos que não são métricos), o de completude de um conceito eminentemente métrico.

Definição 2.2.1 *Dizemos que um subconjunto de um espaço métrico M é* **limitado** *se ele cabe em uma bola de M.*

Uma sequência $\{x_n\}$ é limitada se o conjunto formada pelos seus pontos é limitado, ou seja, se existem um ponto $a \in M$ e um número real $r > 0$ tais que $d(x_n, a) \leq r$ para cada n.

Proposição 2.2.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova:

Seja x_n uma sequência tal que $x_n \to a$. Então fixando $\epsilon = 1$ temos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$;

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1$$

Logo $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + a$.

Tmando $M = max\{|x_1|, \ldots, |x_{n0-1}|\}$ e escolhendo $K = max\{M, 1 + |a|\}$ temos $x_n < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

A recíproca não vale: a sequência real $\{(-1)^n\}$ é limitada e não é convergente.

Definição 2.2.2 *Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em M. Dizemos que x_n é* **de Cauchy**, *se para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para quaisquer $n.m \geq n_0$.*

Exemplo 2.2.1 *A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy pois, se $\epsilon > 0$ é dado, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0\epsilon > 2$, cuja a existência é garantida pela a Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$. Então*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Teorema 2.2.1 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Prova:

Seja $\lim x_n = x$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ donde $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

□

Lema 2.2.0.1 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Prova:

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Tomando $\epsilon = 1$, obteremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Em particular, $n > n_0 \Rightarrow d(x_{n_0}, x_n) < 1$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x_{n_0+1}\}$. Enão $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é limitada.

□

Lema 2.2.0.2 *Se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$ então $x_n \to a$.*

Prova:

Seja $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequência que converge para $a \in M$. Dado $\epsilon > 0$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$ implique que $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Fixe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > N$ e $d(x_{n_k}, a) < \epsilon$. Assim, para todo $n > N$ tem-se que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

o que prova a convergência $x_n \to a$. $\square$

Exemplo 2.2.2 *A mesma sequência definida por $x_n = \frac{1}{n}$ que converge no espaço métrico $\mathbb{R}$- para o ponto $0 \in \mathbb{R}$- e que portanto é de Cauchy, não é convergente no espaço métrico $(0, 1)$, já que nesse espaço métrico não existe ponto algum para o qual ela possa convergir. Logo, a sequência $(\frac{1}{n})$ do espaço métrico $(0, 1)$ é de Cauchy sem ser convergente.*

Exemplo 2.2.3 *(Método das aproximações sucessivas). Seja $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que a sequência (x_n) seja tal que $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n+1}, x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim (x_n) é uma sequência de Cauchy, e, portanto converge.*

Com efeito, temos $d(x_3, x_2) \leq \lambda d(x_2, x_1)$, $d(x_4, x_3) \leq \lambda^2 d(x_2, x_1)$, e em geral,$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^{n-1} d(x_2, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, vale

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \cdots + \lambda^{n-1}) d(x_2, x_1) \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \cdots + \lambda + 1) d(x_2, x_1) \\ &= \lambda^{n-1} \cdot \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \cdot d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot d(x_2, x_1) = 0,$$

segue-se, que para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot d(x_2, x_1) < \epsilon.$$

Daí resulta que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, dx_n) < \epsilon$. (Pois podemos sempre supor $m \geq n$ e escrever $m = n + p$.)

Definição 2.2.3 .

Um espaço métrico (M, d) é dito **completo** *se toda sequência de Cauchy for convergente. Um espaço vetorial normado é dito* **espaço de Banach** *se for completo.*

Exemplo 2.2.4 *$\mathbb{R}^n$ é completo com a métrica euclidiana.*

Exemplo 2.2.5 *Se M é compacto então (M, d) é completo.*

Com efeito, toda sequência de Cauchy em M tem uma subsequência convergente e a própria sequência converge.

Exemplo 2.2.6 *Seja $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, induzida da reta, P não é completo, pois $(1/n)$ é uma sequência de Cauchy não convergente em P.*

Um espaço métrico completo é compacto se, e somente se, é totalmente limitado.

Definição 2.2.4 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$.*

a) Uma cobertura de K é uma coleção de abertos $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

b) K é dito compacto se toda cobertura tiver uma subcobertura finita.

Séries

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, formemos a **soma parcial** (ou reduzida) $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Se existe $a \in E$ tal que $a = \lim_{n \to \infty} S_n$, dizemos que a é a soma da série $\sum x_n$, e escrevemos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

Neste caso, a série $\sum x_n$ diz-se **convergente**. Quando a sequências das somas parciais S_n não possui limite em E, dizemos que a série $\sum x_n$ é **divergente**.

Uma condição necessária para a convergência da série $\sum x_n$ é que se tenha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Com efeito, se $a = \lim\limits_{n} S_n$, então $a = \lim\limits_{n} S_{n-1}$ também. Como $x_n = S_n - S_{n-1}$, temos:

$$\lim_n x_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = a - a = 0$$

Esta condição não é suficiente.

Exemplo 2.2.7 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

chamada **Série Hamônica**. *Seu termo geral* $a_n = \frac{1}{n}$ *tem limite zero, no entanto a série diverge. De fato, consideremos a sua reduzida* s_{2^n} *de ordem* 2^n

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}^{2^{n-1} parcelas} >$$

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} parcelas\ iguais\ a\ \frac{1}{2^n}}$$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n}}_{n\ parcelas\ iguais\ a\ \frac{1}{2}} = 1 + n\frac{1}{2}.$$

Vemos assim que a subsequência $\{s_{2^n}\}$ *de* $\{s_n\}$ *cresce arbitrariamente, e, consequentemente, a sequencia* $\{s_n\}$ *também cresce.*

Segue-se que $\{s_n\}$ *não é uma sequência convergente e portanto a série harmônica diverge.*

Exemplo 2.2.8 *Dado* q *um número real ou complexo, consideremos a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. *Se* $|q| < 1$ *a* **série geométrica** *converge e sua soma é igual a* $(1-q)^{-1}$.

Com efeito,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n,$$

tem-se $S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$, *donde* $S_n = (1-q)^{-1} \cdot (1 - q^{n+1})$. *Como* $|q| < 1$ *temos que* $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ *e portanto* $\lim S_n = (1-q)^{-1}$.

Teorema 2.2.2 *A série* $\sum x_n$ *converge se, e somente se, dado abitrário* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 = n_0(\epsilon)$ $\in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m > n_0$ *implicar que* $\left|\sum\limits_{i=m+1}^{n} x_i\right| < \epsilon$.

Prova. Seja $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Então

$$\begin{aligned}
\sum x_n \textit{converge} &\Leftrightarrow \lim s_n = s \\
&\Leftrightarrow (s_n) \text{ é de Cauchy} \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\epsilon);\ n, m > n_0 \Rightarrow |s_n - s_m| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| < \epsilon
\end{aligned}$$

2.3 Aplicações Contínuas em Espaços Métricos

A continuidade é um conceito topológico e as aplicações contínuas são caracterizadas por preservar limites de sequências convergentes. O conceito de continuidade de aplicações entre espaços métricos pode ser introduzido através de convergência de sequências.

Suponhamos que (M_1, d_1) e (M_2, d_2) são dois espaços métricos; as bolas de M_i são denotadas por $B_i(r, x)$.

Definição 2.3.1 *Dada uma aplicação* $f : M_1 \to M_2$ *de* M_1 *em* M_2, *dizemos que* f *é uma* **aplicação contínua** *se a imagem por* f *do limite de qualquer sequência convergente em* M_1 *é o limite da sequência dada pelas imagens de* f *dos pontos da sequência; isto é,* f *é contínua se*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

para cada sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos de M_1.

Proposição 2.3.1 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ contínua. Se M é compacto então $f(M)$ é compacto.*

Prova:

Seja (y_n) uma sequência em $f(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in M$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como M é compacto, podemos obter uma subsequêcia convergente $x_{n_k} \to x \in M$. Sendo f contínua, temos $\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(M)$. Logo $F(M)$ é compacto, pois toda sequência de pontos de $f(M)$ possui uma subsequência que converge para um ponto de $f(M)$.

□

Toda aplicação contínua num conjunto compacto é uma **aplicação limitada**, ou seja, a imagem é um conjunto limitado.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua e N é um subconjunto compacto do espaço métrico M, então f é limitada em N, ou seja , $|f(x)| \leq r$ para cada $x \in N$ e alguma constante r. Mais que isso, por ser $f(N) \subseteq \mathbb{R}$ fechado, existe $x_0 \in N$ tal que $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ para cada $x \in N$.

O supremo de uma função real contínua num compacto é um máximo:

$$\sup_{x \in N} |f(x)| = \max_{x \in N} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

Definição 2.3.2 *Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ contínua e bijetora é um* **homeomorfismo** *se a aplicação inversa $f^{-1} : M_2 \to M_1$ também é contínua.*

Os homeomorfismos são os **isomorfismos** da topologia dos espaços métricos, pois preservam os conjuntos abertos dos dois espaços.

Dois espaços métricos homeomorfos são topologicamente indistiguíveis.

Definição 2.3.3 *Dizemos que duas métricas d_1 e d_2 num mesmo conjunto M são* **equivalentes** *se a aplicação identidade $I_M : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é um homeomorfismo.*

Assim, os abertos, fechados compactos e conexos de M são rigorosamente os mesmos, quer em relação a d_1, quer em relação d_2.

Exemplo 2.3.1 *As métricas d, d' e d'' no plano $\mathbb{R}^2$ são equivalentes.*

A continuidade é um conceito topológico e as aplicações contínuas são caracterizadas por preservar limites de sequências convergentes. Uma versão métrica local da continuidade pode ser enunciada assim:

Proposição 2.3.2 *Uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$ do espaco métrico (M_1, d_1) no espaço métrico (M_2, d_2) é contínua se, e somente se, para cada $x \in M_1$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(B_1(x, \delta)) \subseteq B_2(f(x), \epsilon),$$

ou seja, tal que $d_2(f(y), f(x)) < \epsilon$ para cada $y \in M_1$ que satisfaz $d_1(y, x) < \delta$.

Prova:

Suponha que f satisfaça a condição dada e seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente, com limite x; queremos mostrar que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_2(f(y), f(x)) < \epsilon$ se $d_1(y, x) < \delta$. Para tal δ existe $N > 0$ tal que $d_1(x_n, x) < \delta$ se $n \geq N$, pois $\lim x_n = x$. Logo, $d_2(f(x_n), f(x)) < \epsilon$ sempre que $n \geq N$ e, assim, vemos que a sequência $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Temos, então, que f é contínua.

A demonstração da recíproca é por contraposição. Supondo que f não satisfaça a condição dada, existem $x \in M_1$ e $\epsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer $\delta > 0$ existe $y = y\delta \in M_1$ tal que $d_1(y, x) < \delta$ mas $d_2(f(y), f(x)) \geq \epsilon_0$. Logo, para cada δ da forma $\frac{1}{n}$, existe x_n tal que $d_1(x_n, x) < \frac{1}{n}$ mas $d_2(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon_0$. Assim, a sequência definida por x_n converge a x em M_1 mas $0 < \epsilon_0 \leq d_2(f(x_n), f(x))$ mostra que a sequência definida por $f(x_n)$ não converge a $f(x)$ em M_2 e portanto f não é contínua.

□

Definição 2.3.4 *Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ é* **lipschitziana** *se existe uma constante $\lambda > 0$, denominada* **constante de Lipschitz** *de f, tal que*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M_1$.

Exemplo 2.3.2 *Dada uma $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $\lambda > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Neste caso, f é contínua. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon/\lambda$. Então*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) < \lambda \cdot \delta = \epsilon.$$

As propriedades topológicas se distiguem das propriedades métricas de M, que são preservadas pelas isometrias.

Definição 2.3.5 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se uma* **imersão isométrica** *quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. No caso, diz-se que f preserva distâncias.*

Definição 2.3.6 *Uma* **isometria** *é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

Definição 2.3.7 *Um* **caminho** *num espaço métrico M é uma aplicação $\xi : I \to M$ de um intervalo real $I \subseteq \mathbb{R}$; se $I = [a, b]$, dizemos que $\xi(a)$ é o ponto inicial do caminho, $\xi(b)$ é o ponto final e que ξ liga esses dois pontos em M.*

Exemplo 2.3.3 *O caminho $\xi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, definido por $\xi(t) = (1 - t)x + ty$, chama-se caminho retilíneo que liga x a y.*

Definição 2.3.8 *Dizemos que um subconjunto C de um espaço métrico M é um conjunto* **conexo por caminhos** *se quaisquer dois pontos de C podem ser ligados por um caminho contínuo cuja a imagem está toda em C.*

Continuidade Uniforme

Além de limites de sequências (variável discreta), utilizamos, limites de funções (variável contínua).

Definição 2.3.9 *Dados uma aplicação $f : C \to M_2$ definida num conjunto $C \subseteq M_1$, um ponto $\bar{x} \in M_1$ aderente a C e $y \in M_2$, dizemos que y é o* **limite** *da aplicação f em $\bar{x}$, e escrevemos*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = y,$$

se $\lim f(x_n) = y$ para cada sequência $\{x_n\}$ de pontos de C tal que $x_n \neq \bar{x}$ e $\lim x_n = \bar{x}$.

Quando $\bar{x} \in C$, afirmar que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = y$ equivale a afirmar que f é contínua em $\bar{x}$ e $f(\bar{x}) = y$.

A mera continuidade não basta para preservar sequências de Cauchy.

Exemplo 2.3.4 *A função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua mas a imagem da sequência de Cauchy $\{\frac{1}{n}\}$ é a sequência $\{n\}$, que claramente não é de Cauchy.*

Para preservar sequências de Cauchy precisamos ou da completude do domínio, quando convergente e de Cauchy é a mesma coisa, ou de alguma uniformidade a mais, por exemplo a independência de δ na proposição 2.3.2 em relação a x.

Definição 2.3.10 *Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ do espaço métrico (M_1, d_1) no espaço métrico (M_2, d_2) é* **uniformemente contínua** *se, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in M_1$ tais que $d(x, y) < \delta$.*

Exemplo 2.3.5 *Se uma função real $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então pelo o Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe um ponto z entre x e y, tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ e daí*

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|.$$

Assim toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser ilimitado) é lipschitziana. É evidente que as aplicações lipschitziana de espaços métricos são sempre uniformemente contínuas.

É óbvio que toda função uniformemente contínua é contínua. Mas a recíproca não vale.

Teorema 2.3.1 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em X então $\{f(x_n)\}$ é uma sequência de Cauchy.*

Prova:

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \delta$. Logo, $n, m > N \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$, ou seja $\{f(x_n)\}$ é uma sequência de Cauchy.

□

2.4 Completude de um Espaço de Funções

A maneira mais conveniente de ver uma solução

$$x : I \to \mathbb{R}^m$$

de uma equação diferencial é interpretar o caminho x como um ponto de um espaço métrico: assim teremos noções bem definidas, por exemplo, de proximidade entre soluções e de convergência de soluções. Além disso, veremos cada solução (e até o fluxo) como ponto fixo de contrações de espaços métricos bem escolhidos.

Dados os subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$ quaisquer, dotados das respectivas métricas euclidianas induzidas, denotamos por $B(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações $f : E \to F$ que são limitadas, ou seja tais que a imagem $f(E) \subseteq F$ da aplicação é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^m$.

Definição 2.4.1 *Definimos em $B(E, F)$ a métrica do* **supremo**, *também denominada métrica* **uniforme**, *por*

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|,$$

para quaisquer aplicações limitadas f e g de E em F.

Proposição 2.4.1 $d(f,g) < \infty$.

Prova De fato, fixemos um ponto arbitrário $x_0 \in E$. Como $f(E)$ e $g(E)$ são subconjuntos limitados de F, existem números reais $A > 0$ e $B > 0$ tais que $d(f(x), f(x_0)) \leq A$ e $d(g(x), g(x_0)) \leq B$ para todo $x \in E$. Seja $d(f(x_0), g(x_0)) = C$. Então, qualquer que seja $x \in E$, temos

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x), g(x_0))$$

em virtude da desigualdade triangular. Segue-se que

$$d(f(x), g(x)) \leq A + B + C$$

para todo $x \in E$. Em consequência $d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in E\} \leq A + B + C$, o que prova ser $d(f,g)$ um número real bem definido.

□

Exemplo 2.4.1 *Verifiquemos que a métrica uniforme é, de fato, uma métrica em $B(E,F)$.*

i) Se $f \neq g$, então existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, daí, $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Como

$$\sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_0) - g(x_0)|,$$

segue que $d(f,g) > 0$ e

$$d(f,f) = \sup_{x \in E} |f(x) - f(x)| = \sup_{x \in E} 0 = 0.$$

ii) Como $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, temos,

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in E} |g(x) - f(x)| = d(g,f)$$

iii) Sejam $f, g, h \in B_0(E,F)$. Então

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \\ d(g,h) &= \sup_{x \in E} |g(x) - h(x)| \end{aligned}$$

como $|f(x) - g(x)|$ e $|g(x) - h(x)|$ são números positivos, então $\forall \ x \in E$

$$\sup_{x\in E}|f(x) - g(x)| + \sup_{x\in E}|g(x) - h(x)| = \sup_{x\in E}\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\}$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

para qualquer $x \in E$. Daí,

$$\sup_{x\in E}|f(x) - h(x)| \leq \sup_{x\in E}\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\}$$

isto é

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

Definição 2.4.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja dada uma aplicação $f_n \in B(E,F)$. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge* **uniformente** *se $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $B_0(E,F)$. Se existir uma aplicação limitada $f : E \to F$ tal que $\lim d(f_n, f) = 0$ dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f.*

Exemplo 2.4.2 *A sequência de funções $f_n(x) = x/n$ converge uniformente para (a função) 0 em qualquer subconjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$.*

De fato, se $|x| \leq c$ para todo $x \in E$, então dado, $\epsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\epsilon$. Feito isso, $n > n_0 \Rightarrow |x/n| \leq c/n < \epsilon$ qualquer que seja $x \in E$.

Definição 2.4.3 *Dizemos que $\{f_n\}$ converge* **simplesmente** *para f se $\lim f_n(x) = f(x)$ em $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in E$; isto é $\{f_n\}$ converge simplesmente para f se dados quaisquer $x \in E$ e $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon, x)$ dependente também de x tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para qualquer $n \geq N$.*

Exemplo 2.4.3 *A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente em $\mathbb{R}$ para a função identicamente nula.*

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim_{n\to\infty} x/n = 0$. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > |x|/\epsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x/n| < \epsilon$.

Proposição 2.4.2 *Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo então, para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^n$, o espaço métrico $B(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.*

Prova:

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $B(E, F)$. Para cada $x \in E$ fixado a sequência $x_n = f_n(x)$ em F também é de Cauchy, pois $|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$. Por ser completo, existe em F o limite $y = \lim f_n(x)$, o que então define uma aplicação $y = f(x)$ de E em F. Observe que $\{f_n\}$ converge simplesmente para f: o que queremos é mostrar que essa aplicação f é limitada, ou seja, $f \in B(E, F)$ e que a sequência $\{f_n\}$ converge a f no espaço métrico $B(E, F)$.

Como sempre ocorre com sequências de Cauchy, $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $B(E, F)$, de modo que podemos tomar uma aplicação $g_0 : E \to F$ constante qualquer e $r > 0$ tais que $d(f_n, g_0) \leq r$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in E$, decorre

$$|f(x) - g_0(x)| = \lim |f_n(x) - g_0(x)| \leq \lim d(f_n, g_0) \leq r,$$

de modo que $d(f, g_0) \leq r$ e portanto $f \in B(E, F)$. Finalmente, dado $\epsilon > 0$ tomamos N tal que $d(f_k, f_n) < \frac{1}{2}\epsilon$ para quaisquer $k, n \geq N$.

Fixando $x \in E$ e $n \geq N$ decorre que $|f_k(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$ para cada $k \geq N$, de modo que

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{k \to \infty} |f_k(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

Assim, $d(f, f_n) < \epsilon$ para cada $n \geq N$, ou seja $\lim d(f_n, f) = 0$.

$\square$

Exemplo 2.4.4 *O espaço $C(I, \mathbb{R}^n)$ dos caminhos contínuos de I em $\mathbb{R}^n$ é completo na métrica do uniforme sempre que I for um intervalo compacto.*

Proposição 2.4.3 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de aplicações $f_n : E \to F$ contínuas que convergem uniformemente para $f : E \to F$. Então f também é contínua.*

Prova:

Dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \frac{1}{3}\epsilon$. Pela Proposição (2.3.2), a continuidade de f_n fornece $\delta > 0$ tal que $|f_n(y) - f_n(x)|\frac{1}{3}\epsilon$ para qualquer $|y - x| < \delta$. Segue que

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para qualquer $|y - x| < \delta$. Assim, a mesma Proposição 1.3.3 garante que f é contínua no ponto arbitrário x. (F)

$\square$

Dados subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$, denotaremos por $C(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações de E e F que são contínuas e limitadas.

Exemplo 2.4.5 *Se $I = [a, b]$ então $C(I, \mathbb{R}^m)$ é o conjunto de todos os caminhos $x : I \to \mathbb{R}^m$ que são contínuos, já que, por compacidade são automaticamente limitados.*

Corolário 2.4.0.1 *Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é completo então, para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^n$, o espaço métrico $C(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.*

2.5 Normas em Espaços Vetorias

Definição 2.5.1 *Uma norma $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot|| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$$

que satisfaz as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:

1) $||x|| \geq 0$, *e* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda|||x||$;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definição 2.5.2 *Dizemos que o par* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, *ou seja, o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *munido de uma norma* $\|\cdot\|$ *é* **espaço vetorial normado**.

Exemplo 2.5.1 *Uma norma* $||\cdot||$ *em* $\mathbb{R}^n$ *sempre define uma métrica associada em* $\mathbb{R}^n$, *dada por* $d(x,y) = ||x-y||$.

Verifiquemos que, de fato, $|x-y|$ é uma métrica:

i) $d(x,x) = ||x-x|| = ||0|| = 0$

Daí também temos que

$$0 = ||x-x|| = ||x+(-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = 2||x||$$

e portanto $||x|| \geq 0$.

ii) Se $x \neq y$ então $x - y \neq 0$, logo,

$$||x-y|| \neq 0$$

e portanto $d(x,y) > 0$.

iii) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = ||y-x|| = d(y,x)$.

iv) Dados $x, y, z \in V$, temos

$$d(x,z) = ||x-z|| = ||x-y+y-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z).$$

Assim, dado um espaço vetorial M e uma norma $\|\cdot\|$ temos que o par $(M, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica dada por $d(x,y) = \|\cdot\|$

Exemplo 2.5.2 : *1. Em* $\mathbb{R}^n$ *temos as seguintes normas usuais:*

i. Norma Euclidiana: $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

ii. Norma do máximo: $||(x_1, \ldots, x_n)||_M = \max\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}$.

iii. Norma da Soma: $||(x_1, \ldots, x_n)||_S = |x_1| + \ldots + |x_n|$

2. Consideremos o espaço das funções reais contínuas definidas em $[a,b]$:

$$C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}.$$

A norma usual deste espaço é $||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Definição 2.5.3 *Um espaço vetorial normado é dito* **espaço de Banach** *se for completo.*

Lema 2.5.0.3 *Uma norma* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua de* $\mathbb{R}^n$ *na norma euclidiana.*

Prova: Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$; usando as propriedades da norma temos

$$\|x\| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \leq \sum \|x_i e_i\| = \sum |x_i| \|e_i\| \leq K \sum |x_i| \leq mK|x|,$$

onde denotamos $K = max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \ldots, \|e_k\|\}$. Assim, dado $\epsilon > 0$ tomamos $0 < \delta \leq \dfrac{\epsilon}{mK}$ e obtemos

$$\|x - y\| \leq \|x - y\| \leq mK|x - y| < \delta mK \leq \epsilon$$

sempre que $|x - y| < \delta$. Pela proposição (2.3.2), isso mostra que a norma $\|\cdot\|$ é uma função contínua (até uniformemente) contínua em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.4 *Duas normas* $||\cdot||_1$ *e* $||\cdot||_2$ *em um espaço vetorial* E *são ditas equivalentes se existirem constantes positivas* c *e* d *tais que*

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq d||x||_1, \ \forall x \in E.$$

Proposição 2.5.1 *Quaisquer duas normas em* $\mathbb{R}^n$ *são equivalentes.*

Prova: Sejam $\|x\|_1$ e $\|x\|_2 \in \mathbb{R}^n$ duas normas quaisquer, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem uma única representação $x = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Como o conjunto $v_1, \ldots, v_n$ é linearmente independente, existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \geq c.\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|\right)$$

v Por outro lado usando adesigualde triangular temos

$$\|x\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \|v_j\|_2 \leq k.\sum_{j=1}^{n} |a_j|, \quad k = \max_j \|v_j\|_2$$

Portanto $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, onde $a = c/k > 0$. Analogamente, usando o mesmo argumento temos

$$\|x\|_2 \geq d. \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)$$

da desigualdadde triangular

$$\|x\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \|v_j\|_2 \leq m. \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \qquad m = \max_j \|v_j\|_1$$

Portanto $\|x\|_1 \leq b\|x\|_2$, onde $b = d/m > 0$. Juntando as duas desigualdes temos

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

□

2.6 Diferenciabilidade em Espaços Euclidianos

Caminhos Diferenciáveis

Dizemos que uma função $x : I \to \mathbb{R}^n$ definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ é um **caminho** em $\mathbb{R}^n$. Os componentes de x são funções reais $x_i : I \to$ Rbtais que $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ para cada $t \in I$.

Dizemos que o caminho $x : I \to \mathbb{R}^n$ tem **derivada** no ponto $t \in I$ se cada componente tem derivada em t; nesse caaso, dizemos que

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

é a **derivada** de x em t, também denominada **velocidade** vetorial de x em t.

Se $x : I \to \mathbb{R}^n$ tem derivada em cada ponto de I, dizemos que x é **derivável** no intervalo I; nesse caso, x é um caminho contínuo e podemos definir um novo caminho

$$x' : I \to \mathbb{R}^n$$

das derivadas de x. Se a derivada x' é derivável, escrevemos $(x')' = x''$ e dizemos que x é duas vezes diferenciável. Em geral, dizemos que x é de classe C^0 em I se x é contínuo em I, e que x é de classe C^r em I se x' é de classe C^{r-1} em I, para cada $1 \leq r$. Finalmente, x é de classe C^∞ se x é de classe C^r para cada $r \in \mathbb{N}$.

Se $x : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo, definimos a integral de Riemann de x de a até b por

$$\int_a^b x(t)dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Propriedades

1) $\int_a^b [x(t) + y(t)]dt = \int_a^b x(t)dt + \int_a^b y(t)dt$

2) $\int_a^b \alpha \cdot x(t)dt = \alpha \int_a^b x(t)dt$

3) $\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a) \cdot ||x||$, onde $||x|| = \sup\{|x(t)|; a \leq t \leq b\}$.

Denotemos por $B = B([a,b]; \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os caminhos limitados $x : [a,b]. \to \mathbb{R}^n$

Proposição 2.6.1 *O conjunto I dos caminhos limitados integráveis é fechado em B. Em outras palavras, dada uma sequência de caminhos limitados integráveis $x_m : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, convergindo uniformemente para $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, então x é (limitada e) integrável. Além disso,*

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b x_m(t)dt = \int_a^b x(t)dt$$

Prova:

Escreva $I_m = \int_a^b x_m(t)dt$, $m = 1, 2, \ldots$. Como $|I_m - I_k| \leq (b-a)||x_m - x_k||$, por (3) acima, segue-se que as integrais I_m formam uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, e portanto, convergem para um vetor $I \in \mathbb{R}^n$. Afirmamos que I é a integral de x. Com efeito, seja $\epsilon > 0$ dado. Existe um inteiro $m > 0$ tal que $||x - x_m|| < \epsilon/3(b-a)$ e $|I - I_m| < \epsilon/3$. Seja P uma partição do intervalo $[a,b]$. Existe também $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ acarreta $|\sum(x_m; P) - I_m| < \epsilon/3$. Observe que $|\sum(x; P) - \sum(x_m; P)| \leq (b-a)||x - x_m||$. Então, $|P| < \delta$ acarreta $|I - \sum(x; P)| \leq |I - I_m| + |I_m - \sum(x_m; P)| + |\sum(x_m; P) - \sum(x; P)| < \epsilon$. Isto completa a prova.

□

O Teorema Fundamental de Cálculo para caminhos é simplesmente

$$\frac{d}{dt}\int_u^t x(s)ds = x(t),$$

que decorre do Teorma Fundamental do Cálculo para funções reais tomando coordenadas. Assim, todo caminho x de classe C^1 satisfaz

$$x(t) = x(u) + \int_u^t x'(s)ds.$$

De fato, basta observar que ambos lados definem caminhos da mesma derivada $x'(t)$, e que, portanto, diferem por uma constante, que no caso é zero.

Dizemos que uma aplicação $U : E \to \mathbb{R}$ definida num aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma **função real** (de k variáveis reais). Fixado $x \in E$ e dado $1 \leq j \leq k$, dizemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{U(x+he_j) - U(x)}{h}$$

é a **derivada parcial** de U em relação a x_j no ponto x. Acima, $e_1, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Se existem todas as derivadas parciais de U no ponto x, dizemos que $k-$upla das derivadas parciais de U em x é o **vetor gradiente** de U em x, denotado por

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x)\right).$$

Dizemos que U é **diferenciável** em x se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} |u(x+h) - U(x) - T \cdot h| = 0;$$

neste caso, dizemos que T é a (aplicação) **derivada** de U en x e escrevemos $T = DU(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. A derivada de uma função independe da noema escolhida no domínio.

Exemplo 2.6.1 *Aplicações constantes são diferenciáveis e sua derivada é nula.*

Exemplo 2.6.2 $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *uma transformação linear.* T *é diferenciável e* $T'(x) = T$, *qualquer que seja* x.

Exemplo 2.6.3 *A função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ é diferenciável em cada $x \in \mathbb{R}^*$ e sua derivada é a transformação linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f'(x) \cdot h = -\frac{h}{x^2}$.*

Exemplo 2.6.4 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável. Consideremos $x \in U$. Temos que, dado $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$f'(x)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x)\right)(h_1, \ldots, h_n) = \nabla f(x) \cdot h.$$

Exemplo 2.6.5 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, diferenciável. Consideremos $x \in U$. Temos que, dado $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:*

$$f'(x)h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{bmatrix} = Jf(x) \cdot h.$$

Teorema 2.6.1 *(Desigualdade do Valor Médio) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Se o segmento de reta fechado $[a, a+h]$ está contido em U e f é diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(a, a+h)$, então*

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \sup_{0<t<1} |f'(a+th)|$$

Prova: Suponha inicialmente que f também seja diferenciável no ponto a. E seja $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ o caminho definido por $\omega(t) = f(a+th)$. Então ω é contínuo em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$. Note que $\omega(0) = f(a)$, $\omega(1) = f(a+h)$ e $\omega'(t) = f'(a+th).h$, agora é suficiente provar que $|\omega(1) - \omega(0)| \leq M$, onde $M = \sup\limits_{0 \leq t < 1} |\omega'(t)|$. Para provar esse fato vamos mostrar que $|\omega(1) - \omega(0)| \leq M + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Considere o seguinte conjunto

$$X = \{t \in [0,1]; |\omega(1) - \omega(0)| \leq (M+\varepsilon)s, \forall s \in [0,t]\}.$$

Note que X é um conjunto fechado da forma $[0, \alpha]$, resta provar agora que $\alpha = 1$. Deste modo suponha por contradição que $\alpha < 1$. Então para todo $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ e tal que $0 \leq h < \delta$ implica $\omega(\alpha + h) = \omega(\alpha) + \omega'(\alpha.h) + r(h)$, onde $|r(h)| \leq \varepsilon.h$. Segue que $|\omega(a+h) - \omega(\alpha)| \leq$

$(M+\varepsilon)).h$, se $0 \leq h < \delta$. Como $\alpha \in X$, temos também $|\omega(\alpha) - \omega(0)| \leq (M+\varepsilon).\alpha$. Portanto, $0 \leq h < \delta$ implica $|\omega(\alpha+h) - \omega(0)| \leq (M+\varepsilon)(\alpha+h)$. Levando em conta que $\alpha \in X$, mostra que todo $\alpha + h$, com $0 \leq h < \delta$, também pertence a X. Contradição.

$\square$

Capítulo 3

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

O teorema do Ponto Fixo e o Corolário a seguir são, muitas vezes aplicadas a contrações de espaços métricos compactos, que sempre são completos. Entretanto o uso que faremos do Corolário para provar a existência e unicidade de soluçõs de equações diferenciais ordinárias requer toda a força do resultado, pois será aplicado num espaço métrico de funções que é completo mas não é compacto.

Definição 3.0.1 *Dada uma aplicação* $\omega : M \to M$ *de um espaço métrico* M *nele mesmo, podemos considerar as aplicações* **iteradas**

$$\omega^1 = \omega,\ \omega^2 = \omega \circ \omega^1 = \omega \circ \omega,$$

e assim por diante, definidas indutivamente por

$$\omega^0 = id\,|_M,\ \omega^{n+1} = \omega \circ \omega^n$$

Note que:

$$(\omega^m)^n \circ \omega^p = \omega^{mn+p}$$

para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Também definimos as **iteradas** de um ponto $x \in M$, ou seja a sequência

$$x_0 = x = \omega^0(x),\ x_1 = \omega(x) = \omega^1(x),\ x_2 = \omega(\omega(x)) = \omega^2(x),$$

e assim por diante, definida indutivamente por $x_0 = x$ e

$$x_{n+1} = \omega x_n$$

para $n \in \mathbb{N}$. As iteradas de um ponto são, muitas vezes, denominadas **aproximações sucessivas.**

Definição 3.0.2 *Dizemos que um ponto $a \in M$ é um* **ponto fixo** *de uma aplicação $\omega : M \to M$ de um espaço métrico M nele mesmo se*

$$\omega(a) = a$$

Pode ocorrer que uma sequência de iteradas convirja a um ponto $a \in M$, nesse caso, se a aplicação $\omega : M \to M$ é contínua, então a é necessariamente ponot fixo de ω, pois

$$\omega(a) = \omega(\lim x_n) = \lim \omega(x_n) = \lim X_{n+1} = a,$$

Pode ser que exista um **ponto atrator** $a \in M$, ou seja, tal que $\lim x_n = a$ para aproximações sucessivas de qualquer ponto $x \in M$. Pontos atratores de aplicações contínuas são necessariamente fixos.

Definição 3.0.3 *Uma aplicação $\omega : M \to M$ de uma espaço métrico (M, d) nele mesmo é uma* **contração** *se ω é lipschitziana de constante $\lambda < 1$; neste caso, dizemos que a constante de Lipschitz e um* **fator de contração** *de ω.*

Lema 3.0.0.4 *A sequência das iteradas de um ponto qualquer por uma contração de um espaço métrico nele mesmo é uma sequência de Cauchy.*

Prova:

Sejam $\omega : M \to M$ uma aplicação lipschitziana do espaço métrico (M, d) com constante de Lipschitz $\lambda > 0$ e $x_0 \in M$ um ponto qualquer de M. Escrevemos $x_{n+1} = \omega(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e queremos mostrar que a sequência $\{x_n\}$ das iteradas de x_0 é de Cauchy. Por ser ω lipschitziana, temos $d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda d(x, y)$ e portanto, tomando para x e y os pontos da sequência de iteradas de x_0, resulta

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(\omega(x_n), \omega(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \lambda d(\omega(x_{n-1}), \omega(x_{n-2})) \leq \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \lambda^{n-1} d(\omega(x_1), \omega(x_0)) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se ω é uma contração, então $\lambda < 1$ e, portanto, a série geométrica $\sum \lambda^n$ converge. Assim, $\sum \lambda^n d(x_1, x_0)$ converge e, pelo teorema 2.2.2, a sequência $\{x_n\}$ das iteradas é uma sequência de Cauchy, logo converge.

□

3.1 Teorema do ponto fixo de Banach

Teorema 3.1.1 *(Teorema do ponto fixo de Banach). Uma contração de um espaço métrico completo possui um único ponto fixo, que é necessariamente atrator.*

Prova:

Seja $\omega : M \to M$ uma contração do espaço métrico completo (M, d) com fator de contração $0 < \lambda < 1$. Tomamos um ponto $x_0 \in M$ qualquer de M e escrevemos $x_{n+1} = \omega(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Pelo o lema (1.4.01), sabemos que a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy e portanto, como M é completo, convergente. Seja $a \in M$ o limite da sequência das iteradas $\{x_n\}$ desse ponto x_0. Como ω é contínua, (pois uma contração é lipschitziana e portanto uniformemente contínua), sabemos que a é um ponto fixo de ω. Como tomamos um ponto x_0 arbitrário em M, decorre que todas as sequências de iteradas convergem a pontos fixos de ω e portanto resta mostrar que ω tem um único ponto fixo.

Supondo que $a, b \in M$ sejam pontos fixos de ω, isto é,

$$\omega(a) = a \text{ e } \omega(b) = b,$$

obtemos

$$0 \leq d(a, b) = d(\omega(a), \omega(b)) \leq \lambda d(a, b),$$

de modo que $(1 - \lambda)d(a, b) \leq 0$. Como $1 - \lambda > 0$, resulta $d(a, b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

□

O teorema afirma que se $\omega : M \to M$ é uma contração de um espaço métrico completo, então

$$\lim_{n \to \infty} \omega^n(x)$$

é o único ponto fixo de ω, independentemente do particular ponto $x \in M$ escolhido.

Corolário 3.1.1.1 *Seja $\varphi : M \to M$ uma aplicação de um espaço métrico completo nele mesmo e suponha que exista uma iterada de φ que é uma contração. Então existe um único ponto fixo atrator de φ, ou seja, um único ponto $a \in M$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi^n(x) = a$$

para qualquer $x \in M$.

Prova:

Suponha que a iterada φ^K seja uma contração do espaço métrico (M, d), para algum inteiro $K \geq 1$ fixado e seja a o único ponto fixo dado pelo o teorema (1.4.1) acima; para simplificar, escrevemos

$$\omega = \varphi^K.$$

Assim, temos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^m(y) = a \qquad (1)$$

para cada ponto $y \in M$, já que a é ponto fixo atrator de ω. O que queremos mostrar é que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) = a \qquad (2)$$

para qualquer ponto $x \in M$.

Se $b \in M$ é um ponto fixo de φ então b claramente também é ponto fixo da iterada ω; como essa iterada possui um único ponto fixo, decorre que φ possui no máximo um ponto fixo. Reciprocamente, o ponto fixo $a = \omega(a)$ da iterada ω também é ponto fixo de φ, pois

$$\omega(\varphi(a)) = \varphi^K(\varphi(a)) = \varphi^{K+1}(a) = \varphi(\varphi^K(a)) = \varphi(\omega(a)) = \varphi(a)$$

prova que $\varphi(a)$ é um ponto fixo de ω; como ω tem um único ponto fixo, resulta que

$$\varphi(a) = a,$$

ou seja, a é o único ponto fixo de φ. Resta mostrar que a é um ponto fixo atrator de φ, ou seja, que vale (2).

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos sempre escrever $n = mK + r$, onde $0 \leq r < K$ é o resto da divisão de n por K; em particular

$$\varphi^n(a) = \varphi^{mK+r}(a) = (\varphi^K)^m(\varphi^r(a)) = \omega^m(\varphi^r(a)).$$

Como a é ponto fixo atrator de ω, cada uma dessa iteradas $\varphi^r(a)$ tem o mesmo limite a quando iterada por ω, ou seja (usando 1), temos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{mK+r}(a) = \lim_{n\to\infty} (\varphi^K)^m(\varphi^r(a)) = \lim_{n\to\infty} \omega^m(\varphi^r(a)) = a.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, para $0 \leq r < K$ inteiro podemos escolher um inteiro $N_r \geq 1$ tal que

$$d(\omega^m(\varphi^r(a)), a) < \epsilon$$

para $m \geq N_r$. Finalmente, tomamos $N = KN_r$, onde $N_K = \max\{N_0, N_1, \ldots, N_{K-1}\}$. Se $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n/K \geq N/K = N_K$, de modo que podemos escrever $n = mK + r$, com $m \geq N_K$ e $0 \leq r < K$; assim

$$d(\varphi^n(a), a) = d(\varphi^{mK+r}(a), a) = d(\omega^m(\varphi^r(a)), a) < \epsilon,$$

provando (2).

□

3.2 Teorema de Picard

Inúmeras questões em matemática (por exemplo, em Topologia e Geometria Diferencial e no Cálculo de Variações) são formuladas por Equaçõees Diferenciais Ordinárias ou se reduzem a elas. A dependência do Teorema Fundamental das Curvas do Teorema de Picard, mostra a importância das equações diferenciais ordinárias na geometria diferencial.

Existência e Unicidade

Vamos traduzir para o contexto de pontos fixos de contrações de espaços métricos completos o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Consideremos o **problema de valor incial**

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

de uma **equação diferencial ordinária** em $\mathbb{R}^n$ definida pela aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz algumas propriedades de regularidades num aberto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Uma **solução** da equação $x' = f(t, x)$ em U é um caminho $x : I \to \mathbb{R}^n$ que é derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, cujo o gráfico está inteiramente contido U e cuja a velocidade é determinada por f, ou seja, tal que

$$(t, x(t)) \in U \quad e \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

para cada $t \in I$.

As soluções de $x'(t) = f(t, x(t))$ são denominadas, **curvas integrais** da equação. Fixado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, dizemos que a solução x satisfaz a **condição inicial** $x(t_0) = x_0$ se também $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$; neste caso, então x é uma solução do problema de valor inicial (3.1).

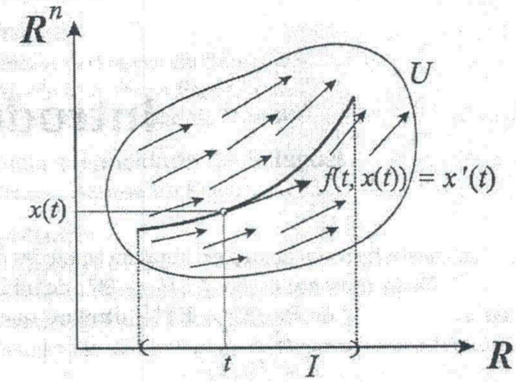

Figura 3.1: Uma solução de $x' = f(t, x)$ em U

Exemplo 3.2.1 *Considere o campo* $f(x) = 3x^{2/3}$ *definido em* $\mathbb{R}$. *Como ocorre com qualquer equação autônma em* $\mathbb{R}$, *escrevemos* $x' = 3x^{2/3}$ *como* $3 = x^{-2/3}x'$ *e integramos; mas*

$$3(t + C) = 3\int dt = \int x^{-2/3}x'dt = 3x^{1/3},$$

e resulta $x(t) = (t + c)^3$. *Em particular,* $x(t) = t^3$ *é uma solução com* $x(0) = 0$. *Como* $f(0) = 0$, *também a solução trivial* $x(t) = x_0$ *é uma solução de* $x' = f(t)$, $x(0) = 0$, *o que torna possível definir uma terceira solução por*

$$\begin{cases} 0 & se \quad t \leq 0 \\ t^3 & se \quad 0 \leq t. \end{cases}$$

É claro que esse caminho $x(t)$ *é derivável em* $\mathbb{R}$ *e satisfaz* $x' = f(x)$, *com* $x(0) = 0$. *Além dessa três, existe uma infinidade de soluções desse problema, bastando fixar* $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$ *e definir* $x(t)$ *por* 0 *entre* a *e* b; *dos lados, definimos* $x(t)$ *por* $(t - a)^3$ *ou* $(a - t)^3$ *à esquerda de* a *por* $(t - b)^3$ *ou* $(b - t)^3$ *à direita de* b.

O problema do campo desse exemplo é que é somente contínuo, condição suficiente apenas para existência de soluções; com alguma regularidade adicional obtemos também a unicidade.

A **existência** de soluções de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ é garantida pela a continuidade de $f(t,x)$; para a **unicidade** de soluções satisfazendo uma dada condição, só a continuidade não é suficiente, mas basta exigir alguma regularidade adicional.

Definição 3.2.1 *Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é lischitziana na variável espacial em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ou simplesmente* **lipschitziana** *em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, se existe uma constante $K > 0$ tal que:*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|$$

para quaisquer (t,x) , $(t,y) \in U$ de mesma primeira coordenada t. Neste caso, dizemos que K chama-se constante de Lipschitz e que $f(t,x)$ satisfaz uma condição de Lipschitz.

Supomos que o aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ contém toda uma faixa vertical $I \times \mathbb{R}^n$, para algum intervalo (não vazio) I em $\mathbb{R}$. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e fixemos um ponto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ qualquer.

Se $x : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho derivável tal que

$$x(t_0) = x_0 \qquad e \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \text{ para } t \in I \tag{3.2}$$

então podemos integrar $x'(t) = f(t, x(t))$ em I e obter

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \text{ para } t \in I. \tag{3.3}$$

Reciprocamente, se $x : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo que satisfaz (3.3), então necessariamente

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds = x_0 + 0 = x_0$$

e $x(t)$ é derivável; derivando $x(t)$ em I e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos a segunda afirmação de (3.2). Assim, (3.2) e (3.3) são afirmações equivalentes.

Definição 3.2.2 *Dado qualquer caminho contínuo* $x : I \to \mathbb{R}^n$, *definimos*

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{3.4}$$

para cada $t \in I$.

Pelo o que acabamos de ver $\mathcal{L}(x) : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho derivável e mais x é um ponto fixo de $\mathcal{L}$, ou seja

$$x = \mathcal{L}(x)$$

se e somente se, $x(t) = \mathcal{L}(x)(t)$ para cada $t \in I$, que é apenas uma outra maneira de ver a afrimação (3.3).

Assim, toda solução do problema de valor inicial (3.1) é um ponto fixo de $\mathcal{L}$ e, reciprocamente, todo ponto fixo de $\mathcal{L}$ é solução de (3.1).

Inspirados pelo o Teorema Banach, procuramos obter uma solução (um ponto fixo de $\mathcal{L}$) usando aproximações sucessivas (as iteradas de $\mathcal{L}$) da solução.

Exemplo 3.2.2 *Encontremos a solução da equação diferencial* $x' = ax$, $x(0) = x_0 = k$ *através do limite das iteradas de* $\mathcal{L}$.

Temos $f(t, x) = ax$ *e* $t_0 = 0$ *e tomamos qualquer caminho para iniciar a iteração. Começando, para simplificar, com o caminho constante* $x(t) = k = x_0$, *resulta*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x)(t) &= k + \int_0^t ax(s)ds = k + \int_0^t akds = k[1 + at], \\
\mathcal{L}^2(x)(t) &= k + \int_0^t ak[1 + at]ds = k[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2], \\
\mathcal{L}^3(x)(t) &= k + \int_0^t ak[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2]ds = k[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3],
\end{aligned}$$

e por indução, para todo $m \geq 0$, *obtemos*

$$\mathcal{L}^m(x)(t) = k(1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{m!}a^mt^m).$$

Com a expressão acima entre parênteses converge a e^{at}, *concluímos que*

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{L}^m(x)(t) = ke^{at} = x_0e^{at}$$

define a solução de $x' = ax, \ x(0) = x_0$.

No caso simples do exemplo acima, o método das aproximações sucessivas converge naturalmente à solução em cada ponto de $I = \mathbb{R}$. Em geral, isso pode não funcionar e, trabalhando com uma equação $x' = f(t,x)$ qualquer precisamos de garantias teóricas para convergência do método. O candidato evidente é o teorema (3.1.1) que, antes de mais nada, exige um espaço métrico completo. Vimos que o espaço $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$ dos caminhos contínuos de I em $\mathbb{R}^n$ é completo na métrica uniforme

$$d(\mu,\nu) = \sup_{t\in I} |\mu(t) - \nu(t)|$$

sempre que I for um intervalo compacto. Supondo, então, que I é um intervalo compacto, temos que $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é uma aplicação bem definida do espaço métrico completo $\mathcal{F}$ nele mesmo. (Observe que, embora $\mathcal{F}$ seja um espaço vetorial, a aplicação $\mathcal{L}$ não é linear.)

Lema 3.2.0.5 *Se* $K > 0$ *é uma constante de Lispschitz de* f *em* $I \times \mathbb{R}^n$, *então*

$$|\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)| \leq \frac{K^m}{m!}|t - t_0|^m d(\mu,\nu), \tag{3.5}$$

para quaisquer $\mu, \nu \in \mathcal{F}, m \geq 0$ *e* $t \in I$.

Prova: A afirmação do lema é evidente para $m = 0$, pela definição de métrica do supremo. Dadas duas funções $\mu(t), \nu(t)$ em (F), a definição (3) dá

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\nu)(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\mu(s))ds\right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\nu(s))ds\right) \\ &= \int_{t_0}^t (f(s,\mu(s)) - f(s,\nu(s)))ds \end{aligned}$$

e portanto, para cada $t \in I$,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\nu)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,\mu(s)) - f(s,\nu(s)))ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |(f(s,\mu(s)) - f(s,\nu(s)))|ds \right| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^{t} |\mu(s) - \nu(s)|ds \right| \\
&\leq Kd(\mu,\nu) \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| \leq Kd(\mu,\nu)|t - t_0| \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

onde $K > 0$ é uma constante de Lipschitz. Isto prova o lema para $m = 1$. Aplicando (3.2) a $\mathcal{L}(\mu)$ e $\mathcal{L}(\nu)$ no lugar de μ e ν, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}^2(\mu)(t) - \mathcal{L}^2(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}(\nu))(t)| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^{t} |\mathcal{L}(\mu)(s) - \mathcal{L}(\nu)(s)|ds \right| \\
&\leq K^2 d(\mu,\nu) \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds \right| \\
&\leq K^2 d(\mu,\nu) \frac{1}{2}|t - t_0|^2 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

para cada $t \in I$, provando o lema para $m = 2$. Prosseguindo de modo análogo obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}^3(\mu)(t) - \mathcal{L}^3(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\nu))(t)| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^{t} |\mathcal{L}^2(\mu)(s) - \mathcal{L}^2(\nu)(s)|ds \right| \\
&\leq K^3 d(\mu,\nu) \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^2 ds \right| \\
&\leq K^3 d(\mu,\nu) \frac{1}{2.3}|t - t_0|^3
\end{aligned}
$$

para cada $t \in I$, provando o lema para $m = 3$.

Para $n = 4$ utilizamos o mesmo processo

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}^4(\mu)(t) - \mathcal{L}^4(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}^3(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^3(\nu))(t)| \\
&\leq K\left|\int_{t_0}^{t} |\mathcal{L}^3(\mu)(s) - \mathcal{L}^3(\nu)(s)|ds\right| \\
&\leq K^4 d(\mu,\nu)\frac{1}{2.3}\left|\int_{t_0}^{t} |s - t_0|^3 ds\right| \\
&\leq K^4 d(\mu,\nu)\frac{1}{4!}|t - t_0|^4
\end{aligned}$$

para cada $t \in I$, provando o lema para $m = 4$.

Então supondo para $m = k$, devemos mostrar para $m = k + 1$, daí

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}^{(k+1)}(\mu)(t) - \mathcal{L}^{(k+1)}(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}^k(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^k(\nu))(t)| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, \mathcal{L}^k(\mu)(s) - f(s, \mathcal{L}^k(\nu)(s)|ds\right| \\
&\leq K\left|\int_{t_0}^{t} |\mathcal{L}^k(\mu)(s) - \mathcal{L}^k(\nu)(s)|ds\right| \\
&\leq K\left|\int_{t_0}^{t} \frac{K^k|t - t0|^k}{k!} d(\mu,\nu)ds\right| \\
&= \frac{K^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.1 *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Se $[a,b]\times\mathbb{R}^n \subseteq U$ e f é lipschitziana em $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $t_0 \in [a,b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do problema de valot inicial (3.1) definida no intervalo $[a,b]$.*

Prova:

Tomamos $I = [a,b]$ e $l = b-a$. Como o crescimento fatorial é muito maior do que o exponencial (ou então observando que $\sum \frac{1}{m!}(Kl)^m = e^{Kl}$, de modo que a série converge e, consequentemente, seu termo geral tende a zero), temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(Kl)^m}{m!} = 0$$

e portanto, podemos escolher em $m = m(K, l)$ tal que , para cada $t \in I$,

$$\frac{K^m}{m!}|t - t_0|^m \leq \frac{(Kl)^m}{m!} = \eta < 1,$$

onde K é uma constante de Lipschitz de f. Pelo o lema (3.2.0.5), resulta

$$d(\mathcal{L}^m(\mu), \mathcal{L}^m(\nu)) = \sup_{t \in I} |\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)| \leq \nu d(\mu, \nu),$$

ou seja, $\mathcal{L}^m$ é uma contração de $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$. Pelo o corolário (3.1.1.1), segue que $\mathcal{L}$ possui um único ponto fixo $x \in \mathcal{F}$ e pelo o observado acima, isso resolve o problema de valor inicial (3.1) nesse caso. □

Destacamos que o único ponto fixo da contração $\mathcal{L}$ obtido na demonstração do teorema acima é necessariamente atrator, de modo que a solução $x(t)$ de (3.1) pode ser obtida através do limite das iteradas $\mathcal{L}^m(y)$ de qualquer caminho $y \in \mathcal{F}$. Essa técnica de obtenção de soluções é denominada o **método das aproximações sucessivas.**

Passamos a supor que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ qualquer que, não necessariamente, contém toda uma faixa vertical infinita. Dado um ponto qualquer $(t_0, x_0) \in \Omega$, escolhemos constantes $a, b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq \Omega, \tag{3.8}$$

onde $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \bar{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ são bolas fechadas centradas em t_0 e x_0 de raios a e b em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

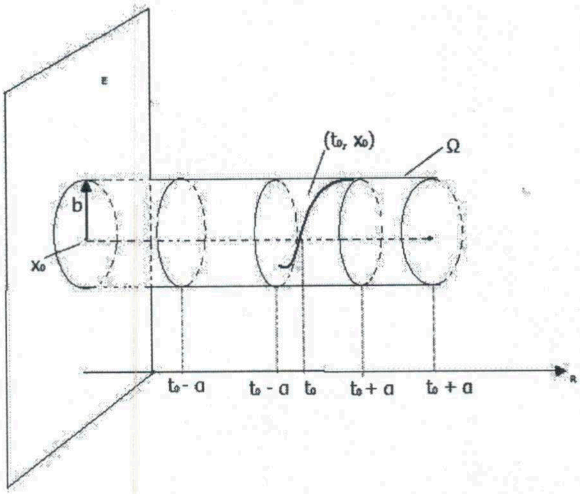

Figura 3.2: Interpretação geométrica

Para garantir que o gráfico de uma solução de (3.1) esteja dentro de U, basta exigir que esteja contido no retângulo $R_{a,b} \subseteq U$. Por isso passamos a considerar o espaço $\mathcal{F} = C(I_a, B_b)$ dos caminhos contínuos de I_a em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ que pelo o corolário (2.4.0.1), ainda é completo na métrica uniforme. Para cada caminho contínuo $x : I_a \to B_b$ continuamos usando (1.4) para definir $\mathcal{L}(x) : I_a \to \mathbb{R}^n$, só que agora não necessariamente temos $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ agora não é mais uma aplicação bem definida do espaço métrico completo $\mathcal{F}$ nele mesmo.

Para consertar isso, escolhemos qualquer $M > 0$ tal que

$$|f(t,x)| \leq M,$$

para cada $(t,x) \in R_{a,b}$, que é obtido pela continuidade da aplicação f no compacto $R_{a,b}$. Dado uma caminho $\mu \in \mathcal{F}$ temos, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mu)(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, \mu(s))ds - x_0 \right| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \mu(s))ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |(f(s, \mu(s))|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| = M|t - t_0| \end{aligned}$$

e decorre que $\mathcal{L}(\mu)(t) \in B_b$ só está garantido para t suficientemente próximo de t_0; para valer para todo $t \in I_a$, precisamos de $M|t - t_0| \leq b$.

Em vista disso, recomeçamos todo o processo. Primeiro definimos

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \tag{3.9}$$

Observe que α só depende de a e b, que só dependem da posição relativa de (t_0, x_0) em U, e de M, que só depende de a, b e de f. Agora definimos

$$I_\alpha + [t_0 - \alpha, t_) + \alpha] \subseteq I_a$$

e finalmente consideremos o espaço $\mathcal{F} = C(I_\alpha, B_b)$ dos caminhos contínuos de I_α em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ o qual pelo o corolário 1.5.0.2, ainda é completo na métrica uniforme. Para caminhos contínuos $x : I_\alpha \to B_b$ continuamos usando (1.4) para definir $\mathcal{L}(x) : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$.Pelo o que vimos acima, agora temos $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in \mathcal{F}$, ou seja $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ novamente é uma aplicação bem definida, só que agora do espaço métrico completo $\mathcal{F} = nC(I_\alpha, B_b)$ nele mesmo.

Se existir uma constante de Lipschitz para F em $I_a \times B_b$, obtemos a mesma majoração (1.5) do Lema 1.9.0.3 para $\mu, \nu \in \mathcal{F}$, $m \geq 0$ e $t \in I_\alpha$. Como na demostração do teorema acima, obtemos m tal que $\mathcal{L}^m$ é uma contração do espaço métrico completo $\mathcal{F}$, de modo que $\mathcal{L}$ tem um único ponto fixo em $\mathcal{F}$, o que resolve o problema de valor inicial (3.1) também nesse caso.

Resumindo, demonstramos o teorema seguinte.

Teorema 3.2.2 *(Picard-Lindelof). Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0$, $b > 0$ tais que (1.7). Se $f(t, x)$ é lipschitziana no retângulo $R_{a,b}$ então existe uma única solução do problema de valor inicial (3.1) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha > 0$ é dada por (1.8), com $M > 0$ uma cota superior qualquer de $|f(t, x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.*

□

É interssante observar que, mesmo na ausência da condição de Lipschitz, o método das aproximações sucessivas pode ainda convergir. Por exemplo, tomando o exemplo classico $f(t,x) = 3x^{3/2}$, $x(0) = 0$, que não é lipschitziana na vizinhança da origem, é possível mostrar que as iteradas de $\mathcal{L}$ ainda convergem. No entanto, agora o limite das iteradas depende de x_0: tomando $x_0(t) \equiv 0$ evidentemente obtemos a solução nula mas obtemos a outra solução $x(t) = t^3$ com a escolha $x_0(t) = t$.

Em geral, com a mera continuidadse e na ausência da condição de Lipschitz, perdemos a unicidade pois perdemos a garantia da convergência das iteradas de $\mathcal{L}$, já que não podemos assegurar que (alguma potência de) $\mathcal{L}$ seja contração. Existem exemplos de aplicações $f(t,x)$ em que as sequência das iteradas não convergem, possuindo subsequências convergentes a limites distintos, nenhum dos quais é uma solução de $x' = f(t,x)$.

Contudo, modificando o método, podemos garantir a existência de soluções supondo apenas a continuidade da equação.

Bibliografia

[1] BOYCE, William E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* William E. Boyce; Richard C. DiPrima. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 434p. Traducao de Valeria de Magalhaes Iorio.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide. 2ªed. São Paulo, Edgard blucher, 1996.

[3] DOERING, Claus Ivo. Equações Diferenciais Ordinárias. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol.4, 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.1. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[6] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.2. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[7] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Vol.1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[8] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos* . 4ª ed.. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[9] SOTOMAYOR, Jorge Manuel. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.