



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESCALONAMENTO LIFSHITZ PARA VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA  
DE LORENTZ EM ALTAS ORDENS DERIVATIVAS E EXPLOSÕES  
COSMOLÓGICAS DE RADIAÇÃO GAMA

EDME VALE PEREIRA

Campina Grande - PB  
Agosto de 2016

**EDME VALE PEREIRA**

**ESCALONAMENTO LIFSHITZ PARA VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA  
DE LORENTZ EM ALTAS ORDENS DERIVATIVAS E EXPLOSÕES  
COSMOLÓGICAS DE RADIAÇÃO GAMA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

**Campina Grande - PB**  
**Agosto de 2016**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

P436e

Pereira, Edme Vale.

Escalonamento Lifshitz para violação da invariância de Lorentz em altas ordens derivativas e explosões cosmológicas de radiação gama / Edme Vale Pereira. – Campina Grande, 2016.

36f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".

Referências.

1. Cosmologia. 2. Teoria de Horava-Lifshitz. 3. Invariância de Lorentz - Violação. 4. Raios Gama - Explosões. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande (PB). III. Título.

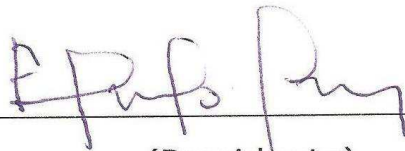
CDU 524.8(043)

EDME VALE PEREIRA

ESCALONAMENTO LIFSHITZ PARA VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA  
DE LORENTZ EM ALTAS ORDENS DERIVATIVAS E EXPLOSÕES  
COSMOLÓGICAS DE RADIAÇÃO GAMA

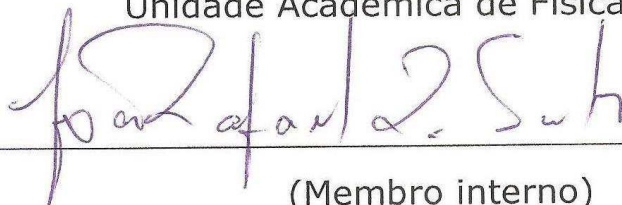
Dissertação aprovada em 11 de agosto de 2016

BANCA EXAMINADORA



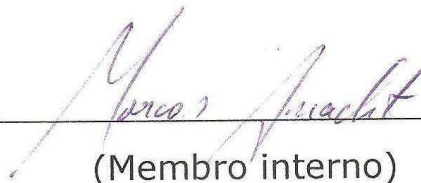
(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



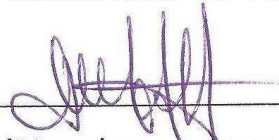
(Membro interno)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Morgana Lígia de Farias Freire  
Departamento de Física – UEPB

*Dedico este trabalho à minha esposa Eliane Araújo e ao meu filho Eduardo Lucas. Vocês me inspiraram força e coragem para superar todos os obstáculos encontrados no decorrer deste Curso.*

*Obrigado!*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me colocado no caminho do bem e por me fazer acreditar que é possível realizar grandes sonhos, tornando possível a conclusão deste curso.

Também gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que a conclusão deste trabalho:

Ao meu professor Orientador Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos pelo comprometimento e conhecimento compartilhado;

À minha esposa Eliane Araújo por ter me apoiado em todos os momentos, pelo carinho, pela paciência e por tudo aquilo que ela representa em minha vida;

A todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG. Em especial, aos professores: Danieverton Moretti, Marcos Anacleto, João Rafael, Francisco Brito e Rodrigo Holanda, pelos conhecimentos compartilhados;

À CAPES pelo apoio financeiro;

Ao secretário da pós-graduação, Sr. Hélio Pereira, pelo atendimento prestado;

A todos os meus colegas de curso pelo carinho e atenção a mim dispensados;

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos um escalonamento de Hořava-Lifshitz destinado a reescrever uma eletrodinâmica que viola a invariância de Lorentz com operadores derivativos controlados por um quadri vetor constante  $n_\mu$ . Esse método foi usado inicialmente para escalonar a lagrangiana de Maxwell e depois a lagrangiana de altas ordens derivativas, conhecida como modelo Myers-Pospelov. Após o processo de escalonamento, obtivemos que ambas as lagrangianas são descritas em função de um expoente crítico  $z$ , que insere um caráter anisotrópico para ambas as teorias. Foram obtidos os propagadores de Feynman e as relações de dispersão para ambos os modelos. Devido ao caráter birrefringente atribuído ao modelo de altas ordens derivativas, usamos os modos de propagação associados, como as soluções por frequências, e efetuamos os cálculos de polarização para determinar os limites superiores de ocorrências dos efeitos da quebra da invariância de Lorentz. Tais operações estão de acordo com as observações de explosões de raios gama, mais especificamente, o evento GRB051218A. O parâmetro que controla a quebra da invariância de Lorentz, apresenta-se superior em 8 (oito) ordens de magnitude, se comparado com alguns resultados da literatura. O atraso temporal na propagação de dois fótons também foi determinado.

**Palavras-Chave:** Teoria de Hořava-Lifshitz, Violação da Invariância de Lorentz, Explosões de Raios Gama.

## ABSTRACT

In this work, we study a Hořava-Lifshitz scaling which can be used to rewrite an electrodynamics which breaks the Lorentz invariance with derivatives operators controlled by a constant four-vector,  $n_\mu$ . This method was initially used to scale the Maxwell lagrangian and then the high orders derivatives lagrangian, known as Myers-Pospelov model. After of the process, we obtained that both the lagrangian are described in terms of a critical exponent  $z$ , which can be inserted as anisotropic character for both theories. The of Feynman propagators and dispersion relations for both models were obtained. Due to the birefringent character attributed to Myers-Pospelov model, we use the associate propagation modes, as solutions for frequencies, and we perform the polarization calculations to determine the upper limits of occurrences related with effects of Lorentz invariance breaking. Such operations are consistent with the recent observations of gamma-ray bursts, more specifically, the GRB 051218A event. The parameter which controls of the Lorentz invariance violation, it presents superior in eight (8) orders of magnitude, compared with some results of literature. The time delay in the propagation of two photons was also determined.

**Key-words:** Hořava-Lifshitz theories, Lorentz Invariance Violation, Gamma-Ray Bursts.



# Lista de Figuras

- 4.1 INTEGRAL, o observatório de explosões raios gama da ESA. Fonte: ESA . 27
- 4.2 O comportamento do parâmetro ( $\xi(z)$ ) que controla a invariância de Lorentz em função do expoente crítico. Os pontos evidenciam os valores dos expoentes críticos:  $z = 1$ ,  $z = \frac{3}{2}$ , e  $z = 2$ . . . . . 29

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz</b>	<b>12</b>
2.1	O Rescalonamento Lifshitz . . . . .	12
2.1.1	Invariância de Calibre do Modelo . . . . .	13
2.2	Equações de Movimento . . . . .	14
2.3	O Propagador do Campo de Calibre . . . . .	15
2.4	Modos de Propagação de Ondas . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Modelo de Maxwell-Myers-Pospelov-Hořava-Lifshitz</b>	<b>18</b>
3.1	O Modelo de Myers-Pospelov-Hořava-Lifshitz . . . . .	19
3.2	O Propagador do Campo de Calibre . . . . .	20
3.3	Modos de Propagação das Ondas . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Limites Fenomenológicos para Violação da Invariância de Lorentz</b>	<b>25</b>
4.1	Explosões de Raios Gama: Evento-GBR191204A . . . . .	25
4.2	O Grau de Polarização entre dois Fótons . . . . .	26
4.3	O Atraso Temporal no Voo Entre Dois Fótons . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>32</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>34</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A invariância de Lorentz, composta pelas transformações de translação e de rotação, juntamente com as propriedades da Mecânica Quântica, constituem a base da Teoria Quântica de Campos Moderna. Desde o seu estabelecimento, a invariância de Lorentz tem se mantido inalterada diante de testes rigorosos: teóricos e experimentais [1]. Uma grande prova do sucesso da invariância de Lorentz é que sua simetria, em conjunto com a simetria de  $CPT$ , composta pelas transformações de Conjugação de Carga ( $C$ ), Paridade ( $P$ ) e Reversão Temporal ( $T$ ), funcionam como fundamentos do Modelo Padrão (MP) da física de partículas fundamentais (com simetria de calibre  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ). Entretanto, tais fatos não asseguram que a invariância de Lorentz se realiza em todas as escalas de energia.

Devido aos recentes melhoramentos na sensibilidade das observações terrestres e astrofísicas, Kostelecký e Russell [2] e Liberati [3] vêm, de forma gradativa, renovando o interesse pela procura de efeitos que violam a invariância de Lorentz, em escalas de baixas energias. As motivações que sustentam as investigações desses possíveis efeitos estão ligadas às teorias que procuram oferecer uma descrição quântica consistente da gravidade, como a teoria da Gravidade Quântica [4] e a teoria de Cordas [5]. Essas teorias admitem que a violação da invariância de Lorentz ocorre em escalas de energias da ordem da energia de Planck, ou seja,  $M_P \sim 10^{19}$  GeV.

Em energias muito baixas, atingíveis pelos experimentos, a quebra de simetria tão fundamental como a de Lorentz, pode manifestar-se, por exemplo, na modificação da relação de dispersão para a propagação de partículas conhecidas, tais como os fótons. Isto conduz a descrever os efeitos que violam a invariância de Lorentz em baixas energias, através de teorias de campos efetivas [6, 7], muito embora, a teoria da Gravidade Quântica ainda permaneça como fundamental.

A construção mais simples de tais teorias efetivas é a chamada de Extensão do Modelo Padrão, proposta por Colladay e Kostelecký [8]. Esse tipo de abordagem estende

todos os setores da lagrangiana do Modelo Padrão pela incorporação de possíveis operadores fenomenológicos (parâmetros restringidos por dados observacionais) e renormalizáveis (até a dimensão-quatro) que violam explicitamente a invariância de Lorentz. Este tipo de construção tanto se aplica no espaço-tempo de Minkowski [8] quanto no espaço-tempo curvo [9].

Uma teoria, conhecida como extensão do MP em altas ordens derivativas, baseada no uso de operadores não-renormalizáveis (de dimensão cinco ou mais) que violam a invariância de Lorentz no espaço-tempo de Minkowski, tem sido construída recentemente para os casos de fótons [9] e férmions [10, 11] e representa uma generalização do assim chamado modelo Myers-Pospelov [12], que considera, em sua abordagem, somente operadores não-renormalizáveis de dimensão cinco.

Embora a construção de teorias efetivas com operadores derivativos e não-renormalizáveis seja uma boa abordagem para descrever efeitos restritos a escala de Planck, seus mecanismos podem, também, gerar problemas, como por exemplo, o aparecimento de soluções fantasmagóricas (Ghosts) e de instabilidades no conteúdo energético, devido a ação das altas ordens derivativas, bem como, problemas em usar certos refinamentos na quantização, devido ao caráter não-renormalizável do operador. Tais problemas podem ser contornados por agregar tais teorias às propriedades de outras teorias que se propõem a resolver problemas teóricos de quantização, como o mecanismo de antissimetrizar as componentes espaciais e temporal, para resolver o problema da quantização da Gravidade, proposta por Petr Hořava [13, 14] e por Visser [15].

Uma proposta de reescalonar o setor isotrópico do campo de calibre do modelo de Myers-Pospelov por um expoente crítico de Hořava-Lifshitz, foi introduzida por Passos *et al.* [16]. Neste trabalho, os autores discutem fenomenologicamente a possível emergência dos efeitos da violação da invariância de Lorentz em escala de energia abaixo de uma escala intermediária,  $\Lambda_{\text{HL}} \sim 10^{10}$  GeV, fruto de um processo de separação entre comportamento ultravioleta da escala de energia, decorrente do processo de escalonamento de Hořava-Lifshitz (a escolha da escala  $\Lambda_{\text{HL}}$ , pode ser encontrada no trabalho desenvolvido por Pospelov e Shang [17]) e a ação da escala de Planck ( $M_{\text{P}}$ ), associada ao modelo de Myers-Pospelov. Neste caso, as restrições fenomenológicas sobre a ocorrência da violação de Lorentz são obtidas pelo uso das recentes observações de explosões cosmológicas de raios gama, evento GRB 041219A [18, 19, 20, 21, 22, 23].

De acordo com a proposta de Passos *et al.* [16], pretendemos estudar o procedimento de reescalonamento de Hořava-Lifshitz para o modelo de Myers-Pospelov de altas ordens derivativas. Nosso principal objetivo é o de reformular os procedimentos que se propõem a modificar a eletrodinâmica de Maxwell. Além disso, pretendemos aprimorar algumas técnicas fenomenológicas destinadas a limitar os efeitos da violação da invariância de Lorentz pelo uso das recentes observações astrofísicas de explosões de raios gama.

O presente trabalho de dissertação encontra-se organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, introduzimos a técnica de reescalonamento de Hořava-Lifshitz para a eletrodinâmica de Maxwell. Obtemos o propagador do campo de calibre e conseqüentemente, os modos de propagação das ondas eletromagnéticas. No Capítulo 3, estudamos o reescalonamento de Hořava-Lifshitz para o setor isotrópico do setor do campo de calibre do modelo de Myers-Pospelov. Também obtemos o propagador de Feynman e os modos de propagação das ondas eletromagnéticas associadas. No Capítulo 4, apresentamos uma breve introdução a física de explosões cosmológicas de raios gama com ênfase para as recentes observações do evento GRB041219A. Estudamos também, cálculos de polarização e de atraso temporal na propagação de dois fótons. Neste caso, demonstramos como se obter limites superiores para o parâmetro que controla a violação da simetria de Lorentz. No Capítulo 5, apresentamos as nossas conclusões e as propostas de desenvolver novos trabalhos.

Ao logo deste trabalho, adotamos o sistema de unidades naturais tal que  $c = \hbar = 1$ .

# Capítulo 2

## Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz

Como é conhecido na literatura, a teoria da Relatividade Geral (com a constante de acoplamento  $[G] = [M]^{-2}$ , onde  $[M]$  representa a unidade de massa ) não possui consistência quântica no regime do ultravioleta (UV). Assim, o procedimento de Hořava-Lifshitz apresenta-se como uma abordagem alternativa de compreender o comportamento quântico da teoria da Relatividade Geral, no regime UV [13]. O apelo principal é o de que podemos introduzir uma assimetria entre o espaço e tempo. Neste caso, admite-se que a dimensão da coordenada temporal seja:  $[t] = [L]^z$  (sendo  $[L]$  a unidade de comprimento e  $z$  o expoente crítico de Lifshitz) e a dimensão da coordenada espacial seja dada como  $[\vec{r}] = [L]$ . O efeito desta abordagem assimétrica é o de transformar os principais acoplamentos constantes da teoria em acoplamentos adimensionais (depois de uma escolha apropriada para o valor de  $z$ ). Nesta abordagem desenvolvida por Hořava [13], mostrou-se que  $z \geq 3$  é suficiente para transformar a Relatividade Geral numa teoria renormalizável, no regime UV. Neste capítulo, estudamos a eletrodinâmica de Maxwell submetida ao rescalonamento de Hořava-Lifshitz. Para isso, discutimos a invariância de calibre da teoria resultante e obtemos as equações de movimento, a relação de dispersão e o propagador da teoria. Todas essas quantidades foram escritas em função do expoente crítico  $z$ .

### 2.1 O Rescalonamento Lifshitz

De acordo com Pospelov e Shang [17], uma modificação do tipo Hořava-Lifshitz na parte magnética do tensor de campo de Maxwell, pode ser escrita através da ação

$$S_{\text{M,HL}} = -\frac{1}{2} \int dt d^3\vec{x} \left[ F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{2} F_{ij} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij} \right], \quad (2.1)$$

onde  $\Delta = -\partial_i \partial^i = \vec{\partial} \cdot \vec{\partial}$ . Neste caso, a métrica usada é a de Minkowski, cuja assinatura é  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Para a teoria Hořava-Lifshitz (considerando  $[t] = [L]^z$  e  $[\vec{x}] = [L]$ ), temos que

$$[\partial_t] = [L]^{-z} \quad \text{e} \quad [\partial_i] = [L]^{-1}. \quad (2.2)$$

Como a ação é adimensional, podemos verificar também que

$$[A_0] = [L]^{-\frac{1}{2}(z+1)} \quad \text{e} \quad [A_i] = [L]^{\frac{1}{2}(z-3)}. \quad (2.3)$$

Para  $z = 1$ , recuperamos a ação usual para o campo livre de Maxwell.

De acordo com Visser [15], as dimensões podem ser reescaladas da seguinte forma

$$t \mapsto \Lambda_{\text{HL}}^{(1-z)} t; \quad \partial_t \mapsto \Lambda_{\text{HL}}^{z-1} \partial_t; \quad A_0 \mapsto \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)} A_0; \quad A_i \mapsto \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(1-z)} A_i; \quad \text{e} \quad M_{\text{P}} \mapsto \Lambda_{\text{HL}}^{z-1} M_{\text{P}} \quad (2.4)$$

onde  $\Lambda_{\text{HL}}$  é a escala de energia da teoria Hořava-Lifshitz, cuja dimensão pode ser expressa como  $[\Lambda_{\text{HL}}] = [L]^{-1}$ . Após este procedimento, as quantidades assumem dimensões conhecidas como:

$$[t] = [L] \quad \text{e} \quad [\partial_t] = [A_0] = [A_i] = [M_{\text{P}}] = [L]^{-1}. \quad (2.5)$$

Aplicando as relações (2.4) na Eq. (2.1), encontramos

$$S_{\text{M,HL}} = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{M,HL}}), \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{L}_{\text{M,HL}}$  é a densidade de lagrangiana de Maxwell, reescalada via o método Hořava-Lifshitz. Podemos escrevê-la explicitamente como:

$$\mathcal{L}_{\text{M,HL}} = -\frac{1}{2} \left[ F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ij} (-\Delta)^{z-1} F^{ij} \right], \quad (2.7)$$

onde  $F^{0i} = (\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$  e  $F^{ij} = (\partial^i A^j - \partial^j A^i)$ , são as respectivas contribuições elétricas e magnéticas do tensor intensidade de campo eletromagnético. Este é o modelo investigado por Pospelov e Shang [17].

### 2.1.1 Invariância de Calibre do Modelo

Em uma teoria de calibre, a exigência de que as transformações sejam globais é deixada de lado, e a lagrangiana possui uma simetria meramente local. Isso pode ser visto como uma generalização do princípio da equivalência da relatividade geral, onde para cada ponto do espaço-tempo é permitido uma escolha de um referencial local.

Para o caso da Eq.(2.7), a invariância de calibre do modelo pode ser examinada de forma semelhante ao formalismo de Arnowitt-Deser-Misner para a gravidade de Lifshitz [17, 24]. Na prática, consideramos a seguinte decomposição dos campos:

$$A_0, \quad A_i = A_i^T + \partial_i \varphi \quad (2.8)$$

de tal forma que a Eq.(2.7) se transforma como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \{ A_k^T [(\partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)}(-\Delta)^z) \eta^{ik}] A_i^T + (A_0 + \dot{\varphi}) \Delta (A_0 + \dot{\varphi}) \}, \quad (2.9)$$

o que torna explícita a seguinte simetria de calibre:

$$A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 + \dot{\omega}, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \omega, \quad (2.10)$$

assim como a simetria habitual  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$ .

## 2.2 Equações de Movimento

As equações de movimento podem ser determinadas a partir da equação de Euler-Lagrange que é dada por [25]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0. \quad (2.11)$$

Esta que pode ser decomposta primeiramente para o campo  $A^0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_0)} = 0, \quad (2.12)$$

E depois para o campo  $A^i$ , como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_i)} = 0. \quad (2.13)$$

Aplicando as Eqs.(2.12) e Eq.(2.13) na lagrangiana da Eq.(2.7), encontramos

$$\partial_j \frac{\partial}{\partial (\partial_j A_0)} \left[ -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right] = \partial_i F^{0i} = 0. \quad (2.14)$$



Além disso, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} & \partial_0 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \left[ -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right] + \partial_j \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} \left[ -\frac{1}{4\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} F_{ab} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ab} \right] = \\ & = -\partial_0 F^{0i} + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} \partial_i F^{ij} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, para o modelo Maxwell-Hořava-Lifshitz, as equações de movimento são dadas por:

$$\partial_i F^{0i} = 0 \quad \text{e} \quad -\partial_0 F^{0i} + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} \partial_i F^{ij} = 0, \quad (2.16)$$

ou, em termos dos campos elétrico ( $F^{0i} = -E^i$ ) e magnético ( $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k$ ), respectivamente, são dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (2.17b)$$

As equações de Maxwell restantes podem ser obtidas pelo tensor dual do tensor intensidade de campo eletromagnético. O expoente crítico afeta apenas a Lei de Ampère-Maxwell.

## 2.3 O Propagador do Campo de Calibre

O cálculo do propagador do fóton, a partir da lagrangiana de Maxwell, requer a introdução de um termo de fixação de calibre para que o propagador seja determinado de maneira unívoca. Logo, considerando a Lagrangiana (2.7), adaptamos o termo de fixação de calibre dado por

$$\mathcal{L}_{\text{FC}} = -\frac{1}{2} \left[ (\partial_0 A_0)^2 + \frac{1}{\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} (\partial_i A^i)^2 \right], \quad (2.18)$$

de modo que

$$\mathcal{L}_{\text{MHL}} = -\frac{1}{2} \left\{ F_{0i} F^{0i} + (\partial_0 A_0)^2 + \frac{1}{2\Lambda_{HL}^{2(z-1)}} [F_{ij} (-\Delta)^{z-1} F^{ij} + 2(-\Delta)^{(z-1)} (\partial_i A^i)^2] \right\}. \quad (2.19)$$

Usando agora a condição calibre:  $A_0 = 0$  [17], associada com algumas integrações por partes, teremos que a Eq.(2.19) reduz-se a:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x A^i \left\{ \left[ \partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right] \eta_{ij} \right\} A^j. \quad (2.20)$$

Neste ponto, iremos determinar o propagador do fóton associado com a ação dada pela Eq.(2.20). Formalmente, o termo entre colchetes (núcleo da ação da Eq.(2.20)) aplicado a uma função Green, nos leva ao propagador de Feynman. Aqui, optamos por um procedimento mais informal pelo qual indentificamos o operador cinético do fóton como

$$(\Delta_F^{-1})_{ik} = \left[ \partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right] \eta_{ik}, \quad (2.21)$$

o qual pode ser escrito no espaço dos momentos (em nossa notação  $\vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = k^2$ ), como:

$$(\Delta_F^{-1})_{ik}(k) = \left[ -\omega^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right] \eta_{ik}. \quad (2.22)$$

Esse resultado nos conduz a escrever a seguinte identidade:

$$(\Delta_F^{-1})_{ik}(k)(\Delta_F)^{kl}(k) = i\delta_i^l, \quad (2.23)$$

onde  $(\Delta_F)^{kl}(k)$  corresponde ao propagador de Feynman que pode ser previsto pelo *Ansatz* específico:

$$(\Delta_F)^{kl}(k) = -\mathcal{A} \eta^{kl}. \quad (2.24)$$

Isto implica primeiramente em

$$\left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right] \mathcal{A} \delta_i^l = i\delta_i^l \quad (2.25)$$

e depois no seguinte resultado

$$\mathcal{A} = \frac{i}{\left( \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right)}. \quad (2.26)$$

A partir das Eqs.(2.24) e (2.26) obtemos que o propagador de Feynman é:

$$(\Delta_F)^{kl}(k) = -\frac{i\eta^{kl}}{\left( \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right)}. \quad (2.27)$$

Note que em  $z = 1$ , recuperamos o propagador de Feynman usual do campo eletromagnético no calibre de Coulomb [26].

## 2.4 Modos de Propagação de Ondas

Os modos de propagação das ondas eletromagnéticas, como as frequências e as velocidades de grupo, são usualmente obtidos através da relação de dispersão das ondas. Essa quantidade pode ser diretamente obtida pelo denominador do propagador de Feynman associado (Eq.(2.27)), quando submetido a uma equação de auto-valores. Dessa forma, teremos que

$$\omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} = 0. \quad (2.28)$$

Logo, resolvendo a Eq.(2.28), devemos encontrar as seguintes soluções em função das frequências:

$$\omega_\lambda = \frac{\lambda k^z}{\Lambda_{HL}^{(z-1)}}, \quad (2.29)$$

onde  $\lambda$  representa as duas polarizações, ou seja,  $\lambda = \pm 1$ . Para  $z = 1$ , obtemos as soluções do caso usual [25].

A velocidade de grupo associada é:

$$v_{g\lambda} = \frac{d\omega_\lambda}{dk} = z\lambda \left( \frac{k}{\Lambda_{HL}} \right)^{z-1}. \quad (2.30)$$

Em  $z = 1$ , a quantidade permanece constante. Por outro lado, para  $z > 1$  temos que a velocidade de grupo torna-se dependente da energia.

# Capítulo 3

## Modelo de Maxwell-Myers-Pospelov-Hořava-Lifshitz

O estudo das derivadas de ordens mais elevadas, no cenário da variação da invariância de Lorentz, foi inicialmente proposto por Myers e Pospelov [12]. O modelo de Myers e Pospelov corresponde a uma teoria de campos efetiva, destinada a descrever efeitos exclusivos da escala de Planck,  $M_P \sim 10^{19}\text{GeV}$ , ou seja, efeitos associados a escala do UV [12].

Na prática, este procedimento introduz operadores derivativos de dimensão-cinco, ao longo de um quadri-vetor constante  $n_\mu$  não-dinâmico, interagindo com campos escalares, férmions e fótons. Para o campo eletromagnético, eles proporam uma modificação no seguinte termo de CPT-ímpar, de modo que:

$$S_{\text{MP}} = -\frac{\xi}{M_P} \int d^4x n^\alpha F_{\alpha\delta} n^\gamma \partial_\gamma n_\beta \tilde{F}^{\beta\delta}, \quad (3.1)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro adimensional,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$ ,  $F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$  e  $\tilde{F}^{\beta\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\delta\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ . Nesse caso, optamos por escolher a natureza do quadri-vetor  $n_\mu$  como puramente tipo-tempo  $n_\mu = (n_0 \equiv 1, \vec{0})$ , o qual pode nos conduzir a uma anisotropia espacial no espaço-tempo. Para tanto, realizando uma integração por partes na Eq.(3.1) e utilizando a identidade de Bianchi,  $\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$ , obteremos que:

$$S_{\text{MP}} = -\frac{\xi}{2M_P} \int d^4x \varepsilon^{ijk} A_i \partial_t^2 F_{jk}, \quad \text{com } \varepsilon^{ijk} \equiv \varepsilon^{0ijk}. \quad (3.2)$$

Onde os índices  $i, j$  e  $k$  indicam os componentes espaciais (1, 2, 3) e  $F_{ij}$  é o componente espacial do tensor intensidade do campo eletromagnético.

A partir da Eq.(3.2), temos que a invariância de Lorentz é quebrada em torno da escala  $M_P$ . Regime este que pode apresentar diversas abordagens para o modelo,

tanto no ponto de vista teórico quanto fenomenológico. Além disso, teoria desta natureza pode apresentar problemas relacionados com operadores não-renormalizáveis, violando a simetria de Lorentz.

Neste capítulo, vamos considerar o processo de reescalonamento de Hořava-Lifshitz e reescrever a Eq.(3.2) em função do expoente crítico  $z$ . Neste caso, discutiremos a invariância de calibre da teoria resultante, obteremos as equações de movimento, a relação de dispersão e o propagador da teoria com seus respectivos modos de propagação. Todas essas quantidades serão escritas em função do expoente crítico  $z$ .

### 3.1 O Modelo de Myers-Pospelov-Hořava-Lifshitz

Assim como o caso da Lagrangiana de Maxwell, visto no capítulo anterior, reescrevemos a Eq.(3.2) na forma

$$S_{\text{MP,HL}} = -\frac{\xi}{2M_{\text{P}}} \int dt d^3\vec{x} \varepsilon^{ijk} A_i \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{(z-1)} F_{jk}, \quad (3.3)$$

onde a dimensão da massa de Planck em relação ao expoente crítico é  $[M_{\text{P}}] = [L]^{-z}$ . Agora, usando a definição da escala de energia Hořava-Lifshitz ( $\Lambda_{\text{HL}}$ ), dada pelas relações (2.4), cujas unidades são expressas na forma  $[\Lambda_{\text{HL}}] = [L]^{-1}$ , podemos reescrever a Eq.(3.3) como:

$$S_{\text{MP,HL}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \left[ \frac{\xi R_{\text{HLP}}}{(\Lambda_{\text{HL}})^z} \varepsilon^{ijk} A_k \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{(z-1)} F_{ij} \right]. \quad (3.4)$$

onde  $R_{\text{HLP}}$  é a razão entre a escala de Hořava-Lifshitz  $\Lambda_{\text{HL}}$  e a escala de Planck  $M_{\text{P}}$ , isto é,  $R_{\text{HLP}} = \frac{\Lambda_{\text{HL}}}{M_{\text{P}}}$ . Esta relação pode ser considerada muito pequena (na ordem de  $R_{\text{HLP}} \sim 10^{-9}$ ), sendo uma nova maneira de quebrar explicitamente a supersimetria, sem precisar reintroduzir o ajuste fino como nos processos de correções quânticas [17, 27].

A partir das Equações (2.7) e (3.4), podemos construir uma eletrodinâmica que viola a simetria de Lorentz, com o reescalonamento Hořava-Lifshitz, cuja ação é dada por:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \left[ F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ij} (-\Delta)^{z-1} F^{ij} + \frac{\xi R_{\text{HLP}}}{(\Lambda_{\text{HL}})^z} \varepsilon^{ijk} A_k \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{z-1} F_{ij} \right]. \quad (3.5)$$

Esse modelo é composto tanto pelo reescalonamento de Hořava-Lifshitz quanto pelos termos que violam a invariância de Lorentz. Observe que para  $\xi \rightarrow 0$  em  $z = 1$ , recuperamos a eletrodinâmica em sua forma usual.

A invariância de calibre desse modelo, Eq.(3.5), pode ser examinada de forma

semelhante ao formalismo utilizado no caso do capítulo anterior. Nesse caso, primeiro submetemos o modelo a seguinte decomposição dos campos:  $A_0$  e  $A_i = A_i^T + \partial_i \varphi$ . De tal forma que podemos reescrever a ação (3.5) como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ A_k^T \left[ \left( \partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right) \eta^{ik} + 2\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} \varepsilon^{ijk} \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{(z-1)} \partial_j \right] A_i^T + (A_0 + \varphi) \Delta (A_0 + \varphi) \right\}. \quad (3.6)$$

O que a torna invariante diante da transformação de calibre, dada pela Eq.(2.10), como se estivesse sido aplicada a transformação de calibre usual:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$ .

## 3.2 O Propagador do Campo de Calibre

Assim como fizemos na seção 2.3, nesta seção obtemos o propagador de Feynman associado a Eq.(3.5) com quebra explícita da simetria de Lorentz. Para isso, consideremos a presente ação adicionada do termo de fixação de calibre, Eq.(2.18), para  $1 \rightarrow \lambda$ , onde  $\lambda$  agora é um parâmetro arbitrário, de modo que a ação resultante é:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ F_{0i} F^{0i} + \lambda (\partial_0 A_0)^2 + \frac{1}{2} \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} [F_{ij} (-\Delta)^{z-1} F^{ij} + 2\lambda (-\Delta)^{(z-1)} (\partial_i A^i)^2] - \frac{1}{2} \frac{\xi R_{HLP}}{(\Lambda_{HL})^z} \varepsilon^{ijk} A_k \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{z-1} F_{ij} \right\}. \quad (3.7)$$

Usando o método da integração por partes em conjunto com a condição de calibre  $A_0 = 0$ , podemos reescrever a ação, Eq.(3.7), como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x A^i \left\{ \left[ \partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right] \eta_{ik} + (1 - \lambda) \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^{(z-1)} \partial_i \partial_k - 2\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{(z-1)} \varepsilon_{ijk} \partial^j \right\} A^k. \quad (3.8)$$

Nesse caso, a partir da Eq.(3.8), podemos identificar o operador cinético não-covariante associado a esta ação como:

$$\begin{aligned} (\hat{\Delta}_F^{-1})_{ik} &= \left[ \partial_t^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right] \eta_{ik} + (1 - \lambda) \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} (-\Delta)^{(z-1)} \partial_i \partial_k \\ &\quad - \frac{2\xi R_{HLP}}{(\Lambda_{HL})^z} \partial_t^2 (\sqrt{-\Delta})^{(z-1)} \varepsilon_{ijk} \partial^j, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que, no espaço dos momentos (usando a notação  $\vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = k^2$ ), também pode ser escrito como:

$$\left[ \hat{\Delta}_F^{-1}(k) \right]_{ik} = \mathcal{A}_1 \eta_{ik} + \mathcal{B}_1 k_i k_k + \mathcal{C}_1 \varepsilon_{ijk} k^j, \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \left[ -\omega^2 + \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right], \\ \mathcal{B}_1 &= (1 - \lambda) \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2(z-1)}, \\ \mathcal{C}_1 &= -2i\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} \omega^2 k^{(z-1)}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Neste ponto, vamos iniciar o processo do operador acima o qual resultará no propagador de Feynman modificado. A Eq.(3.10), quando aplicada a uma função Green, nos leva ao propagador de Feynman, o qual pode ser calculado a partir da relação

$$[\Delta_F^{-1}(k)]_{ik} [\Delta_F(k)]^{il} = i\delta_k^l. \quad (3.12)$$

onde  $[\Delta_F(k)]^{il}$  é a quantidade a ser obtida. Para tanto, consideremos primeiramente o *Ansatz*

$$[\Delta_F(k)]^{il} = -\mathcal{A}_2 \eta^{il} + \mathcal{B}_2 k^i k^l + \mathcal{C}_2 \varepsilon^{iml} k_m. \quad (3.13)$$

Agora, aplicando as Equações (3.10) e (3.13) na Eq.(3.12), esta tomará a seguinte forma explícita

$$\begin{aligned}- (\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) \delta_k^l + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2) k_k k^l + (\mathcal{A}_1 \mathcal{C}_2) \eta_{ik} \varepsilon^{iml} k_m - (\mathcal{B}_1 \mathcal{A}_2) k_k k^l - (\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2) k^2 k_k k^l \\ - (\mathcal{C}_1 \mathcal{A}_2) \eta^{il} \varepsilon_{ijk} k^j + (\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2) (k_k k^l - k^2 \delta_k^l) = i\delta_k^l.\end{aligned}\quad (3.14)$$

A partir da Eq.(3.14), obtemos que:

$$[(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) + (\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2)] \delta_k^l = -i\delta_k^l, \quad (3.15a)$$

$$[(\mathcal{A}_1 \mathcal{C}_2) - (\mathcal{C}_1 \mathcal{A}_2)] \eta^{il} \varepsilon_{ijk} k^j = 0, \quad (3.15b)$$

$$[(\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2) - (\mathcal{B}_1 \mathcal{A}_2) - (\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2) k^2 + (\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2)] k_k k^l = 0. \quad (3.15c)$$

A resolução do sistema de equações acima, nos fornece os seguintes resultados

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{i\mathcal{A}_1}{(\mathcal{A}_1)^2 + (\mathcal{C}_1)^2 k^2}, \quad (3.16a)$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{i[(\mathcal{C}_1)^2 - \mathcal{B}_1 \mathcal{A}_1]}{(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1 k^2)[(\mathcal{A}_1)^2 + (\mathcal{C}_1)^2 k^2]}, \quad (3.16b)$$

$$\mathcal{C}_2 = -\frac{i\mathcal{C}_1}{(\mathcal{A}_1)^2 + (\mathcal{C}_1)^2 k^2}. \quad (3.16c)$$

Inserindo as Equações (3.16a), (3.16b) e (3.16c) na Eq.(3.13), encontramos que:

$$[\Delta_F(k)]^{il} = \frac{i}{[(\mathcal{A}_1)^2 + (\mathcal{C}_1)^2 k^2]} \left[ \mathcal{A}_1 \eta^{il} + \frac{[(\mathcal{C}_1)^2 - \mathcal{B}_1 \mathcal{A}_1] k^i k^l}{(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1 k^2)} - \mathcal{C}_1 \varepsilon^{iml} k_m \right]. \quad (3.17)$$

Finalmente, a forma explícita do propagador modificado associado a Eq.(3.17) para a condição  $\lambda = 1$ , isto é,  $\mathcal{B}_1 = 0$ , pode ser dada por

$$\begin{aligned} \left[ (\hat{\Delta}_F(k)) \right]^{il} = & -\frac{i}{\hat{D}(k)} \left\{ \left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right] \eta^{il} - \frac{\left[ 2\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} \omega^2 k^{(z-1)} \right]^2}{\left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right]} k^i k^l \right. \\ & \left. - 2i\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} \omega^2 k^{(z-1)} \varepsilon^{iml} k_m \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\hat{D}(k) = \left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right]^2 - 4(\xi R_{HLP})^2 (\Lambda_{HL})^{-2z} \omega^4 k^{2z}. \quad (3.19)$$

É interessante perceber que quando  $z = 1$  temos que as Eqs. (3.18) e (3.19) apenas recuperam o propagador associado à lagrangiana eletromagnética de Myers-Pospelov no calibre de Coulomb [28]. Por outro lado, para  $\xi = 0$  também recuperamos o propagador de Feynman obtido no capítulo anterior.

### 3.3 Modos de Propagação das Ondas

Como vimos na Seção anterior, a Eq.(3.19) corresponde ao determinante do operador associado a equação de movimento da teoria em questão. Considerando  $\hat{D}(k) = 0$ , isto representará a relação de dispersão das ondas eletromagnéticas. Portanto, sua forma não-covariante é dada por:

$$\left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right]^2 - 4(\xi R_{HLP})^2 (\Lambda_{HL})^{-2z} \omega^4 k^{2z} = 0. \quad (3.20)$$

Ou ainda,

$$\left[ \omega^2 - \Lambda_{HL}^{-2(z-1)} k^{2z} \right] - 2\lambda(\xi R_{HLP})(\Lambda_{HL})^{-z} \omega^2 k^z = 0. \quad (3.21)$$

Para derivarmos um conjunto de restrições sobre violação da invariância de Lorentz a partir dos efeitos de birrefringência do vácuo, usando observações específicas de explosões de raios gama, temos que resolver a relação de dispersão, Eq.(3.21), obtendo as soluções de frequência. Essas soluções são dadas por:

$$\omega_\lambda = \frac{k^z}{\Lambda_{HL}^{(z-1)} \sqrt{1 - 2\lambda\xi R_{HLP} (\Lambda_{HL})^{-z} k^z}}. \quad (3.22)$$

É possível observar que as soluções para a Eq.(3.22) reproduzem os valores usuais no



limite  $\xi \rightarrow 0$  em  $z = 1$ . Já para  $\xi \neq 0$  em  $z = 1$ , temos que:

$$\omega_\lambda = \frac{k}{\sqrt{1 - 2\lambda\xi M_P^{-1} k}}. \quad (3.23)$$

Essas soluções podem ser associadas com os efeitos produzidos pelos operadores de dimensão cinco, através do modelo Myers-Pospelov [12, 29]. Agora, realizando uma expansão na Eq.(3.22), obtemos que

$$\left[ 1 + \left( \frac{-2\lambda\xi R_{HLP} k^z}{(\Lambda_{HL})^z} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\lambda\xi R_{HLP} k^z}{(\Lambda_{HL})^z} \dots \quad (3.24)$$

Assim, a partir da condição  $k^z \ll 1/2\xi R_{HLP}(\Lambda_{HL})^{-z}$ , encontramos que:

$$\omega_\lambda \approx \frac{k^z}{(\Lambda_{HL})^{(z-1)}} + \frac{\lambda(\xi R_{HLP}) k^{2z}}{(\Lambda_{HL})^{2z-1}}. \quad (3.25)$$

Esta relação pode ser considerada como soluções aproximadas associadas com a seguinte relação de dispersão modificada:

$$\omega^2 - \frac{k^{2z}}{(\Lambda_{HL})^{2(z-1)}} - \frac{2\lambda(\xi R_{HLP}) k^{3z}}{(\Lambda_{HL})^{3z-2}} = 0. \quad (3.26)$$

Para  $z = 1$ , recuperamos as modificações cúbicas [12]. Para  $z > 1$ , encontramos novas expressões, devido à influência direta do expoente crítico de Lifshitz.

Considerando-se apenas as soluções dadas pela Eq.(3.26), que pode ser decomposta em dois setores como:

$$\omega(k) \rightarrow \omega_{nb}(k) + \omega_{b\pm}(k), \quad (3.27)$$

onde  $[\omega_{nb}(k)]$  é um setor não-birrefringente e  $[\omega_{b\pm}(k)]$  é um setor birrefringente. O setor não-birrefringente é dado por

$$\omega_{nb}(k) = -k + \frac{k^z}{(\Lambda_{HL})^{z-1}}. \quad (3.28)$$

Observa-se que para  $z = 1$ , a quantidade não-birrefringente desaparece. No entanto, para  $z > 1$ , a relação de dispersão pode ser associada com um modelo específico que quebra a invariância de calibre [17]. O setor birrefringente pode ser expresso como:

$$\omega_{b\pm}(k) = k \pm \frac{(\xi R_{HLP}) k^{2z}}{(\Lambda_{HL})^{2z-1}}. \quad (3.29)$$

Este resultado nos leva a uma rotação da polarização durante a propagação dos fótons linearmente polarizados. De acordo com a Eq.(3.29), para o expoente crítico de Lifshitz  $z = 1$ , encontramos uma correção na ordem de  $\xi(M_P)^{-1}k^2$  que corresponde aos operadores

de dimensão-cinco. Para  $z = 2$ , encontramos correções na ordem de  $\xi(M_{\text{P}})^{-1}(\Lambda_{\text{HL}})^{-2}k^4$  associadas aos operadores de dimensão-sete. Além disso, se considerarmos um expoente crítico intermediário  $z = 3/2$ , encontramos uma correção na ordem de  $\xi(M_{\text{P}})^{-1}(\Lambda_{\text{HL}})^{-1}k^3$ , associada com os operadores de dimensão-seis.

A relação de dispersão dada pela Eq.(3.29) conduz a uma velocidade da luz modificada para o fóton com momento  $k$ , dada por.

$$v_g = \frac{d\omega_{b\pm}}{dk} = 1 \pm 2z (\xi R_{\text{HLP}}) \left[ \frac{k}{\Lambda_{\text{HL}}} \right]^{2z-1}. \quad (3.30)$$

Quando fazemos  $\xi = 0$ , temos fótons luminiais, ou seja, propagações na fronteira do cone de luz. Para  $\xi < 0$ , temos fótons subluminais, ou seja, propagações dentro do cone de luz. Para  $\xi > 0$ , temos os fótons superluminais, isto é, propagações fora do cone de luz, setores nos quais as causas e os efeitos são perdidos. Estes resultados independem do valor do coeficiente crítico de Lifshitz.

# Capítulo 4

## Limites Fenomenológicos para Violação da Invariância de Lorentz

Observações astrofísicas, que medem o grau de polarização da velocidade de propagação de fótons, têm sido consideradas como possibilidades de inferir sobre a ocorrência de "pequenas" violações da invariância de Lorentz na natureza. Aqui, estudamos possíveis restrições ao parâmetro  $\xi$  (que viola a invariância de Lorentz) sobre o efeito do expoente crítico de Lifshitz. Neste sentido, consideramos as recentes determinações de explosões de raios gama, em particular, dados relacionados ao evento denominado GRB191204A, através dos quais se observou um grau elevado de polarização da radiação emitida. Juntamente a isto, usamos o valor obtido para a restrição de  $\xi$  e calculamos o atraso temporal entre o voo de dois fótons emitidos da fonte até o observador.

### 4.1 Explosões de Raios Gama: Evento-GRB191204A

As chamadas explosões cósmicas de raios gama (GRBs - Gamma-Ray Burst) são fenômenos que emitem a maior quantidade de energia por unidade de tempo (potência de emissão de radiação) no universo. Uma única explosão, com uma duração típica de alguns segundos, pode emitir tanta energia em raios gama quanto o Sol vai emitir durante toda a sua vida, ou seja, em 10 bilhões de anos, em todas as faixas do espectro eletromagnético. Isso é comparável a transformar inteiramente a massa do Sol em energia - de acordo com a fórmula de Einstein ( $E = mc^2$ ) - em algumas dezenas de segundos, ou emitir, durante esse período de tempo, a mesma energia que a nossa Galáxia inteira emite em 100 anos. O único evento cósmico mais energético do que uma explosão dessas foi a própria explosão inicial do universo, o Big Bang [30].

Tais eventos foram observados pela primeira vez no final dos anos 1960 [31] pelos Satélites Vela (do espanhol vela: vigília), desenvolvidos pelos Estados Unidos cujo objetivo

foi controlar a aplicação do Tratado de Interdição Parcial de Testes Nucleares, assinado em 1963 com a antiga URSS e vários outros países que dispunham de um programa de armas nucleares. Para cumprir seus objetivos, os satélites foram equipados com instrumentos que permitiam detectar Raios Gama, Raios-X e nêutrons, emitidos por explosões nucleares. Os instrumentos desses satélites possibilitavam captar explosões de raios gama - esses eventos astronômicos violentíssimos que acompanham o nascimento de buracos negros que segue a morte de uma estrela ou uma colisão de galáxias.

Após as importantes observações do sistema de satélites VELA, os estudos científicos sobre GRBs intensificaram e atualmente já se tem um bom conhecimento sobre certas características físicas e tipos de evento dos GRBs. Quanto aos aspectos gerais: pulsos curtos e intensos (caracterizando fontes transientes); direção randômica (aleatória) no céu; distâncias cosmológicas da origem do evento até aos pontos de observações; faixa de luminosidade isotrópica (direção de propagação bem definida):  $10^{51}$  -  $10^{52}$  ergs/seg de potência de cada pulso; energia estimada no início das explosões gira em torno de  $10^{51}$  TeV. Quanto as espécies de GRBs, temos dois tipos: os de longa e de curta duração. Os de longas durações são os a partir de 2 segundos a algumas centenas de segundos; fosforescentes; possíveis mecanismos são *modelos de colapso de supernova*. Os de curta duração são os a partir de milionésimos de segundos à 2 segundos; explosões negras (não fosforescentes); possíveis mecanismos são colisões ou fusões de objetos compactos tipo fusão de estrelas de nêutrons ou de dois buracos negros.

Dentre os diversos eventos de GRBs detectados, destacamos as recentes determinações da distância percorrida das explosões de raios gama detectado em 19 de dezembro de 2004 (GRB 041219A) obtidas em tempo real pelo sistema de alerta de GRBs *INTEGRAL* (International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory) [32, 33, 34]. A Fig.(4.1) apresenta uma ilustração do satélite INTEGRAL no espaço.

As observações do evento GRB 041219A se destacam em relação às outras já realizadas, pelo alto grau de polarização observado na rápida emissão de radiação gama. Os valores medidos que usamos foram os seguintes:  $\Delta\theta(d) = 47^\circ$  para o grau de polarização obtidas pelas medidas feitas ao longo da duração da explosão da radiação e  $d = 85 \text{ Mpc} = 2.6 \times 10^{26} \text{ cm}$  para o limite inferior da distância da luminosidade correspondente a um redshift de  $z_{red} = 0.02$  [22].

## 4.2 O Grau de Polarização entre dois Fótons

A birrefringência do vácuo é um efeito importante para que possamos obter os limites sobre os parâmetros que controlam a quebra da invariância de Lorentz. Considerando a Eq.(3.30), verifica-se que diferentes velocidades de grupo implicam que o vetor de

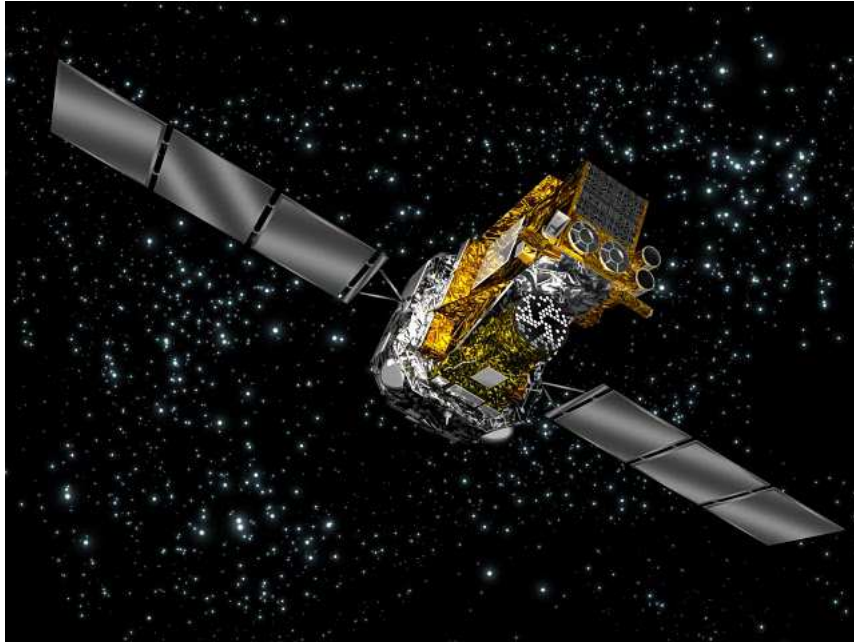


Figura 4.1: INTEGRAL, o observatório de explosões raios gama da ESA. Fonte: ESA

polarização de uma onda plana, linearmente polarizada, gira de forma anômala (através de um ângulo  $\Delta\theta$ ) em relação ao eixo de rotação, durante a propagação da onda, ao longo de uma distância  $d$ . Nesse caso, a direção da polarização pode ser estimada teoricamente pela seguinte expressão:

$$\Delta\theta(d) = \frac{[\omega_{b+}(k) - \omega_{b-}(k)] d}{2}. \quad (4.1)$$

De modo que:

$$\Delta\theta(d) \approx \frac{\xi (R_{HLP}) k^{2z} d}{2 (\Lambda_{HL})^{2z-1}}. \quad (4.2)$$

A Eq.(4.2) refere-se ao grau de radiação polarizada com o fenômeno da birrefringência. É evidente que tal variação depende fortemente das energias dos fótons e, portanto, esse efeito poderia perturbar a quantidade de polarização presente em alguma luz polarizada viajando longas distâncias. Especificamente, dependendo da quantidade de informação disponível sobre o objeto específico observado, pode-se usar este fato para lançar restrições sobre os parâmetros que violam a invariância de Lorentz nos modelos dos fótons de duas maneiras diferentes [35]. Neste caso, o parâmetro que controla a violação da invariância de Lorentz pode ser expresso como:

$$\xi \approx \frac{2\Delta\theta(\Lambda_{HL})^{2z-1}}{d(R_{HLP}) k^{2z}}. \quad (4.3)$$

Essa quantidade depende diretamente do grau de polarização medido e inversamente da distância medida da fonte até o observador. Considerando que  $\Lambda_{HL} = (R_{HLP}) M_P$  e  $k^{2z} = k_2^{2z} - k_1^{2z}$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  as energias de dois fótons estimadas no referencial do

observador, podemos reescrever a Eq.(4.3) da seguinte forma:

$$\xi \approx \frac{2\Delta\theta}{d} \frac{(M_P)^{2z-1}}{(k_2^{2z} - k_1^{2z})} (R_{HLP})^{2(z-1)}. \quad (4.4)$$

Neste ponto, já estamos em condições de determinar os limites superiores para o parâmetro  $\xi$  no ponto de Lifshitz. Para isso, devemos considerar a Eq.(4.4) em conjunto com as medidas do evento GRB 041219A para  $\Delta\theta$  e  $d$ , mencionadas na seção anterior. Consideramos que  $L_{Pl} \approx 1.62 \times 10^{-33}\text{cm}$  como o comprimento de Planck e  $M_P \approx 1.22 \times 10^{19}\text{GeV}$  a energia Planck. Por conveniência, podemos reescrever o limite da luminosidade como  $d = 85\text{Mpc} = 1.61 \times 10^{59}(M_P)^{-1}$ . Deste modo, podemos obter os limites para intensidade do efeito da quebra da simetria de Lorentz como,

$$\xi < \frac{1,02 \times 10^{-59} M_P^{2z}}{(k_2^{2z} - k_1^{2z})} (R_{HLP})^{2(z-1)}. \quad (4.5)$$

Neste caso, consideramos que os valores para as energias  $k_1$  e  $k_2$  podem ser

$$k_1 \sim 100\text{KeV} \sim 1 \times 10^{-4}\text{GeV} \sim 0,81 \times 10^{-23} M_P$$

$$k_2 \sim 350\text{KeV} \sim 3,5 \times 10^{-4}\text{GeV} \sim 2,9 \times 10^{-23} M_P. \quad (4.6)$$

Como assumimos que  $R_{HLP} \sim 10^{-9}$ , a Eq. (4.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\xi_{(z)} \lesssim \frac{1,02 \times 10^{(28z-41)}}{[(2,9)^{2z} - (0,81)^{2z}]} \quad (4.7)$$

Esse resultado corresponde diretamente a um limite superior anisotrópico, controlado pelo expoente crítico de Lifshitz  $z$ .

Para discutirmos as restrições trazidas pela violação da invariância de Lorentz, plotamos na, Fig.(4.2), o parâmetro que controla a invariância de Lorentz em função do expoente crítico ( $\xi(z)$ ) [16]. Para  $z = 1$ , que corresponde a um operador de dimensão cinco, encontraremos que:

$$\xi_{(z=1)} \lesssim \frac{1,02 \times 10^{(28-41)}}{[(2,9)^2 - (0,81)^2]} \lesssim 10^{-14}, \quad (4.8)$$

recuperando o resultado obtido por Laurent [22]. Esse resultado impõe restrições muito fortes para apontar a inexistência desses tipos de operadores em uma ação de quebra da invariância de Lorentz. Qualquer efeito com esse tipo de intensidade, poderá ser restringido por escalas intermediárias tais como a escala da supersimetria. Estas questões também foram levantadas por Bolokhov [36].

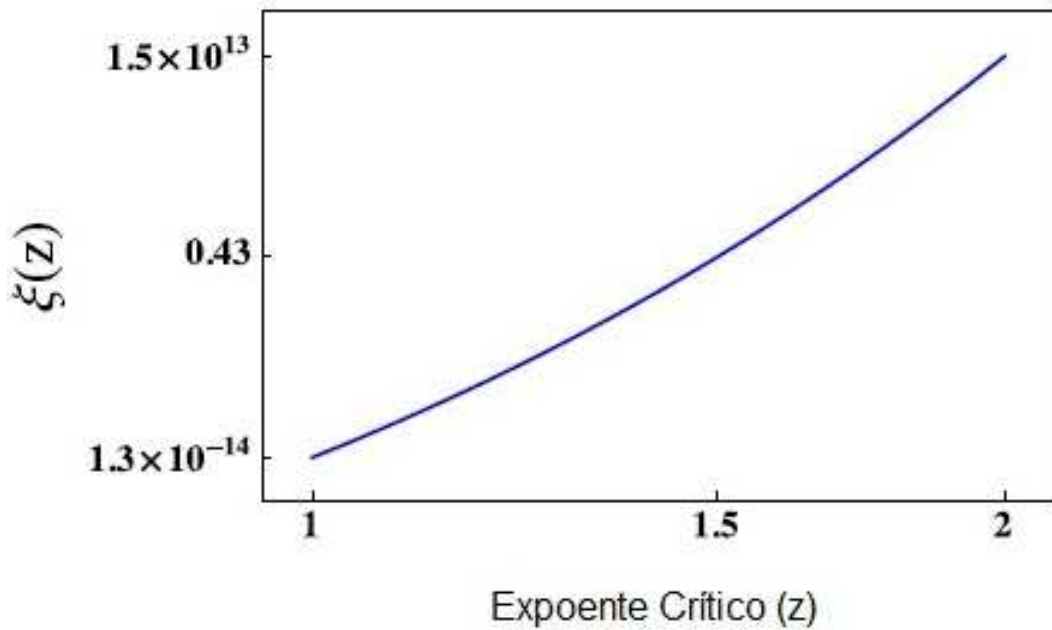


Figura 4.2: O comportamento do parâmetro ( $\xi(z)$ ) que controla a invariância de Lorentz em função do expoente crítico. Os pontos evidenciam os valores dos expoentes críticos:  $z = 1$ ,  $z = \frac{3}{2}$ , e  $z = 2$ .

Para  $z = \frac{3}{2}$ , valor correspondente a um operador de dimensão seis, verifica-se que

$$\xi_{(z=\frac{3}{2})} \lesssim \frac{1,02 \times 10^{(42-41)}}{[(2,9)^3 - (0,81)^3]} \lesssim 0,43. \quad (4.9)$$

Na ausência dos efeitos do expoente crítico, encontra-se  $\xi \lesssim 2,61 \times 10^8$ , limite fora da realidade para restringir qualquer efeito da quebra da invariância de Lorentz. A introdução do reescalonamento anisotrópico de Horava-Lifshitz melhora o resultado anterior em 8 ordens de magnitude, além disso, também melhora a restrição encontrada para decimais, algo perto da unidade onde esperamos encontrar efeitos relevantes para se medir a ocorrência da quebra da invariância de Lorentz. Finalmente, para  $z = 2$ , obtemos que:

$$\xi_{(z=2)} \lesssim \frac{1,02 \times 10^{(56-41)}}{[(2,9)^4 - (0,81)^4]} \lesssim 1,5 \times 10^{13}, \quad (4.10)$$

sendo este o valor correspondente a um operador de dimensão sete. Esse resultado também não impõe qualquer restrição realística para ocorrência da invariância de Lorentz na natureza.

Neste ponto, apresentaremos uma discussão na qual consideramos as presentes análises fenomenológicas e as comparamos com outros estudos da literatura. Consideremos inicialmente uma simples generalização do ângulo que mede o grau de polarização

dada por:

$$\Delta\theta(d) \approx \frac{\tilde{\xi}}{2} \frac{k^n d}{M_{\text{P}}^{n-1}}, \quad (4.11)$$

em que  $n = 2; 3; \dots$ , representa a ordem do operador derivativo. Portanto, para efeitos de comparação com a Eq. (4.2), introduzimos a seguinte relação:

$$\xi = \left[ \frac{k^{n-2z}}{R_{\text{HLP}}} \frac{(\Lambda_{\text{HL}})^{2z-1}}{M_{\text{P}}^{n-1}} \right] \tilde{\xi}. \quad (4.12)$$

Então, para operadores de dimensão cinco, ( $n = 2$  e  $z = 1$ ) encontramos que  $\xi = \tilde{\xi}$ , enquanto que para operadores de dimensão seis, ( $n = 3$  e  $z = 3/2$ ) encontramos que  $\xi = (R_{\text{HLP}})\tilde{\xi}$ . Isto significa que o reescalonamento de Lifshitz dos operadores de altas ordens derivativas que violam a invariância de Lorentz, isto é,  $z > 1$ , também reescalam (por um fator de  $10^9$ ) alguns limites fenomenológicos obtidos através de modelos comuns nesse tipo de estudo.

### 4.3 O Atraso Temporal no Voo Entre Dois Fótons

A nossa atenção nesta seção foi no intervalo de tempo entre duas trajetórias distintas do fóton sobre a ação da violação da invariância de Lorentz. O atraso temporal, que ocorre entre os dois fótons, tem uma origem fundamental sobre a expansão cosmológica, devido ao comportamento anômalo da propagação das partículas dependentes da helicidade ou da energia, como descreve a velocidade de grupo, Eq.(3.30) do capítulo anterior.

Consideremos o intervalo de tempo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left[ \frac{1}{v_{g_2}} - \frac{1}{v_{g_1}} \right] d(z'), \quad (4.13)$$

onde  $v_g$  é a velocidade de grupo, dada pela Eq.(3.30), cuja inversa pode ser obtida pela aproximação

$$\frac{1}{v_g} \approx 1 \mp 2z(\xi R_{\text{HLP}}) \left( \frac{k}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{2z-1}. \quad (4.14)$$

Sendo  $d(z')$  a distância percorrida pelo fóton em função do desvio para o vermelho (redshift) em um universo espacialmente plano,  $\Omega_k = 0$ . A expressão associada a essa distância é dada por:

$$d(z') = H_0^{-1} \int_0^{z'} \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_\lambda + \Omega_m(1+z')^3}}. \quad (4.15)$$



Aqui,  $H_0 = 70 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  é o valor atual do parâmetro de Hubble ( $H_0^{-1} \approx 13,77$  bilhões de anos). Enquanto que  $\Omega_\lambda$  e  $\Omega_m$  representam as frações de densidade de cosmológica constante e matéria no universo, respectivamente.

Inserindo as Eqs.(4.14) e (4.15) na Eq.(4.13) temos que o atraso de tempo entre dois fótons com uma diferença de energia ( $k_1$  e  $k_2$ ), pode ser descrito em módulo, através da seguinte expressão:

$$\Delta t = 2z(\xi R_{\text{HLP}})(\Lambda_{\text{HL}})^{1-2z} H_0^{-1} (k_2^{2z-1} - k_1^{2z-1}) \times \int_0^{z'} \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_\lambda + \Omega_m(1+z')^3}}. \quad (4.16)$$

Resolvendo a integral para  $\Omega_\lambda = 0,7$  e  $\Omega_m = 0,3$ , com um desvio para o vermelho  $z' = 0,02$ , e usando os valores assumidos anteriormente para  $k_1 = 0,81 \times 10^{-23} M_P$ ,  $k_2 = 2,9 \times 10^{-23} M_P$  e  $R_{\text{HLP}} = 10^9$ , obteremos que:

$$\Delta t \sim \pm [1,74z\xi_{(z)}] \times 10^{-28z+21} [(2,9)^{2z-1} - (0,81)^{2z-1}], \quad (4.17)$$

onde  $\xi_{(z)}$  é dado pela Eq.(4.7). Portanto, para  $z = 1$ , o atraso de tempo é:

$$\Delta t \lesssim (1,74 \cdot 1,3 \times 10^{-14}) \times 10^{-28+21} [(2,9) - (0,81)] \lesssim 4,7 \times 10^{-21} s. \quad (4.18)$$

Para  $z = \frac{3}{2}$ , é:

$$\Delta t \lesssim \left(1,74 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0,43\right) \times 10^{-42+21} [(2,9)^2 - (0,81)^2] \lesssim 8,68 \times 10^{-21} s. \quad (4.19)$$

Para  $z = 2$ , é:

$$\Delta t \lesssim (1,74 \cdot 2 \cdot 1,5 \times 10^{13}) \times 10^{-56+21} [(2,9)^3 - (0,81)^3] \lesssim 1,25 \times 10^{-20} s. \quad (4.20)$$

Os resultados obtidos a partir das Eqs.(4.18), (4.19) e (4.20) nos indicam que, ao contrário a determinação do parâmetro  $\xi_{(z)}$ , o caso da determinação do atraso entre dois fótons não se altera com relação a modificação do expoente crítico  $z$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos os efeitos da violação da invariância de Lorentz através de um escalonamento tipo o de Hořava-Lifshitz. Aplicamos esse método primeiramente para o modelo de Maxwell e depois para o modelo de Myers-Pospelov. O propagador de Feynman foi calculado explicitamente para ambos os casos. Demos ênfase para a relação de dispersão resultante do modelo Maxwell-Myers-Pospelov-Hořava-Lifshitz através do qual podemos efetuar cálculos de birrefringência (propagação de ondas polarizadas).

Obtivemos limites superiores para o parâmetro que controla a quebra da invariância de Lorentz sobre a ação de vários valores adquiridos pelo expoente crítico de Lifshitz. Estes limites foram determinados usando os resultados observacionais da explosão de raios gama, evento GRB 041219A.

Para o expoente crítico de Lifshitz igual a 1, que corresponde à operadores de dimensão cinco, foram encontrados os mesmos resultados já obtidos na literatura. Pela natureza ínfima do resultado obtido, concluimos que tais operadores não são capazes de descrever os efeitos da quebra da invariância de Lorentz na natureza. Para o expoente crítico de Lifshitz igual a  $3/2$ , que corresponde a operadores de dimensão seis, revelou-se que o limite para o parâmetro que controla a quebra da invariância de Lorentz melhorou em 8 ordens de grandeza se comparado aos resultados que consideram a escala Horava-Lifshitz ausente. Este limite foi o mais próximo da unidade, o que pode ser relevante do ponto de vista fenomenológico. Para operadores de dimensões mais elevadas, ou seja, com expoente crítico de Lifshitz maior que  $3/2$ , os limites obtidos realmente não são capazes de restringir nenhuma ocorrência da violação da invariância de Lorentz na natureza.

A proposta de Myers-Pospelov para os férmions é descrita por uma equação de Dirac sobre a influência de operadores de altas ordens derivativas. Neste sentido, uma extensão natural deste trabalho é a de usar o escalonamento de Lifshitz aplicando na relação de dispersão resultante para descrever propagações anômalas de neutrinos oriundos de supernovas.

Uma outra extensão deste trabalho, refere-se ao estudo das possíveis implicações nas relações de dispersão obtidas pelo escalonamento de Hořava-Lifshitz sobre as equações de estados termodinâmicos.

# Referências Bibliográficas

- [1] HAGIWARA, Kaoru et al. Review of particle physics. **Physical Review D** (Particles and Fields), v. 66, n. 1, 2002.
- [2] KOSTELECKÝ, V. Alan; RUSSELL, Neil. Data tables for Lorentz and CPT violation. **Reviews of Modern Physics**, v. 83, n. 1, p. 11, 2011.
- [3] LIBERATI, Stefano. Tests of Lorentz invariance: a 2013 update. **Classical and Quantum Gravity**, v. 30, n. 13, p. 133001, 2013.
- [4] GAMBINI, Rodolfo; PULLIN, Jorge. Nonstandard optics from quantum space-time. **Physical Review D**, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- [5] KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [6] KOSTELECKÝ, V. Alan; POTTING, Robertus. CPT, strings, and meson factories. **Physical Review D**, v. 51, n. 7, p. 3923, 1995.
- [7] KOSTELECKÝ, V. Alan. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Physical Review D**, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004.
- [8] COLLADAY, Don; KOSTELECKÝ, V. Alan. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [9] KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009.
- [10] KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, v. 85, n. 9, p. 096005, 2012.
- [11] KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, v. 88, n. 9, p. 096006, 2013.

- [12] MYERS, Robert C.; POSPELOV, Maxim. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 21, p. 211601, 2003.
- [13] HOŘAVA, Petr. Quantum gravity at a Lifshitz point. *Physical Review D*, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009. [arXiv:0901.3775 [hep-th]];
- [14] HOŘAVA, Petr. Quantum criticality and Yang–Mills gauge theory. **Physics Letters B**, v. 694, n. 2, p. 172-176, 2010.
- [15] VISSER, Matt. Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator. **Physical Review D**, v. 80, n. 2, p. 025011, 2009.
- [16] PASSOS, E. et al. Lifshitz scaling to Lorentz-violating high derivative operator and gamma-ray bursts. **Physical Review D**, v. 93, n. 8, p. 085022, 2016.
- [17] POSPELOV, Maxim; SHANG, Yanwen. Lorentz violation in Hořava-Lifshitz-type theories. **Physical Review D**, v. 85, n. 10, p. 105001, 2012..
- [18] GLEISER, Reinaldo J.; KOZAMEH, Carlos N. Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence. **Physical Review D**, v. 64, n. 8, p. 083007, 2001. [arXiv: gr-qc/0102093].
- [19] COBURN, Wayne; BOGGS, Steven E. Polarization of the prompt  $\gamma$ -ray emission from the  $\gamma$ -ray burst of 6 December 2002. *Nature*, v. 423, n. 6938, p. 415-417, 2003. [arXiv: astro-ph/0305377].
- [20] JACOBSON, Ted et al. New limits on Planck scale Lorentz violation in QED. **Physical review letters**, v. 93, n. 2, p. 021101, 2004. [arXiv: astro-ph/0309681].
- [21] GÖTZ, D. et al. A detailed spectral study of GRB 041219A and its host galaxy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 413, n. 3, p. 2173-2183, 2011.
- [22] LAURENT, Pea et al. Constraints on Lorentz invariance violation using integral/IBIS observations of GRB041219A. **Physical Review D**, v. 83, n. 12, p. 121301, 2011.
- [23] GÖTZ, D. et al. The polarized gamma-ray burst GRB 061122. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, 431, 3550 (2013).
- [24] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *The dynamics of general relativity, Gravitation: an introduction to current research*, Louis Witten ed. (Wiley 1962), chapter 7, pp 227-265.

- [25] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, (1995); Raymond Pierre. *Field Theory. A modern Primer*. The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., (1983).
- [26] REYES, C. M.; URRUTIA, L. F.; VERGARA, J. D. Quantization of the Myers-Pospelov model: The photon sector interacting with standard fermions as a perturbation of QED. **Physical Review D**, v. 78, n. 12, p. 125011, 2008.
- [27] POSPELOV, Maxim; TAMARIT, Carlos. Lifshitz-sector mediated SUSY breaking. **Journal of High Energy Physics**, v. 1, p. 048, 2014. [arXiv: 1309.5569 [hep-ph]]
- [28] SCATENA, Esley; TURCATI, Rodrigo. Unitarity and nonrelativistic potential energy in a higher-order Lorentz symmetry breaking electromagnetic model. **Physical Review D**, v. 90, n. 12, p. 127703, 2014. [arxiv: 1411.4549].
- [29] REYES, C. Marat. Causality and stability for Lorentz-C P T violating electrodynamics with dimension-5 operators. **Physical Review D**, v. 82, n. 12, p. 125036, 2010.
- [30] MÉSZÁROS, P. Theories of Gamma-Ray Bursts. **Annu. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 40, n. astro-ph/0111170, p. 137-169, 2001.
- [31] KLEBESADEL, Ray W.; STRONG, Ian B.; OLSON, Roy A. Observations of gamma-ray bursts of cosmic origin. **The Astrophysical Journal**, v. 182, p. L85, 1973.
- [32] MEREGHETTI, Sandro et al. The INTEGRAL Burst Alert System. **Astronomy & Astrophysics**, v. 411, n. 1, p. L291-L297, 2003.
- [33] WINKLER, Christoph et al. The INTEGRAL mission. **Astronomy & Astrophysics**, v. 411, n. 1, p. L1-L6, 2003.
- [34] VIANELLO, G.; GÖTZ, D.; MEREGHETTI, S. The updated spectral catalogue of INTEGRAL gamma-ray bursts. **Astronomy & Astrophysics**, v. 495, n. 3, p. 1005-1032, 2009.
- [35] MACCIONE, Luca et al.  $\gamma$ -ray polarization constraints on Planck scale violations of special relativity. **Physical Review D**, v. 78, n. 10, p. 103003, 2008. [arXiv: 0809.0220 [astro-ph]]
- [36] BOLOKHOV, Pavel A.; POSPELOV, Maxim. Classification of dimension-5 Lorentz-violating interactions in the standard model. **Physical Review D**, v. 77, n. 2, p. 025022, 2008.