UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

# FUNÇÃO QUADRÁTICA:

Caracterização e Aplicações



ANA CRISTINA GOMES ARAÚJO

Cuité - PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

# FUNÇÃO QUADRÁTICA:

## Caracterização e Aplicações

por

Ana Cristina Gomes Araújo

sob orientação da

Professora Célia Mria Rufino Franco

co-orientação do

Professor Aluízio Freire da Silva Júnior

Cuité - PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

A663f Araújo, Ana Cristina Gomes.

Função quadrática: caracterização e aplicações. / Ana Cristina Gomes Araújo – Cuité: CES, 2013.

66 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Célia Maria Rufino Franco.
Co-orientador: Aluízio Freire da Silva Júnior.

1. Função quadrática. 2. Caracterização. 3. Aplicação da parábola. I. Título.

CDU 51

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

# Função Quadrática: Caracterização e Aplicações

Ana Cristina Gomes Araújo

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 24 de abril de 2013.

**Banca Examinadora**

Célia Maria R. Franco

Profª. Célia Maria Rufino Franco (Orientadora)

Aluízio Freire da S. Junior

Prof. Aluízio Freire da Silva Junior (Co-Orientador)

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Profª. Maria de Jesus Rodrigues da Silva

# Agradecimentos

Primeiramente, aquele que me permitiu tudo isso, ao longo de toda a minha vida, e, não somente nestes anos como universitária, a você meu DEUS, obrigada, reconheço cada vez mais em todos os meus momentos, que voçê é o maior mestre que uma pessoa pode conhecer e reconhecer! A DEUS, por seu infinito amor.

Há tantos a agradecer, por tanto se dedicarem a mim, não somente por terem sido meus professores, mas por terem sido pessoas que fizeram a diferença em minha vida.

A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados, aos quais, sem citar nomes terão meu eterno agradecimento.

A esta Universidade, seu corpo de Direção e Administrativo, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

Ao coordenador do curso, Dr. Jorge Alves de Sousa, meu muito obrigada, sem palavras para agradecer.

A Minha Família, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre me entenderam e me motivaram, o futuro é o amanhã, ele é feito a partir da constante dedicação no presente.

Minha mãe Adrina, minhas irmãs Cristiane e Adione, meu esposo Jardel e meu filho Dennys Wallace, obrigado a vocês por fazerem parte da minha vida.

Aos meus amigos e amigas, colegas, que fortaleceram os laços da igualdade, num ambiente fraterno e respeitoso, jamais lhes esquecerei, especialmente Fátima Dantas e Sabrina.

Um agradecimento especial a minha orientadora, profª. Célia Maria, com ela aprendi que a partir da curiosidade é que realmente aprendemos.

Profº. Aluízio Freire, obrigada pela colaboração.

A Jardel, pessoa especial sempre ao meu lado, pelo incentivo, apoio e amor.

A Dennys Wallace, AMOR maior.

# Agradecimentos

Primeiramente, aquele que me permitiu tudo isso, ao longo de toda a minha vida, e, não somente nestes anos como universitária, a você meu DEUS, obrigada, reconheço cada vez mais em todos os meus momentos, que voçê é o maior mestre que uma pessoa pode conhecer e reconhecer! A DEUS, por seu infinito amor.

Há tantos a agradecer, por tanto se dedicarem a mim, não somente por terem sido meus professores, mas por terem sido pessoas que fizeram a diferença em minha vida.

A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados, aos quais, sem citar nomes terão meu eterno agradecimento.

A esta Universidade, seu corpo de Direção e Administrativo, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

Ao coordenador do curso, Dr. Jorge Alves de Sousa, meu muito obrigada, sem palavras para agradecer.

A Minha Família, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre me entenderam e me motivaram, o futuro é o amanhã, ele é feito a partir da constante dedicação no presente.

Minha mãe Adrina, minhas irmãs Cristiane e Adione, meu esposo Jardel e meu filho Dennys Wallace, obrigado a vocês por fazerem parte da minha vida.

Aos meus amigos e amigas, colegas, que fortaleceram os laços da igualdade, num ambiente fraterno e respeitoso, jamais lhes esquecerei, especialmente Fátima Dantas e Sabrina.

Um agradecimento especial a minha orientadora, profª. Célia Maria, com ela aprendi que a partir da curiosidade é que realmente aprendemos.

Profº. Aluízio Freire, obrigada pela colaboração.

A Jardel, pessoa especial sempre ao meu lado, pelo incentivo, apoio e amor.

A Dennys Wallace, AMOR maior.

*"Não se pode ensinar alguma coisa a alguém, pode-se apenas auxiliar a descobrir por si mesmo."*

Galileu Galilei

# Resumo

Neste trabalho, estudamos funções quadráticas bem como sua caracterização, representação gráfica e aplicações da parábola. No desenvolvimento do trabalho procurou-se contemplar a forma algébrica da função quadrática através da dedução de sua equação, abordando algumas demonstrações não encontradas nos livros do ensino médio. Sobre a representação gráfica demonstramos que o gráfico da função quadrática é uma parábola e como aplicação justificamos por que os espelhos e antenas são parabólicos. Apresentamos também a relação existente entre função quadrática e progressões aritméticas a partir do Teorema da caracterização das Funções Quadráticas e usamos o jogo Salto da Rã para motivar alunos e professores a estudarem este Teorema.



**Palavras-chave:** Função Quadrática. Caracterização. Aplicações da Parábola.

# Abstract

In this work, we study quadratic functions as well as their characterization, graphic representation and applications of the parabola. Development of work it was sought to contemplate the algebraic form of the quadratic function through the deduction of his equation, addressing some no demonstration activities found at of high school books. About the graphic representation we demonstrated that the graph of the quadratic function is a parable as application and we justify why the mirrors and parabolic troughs antennae are. We also present the existing relationship between quadratic function and arithmetic progressions starting from Theorem of the characterization of Quadratic Functions and we use the game Salto Frog to motivate pupils and teachers to study this theorem.



**Keywords:** Quadratic Function. Characterization. Applications of the Parable.

# Sumário

# Introdução

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Por exemplo, o problema de encontrar dois números conhecendo sua soma $s$ e seu produto $p$.

A origem da Funçao Quadrática associa-se a idéia de equação do 2º grau, que surgiu por volta de 300 a.C com matemático Euclides, mas foi no renascimento que se destacou o estudo dessa função através da necessidade de explicar o movimento de corpos em queda livre e a trajetória de um canhão. Este estudo veio sendo desenvolvido ao longo da história até chegarmos a parábola associada a equação do segundo grau.

Até os dias atuais é comum que professores, do Ensino Fundamental e Médio, encontrem alunos que apresentam dificuldades na compreensão do conceito, leitura e interpretação de gráficos bem como aplicações da função quadrática, a qual está presente em nosso cotidiano. Geralmente os livros adotados não abordam com a devida importância o aspecto analisado neste trabalho. Desta forma este TCC ajudará professores e alunos adquirirem um conhecimento amplo a respeito das funções quadráticas.

O plano de apresentação deste trabalho de conclusão de curso é o seguinte:

No capítulo 1, apresentamos o desenvolvimento histórico do conceito de função e as contribuições de alguns matemáticos existentes na história das funções, em particular das funções quadráticas.

No capítulo 2, temos as noções gerais sobre função quadrática, destacando a análise de sua forma canônica, o gráfico da função quadrática, pontos notáveis da parábola e suas propriedades.

Finalmente, no capítulo 3, relacionamos função quadrática com progressão aritmética e apresentamos o Teorema da Caracterização das Funções Quadráticas. Como aplicação da Parábola, justificamos por que os espelhos e antenas são parabólicos.

# Capítulo 1

# Aspectos Históricos do Desenvolvimento do Conceito de Função

O homem como ser natural é parte integrante da natureza, e não se pode conceber o homem sem a natureza e nem a natureza sem homem (Andery, et al, 1999, p.9). Entendendo tal pressuposto como verdadeiro, afirmamos que a necessidade primeira da humanidade, desde os tempos mais remotos, foi certamente dominar a natureza numa perspectiva de estabelecer com a mesma uma parceria que viabilizasse a manutenção e a perpetuação da espécie. Mas através de suas relações com o meio social/cultural, investe em um processo de produção constante que visa o provimento da sua geração e de todas as que virão, e por consequência modifica a natureza e sua própria relação com ela.

No entanto, a relação homem-natureza, se comparada à relação da natureza com os outros animais, é ímpar, pois este não se limita à satisfação das suas necessidades básicas, como se alimentar, por exemplo.

Buscando a compreensão dos fenômenos – suas razões e ligações, os primeiros pensadores perceberam a dimensão da realidade plural que queriam dominar, e que seria impossível tentar de uma vez só compreendê-la em sua totalidade. Necessitaram então, recortar dessa totalidade um conjunto de elementos que fossem bastante significativos para se realizar o estudo.

Observemos por exemplo o desenvolvimento de uma planta que, dentre outros fatores, depende das condições do solo e do clima, que por sua vez dependem de fenômenos atmosféricos e marinhos. Assim, para realizarmos um estudo sobre a planta se faz necessário recortar da realidade um conjunto de variáveis que influenciem de forma significativa naquilo que queremos conhecer/inferir, e que se relacionam entre si, como por exemplo: crescimento versus clima, ou crescimento versus quantidade de calor, ou crescimento versus nutriente, etc.

Surgem com isso, quadros explicativos dos fenômenos naturais que possuem duas características essenciais: a interdependência e a fluência (Caraça, 1989, p.109). A interdependência é verificada no momento em que se observa que, no Universo os fatos não ocorrem de maneira isolada, em todos eles há compartimentos que se comunicam e participam da vida uns dos outros. A fluência é o movimento natural e constante do mundo que não para de se transformar, de evoluir. No exemplo já citado da planta, se tomarmos o crescimento versus nutriente e abstrairmos os demais fatores, teremos que seu crescimento/fluência está condicionado aos nutrientes que a ela forem oferecidos. Nutrientes selecionados e dosados proporcionam um melhor desenvolvimento do vegetal, o que caracteriza a interdependência.

Assim, podemos dizer que partindo da necessidade de resolver um problema de ordem prática interdependência entre duas grandezas diferentes, brotou de forma intuitiva, o conceito de função em seu mais originário sentido. Segundo Zuffi (2001, p.11),... não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade [grifos do autor] (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

**Chaves e Carvalho** (2004) acreditam que esta noção surgiu em tempos mais remotos, pois entendemos que todas as relações criadas pelas civilizações antigas para a invenção do número, primeira necessidade da matematização, já constituía o instinto de funcionalidade citado anteriormente. Quando associaram os dedos às quantidades, e quando viram que estes já não eram mais suficientes e buscaram outros elementos para contar/enumerar estavam vivenciando a interdependência de variáveis que fluíam para a formação de sistemas de numeração cada vez mais adequados/práticos.

Considerava-se que os babilônios já possuíam um instinto de funcionalidade, que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 200 a.C, encontrado em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser tomadas como funções tabuladas, destinadas a um fim.

As tabelas, entre gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidências de que estes percebiam a ideia da dependência funcional pelo emprego da interpolação linear, isto é, interpolar valores de uma função entre outros valores conhecidos.

O período compreendido entre os séculos $XIV$ e $XVI$ caracterizou-se pelo estudo de casos de dependência de quantidade através de descrições verbais, relações numéricas e gráficos sendo, então, consciente a ideia de dependência entre as quantidades variáveis.

O uso de coordenadas para representar variáveis já ocorria e aplicava-se, por exemplo a pontos de curvas específicas e não a pontos arbitrários do plano.

**Nicole Oresme**, por volta do ano de 1360, sugeriu a representação gráfica dos diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo, relacionadas em um fenômeno (movimento de um corpo com aceleração uniforme). Porém, o trabalho de Oresme resumia-se a descrever aspectos qualitativos, sem utilizar medidas.

As latitudes, correspondentes às variações na velocidade, eram dadas por segmentos de comprimentos distintos, dispostos verticalmente sobre uma linha horizontal na qual estvam distribuidos, intervalos regulares, diferentes longitudes correspondentes a diferentes instantes de tempo. Oresme percebeu que as extremidades dos segmentos caiam todas sobre a mesma reta, assinalando a propriedade de inclinação constante para o gráfico por ele traçado descrevendo um movimento uniformemente acelerado. (Boyer, 1974)

Para **Youschkevich** (1976) o desenvolvimento da noção de função divide-se em três etapas principais, sendo elas:

- **Antiguidade** $\longrightarrow$ época em que verificou-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de varáveis e funções.

- **Idade Média** $\longrightarrow$ época em que se espressavam as noções de função sob forma geométrica e mecânica, porém ainda prevalecendo as descrições gráficas ou verbais

- **Período moderno** $\longrightarrow$ foi partir do século $XVI$ e especialmente durante o século $XVII$, começam a prevalecer às expressões analíticas de função, sendo que o método analítico de introdução a função revoluciona a matemática devido a sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

**Kleiner** (1989) descreveu em seu trabalho alguns estágios da evolução do conceito de função, partindo do instinto de funcionalidade presente em tabelas elaboradas por astrônomos babilônicos ou estudos geométricos referentes ao cálculo de áreas desenvolvidas pelos gregos.

## 1.1 Matemáticos e suas Contribuições em Relação a Origem do Conceito de Função.

**Galilei** $(1564 - 1642)$ contribuiu para a evolução da idéia de função, ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medidas proporcionou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação.

**Rene Descartes** (1596 – 1650) afirmou que uma equação em $x$ e $y$ seria uma forma de introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir calcular o valor de uma em correspondência com o valor da outra, isto é, que uma equação em $x$ e $y$ podia representar uma dependência funcional entre quantidades variáveis, podendo-se determinar uma variável a partir da outra, dando um caráter mais amplo a idéia de função. Apresentou ainda o método das coordenadas para a representação gráfica de relações entre variáveis, em um modelo próximo ao que conhecemos nos dias atuais.

**Newton** (1642 – 1727) em sua teoria sobre fluentes, termo usado por ele para descrever as suas ideias sobre funções, as considerava intimamente ligadas a noção de curva e as taxas de mudança de quantidade variando continuamente. E mais ainda, restrigiam-se a imagens de uma função real, de variável real (**Caraça**, 1952). Newton também desenvolveu uma grande habilidade em expressar estes fluentes em termos de séries infinitas. Tentou definir limite de uma função, falando em quantidades e taxas de quantidades (**Boyer**,1974).

**Leibniz** $(1646-1716)$ não é o responsável pela notação de função, porém foi ele quem na década de 1670, *quem* usou o termo *função* pela primeira vez, para se referir a certos seguimentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas. Logo depois o termo foi usado para se referir a quantidade dependentes ou a expressões (ITO, 1987).

**Jean Bernoulli** $(1667-1748)$ adota a terminologia de Leibniz para função de $x$. Ele estava interessado em funções que fossem bem comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como por exemplo o aprimoramento da regra de L'Hospital para fomas indeterminadas de limite, que envolvia funções diferenciáveis.

**Leonard Euler** $(1707-1783)$ foi quem aplicou a ideia de fluentes de Newton para a análise que é o ramo mais abrangente da matemática. Euler apresentou como exemplo uma função contendo raízes quadradas, mostrando que ainda não se considerava a unicidade para o valor da função. Não se falava em domínio nem em contradomínio. Para Euler as funções só eram contínuas, também não era somente a expressão analítica, mas a curva traçada a mão livre, sem cantos. Seus estudos foram essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, trazendo grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações utilizadas nos dias de hoje.

**Joseph Fourier** $(1768-1830)$ foi talvez o mais influente da nova geração de matemáticos ativos em 1820 em Paris. Sua principal contribuição foi a ideia, percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f(x)$ poder ser representada por uma série da forma conhecida na atualidade como série de Fourier. Tal representação fornece uma generalidade muito maior que a série de Taylor, quanto ao tipo de funções que podem ser estudadas.



### 1.1.1 Primeiras Definições do Conceito de Função.

Notamos que as primeiras definições do conceito de função revelam um certo encantamento pela álgebra, onde a função é dada por uma expressão algébrica.

**Jean Bernoulli** (1667 – 1748) acreditava que uma função de um valor variável é uma expressão analítica, que é composta de valor variável e valores constantes. Ele experimentou várias notações para uma função de $x$, se aproximando da notação em uso $f(x)$ (Boyer,1974). Outra definição importante é a de **Leonard Euler** (1707 – 1783), que substitui o termo quantidade composta, presente na definição de Bernoulli, por expressão analítica e não explicou o significado do termo, mas afirmou que o mesmo envolvia as quatro operações, raizes, exponenciais, logarítimos, derivadas e integrais. "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes". Assim, qualquer expressão analítica a qual, além de uma variavel $z$, contém também quantidades constante, é uma função de $z$. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4z$; $\dfrac{az + b}{aa - zz}$ ; $cz$, etc, são funções.

Foi **Leonard Euler** (1707 – 1783), quem formalizou a notação de $y = f(x)$ para representar uma função qualquer envolvendo variáveis e constantes (Youschkevich, 1976; Boyer, 1996). E apesar de Euler não ter sido o precursor no que se refere à noção de função, foi ele o primeiro a tratar o Cálculo como uma teoria formal de funções.

**Jean-Louis Lagrange** (1736 – 1813) define função de uma ou mais variáveis como qualquer expressão em que estas variáveis intervem de qualquer maneira . Para Lagrange, as funções representam operações distintas que se realizam sobre quantidades conhecidas para obter os valores de quantidades desconhecidas, ou seja, uma função é uma combinação de operações (Kline, 1972).

**Cauchy** (1789 – 1857) define de função da seguinte maneira: Chamam-se funções de uma ou várias variáveis as quantidases que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis.(Sierpinska, 1992).

**Dirichlet** (1805 – 1859) em 1837 o mesmo sugeriu uma definição geral para função, considerada a definição formal de função moderna, onde a função é um caso especial de uma relação. Se uma variável $y$ está relacionada com uma variável $x$ de modo que, sempre que um valor numérico é atribuido a $x$, existe uma regra de acordo com a qual é determinada um único valor $y$, então se diz que $y$ é função da variável independente $x$. Isto está próximo do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números (Boyer, 1996).

A definição dada por Dirichlet foi explicitamente a primeira a limitar o domínio de uma função a um intervalo, o que antes era compreendido por todo o conjunto dos reais, além disso esse matemático foi o primeiro a trabalhar a noção de função como uma correspondência arbitrária (Costa, 2004).

**Bourbaki** ( grupo de matemáticos franceses 1935 ) a definição de função proposta por Dirichiet foi amplamente aceita até meados do século $XX$, sendo generalizada 100 anos mais tarde por Bourbaki e utilizada atualmente.

Segundo **Boyer** (1968), o termo função é uma palavra chave em análise, e foi especialmente na classificação desse termo que o processo de arimetização da análise surgiu, tendo Fourier um papel destacado nesse processo.

## 1.2 Origem da Função Quadrática

A história mostra que os babilônios, por volta de 200 a.C, já representavam a ideia de função através de tabelas de correspondências, porém outras idéias sobre função surgiram com o tempo. Por volta de 300 a.C, o matemático *Euclides* (325 – 265 a.C) desenvolveu uma técnica denominada álgebra geométrica, pois não havia a noção de equação ou mesmo de função.

Nos textos antigos, as equações são chamadas de igualdades, como por exemplo nos antigos Papiros de Rind. Neles encontram-se vários problemas que são resolvidos pelo método das equações, isto é, o tecer de relações em fatos e fenômenos.

No renascimento, destacam-se as tentativas de explicar o movimento de queda livre de um corpo ou uma trajetória de uma bala de canhão que recebe o nome de parábola. Mais tarde, vários teóricos do século $XVI$ e $XVII$ tentaram explicar esssa trajetória, sem obter a parábola. Tais explicações foram sendo aperfeiçoadas até se chegar a parábola associada à curva do segundo grau, o que acelerou a necessidade de se relacionar curvas e equações e, de modo geral, álgebra à geometria.

O conceito geral de função surgiu por volta do final do século $XIX$ com os trabalhos de *Cantor, Peano e Dedekind* e somente aos poucos que os matemáticos perceberam que muitos dos objetos que estudavam eram ou poderiam ser definidos através de funções.

Não há unanimidade sobre a curva plana conhecida como parábola que foi introduzida na matemática. Segundo a versão mais difundida, ela teria surgido dos esforços de Menaecmo (c. $IV$ a.C.), um discípulo de Aristóteles (384 – 322 a.C.), para resolver o chamado problema deliano, cuja origem é muito curiosa. Assolados por devastadora peste, os habitantes da ilha de Delos (os delianos) recorreram aos préstimos de seu oráculo, que sugeriu, para afastar o mal, que eles construíssem um altar cúbico cujo volume fosse o dobro do volume do já existente altar cúbico consagrado ao deus Apólo.

A solução tentada pelos delianos, que consistiu em dobrar as arestas, obviamente não é correta, pois octuplica o volume. Consta até que a intensidade da peste cresceu após essa tentativa. Então foi enviada uma delegação a Atenas a fim de se aconselhar com o filósofo Platão (428 – 348 a.C.), que possivelmente difundiu o problema na comunidade matemática grega, da qual era uma espécie de guia intelectual. Com isso, muitos matemáticos de grande talento da época se engajaram na tarefa de resolver a questão, destacando-se entre eles o brilhante Menaecmo. Pressentindo, talvez, como se sabe hoje, que essa tarefa é impossível com o uso de régua e compasso apenas, Menaecmo tentou novos caminhos, o que o levou à descoberta de uma família de curvas conhecidas como seções cônicas, das quais a parábola é um dos membros. Aliás, sua solução deriva da interseção de duas parábolas.

Para chegar a essas curvas, Menaecmo considerou superfícies cônicas dos três tipos possíveis quanto à seção meridiana, a saber, aguda, reta ou obtusa. Selecionando-as então com um plano perpendicular a uma geratriz, obteve as curvas que mais tarde seriam chamadas, respectivamente, de elipse, parábola e hipérbole. Isso explica a razão pelos quais essas curvas são conhecidas como seções cônicas. O que certamente Menaecmo não imaginava é que num futuro bastante remoto seriam encontradas aplicações científicas e práticas da mais alta importância para essas curvas. Para a parábola, entre outras coisas, o estudo da trajetória de um tiro de canhão. Vale frisar que a importância deste problema não deriva de seu papel nas guerras, mas sim de sua contribuição indireta para o desenvolvimento de vários ramos da ciência, como a química, física e a metalúrgica.



Os canhões entraram em cena na Europa no século $XIV$. De início, eram armas tão precárias – ofereciam risco até mesmo para os artilheiros – que seu efeito era principalmente psicológico, decorrente dos estrondos que produziam. A medida, porém, que a construção dessa arma foi se aprimorando e sua importância bélica crescendo, alguns problemas matemáticos envolvendo a trajetória de uma bala de canhão vieram à tona. Por exemplo, como conseguir o alcance máximo para um tiro?

A primeira contribuição significativa nas investigações do problema da trajetória de um tiro de canhão se deve ao matemático italiano *Niccolo Tartaglia* (1499 – 1557) e se encontra em sua obra Nova Scientia ("*Nova Ciência*"), publicada em 1537. Mediante observações e cálculos matemáticos, Tartaglia concluiu que o alcance máximo de um tiro ocorre quando o ângulo de elevação do cano do canhão é de $45^o$ em relação à linha do horizonte. Percebendo também que o alcance do tiro é função desse ângulo de elevação, ele inventou um quadrante, calibrado em 12 partes, que acoplado ao cano do canhão, permitia achar o ângulo de elevação e portanto, ajustar o alcance do tiro. Mas faltavam a Tartaglia conhecimentos mais sólidos de física para poder ir além.

Por volta da metade do século $XVII$, os canhões já eram tão potentes que seus tiros alcançavam distâncias da ordem de quilômetros, o que requeria a elaboração de uma teoria da trajetória e do alcance muito mais precisa. Entre os que se dedicaram a essa tarefa estão *Galileu Galilei* (1564 – 1642) e alguns de seus notáveis alunos. Por meio de cuidadosas experiências, Galileu observou que, colocando um canhão sobre uma plataforma plana elevada e atirando com o cano na horizontal, o alcance do tiro variava em função da carga de pólvora, mas sempre no mesmo período. Isso indicava a existência de uma velocidade horizontal, variável com a carga, e uma vertical, constante. Motivado por isso, Galileu realizou o seguinte experimento: fazer cair, em queda livre, bolas postas a rolar sobre uma superfície plana. Medindo as distâncias horizontais e verticais de $3m$, em posições diversas, deduziu a seguinte lei (aqui dada na simbologia moderna), relacionando a distância horizontal $x$ e a distância vertical, $y$, percorrida por uma bola que cai:

$$y = kx^2,$$

onde $k$ é uma constante. Segue então que a trajetória descrita por um corponem queda livre ou um tiro de canhão disparado horizontalmente é uma *semiparábola*.

Galileu chegou a esses resultados em 1608, mas não os publicou imediatamente. Devido a isso, o crédito pela descoberta de que a trajetória de um projétil, no vácuo, é uma *parábola* costuma ser atribuído a seu discípulo *Bonaventura Cavalieri* (1598 – 1647), que publicou um trabalho sobre trajetórias em 1632, baseando-se na suposição de que um projétil é impulsionado por duas forças distintas: a propulsora e a gravidade. *Galileu* lamentou ter perdido essa primazia, o que mostra quanto ele valorizava o assunto. Como não era homem de se acomodar, reagiu com a dignidade de um grande cientista: em sua monumental obra, *Diálogos acerca de duas novas ciências* (1638), publicou uma teoria das trajetórias parabólicas mais detalhadas que as já existentes. Na última seção de seu livro *Galileu* deduz a trajetória parabólica para projéteis como uma composição do movimento uniforme horizontal e um movimento acelerado vertical. Aqui o conceito de inércia linear é aplicado matematicamente (como um diálogo), mas não é expresso formalmente. Isto tudo foi seguido de teoremas adicionais que relatavam trajetórias, e por tabelas de altitude e distância calculadas para curvas inicialmente oblíquas.

Talvez o grande pecado de *Galileu* foi questionar publicamente dois grandes pilares da filosofia cristã: o homem como centro do universo e a física de Aristóteles como modelo para a ciência. Seu método científico é, sem dúvida, o grande legado que o mestre deixou para humanidade. É considerado, por conta disso, o "pai da ciência moderna". Em sua última obra "Discursos Referentes a Duas Novas Ciências a Respeito da Mecânica e dos Movimentos Locais", o pensador italiano demonstrou, ao contrário da tradição aristotélica, que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre e, de quebra, enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço. Portanto, a função que descreve a posição "$s$" do corpo em relação ao tempo "$t$" é uma *função quadrática*.

# Capítulo 2

# Funções Quadráticas - Noções Gerais

**Definição 2.1** *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais $a, b, c$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x$ real.*

**Exemplo 2.1** *Considere o problema de encontrar dois números conhecendo sua soma $s$ e seuproduto $p$. Geometricamente, este problema pede que se determinem os ladosde um retângulo conhecendo o semi-perímetro $s$ e a área $p$. Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$. Com efeito,se um dos números é $x$ e o outro é $s - x$ então o produto é $p = x(s - x) = sx - x^2$, logo $x^2 - s + p = 0$. Desta forma, se considerarmos $f$ uma função definida por $f(x) = x^2 - sx + p$ temos que $f$ é uma função quadrática e o problema se resume em determinar os valores de $x$ para os quais $f(x) = 0$.*

**Exemplo 2.2** *A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado que tem como exemplo importante a queda dos corpos no vácuo sujeitos apenas à ação da gravidade. Neste tipo de movimento tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo e sua posição $f(t)$ no instante $t$ é dada por $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$ onde $a$ representa a aceleração, $b$ representa a velocidade inicial, $c$ representa a posição inicial e $t \geq 0$ representa o tempo.*

## 2.1 Forma Canônica da Função Quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando o quadrado , temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \tag{2.1}$$

que é chamada *Forma Canônica* da função quadrática.

Uma outra maneira de escrever a forma canônica (2.1) é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{2.2}$$

e fazendo $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ concluímos que $k = f(m)$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \,/\, 0$ podemos escrever qualquer função quadrática da seguinte maneira:

$$f(x) = a\,(x - m)^2 + k, \text{ onde } m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = f(m).$$

**Exemplo 2.3** *A função $f(x) = x^2 - 4x - 6$ pode ser escrita na forma $f(x) = (x-2)^2 - 10$, com $m = 2$ e $k = f(2) = -10$.*

**Observação 2.1** *A forma canônica nos ajuda a responder a seguinte pergunta: Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, para quais valores $x \neq x'$ tem-se $f(x) = f(x')$?*

Olhando para a forma canônica vemos que $f(x) = f(x')$ se, e somente se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Como estamos supondo $x \neq x'$, isto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

isto é,

$$\frac{x+x'}{2}=-\frac{b}{2a}$$

*Portanto, a função quadrática*

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

*assume o valor $f(x)=f(x\prime)$ para $x\neq x'$ se, e somente se, os pontos $x$ e $x'$ são equidistantes de $-\dfrac{b}{2a}$*

### 2.1.1 Zeros da Função Quadrática

**Definição 2.2** *Considere a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$, chamamos de zeros da função quadrática os valores de $x$ para os quais $f(x)=0$.*

**Exemplo 2.4** *Seja $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Assim pela definição, encontrar os zeros da função quadrática é equivalente a resolver a equação $ax^2+bx+c=0$. A partir da forma (2.1) da função quadrática, temos as seguintes equivalências:*

$$ax^2+bx+c=0\Longleftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \tag{2.3}$$

$$\Longleftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{2.4}$$

$$\Longleftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \tag{2.5}$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.6}$$

A fórmula (2.6) é chamada fórmula de Bháskara. A passagem de (2.4) para (2.5) só tem sentido quando o *discriminante* $\Delta=b^2-4ac$ é maior ou igual a zero. Caso tenhamos $\Delta<0$, a equivalência entre (2.3) e (2.4) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x+\dfrac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

Da fórmula (2.6) resulta que, se o discriminante $\Delta=b^2-4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2+bx+c=0$$

tem duas raízes reais distintas as quais chamaremos de $x_1$ e $x_2$:

$$x_1 = \frac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a}.$$

Neste caso, podemos relacionar os coeficientes $a, b$ e $c$ com as raízes da equação:

$$x_1 + x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{2a} + \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

e

$$x_1.x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{2a} \cdot \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, a soma das raízes é dada por $s = -\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é dado por $p = \frac{c}{a}$ .

Em particular, a média aritmética das raízes é: $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$, ou seja, as raízes $x_1$ e $x_2$ são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$ .

Quando $\Delta = 0$ em (2.6), a equação dada possui uma única raiz $x_1 = x_2$, chamada *raiz dupla*, igual a $-\frac{b}{2a}$ .

**Resumo 2.1** *Para encontrarmos os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, inicialmente calculamos o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, e façamos aseguinte análise:*

- se $\Delta < 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais

- se $\Delta = 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui uma única raiz, ou seja,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- se $\Delta > 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e distintas, ou seja, $x_1 \neq x_2$, neste caso usaremos (2.7) conhecida como fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da equaçao dada.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.7}$$

.

**Exemplo 2.5** *Seja a função* $f(x) = x^2 - 6x + 9$. *Para determinar os zeros dessa função , temos que resolver a equação* $x^2 - 6x + 9 = 0$. *Observe que* $a = 1, b = -6$ *e* $c = 9$ *e portanto*

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= -6^2 - 4.1.9\\ &= 36 - 36\\ &= 0.\end{aligned}$$

*Portanto, a equação possui uma única raiz dada por:*

$$\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2.1} = \frac{6}{2} = 3.$$

**Exemplo 2.6** *Seja a função* $f(x) = 2x^2 + x + 1$, *temos que* $a = 2$, $b = 1$ *e* $c = 1$ *e portanto,*

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 1^2 - 4.2.1\\ &= 1 - 8\\ &= -7.\end{aligned}$$

*Neste caso, como* $\Delta = -7 < 0$, *a equação* $2x^2 + x + 1 = 0$ *não possui solução real.*

**Exemplo 2.7** *Dada a função* $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$, *temos que* $a = -3$, $b = 7$ *e* $c = -2$ *e portanto,*

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 7^2 - 4.(-3).(-2)\\ &= 49 - 24\\ &= 25.\end{aligned}$$

*Como,* $\Delta > 0$ *a equação* $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ *possui duas raízes reais e distintas, dadas pela fórmula de Bháskara*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

*Assim,* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = \frac{1}{3}$.

## 2.2 Gráfico da Função Quadrática

Nesta seção, vamos mostrar que o gráfico da função quadrática é uma curva plana denominada **parábola**. Esta curva é a interseção da supérficie de um cone com um plano paralelo a uma das geratrizes desse cone.

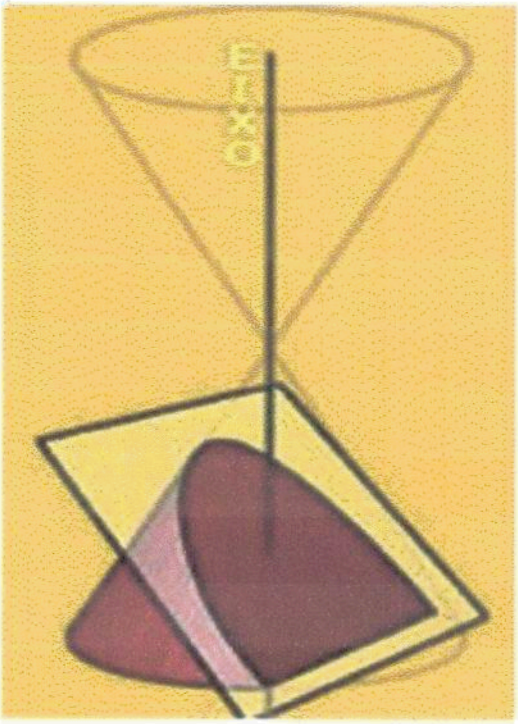



Figura 2.1: Interceçao da superfície de um cone com o plano.

A parábola está presente no nosso cotidiano, por exemplo, ao lançarmos uma pedra ou bola obliquamente (ver figura 2.4) para cima, sua trajetória é **parabólica**, quando acendemos o farol do carro, (ver figura 2.2) os raios de luz, provinientes da lâmpada, incidem num espelho **parabólico** e são refletidos paralelamente ao eixo da simetria, na antena parabólica (ver figura2.3) os sinais são captados através de sua superfície e direcionados ao foco.

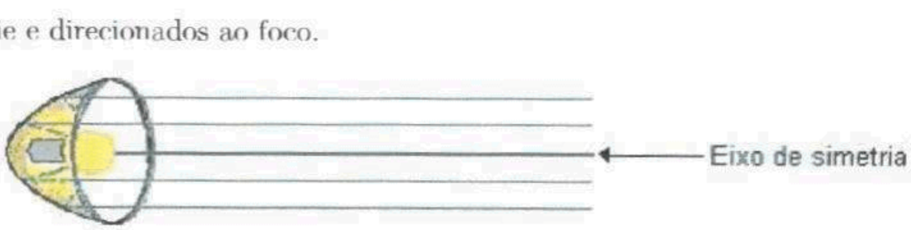



Figura 2.2: Farol de carro.

Figura 2.3: Antena parabólica

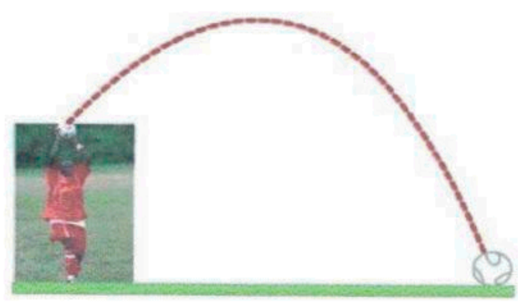


Figura 2.4: Lançamento de um projétil.

**Definição 2.3** *Dados uma reta $r$ e um ponto $F$ não pertencente a $r$, chama-se parábola de foco $F$ e diretriz $r$ ao conjunto de pontos $P$ do plano tais que a distância de $P$ a $F$ é igual a distância de $P$ a $r$.*

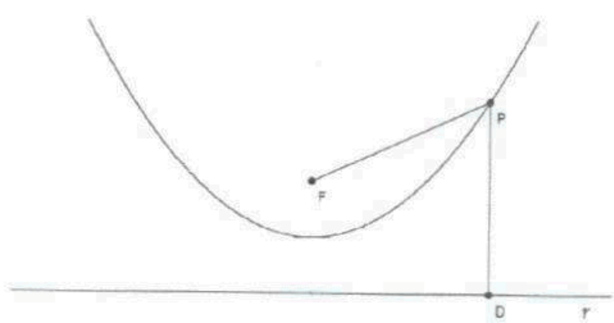



Figura 2.5: Parábola.

Na figura (2.5), se $d(P, D) = d(P, F)$, então $P$ é um ponto da parábola de foco $F$ e diretriz $r$.

### Construção da parábola

Pelo foco $F$ traçamos a perpendicular à reta diretiz $r$ e tomamos sobreesta perpendicular (chamada eixo da parábola), um ponto $C$. Por $C$ traçamos uma paralela a $r$ e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em $F$, determinamos nesta paralela os pontos

$P$ e $P'$ da parábola. Unindo-se os pontos assim construidos obtemos a parábola da figura abaixo:

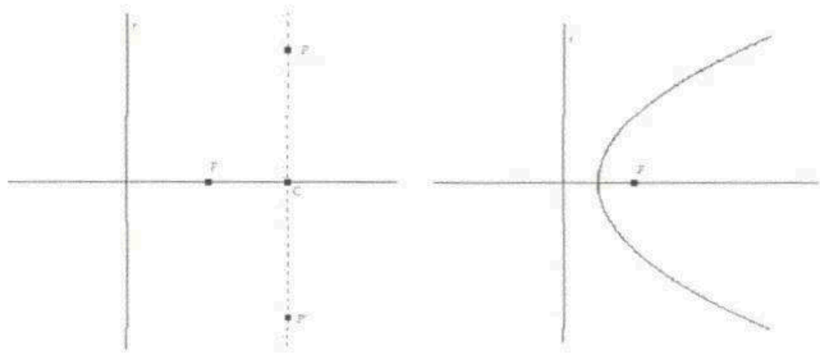


Figura 2.6: Construçao da Parábola.

A reta perpendicular a diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o **eixo** da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se **vértice** da parábola, ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. Lembramos que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

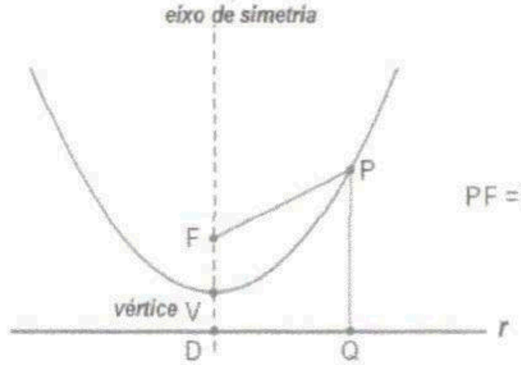



Figura 2.7:

Quando o sistema de coordenadas é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, não é difícil encontrar a equação da parábola.

Por exemplo, se o foco está sobre o eixo $y$ e a diretriz é a reta $r$ paralela ao eixo $x$, digamos, se o foco é $F = (0, p)$ e a diretriz é a reta $y = -p$, então um ponto $P(x, y)$

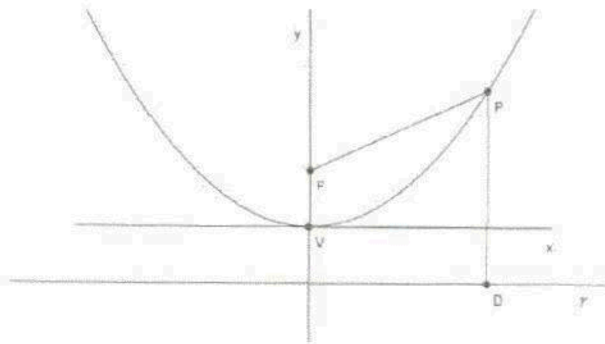



Figura 2.8:

pertence à parábola se, e somente se $d(P, F) = d(P, r)$ ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p.$$

Agora, elevando ambos os membros ao quadrado

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 = (y+p)^2$$

segue que

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

ou seja,

$$x + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Portanto

$$x^2 = 4py \qquad ,$$

isolando $y$, obtemos

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

que é a equação da parábola.

A dedução da equação anterior corresponde o gráfico da figura(2.8).

Temos ainda três possibilidades: Nos demais casos, efetuando-se contas semelhantes, obtemos:

$$y = -\frac{1}{4p}x^2 \tag{2.8}$$

$$x = \frac{1}{4p}y^2 \tag{2.9}$$

$$x = -\frac{1}{4p}y^2 \tag{2.10}$$

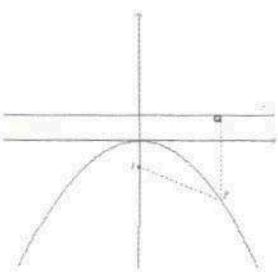


Figura 2.9:

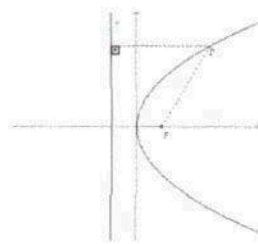


Figura 2.10:

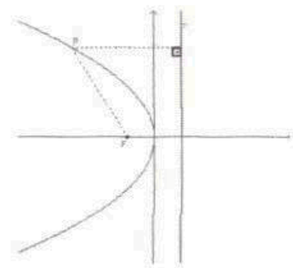


Figura 2.11:

As equações (2.8), (2.9) e (2.10) são respectivamente, as equações das parábolas dos gráficos das figuras (2.9), (2.10) .e (2.11).

Em todos os casos

$$p = \frac{1}{2} d\,(F, r)$$

**Definição 2.4** *O gráfico de uma função $y = f(x)$ é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ do plano cartesiano, com $x$ pertencente ao domínio de $f$.*

Mostraremos a seguir que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é uma **parábola**. A demosntração será feita em quatro etapas.

**1ª Etapa:**

O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$.

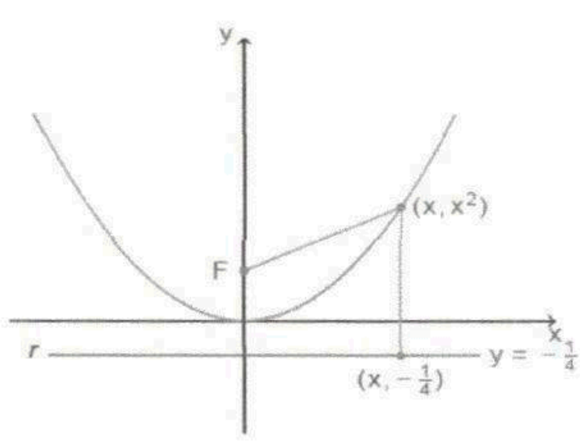



Figura 2.12: Gráfico de $f(x) = x^2$

Com efeito, considere $P = (x, x^2)$ um ponto qualquer do gráfico de $f(x) = x^2$.

Temos que a distância do ponto $P$ ao ponto $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ é dada por:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Por outro lado, a distância do mesmo ponto $P = (x, x^2)$ à reta $r$ é a distância de $P$ ao ponto $\left(x^2, \frac{1}{4}\right)$, isto é, $x^2 + \frac{1}{4}$. Pela definição de parábola, devemos verificar que:

$$\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}$$

Como são números positivos, basta verificar que seus quadrados são iguais. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \\ x^2 + \left(x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}\right) &= \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}\right) \\ x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} &= x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Logo, se $P = (x, x^2)$ é um ponto do gráfico de $f$ então $d(P,F) = d(P,Q)$, ou seja, o gráfico é uma parábola de foco $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$.

**2ª Etapa:**

Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Para provar isto, basta verificar que para todo $x \in$ vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto $P$ à reta $y = -\frac{1}{4a}$ . Temos então:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\ x^2 + \left(a^2x^4 - \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}\right) &= \left(a^2x^4 + \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}\right) \\ x^2 + \left(a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}\right) &= \left(a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}\right) \\ a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} &= a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} \end{aligned}$$

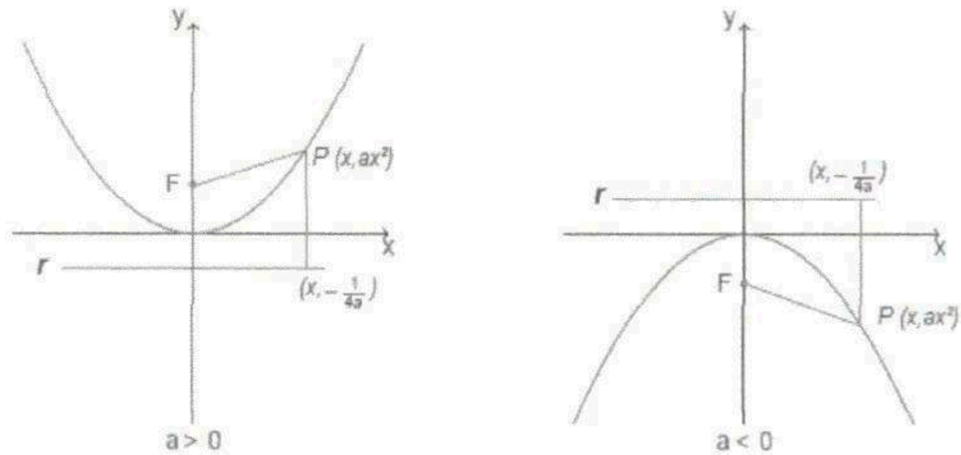



Figura 2.13: Gráfico de $f(x) = ax^2$

Conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

**3ª Etapa:**

Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in \mathbb{R}$ , o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$. Para provar vamos verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale a igualdade

$$(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 \tag{2.11}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
&(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 \\
&= (x^2 - 2xm + m^2) + \left[a\left(x^2 - 2xm + m^2\right) - \frac{1}{4a}\right]^2 \\
&= (x^2 - 2xm + m^2) + a^2\left(x^4 + m^4 - 4x^3m + 5x^2m^2 + x^2m - 4xm^3\right) \\
&+ \left(-\frac{1}{2}x^2 + xm - \frac{1}{2}m^2\right) + \frac{1}{16a^2} \\
&= a^2\left(x^4 + m^4 - 4x^3m + 6x^2m^2 + x^2m - 4xm^3\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}x^2 - xm + \frac{1}{2}m^2\right) + \frac{1}{16a^2}
\end{aligned}$$

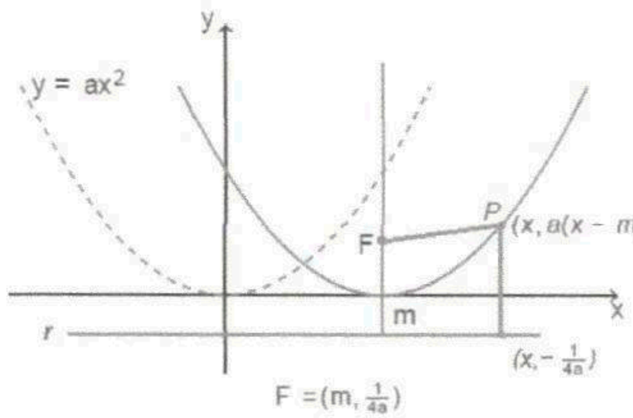



Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left[a(x-m)^2+\frac{1}{4}\right]^2 &= \left[a\left(x^2-2xm+m^2\right)+\frac{1}{4a}\right]^2\\ &= a^2\left(x^4+m^4-4x^3+5x^2m^2+x^2m-4xm^3\right)\\ &+\left(\frac{1}{2}x^2-xm+\frac{1}{2}m^2\right)+\frac{1}{16a^2}\\ &= a^2\left(x^4+m^4-4x^3m+6x^2m^2+x^2m-4xm^3\right)\\ &+\left(\frac{1}{2}x^2-xm+\frac{1}{2}m^2\right)+\frac{1}{16a^2}\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (2.11) é verdadeira.

Observamos ainda que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ pode ser obtido do gráfico de $f(x) = ax^2$ pela translação horizontal que leva o eixo $x = 0$ noeixo $x = m$.

**4ª Etapa:**

Dados $a, m, k, \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k+\frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Para provar vamos verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ , vale a igualdade

$$(x-m)^2+\left[a(x-m)^2+k-k-\frac{1}{4a}\right]^2=\left[a(x-m)^2+k-k+\frac{1}{4}\right]^2 \qquad (2.12)$$

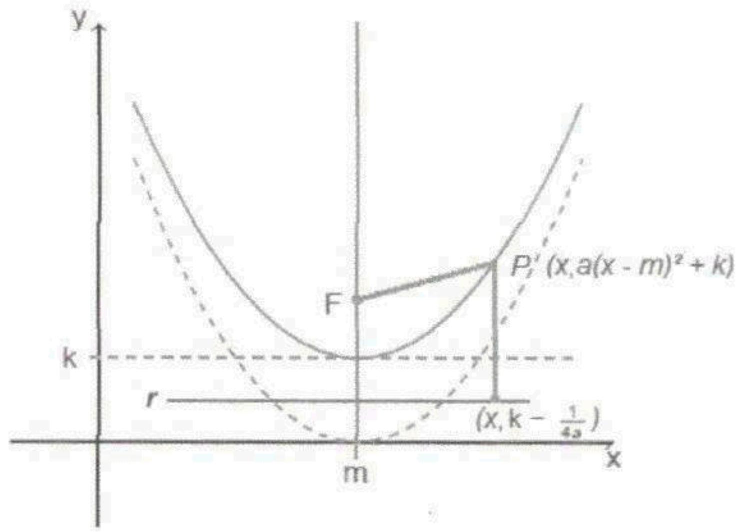



Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$

$$\begin{aligned}
(x-m)^2 + \left[a\left(x-m\right)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 &= \left[a\left(x-m\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 \\
(x-m)^2 + \left[a^2\left(x-m\right)^4 - \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 + \frac{1}{16a^2}\right] &= \left[a^2\left(x-m\right)^4 + \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 + \frac{1}{16a^2}\right] \\
(x-m)^2 + \left[a^2\left(x-m\right)^4 + \frac{1}{16a^2}\right] - \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 &= \left[a^2\left(x-m\right)^4 + \frac{1}{16a^2}\right] + \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 \\
(x-m)^2 - \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 \\
(x-m)^2 &= \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x-m\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$(x-m)^2 = (x-m)^2$$

e potanto o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é uma parábola.

Observamos ainda que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio de uma translação vertical que leva o eixo $x$ na reta $y = k$ e a reta $y = -\dfrac{1}{4a}$ na reta $y = k - \dfrac{1}{4a}$.

De uma maneira geral, como

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + k$$

onde,

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

então o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right).$$

O ponto do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mais próximo da diretriz é aquele de abcissa $x = m$. Mas, $f(m) = k$ e o ponto $V = (m, k)$ é o *vértice* da parábola que constiui o gráfico de $f(x)$, ou seja, é o ponto $V = (-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Na obs. 2.1, vimos que a função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores iguais $f(x) = f(x\prime)$ se, e somente se, os pontos $x_1$ e $x_2$ são simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$ (ou seja $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$) significa que a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico $f$, isto é, é o eixo dessa parábola.

## 2.3 Relação Existente entre os Parâmetros $a$, $b$, $c$ e o Gráfico da Função Quadrática

Vamos analisar o efeito dos parâmetros $a$, $b$ e $c$ na parábola que representa o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**Parâmetro** $a$, responsável pela concavidade e abertura da parábola.

- se $a > 0$ então a concavidade da parábola é voltada para cima.

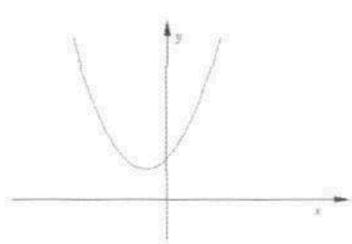


Figura 2.16: figura16 $f(x) = x^2 + x + 1$

- se $a < 0$ então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

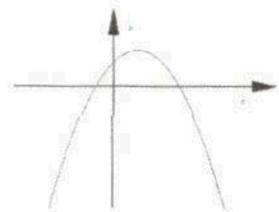


Figura 2.17: figura17 $f(x) = -x^2 + x + 1$

Além disso, quanto maior o valor absoluto de $a$, menor será a abertura da parábola, (parábola mais fechada), independentemente da concavidade, seja para cima ou para baixo, conforme gràficos figura (2.18), (2.19), respectivamente.

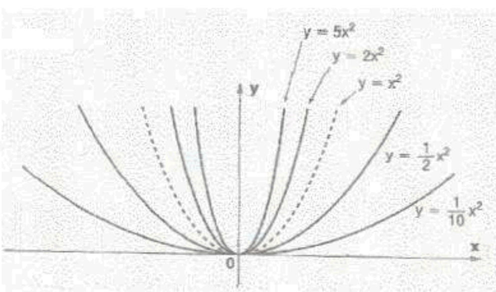



Figura 2.18: $a > 0$

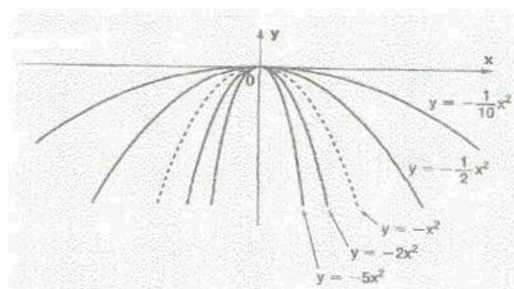



Figura 2.19: $a < 0$

**Parâmetro** $b$, indica se a parábola cruza o eixo $y$ no ramo crescente ou decrescente.

- se $b > 0$ então a parábola cruza o eixo $y$ no ramo crescente.

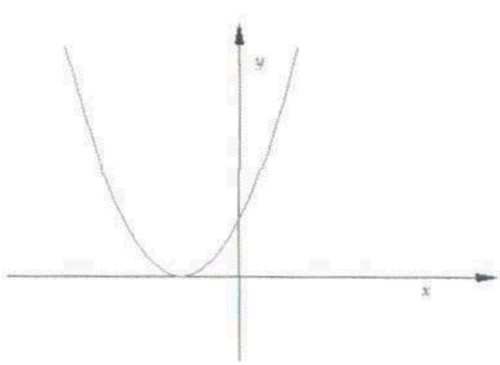



Figura 2.20: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

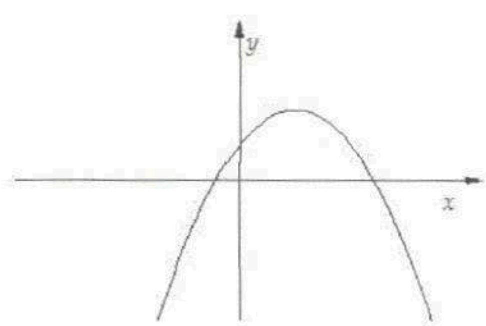



Figura 2.21: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

- se $b < 0$ então a parábola cruza o eixo $y$ no ramo decrescente.

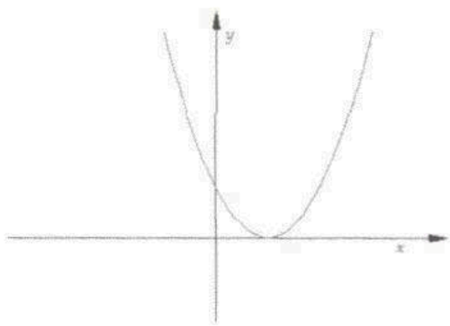



Figura 2.22: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

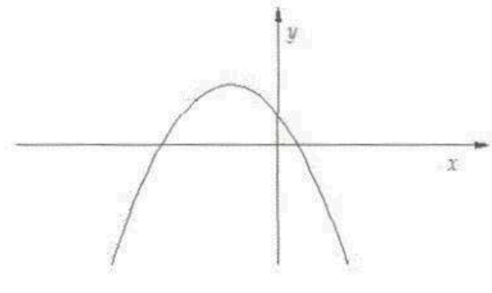



Figura 2.23: $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

- se $b = 0$ a parábola cruza o eixo $y$ no vértice.

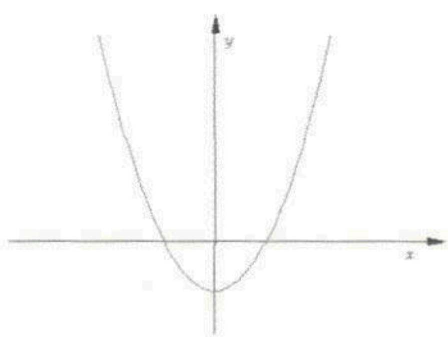



Figura 2.24: $f(x) = x^2 - 1$

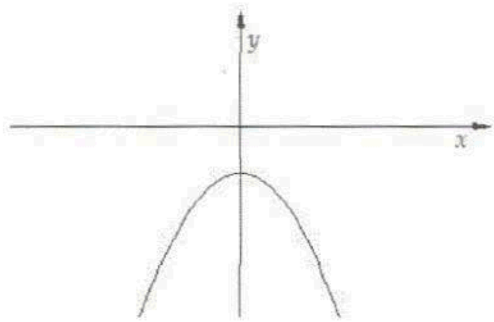



Figura 2.25: $f(x) = -x^2 - 1$

**Parâmetro** $c$, indica o ponto onde a parábola cruza o eixo $y$.

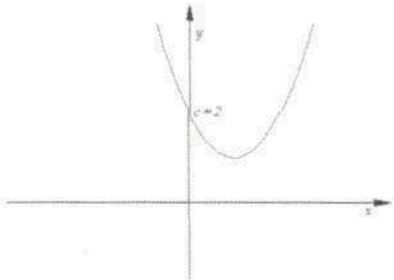



Figura 2.26: $f(x) = x^2 - 2x + 2$

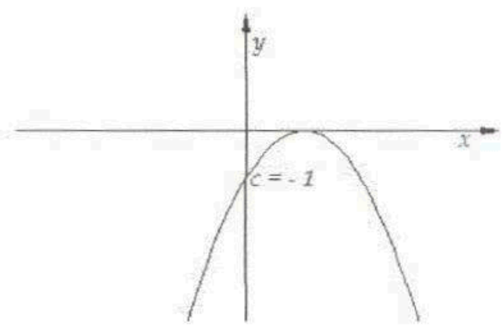



Figura 2.27: $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

A parábola cruza o eixo $y$ no ponto $(0, c)$. Além disso, a parábola pode intersectar o eixo $x$ em um , dois ou nenhum ponto, dependendo do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, *como veremos a seguir na próxima seção.*

## 2.4 Sinal da Função Quadrática

Seja

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right] \tag{2.13}$$

a forma canônica da função quadrática. Analisaremos o sina de $f$ , o qual varia de acordo com o discriminante, observando os três casos abaixo.

**1º Caso:**

- $\Delta < 0$, o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ está inteiramente acima ou abaixo do eixo horizontal $OX$, e a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais. Por (2.13) vemos que se $a > 0$ e $\Delta < 0$, então a expressão dentro do colchete é positiva e $f(x) > 0$.

  Por outro lado, se $a < 0$ e $\Delta < 0$, a expressão dentro do colchete é continua sendo negativa e $f(x) < 0$.

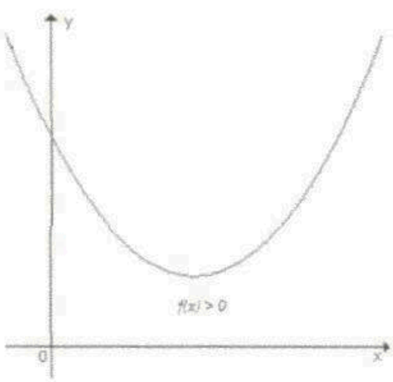



Figura 2.28: Se $a > 0, f(x) > 0$

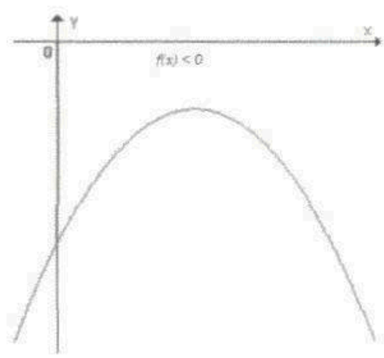



Figura 2.29: Se $a < 0, f(x) < 0$

Portanto , a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui o mesmo sinal de $a$.

**2º Caso:**

- $\Delta = 0$, o gráfico apenas tangencia o eixo $OX$, e a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem uma única raiz dupla. Por (2.13) vemos que se $a > 0$ e $\Delta = 0$, então a expressão dentro do colchete é positiva e $f(x) > 0$. Se $a < 0$ e $\Delta = 0$, a expressão dentro do colchete é positiva sendo e $f(x) < 0$.

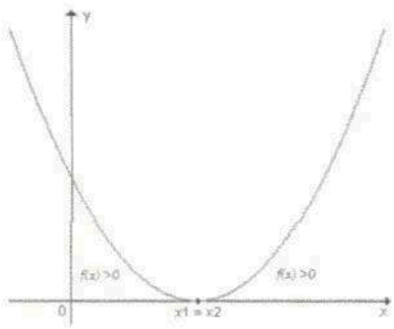



Figura 2.30: Se $a > 0, f(x) > 0$

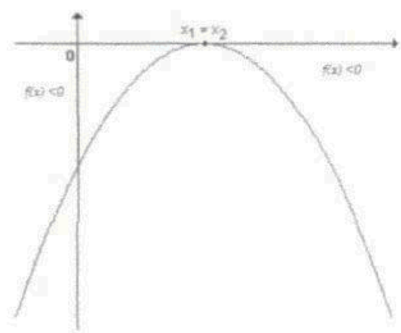



Figura 2.31: Se $a < 0, f(x) < 0$

Portanto, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui o mesmo sinal de $a$.

**3º Caso:**

- $\Delta > 0$, o gráfico corta o eixo $OX$, em dois pontos, ou seja, a equação $ax^2+bx+c = 0$ tem duas raízes reais e distintas.

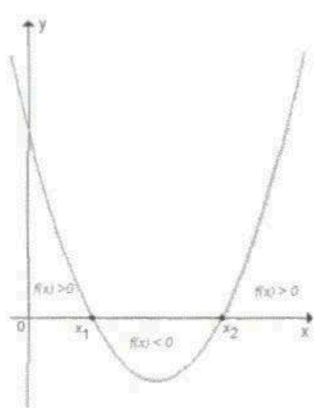



Figura 2.32: $a > 0$

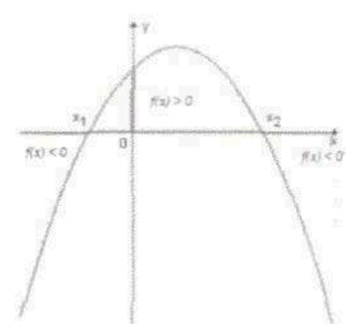



Figura 2.33: $a < 0$

Portanto, a partir de (2.13) têm-se a seguinte análise: se $x_1 < x < x_2$ então a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sinal contrário ao sinal de $a$; se $x < x_1$ ou $x > x_2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem o mesmo sinal de $a$.



## 2.5 Máximo e Mínino da Função Quadrática

Seja a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

e considere sua forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \tag{2.14}$$

A forma canônica (2.14) exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de $x$ e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, ou seja, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f(-\dfrac{b}{2a}) = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Se $a < 0$, o valor $f(-\dfrac{b}{2a})$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

**Definição 2.5** *Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Se $a > 0$ o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ do gráfico de $f$ é ponto de mínimo e a função é ilimitada superiormente ( 2.34), isto é, não assume valor máximo. Se $a < 0$ o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ do gráfico de $f$ é ponto de máximo e a função é ilimitada inferiormente (2.35), isto é, não assume valor mínimo.*

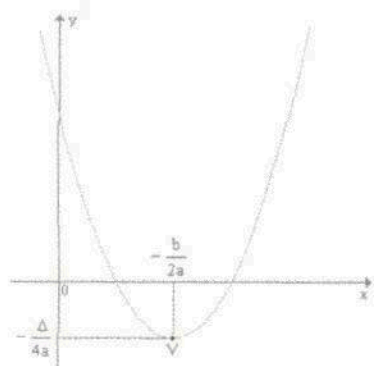



Figura 2.34: Ponto mínimo

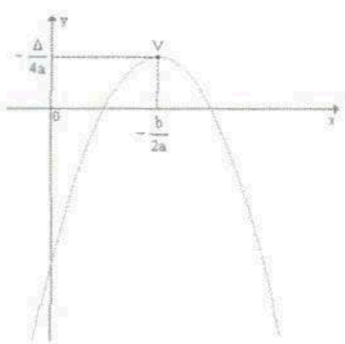



Figura 2.35: Ponto máximo

**Exemplo 2.8** *O conhecimento do ponto onde uma função quadrática assume valor máximo ou mínimo permite obter rapidamente uma resposta para a tradicional questão de saber qual o valor máximo do produto de dois números cuja soma é constante. Neste problema um número $s$ é dado e quer-se achar um par de números $x, y$, tais que o produto $xy$ seja o maior possível. De $x + y = s$ tiramos $y = s - x$, portanto deve-se encontrar o valor de $x$ que torna máximo o produto*

$$x(s - x) = -x^2 + sx$$

. *Esse valor máximo é assumido quando* $x = \frac{s}{2}$. *Logo*

$$y = s - x = \frac{s}{2}.$$

*Concluímos então que o produto de dois números cuja soma é constante assume seu valor máximo quando esses números são iguais.*

# Capítulo 3

# Caracterização da Função Quadrática e Aplicações da Parábola

## 3.1 Caracterização das Funções Quadráticas

Uma *sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$a_n = f(n)$$

onde $a_n$ chama-se *termo geral* da sequência.

Se a diferença entre os termos consecutivos da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante, isto é, se

$$a_{i+1} - a_i = r \; i = 1, 2, 3, \ldots$$

então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *progressão aritmética* de razão $r$. Neste caso, demonstra-se que o termo geral da sequência é dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

e a soma $S_n$ dos $n$ primeiros termos é

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

**Exemplo 3.1** *A função quadrática mais simples, $f(x) = x^2$, transforma a progressão aritmética*

$$1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ...$$

*na sequencia*

$$1, 4, 9, 16, ..., n^2, n^2 + 2n + 1, ...$$

*que não é uma progressão aritmética, ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos não é constante. Entretanto, se examinarmos as diferenças entre os termos consecutivos desta última sequencia, encontraremos*

$$3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...$$

*que é uma progressão aritmética.*

**Proposição 3.1** *Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e*

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ...$$

*é uma progressão aritmética qualquer então a seqüência*

$$y_1, y_2, y_3, y_4, ...$$

*dos valores $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3), ...$ possui a propriedade que as diferenças sucessivas*

$$d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, ...$$

*formam uma progressão aritmética. Mais precisamente, se $x_{i+1} - x_i = r$ para todo $i = 1, 2, 3, ...$ então $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$.*

**Demonstração 3.1** *Devemos mostrar que $d_{i+1} - d_i$ é constante e $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$. Considerando que*

$$x_{i+1} - x_i = r, \forall i = 1, 2, 3, 4, ...,$$

*temos:*

$$\begin{aligned}
d_{i+1} - d_i &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) \\
&= f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_i) \\
&= ax_{i+2}^2 + bx_{i+2} + c - ax_{i+1}^2 - bx_{i+1} - c \\
&- ax_{i+1}^2 - bx_{i+1} - c + ax_i^2 + bx_i + c \\
&= a(x_{i+2}^2 - x^2{}_{i+1}) - a(x^2{}_{i+1} - x^2{}_i) + b(x_{i+2} - x_{i+1}) - b(x_{i+1} - x_i) \\
&= a[\underbrace{(x_{i+2} - x_{i+1})}_{r}(x_{i+2} + x_{i+1})] \\
&- a[\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{r}(x_{i+1} + x_i)] + b\underbrace{(x_{i+2} - x_{i+1})}_{r} - b\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{r} \\
&= ar(x_{i+2} + x_{i+1}) - ar(x_{i+1} + x_i) + br - br \\
&= ar[\underbrace{(x_{i+2} - x_{i+1})}_{r} + \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{r}] \\
&= ar(r + r) = 2ar^2
\end{aligned}$$

*Logo,* $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$, *para todo* $i = 1, 2, 3, ...$

Nosso objetivo, neste capítulo, é provar o teorema da caracterização da Função Quadrática, que garante a veracidade da recíproca da Proposição 3.1. Isto é, se $(d_n)$ é uma $PA$ então $f$ é uma função quadrática.

No caso do movimento uniformente acelerado, se considerarmos a queda livre de um corpo, sujeito apenas a ação da gravidade, pode-se verificar experimentalmente que, marcando a posição do corpo em intervalos iguais e sucessivos de tempo (digamos, de segundo em segundo), a partir do início da queda, as distâncias percorridas em cada intervalo de um segundo vão crescendo, e formam uma progressão aritmética de razão $g$, onde $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração da gravidade.O teorema da caracterização garante então que a altura $f(t)$ do corpo em queda livre depois de $t$ segundos do inicio da queda é uma função quadrática: $f(t) = A - \frac{1}{2}gt^2$, onde $A$ é a altura do ponto onde teve inicio a queda.



**Definição 3.1** *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* $y_1, y_2, y_3, y_4, ...$ *tal que as diferenças sucessivas* $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_2$, $d_3 = y_4 - y_3, ...$ *formam uma progressão aritimética usual.*

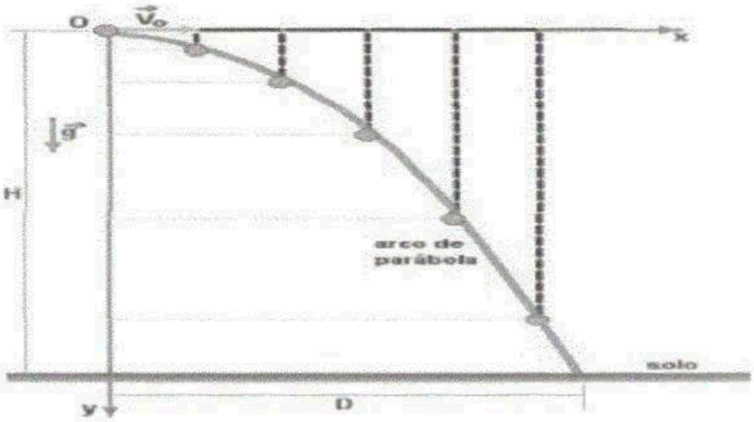



Figura 3.1: Movimento Uniformemente Variado

No próximo Lema provaremos a recíproca da proposição 3.1 para $f$ restrita aos naturais.

**Lema 3.1** *Se a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n, ...$ é uma P.A de segunda ordem, existem números reais $a, b, c$ tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo $n \in$. Assim, considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $y_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto a restrição de $f$ aos naturais fornece os termos da P.A de segunda ordem dada.*

**Demonstração 3.2** *Por hipótese, temos que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, ...$ formam uma progressão aritmética cuja razão chamaremos de $r$ Portanto, seu n-ésimo termo é*

$$d_n = d_1 + (n-1)r$$

*com $n = 1, 2, 3, ....$ Seja $S_n$ a soma dos $n$ primeiros termos da P.A. Então:*

$$S_n = d_1 + d_2 + ... + d_n.$$

*Isto é,*

$$\begin{aligned}
(\frac{d_1 + d_n}{2})n &= (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ...(y_{n+1} - y_n) \\
&\Rightarrow \frac{(d_1 + dn)n}{2} = y_{n+1} - y_1 \\
&\Rightarrow y_{n+1} = \frac{(d_1 + dn)n}{2} + y_1 \\
&\Rightarrow y_{n+1} = \frac{[d_1 + d_1 + (n-1)r]n}{2} + y_1 \\
&\Rightarrow y_{n+1} = nd_1 + \frac{n(n-1)r}{2} + y_1,
\end{aligned}$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$ Esta última igualdade é válida quando $n = o$ o que nos permite escrever:*

$$\begin{aligned}
y_n &= (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} + y_1 \\
&= nd_1 - d_1 + \frac{(n^2 - 2n - n + 2)r}{2} + y_1 \\
&= nd_1 - d_1 + \frac{rn^2 - 3rn + 2r}{2} + y_1 \\
&= nd_1 - d_1 + \frac{r}{2}n^2 - \frac{3r}{2}n + r + y_1 \\
&= \frac{r}{2}n^2 + \left(d_1 - \frac{3r}{2}\right)n + r - d_1 + y_1 \\
&= an^2 + bn + c
\end{aligned}$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$, com*

$$a = \frac{r}{2}, b = d_1 - \frac{3r}{2}, c = r - d_1 + y_1 \tag{3.1}$$

**Exemplo 3.2** *A sequência $3, 7, 13, 21, 31, 43, \ldots$ é uma P.A de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas $7-3, 13-7, 31-21, 43-31, \ldots$ formam uma P.A $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ de razão $r = 2$ e primeiro termo $d_1 = 4$. O primeiro termo da sequência inicial é $y_1 = 3$ e a partir do Lema 3.1 deduzimos que o seu n-ésimo termo é*

$$y_n = an^2 + bn + c$$

*onde,*

$$\begin{aligned}
a &= \frac{r}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
b &= d_1 - \frac{3r}{2} = 4 - \frac{3r}{2} = 1 \\
c &= r - d_1 + y_1 = 2 - 4 + 3 = 1
\end{aligned}$$

Em outras palavras, o termo de ordem $n$ da sequência $3, 7, 13, 21, 31, 43, \ldots$ é:

$$y_n = n^2 + n + 1$$

**Observação 3.1** *Uma P.a. pode ter razão $x_{n+1} - x_n = 0$. Neste caso, trata-se de uma sequência constante: $x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots$. Consequentemente, uma P.A. de segunda ordem pode reduzir-se a uma P.A. ordinária, quando a razão $r$ da P.A. $y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots$ for igual a zero. Neste caso, $a = \dfrac{r}{2} = 0$ e a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $y_n = f(n)$, não é quadrática, reduzindo-se a $f(x) = bx + c$.*

No teorema de caracterização, que demonstraremos a seguir a fim de obtermos uma função quadrática, precisamos supor que a P.A. de segunda ordem que ocorre em seu enunciado é não *degenerada,* isto é, não é uma P.A. ordinária.

**Teorema 3.1** *(Caracterização das Funções Quadráticas) A fim de que a função $f$ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ seja transformada por $f$ numa P.A. de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ...y_n = f(x_n), ...$*

**Demonstração 3.3** *A necessidade já foi demonstrada na Proposição* 3.1. *Para provar a suficiência, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A. não constante numa P.A de segunda ordem não-degenerada. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, vemos que $g$ tem as mesmas propriedades de $f$ e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$. Considerando a progressão aritmética $1, 2, 3, , 4, 5, ...$, vemos que os valores $g(1), g(2), ...g(n)...$ formam uma P.A. de segunda ordem não degenerada. Logo existem constantes $a \neq 0$ e $b$ tais que $[g(n) = an^2 + bn$para todo $n \in \mathbb{N}$. (Deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$, porém $g(0) = 0$ ). Em seguida, fixemos arbitrariamente um número $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a progressão aritmética $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{n}{p}, ...$ De modo análogo, concluimos que existem $a' \neq 0$ e $b'$ tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n\mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:*

$$\begin{aligned} an^2 + bn &= g(n) \\ &= g\left(\frac{np}{p}\right) \\ &= a'(np)^2 + b'(np) \\ &= (a'p^2)n^2 + b'(p)n. \end{aligned}$$

*Portanto as funções quadráticas*

$$ax^2 + bx \text{ e } (a'p^2)x^2 + b'(p)x$$

*coincidem para todo $x = n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $a = a'p^2$ e $b = b'p$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}$ e*

$b' = \dfrac{b}{p}$. *Logo, para quaisquer números naturais n e p valem:*

$$
\begin{aligned}
g(\frac{n}{p}) &= a'n^2 + b'n \\
&= \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n \\
&= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).
\end{aligned}
$$

*Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo número racional positivo $r = \dfrac{n}{p}$. Segue-se que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real positivo $x$. De modo análogo, considerando a P.A.$-1, -2, -3, ...$, concluiríamos que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x \leq 0$. Logo, pondo $f(0) = c$, temos que $f(x) = g(x) + c$, ou seja,*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$*

## 3.2 Aplicações da Parábola

### 3.2.1 Por que as antenas são parabólicas?

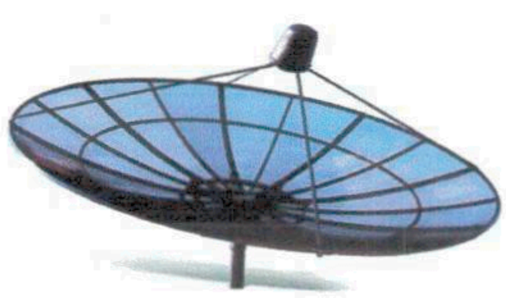


Figura 3.2:



Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*, também conhecida como superfície parabólica. Esta superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes de uma propriedade geométrica da parábola, que veremos nesta seção.

A fama das superfícies parabólicas remonta à Antiguidade. Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 A.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a idéia de que ondas (de luz, de calor, de rádio ou de outra qualquer natureza), quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, assim concentrando grandemente o sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida.

Outros instrumentos atuam inversamente, desviando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora.

Um importante uso recente destas superfícies é dado pelas **antenas parabólicas**, empregadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo concentrando-os consideravelmente.

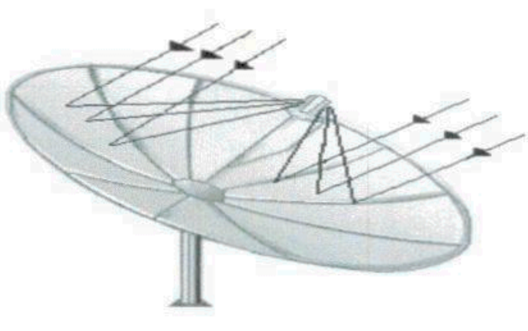


Figura 3.3:



Vamos agora analisar o fundamento matemático desses aparelhos. Começaremos com o princípio segundo o qual, quando um raio incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Neste contexto, a superfície parabólica pode ser substituída pela parábola que é a interseção dessa superfície com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação (igual ao eixo da parábola).

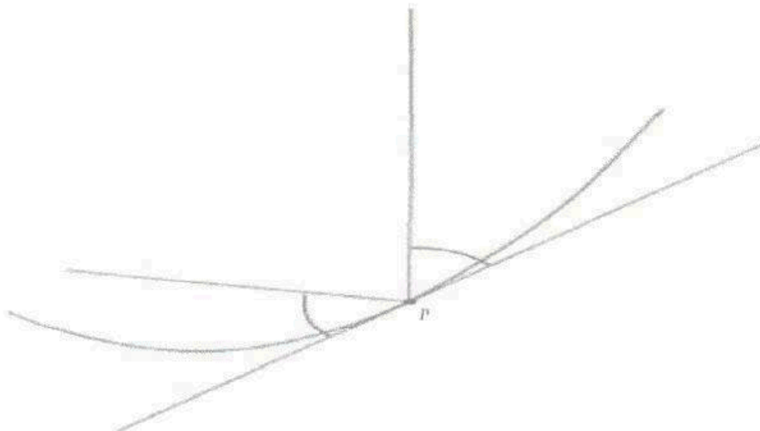


Figura 3.4:

O ângulo entre uma reta e uma curva que se intersectam no ponto $P$ é, por definição, o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de interseção. É assim que se interpretam os ângulos de incidência e reflexão.

**Definição 3.2** *A tangente a uma parábola no ponto $P$ é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto $P$ e tal que todos os demais pontos da parábola estão em um mesmo semi-plano determinado por essa reta. Se a parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.*

Observamos na (3.4) abaixo, a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto $(x_0, y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$, tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de $f$ e que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Logo esta reta é tangente à parábola neste ponto. Quando $a > 0$, a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes. Se for $a < 0$ então a parábola se situa abaixo de todas as suas tangentes.

**Observação 3.2** *Todas as retas paralelas ao eixo de uma parábola têm apenas um ponto em comum com essa parábola mas nenhuma delas é tangente porque há pontos da parábola em ambos os semiplanos por ela determinados.*

**Definição 3.3** *Dizemos que as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a' = -\frac{1}{a}$.*

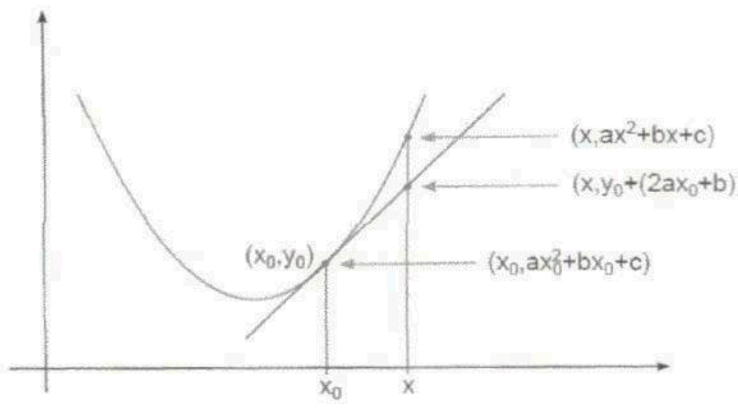



Figura 3.5:

**Exemplo 3.3** *As retas* $y = 2x + 5$ *e* $y = -\frac{1}{2}x - 3$ *são perpendiculares.*

**Lema 3.1** *A reta tangente à parábola dada pelo gráfico da função* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *no ponto* $P = (x, y)$ *é perpendicular à reta* $FQ$ *que une o foco* $F$ *ao ponto* $Q$*, pé da perpendicular baixada de* $P$ *sobre a diretriz* $r$*.*

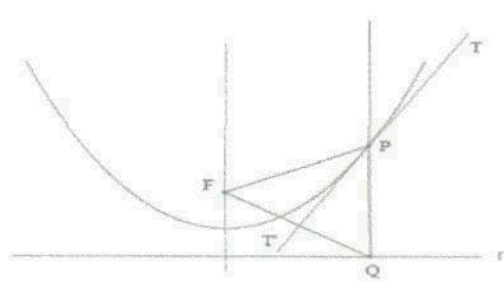



Figura 3.6:

**Demonstração 3.4** *Como a inclinação da tangente no ponto* $P = (x, y)$ *é* $2ax + b$*, devemos mostrar que a inclinição da reta* $FQ$ *é* $-\frac{1}{2ax+b}$*. Suponhamos que* $P$ *não é o vértice da parábola, isto é, que sua abscissa* $x$ *é diferente de* $\frac{-b}{2a}$*, logo* $2ax + b \neq 0$*. Caso* $P$ *fosse o vértice, a reta* $FQ$ *seria vertical e a tangente no ponto* $P$ *teria inclinação zero, logo seria horizontal. A inclinação da reta* $FQ$ *é dada por uma fração cujo numerador é a diferença entre as ordenadas de* $Q$ *e* $F$ *e cujo denominador é a diferença entre as abscissas desses pontos. Ora, já vimos que* $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ *e*

*$Q = (x, k - \frac{1}{4a})$, onde $m = \frac{-b}{2a}$ e $k$ é a ordenada do vértice da parábola. Logo a inclinação de $FQ$ é igual a*

$$\begin{aligned}\frac{k-\frac{1}{4a}-(k+\frac{1}{4a})}{x-m} &= -\frac{1}{2a(x-m)}\\ &= -\frac{1}{2a(x+\frac{b}{2a})}\\ &= -\frac{1}{2ax+b}\end{aligned}$$

*Isto significa que o segmento de reta $FQ$ é perpendicular à reta $TT'$, tangente à parábola no ponto $P$.*

Podemos, finalmente, enunciar a propriedade geométrica da parábola que justifica por que as antenas e os espelhos precisam ser parabólicos. Nesses dois casos, os sinais recebidos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos e portanto é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Assim, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

**Propriedade 1** *A tangente à parábola num ponto $P$ faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco $F$ a esse ponto.*

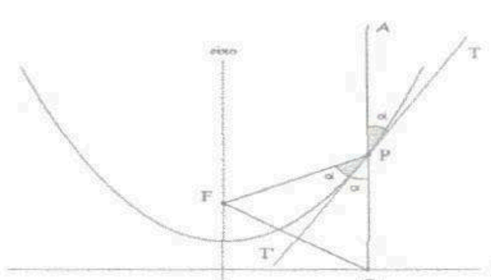



Figura 3.7:

**Demonstração 3.5** *Com efeito, se $Q$ é o pé da perpendicular baixada de $P$ sobre a diretriz, a definição da parábola nos diz que $\overline{FP} = \overline{PQ}$, logo o triângulo $FPQ$ é isósceles. Além disso, pelo Lema 3.2 $FQ$ é perpendicular à tangente, ou seja, a tangente* *é altura desse triângulo isósceles, logo é também bissetriz. Portanto,os ângulos* $F\widehat{P}T'$ *e* $T'\widehat{P}Q$ *são iguais. Logo* $A\widehat{P}T = F\widehat{P}T' = \alpha$.

Se a antena parabólica estiver voltada para a posição (estacionária) do satélite, a grande distância faz com que os sinais emitidos por este sigam trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena, logo eles se refletem na superfície e convergem para o foco, de acordo com o princípio que acabamos de demonstrar. Por isso, as antenas e os espelhos são parabólicos.

## 3.3 O Movimento Uniformemente Variado

A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado. Neste tipo de movimento, que tem como um exemplo importante, a queda dos corpos no vácuo, sujeitos apenas à ação da gravidade, tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo. Sua posição no instante $t$ é dada pela abscissa $f(t)$. O que caracteriza o movimento uniformemente variado é o fato de $f$ ser uma função quadrática.

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

Nesta expressão a constante $a$ chama-se a aceleração, $b$ é a velocidade inicial (no instante $t = 0$) e $c$ é a posição inicial do ponto. Em qualquer movimento, dado por uma função $f$, o quociente $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo de percurso}}$ chama-se a velocidade média do ponto no intervalo cujos extremos são $t$ e $t+h$. No caso em que $f$ é dada pela fórmula (3.3), a velocidade média do móvel entre os instantes $t$ e $t+h$ é igual a $at + b + \frac{ah}{2}$. Se tomarmos $h$ cada vez menor, este valor se aproxima de $at + b$. Por isso se diz que $v(t) = at + b$ é a velocidade do ponto (no movimento uniformemente variado) no instante $t$. Quando $t = 0$ temos $v(0) = b$, por isso $b$ chama-se velocidade inicial. Além disso, vê-se que $a = [v(t+h) - v(t)]/h$ para quaisquer $t, h$, logo a aceleração constante $a$ é a taxa de variação da velocidade. Por isso o movimento é chamado *uniformemente variado, acelerado ou retardado*, conforme $v$ tenha o mesmo sinal de$a$ (isto é, $t > -\frac{b}{a}$) ou $v$ tenha sinal oposto ao de $a$ (ou seja, $t < -\frac{b}{a}$.) No caso da queda livre de um corpo, a aceleração $a$ é a da gravidade, normalmente indicada pela letra $g$. Nosso conhecimento de função quadrática nos permite obter uma descrição completa do movimento uniformemente variado.

**Exemplo 3.4** *Se uma partícula é posta em movimento sobre um eixo a partir do ponto de abscissa* $-6$*, com velocidade inicial de* $5m/s$ *e aceleração constante de* $-2m/s^2$*, quanto tempo se passa até que sua trajetória mude de sentido e ela comece a voltar para o ponto de partida? Resposta: temos* $f(t) = -t^2 + 5t - 6$*. Logo o valor máximo de* $f$ *é obtido quando* $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-5}{-2} = 2,5s$*. Podemos ainda dizer que o ponto começa a voltar quando* $v(t) = 0$*. Como* $v(t) = -2t + 5$ *isto nos dá novamente* $t = 2,5s$*.*

O movimento uniformemente variado pode ocorrer também no plano. Um exemplo disso é o movimento de um projétil (uma bala, uma bola, uma pedra, etc.) lançado por uma força instantânea e, a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar (movimento no vácuo). Embora o processo ocorra no espaço tridimensional, a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Quando se tem um movimento retilíneo (sobre um eixo), a velocidade do móvel é expressa por um número. Mas quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama a *velocidade escalar* do móvel (tantos metros por segundo). A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

No plano em que se dá o movimento, tomemos um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo $OY$ é a vertical que passa por esse ponto.

A velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1, v_2)$ cuja primeira coordenada $v_1$ fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal $OX$).

Como a única força atuando sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre este movimento horizontal, que é portanto um movimento uniforme. Assim, se $P = (x, y)$ é a posição do projétil no instante $t$, tem-se $x = v_1 t$.

Por sua vez, a aceleração ( força) da gravidade é constante, vertical, igual $a - g$. (O sinal menos se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical $OY$ ). Portanto, a componente vertical do movimento de $P$ é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo $OY$ , com aceleração igual $a - g$ e velocidade inicial $v_2$.

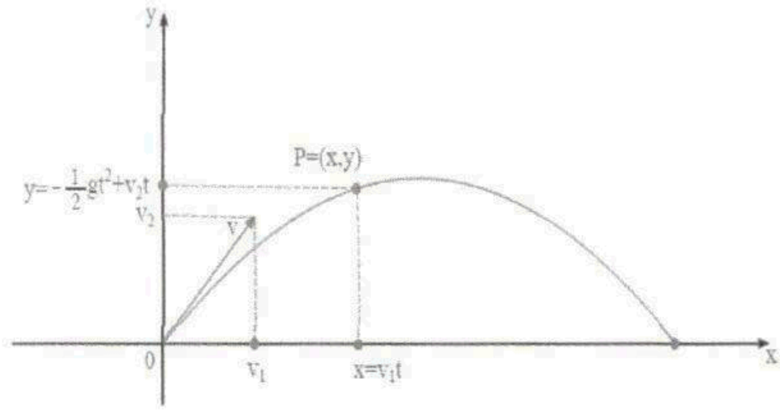



Figura 3.8:

Logo, em cada instante $t$, a ordenada $y$ do ponto $P = (x, y)$ é dada por $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2t$. (Não há termo constante porque $y = 0$ quando $t = 0$.)

Se $v_1 = 0$ então, para todo $t$, tem-se $x = 0$, pois $v_1t = 0$, logo $P = (0, y)$, com

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2t$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical.

Suponhamos agora $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1t$ vem $t = x/v_1$. Substituindo $t$ por este valor na expressão de $y$, obtemos

$$y = ax^2 + bx,$$

onde $a = -\frac{g}{2v_1^2}$ e $b = \frac{v_2}{v_1}$.

Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

# Referências Bibliográficas


[1] ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes & NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa -Aprendendo Matemática com o geogebra. São Paulo: Editora Exata, 2010.

[2] BOYER, C. B. - História da Matemática. S. Paulo: Edgard Blucher.1996.

[3] DANTE, Luiz Roberto. - *Matemática,* Vol. 1, São Paulo: Editora Ática, 2004.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz,- *Um cuso de Cálculo*, Vol. 1.LTC.

[5] LIMA, E. L, - *Matemática do Ensino Médio*, Vol. 1, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM,1997.

[6] PAIVA, Manoel Rodrigues- *Matemática*, Vol. 1, São Paulo: Editora Moderna, 1995.

[7] REIS, G. Lima dos, SILVA, V. Vilmar da. - *Geometria Analítica*, Rio de Janeiro, LTC, 1984.

[8] *Construindo parábola através de dobradura.* Disponível em http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/popups /parabola.htm. Acesso em 28/01/2013.

[9] As Cônicas e suas Aplicações. *A construção da parábola pelo método da dobradura.* p. 32. Disponível em $http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_Conicas Aplicacoes.pdf$ Acesso em 19/12/012.

[10] Pontos Notáveis da Parábola, Disponível em $http://www.brasilescola.com/matematica/pontos-notaveis-uma-parabola.htm.$ Acesso em 13/01/2013.

[11] BARBIERI, A. F., SODRÉ, U. *Ensino Fundamental: Função quadrática (Parábola)*. Disponível em: *http : //pessoal.sercomtel.com.brmatematica/fundam/eq2g/quadratica.htm*.Acesso em: 28 /12/2012.

[12] Atividade Funçao Quadrática. Disponível em *http : //estudematematica.wordpress.com/*2012/08/06/*atividade − funcao − quadratica*. Acesso em 31/01/2013.

[13] WAGNER, E. - *Por que as antenas são parabólicas.* RPM, Nº. 33.

[14] ZUFFI, Edna Moura - Alguns Aspectos do desenvolvimento do conceito de Função. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 8 - Nº. 9/10 - Abril de 2001.

# Anexos - Atividades Lúdicas Envolvendo Funções Quadráticas e Aplicações da Parábola

# Anexo - A - Jogo Salto da Rã

*O jogo Salto da Rã consiste em inverter a posição dos sapos.*

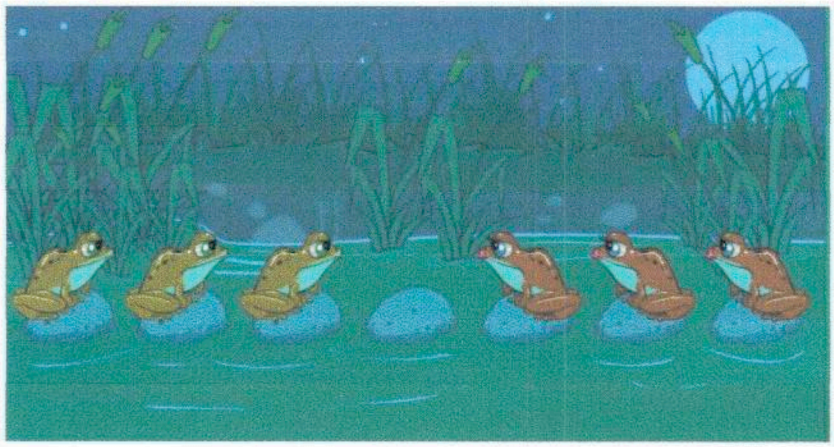


Figura 3.9: Salto da Rã

Para trabalhar o jogo Salto da Rã pode-se construir um tabuleiro com 7 casas e 6 peças (pode ser cavilhas). Por exemplo 3 peças na cor azul e 3 peças na cor verde, como mostra a próxima figura. **Desenvolvimento do jogo.** Colocam-se as 6 peças

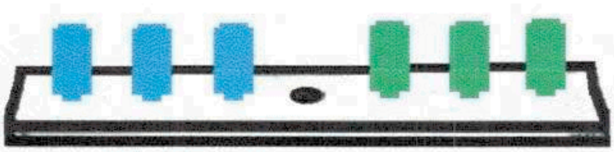


Figura 3.10: Salto da Rã

no tabuleiro, agrupadas por cores, deixando livre a casa central. Movem-se as peças de acordo com as regras a seguir.



**Movimentos permitidos:** *Cada peça só pode ser movida para uma casa vazia,* vizinha a sua ou saltando sobre, no máximo, uma peça. As peças só andam em uma direção, isto é, não podem voltar, e cada casa só pode conter uma peça.

**Desafio:** Inverter a posição das peças. No final as peças verdes deverão estar *na posição inicial* das peças *azuis* e vice-versa. Na *ilustração* dada, as peças *azuis só* podem se mover para a direita e as peças verdes para a esquerda.

1. Qual o número mínimo de movimentos necessários para inverter a posição das peças?

2. Qual o número mínimo de movimentos necessários para inverter a posição de $n$ peças de cada cor, em um tabuleiro de $n+1$ casas?

A partir de uma simples tabela, é possível buscar uma regularidade e descrever um modelo matemático que permite calcular o número mínimo de movimentos necessários para trocar as peças de lugar.

**Solução do desafio:** Para auxiliar na solução inicie o jogo com uma peça de cada cor, em seguida duas peças de cada cor e assim sucessivamente, para construir a seguinte tabela.

| Nº de peças de cada cor | Nº de movimentos necessários para inverter as peças |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 8 |
| 3 | 15 |
| 4 | 24 |
| ... | ... |
| $n$ | $y_n$ |

A sequência

$$3, 8, 15, 24, ... \tag{3.2}$$

é uma P.A de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas

$$8-3, 15-8, 24-15, ...$$

formam uma P.A.

$$5, 7, 9, ... \tag{3.3}$$

de razão $r=2$ e primeiro termo $d_1=5$.

O primeiro termo da sequência (3.2) é $y_1=3$ e o primeiro termo da sequência (3.3) é $d_1=5$.Pelo Lema 3.1 existem números reais $a, b, c$ tais que

$$y_n = an^2 + bn + c,$$

onde,

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{r}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
b &= d_1 - \frac{3r}{2} = 5 - \frac{3.2}{2} = 2 \\
c &= r - d_1 + y_1 = 2 - 5 + 3 = 0,
\end{aligned}
$$

Logo, o termo de ordem $n$ da sequência (3.2) é

$$y_n = n^2 + 2n,$$

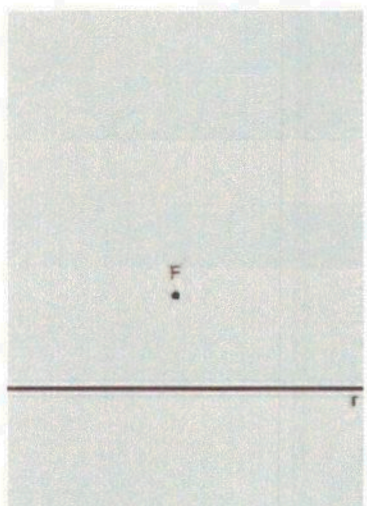
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, para $n$ peças de cada cor são necessários $n^2 + 2n$ movimentos para inverter as peças.

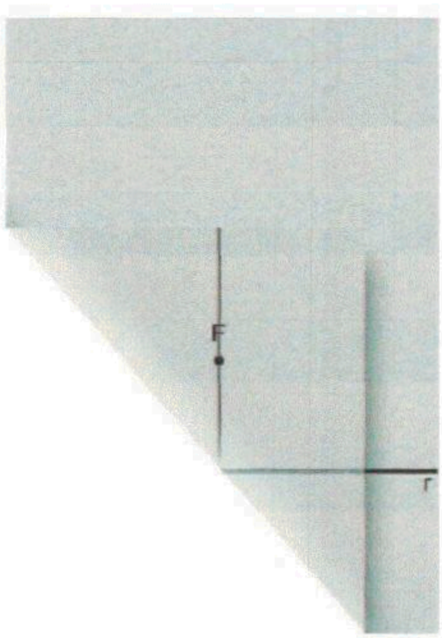
# Anexo - B - Construção da parábola através de dobraduras

Essa atividade consiste na construção de uma parábola através de dobradura. É conveniente realizá-la em papel vegetal, por ser um papel que possui a consistência adequada.

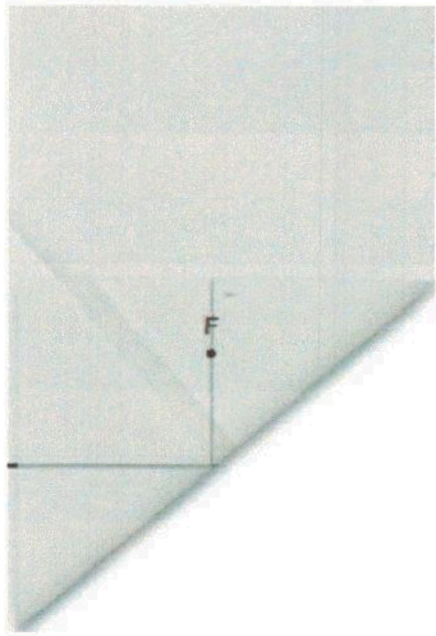
Em sua folha, desenhe uma reta e marque um ponto F a uma distancia aproximada de 4 cm da reta.



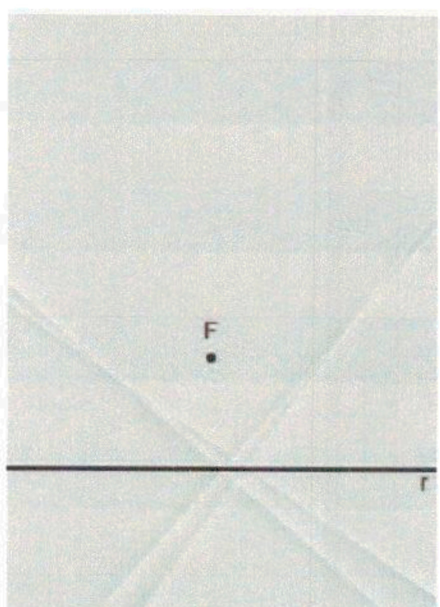

Em seguida, dobre o papel de modo que o ponto F fique sobre a reta.



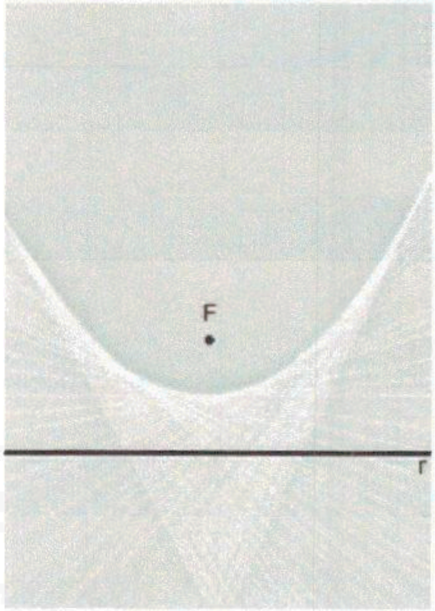
Desdobre-o e dobre-o novamente com a mesma condição: o ponto deve ficar sobre a reta.



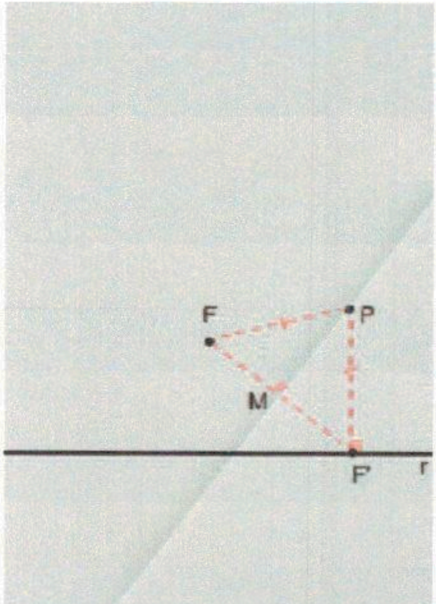

Faça isso muitas vezes.




Até você encontrar o resultado esperado que é a curva construída através das dobraduras, isto é através de tangentes.




Percebemos que ao fazer essas dobraduras estamos marcando um ponto $P$ com a seguinte propriedade $d(P,F) = d(P,r)$, pois $\overline{PF'} \perp r$ logo med $(\overline{PF}) = d(P,r)$. Como $P$ está na mediatriz de $\overline{PF}$, então med $(\overline{PF}) =$ med $(\overline{PF'})$, ou seja, $d(P,F) = d(P,r)$.



# Anexo - C - Algumas Imagens que Mostram a Curva Preciosa (Parábola) no nosso Cotidiano

A nossa vida cotidiana está cheia de curvas, a maioria encontramos na natureza, mas muitas outras, como o traçado de vias de comunicação ou simplesmente escadas em caracol, requerem o desenvolvimento de uma sofisticada geometria e conhecimentos de cálculo importantes para descrevê-las.