



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**MAX WENDELL ANDRADE MELO**

**UM BREVE ESTUDO SOBRE COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA DE  
GRANDES CAMPOS**

**CUITÉ – PB**

**2021**

MAX WENDELL ANDRADE MELO

**UM BREVE ESTUDO SOBRE COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA DE  
GRANDES CAMPOS**

Monografia apresentada à Banca Examinadora,  
como exigência parcial à conclusão do Curso de  
Licenciatura em Física, da Universidade Federal  
de Campina Grande, Campus Cuité.

Orientador: Joseclécio Dutra Dantas

**CUITÉ - PB**

**2021**

MAX WENDELL ANDRADE MELO

**UM BREVE ESTUDO SOBRE COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA DE  
GRANDES CAMPOS**

Monografia apresentada à Banca Examinadora,  
como exigência parcial à conclusão do Curso de  
Licenciatura em Física, da Universidade Federal  
de Campina Grande, Campus Cuité.

Aprovada em: 28 de maio de 2021

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros- UFCG  
(Examinador interno)

---

Prof. Dr. Heron Freitas Neves  
(Examinador interno)

---

Prof. Dr. Jair Stefaninni Ataíde  
(Examinador interno suplente)

**CUITÉ - PB**

**2021**

À minha família e amigos.

M528b	<p>Melo, Max Wendell Andrade.</p> <p>Um breve estudo sobre cosmologia inflacionária de grandes campos. / Max Wendell Andrade Melo. - Cuité, 2021.</p> <p>74 f.</p> <p>Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2021.</p> <p>"Orientação: Prof. Joseclécio Dutra Dantas".</p> <p>Referências.</p> <p>1. Cosmologia. 2. Cosmologia inflacionária. 3. Teoria do Hot Big Bang. 4. Equações do campo de Einstein. 5. Teoria inflacionária. I. Dantas, Joseclécio Dutra. II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 52(043)</p>
-------	---

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao grande criador pela minha vida, proteção e saúde, minha e de meus familiares durante toda a minha jornada. Agradeço sobremaneira aos meus pais por todo o apoio fornecido e pela sua paciência. Agradeço a minha companheira Raline Silva de Araújo, que me ajudou a permanecer fiel no meu propósito, sua paciência, compreensão e seu amor foram fundamentais para que completasse essa minha jornada.

Aos meus professores deste curso também sou muito grato. Em especial ao meu orientador Joseclécio Dutra Dantas, por sua paciência e pelas discussões muito produtivas, tanto em física como na formação de meu caráter. Sua orientação na minha carreira teve início ainda no ensino médio com o programa PIBIC – EM. Foi onde tive meu primeiro contato com a física, me despertando para esta área da ciência. Sua influência foi determinante em todo o meu curso. O considero como exemplo de pessoa de caráter e um profissional excepcional.

Ao professor Fábio Ferreira, com quem também tive meus primeiros contatos ainda no ensino médio. Também teve grande paciência para me ajudar em momentos de dificuldades em todo o meu percurso. Sem a sua ajuda nos momentos certos eu não teria alcançado o meu objetivo. Foi essencial no meu início de curso, fornecendo uma grande base de conhecimentos na física e na matemática que me guiaram nas demais disciplinas.

Aos professores Miranda, Heron, Jair eu tenho uma grande apreço e carinho. Também sou grato por toda a ajuda.

Aos meus colegas de curso: Damião, Ruan Adelmo, Reinaldo, Luís sou muito agradecido por suas ajudas com listas, provas e pelos momentos inesquecíveis de descontração. Vou levá-los na vida como meus irmãos.

A todos os programas governamentais que possibilitaram cursar minha graduação na minha própria cidade do interior da Paraíba, tendo a presença de bolsas de auxílio durante todo o período de estudos, também sou grato.

Aos demais que me auxiliaram direta ou indiretamente em minha jornada:

Sou-lhes grato.

## RESUMO

A cosmologia se dedica ao estudo do universo, que aliada a uma base matemática sólida e de observações feitas por poderosos satélites, como o WMAP, COBE, PLANCK saiu do campo puramente teórico e ganhou espaço como um dos ramos da física de grande interesse na atualidade. A teoria mais aceita para explicar como surgiu o cosmos é a Teoria do *Hot Big Bang*, que assume que tudo teve um início num estado superquente e superdenso. Por meio de uma revisão bibliográfica estudamos alguns temas na cosmologia. Iniciamos com as equações do campo gravitacional de Einstein, aliada a uma revisão sobre tensores e o modelo de universo estático criado por Einstein e De Sitter. Realizamos também uma revisão sobre as equações de Friedmann – Robertson – Walker que levam a um universo dinâmico. Também discorremos sobre o Modelo Cosmológico Padrão, que tem em sua base o princípio cosmológico que assume que o universo seja, em grandes escalas, homogêneo e isotrópico. Contudo, a teoria *do Hot Big Bang* apresenta alguns problemas quando tenta explicar quais condições estavam presentes no início do universo. Com isso, surgiu algumas teorias que se dedicam a solucionar esses problemas, uma delas é a teoria inflacionária. Neste trabalho nos dedicamos a estudar a teoria inflacionária e alguns modelos de potenciais simples, que são propostos para a solução do modelo cosmológico padrão.

**PALAVRAS CHAVES:** Teoria do Hot Big Bang, equações do campo de Einstein, teoria inflacionária.

## **ABSTRACT**

Cosmology is dedicated to the study of the universe, which combined with a solid mathematical basis and observations made by powerful satellites, such as WMAP, COBE, PLANCK left the purely theoretical field and gained space as one of the branches of physics of great interest today. The most accepted theory to explain how the cosmos came about is the Theory of the Hot Big Bang, which assumes that everything started in a super-hot and super-dense state. Through a bibliographic review we studied some themes in cosmology. We start with Einstein's gravitational field equations, combined with a review of tensors and the static universe model created by Einstein and De Sitter. We also conducted a review of Friedmann - Robertson - Walker equations that lead to a dynamic universe. We also discuss the Standard Cosmological Model, which is based on the cosmological principle that assumes that the universe is, on a large scale, homogeneous and isotropic. However, the Hot Big Bang theory presents some problems when it tries to explain what conditions were present at the beginning of the universe. As a result, some theories have emerged that are dedicated to solving these problems, one of which is the inflationary theory. In this work we dedicate ourselves to study the inflationary theory and some models of simple potentials, which are proposed for the solution of the standard cosmological model.

**KEYWORDS:** Hot Big Bang theory, Einstein field equations, inflationary theory.

## LISTA DE FIGURAS

**Figura 3.1:** Ilustra as possibilidades geométricas do universo, para o caso de uma superfície bidimensional.

**Figura 4.1:** Imagem ilustra como podemos constatar a homogeneidade num conjunto de 3 milhões de galáxias.

**Figura 4.2:** Imagem ilustra homogeneidade e isotropia num conjunto de 3 milhões de galáxias.

**Figura 4.3:** Temos uma ilustração do problema do horizonte.

**Figura 5.1:** Ilustra a história do universo, onde vemos a representação dos principais eventos.

**Figura 5.2** Vemos o tunelamento do ínflaton através da barreira.

**Figura 5.3:** Ilustração da forma deste potencial para a inflação caótica.

**Figura 5.4:** Ilustração da forma deste potencial quadrático.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	12
2. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN .....	15
2.1. Uma breve revisão sobre tensores .....	15
2.2. As equações do campo de Einstein.....	22
2.3. Modelo cosmológico de Einstein e de De Sitter.....	28
3. COSMOLOGIA DE FRIEDMANN – ROBERTSON –WALKER (FRW).....	30
3.1. As Equações de Friedmann.....	30
3.2. Um pouco sobre a lei de Hubble.....	35
3.3. A equação da continuidade e outros parâmetros observacionais importantes .	37
4. MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO (MCP), A TEORIA DO BIG BANG E OS PRINCIPAIS PROBLEMAS .....	41
4.1. O Modelo Cosmológico Padrão.....	41
4.2. A Teoria do <i>Hot Big Bang</i> .....	42
4.3. Alguns problemas na teoria do <i>Hot Big Bang</i> .....	45
5. UM BREVE RESUMO SOBRE OS PRINCIPAIS MODELOS INFLACIONÁRIOS.....	51
5.1. O problema da formação de grandes estruturas.....	51
5.2. Alguns parâmetros importantes na cosmologia inflacionária.....	53
5.3. Aproximação de Rolagem lenta.....	57
5.4. Velha inflação .....	60
5.5. Nova inflação .....	62
5.6. Inflação Caótica .....	63
5.5.1 Potencial Quadrático .....	63

5.5.2	Potencial Quártico .....	66
5.5.3	Modelos com potencias do tipo exponenciais.....	68
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	72

# 1. INTRODUÇÃO

Uma das mais belas visões naturais que podemos contemplar sem a necessidade de fazer grandes viagens, sem dúvidas, é o céu noturno. Precisamos para isso apenas de um ambiente limpo e sem a presença de muitas luzes. Toda a grandeza do cosmos sempre fascinou os primeiros filósofos naturais. Toda essa admiração incentivou esses filósofos a se perguntarem qual a origem de tudo, como as coisas vieram a existir.

As primeiras tentativas de explicar a origem do universo vieram com os mitos de criação, que são de cunho predominantemente religioso. Dentre os mitos de criação podemos citar o mito de criação hindu, onde temos um universo cíclico em que a deusa Xiva é figura central na criação e destruição do universo. A deusa Xiva tem em uma de suas mãos um tambor que, quando tocado, se cria o universo; na outra mão ela possui uma chama de fogo em que no tempo próprio ela o destrói. Temos também o mito taoísta que data de aproximadamente de 2000 a.C (GLEISER, 2006). Nesse mito temos duas figuras centrais: Yin e Yang. A identidade Yin é caracterizada por ser passiva, ser ligada à escuridão e à fraqueza. O Yang é caracterizado pela atividade e por ser ligada à luz e à força. A criação é fruto dessa complementaridade, quando juntos essas identidades criam tudo e colocam o equilíbrio em tudo. Outro mito de criação que nos é bastante familiar é o mito judaico – cristão, onde tão somente pela palavra de Deus tudo veio a existir (GLEISER, 2006).

Seguindo no tempo, por volta da Idade Média, os filósofos naturais daquela época começaram a abandonar os mitos de criação e a construir modelos baseados em suas observações. Uma grande discussão que aflorou entre os estudiosos foi sobre modelos que colocavam o Sol ou a Terra no centro do universo. Entre aqueles que colocavam a Terra no centro do universo, modelo chamado geocêntrico, estavam grandes filósofos como o Aristóteles (350 a.C) que foi um dos primeiros a propor este modelo, que foi aperfeiçoado por Cláudio Ptolomeu. Já para aqueles que idealizavam o Sol no centro do universo, modelo chamado heliocêntrico, um dos precursores foi Aristarco de Samos (310 a.C – 230 a.C). Um dos grandes nomes nesse modelo do universo foi Nicolau Copérnico (1473 - 1543). Em seu grande livro “Das revoluções das esferas celestes”, onde ele não só afirma que o Sol é o centro do universo, mas também disse que os planetas o orbitam em trajetórias circulares. Com os planetas que eram

conhecidos em sua época ele criou o seguinte sistema de órbitas partindo do planeta mais próximo ao Sol até ao mais distante: Mercúrio, Vênus, Terra, Lua, Marte, Júpiter, Saturno e por fim as estrelas fixas (GLEISER, 2006).

Todo o avanço feito durante o decorrer dos séculos nos levou ao estágio atual de conhecimento sobre o cosmos. A cosmologia é o ramo da ciência que estuda como surgiu o cosmos, como ele evoluiu e análise de que forma ele está organizado. Aqui os pesquisadores trabalham como um tipo de arqueólogos, procurando os vestígios de uma época muito remota, os “fósseis” deixados nos primeiros instantes do universo (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015). A cosmologia atualmente tem seus pilares bem fundamentados e ganhou prestígio na comunidade científica, graças a sua boa base matemática e ao avanço nos instrumentos que são usados para coletar os dados o que possibilita confrontar algumas previsões com os dados obtidos.

A teoria mais aceita para a criação do cosmos, é a teoria do *Big Bang*, ou conhecida também como *Hot Big Bang*, que ganhou credibilidade com observações que estão de acordo com a teoria, como a abundância dos elementos leves e a radiação cósmica de fundo (RCF). A teoria do *Hot Big Bang* é baseada no princípio cosmológico que diz que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas ( $\sim 100$  Mpc)<sup>1</sup>. O modelo do *Hot Big Bang* assume que o cosmos teve seu início a aproximadamente 13,8 bilhões de anos, contudo, apesar do sucesso da teoria ela apresenta problemas, inclusive em pontos que a sustentam.

Embora ela seja condizente com as observações atuais que temos do cosmos, ela falha quando tenta descrever quais condições estavam presentes em seus estágios iniciais que geraram o universo que temos hoje (LIDDLE, 2003).

Os modelos inflacionários surgiram como tentativas de descobrir como era o cosmos jovem, se houve algum mecanismo dinâmico que teria gerado as características que são observadas. Vale ressaltar que os modelos inflacionários não substituem de modo algum a teoria do Big Bang, eles apenas complementam a teoria, onde se supõe um período de rápida expansão.

O nosso objetivo geral será deduzir as equações do campo de Einstein, aplicá-las no contexto da métrica de Friedmann – Robertson – Walker para um universo dito homogêneo e isotrópico, em seguida vamos estudar alguns modelos inflacionários que são propostos para solucionar alguns problemas na teoria do Big Bang. Por meio de

---

<sup>1</sup> 1 Mpc equivale a  $3,26 \times 10^6$  anos – luz, 100 Mpc equivale a 3 bilhões de trilhões de quilômetros.

uma extensa revisão bibliográfica, procuramos trazer em cada tema abordado o máximo de explicações possíveis e de passagens matemáticas. Nossa motivação se deu pelo fato de que na literatura não encontramos com muita facilidade trabalhos que aliem todo o arsenal matemático aos elementos teóricos. Essa abordagem pode facilitar o entendimento para novos estudantes que se interessem pelo tema.

Apresentamos o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) e mostramos os principais problemas no capítulo (4). Também realizamos uma breve revisão das equações de Einstein e das ferramentas matemáticas necessárias no capítulo (2) para compreendermos como funciona a matemática nesta área. No capítulo (3) estudamos as equações de Einstein na métrica de Friedmann – Robertson - Walker (FRW). Para solucionar os problemas do MCP estudamos no capítulo (5) alguns modelos inflacionários. O último capítulo é dedicado a conclusões e perspectivas.

## 2. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Em 1915, Albert Einstein iniciou uma revolução conceitual no modo com que os cientistas entendiam a estrutura do espaço e do tempo o que gerou, posteriormente, a uma alteração da teoria da gravitação criada por Newton 3 séculos antes.

Newton propõe sua teoria da gravitação universal no século XVI, apoiando-se em vários dados colhidos com muita dedicação pelos astrônomos daquela época, como o trabalho realizado por Tycho Brahe e Johannes Kepler (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015). Sua teoria unificava todos os fenômenos de atração de corpos com massa, seja aqui na Terra ou em qualquer lugar do espaço sideral. Com os estudos de Newton a gravitação universal era entendida como a interação entre dois corpos, onde uma força que atua a distância é capaz de mover todos os objetos ao seu redor e a sua intensidade é diminuída com o inverso do quadrado da distância (RESNIK e HALLIDAY, 1996).

Einstein interpretou a força de atração como uma deformação no tecido do espaço – tempo, onde os corpos seguirão as menores retas locais. A deformação no tecido do espaço tempo é causada pela presença de matéria ou de energia que é representada nas equações na forma de um tensor, conhecido como tensor energia – momento (PELICER, 2016).

As equações de campo de Einstein marcam o início das discussões sobre cosmologia moderna. Essas equações formam um dos pilares desta área de pesquisa. Para compreendermos um pouco melhor como funciona a matemática que está envolvida nessas equações realizaremos a seguir uma breve revisão matemática sobre os tensores.

### 2.1. Uma breve revisão sobre tensores

Iniciamos nossos estudos da dedução das equações de Einstein com uma revisão sobre alguns elementos da álgebra tensorial. Na cosmologia e nos seus ramos afins, precisamos aprender algumas ferramentas do arsenal matemático com que se expressam os físicos nesta área. Aqui devemos agradecer ao matemático alemão Georg Friedrich B. Riemann que foi de grande importância no desenvolvimento do cálculo tensorial.

Um tensor é uma identidade matemática que generaliza conceitos como escalares e vetores como sendo casos particulares de tensores. Uma de suas

características notáveis é que, quantidades tensoriais permanecem inalteradas sobre uma transformação entre sistemas de coordenadas, fato este é devido aos vetores de base dupla que permitem escrevermos os tensores em dois tipos de bases, a saber: bases covariantes ou contravariantes (FLEICH, 2012). Um escalar é um único valor sem direção indicada, que representa uma quantidade que não varia entre sistemas de coordenadas. Já um vetor é uma matriz de três valores (no espaço tridimensional) chamados componentes vetoriais que, combinados com vetores de base (indicadores direcionais), formam uma quantidade que não varia conforme o sistema de coordenadas é alterado. Um tensor de classificação  $n$  é uma matriz de  $3^n$  valores (espaço tridimensional). De modo mais geral, o número de componentes de um tensor pode ser dado como sendo  $m^n$ , onde  $m$  é o número de dimensões do espaço e  $n$  é a ordem do tensor. Tensores de ordem 0, 1 ou 2 podem ser representadas por matrizes, já para ordens mais altas precisam ser descritos a partir dos componentes separadamente.

Podemos realizar a soma de tensores, apenas obedecendo uma regra: somar tensores que possuem os mesmos tipos de índices. Para ilustrar como funciona essa situação com a soma de tensores, tomemos uma soma de tensores com índices covariantes, contravariantes e mistos<sup>2</sup>, respectivamente (FLEICH, 2012):

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}; \quad (2.1)$$

$$C^{ij} = A^{ij} + B^{ij}; \quad (2.2)$$

$$C_j^i = A_j^i + B_j^i. \quad (2.3)$$

Para realizar a multiplicação de tensores, temos duas possibilidades: uma chamada de produto exterior e outra chamada de produto interno (ou ponto). O produto exterior (ou produto tensorial) entre dois tensores tem como resultado um novo tensor de ordem igual a soma das ordens individuais de cada tensor, por exemplo:

$$A_j^i B_{lm}^k = C_{jlm}^{ik}. \quad (2.4)$$

---

<sup>2</sup> Tensores contravariantes são representados por índices sobrescritos. Tensores covariantes são representados com índices subscritos. Tensores mistos são representados por índices sobrescrito e subscritos simultaneamente. Essas relações provêm do comportamento do tensor referentes às mudanças de base do espaço em questão. Caso o índice de um tensor sofra uma mudança de base e ele se transforme com o inverso dessa transformação ele será um índice contravariante. Para o caso em que o índice do tensor se transforme da mesma forma que a transformação da base ele será um índice covariante.

Sendo que, o tensor A é de ordem dois e o tensor B é de ordem três, que resultam no tensor C de ordem cinco. Já o produto interno pode ser entendido como uma generalização do produto escalar (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005). Lembrando que o produto interno entre dois vetores produz um resultado escalar, então podemos esperar que o produto interno (que também é chamado de contração) entre dois tensores produza um tensor de menor ordem.

Como exemplo, tomemos a seguinte situação:

$$A^{\mu\lambda} B_{\lambda\nu}^{\nu} = T_{\lambda\nu}^{\mu\lambda\nu} = T_{\nu}^{\mu\nu} . \quad (2.5)$$

Também temos algumas relações de simetria que alguns tensores obedecem em relação a troca de lugar de alguns índices. Um tensor é dito simétrico se a troca de dois índices de mesmo tipo não altera o valor da componente, como (PELICER, 2016)

:

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}, \quad (2.6)$$

e antissimétrico, se a troca mudar o sinal:

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} . \quad (2.7)$$

Podemos ainda nos indagar: como expressar a distância entre dois pontos, de modo que o resultado não dependa do sistema de coordenadas utilizado? Para isso precisamos de um tensor que forneça a métrica, ou seja, que torne invariante grandezas como ângulos e comprimentos. Um espaço é dito métrico quando essa distância infinitesimal  $ds$  é escrita como função do tensor métrico e simétrico  $g_{\mu\nu}$  da seguinte forma (FLEICH, 2012):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.8)$$

em que o tensor métrico  $g_{ij}$ , para um espaço tridimensional que matricialmente, pode ser representada matricialmente como:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Esse tensor pode ser usado para diminuir ou aumentar índices de outros tensores. Por exemplo tomemos o caso em que aumentamos o índice de um tensor qualquer  $B$  (PELICER, 2016):

$$g^{ij}B_i = B^j, \quad (2.10)$$

$$g_{ij}B^i = B_j, \quad (2.11)$$

como podemos também multiplicar o tensor métrico contravariante por um tensor métrico covariante, de onde obtemos a seguinte relação:

$$g^{ij}g_{ij} = \delta_j^i. \quad (2.12)$$

Esse tensor métrico determina a homogeneidade e isotropia do espaço em questão. Para que o espaço seja homogêneo, significa que a métrica para um tempo fixo não deve depender do ponto de referência, ou seja, o espaço se mostra o mesmo em qualquer ponto de referência. Isotropia significa que ele é o mesmo visto em qualquer direção.

E se estivermos interessados em derivar um tensor? Seja um vetor  $\vec{A}$  escrito em vetores de bases covariantes como:

$$\vec{A} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3. \quad (2.13)$$

Sua derivada com relação à coordenada  $x^1$  é dado por:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^1} = \frac{\partial(A^i\vec{e}_i)}{\partial x^1} = \frac{\partial(A^i)}{\partial x^1}\vec{e}_i + \frac{\partial(\vec{e}_i)}{\partial x^1}A^i. \quad (2.14)$$

A segunda derivada do segundo termo complica o processo de tomar uma derivada em sistemas de coordenadas em que a magnitude e/ou a direção dos vetores de base mudam à medida que você se move ao redor do espaço. Para isso iremos introduzir o símbolo

de Christoffel, que é representado como a letra grega maiúscula gama ( $\Gamma$ ), que simplesmente representa o coeficiente de ponderação para um dos vetores de base.

Daí, o relacionamento para os símbolos de Christoffel e os vetores de base escritos de forma covariante como (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005):

$$\Gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}, \quad (2.15)$$

a definição de derivada covariante pode ser tomada a partir das equações acima como segue:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma_{kj}^i \right) \vec{e}_i. \quad (2.16)$$

A derivada covariante é definida como a combinação dos dois termos dentro do parêntesis. O processo de diferenciação covariante também pode ser aplicado para tensores. Para isso, simplesmente adicionamos um termo de símbolo de Christoffel para cada índice contravariante e a subtração de um termo de símbolo de Christoffel para cada índice covariante, daí (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005):

$$\frac{DA^{ij}}{Dx^k} = \partial \frac{A^{ij}}{\partial x^k} + A^{lj} \Gamma_{lk}^i + A^{il} \Gamma_{lk}^j. \quad (2.17)$$

Em sistemas tridimensionais, para análise de vetores, há dois teoremas importantes, o teorema de Stokes e o teorema de Gauss. Estes teoremas permanecem válidos na análise de tensores e sua formulação é generalizada de tal forma que eles podem ser aplicados a integrais em métricas de n-dimensões arbitrárias.

Na notação tensorial, o teorema de Stokes tem a forma (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005):

$$\oint_c A_m dx^m = \frac{1}{2} \oint_s F_{mn} ds^{mn}, \quad (2.18)$$

onde  $F_{mn}$  é o rotacional do vetor  $A_m$ , definido como:

$$F_{mn} = D_m A_n - D_n A_m . \quad (2.19)$$

Por outro lado,

$$ds^{mn} = dx^m dx^n, \quad (2.20)$$

que é o tensor contravariante do elemento infinitesimal de superfície  $S$ . Na formulação tensorial do teorema de Gauss, iremos usar um elemento de volume invariante  $\sqrt{g} d\Omega$ .

Assim, obtemos (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005):

$$\oint_S A^m ds_m = \int_\Omega D_m A^m \sqrt{g} d\Omega . \quad (2.21)$$

Esta formulação é válida para espaços métricos generalizados. Ainda, o teorema de Gauss pode ser estendido para um tensor arbitrário com índice superior e inferior. Como exemplo, um tensor misto de 3ª ordem  $T_k^{mn}$  é dado por:

$$\oint T_k^{mn} ds_m = \int_\Omega D_m T_k^{mn} \sqrt{g} d\Omega . \quad (2.22)$$

Vamos derivar uma fórmula geral para a mudança de um vetor após uma translação paralela ao longo de algum contorno fechado  $C$  infinitamente pequeno. Essa alteração, indicada por  $\Delta A_m$ , é obtida da seguinte maneira (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005):

$$\Delta A_m = \oint_C \delta A_m = \oint_C \Gamma_{mp}^n A_n dx^p . \quad (2.23)$$

Pelo teorema de Stokes, esta integral de linha sobre o contorno fechado  $C$  pode ser transformada em uma integral de superfície  $S$  limitada pelo contorno fechado  $C$ , isto é:

$$\Delta A_m = \frac{1}{2} \oint_C [D_k (\Gamma_{mp}^n A^n) - D_p (\Gamma_{mk}^n A^n)] ds^{kp}, \quad (2.24)$$

onde usamos o operador covariante:

$$D_k = \frac{D}{Dx^k}. \quad (2.25)$$

Usando a definição de derivada covariante de segunda ordem e realizando as devidas manipulações, obtemos assim, a seguinte expressão:

$$\Delta A_m = \frac{1}{2} \oint_C (\partial_k \Gamma_{mp}^n - \partial_p \Gamma_{mk}^n + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{lk}^n - \Gamma_{mk}^l \Gamma_{lp}^n) A_n ds^{kp}. \quad (2.26)$$

Inserindo aqui a notação:

$$R_{mkp}^n = \partial_k \Gamma_{mp}^n - \partial_p \Gamma_{mk}^n + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{lk}^n - \Gamma_{mk}^l \Gamma_{lp}^n. \quad (2.27)$$

O tensor misto de quarta ordem definido pela equação (2.27) é chamado de Tensor de Curvatura ou Tensor de Riemman de um determinado espaço métrico.

O resultado obtido em (2.26) torna-se:

$$\Delta A_m = \frac{1}{2} \oint_C R_{mkp}^n A_n ds^{kp}. \quad (2.28)$$

Uma vez que o contorno fechado  $C$  é infinitesimalmente pequeno, é possível substituir o integrando da integral por seu valor em algum ponto (DALARSSON, M.; DALARSSON, N, 2005). Assim, finalmente obtemos uma fórmula geral para a mudança de um vetor após uma translação paralela ao longo de algum contorno fechado infinitamente pequeno  $C$  na forma:

$$\Delta A_m = \frac{1}{2} R_{mkp}^n A_n \Delta S^{kp}. \quad (2.29)$$

Na literatura encontramos um teorema que nos diz que é condição necessária e suficiente que para termos um espaço plano quando a equação (2.27) é igual a zero (PELICER, 2016). Da definição do tensor de curvatura, é facilmente visto que ele é antissimétrico em relação ao intercâmbio dos dois índices mais baixos, de tal forma que temos:

$$R_{mkp}^n = -R_{mpk}^n. \quad (2.30)$$

Isto possibilita ver que a curvatura do tensor satisfaz a seguinte identidade:

$$R_{mkp}^n + R_{pmk}^n + R_{kpm}^n = 0. \quad (2.31)$$

Com o tensor de curvatura (2.27), podemos realizar a contração do índice contravariante com o segundo índice covariante. Dessa forma, é possível construir um tensor covariante de ordem reversa chamado de tensor de Ricci, como segue:

$$R_{mn} = R_{mnp}^p = -R_{mpn}^p. \quad (2.32)$$

Usando a definição do tensor de curvatura, nós escrevemos:

$$R_{mn} = \partial_n \Gamma_{pm}^p - \partial_p \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{nl}^p - \Gamma_{mn}^p \Gamma_{lp}^l. \quad (2.33)$$

Vemos assim que o tensor de Ricci é simétrico em relação aos seus índices:

$$R_{mn} = R_{nm}. \quad (2.34)$$

Usando o tensor de Ricci, a definição do escalar de Ricci torna-se:

$$R = g^{mn} R_{mn} = g^{mn} g^{pk} R_{kmnp}. \quad (2.35)$$

O tensor de Ricci e o escalar de Ricci são extensivamente usados na Teoria Geral da Relatividade e na cosmologia.

## 2.2. As equações do campo de Einstein.

Vamos entender um pouco do processo de dedução das equações de campo gravitacional. Essas equações formam a base da Teoria da Relatividade Geral (TRG). A TRG surgiu como uma generalização da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) que foi

criada em 1905, sendo que esta teoria possui dois pontos que incomodavam Einstein: o primeiro é que nenhum objeto pode se mover mais rápido que a luz e o segundo é que toda o movimento precisa de um referencial inercial para validar sua descrição (EINSTEIN, 2019). Então, ele procurou uma maneira de generalizar a TRR, conseguindo seu *insight* com o princípio da equivalência, alguns anos depois de publicar seu trabalho de 1905. Segundo o princípio da equivalência, não há distinção entre massas gravitacionais e massas inerciais (PELICER, 2016).

Para construir as equações do campo vamos fazer uso do princípio de mínima ação, que diz que a trajetória percorrida por um corpo é sempre aquela em que a ação  $S$  possui um valor mínimo (NETO, 2013). A ação que vamos construir é dada como a integral da função escalar  $\mathcal{L}$  da seguinte forma:

$$S = \int_A^B \mathcal{L} dt , \quad (2.36)$$

em que  $\mathcal{L} = T - V$ , ou seja, a lagrangiana é uma função escalar que é igual à energia cinética menos a energia potencial.

A partir da ação integral adequada para o campo gravitacional, consideremos  $\mathcal{L}$  como a lagrangiana escalar de um sistema, o volume quadrimensional do espaço-tempo  $\Omega$ . Com isso podemos construir a seguinte equação, conhecida como a ação de Einstein–Hilbert (CARAMÊS, 2009):

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}_G \sqrt{-g} d\Omega , \quad (2.37)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica e o sinal negativo no radical resulta de estarmos tratando de um espaço-tempo real. Vamos aplicar o princípio de mínima ação:

$$\delta S = 0. \quad (2.38)$$

Neste ponto, vamos separar a lagrangiana em dois termos: um para o campo gravitacional e o outro para campos externos que podem agir como fontes de campo gravitacional. Dessa forma (PELICER, 2016):

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} (\mathcal{L}_G - \mathcal{L}_M) d\Omega = 0. \quad (2.39)$$

Partiremos em analisar cada termo separadamente. Vamos começar com os campos gravitacionais. A ação do campo gravitacional no espaço vazio pode ser escrito como:

$$I_G = \int_{\Omega} \sqrt{-g} (\mathcal{L}_G) d\Omega. \quad (2.40)$$

Nesse processo de construir a densidade lagrangiana invariante, ela deve ser função do tensor métrico e de suas derivadas de até 2ª ordem:

$$I_G = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}_G (g_{kn}, \partial_j g_{kn}) \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.41)$$

No entanto sabemos que as primeiras derivadas do tensor métrico podem ser expressas em termos dos símbolos de Christoffel do segundo tipo e dos tensores métricos adequados. Assim, podemos escrever que:

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G (g_{kn}, \Gamma_{kn}^j). \quad (2.42)$$

Vamos adotar o escalar de curvatura como o candidato mais simples e que podemos utilizar que agrega todos esses requisitos. David Hilbert foi quem primeiro utilizou este escalar como sendo a lagrangiana. Com isso podemos escrever que:

$$\mathcal{L}_G = \frac{-c^4}{16\pi G} R. \quad (2.43)$$

Aqui  $G$  é a constante gravitacional. O fator de proporcionalidade da equação acima é adicionado para garantir a dimensões corretas das grandezas físicas. A equação de ação para campos gravitacionais no espaço vazio pode ser reescrita como:

$$I_G = \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.44)$$

Agora, vamos tomar as variações da integral acima para descobrir a forma das equações para campos gravitacionais:

$$\delta I_G = \frac{-c^3}{16\pi G} \delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega . \quad (2.45)$$

Calculando a variação  $\delta(R\sqrt{-g})$ , vamos obter (DALARSSON & DALARSSON, 2005):

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \left( R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R \right) \delta g^{kn} + \sqrt{-g} g^{kn} \delta R_{kn} . \quad (2.46)$$

Desenvolvendo a expressão  $g^{kn} \delta R_{kn}$  e reagrupando termos, finalmente chegamos a:

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \left( R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R \right) \delta g^{kn} + \partial_p (\sqrt{-g} w^p) , \quad (2.47)$$

onde  $w^p$  é um quadrivetor. Substituindo esta última equação na nossa expressão da variação da ação integral, temos:

$$\begin{aligned} \delta I_G = & \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left( R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R \right) \delta g^{kn} d\Omega - \\ & \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \partial_p (\sqrt{-g} w^p) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Quando realizarmos as variações na ação, a segunda integral desaparece devido ao teorema do divergente (ou teorema de Gauss) mantendo os extremos fixos. Com isso podemos descartar a segunda integral e ficar apenas com:

$$I_G = \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left( R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R \right) \delta g^{kn} d\Omega . \quad (2.49)$$

Para o caso hipotético em que não temos fontes de campo externos, e como  $\sqrt{-g} \neq 0$  e  $\delta g^{kn}$  é livre para variar teríamos o seguinte resultado:

$$\frac{-c^3}{16\pi G} \left( R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R \right) = 0 . \quad (2.50)$$

Contudo, para a existência de campos externos (campos de matéria) precisamos encontrar a ação integral para campos de matéria. Dessa forma:

$$I_M = \frac{1}{c} \int_{\Omega} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) d\Omega . \quad (2.51)$$

Vamos novamente tomar variações na equação acima:

$$\delta I_M = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) d\Omega , \quad (2.52)$$

para o caso em que  $\mathcal{L}_M$  seja do tipo:

$$I_M = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}_M(g_{kn}, \partial_j g_{kn}) \sqrt{-g} d\Omega . \quad (2.53)$$

De forma que obtemos:

$$\delta I_M = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{kn}} \delta g^{kn} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_j g^{kn})} \delta \partial_j g^{kn} \right] d\Omega . \quad (2.54)$$

Reescrevendo o integrando da equação anterior e definindo o tensor de energia-momento  $T_{kn}$  dos campos de matéria da seguinte forma (DALARSSON & DALARSSON, 2005):

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{kn} = \partial_j \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_j g^{kn})} \right] - \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{kn}} , \quad (2.55)$$

Podemos chegar ao resultado:

$$\delta I_M = -\frac{1}{2C} \int_{\Omega} T_{kn} \delta g^{kn} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.56)$$

Ou ainda que:

$$\delta I_M = \frac{1}{2C} \int_{\Omega} T^{kn} \delta g_{kn} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.57)$$

Novamente, como  $\sqrt{-g} \neq 0$  e  $\delta g^{kn}$  é livre para variar teríamos o seguinte resultado:

$$\delta I_M = \frac{1}{2C} T^{kn}. \quad (2.58)$$

Por fim, voltando ao princípio de mínima ação escrito na equação (2.38), temos que:

$$\delta S = \delta I_M + \delta I_G = 0. \quad (2.59)$$

Usando o resultado de que  $-\delta I_G = \delta I_M$ , obtemos:

$$R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{kn}. \quad (2.60)$$

Notemos que o lado esquerdo das equações faz referência ao conteúdo geométrico do universo, já o lado direito da equação faz referência ao conteúdo de matéria do cosmos. Essa é a equação de Einstein da Teoria Geral da Relatividade.

Vamos definir o tensor de Einstein  $G_{nK}$  a partir da equação (2.60) como sendo:

$$G_{nk} \equiv R_{nK} - \frac{1}{2} g_{nK} R. \quad (2.61)$$

A gravitação que era entendida como a interação entre os corpos, agora passa a ser interpretada como a deformação no tecido do espaço – tempo, onde os corpos

seguirão em seus caminhos as menores “retas locais”. A deformação no tecido do espaço – tempo é causada pelo tensor energia – momento (PELICER, 2016).

### 2.3. Modelo cosmológico de Einstein e de De Sitter

Desde os primórdios dos estudos sobre os cosmos era consenso que ele era imutável, estático e sem dinâmica em grandes escalas de distâncias, apesar de que existia a constatação do movimento de corpos celestes em nosso sistema solar. Cientistas de grande prestígio como Newton eram apoiadores dessas ideias.

Albert Einstein, como a maioria dos cientistas de sua época, acreditava num universo estático, pois ainda não havia provas que refutassem essa visão. Em 1915, Albert Einstein revolucionou o cenário científico de sua época com a TRG e suas equações previam que o cosmos não poderia ser estático. Como conhecemos, a matéria existente no universo se atrai, o que faria com que o universo entrasse em colapso gravitacional, ou então ele iria aumentar o seu tamanho (GRAEF, 2012). No ano de 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre cosmologia moderna propriamente dita com o título “Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade”, no qual ele propõe um modelo cosmológico em que o universo é estático e que ele deve possuir uma geometria esférica (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

Einstein assumia que o universo era basicamente formado por um gás de galáxias, que o cosmos é homogêneo e isotrópico em larga escala. A energia das partículas do gás das galáxias para ele seria desprezível com relação a sua energia inicial, que é dada por sua massa de repouso<sup>3</sup>. Dessa forma, o universo teria o comportamento de um fluido sem pressão, no entanto, assumindo o universo com essas características às suas equações do campo o levavam a um modelo de universo em expansão (MAIA, 2000).

Para que a solução de suas equações leve a um universo estático ele adicionou um termo que levasse a um universo como ele cria, de forma que sua equação se torna:

$$R_{kn} - \frac{1}{2} g_{kn}R + \Lambda g_{kn} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{kn} . \quad (2.62)$$

---

<sup>3</sup> A massa de repouso é obtida com a famosa equação de Einstein  $E = mc^2$ , que nos afirma a equivalência entre massa e energia.

No ano de 1929, foi constatado por Edwin Hubble e seus colaboradores que o universo está em expansão. Isso levou a Einstein a admitir que aquele termo adicional foi o “maior erro de sua carreira”. No entanto, o termo tem sido resgatado atualmente em estudos de algumas teorias inflacionárias e na teoria quântica de campo (TYSON, 2015).

Também foi no ano de 1917 que De Sitter propõe seu modelo cosmológico para um universo estático, no qual ele parte da ideia de que o cosmos deveria ser isotrópico e que para continuar estático ele teria a densidade de matéria zero. Se alguém jogasse um punhado de matéria dentro desse universo as partículas se afastariam uma das outras, isso ficou conhecido como “Efeito De Sitter”. Esse afastamento das partículas seria devido à força repulsiva  $\Lambda$ . Porém ficou entendido que seu modelo era puramente um artifício matemático. Podemos dizer que esse foi o primeiro modelo cosmológico que havia algum tipo de expansão. A principal diferença entre os modelos de Einstein e de De Sitter é que no primeiro modelo haveria matéria sem movimento, já no outro teria movimento sem matéria (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

No ano de 1927, um padre belga conhecido como Georges Lemaître em seus estudos mostrou que esse luta entre a atração gravitacional e a repulsão devido a  $\Lambda$  levava ao modelo criado por Einstein a uma instabilidade.

Vamos estudar no capítulo seguinte a cosmologia de Friedmann – Robertson – Walker de um universo dinâmico.

### 3. COSMOLOGIA DE FRIEDMANN – ROBERTSON – WALKER (FRW)

No ano de 1922, o físico russo Alexander Friedmann surgiu com soluções alternativas para as equações de Einstein, mostrando que, numa situação de expansão do espaço – tempo, elas ainda permaneciam igualmente válidas. Porém seu trabalho ficou deixado de lado por alguns anos (SPARROW, 2018). Essas equações são obtidas apenas calculando os termos das equações do campo da TRG para uma métrica específica. Assim vamos procurar para a métrica, em consideração, os valores para o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , o escalar de curvatura  $R$  e o tensor de Energia - Momento  $T_{\mu\nu}$ . Para um modelo de universo que seja homogêneo e isotrópico, a métrica a ser considerada é a métrica de Friedmann – Robertson – Walker (FRW) (MOTA, 2015). Também vamos discutir de maneira mais breve sobre a lei de Hubble e prosseguir para obter uma equação da continuidade.

#### 3.1. As Equações de Friedmann

Conforme vimos no capítulo anterior, a métrica descreve a distância física entre pontos do espaço – tempo. O princípio cosmológico implica que num dado instante de tempo o universo não possui direções preferenciais, que em grandes escalas ele deve ser homogêneo e isotrópico para qualquer observador no universo e ainda que o cosmos seja preenchido de forma regular por matéria e radiação. A métrica mais geral que satisfaz estas condições é a métrica espaço-temporal de Friedmann - Robertson-Walker (FRW). A conexão entre elemento de linha e o tensor métrico é escrita como (2.8) (SILVA, 2004):

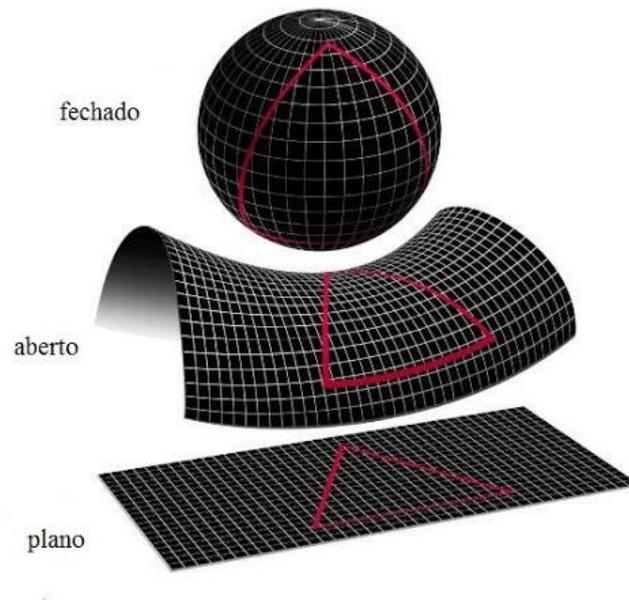
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu, \quad (3.1)$$

para um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que tenha assinatura  $(+, -, -, -)$  o elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.2)$$

sendo  $a(t)$  o fator de escala do universo,  $k$  representando a constante de curvatura do universo, que pode assumir o valor de -1 representando a possibilidade de geometria hiperbólica, o valor 0 onde temos uma geometria plana e ainda o valor de 1 para uma

geometria esférica. A figura abaixo representa essas possibilidades para o caso de uma superfície bidimensional.



**Figura 3.1:** Ilustra as possibilidades geométricas do universo, para o caso de uma superfície bidimensional. Imagem disponível em <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/reino/cosmolg1-EM.htm>.

Acesso em 27/05/2021 às 10:30

Vamos partir agora para determinar as equações de Friedmann. Elas são obtidas a partir das equações do campo gravitacional de Einstein que vimos no capítulo anterior, mas agora vamos inserir nesse contexto uma métrica definida.

A equação de Einstein da Teoria da Relatividade (2.60):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

a métrica que vamos trabalhar é a métrica FRW. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  para esta métrica é escrita como a seguinte matriz diagonal:

$$[g_{mn}] = \text{diag}(1, -R^2(1 - kr^2)^{-1}, -R^2r^2, -R^2r^2(\sin \theta)^2). \quad (3.4)$$

Pela equação acima, vemos que esse tensor métrico tem as seguintes componentes:

$$g_{00} = 1; g_{11} = -R^2(1 - Kr^2)^{-1}; \quad (3.5)$$

$$g_{22} = -R^2r^2; g_{33} = -R^2r^2(\sin\theta)^2. \quad (3.6)$$

Precisamos calcular o tensor de Ricci para estes componentes do tensor métrico, para obter as equações de Friedmann. Lembremos que o tensor de Ricci é dado da seguinte forma (2.33):

$$R_{kn} = \partial_n \Gamma_{kj}^j - \partial_j \Gamma_{kn}^j + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pn}^j - \Gamma_{kn}^p \Gamma_{pj}^j, \quad (3.7)$$

podemos fazer uso dos símbolos de Christoffel do segundo tipo, que tem relação com a métrica escrita acima da seguinte forma:

$$\Gamma_{kn}^p = \frac{1}{2} g^{pj} \Gamma_{j, kn}. \quad (3.8)$$

Os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero estão listados a seguir:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}; \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2; \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \text{sen}(\theta)^2; \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}; \Gamma_{22}^1 = -r^2(1-kr^2); \Gamma_{33}^1 = -r^2 \text{sen}(\theta)^2(1-kr^2) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}(\theta) \cos(\theta); \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}; \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.11)$$

podemos perceber que todas as componentes fora da diagonal principal para o tensor de Ricci são iguais a zero, ou seja (DALARSSON & DALARSSON, 2005):

$$R_{kn} = R_{nk} = 0, \quad (k \neq n) \quad (3.12)$$

assim os únicos componentes não nulos do tensor de Ricci são os componentes que estão na diagonal principal da métrica.

Daí, temos os seguintes resultados (DALARSSON & DALARSSON, 2005):

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.13)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2a^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (3.14)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2a^2 + 2k) \quad (3.15)$$

$$R_{33} = r^2 \text{sen}(\theta)^2(a\ddot{a} + 2a^2 + 2k). \quad (3.16)$$

O escalar de curvatura  $R$  provém da soma direta de todos os termos escritos acima, da seguinte forma:

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a}\right). \quad (3.17)$$

As fontes de energia e momento nas equações do campo de Einstein podem ser modeladas como um fluido perfeito, assim o tensor energia – momento pode ser escrito da seguinte forma (GRAEF, 2012):

$$T_n^k = (p + \rho c^2)u_n u^k - \delta_n^k p, \quad (3.18)$$

adotando por convenção que  $c^2 = 1$ , chegamos a:

$$[T_n^k] = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (3.19)$$

Vamos multiplicar a equação de Einstein da TRG por um tensor métrico contravariante  $g^{\mu\nu}$ . Dessa forma, vamos obter os componentes mistos do tensor de Ricci e do tensor de Energia - Momento. Com isso, a equação do campo de Einstein se torna:

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}R = 8\pi GT_\nu^\mu. \quad (3.20)$$

Assim, combinando os resultados das componentes não nulas do tensor de Ricci, o tensor métrico da métrica FRW, o escalar de curvatura e o tensor energia – momento teremos (SANTOS, 2011):

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = 8\pi GT_0^0.$$

O que nos leva à equação:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.21)$$

e para a outra componente temos:

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = 8\pi GT_1^1,$$

de onde tiramos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.22)$$

Estas duas equações são as únicas independentes, as outras equações relacionadas as coordenadas:

$$R_2^2 - \frac{1}{2}R = T_2^2, \quad R_3^3 - \frac{1}{2}R = T_3^3;$$

apresentam o mesmo resultado do já apresentado na equação (3.22). O universo dinâmico, conforme Friedmann havia previsto em seus estudos foi constatado por Edwin Powell Hubble. Vamos reescrever a equação (3.21) em termos do parâmetro de Hubble, mas antes disso iremos discutir na seção abaixo um pouco sobre a importante descoberta.

### 3.2. Um pouco sobre a lei de Hubble

No início do século XX, a maior parte da comunidade científica da época acreditava que o universo era formado unicamente pela nossa galáxia, a Via Láctea. Essa concepção da grandeza do nosso universo foi mudado por Edwin Powell Hubble, um jovem astrônomo que procurava uma prova da existência de nebulosas extragalácticas. Para isso começou a procurar maneiras que o levassem a medir a distância até elas. Seus estudos o levaram a analisar o brilho que vem das estrelas, que ele notou ter dependência de sua luminosidade e da distância que está de nós (HAWKING, 2015).

Ele começou a procurar estrelas que emitem sempre a mesma quantidade de luz, encontrando um tipo específico de supernovas que serviam como velas padrão. Ele iniciou sua busca à procura dessas estrelas em uma mesma galáxia e com isso ele conseguiu determinar a distância de nove galáxias (HAWKING, 2015). Neste ponto Hubble havia ampliado a nossa ideia sobre o tamanho do universo, afinal ele conseguiu provar que a nossa galáxia não está só. Para constatar que essas outras galáxias estão em movimento ele precisou estudar os trabalhos realizados por Vesto Slipher.

Vesto Slipher, em 1912, trabalhava no observatório Lowell, no Arizona. Foi ele quem, pela primeira vez, constatou que a galáxia de Andrômeda se aproxima de nós. Sua análise das linhas espectrais vindas dessa galáxia revelou que elas estavam desviadas para o azul do espectro, logo um *blueshift* para Andrômeda. Nos anos que se seguiram, foram feitas várias medidas de redshifts por M. Humason, que posteriormente o Edwin Hubble utilizou para formular uma relação entre o redshift e a distância das galáxias (HAWKING, 2015). Mas o que são *redshifts* e *blueshifts*?

Esses dois fenômenos estão associados ao efeito Doppler, que é um fenômeno ligado à física ondulatória, que nada mais é do que a mudança da frequência relativa ao observador (YOUNG e FREEDMAN, 2008). Este fenômeno continua válido para o caso da luz, logo se recebemos luz de uma galáxia não que está em movimento em relação à nossa, teremos o mesmo intervalo de chegada entre duas cristas de onda, mas se ela estiver se afastando da nossa galáxia, o intervalo de chegada entre duas cristas de onda irá aumentar fazendo deslocar para o vermelho o espectro da luz (*redshift*). Da mesma forma, se a galáxia se aproxima da nossa, o intervalo de chegada entre duas cristas de onda irá diminuir, deslocando assim o espectro da luz para o azul (*blueshift*) (SPARROW, 2018).

Nesse ponto, a maioria da comunidade científica da época imaginava que haveria um movimento aleatório das galáxias, uma mesma quantidade de redshift e de blueshift. Hubble que tinha feito as primeiras medidas da distância para outras galáxias teve conhecimento dos estudos realizados por Vesto Slipher. Ao comparar seus dados com os de Vesto notou que havia uma relação linear entre a velocidade de afastamento  $\vec{v}(t)$  e a sua distância  $\vec{r}(t)$  dada da seguinte maneira (SILVA, 2004):

$$\vec{v}(t) = H_0 \vec{r}(t), \quad (3.23)$$

onde  $H_0$  é a constante de Hubble, que é comumente expressa como:

$$H_0 = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, \quad (3.24)$$

as medições pelo “*Hubble Space Telescope Key Project*” para o valor de  $h$  (FREEDAMANN et al, 2001):

$$h = 0,72 \pm 0,08.$$

Notemos que, para a métrica FRW, as coordenadas espaciais são comoveis e a expansão é causada pelo fator de escala. As coordenadas comoveis são coordenadas carregadas pelo fluido em expansão, a relação entre a distância real  $\vec{r}(t)$  e a distância comóvel  $\vec{x}$  é dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}a(t). \quad (3.25)$$

Assim se tivermos um observador numa galáxia, ele constatará uma outra galáxia localizada a uma distância  $\vec{r}(t)$  afastar-se com velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \vec{r}(t), \quad (3.26)$$

onde  $H(t)$  é o parâmetro de Hubble.

Podemos então reescrever a equação (3.21) da seguinte forma (JUNIOR, 2004):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.27)$$

Encontramos na literatura nomes especiais para as equações (3.21) e (3.22): a equação (3.22) é conhecida como equação da aceleração, a equação (3.21) é conhecida como equação de Friedmann, que é uma equação de evolução para  $H(t)$  ou  $a(t)$ , que tinha previsto alguns anos antes da descoberta de Hubble que o universo não poderia ser estático, partindo do princípio de que o cosmos parecesse o mesmo independentemente da direção em que olhamos e que isso valeria também para qualquer outro observador em qualquer outro lugar (HAWKING, 2015).

### 3.3. A equação da continuidade e outros parâmetros observacionais importantes

Para obtermos uma equação da continuidade, que representa a conservação da matéria cósmica, fazemos algumas manipulações matemáticas. Vamos primeiro, realizar uma derivada em relação ao tempo do parâmetro de Hubble. Como sabemos que:

$$H = \frac{\dot{a}}{a},$$

então,

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (3.28)$$

Notemos que cada termo que aparece na igualdade acima já foi visto em outras equações; o primeiro termo na equação da aceleração (3.22) e o segundo termo na equação de Friedmann (3.21). Substituindo cada uma das respectivas equações em (3.28), segue que:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{k}{a^2},$$

$$\dot{H} = -\frac{12\pi G}{3}\rho - \frac{12\pi G}{3}p + \frac{k}{a^2}.$$

De modo que obtemos:

$$\dot{H} = -(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (3.29)$$

Onde adotamos por conveniência  $4\pi G = 1$ . Realizando também a derivada da equação de Friedmann conforme escrita em (3.21), vamos obter:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2k\dot{a}}{a^3},$$

de onde tiramos:

$$\dot{H} = \frac{4\pi G}{3H}\dot{\rho} + \frac{k\dot{a}}{Ha^3} = \frac{\dot{\rho}}{3H} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.30)$$

Utilizando a equação escrita acima e combinando ela com a equação (3.29) podemos escrever uma equação de continuidade para o fluido cosmológico como sendo:

$$-(\rho + p) + \frac{k}{a^2} = \frac{\dot{\rho}}{3H} + \frac{k}{a^2} \rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.31)$$

Esta equação representa a conservação de toda matéria cósmica.

Partiremos agora para escrever alguns parâmetros observacionais importantes na cosmologia. Primeiro vamos reorganizar a equação de Friedmann em uma equação para a densidade de energia total em que podemos inferir algumas possibilidades para a geometria do universo:

$$\rho = \frac{3}{2}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right). \quad (3.32)$$

Para o caso específico de um universo plano ( $k = 0$ ), teremos uma relação para uma densidade de energia crítica:

$$\rho_c = \frac{3}{2}H^2. \quad (3.33)$$

Alexander Friedmann, ao solucionar as equações da relatividade geral encontrou três possibilidades geométricas para um universo homogêneo e isotrópico: plano ( $k = 0$ ), hiperesférico ( $k = 1$ ) e hiperboloide ( $k = -1$ ). Com isso, ele notou que unindo essas possibilidades geométricas as equações da relatividade geral implicavam num universo em expansão. Para cada possível geometria havia ainda um importante diferença: nos casos plano e aberto o cosmos estaria em eterna expansão, já para a geometria fechada o universo pararia de se expandir num dado momento e passaria a se contrair. Para saber qual possibilidade é a mais provável temos que analisar o parâmetro de densidade (SPARROW, 2018):

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.34)$$

Aqui vamos escrever a equação de Friedmann em termos do parâmetro de densidade como (SANTOS, 2011):

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \quad (3.35)$$

Podemos ter os seguintes valores:  $\Omega$  menor do que 1, maior do que 1 ou igual a 1. O caso em que  $\Omega$  é menor do que 1 teremos um universo com uma baixa quantidade de matéria, assim ele se torna incapaz de reverter a expansão e não irá desacelerar até parar, dizemos que nesse caso o universo é subdenso. Com  $\Omega$  maior do que 1 temos uma quantidade de matéria suficiente para trazer um fim à expansão e contrair todo o conteúdo do universo, neste caso o universo é superdenso. Finalmente, para o caso de  $\Omega$  ser exatamente igual a 1 o universo é plano e a expansão nunca cessará, porém continua num ritmo cada vez menor (HALPERN, 2015).

As possibilidades de um cosmos plano e aberto (como uma sela de cavalo para o caso bidimensional) os estágios finais são conhecidos como Big Whimper (Grande Lamento), já para um cosmos fechado teremos um Big Crunch (Grande Esmagamento).

Partiremos para estudar no próximo capítulo o Modelo Cosmológico Padrão, seus aspectos mais importantes como também os problemas que decorrem de observações.

## **4. MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO (MCP), A TEORIA DO BIG BANG E OS PRINCIPAIS PROBLEMAS**

O Modelo cosmológico Padrão (MCP) é fundamentado na ideia de que o cosmos é homogêneo e isotrópico em grande escala. Nas equações do campo de Einstein e admite-se a ideia de que toda a matéria e energia são distribuídas uniformemente. Ele é a base para toda a teoria que é criada em cosmologia. Vamos discorrer sobre a teoria do Big Bang e em seguida mostrar alguns dos problemas.

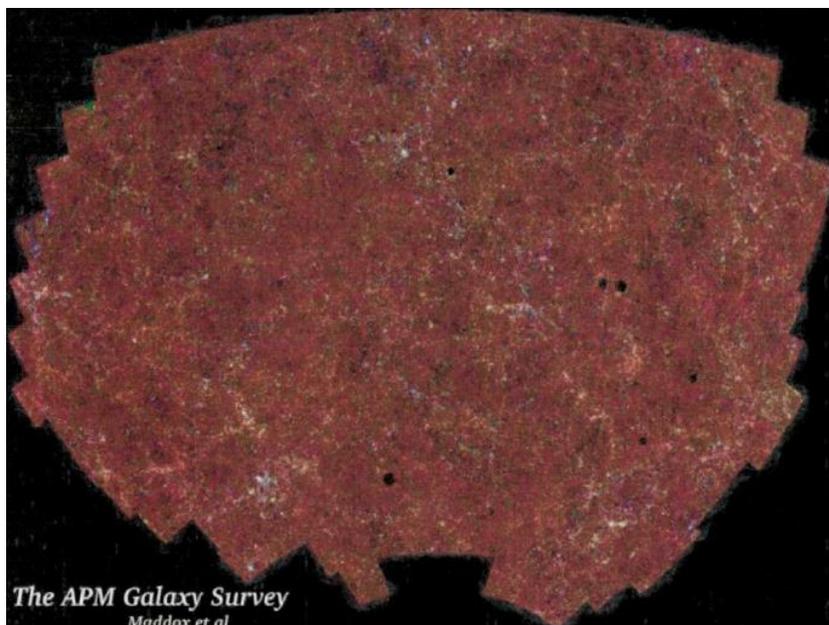
### **4.1. O Modelo Cosmológico Padrão**

A era da cosmologia moderna se iniciou quando Albert Einstein no ano de 1917 realizou estudos sobre a gravidade, o formalismo que ele utilizou foi um marco para todos os que se dedicam a estudar o universo (HAWKING, 2016). O Modelo cosmológico Padrão (MCP) é fundamentado na ideia de que o cosmos é homogêneo e isotrópico em grande escala. É importante ressaltar que a isotropia e homogeneidade do universo não provém de observações diretas, elas são colocadas como sendo o Princípio Cosmológico (PC), porém existem fortes evidências experimentais que concordam com o modelo, conforme os resultados medidos da temperatura do céu que é a mesma em todas as direções.

O Princípio Cosmológico (PC) afirma que a nossa localização no universo não é um local privilegiado para observação, que se estivermos em qualquer outro local iremos realizar as mesmas constatações. Aqui fazemos duas afirmações sobre o universo que já comentamos acima: ele deve ser homogêneo e isotrópico em grandes escalas (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

Mas o que são isotropia e homogeneidade? Teremos um sistema isotrópico quando independentemente da direção observada constatamos as mesmas propriedades físicas. Para que um determinado sistema seja homogêneo as suas propriedades devem ser iguais em todos os pontos observados. Vale ressaltar que todo sistema homogêneo é isotrópico, mas nem todo sistema isotrópico é homogêneo. É importante salientar que o PC não vale quando se trabalha com pequenas escalas de distâncias. Quanto maior a escala de distância, melhor vai se tornando essa aproximação (com distâncias da ordem

de 100 Mpc). A teoria do Big Bang é baseada no princípio cosmológico. Como podemos observar na figura 4.1, em grandes escalas de distâncias a distribuição de galáxias se distribui de maneira é quase uniforme.



**Figura 4.1:** Imagem ilustra como podemos constatar a homogeneidade num conjunto de 3 milhões de galáxias. Extraído de (GRAMS, 2013).

Vamos estudar agora um pouco sobre a teoria do *Hot Big Bang*.

## 4.2. A Teoria do *Hot Big Bang*

Qual é a origem do termo Big Bang? Por volta dos anos 1920 e 1930 se intensificaram os debates na comunidade científica daquela época sobre cosmologia, com defensores da hipótese acerca de uma possível evolução do universo, contra aqueles que acreditavam que ele era estático. Dentre os defensores do universo estático estava Albert Einstein.

Em 1922, Alexander Friedmann encontrou soluções para as equações do campo de Einstein que implicavam em uma evolução do raio do universo; logo o universo de Friedmann não era estático. Infelizmente seu trabalho foi deixado de lado por não haver nenhuma evidência experimental que levasse ao modelo que ele idealizou. No ano de 1927, um padre católico belga chamado Georges Lemaître chegou às mesmas conclusões que Friedmann, porém ele previu que deveríamos constatar um afastamento das galáxias. No ano de 1929, Edwin Hubble constatou exatamente o que foi previsto

por Lemaître. Hubble então formula uma relação entre a velocidade de afastamento e a distâncias das galáxias conhecida como lei de Hubble, que resumidamente podemos dizer que quanto maior for a distância de uma galáxia mais rápido ela se afastará da nossa (SPARROW, 2018).

Da lei de afastamento das galáxias, podemos analisar qual era o estágio em que se encontrava o universo no passado, é quase como acompanhar um filme de uma criança que se tornou adulta, só que analisaremos esse filme do final para o começo. Se hoje o universo está cada vez mais se afastando, podemos inferir que num passado remoto ele esteve mais comprimido e com isso num estado mais quente do que encontramos hoje. Para Lemaître esse estado inicial ele denominou de átomo primordial.

Georges Lemaître apresentou suas ideias sobre uma evolução do cosmos na cidade de Londres, onde propôs que a origem de tudo havia começado a partir de um estado superdenso e incrivelmente quente, o qual ele denominou esse estado de átomo primordial ou átomo primevo. Ele foi o primeiro defensor da teoria do *Hot Big Bang* (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015). Contudo, quem falou pela primeira o termo Big Bang foi Fred Hoyle durante um programa no rádio, onde ele defendia o modelo de universo estacionário e criticava o modelo do átomo primordial. Alguns dizem que Hoyle falou Big Bang para ridicularizar ou diminuir a teoria defendida por Lemaître.

Em 1948, George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman adeptos da teoria criada por Lemaître e unindo os seus conhecimentos sobre física que eles possuíam, surgiram com a formulação mais precisa da teoria do Big Bang. Eles previram que o universo deveria ter abundância de elementos leves e a previsão mais decisiva foi o valor da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) (TYSON, 2015).

Para eles o universo primitivo seria incrivelmente quente, com temperaturas na ordem de trilhões de graus e brilhava de modo inimaginável. Nesse estado os fótons presentes nessa época eram energéticos o suficiente para espalhar os elétrons e isso impedia que os primeiros átomos surgissem. Enquanto o cosmos se expandia se tornava mais frio, até que os fótons não tinham a energia necessária para espalhar os elétrons. Desse modo, os primeiros átomos surgiram e os fótons seguiram seu caminho livres pelo universo. Chamamos este evento de superfície do último espalhamento (TYSON, 2015).

Esses fótons em seu caminho pelo cosmos foram perdendo energia e aumentando seus comprimentos de onda, hoje esses fótons estão no espectro das micro-

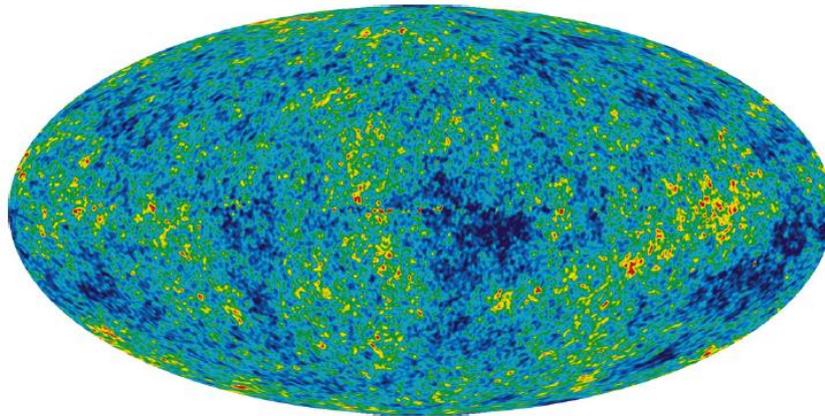
ondas. Essa é a origem da RCF, ou “fundo cósmico de micro-ondas”. Gamov previu que deveríamos constatar um valor de aproximadamente 5 K para esta radiação, contudo o valor atual que temos é de 2,73 K, mas esta previsão é tão surpreendente que podemos dizer que ele estava correto quando fez esta previsão. A respeito dessa previsão, J. Richard Gott III escreveu o seguinte comentário (TYSON, 2015):

“Predizer que a radiação existia e depois calcular sua temperatura correta dentro de um fator de 2 foi uma extraordinária realização – mais ou menos como predizer que um disco voador de 15,24 metros de largura aterrissaria na Casa Branca e depois observar um de 8,23 metros de largura realmente aparecer.”

A confirmação experimental dessas suposições veio quando Arno Penzias e Robert Wilson, dois físicos do *Bell Telephone Laboratories* em Nova Jersey, captaram um ruído em suas antenas, que continuava apesar de todo esforço para eliminá-lo. Foi então que dois outros pesquisadores da universidade de Princeton, Bob Dicke e Jim Peebles que estavam à procura de algo com o que Penzias e Wilson detectaram, interpretaram que o ruído era na verdade um resquício do brilho do universo primitivo que por causa da rápida expansão do universo tinha se modificado para a faixa de micro-ondas (HAWKING, 2015). Depois da descoberta da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), muitos cientistas aderiram a teoria do Big Bang pois a RCF seria uma espécie de fóssil formado nos primeiros estágios do universo. Com mais cem bilhões de anos essa radiação irá migrar para o espectro das ondas de rádio, os pesquisadores que viverem nessa época a chamarão de “fundo cósmico de ondas de rádio” (TYSON, 2015).

As primeiras imagens da RCF foram obtidas no ano de 1992, graças ao satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE) com o instrumento *Far Infrared Absolute Spectrophometer* (FIRAS). O satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), com melhores instrumentos trouxe um mapa mais detalhado da RCF, uma espécie de mapa mundi da RCF. A aparente uniformidade desta radiação virou um problema, pois as grandes estruturas do universo não condizem com um universo uniforme. O COBE trouxe para a comunidade científica dados com variações muito ínfimas (uma parte em 100 mil). Essas pequenas variações teriam sido as sementes para dar origem aos grandes aglomerados de galáxias, logo a RCF tem sido medida com maior precisão ao decorrer dos anos. O satélite WMAP combina resultados de nove anos

de observações para montar o seguinte mapa (SPARROW, 2018). A imagem abaixo retrata como o satélite WMAP montou um mapa da RCF e as suas anisotropias.



**Figura 4.2:** Imagem ilustra homogeneidade e isotropia num conjunto de 3 milhões de galáxias.  
Extraído de (SANTOS, 2009).

As partes mais claras dessa imagem representa regiões mais quentes, já as partes mais escuras são regiões mais frias. Vamos abordar alguns problemas da teoria do *Hot Big Bang*.

### **4.3. Alguns problemas na teoria do *Hot Big Bang***

É importante discutirmos um pouco sobre o termo Big Bang (Grande Explosão). Sabemos pela nossa experiência cotidiana que uma explosão é uma súbita liberação de energia que acontece num determinado espaço. Contudo, o Big Bang não aconteceu dentro de um determinado espaço, mas que ele deu origem ao próprio espaço e ao tempo (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

Surgiam as primeiras críticas à teoria do Big Bang, pois nessa teoria o universo teria uma “data de nascimento”, um momento específico de criação. Em alguns mitos de criação do universo tem um começo específico, como o mito judaico – cristão. Logo muitos cientistas levantaram algumas suspeitas na teoria. Eles argumentavam que Georges Lemaître estava levando conceitos religiosos e ideias pessoais em sua teoria, visto que ele mesmo era um padre católico. Contudo, a teoria do Big Bang fornecia respostas a muitas questões que permaneciam por muitos anos sem explicação. Uma

delas é o Paradoxo dos Olbers. Este paradoxo foi proposto por Johannes Kepler em 1610 e continuou a deixar muitos outros cientistas perplexos, incluindo o Heinrich Olbers em 1826. O paradoxo é o seguinte: “se no universo existe uma quantidade quase infundável de estrelas distribuídas em todas as direções, por que o céu é escuro à noite?” (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

As primeiras tentativas argumentavam que existia algum tipo de matéria que absorveria muita parte da radiação que provém das estrelas. Entretanto, se este fosse o caso, a matéria que absorve a radiação em certo momento esquentaria, o que levaria ela também a emitir luz. Dessa forma, o paradoxo não se resolveria. Com a aceitação da teoria do Big Bang, que se fundamenta num universo dinâmico que evolui, que tem uma idade finita, o paradoxo pode ser solucionado. A primeira maneira de resolver é admitindo que, como o universo tem um tempo finito, então apenas uma pequena parcela de luz das estrelas mais distantes teria tido tempo de chegar a nós, ou seja, existem estrelas que ainda não tiveram tempo de mostrar seu brilho no céu. A segunda maneira é admitir que, como o universo está em expansão, o brilho das estrelas sofreu uma diminuição acentuada (causada por um desvio para o vermelho), de modo que seu brilho está muito fraco no céu. Combinados, ambos os efeitos contribuem para que o paradoxo seja resolvido (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

Existem ainda muitos outros problemas na teoria do Big Bang, que provém inclusive de algumas descobertas que são usadas para sustentar a teoria. Admitimos que no início de tudo o universo era simétrico, não havia qualquer tipo de irregularidade. Pois bem, por que o universo hoje apresenta mais conteúdo de matéria do que de antimatéria? Se o universo era simétrico em seus estados mais primitivos, ele continha a mesma quantidade de matéria e de antimatéria. Esse problema é conhecido como o problema de assimetria bariônica.

Existe um problema relacionado à provável existência de monopolos magnéticos. Os monopolos são como ímãs que possuem apenas uma das polaridades (norte ou sul). Eles deveriam ter sido produzidos em quantidades iguais, mas até hoje nunca detectamos a existência deles.

A radiação cósmica de fundo descoberta por Arno Penzias e Robert W. Wilson no ano de 1965 é uma das evidências que sustentam o Big Bang, como comentamos na seção anterior. O problema é que esta radiação é surpreendentemente uniforme pelas mais distantes regiões do universo, regiões que nunca tiveram tempo para estar em

contato. Este problema é conhecido como o problema do horizonte. Vamos trabalhar com um pouco mais de detalhes esse problema.

Se existe um limite de velocidade em que uma partícula no universo pode viajar, que é a velocidade da luz, temos então um limite causal: uma região do espaço – tempo da qual podemos obter informações. A maior distância percorrida por um sinal de luz (ou uma partícula sem massa) que chega até nós hoje estabelece esse limite, que chamamos de horizonte.

Em Relatividade Restrita (RR) podemos usar um diagrama para ilustrar a ideia de causalidade: O cone de luz. Primeiro, lembremos que em geometria euclidiana a distância entre dois pontos é dada pelo teorema de Pitágoras da seguinte forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (4.1)$$

que podemos estender para as quatro dimensões do espaço-tempo, o espaço de Minkowski em RR:

$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.2)$$

Para facilitar a visualização, podemos considerar apenas uma das dimensões espaciais, de modo que:

$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2, \quad (4.3)$$

fazendo na equação acima  $ds^2 = 0$ , segue que:

$$x = \pm ct, \quad (4.4)$$

na Teoria da Relatividade Geral (TRG), medimos distância entre dois pontos, em um espaço homogêneo e isotrópico, através da métrica de Friedmann – Robertson – Walker (FRW) que para o caso de um espaço sem curvatura fica:

$$ds^2 = -cdt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2, \quad (4.5)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala do universo. Novamente para simplificar os cálculos vamos usar uma dimensão espacial e fazer  $c = 1$ , daí:

$$ds^2 = a(t)^2 \left[ -\frac{dt^2}{a(t)^2} + d\vec{x}^2 \right], \quad (4.6)$$

podemos definir uma grandeza, chamada de tempo conforme, da seguinte forma:

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.7)$$

de modo análogo ao anterior, fazemos a equação acima  $ds^2 = 0$  de modo a obter:

$$x = \pm \tau, \quad (4.8)$$

Pela teoria do *Hot Big Bang*, o universo partiu de uma singularidade quando  $a \rightarrow 0$ . A maior distância cósmica percorrida por uma partícula desde a singularidade é chamada de horizonte de partículas, dada por (BAUMANN e MCALLISTER, 2015):

$$\Delta\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (4.9)$$

podemos reescrever a equação acima, vejamos:

$$d \ln a = \frac{1}{a} da = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt = \frac{\dot{a}}{a} dt, \quad (4.10)$$

mas como:

$$dt = \frac{d \ln a}{H}. \quad (4.11)$$

Então, teremos a expressão:

$$\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\ln a(t)} \frac{d \ln a}{aH}. \quad (4.12)$$

A grandeza  $(aH)^{-1}$  é denominado raio comóvel de Hubble. Na teoria padrão do Big Bang, assumimos que:

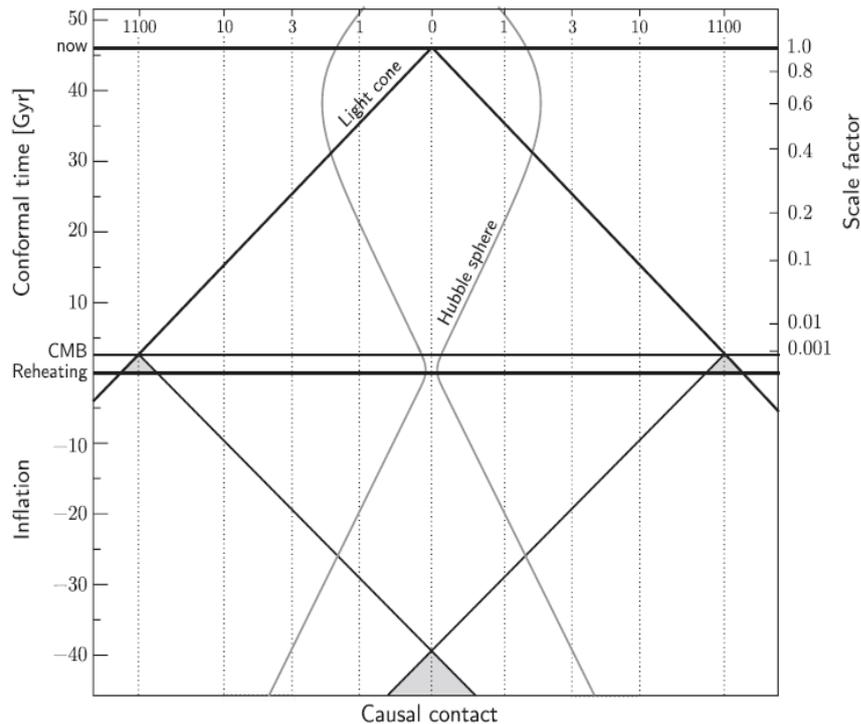
$$\ddot{a} < 0. \quad (4.13)$$

Isto representa uma expansão desacelerada. A velocidade de expansão é decrescente, ou seja, temos que  $\dot{a}$  é decrescente. Se trabalharmos um pouco com a expansão que representa o raio comóvel de Hubble, vemos que:

$$(aH)^{-1} = \left( a \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} = (\dot{a})^{-1}. \quad (4.14)$$

Temos então que, se  $\dot{a}$  é decrescente,  $(\dot{a})^{-1} = (aH)^{-1}$  cresce com o tempo. Como consequência, a integral em (4.12) é dominada por contribuições de tempos mais recentes. Se dividirmos a integral em intervalos temporais iguais, as contribuições dos intervalos da singularidade são bem menores do que as contribuições do intervalo mais próximos de hoje. Esta é a fundamentação do problema do horizonte.

As informações mais antigas que temos é a RCF, que veio da era da recombinação. Analisando a integral em (4.12), o tempo conforme  $\Delta\tau_{conf}$  entre a singularidade e a época da recombinação é muito menor do que o tempo conforme entre a recombinação e hoje (BAUMANN e MCALLISTER, 2015). Representamos esta situação no cone de luz (o cone do passado). A figura a seguir ilustra esse problema:



**Figura 4.3:** Temos uma ilustração do problema do horizonte, onde duas regiões que não tiveram tempo de estarem em contato causal estiveram unidas num passo distante e foram infladas juntas no período inflacionário. Extraído de (BAUMANN e MCALLISTER, 2015).

Os dois triângulos pintados vem de duas regiões muito distantes do passado, dentro de um mesmo cone do passado. Temos informações da RCF emitida nesses dois pontos, contudo não existe nenhuma relação causal entre essas duas regiões, não há intersecção entre esses dois triângulos, não houve tempo para isso (BAUMANN e MCALLISTER, 2015). Mesmo assim a RCF dessas duas regiões desconectadas chegam a nós hoje com praticamente a mesma temperatura, como podemos justificar esse fenômeno?

Diante de todos os problemas apresentados, precisamos de algum mecanismo dinâmico que tenha sido capaz de gerar o universo conforme observamos, ou o universo surgiu em condições muito atípicas que não podemos inferir nada. O mecanismo dinâmico que pode ter dado as condições é o mecanismo inflacionário, que foi criado por Alan Guth em 1981. Ele postulou que o universo teria passado por um surto de crescimento absurdo. Dessa maneira, com a introdução do cenário inflacionário, poderemos resolver os principais problemas da teoria do Big Bang. Falaremos com mais detalhes sobre o cenário inflacionário no próximo capítulo.

## **5. UM BREVE RESUMO SOBRE OS PRINCIPAIS MODELOS INFLACIONÁRIOS**

Os modelos inflacionários surgiram como uma alternativa de resolver os principais problemas no MCP, desde que as condições iniciais do universo primitivo sejam determinadas pelo cenário inflacionário (LINDE, 2005). Aqui assumimos que nos instantes iniciais o cosmos passou por uma rápida fase de expansão, que teria tornado o universo plano, homogêneo e isotrópico. Nessa fase de expansão a densidade de energia é dominada pela densidade de energia potencial, associada ao campo escalar  $\phi$ , que chamamos de campo ínflaton. Abordamos o cenário inflacionário adotando algumas formas específicas para o potencial  $V(\phi)$ , em seguida determinamos algumas grandezas de interesse.

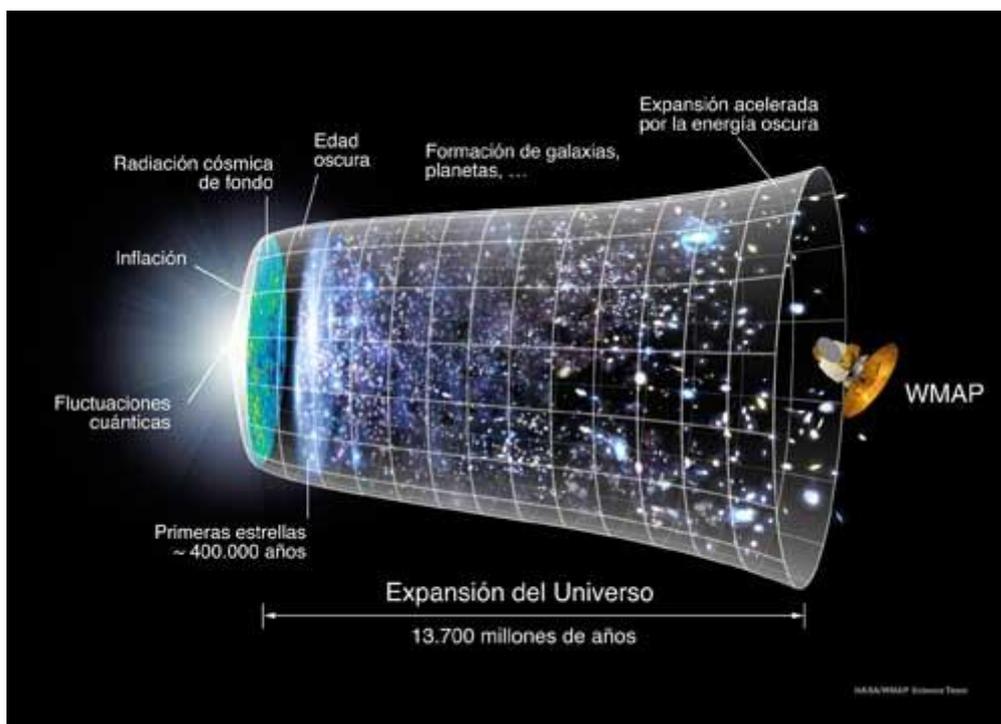
### **5.1. O problema da formação de grandes estruturas**

Conforme já discutimos, no ano de 1922, Alexander Friedmann conseguiu obter soluções para as equações de Einstein que levavam a um universo em expansão. Em 1931, Georges Lemaître publicou a teoria do átomo primevo, por esta razão ele é conhecido como o pai da teoria do Big Bang (SPARROW, 2018). Contudo, os trabalhos de Lemaître foi deixada de lado por muitos estudiosos do assunto, sendo vista como apenas mais uma provável explicação para o surgimento do universo. Em 1948, Ralph Alpher e Robert Herman que eram adeptos da teoria do átomo primevo, fizeram uma previsão: a bola de fogo de Lemaître teria deixado uma radiação que seria detectável, ela teria as mesmas características conhecidas da radiação de corpo negro. Neste mesmo ano, George Gamov junto com Ralph Alpher previram que o universo deveria ser preenchido majoritariamente com elementos leves (MAIA, 2000).

No ano 1970, surgiram algumas questões referentes a formação de estruturas do universo. Como a teoria do Big Bang produziu um universo suave o suficiente para não mostrar grandes diferenças de uma região para outra, conforme vemos no mapa da RCF, e ao mesmo tempo gerado aglomerados de galáxias, filamentos e vazios? Pela teoria do Big Bang o universo primitivo teria uma distribuição uniforme de matéria e energia (SPARROW, 2018).

Com isso, muitos cientistas se lançaram a investigar a possível existência de algum mecanismo dinâmico que possibilitou a existência do universo conforme o

constamos em nossas observações. No ano de 1981, quando Alan Guth estava no Instituto de Tecnologia de Massachusetts, surgiu com uma possível solução para esses problemas de condições iniciais. Para ele houve um pequeníssimo intervalo de tempo nos primeiros instantes do cosmos no qual tudo foi inflado. Este mecanismo dinâmico fez com que o universo jovem e ainda muito pequeno, “inchasse” até o tamanho do universo observável<sup>4</sup> e muito além. Dessa forma, a RCF teria uma distribuição quase toda uniforme, as variações na sua temperatura seriam de origens quânticas ligadas ao famoso princípio de incerteza de Heisenberg que foram expandidas pelo fator de inflação, originando regiões mais frias. As galáxias e aglomerados teriam se originado das flutuações de densidade, que também foram multiplicadas pelo fator de inflação (SPARROW, 2018). A figura 5.1 ilustra de forma muito resumida a história do universo, onde elenca os eventos mais importantes.



**Figura 5.1:** Ilustra a história do universo, onde vemos a representação dos principais eventos.

Imagem disponível em <https://www.dicasecuriosidades.net/2017/06/o-que-e-teoria-inflacionaria.html> .

Acesso em 21/06/2021 às 16:48

---

<sup>4</sup> O universo observável é uma região esférica centrada na terra na qual podemos obter informações do universo, ou seja, a região na qual chega luz até nós. Vale ressaltar que a maior parte das coisas que formam o universo estão a mais de 13,7 bilhões de anos-luz, logo não temos informação da maior parte dos componentes do cosmos.

## 5.2. Alguns parâmetros importantes na cosmologia inflacionária

Vamos abordar agora o mecanismo dinâmico que pode trazer soluções bastante razoáveis tomando o fato de que o universo foi dominado por uma expansão quase exponencial. O modelo do *Hot Big Bang* considera que o cosmos passou por duas fases distintas: a era em que a radiação domina e outra era em que a matéria domina. Estas duas fases representam uma expansão desacelerada do universo, sendo expresso por (FIGUEIRÓ, 2005):

$$\ddot{a} < 0, \quad (5.1)$$

para solucionar os problemas do MCP que já abordamos no capítulo (4) necessitamos de um curto período no qual ocorra uma extraordinária expansão do espaço. Então no ano de 1981, Alan H. Guth propôs uma teoria na qual quando o cosmos tinha uma idade de  $10^{-35}$  s até  $10^{-32}$  s (um trilionésimo de trilionésimo de um bilionésimo de segundo) o universo aumentou em milhares de vezes o seu tamanho. Esta teoria inflacionária surgiu para resolver os problemas de condições iniciais que estavam presentes quando o universo era muito jovem. A condição de uma expansão exponencial equivale a dizer que o fator de escala do universo teve uma aceleração maior que zero, podendo ser representada por (ARAÚJO, 2018):

$$\ddot{a} > 0, \quad (5.2)$$

nos modelos inflacionários supor que todo o universo é preenchido por um (podemos encontrar na literatura alguns modelos com mais de um) campo escalar  $\phi$  homogêneo com um dado potencial  $V(\phi)$ , que domina a energia do universo primordial. É comum nomearmos o campo escalar  $\phi$  de campo ínflaton. Neste mecanismo inflacionário podemos identificar duas fases distintas, considerando o papel do campo ínflaton: A era inflacionaria onde  $\phi$  domina, e a era do reaquecimento onde  $\phi$  decaí. O responsável pela inflação é o potencial do campo escalar, que possui uma dinâmica lenta. Essa dinâmica lenta do campo ínflaton (*Slow - Roll*) deve durar pelo menos 70 tempos de Hubble, também conhecido como números de *e-foldings*. (ANDRADE, 2016). Também é de comum acordo entre os cosmólogos que o universo surgiu com energia da ordem da massa de Planck  $M_{pl}$ , por um mecanismo ainda desconhecido (SANTOS, 2009).

A forma do potencial do campo ínflaton é usada para classificar os modelos inflacionários. Para modelos com um único campo, podemos classificá-los como em alguns tipos: modelos de campo grande (*Large field*) onde o valor inicial do campo é maior do que a massa de Planck  $\phi_i > M_{pl}$ , conhecidos como tipo I. Os modelos de tipo II o valor inicial do campo ínflaton é menor do que a massa de Planck  $\phi_i < M_{pl}$ . Esse modelo é conhecido como modelos de campo pequeno (*Small - field*). Os modelos do tipo III são conhecidos como modelos híbridos, onde temos mais de um campo escalar (ANDRADE, 2016). Os modelos de grandes campos produzem ondas gravitacionais detectáveis, por esta razão são de grande interesse (RODRIGUES, 2011).

No caso de modelos inflacionários (ou mesmo em estudos sobre quintaessência) a existência de campo escalar são usados para resolver os problemas à que eles são propostos. A dinâmica padrão para um dado campo escalar  $\phi$  é dada pela seguinte equação lagrangiana (MAIA, 2000):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (5.3)$$

Lembremos que usamos a lagrangiana quando queremos estudar toda a mecânica de um dado sistema sem recorrer a entidades vetoriais, utilizando apenas funções escalares. Conforme vimos no capítulo 2 ela é do tipo:

$$\mathcal{L} = T - U,$$

sendo T a energia cinética e U a energia potencial. Dessa forma, o primeiro termo faz o papel da energia cinética. Como estamos assumindo que o campo ínflaton  $\phi$  é espacialmente homogêneo e isotrópico, isso significa que esse campo é apenas função do tempo, ou seja, que  $\phi(t)$  o que nos leva a  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \dot{\phi}^2$ . Fazendo a substituição do termo acima na equação (5.3) teremos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.4)$$

Como o tensor energia – momento para um dado  $\mathcal{L}$  também pode ser escrito como:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (5.5)$$

pela matriz do tensor  $T^{\mu\nu}$  teremos apenas duas equações distintas, visto que todas as componentes em que os índices são do tipo  $\mu \neq \nu$  resultam em equações nulas. Dessa forma, apenas as seguintes equações:

$$\rho = T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V; \quad (5.6)$$

$$-p = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V. \quad (5.7)$$

Para chegar à equação do movimento devemos realizar uma derivada com relação ao tempo da equação (5.6):

$$\dot{\rho} = \dot{\phi} \ddot{\phi} + V_\phi \dot{\phi}. \quad (5.8)$$

Substituindo as equações (5.6), (5.7) e (5.8) na equação da continuidade (3.31) chegaremos à seguinte equação do movimento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (5.9)$$

Veremos modelos inflacionários em que vamos impor condições sobre a equação de Friedmann e esta equação da continuidade, em seguida estudar suas implicações. Notemos que a dinâmica do campo escalar é diretamente afetada pela expansão universal que ocorre segundo a lei de Hubble. O segundo termo da equação acima funciona como um termo de fricção ou amortecimento, com isso ocorre o aumento do tempo que o campo ínflaton gasta para chegar ao seu mínimo. Este caso é análogo ao oscilador harmônico, cujo termo  $3H\dot{\phi}$  funciona como um termo de atrito (RODRIGUES, 2011).

Existe também uma equação de estado que relaciona a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$ . Geralmente usamos uma equação de estado quando queremos determinar uma relação matemática entre duas ou mais funções de estado em que existe alguma relação com a matéria. A equação de estado para um campo escalar é dada por:

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (5.10)$$

como no período inflacionário o raio comovél de Hubble decresce, segue que (BAUMANN e MCALLISTER, 2015):

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0; \quad (5.11)$$

$$-\frac{1}{a}\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) < 0 \Rightarrow 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} > 0 \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} > -1, \quad (5.12)$$

de onde definimos:

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1, \quad (5.13)$$

como da equação (3.28):

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (5.14)$$

Usando a equação da aceleração (3.21) e a equação de Friedmann (3.22) teremos a seguinte expressão:

$$\epsilon = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right), \quad (5.15)$$

a condição para que ocorra a inflação é expressa como:

$$\epsilon < 1 \Rightarrow \frac{3}{2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) < 1. \quad (5.16)$$

de onde tiramos que apenas que dentro dos seguintes valores ocorra inflação:

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (5.17)$$

Uma fonte de energia que pode fornecer a energia para essa rápida expansão é a densidade de energia potencial do campo escalar inflaton  $\phi$ . De posse da equação de estado, podemos combiná-la à equação da continuidade (3.31) de forma que (FIGUEIRÓ, 2015):

$$\dot{\rho}a = -3\dot{a}(1 + \omega)\rho \Rightarrow -\frac{1}{3(1 + \omega)} \int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{da}{a}, \quad (5.18)$$

de onde teremos a seguinte equação que mostra como a densidade de energia ou de matéria varia com o fator e escala:

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (5.19)$$

Podemos ainda obter como o fator de escala varia com o tempo, combinando a equação (3.21) fazendo  $k = 0$  com a equação acima:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{8\pi G}{3} a^{-\frac{3(1+\omega)}{2}} \Rightarrow \int a^{\frac{3(1+\omega)}{2}} a^{-1} da \sim \int dt \Rightarrow a(t) \sim t^{2(1+\omega)/3}. \quad (5.20)$$

Para a radiação  $\omega_R = 1/3$  e para a matéria  $\omega_M = 0$  chegaremos aos seguintes resultados (FIGUEIRÓ, 2015):

$$\rho \sim a^{-4}, \quad a \sim t^{1/2}, \text{ era da radiação}; \quad (5.21)$$

$$\rho \sim a^{-3}, \quad a \sim t^{2/3}, \text{ era da matéria}. \quad (5.22)$$

Vamos discutir na seção abaixo a aproximação de rolagem lenta, que usaremos em nos modelos inflacionários.

### 5.3. Aproximação de Rolagem lenta

Nos modelos inflacionários que são construídos a partir de um dado potencial  $V(\phi)$ , a aproximação de rolagem lenta impõe condições sobre parâmetros que são

funções do campo  $\phi$  via  $V(\phi)$ . Vamos considerar um universo de Friedmann plano, ou seja  $k = 0$  na equação (3.27) e substituir o resultado obtido em (5.6) para encontrar a dinâmica do universo na presença de um campo escalar homogêneo. Temos que resolver o conjunto de equações:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (5.23)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V_\phi, \quad (5.24)$$

só temos soluções inflacionárias quando a densidade de energia potencial domina sobre a energia cinética tal que:

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \ll V. \quad (5.25)$$

Desprezando-se o termo cinético na equação de Friedmann e o termo de aceleração da equação de movimento do campo, temos que:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} V(\phi) \quad (5.26)$$

$$3H\dot{\phi} = -V_\phi. \quad (5.27)$$

Podemos obter o parâmetro de rolagem lenta fazendo a derivada da equação (5.26) e em seguida combina – lá com a equação (5.27). Daí:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi}{3M_p^2} V_\phi \dot{\phi}, \quad (5.28)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{V_\phi}{3H}. \quad (5.29)$$

Realizando a substituição da equação (5.29) em (5.28):

$$\dot{H} = -\frac{8\pi}{3M_p^2} \frac{V_\phi^2}{6H^2}. \quad (5.30)$$

Nós queremos modelos de rolagem lenta, logo:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1, \quad (5.31)$$

assim obtemos:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{M_p^2}{16\pi} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2. \quad (5.32)$$

Para determinar o parâmetro de rolagem lenta, definimos (JUNIOR, 2004):

$$\epsilon(\phi) = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{M_p^2}{16\pi} \left( \frac{V_\phi}{V(\phi)} \right)^2. \quad (5.33)$$

Devemos ter que  $\epsilon \ll 1$ . Vale a pena ressaltar que a condição  $\epsilon \ll 1$  é uma condição necessária, mas não é suficiente, precisamos ainda garantir que  $\epsilon$  permaneça pequena durante um tempo suficiente para resolver os problemas.

Isto nos leva a outra condição (DIMOPOULOS, 2021):

$$\eta_\nu(\phi) = \frac{M_p^2}{8\pi} \frac{V_{\phi\phi}}{V(\phi)}. \quad (5.34)$$

Podemos também calcular a quantidade de inflação entre dois instantes:  $t_i = 0$  e quando termina em  $t_{fim}$ . O logaritmo do quociente dos fatores de escala nesses dois instantes chamamos de número de *e-foldings*  $N$  da seguinte forma (JUNIOR, 2004):

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t)}. \quad (5.35)$$

Para resolver os problemas do horizonte e da planura precisamos de cerca 70 *e-foldings*.

Pela aproximação de rolagem lenta segue que:

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t)} = \int_{t_i}^{t_{fim}} H dt = -\frac{8\pi}{M_p^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{fim}} \frac{V}{V_\phi} d\phi, \quad (5.36)$$

vamos exemplificar a aproximação de rolagem lenta para alguns potenciais. De posse desses parâmetros iremos analisar alguns modelos inflacionários.

#### **5.4. Velha inflação**

Alan Harvey Guth, em 1981, idealizou um mecanismo inflacionário que passa a ser o responsável por impor as condições iniciais que estavam presentes no universo jovem. Segundo esse mecanismo o universo primordial passou por uma fase de expansão descomunal do espaço. Para ele, esse mecanismo ajudaria a resolver os principais problemas no modelo do Big Bang, ou os chamados problemas de condições iniciais. Como já discutimos, esse surto de crescimento teria ocorrido quando o universo tinha apenas  $10^{-35}$  s de idade (DODELSON e SCHMIDT, 2021).

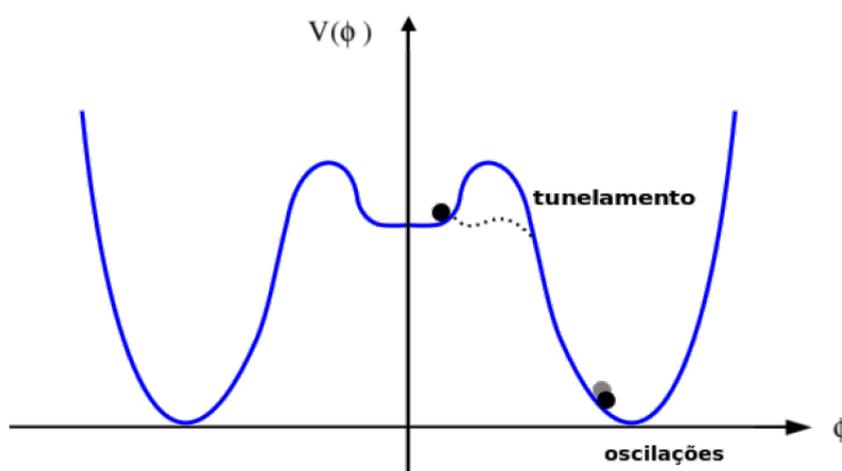
Em um curtíssimo intervalo de tempo, segundo Guth teria acontecido a assimetria entre matéria e antimatéria, o surgimento de monopolos magnéticos, dentre outras relíquias do universo. Aqui é onde dominam as chamadas Teorias de Grande Unificação (TGU). Esse surto de crescimento fez com que o raio de curvatura do universo aumentasse por um fator de  $10^{43}$  (isso significa um seguido de quarenta e três zeros), conhecido como fator de inflação. Isto teria mudado a geometria inicial do universo (inicialmente curvo) para um universo plano depois desse evento (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015).

Mas o que teria dado início a esse evento? Esse surto de crescimento pode ter acontecido por uma quebra espontânea de simetria do vácuo. A expansão é gerada por uma pressão negativa da energia do vácuo positiva (RODRIGUES, 2011). Poderia o vácuo provocar esse crescimento se o vácuo é vazio? Acontece que para os físicos de partículas isso não é bem verdade. Para eles no vácuo são criados pares de partícula – antipartícula e destruídas nele, assim o vácuo é um oceano cheio de possibilidades. Nas temperaturas que estão envolvidas nas TGU faz com que o vácuo seja o estado de energia mais baixa, como assumimos que à medida que o universo se expande ele esfria, quando ele atinge a temperatura de  $10^{14} GeV$ , onde o vácuo simétrico e estável se torna instável. Com isso, ocorre uma transição brusca para o estado de energia mais baixa e que esse seria o combustível usado para expansão inflacionária que também levou a separação das interações fundamentais (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2015). Guth assume que o campo ínflaton estaria preso em um falso vácuo, um mínimo

instável, o que o leva a atingir o verdadeiro vácuo por uma transição de fase de primeira ordem (ANDRADE, 2016).

Da termodinâmica sabemos que uma fase é um estado da matéria no qual as propriedades físicas de uma substância são uniformes. São exemplos de fases: gasosa, líquido, sólida. Elas possuem um nível de organização que as tornam muito distintas. Em transições que ocorram entre fases de modo abrupto, a transição é denominada de descontínua, ou de primeira ordem. Quando temos uma transição que ocorra perto do ponto crítico de mudança de fase, chamamos de transição de fase contínua, ou de segunda ordem (SIMÕES, 2017).

O potencial imaginado por Guth é ilustrado na figura abaixo:



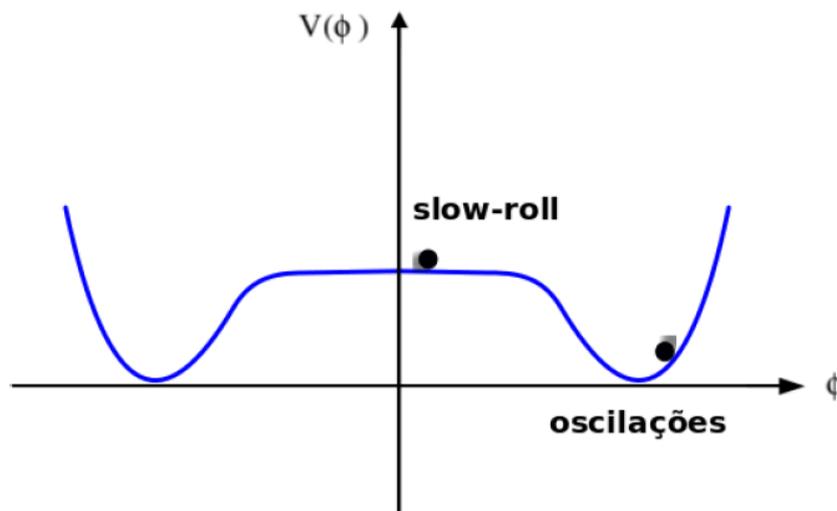
**Figura 5.2** Vemos o tunelamento do inflaton através da barreira, onde ele sai de um mínimo instável em  $\phi = 0$  para atingir o mínimo global, onde ele passa a oscilar. Aqui a inflação se encerra quando o campo tunela quanticamente a barreira e atinge o verdadeiro vácuo. Extraído de (RODRIGUES, 2011).

Essa transição de fase de forma abrupta geraria, segundo Guth, a formação de bolhas, ou “nucleação de bolhas”, a energia do vácuo da fase simétrica fornece energia para acelerar as paredes de cada bolha. O raio dessas bolhas seria muito pequenos, ainda que elas crescessem à velocidade da luz, elas ainda continuariam muito menores que o valor atual do raio de Hubble. Eventualmente cada bolha irá colidir e com essa colisão reaquecer o universo. A inflação terminaria na formação das bolhas e que a expansão continuaria segundo o modelo padrão, conhecido como “saída graciosa”. A formação dessas bolhas se tornaram o “calcanhar de Aquiles” dessa teoria, reconhecido pelo próprio A. Guth em um artigo (GUTH, 1981), pois não existe produção de bolhas para

que colidam e torne homogêneo a RCF. Contudo, existe um modelo de gravitação modificada criada por Jordan – Brans – Dicke que evita esses problemas (RODRIGUES, 2011).

## 5.5. Nova inflação

Como A. Guth deu início à criação de modelos inflacionários, outros cientistas procuraram refinar esta teoria e resolver alguns problemas. Andrei Linde junto com Albrecht e Steinhard, em 1982, propôs um modelo em que a expansão inflacionária inicia após a transição de fase de segunda ordem, mas que, diferentemente de muitas bolhas, aqui o universo estaria imerso numa única bolha. Nesse modelo o reaquecimento do universo não ocorre pela colisão de bolhas, mas pela interação de partículas criadas pelo campo  $\phi$  que oscila na frequência perto de  $10^{14} \text{ Gev}$ . Aqui também existe quebra espontânea de simetria. Neste modelo, procuramos uma maneira em que a transição da evolução do cosmos de um período inflacionário para a evolução de acordo com o MCP aconteça sem que surja mais problemas, ou seja, um modelo que permita uma saída graciosa (RODRIGUES, 2011). Temos abaixo uma representação de como se comporta este tipo de potencial:



**Figura 5.3:** Aqui o campo ínflaton não encontra nenhuma barreira em seu caminho, não existe o problema com o surgimento de bolhas. Extraído de (RODRIGUES, 2011).

Aqui o cenário inflacionário ocorre apenas em teorias em que o potencial assume formas muito específicas, pressupõe um ajuste muito específico das condições iniciais. Dessa forma, a ideia simples de inflação se perde à medida em que impomos condições para melhorar o modelo. Neste modelo o conceito de rolagem lenta (*Slow - Roll*) é introduzido.

## 5.6. Inflação Caótica

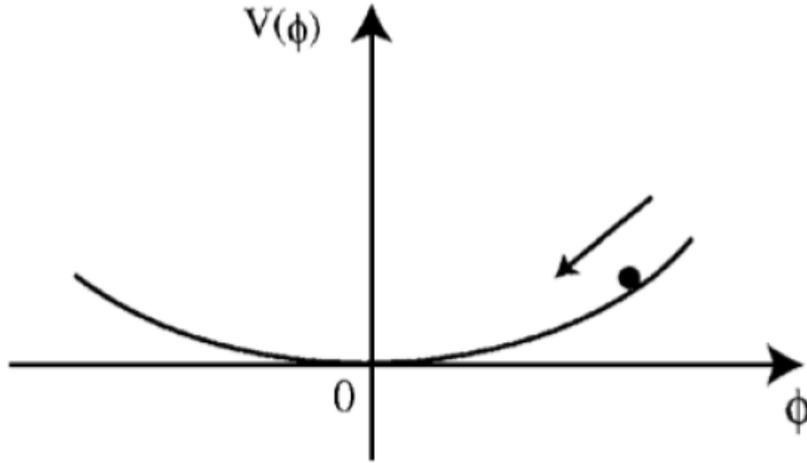
Todos os modelos de inflação vigentes eram criticados por sua complexidade em que usam um campo escalar que é o gerador da inflação, dentre outras restrições de cada modelo específico. Para romper com todas essas dificuldades foi proposto um cenário em que independe da escolha do tipo de potenciais, o que exclui a ideia de transições de fase em altas temperaturas para que ocorra inflação. Também não há necessidade de um único início para o cosmos, pois diferentes partes podem ter sofrido inflação em instantes diferentes, são consideradas todas as condições iniciais possíveis, incluindo o universo fora do equilíbrio e o campo ínflaton fora do mínimo do seu potencial (BONOMETO, 2002). Vamos estudar alguns desses potenciais que geram este tipo de inflação, com potenciais do tipo *Large field*.

### 5.5.1 Potencial Quadrático

Os primeiros modelos que vamos estudar são os modelos com potenciais polinomiais. Tomemos a seguinte forma para o potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad (5.37)$$

onde  $m_\phi^2$  é uma constante. Este potencial é semelhante ao caso do oscilador harmônico em que o potencial é da forma:  $V = \frac{1}{2}kx^2$ , onde notamos que a constante  $m_\phi^2$  é análoga a constante elástica. Podemos ilustrar o comportamento desse potencial como na figura abaixo:



**Figura 5.4:** Ilustração da forma deste potencial. Extraído de (RODRIGUES, 2011)

Aplicando a este potencial, as equações de rolagem lenta ficam:

$$H^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} m_\phi^2 \phi^2, \quad (5.38)$$

$$3H\dot{\phi} = -m_\phi^2 \phi, \quad (5.39)$$

podemos determinar uma equação para  $\dot{\phi}$ , utilizando as equações acima:

$$\dot{\phi} = -\frac{m_\phi M_p}{2\sqrt{3}\pi}, \quad (5.40)$$

realizando uma integração da equação acima, teremos:

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{m_\phi M_p}{2\sqrt{3}\pi} t. \quad (5.41)$$

O comportamento do fator de escala é dado pela substituição da equação acima na equação de Friedmann, de onde obtemos (JUNIOR, 2004):

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \frac{2\pi}{M_p^2} (\phi_i^2 - \phi(t)^2) \right]. \quad (5.42)$$

De onde notamos que o fator de escala do universo cresce nesse modelo exponencialmente. O parâmetro de rolagem lente fica:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_p^2}{16\pi} \frac{4}{\phi^2}. \quad (5.43)$$

A inflação termina quando chegamos a  $\epsilon(\phi) = 1$ . Dessa forma o campo ínflaton no final da inflação terá o valor:

$$\phi_{fim} = \frac{M_p}{\sqrt{4\pi}}. \quad (5.44)$$

Para sabermos o tempo em que ocorre o final da inflação, iremos substituir a equação acima na expressão do campo (5.41), dessa forma:

$$\frac{M_p}{\sqrt{4\pi}} = \phi_i - \frac{m_\phi M_p}{\sqrt{12\pi}} t_{fim}, \quad (5.45)$$

de onde tiramos:

$$t_{fim} = \frac{\sqrt{12\pi}}{M_p m_\phi} \phi_i - \frac{\sqrt{3}}{m_\phi}. \quad (5.46)$$

O número de *e-foldings* produzidos para este potencial é:

$$N = -\frac{8\pi}{M_p^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{fim}} \frac{V}{V_\phi} d\phi = -\frac{8\pi}{M_p^2} [\phi_{fim}^2 - \phi_i^2] \frac{1}{2}, \quad (5.47)$$

O que resulta em:

$$N = -\frac{8\pi\phi_i^2}{4M_p^2} - \frac{1}{2}. \quad (5.48)$$

### 5.5.2 Potencial Quártico

Outro potencial que gera a inflação é da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (5.49)$$

onde  $\lambda$  é uma constante. Aqui, as equações de aproximação de rolagem lenta ficam:

$$H^2 = \frac{2\pi\lambda}{3M_p^2} \phi^4 \quad (5.50)$$

$$3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3, \quad (5.51)$$

de maneira análoga a seção anterior podemos combinar as duas equações acima para obter:

$$\dot{\phi} = -M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} \phi. \quad (5.52)$$

Se quisermos o comportamento do campo ínflaton com o tempo precisamos realizar uma integral da equação (5.52):

$$\int_{\phi_0}^{\phi(t)} \frac{d\phi}{\phi} = -\int_0^t M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} dt \quad (5.53)$$

$$\ln \frac{\phi(t)}{\phi_i} = M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t, \quad (5.54)$$

aplicando a função exponencial de ambos os lados da equação acima chegamos a seguinte equação:

$$\phi(t) = \phi_i \exp\left(-M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t\right). \quad (5.55)$$

Logo o campo ínflaton cresce de modo exponencial com o tempo. Se quisermos também saber o modo como o fator de escala cresce com o tempo, devemos utilizar a equação acima juntamente com a equação de Friedmann para este potencial. Dessa forma:

$$\int_{a_0}^{a(t)} \frac{da}{a} = \int_0^t \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{3}} \phi_0^2 \exp\left(-M_p \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t\right) dt, \quad (5.56)$$

Segue que:

$$\ln \frac{a(t)}{a_0} = \frac{\pi}{M_p^2} \phi_0^2 \left[ 1 - \exp\left(-M_p \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t\right) \right]. \quad (5.57)$$

Neste ponto vamos aplicar novamente a função exponencial de ambos os lados da equação acima:

$$a(t) = a_0 \exp\left[\frac{\pi}{M_p^2} (\phi_0^2 - \phi(t)^2)\right], \quad (5.58)$$

ou seja, com este tipo de potencial a expansão ocorre bem mais rápido que no caso anterior. O parâmetro de rolagem lenta é dado por:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_p^2}{\pi} \frac{1}{\phi^2}. \quad (5.59)$$

Aqui devemos fazer novamente  $\epsilon(\phi) = 1$ , então o valor do ínflaton no final da inflação será:

$$\phi_{fim} = \frac{M_p}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.60)$$

O tempo em que ocorre o fim da inflação é obtido como no caso anterior, substituímos a expressão acima na equação do campo ínflaton. Dessa forma, o final da inflação ocorre no tempo:

$$\frac{M_p}{\sqrt{\pi}} = \phi_i \exp\left(-M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t\right); \quad (5.61)$$

$$t_{fim} = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi}{\lambda}} \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}\phi_i}{M_p}\right). \quad (5.62)$$

O número de *e-foldings* para este potencial é da forma:

$$N = -\frac{\pi\phi_i^2}{M_p^2} - 1. \quad (5.63)$$

### 5.5.3 Modelos com potencias do tipo exponenciais

Agora, vamos considerar o seguinte modelo de potencial:

$$V(\phi) = V_0 e^{\alpha\phi}, \quad (5.64)$$

seguindo os mesmos procedimentos temos as seguintes equações da aproximação de rolagem lenta:

$$3H\dot{\phi} = -\alpha V_0 e^{\alpha\phi}, \quad (5.65)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} (V_0 e^{\alpha\phi}). \quad (5.66)$$

Para descobrir uma expressão para o campo escalar (o campo ínflaton) em função do tempo, façamos:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - e^{\alpha\phi}}} = 2V_0 \int dt, \quad (5.67)$$

resolvendo esta equação, e admitindo que:

$$\tanh(\alpha\sqrt{V_0/2t}) \simeq \alpha\sqrt{V_0/2t}.$$

Chegaremos a seguinte equação:

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{2}{\alpha} \ln \frac{t}{t_0}. \quad (5.68)$$

Para este caso, o fator de escala possui a seguinte forma:

$$a(t) = a_0 t^p, \quad p = \frac{16\pi}{\alpha^2}. \quad (5.69)$$

Aqui a inflação exponencial ocorre para o caso  $p \gg 1$ . Notemos que nesta teoria a inflação não tem fim, mas este problema pode ser solucionado se considerarmos o campo ínflaton pequeno de modo que ele se torne igual a zero. Assim o valor inicial do potencial  $V_i$  é o valor do potencial no fim da inflação. Contudo, este mecanismo terá dificuldades em resolver os problemas do MCP. Neste caso, fazer  $\epsilon = 1$ , não nos ajuda a determinar uma equação para o  $\phi_{fim}$ .

Vamos então considerar, então que, a inflação termine com o campo diminuindo até zero. Assim, partindo da equação (5.68) temos:

$$0 = \phi_i - \frac{2}{\alpha} \ln \frac{t}{t_i} \Rightarrow \ln \frac{t_f}{t_i} = \frac{\alpha\phi_i}{2}, \quad (5.70)$$

notemos que para  $\phi_{fim} = 0$ , o que implica em  $V_{fim} = V_i$ . O potencial no fim da inflação tem o mesmo valor do início. O potencial em função do tempo pode ser feito da seguinte forma:

$$V(t) = V_i \exp\left(\alpha\phi_i - 2 \ln \frac{t}{t_i}\right) = V_0 e^{\alpha\phi_i} \left(\frac{t_i}{t}\right)^2. \quad (5.71)$$

O fator de escala para este caso será:

$$a(t_i) = a_i t_i^p = a_i t_i^p e^{\alpha \phi_i p / 2}, \quad (5.72)$$

o número de *e-foldings* pode ser calculado neste caso da seguinte forma:

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \ln \left( \frac{a_i t_i^p e^{\alpha \phi_i p / 2}}{a_i t_i^p} \right) = \ln(e^{\alpha \phi_i p / 2}), \quad (5.73)$$

por fim,

$$N = \frac{\alpha \phi_i p}{2} = \frac{8\pi \phi_i}{\alpha}. \quad (5.74)$$

Conforme comentamos, precisamos de aproximadamente 70 *e-foldings*, logo este modelo não parece ser um bom potencial.

Para o modelo de potencial quadrático temos uma confiabilidade dos dados de 95%, pelos dados dos satélites Planck, WMAP, BAO (TSUJIKAWA, 2014).

Temos outras possibilidades de modelos que encontramos na literatura, como o modelo de inflação híbrida, onde o campo não é o único responsável pela densidade de energia, dividindo sua tarefa com outro campo escalar. Temos o modelo de inflação eterna, em que multiversos inflacionários são criados e a inflação pode cessar localmente e continuar globalmente. A nova inflação eterna, a inflação caótica eterna também são possibilidades de modelos que encontramos na literatura.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os objetivos traçados, realizamos uma extensa revisão bibliográfica sobre alguns assuntos de grande relevância na cosmologia. Estudamos sobre as Equações do Campo de Einstein da TRG. Algumas passagens matemáticas e discussões sobre tensores foram realizadas de modo que tornem essas ideias mais simples. Em seguida, realizamos uma discussão sobre o MCP e seus principais problemas. Vimos a evolução do modelo de universo estático, que era o que dominava na comunidade científica, para um modelo dinâmico quando A. Friedmann propôs uma solução para as equações do campo no contexto de uma métrica que leva em consideração um universo homogêneo e isotrópico. Foi graças a Edwin Hubble, no ano de 1929, que constatou a lei de afastamento das galáxias, colocando fim na discussão de um universo estático.

Por fim, estudamos de maneira resumida a teoria inflacionária que se propõe a resolver os problemas das condições iniciais do cosmos, considerando que quando o universo tinha cerca de  $10^{-35}$  s passou por uma fase de expansão descomunal do espaço. Discutimos sobre modelos de inflação caótica, em que o campo escalar  $\phi$  é o principal responsável por esta expansão. Analisamos alguns potenciais específicos para este campo escalar, como o modelo  $V(\phi) \sim m_\phi^2 \frac{1}{2} \phi^2$  que tem 95% de confiança pelos dados dos satélites WMAP, PLANCK, BAO, *high-l*. Para o modelo  $V(\phi) \sim \frac{1}{4} \lambda \phi^4$  concorda com os dados apenas de forma parcial. Já para o modelo em que o potencial tem a forma  $V(\phi) \sim V_0 e^{\alpha\phi}$  pela nossa análise do número de *e-foldings* que ele gera, não é capaz de resolver os problemas do MCP.

Também comentamos de forma superficial modelos inflacionários que frequentemente encontramos na literatura, como o modelo híbrido, inflação eterna, nova inflação eterna, que podem ser temas para pesquisas futuras. Outros estudos podem ser feitos sobre modelos alternativos a teoria inflacionária, como o modelo ecpirótico, gravidade modificada, modelos de Branas.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Tays Miranda de. **Modelos Cosmológicos Inflacionários tipo Starobinsky**. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2016.

ARAÚJO, Ilgen Ranniery Galdino Dias de. **Análise de alguns potenciais à luz da teoria inflacionária do universo**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB, 2018.

BAUMANN, Daniel; MCALLISTER, Liam. *Inflation and string theory*. Reino Unido: Cambridge University Press, 2015.

BONOMETO, silvio. *Modern Cosmology*. Reino Unido: IOP Publishing Ltd, 2002.

CARAMÊS, Thiago Roberto da Possa. **Soluções esfericamente simétricas em teorias  $f(R)$  da gravitação em dimensões superiores**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

DALARSSON, M.; DALARSSON, N. **Tensor Calculus, Relativity and Cosmology**. California: Elsevier Academic Press, 2005.

DIMOPOULOS, Konstantinos. *Introduction to cosmic inflation na dark energy*. New York: CRC Press, 2021.

DODELSON, Scott; SCHMIDT, Fabian. *Modern Cosmology*. – 2.ed. – Reino Unido: Academic Press, 2021.

FREEDMAN, W. L. et al., *Final results from the Hubble Space Telescope Key Project to measure the Hubble constant*, *Astrophys. J.* 553, 47 (2001) [astro-ph/0012376].

EINSTEIN, Albert. **A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade espacial e geral: (para leigos)** / Albert Einstein; tradução de Silvio Levy. – Porto Alegre, RS: L&PM, 2019.

FIGUEIRÓ, Michele Ferraz. **Cosmologia Inflacionária em Modelos de Branas Tipo RS-I**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

FLEICH, D. A. *A Student's Guide to Vectors and Tensors*. New York: Cambridge University Press, 2012.

GLEISER, M. **A Dança do Universo: Dos Mitos de Criação ao Big-Bang**. São Paulo: 1997.

GRAEF, Leila Lobato. **Um modelo para o decaimento da energia escura**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

GRAMS, Guilherme. **Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos**. 2013.80 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Física, Departamento de física, Universidade Federal do Paraná, 2013.

GUTH, A. H. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*; Allan H. Guth; PRD, 1981.

HALPERN, Paul. **Fronteiras do universo: uma viagem aos limites do horizonte cósmico**. São Paulo: Cultrix, 2015.

HAWKING, S. W. **O universo numa casca de noz**. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

HAWKING, S. W. **Uma Breve História do Tempo**. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015.

JUNIOR, U. L. F. **Fenomenologia de Modelos Cosmológicos com Campos Escalares Exponenciais**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, São Paulo, 2004.

LINDE, A. *Inflation, Quantum Cosmology and Anthropic Principle*. Hep-th/0211048v2, (2002).

LINDE, A. *An introduction to modern Cosmology*. – 2.ed. – Chichester: Wiley, 2003.

MAIA, Jackson Max Furtunato. **Algumas Aplicações de Campos Escalares em Cosmologia**. Tese (Doutoramento) – Instituto de Física Experimental, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOTA, Clésio Evangelista. **As equações de Friedmann**. Monografia (Graduação) – Curso de Licenciatura em Física, Unidade Acadêmica de Física e Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité-PB, 2015.

NETO, João Barcelos Neto. **Mecânicas newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana** – 2.ed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2013.

ON, Observatório Nacional. Ensino a Distância. **Cosmologia: do início ao fim do universo**. 2015. Módulos 1, 2, 4, 5 e 7.

PELICER, Mateus Reinke. **Cálculo Tensorial e Relatividade Geral**. Trabalho de Conclusão de Curso - Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

RESNIK, R; HALLIDAY, E. D. **Fundamentos de Física**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

SANTOS, Fábio Magalhães de Novaes, **Cosmologia Inflacionária e o Problema da medida**. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Física da Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2009

SANTOS, J. J. R. **Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Paraíba, 2011.

SILVA, C. V. T. **Modelos Cosmológicos Viscosos segundo a Termodinâmica dos Processos Irreversíveis**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Curitiba, 2004.

SIMÕES, Lillah Fialho de Lima. **Estudo do comportamento termodinâmico de sistemas físicos com interações de longo alcance na proximidade da região crítica**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, Instituto de Física da universidade de Brasília, Brasília, 2017.

SPARROW, Gilles. **50 ideias de astronomia que você precisa conhecer**. – 1. Ed. – São Paulo: Planeta, 2018.

TSUJIKAWA, S. “*Distinguishing between inflationary models from cosmic microwave background*”. Progress of Theoretical and experimental Physics, Vol. 2014, no. 6, p. 06b104, 2014.

TYSON, Neil de Grasse. **Origens: catorze bilhões de anos de evolução cósmica**. São Paulo: Planeta do Brasil, 2015.

YOUNG, Hugh D; FREEDMAN, Roger. **Física II: Termodinâmica e Ondas**/Young e Freedman – 12. Ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2008.