

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS

Fenômenos de difusão transiente em
sólidos esferoidais oblatos.
Estudo de caso: Secagem de lentilhas.

Autor: João Evangelista Franco do Carmo
Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima

Campina Grande, Pb – Brasil
Julho de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
LABORATÓRIO DE FÍSICA DE MATERIAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

LABORATÓRIO DE FÍSICA DE MATERIAIS

Carmo, João Evangelista Franco do
C287f Fenômenos de difusão transiente em sólidos esferoidais. Estudo de
2004 caso: secagem de lentilhas/João evangelista Franco do Carmo. – Campina
Grande: UFCG, 2004.
139p. il.
Inclui bibliografia
Tese (doutorado em engenharia de processos) UFCG/CCT
1. Secagem de lentilhas

CDU: 664.723:633.35

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS

Fenômenos de difusão transiente em
sólidos Esferoidais oblatos.
Estudo de caso: Secagem de lentilhas.

Autor: João Evangelista Franco do Carmo
Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima

Curso: Doutorado em Engenharia de Processos
Área de Concentração: Desenvolvimento de Processos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Engenharia de Processos, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos.

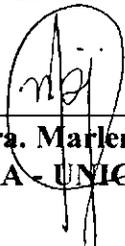
Campina Grande, PB –Brasil
Julho de 2004

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE
JOÃO EVANGELISTA FRANCO DO CARMO APRESENTADA AO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS
DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

Tese de Doutorado **aprovada com distinção** em 30 de julho de 2004



Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima
ORIENTADOR - UFCG/CCT/DEM



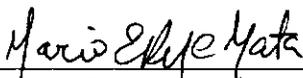
Profa. Dra. Marlene Rita de Queiroz
EXAMINADORA - UNICAMP/FEAGRI/DPPPAG



Prof. Dr. Jefferson Luiz Gomes Corrêa
EXAMINADOR - UFPB/CT/DTQA



Prof. Dr. José Jefferson da Silva Nascimento
EXAMINADOR - UFCG/CCT/DEM



Prof. Dr. Mário Eduardo Rangel Moreira Cavalcanti Mata
EXAMINADOR - UFCG/CCT/DEAg

Campina Grande, julho de 2003.
PB, Brasil

DEDICATÓRIA

Dedico a meus pais João Borges do Carmo e Haideé Simões do Carmo por sempre terem incentivado a busca pelo conhecimento.

A minha esposa Adima Saqueli de Aquino pelo amor, compreensão e dedicação.

A meus queridos filhos Rafael de Aquino Franco e Aline de Aquino Franco pelos muitos momentos de alegria, pelo apoio e compreensão.

A meus irmãos que sempre me incentivaram e foram sempre grandes amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, primeiramente por me oferecer a oportunidade de realização deste trabalho, e depois por guiar-me com muita sabedoria e dedicação, durante todo período de execução do mesmo.

Aos meus pais, esposa, filhos e irmãos pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao CNPQ e FINEP pelo auxílio financeiro concedido.

Aos professores do DF/CCT/UFCG por assumirem todas as minhas atividades durante a minha ausência deste departamento.

Aos colegas de Doutorado pelas constantes discussões relacionadas ao tema do trabalho e aos colegas do LCTF/CCT/UFCG pela convivência e apoio.

Ao Professor, colega e amigo Wilton Pereira da Silva (DF/CCT/UFCG), pelas discussões sobre tratamento de dados e a utilização de programação FORTRAN para Windows.

A todos os professores, funcionários e colegas do DEM/CCT/UFCG, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

O pessimista queixa-se do vento; o otimista espera que ele mude e o realista ajusta a vela.

William Ward.

vi

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 O processo de secagem.....	4
2.2 O material úmido.....	5
2.3 Mecanismos de migração de umidade nos sólidos.....	6
2.4 Teorias de secagem.....	7
2.4.1 Teoria da difusão líquida.....	7
2.4.2 Teoria capilar.....	8
2.4.3 Teoria da condensação – evaporação.....	8
2.4.4 Teoria de Luikov.....	9
2.4.5 Teoria de Philip e De Vries.....	10
2.4.6 Teoria de Krischer.....	10
2.5 Difusão em sólidos esferoidais oblatos e prolatos.....	10
2.6 Propriedades de transporte e coeficientes de transferência no proces- so de secagem dos sólidos.....	13
2.7 O efeito do encolhimento.....	17
2.8 Secagem intermitente.....	19
2.9 Análise concentrada do processo de secagem.....	21
2.10 Lentilha: aspectos científicos e tecnológicos.....	23
2.10.1 Histórico.....	23
2.10.2 Características gerais.....	23
2.10.3 Propriedade termo-físicas da lentilha.....	25
3. MODELAGEM MATEMÁTICA.....	30
3.1 Modelagem de processos físicos.....	30

3.2 A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esféricas oblatas.....	31
3.3 Solução numérica da equação de difusão em corpos esféricos oblatos.....	38
3.3.1 Discretização da equação de difusão.....	38
3.4 Modelos difusionais.....	43
3.4.1 Modelo I – Modelo difusional de massa com condição convectiva na superfície, considerando o fenômeno de encolhimento e propriedades constantes.....	44
3.4.1.1 Formulação analítica.....	44
3.4.1.2 Formulação numérica.....	48
3.4.2 Modelo II – Modelo difusional de calor e massa com condição convectiva na superfície, considerando o fenômeno de encolhimento e propriedades constantes.....	54
3.4.2.1 Formulação analítica.....	54
3.4.2.2 Formulação numérica.....	56
3.4.3 Modelo III – Modelo difusional de temperatura, com propriedades constantes.....	58
3.4.3.1 Formulação analítica.....	58
3.4.3.2 Formulação numérica.....	59
3.4.4 Modelo IV – Modelo difusional com condição convectiva na superfície, propriedades variáveis e fenômenos simultâneos de transferência de calor, massa e encolhimento.....	60
3.5 Aplicação da modelagem a dados experimentais de secagem de lentilhas.....	63
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	65
4.1 Comentários iniciais.....	65
4.2 Resultados numéricos.....	66
4.2.1 Refinamento de malha e de tempo.....	66
4.2.2 Validação da solução.....	68
4.2.3 Resultados obtidos com o modelo I.....	69
4.2.4 Resultados obtidos com o modelo II.....	77
4.2.5 Resultados obtidos com o modelo III.....	81
4.3 Aplicação dos modelos a dados experimentais de secagem de lentilhas.....	87
4.3.1 Estimativa não-linear dos parâmetros.....	87

4.3.2 Aplicação dos modelos propostos à secagem de lentilha.	91
4.3.2.1 Modelo I.....	91
4.3.2.2 Modelo IV	108
4.3.3 Estimativa dos coeficientes de transporte (D e h_m).	122
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	128
5.1 Conclusões.....	128
5.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	130
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	131

RESUMO

CARMO, João Evangelista Franco do, *Fenômenos de difusão transiente em sólidos esferoidais oblato*. Estudo de caso: *secagem de lentilhas*, Campina Grande: Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade Federal de Campina Grande 2004. 2004. 163p. Tese (Doutorado)

Uma solução numérica da equação de difusão que descreve a transferência de calor e massa no interior de esferóides oblato incluindo encolhimento, considerando condição de contorno convectiva e propriedades constantes ou variáveis é apresentada. A solução é obtida utilizando-se o método de volumes finitos para discretizar a equação. Vários resultados do teor de umidade médio e temperatura dentro do esferóide são apresentados e analisados. Resultados simulados foram ajustados a dados experimentais de secagem de lentilhas e valores para as propriedades de transporte que caracterizam o processo de secagem são encontrados. Foram feitas análises dos efeitos da geometria do corpo, do encolhimento e da secagem em multipasses (têmpera), no fenômeno de difusão de umidade. Os resultados obtidos são consistentes e o modelo matemático apresentado pode ser utilizado para resolver problemas de difusão em sólidos com geometria que varia desde um disco circular até uma esfera, incluindo o esferóide oblato.

Palavras chave: Esferóide oblato:

Difusão, Simulação, Secagem, Lentilhas.

ABSTRACT

CARMO, João Evangelista Franco do, *Non steady-state diffusion phenomenon in oblate spheroidal solids. Case studies: drying of lentil*. Campina Grande: Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade Federal de Campina Grande 2004. 163p. Tese (Doutorado)

A numerical solution of the diffusion equation that describes the heat and mass transfer inside oblate spheroidal solids including shrinkage, considering convective boundary condition and constant or variables properties is presented. The solution is obtained by using the finite volumes method to discretize the diffusion equation. Several results of the moisture content and temperature inside of the spheroid are presented and analyzed. Simulated results were adjusted to the experimental data of drying of lentils and values for the transport properties that characterize the drying process were found. Analysis of the effects of the body shape, shrinkage and multipasses drying (tempering), on the moisture diffusion phenomenon were done. The obtained results are consistent and the mathematical model presented can be used to solve diffusion in solids with geometry that varies from a circular disk to a sphere, including the oblate spheroidal solids.

Key Words:

Oblate spheroidal solids, Diffusion, Simulation, Drying, Lentil

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama esquemático da estrutura da lentilha.....	24
Figura 2.2 – Lentilhas com diferentes teores de umidade	24
Figura 2.3 – Isotermas de sorção da lentilha.....	29
Figura 3.1 – Características de um corpo esferoidal oblato.....	32
Figura 3.2 – Superfície contínua subdividida em pontos nodais.....	39
Figura 3.3 – Ponto nodal de fronteira do corpo.....	41
Figura 3.4 – Encolhimento do sólido esferoidal oblato durante o processo de difusão	48
Figura 3.5 – Ponto nodal próximo à superfície	59
Figura 3.6 – Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E	61
Figura 3.7 - Diagrama do algoritmo computacional.....	62
Figura 4.1 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 =$ 5,00.....	67
Figura 4.2 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1=1,43$	68
Figura 4.3 – Comparação entre os teores de umidade adimensional numérico e analítico. (Farias 2002), no centro de uma esfera e de um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$, $B=0,00$ e $Bi_m \rightarrow \infty$	68
Figura 4.4 – Comparação entre os teores de umidade adimensional numérico e analítico (Haji-Sheikh, 1986), no centro de um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$, $B=0,00$ e $Bi_m \rightarrow \infty$	69
Figura 4.5 – Teor de umidade adimensional médio em função do número de Fourier para três coeficientes de encolhimento adimensional.....	70
Figura 4.6 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 =2,00$, $ Fo=0,0061$, $ B=0,00$ e $ Bi_m$ infinito.....	71

Figura 4.7 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,00$, $Fo=0,0061$, $B=0,60$ e Bi_m infinito.....	71
Figura 4.8 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,0$, $Fo=0,0195$, $B=0,00$ e Bi_m infinito	72
Figura 4.9 – Teor de umidade no interior de um sólido, com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,0$, $Fo=0,0195$, $B=0,60$. e Bi_m infinito	72
Figura 4.10 – Teor de umidade médio de um sólido esferoidal oblato com $L_2/L_1=2,0$, em função do número de Fourier, para dois números de Biot e três coeficientes de encolhimento	74
Figura 4.11 – Teor de umidade médio de um sólido esferoidal oblato em fun- ção do número de Fourier, para $Bi_m = 1,0$, $B=0,50$ e várias ra- zões de aspecto	74
Figura 4.12 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$, $Bi_m=1,0$, $B=0,00$ e $Fo = 0,09759$	75
Figura 4.13 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$, $Bi_m=1,0$, $B=0,60$ e $Fo = 0,09759$	75
Figura 4.14 – Comparação entre a cinética de secagem de esferóides com o mesmo volume e diferentes áreas superficiais	76
Figura 4.15 – Cinética de secagem e valores preditos para a temperatura no centro do produto	79
Figura 4.16 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo igual a 20 s.....	80
Figura 4.17 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo igual a 100 s.....	80
Figura 4.18 – comparação entre a cinética de secagem continua e a secagem intermitente da lentilha para um tempo de parada de 8,33h.....	82
Figura 4.19-a –Cinética de secagem da lentilha (mostrando o tempo de têmpe- ra).....	83
Figura 4.19-b Cinética de secagem da lentilha (omitindo o tempo de tempera).....	83
Figura 4.20 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 25000s$ (tempo equivalente ao início do processo de tempera).....	84

Figura 4.21 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 40000s$ (tempo equivalente à metade do processo de tempera).....	85
Figura 4.22 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 55000s$ (tempo equivalente ao final do processo de tempera).....	85
Figura 4.23 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 400000s$ (tempo total de têmpera)	86
Figura 4.24 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a seca- gem de lentilhas par a $T = 23\text{ }^{\circ}\text{C}$	87
Figura 4.25 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a seca- gem de lentilhas para $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$	88
Figura 4.26 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a seca- gem de lentilhas para $T = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$	88
Figura 4.27 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 23\text{ }^{\circ}\text{C}$	89
Figura 4.28 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$	89
Figura 4.29 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$	90
Figura 4.30 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o mode- lo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umida- de da lentilha (caso 1)	91
Figura 4.31 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).....	92
Figura 4.32 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).....	92
Figura 4.33 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o mode- lo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umida- de da lentilha (caso 4)	93
Figura 4.34 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).....	93

Figura 4.35 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).....	94
Figura 4.36 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).....	94
Figura 4.37 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).....	95
Figura 4.38 –Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).....	95
Figura 4.39 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).....	96
Figura 4.40 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).....	97
Figura 4.41 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).....	97
Figura 4.42 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).....	98
Figura 4.43 - Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).....	98
Figura 4.44 -- Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).....	99

Figura 4.45 — Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7)	99
Figura 4.46 — Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8)	100
Figura 4.47 — Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9)	100
Figura 4.48 — Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1)	101
Figura 4.49 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2)	102
Figura 4.50 — Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3)	102
Figura 4.51 — Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4)	103
Figura 4.52 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5)	103
Figura 4.53 — Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6)	104
Figura 4.54 — Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7)	104
Figura 4.55- Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8)	105

Figura 4.56 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m	105
Figura 4.57 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).....	108
Figura 4.58 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).....	109
Figura 4.59 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).....	109
Figura 4.60 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).....	110
Figura 4.61 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).....	110
Figura 4.62 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).....	111
Figura 4.63 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).....	111
Figura 4.64 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).....	112
Figura 4.65 – curva Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).....	112
Figura 4.66 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).....	113

Figura 4.67 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).....	114
Figura 4.68 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).....	114
Figura 4.69 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).....	115
Figura 4.70 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).....	115
Figura 4.71 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).....	116
Figura 4.72 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).....	116
Figura 4.73 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).....	117
Figura 4.74 – Comparação entre as curvas simulada e experimental, para o caso 9, com $h_m = \infty$, coeficiente de encolhimento $B=0,17$ e difusividade variável.....	117
Figura 4.75 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 1$ h, com h_m infinito,e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).....	118
Figura 4.76 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 10$ h, com h_m infinito,e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).....	119
Figura 4.77 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 20$ h, com h_m infinito,e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).....	119

Figura 4.78 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 20s$, com h_m infinito, e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV)	120
Figura 4.79 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 100s$, com h_m infinito, e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).....	121
Figura 4.80 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 200s$, com h_m infinito, e $B = 0,17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).....	121
Figura 4.81 – Valores da difusividade em função de \bar{M}^* com $B = 0,00$	126
Figura 4.82 – Valores da difusividade em função de \bar{M}^* com $B = 0,17$	127

LISTA DE TABELA

Tabela 3.1 – Casos de cinética de lentilhas, sob diferentes condições do ar de secagem.....	63
Tabela 4.1 – Teor de umidade médio adimensional para diferentes malhas, em diferentes valores do intervalo de tempo. $L_2/L_1=2,00$ e número de Biot igual a 10,00.....	66
Tabela 4.2 – Parâmetros da equação (3.97) ajustados aos dados experimentais de razão de umidade média	90
Tabela 4.3 – Coeficientes de transporte estimados pelos modelos numéricos e a variância, para cada caso de secagem	123
Tabela 4.4 – Valores dos parâmetros da equação (4.6) que determinam a variação da difusividade com o teor de umidade para o caso de $h_m = \infty$ e $\beta=0,00$	125
Tabela 4.5– Valores dos parâmetros da equação (4.6) que determinam a variação da difusividade com o teor de umidade para o caso de $h_m = \infty$ e $\beta=0,17$	125

NOMENCLATURA

Letras Latinas

a' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
b' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
c' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
d' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
e' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
f' – Coeficiente da equação 3.9	[-]
A – Área superficial	[m ²]
A_p – Coeficiente da equação 3.30	[-]
A_N – Coeficiente da equação 3.30	[-]
A_S – Coeficiente da equação 3.30	[-]
A_E – Coeficiente da equação 3.30	[-]
A_W – Coeficiente da equação 3.30	[-]
A_p^0 – Coeficiente da equação 3.30	[-]
B – Coeficiente de encolhimento	[-]
c_v – Calor específico do vapor de água, à pressão constante	[J/kg .K]
D – Coeficiente de difusão	[m ² /s]
D_{esf} – Diâmetro da esfera equivalente	[m]
D_0 – Fator de Arrhenius	[m ² /s]
c_p – Calor específico do produto	[J/kg °C]
D_{ij} – Coeficiente da equação 3.27	[-]
$\partial M/\partial t$ – Taxa de difusão	[1/s]

e, w, s, n – Faces dos pontos nodais	[-]
E_a – Energia de ativação para a difusão	[kJ/kmol]
f – Ponto na fronteira do sólido da figura 3.3	[-]
F_o – Número de Fourier	[-]
h_m – Coeficiente de transferência de massa	[m/s]
h_c – Coeficiente de transferência de calor	[W/m ² .K]
h_{fg} – calor de vaporização da água livre	[J/kg]
i, j – Posição do ponto nodal na malha	[-]
J – Jacobiano da transformação	[-]
J_1 – Fluxo difusivo de massa	[kg/m ² /s]
L – Comprimento focal	[m]
L_1, L_2 – Dimensões do esferóide oblato	[m]
k – Condutividade térmica	[W/m.K]
M – Teor de umidade	[kg/kg]
m – Massa	[kg]
M'' – Fluxo do teor de umidade	[1/m ²]
\bar{M} – Teor de umidade médio	[kg/kg]
\bar{M}^* – Razão de umidade médio	[kg/kg]
N, S, E, W, P – Pontos nodais	[-]
$\bar{N}U$ – Número de Nusselt	[-]
Pe – Número de Peclet	[-]
Pr – Número de Prandtl	[-]
q – Taxa de calor	[J/s]
r – Coordenada radial esférica	[-]
Re – Número de Reynolds	[-]
R – Constante dos gases	[kJ/kmol.k]
S – Área superficial do sólido	[m ²]
S_η – Área perpendicular ao fluxo angular ϕ	[m ²]
S_ξ – Área perpendicular ao fluxo radial de ϕ	[m ²]
S_ζ – Área perpendicular ao fluxo angular de ϕ em torno do eixo z	[m ²]
S^ϕ - Termo fonte	[-]
$\bar{S}M$ – Fator que indica na equação 3.57, o efeito convectivo de umidade na superfície do sólido	[-]

\overline{ST}	– Fator que indica na equação (3.83), o efeito convectivo de calor na superfície do sólido	[-]
$\overline{TF\theta}$	– Fator que indica o efeito da vaporização da água na superfície do sólido	[-]
Sh	– Número de Sherwood	[-]
t	– Tempo	[s]
T	– Temperatura	[°C]
T_k	– Temperatura	[K]
t_m^*	– Tempo adimensional de transferência de massa	[-]
$\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$	– Coeficiente métricos	[-]
u,v,w	– Componentes do vetor velocidade	[m/s]
V	– Volume	[m ³]
X	– Umidade absoluta	[kg/kg]
X _{as}	– Umidade absoluta do ar na superfície do sólido	[kg/kg]

Letras Gregas

α_{ij}	– Parâmetros da equação 3.7	[-]
α	– Difusividade térmica	[m ² /s]
ε	– Porosidade do material seco	[-]
Φ''	– Fluxo de Φ por unidade de área	[1/m ²]
Φ	– Função	[-]
Γ^ϕ	– Propriedade do material	[-]
η	– Coordenada angular	[-]
k	– Condutividade térmica	[w/m.K]
μ, ϕ, ω	– Coordenadas esferoidais oblatas	[-]
ρ	– Densidade (massa específica)	[kg/m ³]
ξ	– Coordenada radial	[-]
ζ	– Coordenada angular	[-]
\mathfrak{S}	– Propriedade física do sólido	[-]
∇	– Gradiente	[-]
θ	– Temperatura do produto	[°C]
λ	– Propriedade do material	[-]

Superescritos

+ – Tempo posterior

* – Adimensional

o – Anterior

Subscritos

a– Ar

e – Equilíbrio

f – fronteira

m – massa

o – inicial

p– produto

s– Sólido

w – Água

Abreviações

adm – Adimensional

U.R – Umidade Relativa

Siglas

UFCG – Universidade Federal de Campina Grande

LCTF – Laboratório Computacional de Térmica e Fluidos

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A secagem é um complicado processo que envolve a transferência simultânea de calor e massa. Existem duas dificuldades básicas para se obter resultados confiáveis a partir de simulações utilizando-se um determinado modelo matemático. A primeira é relacionar todas as grandezas físicas relevantes inerentes ao processo, a segunda é a solução da equação representativa do fenômeno.

O estudo ou análise de um processo físico normalmente passa por um modelamento matemático capaz de representar ou simular este processo. Vários parâmetros afetam a cinética de secagem de produtos higroscópicos, tais como: teor de umidade do produto, condições ambientais externas e encolhimento do produto durante a secagem. Evidentemente, quanto maior for o número de parâmetros relevantes incluídos no modelamento matemático de um processo, mais próximo se estará da situação física real.

A taxa de secagem de um produto higroscópico normalmente se dá em duas fases distintas. No primeiro estágio da secagem, a taxa é constante, no segundo, ela é decrescente. Neste segundo estágio, um modelo bastante usado para descrever a transferência de umidade no interior do sólido é baseado na teoria da difusão líquida. Outros modelos baseados nas teorias da capilaridade, da condensação – evaporação, de Luikov, de Philip e De Vries, de Krischer Fortes e Okos (1980) também são utilizadas; cada uma destas teorias consideram diferentes mecanismos causadores do fluxo de umidade no interior do sólido.

O estudo da difusão líquida é bastante discutido na literatura (Lima 1999; Carmo e Lima 2000; Queiroz, 1994). Na sua maioria é aplicado a corpos com geometrias bem conhecidas tais como: paralelepípedos, cilindros e esferas, utilizando-se para a solução do problema condições de contorno de equilíbrio ou convectiva na superfície do corpo. Sendo assim, existe a necessidade de estudos que envolvam outras formas geométricas, tais como esferóides prolatos e oblatos, (formas estas tão comuns na natureza) e fenômenos tal como a variação de volume do sólido durante o processo de difusão (secagem, umidificação, aquecimento ou resfriamento). Estes estudos tornam a simulação do processo para determinados materiais mais realistas (Lima, 1999).

Para se ter uma idéia, um esferóide prolato é obtido através da revolução de uma superfície elíptica em torno do seu eixo maior, já o esferóide oblato é obtido a partir da revolução da superfície elíptica em torno do seu eixo menor. Sendo assim, pode-se citar a banana, casulo do bicho-da-seda, laranja, arroz e trigo como corpos com a forma de um esferóide prolato, e lentilhas e acerola são exemplos de produtos que apresentam formas semelhantes a um esferóide oblato.

Visando dar uma contribuição à área de secagem aplicada a sólidos com forma não-regular, o presente estudo constituiu-se em uma análise numérica do processo de difusão (secagem, umidificação, aquecimento ou resfriamento) em corpos com geometria esferoidal oblata, cujos objetivos são:

- Apresentar uma solução numérica para o problema de difusão transiente em sólidos esferoidais oblatos, baseando-se no modelo de difusão líquida;
- Simular a distribuição do teor de umidade e temperatura no interior de sólidos esferoidais oblatos e suas respectivas cinéticas de difusão;
- Modelar e analisar o efeito do encolhimento durante a secagem de esferóides oblatos;
- Modelar e estudar numericamente a secagem intermitente de sólidos esferoidais oblatos;
- Modelar e analisar o fenômeno de difusão de calor e massa simultâneos durante a secagem de sólidos esferoidais oblatos;

- Aplicar os modelos desenvolvidos à secagem de lentilha;
- Comparar os resultados numéricos e experimentais do teor de umidade de lentilhas, para várias condições de secagem;
- Analisar o efeito das considerações adotadas em cada modelo sobre os coeficientes de transporte;
- Obter correlações para os coeficientes de transporte como função dos parâmetros de secagem.

CAPÍTULO II

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 O processo de secagem

As operações de secagem ou de desidratação são importantes passos na indústria química, no processamento de alimentos e na estocagem de grãos. A finalidade da secagem é a remoção parcial de um líquido (geralmente a água) da matéria sólida. A particularidade da secagem em relação a outras técnicas de separação é que a retirada das moléculas é obtida por uma movimentação da água, graças a uma diferença de pressão parcial do vapor d'água entre a superfície do produto a ser seco e o ar que o envolve. No caso dos alimentos, a remoção de água do material úmido é realizada até que danos provocados pela atividade biológica associada à presença da água possam ser minimizados, atingindo níveis toleráveis que permitam a estocagem do produto por longos períodos.

Geralmente, o ar é utilizado como agente de secagem para a maioria dos processos industriais de secagem. O ar ambiente é uma mistura de vapor de água e o ar seco - composto principalmente por moléculas de oxigênio e nitrogênio. Para a modelagem do processo de secagem, o conhecimento das propriedades termodinâmicas do ar e suas mudanças no decorrer do processo se tornam imprescindíveis.

Num processo de secagem com ar aquecido, o material úmido está em contato com ar não-saturado, e como resultado o teor de umidade do material decresce e o ar é umidificado.

Durante a secagem de um material, ocorre simultaneamente a transferência de calor e massa no interior do sólido e na camada de contorno entre o sólido e o agente de secagem. Esta dinâmica está sujeita a influências exercidas pelas condições externas do ar de secagem, tais como temperatura, umidade relativa e velocidade, bem como pela estrutura interna do material a ser seco e o seu quantitativo inicial de água.

2.2 O material úmido

Produtos higroscópicos são passíveis de serem submetidos a um processo de secagem. Consistem de uma estrutura (ou substrato) de material seco e uma certa quantidade de umidade. Os chamados materiais úmidos apresentam propriedades físicas, químicas e estruturais diferentes, que resultam das propriedades do produto sólido junto com as características da água contida nele. De acordo com Luikov, citado por Strumillo e Kudra (1986), os materiais úmidos podem ser classificados em corpos coloidais, corpos porosos capilares e corpos porosos capilares coloidais. A característica dos corpos coloidais é que, em um processo de secagem, estes mudam suas dimensões, mas conservam suas propriedades elásticas. Os corpos porosos capilares, depois da secagem, se contraem e tornam-se um tanto quebradiços. O terceiro tipo de material úmido possui uma característica intermediária entre os dois citados anteriormente.

Para um determinado material o teor de umidade pode ser definido de duas formas:

- Teor de umidade em base seca (b.s.)

$$M = m_w / m_s \quad (2.1)$$

- Teor de umidade em base úmida (b.u)

$$M = m_w / m \quad (2.2)$$

onde $m = m_w + m_s$, é a massa total do produto úmido, m_w é a massa de água contida no produto e m_s é a massa do sólido seco.

Durante a secagem, um produto higroscópico pode atingir teores de umidade comumente definidos na literatura como: teor de umidade inicial, crítico e de equilíbrio. O teor de umidade inicial é o valor da umidade no material quando se inicia o processo de secagem. O teor de umidade crítico se dá quando acontece uma mudança na taxa de secagem, de constante

para decrescente. O teor de umidade de equilíbrio se dá quando o material úmido está em equilíbrio com o ar de secagem, para um determinado estado termodinâmico do ar; neste caso, não existe fluxo de umidade entre eles. Quando este estado de equilíbrio é atingido, o teor de umidade no interior do sólido passa a ser praticamente uniforme.

As isotermas de sorção para um determinado produto são curvas bem definidas, determinadas a partir do equilíbrio higroscópico deste produto com o ar que o cerca. Estas curvas, geralmente, relacionam o teor de umidade do sólido e a umidade relativa do ar, estando este a uma determinada temperatura. Várias destas isotermas, aplicadas para diversos materiais, podem ser encontradas na literatura (Iglesias e Chirife, 1982).

2.3 Mecanismos de migração de umidade nos sólidos

O processo de retirada da umidade em um sólido pode ser dividido em dois períodos distintos. Aquele caracterizado por uma taxa de retirada de umidade constante e outro por uma taxa decrescente. Neste último período, a retirada da umidade sofre uma grande influência das características do sólido. No período de taxa de secagem constante, a transferência de calor e massa depende principalmente dos mecanismos de transporte nas camadas superficiais do ar que envolve o sólido; porém, no período de taxa decrescente, a este fator externo é adicionado a resistência ao transporte de umidade dentro do material a ser seco.

Os seguintes mecanismos de transporte da umidade no interior dos sólidos foram apresentados por Fortes e Okos (1980) e Strumillo e Kudra (1986): a) difusão líquida no interior do sólido, devido a um gradiente de concentração de umidade; b) movimento de líquido devido a forças capilares; c) difusão superficial, devido a um gradiente de concentração de umidade superficial; d) movimento do líquido, devido à força gravitacional; e) fluxo de vapor e/ou líquido, devido a diferença total de pressão.

Pode-se afirmar que a umidade pode existir na superfície e no interior dos materiais sob a forma de vapor e/ou líquido. Na superfície, a umidade existe como uma película de água externa sobre o material, fixada ao sólido devido ao efeito de tensão superficial. Como mencionado anteriormente, existe um valor do teor de umidade para a qual o corpo está em equilíbrio com o ambiente, acima ou abaixo deste valor o corpo deverá estar em um processo de secagem ou de umidificação, ou seja, estará havendo o movimento de umidade no interior e na superfície do corpo (Marinos-Kouris e Maroulis, 1995).

2.4 Teorias de secagem

Atualmente na literatura, existem várias teorias para descrever o processo de secagem. Entre estas, as seguintes teorias para a transferência de calor e massa em corpos porosos têm sido amplamente divulgadas:

- Teoria da difusão líquida
- Teoria da capilaridade
- Teoria da condensação - vaporização
- Teoria de Krischer
- Teoria de Luikov
- Teoria de Phillip - DeVries

2.4.1 Teoria da difusão líquida

A teoria da difusão líquida tem como modelo matemático a equação de Fick, considerando que o fluxo de umidade no interior do sólido é gerado por um gradiente de concentração. A seguinte equação é válida :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) \quad (2.3)$$

A difusão líquida tem sido proposta como o principal mecanismo para o fluxo de umidade no interior dos sólidos. Esta teoria tem sido aplicada para diversos materiais, considerando o coeficiente de difusão como sendo constante ou dependente da temperatura e/ou do teor de umidade (Alsina et al. 1997; Wagner e Shlunder, 1998; Júnior e Coirncross 1998; Azzouz *et al.* 1998; Sanjuan et al. 1998; Gouveia et al. 1999; Júnior e Correa 1999). Segundo Queiroz (1994), o modelo de difusão líquida apresenta bons resultados para a análise de secagem em grãos, frutas e cereais devido à peculiaridade destes produtos não apresentarem um período de taxa constante nas suas curvas características de secagem, permitindo que o processo seja totalmente controlado pelas condições internas do material. A ausência do período de taxa constante de secagem é observado por exemplo no processo de secagem do quiabo fresco (Shivhare et al. 2000). Luccas (1996) reporta que no período de secagem decrescente, os processos difusivos de água do interior do material para a sua superfície controlam a operação de secagem.

No entanto, segundo Hougén *et al.* citados por Fortes e Okos (1980), a difusão líquida vista como o único mecanismo de movimento da umidade tem sido sujeita a severas críticas. Na verdade, as discrepâncias entre resultados experimentais e teóricos podem e devem ser sempre minimizadas. Estas discrepâncias, em geral, são oriundas da aplicação do modelo de difusão líquida considerando o coeficiente de difusão constante ao longo do processo de secagem, condições de contorno inadequadas, não-encolhimento do produto, entre outros fatores.

Apesar das ressalvas feitas pôr diversos autores, a predição do movimento de umidade através da difusão líquida não pode ser invalidada, até porque teorias mais sofisticadas utilizam a Lei de Fick para determinar o movimento de vapor e/ou líquido nos sólidos. As críticas a esta teoria se concentram mais no fato da sua aplicabilidade em todos os estágios da secagem. Nestes casos o significado físico do coeficiente de difusão se perde, ou é interpretado como a soma de vários efeitos simultâneos.

2.4.2 Teoria capilar

A teoria capilar se refere ao fluxo de um líquido através dos interstícios e sobre a superfície de um sólido, como sendo devido a atrações moleculares entre o líquido e o sólido (Hougén, 1940). Esta teoria é baseada no conceito do potencial capilar, que pode ser entendido como a diferença de pressão entre a água e o ar, na interface água-ar, presente em um capilar. Para condições isotérmicas, o potencial capilar é assumido ser proporcional ao gradiente de concentração da umidade. No entanto, Ceaglske e Hougén, citados por Fortes e Okos (1980), destacaram que na secagem de sólidos granulares, o fluxo de água é completamente determinado por forças capilares, sendo independente da concentração de água. Foi mostrado através de experimento que o fluxo de umidade pode até estar na direção de incremento da umidade. Na secagem de alimentos, a teoria do fluxo capilar tem sido aceita principalmente para os estágios da secagem de materiais com alto teor de umidade.

2.4.3 Teoria da condensação - evaporação

Neste modelo, o vapor de água do interior do produto é condensado perto da superfície; assumindo a taxa de condensação igual a taxa de evaporação, não há acúmulo de água nos poros próximos à superfície. Segundo Fortes e Okos (1980), o modelo teórico da condensação – evaporação foi motivado pelos trabalhos de Henry (1939), quando da tentativa de compreensão da umidade existente em fardos de algodão. Seu modelo considera que o sólido é cons-

tituído por redes contínuas de poros e as equações que governam o fluxo de umidade no material são obtidas através de um balanço apropriado de calor e massa. O balanço de massa considera o movimento de vapor através do sólido, e o balanço de energia é feito considerando o fluxo de calor por condução, adicionando o calor envolvido na adsorção e/ou absorção de umidade pelo sólido.

Embora muitos trabalhos posteriores ao de Henry (1939) tenham limitado o fluxo de umidade através do sólido somente na fase de vapor, sua teoria não se limitou ao vapor como única substância difusiva (Whitney e Porterfield, 1968).

Hougen *et al.*, citados por Fortes e Okos (1980), estabeleceram que a umidade pode se mover por difusão de vapor através de um sólido, desde que seja estabelecido no seu interior um gradiente de temperatura, que por sua vez irá criar um gradiente de pressão na direção da superfície de secagem. Desta forma, na secagem de uma partícula com o ar a uma determinada temperatura, só existirá fluxo de vapor enquanto o material não entrar em equilíbrio térmico com o ar; a partir daí, o fluxo de massa através do sólido se dará predominantemente por difusão líquida.

2.4.4 Teoria de Luikov

No desenvolvimento desta teoria Luikov (1964) e Luikov (1966), baseando-se nos princípios da Termodinâmica de Processos Irreversíveis, assumiu que os fluxos de umidade devido à difusão de vapor e líquido, são devidos respectivamente a um gradiente de temperatura e de concentração total de umidade no interior do sólido. As equações que descrevem o modelo sugerem que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontecem simultaneamente. Quando mais de uma força propulsora ocorre no sistema, efeitos simultâneos podem aparecer. Utilizando os princípios da termodinâmica para descrever o processo, a combinação destes efeitos aparece nas equações como termos cruzados em relação aos fluxos de calor e massa. O modelo matemático da teoria de Luikov é amplamente discutido na literatura, o destaque feito neste texto é que a teoria agrega simultaneamente os fluxos de umidade na forma de vapor e líquido.

2.4.5 Teoria de Philip e De Vries

Esta teoria considera que em materiais porosos, a água se move através da difusão de vapor e por capilaridade (Philip e De Vries, citados por Fortes e Okos, 1980). O fluxo de vapor é considerado ser dependente da sua concentração e dos gradientes de temperaturas no sólido e o fluxo de umidade na fase líquida é devido a efeitos de capilaridade e pode se dar em condições isotérmicas ou não. A teoria de Philip e De Vries também considera o fluxo de umidade devido a potenciais gravitacionais. Em geral, pode-se dizer que a difusividade líquida é um fator importante para condições em que estão presentes altos teores de umidade, enquanto que a difusividade de vapor é importante para condições de baixo valor do teor de umidade.

2.4.6 Teoria de Krischer

Em sua teoria, Krischer, citado por Fortes e Okos (1980) assumiu que durante a secagem, o fluxo de umidade pode se dar no estado líquido, por capilaridade, ou no estado de vapor devido a um gradiente de concentração de vapor. Esta teoria leva em conta a transferência de calor e massa simultaneamente, e, pode ser aplicada a uma variedade de meios porosos. O trabalho de Krischer serve como base para teorias mais complexas como a de Berger e Pei (1973), e tem sido aplicada para análises em variados tipos de alimentos (Fortes e Okos, 1980).

Como foi visto, vários modelos para a difusão de umidade através dos sólidos podem ser encontrados na literatura, quase todos levando em consideração a migração da umidade na forma de vapor e/ou líquido. Nos citados trabalhos considera-se que o fluxo de umidade é provocado pelo gradiente de uma grandeza escalar tal como a temperatura, pressão total, concentração de umidade ou pelo potencial químico entre a água e a rede de poros capilar do sólido. Neste trabalho será utilizada a teoria da difusão líquida, sendo que o fluxo de umidade ocorre pela formação de um gradiente de concentração de umidade no interior do sólido.

2.5 Difusão em sólidos esferoidais oblatos e prolatos

O modelo de difusão aplicado a sólidos esferoidais tem sido considerado por diversos autores. Niven (1880) apresenta uma solução analítica para o problema de condução do calor em esferóides com a consideração de condição de equilíbrio na superfície.

Norminton e Blackwell (1964) propuseram uma solução formal para transferência de calor transiente de esferóides prolato e oblato com temperatura constante na superfície. A metodologia foi aplicada apenas para calcular numericamente a temperatura ao longo da coordenada radial de um disco circular ao longo do tempo.

Haji-Sheikh e Sparrow (1966) descreveram uma solução analítica para condução de calor transiente em corpos esferoidais prolatos para o caso de temperatura constante na superfície. Resultados das temperaturas no centro e no ponto focal são apresentados para vários esferóides.

Haji-Sheikh e Sparrow (1967) apresentaram uma solução numérica para a temperatura no interior de corpos esferoidais, assumindo condição de contorno convectiva e radiativa e usando o método de Monte Carlo, em coordenadas cartesianas. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com resultados analíticos reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

Wrobel e Brebbia (1981) reportaram uma formulação numérica usando o método de elementos de fronteira em coordenadas polares, para análise do problema de condução de calor transiente em corpos axialmente simétricos com condição de contorno de equilíbrio na superfície. Como uma das aplicações, o método é usado para descrever a temperatura no centro de um esferóide prolato. Os resultados obtidos são satisfatórios quando comparados com dados analíticos obtidos por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e numéricos obtidos pelo uso de elementos finitos, por Zienkiewicz e Parekh (1970).

Sharma *et al.* (1982) descreveram a secagem do arroz baseando-se em um modelo semi-teórico análogo à equação de resfriamento de Newton, no entanto, consideraram o grão de arroz composto por dois compartimentos diferentes e sobrepostos.

Haji-Sheikh (1986), utilizando o método de Galerkin e condição de equilíbrio na superfície, apresenta uma solução para a equação de difusão em uma fronteira irregular. Este método de solução foi utilizado para fornecer a distribuição de temperatura no interior de esferóides.

Elvira (1990) reporta uma solução numérica para o problema de difusão em corpos elípticos com condição de equilíbrio na superfície, usando um método implícito de direção alternada, em coordenadas polares, com malhas ortogonais e não-ortogonais. Como aplicação, o

método foi testado para descrever os processos de umidificação de arroz e batata. O autor constatou que o método é satisfatório pois representa muito bem os dados experimentais.

Haghighi et al. (1990) apresentam uma formulação utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor e massa em corpos com simetria axial. O modelo foi usado para simular o processo de secagem de grãos de cevada. Os resultados do modelo ajustaram-se bem aos dados experimentais. Procedimentos similares foram utilizados por Sokhansanj (1980) e Sarker et al. (1994) para simular processo de secagem de grãos de arroz. Em todos os casos foi assumida condição de contorno convectiva.

Lu e Siebenmorgen (1992) usando o método de elementos finitos em coordenadas polares, apresentam um modelamento para descrever a adsorção de umidade em grãos de arroz, assumindo condição de equilíbrio na superfície. Os resultados obtidos numericamente são comparados com os dados experimentais e excelente aproximação foi obtida.

Sheen e Hayakawa (1992) apresentam resultados sobre a influência do encolhimento volumétrico, sobre o tempo de degelo de alimentos com forma esferoidal ou cilíndrica. Difusão convectiva e adsorção em partículas esferoidais oblatas e prolatas são apresentadas no trabalho de Coutelieres et al. (1995).

Lima (1999) apresenta soluções analítica e numérica da equação de difusão para corpos com forma de um esferóide prolato, para diferentes condições de contorno e as utiliza para o estudo de secagem de bananas.

Carmo (2000) apresenta uma solução numérica para difusão de umidade em corpos esferoidais oblatos, com condições de contorno convectivas na superfície do sólido. Simulações para corpos com diferentes razões de aspecto são realizadas e a distribuição do teor de umidade no interior do sólido é mostrada e analisada.

Oliveira (2001) utilizando a técnica de separação de variáveis, reporta a solução da equação de difusão para corpos com geometria esferoidal prolata. O problema é de condição de contorno convectivo na superfície do sólido, sendo a solução da equação dada em uma série de funções de Legendre para a coordenada angular e em uma série de funções de Bessel para a coordenada radial. Com uma definição para o teor de umidade médio a cada instante do processo, o autor utilizou a solução para simular a cinética de secagem de sólidos úmidos.

Farias (2002) apresenta uma solução analítica para o problema de difusão no interior de esferóides (prolatos, oblatos e esfera). O autor utilizou um método integral baseado em Galerkin (método GBI); este método resolve a equação de difusão escrita em coordenadas cilíndricas e considera uma condição de equilíbrio na superfície.

Teruel *et al.* (2002) estudou a transferência convectiva de calor através de um leito de laranjas. O problema foi modelado através da equação de condução bidimensional, em coordenadas esferoidais prolatas e condição de contorno convectiva na superfície. A solução da equação foi obtida numericamente pelo método de volumes finitos. Como resultados deste trabalho, coeficientes de transferência convectiva de calor, para as laranjas imersas no ar e na água foram obtidos.

2.6 Propriedades de transporte e coeficientes de transferência no processo de secagem dos sólidos

O projeto de equipamentos utilizados para realizar a secagem de sólidos, requer constantes dados sobre as propriedades físico-químicas das substâncias a serem secadas. A relativa carência destes dados se deve principalmente à complexidade das estruturas físicas e químicas apresentadas por algumas substâncias tais como os grãos. Produtos sólidos como frutas e vegetais são particularmente sensíveis a tensões térmicas ou mecânicas, requerendo equipamentos de processamento especializados, para que possíveis danos causados na qualidade final do alimento possam ser minimizados.

As propriedades de transporte para gases e líquidos podem ser diretamente medidas ou preditas, baseando-se em princípios físico-químicos. No entanto, para materiais sólidos tais como alimentos, este procedimento não é possível (Saravacos e Kostaropoulos, 1995). Nestes casos, a predição pode ser feita por meio do ajuste entre dados experimentais e resultados obtidos por simulação.

A difusividade de umidade e a condutividade térmica são propriedades do material que em geral dependem do teor de umidade, da temperatura e da estrutura física do material. Já os coeficientes de transferência convectiva de calor e massa na superfície de contorno entre o material e o agente de secagem dependem das condições deste agente (normalmente o ar seco mais vapor de água) tais como: umidade absoluta, temperatura, velocidade e também da geometria do corpo sólido que está sendo secado ou umedecido.

Desta forma, o processo de secagem depende ao mesmo tempo das propriedades de transporte no interior do material, das condições do ar de secagem e do tipo de contorno entre a superfície do corpo e o ar que o envolve. Para grandes partículas e altas velocidades do ar, o processo de secagem depende principalmente das propriedades físicas do material. Ao contrário, para pequenas partículas e baixas velocidades do ar, o processo de secagem depende mais das condições do ar de secagem. Para corpos com alta porosidade, tem-se um alto valor do coeficiente de transporte de umidade e um pequeno valor da condutividade térmica; nestes casos, o processo de secagem é controlado pela resistência à transferência de calor.

Como se vê, para a análise da cinética e dinâmica da secagem de um material sólido, é fundamental o conhecimento de suas propriedades físicas, e das características do ar que o envolve (Strumillo e Kudra, 1986).

▪ A difusividade de massa

A difusão nos materiais sólidos é um complicado processo que envolve difusão molecular, fluxo por capilaridade, difusão superficial e outros. A combinação de todos esses fenômenos gera o que é definido na lei de Fick por difusividade efetiva, também conhecida por coeficiente de difusão e até mesmo por difusividade de massa. Para corpos heterogêneos, a heterogeneidade do material é incorporada na difusividade efetiva.

Alguns métodos específicos para medidas experimentais da difusividade de massa tais como: cinética de sorção, traçadores radioativos, curvas de concentração, ressonância nuclear magnética, são reportados na literatura. (Marinos-Kouris e Maroulis, 1995). Em geral, principalmente para o caso de alimentos, é difícil a comparação entre os dados existentes na literatura, porque os métodos de estimação são diferentes e sempre há uma certa variação entre os dados apresentados.

A maioria dos dados na literatura referentes à difusividade de massa diz respeito ao transporte de água nos processos de secagem ou hidratação. A difusividade de massa depende fortemente da estrutura física do produto alimentício, em geral, quanto maior a porosidade, maior o coeficiente de difusão. No processo de secagem, existe sempre o transporte de calor e massa no interior do produto sendo que em várias situações o transporte de calor pode se dar muito mais rápido do que o transporte de massa. Nesta circunstância, o produto entra rapida-

mente em equilíbrio térmico com o ar de secagem e a partir daí somente a transferência de massa devido a gradientes que não sejam de temperatura deve ser considerada.

O valor da difusividade, como já foi dito é função da temperatura e do teor de umidade do corpo. A dependência com a temperatura pode ser expressa pela equação de Arrhenius, como se segue:

$$D = D_0 e^{\frac{-E_a}{R T_{abs}}} \quad (2.4)$$

onde D_0 é o fator de Arrhenius, E_a é a energia de ativação, R é a constante dos gases e T_{abs} é a temperatura absoluta.

A dependência da difusividade com o teor de umidade é semelhante a mostrada na equação (2.4). Várias expressões mostrando a dependência da difusividade com o teor de umidade e/ou temperatura, válidas para diferentes materiais podem ser vistas em Marinos-Kouris e Maroulis (1995). Uma destas expressões, válidas para a cenoura e maçã, tem a seguinte forma.

$$D(\bar{M}, T_{abs}) = a_0 e^{a_1 \bar{M}} e^{-a_2 / T_{abs}} \quad (2.5)$$

onde \bar{M} é o teor de umidade médio, a_i são constantes e T_{abs} é a temperatura do produto.

Assim, a difusividade de massa do material aumenta com o aumento da temperatura e do teor de umidade. Várias outras equações mostrando a dependência deste coeficiente de transferência com a temperatura e/ou teor de umidade podem também ser encontradas em Lima (1999) e Strumillo e Kudra, (1986).

▪ A condutividade térmica

A medida dos valores da condutividade térmica é feita através de várias técnicas que podem ser agrupadas em métodos transiente e permanente (Marinos-Kouris e Maroulis, 1995). No método em regime permanente a distribuição de temperatura ao longo da amostra é medida, com a amostra sendo colocada entre uma fonte e um sorvedouro de calor. O método em estado transiente consiste no uso de uma fonte linear ou plana de calor. O procedimento usual é aplicar um fluxo constante de calor na amostra e medir o aumento de temperatura em um de seus pontos.

A condutividade térmica pode variar fortemente com a estrutura física do material. Desta forma, em frutas e vegetais a condutividade térmica é uma função da porosidade ($\hat{\epsilon}$); em geral, quanto maior a porosidade, menor é a condutividade térmica do alimento. A condutividade térmica de um material poroso pode ser estimada a partir da condutividade do material sólido, mais a condutividade do ar e a porosidade da partícula ($\hat{\epsilon}$), (Maroulis et al, citados por Saravacos e Kostarapoulos, 1995).

$$k = \hat{\epsilon} k_a + (1-\hat{\epsilon}) k_s \quad (2.6)$$

▪ **Difusividade térmica**

Quando a condutividade térmica no interior de um sólido não depender das coordenadas espaciais, a equação de condução do calor expressa pela lei de Fourier pode ser escrita utilizando-se a difusividade térmica. Esta propriedade é definida como:

$$\alpha = k/(\rho c_p) \quad (2.7)$$

O calor específico e a entalpia dos alimentos dependem fortemente do seu teor de umidade, visto que a água possui o maior calor específico de todos os elementos que entram na composição do alimento. A difusividade térmica de um material homogêneo depende da temperatura e de sua composição e seus valores podem ser determinados experimentalmente. Para materiais heterogêneos, tais como sólidos porosos, o efeito da geometria do material também deve ser considerado.

• **Coefficientes de transferência de calor e massa convectivos**

Os coeficientes de transporte convectivos de calor e massa na superfície do material estão relacionados com uma pequena camada de ar que envolve o material durante o processo de secagem, denominada camada limite. Existem duas formas para se definir o coeficiente de transporte de massa, uma está relacionada com o teor de umidade do material e a outra com a umidade absoluta do ar de secagem (Marino- Kouris e Maroulis, 1995). Em símbolos:

$$J_1 = h_m \rho_s (M - M_{eq}) \quad (2.8-a)$$

$$\hat{J}_1 = \hat{h}_m \rho_a (X_a - X_{as}) \quad (2.8-b)$$

A equação (2.8-a) corresponde ao conceito de camada limite.

O coeficiente de transferência de calor é definido como sendo o fator de proporcionalidade que aparece na equação que define a lei de Newton para o resfriamento.

$$q = h_c A(T_a - T) \quad (2.9)$$

Os valores dos coeficientes de transferência de calor e massa na superfície do material são influenciados pelas propriedades térmicas do ar, velocidade do ar e rugosidade da superfície do sólido. Na superfície do sólido, os fenômenos de transferência de massa e calor estão intrinsecamente ligados.

2.7 O efeito do encolhimento

A maioria dos produtos biológicos, principalmente aqueles com alto teor de umidade inicial, normalmente apresentam uma taxa de encolhimento durante o processo de secagem. Desta forma, o encolhimento pode ter um significativo efeito na difusividade de massa com conseqüentes mudanças na taxa de remoção de umidade do sólido.

A desconsideração do efeito do encolhimento durante o processo de secagem constitui uma hipótese questionável, principalmente quando se refere a produtos que sofrem grandes alterações em suas dimensões e forma original, quando submetidos a um processo de desidratação ou secagem. O fenômeno de encolhimento deve ser incluído na modelagem matemática com o objetivo de se obter uma representação mais realística do processo e, garantir maior confiabilidade nos valores dos parâmetros físicos determinados com a utilização do referido modelo.

Diversos autores têm incluído o fenômeno do encolhimento em seus trabalhos; Podendo serem citados Lozano *et al.* (1983), Queiroz (1994), Lang *et al.* (1994), Sjöholm e Gekas (1995), Brasileiro (1999), Junior *et al.* (2000), Nascimento *et al.* (2001), Hatamipour e Mowla (2002).

Lozano *et al.* (1983) estudaram a variação da densidade, coeficiente de encolhimento e porosidade de produtos alimentícios com a perda de água durante o processo de secagem. Foram realizados experimentos com cenoura, alho, pêra, batata e batata doce. Excluindo a cenoura e a pêra, os dados experimentais mostraram que, próximo ao teor de umidade de equilíbrio, o coeficiente de encolhimento volumétrico ($S=V/V_0$) não é uma função linear do teor de umidade; no entanto, para teores de umidade maiores que 0,15 (b.s) este coeficiente é

linear para todos os produtos alimentícios estudados. O fato do encolhimento ser não-linear nas proximidades do teor de umidade de equilíbrio também foi mencionado por Lima (1999).

Queiroz (1994), a partir de dados experimentais obtidos com a secagem de banana, obteve uma expressão linear que relaciona o raio adimensional e o teor de umidade da banana. Este resultado é então considerado na solução da equação de difusão que descreve a transferência de umidade no interior do produto.

Lang *et al.* (1994) introduziram a propriedade de encolhimento no modelo de Bakker-Arkema para a secagem de grãos (em camada espessa) e uma melhor precisão na predição da cinética de secagem do trigo foi obtida. O encolhimento do produto foi introduzido neste modelo considerando que o número de camadas do grão permanece o mesmo, no entanto, cada uma das camadas do grão cujo comprimento inicial é Δx , sofre um encolhimento que varia linearmente com o teor de umidade.

Sjöholm e Gekas (1995) incorporaram o efeito do encolhimento na modelagem da cinética de secagem de fatias de maçã. Os autores obtiveram uma relação entre a difusividade efetiva do produto e a razão entre o volume inicial e o volume a cada instante de secagem. Consideraram uma relação linear entre a variação de umidade e o teor de umidade do produto e concluíram que a difusividade efetiva decresce com o decréscimo do teor de umidade do produto.

Lima (1999) assumiu que o encolhimento do material se dá de tal forma que a contração de suas dimensões seja uma função linear do teor de umidade. Uma equação foi proposta relacionando a cada instante o volume do produto com o seu equivalente teor de umidade. A equação de difusão que representa o processo é bidimensional e tem uma solução numérica que depende das dimensões do sólido. A cada instante, com o novo volume é encontrado, novas dimensões lineares são determinadas.

Brasileiro (1999) trabalhou com a secagem de acerola. O autor incluiu o encolhimento do produto medindo a variação de suas dimensões através de fotografias tiradas em determinados intervalos de tempo. A cinética de secagem foi modelada através do modelo exponencial simples, e o fenômeno de encolhimento foi introduzido na solução do problema através de um fator que relaciona um raio equivalente, num determinado instante, com o raio equivalente inicial.

Júnior *et al.* (2000) estudaram o efeito da variação do teor de umidade na porosidade, massa específica e contração volumétrica de grãos de milho (*Pennisetum glaucum*). A redução do teor de umidade provocou no milho, redução da porosidade e aumento da massa específica. O volume dos grãos diminuiu com a perda de água e a contração volumétrica apresentou-se como função linear do teor de umidade do grão.

Nascimento (2002) considerou o encolhimento durante a secagem de materiais cerâmicos. O modelo apresentado pelo autor é tridimensional e assume um encolhimento do material de modo que determinadas razões entre as dimensões do corpo permanecem constantes. O volume total do material cerâmico é considerado ser uma função linear do teor de umidade em cada instante do processo.

Hatamipour e Mowla (2002) realizaram estudos de secagem da cenoura cortada em pedaços com forma cilíndrica. Mostraram que durante a secagem de raiz de vegetais, o encolhimento pode ser relacionado basicamente com o seu teor de umidade. Segundo estes autores, Zogzas *et al.* concluíram pela independência das características do encolhimento destes vegetais em relação à temperatura e umidade do ar de secagem, entretanto, Wang e Brennan verificaram um maior grau de encolhimento da batata, durante a secagem realizada com ar a baixas temperaturas. Dados experimentais da cinética de secagem da cenoura Hatamipour e Mowla (2002) revelaram que a relação entre o volume em um determinado instante e volume inicial do produto é linear com o teor de umidade.

2.8 Secagem intermitente

A possível economia de energia na realização de um processo de secagem é sempre um fator relevante. Com o objetivo de racionalizar o uso da energia e melhorar a qualidade final do produto biológico, uma escolha adequada entre as várias técnicas de secagem existente é altamente desejável. Uma destas técnicas é a secagem intermitente, que é comumente usada para a secagem de grãos e cereais (Iima, 1999).

A secagem intermitente é um processo que alterna períodos de secagem com períodos de repouso ou relaxamento. Cada período de repouso entre dois outros de secagem é chamado de passe. Durante o período de repouso, devido ao gradiente de umidade estabelecido no interior do grão, haverá migração de umidade do interior para a superfície do grão, até que a umidade em todo o grão esteja uniformizada.

A determinação da duração e do número de ciclos no processo de secagem intermitente (ou de têmpera), têm por objetivo minimizar custos (energia) e obter uma melhor qualidade final do produto. Períodos com pouco fornecimento de calor permitem o rearranjo de umidade e temperatura no interior do produto.

A secagem intermitente   necessária somente no período onde a taxa de secagem   decrescente. Para determinados materiais, muito da resistência ao processo de secagem reside em seu interior, desta forma, manter determinadas condi es do ar de secagem aplicadas   superfície do material somente resulta em altos gradientes na superfície do produto, causando possíveis danos (trincas e deforma es) e reduzindo a eficiência no processo.

Segundo Chua et al. (2003), são citadas algumas maneiras de se implementar um processo de secagem intermitente:

- a) Secagem intermitente pelo qual o fluxo de calor   fornecido temporariamente. Isto pode ser feito interrompendo o fluxo de ar ou então são aquecendo este ar intermitentemente.
- b) Através da seca-aera o que   um processo de secagem envolvendo altas temperaturas com pequenos tempos de secagem, seguindo um tempo de equaliza o da água no interior do produto, resfriamento lento e o final da secagem.
- c) Reversão periódica do sentido do fluxo de ar para minimizar os gradientes de temperatura dentro do leito do secador.
- d) Secagem cíclica que   um processo de secagem no qual a temperatura, umidade ou velocidade do ar de secagem varia com o tempo segundo uma senóide, onda quadrada, ou outra fun o qualquer.

Chian e Ece (2001) analisaram o efeito do tempo de têmpera sobre a cinética de secagem do arroz através de dados experimentais. Resultados da cinética de secagem foram obtidos utilizando-se intervalos de tempos de 0, 30 e 60s. Estes resultados foram ajustados a uma curva dada pela soluço analítica da equa o de difusão líquida usada para descrever o problema. Através da diferença quadrática do erro entre os pontos experimentais e os simulados, valores da difusividade de massa foram determinados. Os autores concluíram que quanto maior o tempo de têmpera (ou de equaliza o da água) maior coeficiente de difusão   obtido.

Prachayawaracorn et al. (2004) desenvolveram um processo de secagem de milho em dois estágios com um tempo de têmpera entre eles. Esta alternativa de secagem em relação à secagem contínua resultou em um processo mais rápido e com menos grãos danificados. Os autores observaram que com longos períodos de têmpera, a cor final do grão aparece mais escurecida. Concluíram também através de simulações e dos dados experimentais que para manter a qualidade e diminuir o consumo de energia, a temperatura do ar de secagem deveria ser menor que 150 °C. No estágio de têmpera o milho foi retirado do secador e foi mantido em um depósito sem ventilação de ar. Durante este período a umidade na superfície do grão não irá se evaporar e será redistribuída até ficar uniformizada dentro do grão. O milho apresentava teor de umidade inicial de 43% (b.s) e temperatura do ar de secagem de 150 °C. O primeiro estágio de secagem foi de 6 min, seguido de tempos de têmpera de 0, 10, 20, 30, 40, 50 e 180 min. Foi concluído que quanto maior o tempo de têmpera, maior é a taxa inicial de secagem no segundo estágio.

Crossen *et al.* (2003) observaram que o efeito do tratamento de têmpera sobre o aparecimento de fissuras no grão de arroz, com temperaturas do ar de secagem abaixo e acima da temperatura de transição vítrea (T_g), muda significativamente. A temperatura de transição vítrea é definida como a temperatura de mudança de fase na qual um sólido vítreo é transformado numa forma líquida ou gomosa. Estes estados apresentam propriedades físicas bastantes diferentes, notadamente o coeficiente de expansão térmica. Devido a estas propriedades diferenciadas, tensões dentro do grão podem causar trincas.

2.9 Análise concentrada do processo de secagem

Como apresentado na equação (2.3), o teor de umidade depende da posição dentro do sólido e do tempo, durante o processo de secagem. No entanto, quando os gradientes de umidade dentro do sólido praticamente inexistem, modelos matemáticos mais simples podem ser utilizados para descrever o teor de umidade médio ao longo do processo. Segundo Marinos - Kouris e Maroulis (1995) para materiais higroscópicos porosos, durante o período de taxa decrescente, a taxa de secagem é proporcional à diferença instantânea entre o teor de umidade médio do material e o teor de umidade de equilíbrio higroscópico. Para esta suposição, as condições do ar de secagem são mantidas constantes. Matematicamente pode-se escrever:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\hat{k}(\bar{M} - \bar{M}_e) \quad (2.9)$$

A constante de secagem \hat{k} , na equação (2.9), incorpora todos os efeitos e parâmetros que influenciam o processo tais como: difusividade de massa, mudanças na estrutura do material, encolhimento etc.

Situações em que gradientes de umidade dentro do material são desprezíveis ocorrem quando se tem uma secagem muito lenta, como por exemplo para secagem a baixa temperatura e baixa velocidade do ar de secagem, que proporcionam baixos coeficientes de transporte convectivo de massa, ou seja, baixo número do Biot de massa.

Lima (2001) representa o problema de secagem através do modelo de análise concentrada analisando a influência de diversos parâmetros adimensionais na taxa de secagem, dentre os quais P^* e S^* . O parâmetro P^* é função da geração interna de umidade no interior do corpo, e o parâmetro S^* depende da relação área /volume e do comprimento característico do corpo. O autor concluiu que a taxa de aquecimento do sólido cresce com o aumento de P^* e S^* .

Silva (2002) utilizando um modelo de análise concentrada descreve o processo de secagem de sólidos incorporando fenômenos simultâneos de transporte de calor e massa. Segundo o autor, os modelos concentrados, em resumo, descrevem as taxas de transferência de calor e massa para o sólido inteiro, ignorando a resistência interna ao fluxo de calor e massa. Este trabalho analisa a influência de diversos parâmetros adimensionais que envolvem dimensões geométricas do corpo e propriedades do ar de secagem na cinética de secagem do sólidos com formas arbitrárias.

Almeida (2003) modelou a secagem de um sólido com geometria arbitrária usando uma análise concentrada. O autor considerou o sólido sendo heterogêneo, constituído de dois materiais diferentes, limitados em regiões distintas, com uma área de contato entre eles. Almeida (2003) concluiu que quanto maior forem as diferenças entre as propriedades físicas dos materiais em relação àquelas propriedades considerando o sólido homogêneo, maior é o erro cometido na análise da transferência de calor e massa. Foi notado que a densidade tem maior influência na transferência de massa enquanto que a condutividade térmica influi mais fortemente na transferência de calor.

2.10 Lentilha: Aspectos científicos e tecnológicos

2.10.1 Histórico

Registros da presença da lentilha remonta ao ano de 8000 A.C, no norte da Síria. No entanto, o seu cultivo parece estar associado ao início do cultivo do trigo e da cevada no Oriente Próximo.

Em geral, as leguminosas contribuem significativamente para a dieta alimentar de uma determinada população humana destacando-se a lentilha como uma excelente fonte de proteínas, vitamina A e cálcio. A lentilha é uma das fontes mais baratas de proteínas, já que este componente é responsável por 26% da constituição total da semente.

A produção de lentilhas no mundo se destaca na Ásia e nos países que rodeiam o mar Mediterrâneo. Embora a produção de lentilha seja de pouca importância em termos mundiais, em algumas regiões como no oeste da Ásia e norte da África, sua produção é básica para a economia e alimentação de diversos países.

Em países como a Índia, Espanha, Turquia, Síria e Chile, é constatado o maior consumo dessa leguminosa (1 kg / pessoa / ano), entretanto, no Brasil este consumo é muito menor, em parte devido à falta de hábito e ao alto preço no mercado. Da produção mundial de lentilha, 16% é destinado ao mercado internacional. O Brasil é um dos países que importa a lentilha para suprir as suas necessidades domésticas, já a Índia consome toda sua produção interna (Manara *et al.*, 1992).

No Brasil, nas regiões de cerrado, a lentilha é cultivada no regime de irrigação. As condições climáticas características dessas regiões durante o inverno, ao não favorecerem o desenvolvimento de doenças, estimulam o cultivo da lentilha em maior escala e com bons rendimentos. No Brasil, em média, o rendimento da produção da lentilha é variável de ano para ano. No entanto, na região central do País o rendimento é semelhante ao dos Países de maior produtividade.

2.10.2 Características Gerais.

A lentilha pertence à ordem Rosales, família Leguminosae, subfamília Papilionoidae, gênero *Lens*. Seu nome botânico é *Lens culinaris* Medik, embora seja também conhecida co-

mo *Lens esculenta* Moench. Além da espécie *culinaris* que inclui a lentilha comestível, existem mais quatro espécies selvagens que não apresentam valor comercial.

As sementes de lentilha apresentam uma forma típica de lente biconvexa, com diâmetro variando entre 2 e 9 mm. O tegumento externo pode ser verde, rosa, preto, marrom ou cinza. A superfície do tegumento que geralmente é lisa, pode em alguns casos apresentar rugosidades. O hilo é fino e elíptico. O cotilédones podem ser verdes, amarelos ou laranja, no entanto, todos tornam-se amarelados depois de um certo período de estocagem. Na Figura 2.1 é mostrada uma semente de lentilha (Tang e Sokhansanj, 1994).

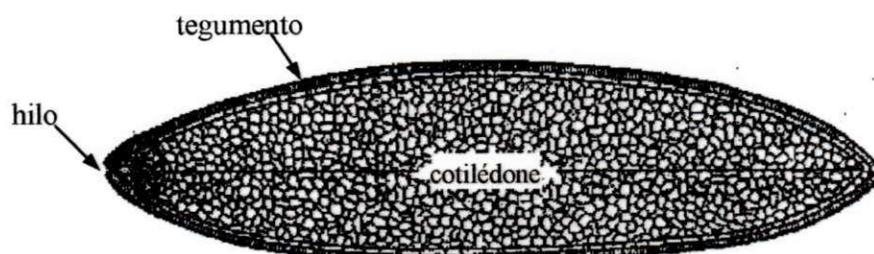


Figura 2.1– Diagrama esquemático da estrutura da lentilha.

Os cotilédones, que representam aproximadamente 94% do peso total da semente, são revestidos por uma fina película exceto na região ocupada pelo pequeno hilo. O hilo é uma pequena abertura com 1.5 mm de comprimento por 8 μ m de abertura.

A Figura 2.2 mostra lentilhas com diferentes teores de umidade. Pode-se notar claramente que as lentilhas com alto teor de umidade, um maior volume.



Figura 2.2 – Lentilhas com diferentes teores de umidade

2.10.3 Propriedades termo-físicas da lentilha

Com a produção da lentilha sendo mecanizada e o período da sua colheita indeterminado, quase sempre é necessário uma secagem artificial do produto; idealmente esta secagem deve ser feita de tal forma que o grão fique invulnerável ao ataque de insetos e microorganismos e que ainda seja preservado de danos mecânicos.

Para o projeto completo de um sistema de secagem, o conhecimento das propriedades físicas e estruturais do produto a ser seco é de fundamental importância. Segundo Tang e Sokhansanj (1993b), limitadas pesquisas sobre as propriedades físicas da lentilha têm sido apresentadas na literatura. A microestrutura interna da lentilha foi estudada por Hugues citado por Tang e Sokhansanj (1993b) e, a resistência de um volume de lentilha a um fluxo de ar foi estudado por Sokhansanj et al. (1990). A análise de outras propriedades físicas da lentilha que afetam diretamente a sua cinética de secagem serão apresentadas a seguir.

O processo de secagem de um produto higroscópico resulta da transferência de calor e massa entre o produto e o ar de secagem. Neste processo, normalmente a temperatura do produto aumenta e o seu teor de umidade diminui; em se tratando de produtos biológicos (grãos, verduras, frutas, leguminosas...), o processo de secagem normalmente é acompanhado de uma variação de volume do produto. Enquanto uma expansão térmica e uma contração higroscópica acontece, pode-se notar que o efeito de contração é predominante na maioria dos casos. Contrações localizadas no interior do grão podem ser excessivas, resultando em tensões suficientes para causar fendas ou até mesmo quebrar o produto.

O coeficiente de encolhimento higroscópico tem sido incorporado na análise de problemas de difusão por vários autores tais como Cranck (1992) e Lima(1999). Tang e Sokhansanj (1993b) estudaram o efeito do teor de umidade e das condições de secagem na densidade, volume, área superficial e porosidade da espécie de lentilha (Laird Lentil). Neste estudo Tang e Sokhansanj (1993b), foi determinado o coeficiente de encolhimento da lentilha para diversas condições do ar de secagem.

O Coeficiente de encolhimento volumétrico B_v foi determinado a partir da definição.

$$B_v = \frac{dv/v}{dM} \quad (2.10)$$

Considerando o coeficiente de encolhimento volumétrico constante durante o processo de secagem, a integração da equação resultará em:

$$V = V_0 e^{-B_v(\bar{M}_t - \bar{M})} \quad (2.11)$$

onde \bar{M} é o teor de umidade em base seca (b.s)

Ajustando a equação (2.11) a dados experimentais, os autores determinaram valores de B_v para quatro condições do ar de secagem. Para uma redução do teor de umidade de 24% até 5% (base seca) os autores determinaram para a lentilha uma redução de 17% no seu volume e 12% na sua área superficial.

A equação (2.11) determina o volume do grão em qualquer estágio da secagem, ou seja, para qualquer teor de umidade do produto. Lima (1999), utilizou uma equação equivalente a esta, mas de forma linear, para considerar o efeito do encolhimento no processo de secagem de bananas.

O conhecimento das propriedades térmicas dos grãos - condutividade térmica e calor específico - são fundamentais para o projeto de secadores bem como prever a taxa de secagem e distribuição de temperatura no interior do grão, quando este é submetido a diferentes condições de secagem, umidificação, resfriamento ou aquecimento.

A condutividade térmica dos produtos biológicos é afetada pelo seu teor de umidade, temperatura e densidade. Para a determinação da condutividade térmica de um produto biológico normalmente são usados dois métodos: O de fluxo de calor transiente e o estacionário. Segundo Alagusundaram *et al.* (1991), são desvantagens do método estacionário, o longo tempo para se atingir o regime estacionário e a existência de transferência de calor por migração de umidade e convecção natural. No método transiente essas preocupações são eliminadas usando-se por exemplo o método de investigação desenvolvido por Hooper e Lepper, citados por Alagusundaram *et al.* (1991). Este método consiste de um filamento como fonte de calor que é aquecido a uma taxa constante, colocado no centro de uma amostra com distribuição de temperatura inicial uniforme.

Alagusundaram *et al.* (1991) concluíram que a condutividade térmica da lentilha cresce com o aumento do teor de umidade num intervalo de 9% até 23% e com aumento da tempera-

tura num intervalo de $-28\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $29\text{ }^{\circ}\text{C}$. Os autores propuseram um modelo empírico para relacionar a condutividade térmica com a temperatura e o teor de umidade dado por:

$$K = B_1 + B_2 T + B_3 \bar{M} \quad (2.12)$$

onde T é dado em $^{\circ}\text{C}$, \bar{M} em (kg/kg), (b.s)

Encontraram os seguintes valores para as constantes B_1 , B_2 e B_3 .

$$B_1=0.193\text{ (W/m/K)}, \quad B_2=7,51 \times 10^{-4}\text{ (W/m.s/K)}, \quad \text{e } B_3=1,51 \times 10^{-3}\text{ (W/m/K)},$$

Outra propriedade cujo conhecimento é fundamental para a otimização do processo de secagem e estocagem de um grão é o calor específico. Um dos métodos para se determinar esta propriedade é o Differential Scanning Calorimetry (DSC). Este método foi utilizado por Tang et al. (1991) para determinar o calor específico da lentilha, sendo encontrados valores entre $0,81$ e $2,2\text{ kJ/kgK}$, para variadas condições físicas do grão.

O teor de umidade nos produtos agrícolas tem um significativo efeito no seu calor específico, devido ao alto valor do calor específico da água. A temperatura também tem efeito no calor específico de materiais orgânicos, no entanto esta dependência geralmente tem sido ignorada em trabalhos de secagem em grãos. Em geral o calor específico de lentilhas aumenta linearmente com o aumento da temperatura, mas não linearmente com o teor de umidade. A variação do calor específico é maior para baixos teores de umidades (Tang et al.1991). Baseando-se em equações que levam em conta o calor específico do material seco e da água nele contida, os autores realizaram ajustes com dados experimentais, chegando à seguinte relação para o calor específico da lentilha:

$$c = 0,5773 + 0,00709 T + (6,22 - 9,14 \bar{M}) \bar{M} \quad (2.13)$$

onde T é dado em $^{\circ}\text{C}$, \bar{M} em (kg/kg) (b.s)

Esta equação é válida para as seguintes faixas da temperatura e do teor de umidade.

$$10\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T \leq 80\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \text{e} \quad 0,02 \leq \bar{M} \leq 0,35$$

Para a simulação da cinética de secagem de um grão submetido a uma determinada condição de secagem, normalmente é necessário o conhecimento dos teores de umidade inicial e de umidade de equilíbrio do grão, para os valores da temperatura e da umidade relativa deste ar.

O critério (AACC, 1983) providencia um dos métodos gerais para a determinação do teor de umidade de um produto agrícola. Este método utiliza uma amostra de um determinado grão colocada em um forno com convecção forçada de ar a 130 °C durante 60min.

O teor de umidade de equilíbrio de um produto é obtido através do levantamento de curvas denominadas isotermas de sorção. Um grande número de modelos tem sido sugerido na literatura para estimar a dependência entre o teor de umidade de equilíbrio de um grão e a umidade relativa do ar; alguns deles consideram explicitamente a influência da temperatura do ar nas equações que caracterizam o modelo.

A água existente no interior do grão que constitui o que se denomina de teor de umidade de monocamada tem uma significativa importância para as propriedades físicas e química do material, com relevância para a oxidação de lipídios, atividade enzimática, preservação do sabor e características estruturais (Labuza et al., Karel e Yong, citados por Menkov, 2000). O teor de umidade de monocamada pode ser obtido a partir do modelo de isotermas de sorção proposto pela equação de BET (Brauner – Emmet – Teller) que é válida para valores da umidade relativa do ar menores que 0,45.

Menkov (2000) obteve as isotermas de sorção para lentilhas, para quatro temperaturas diferentes do ar de secagem, possibilitando assim determinar o teor de umidade de monocamada como uma função da temperatura. Na Figura 2.3 encontram-se as isotermas de sorção da lentilha, reportadas por Iglesias e Chiriffe (1982).

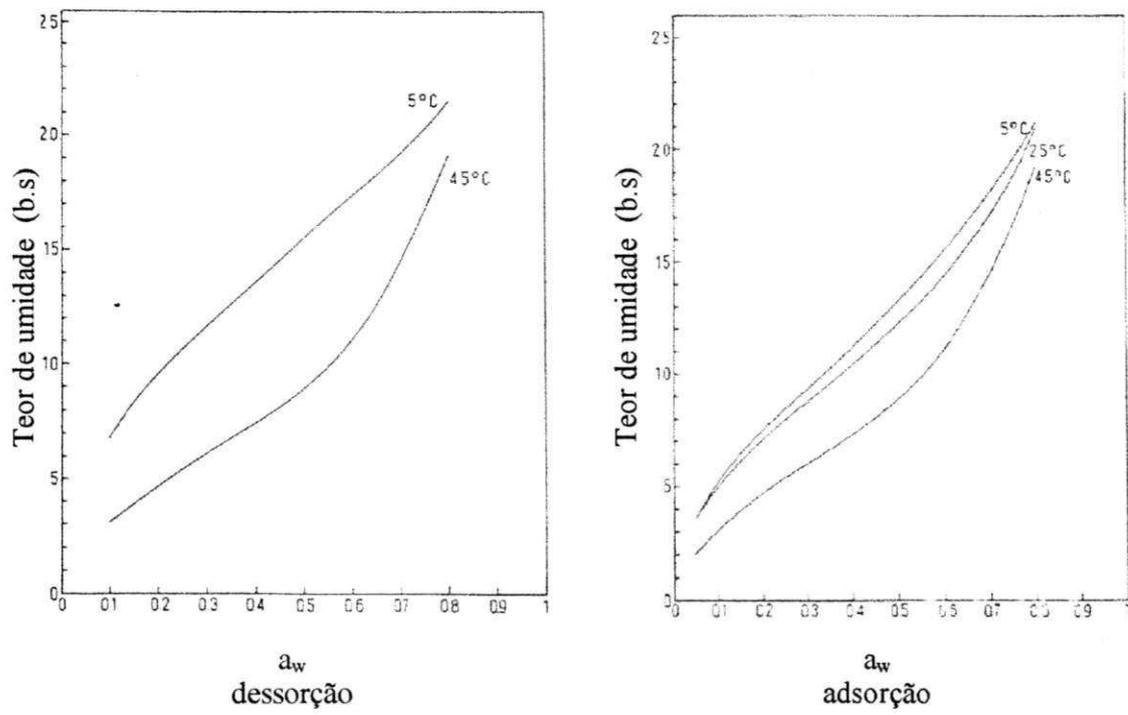


Figura 2.3 – Isothermas de sorção da lentilha

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 Modelagem de processos físicos

As análises e previsões de um determinado processo físico geralmente são feitas a partir da solução de uma ou mais equações diferenciais que descrevem o problema. A solução é obtida conhecendo-se a priori as condições iniciais e de contorno da grandeza física que define o processo. Em vários problemas, as condições de contorno são tais que devem ser especificadas sobre superfícies esféricas, cilíndricas ou esferoidais. Nestes casos, a equação diferencial em coordenadas cartesianas não é a forma adequada para se resolver o problema, e outro sistema de coordenadas deve ser utilizado.

A predição da secagem de sólidos úmidos envolve a solução de equações para transferência de calor e massa simultaneamente. Naturalmente, o tratamento matemático deste problema é muito complicado. Para reduzir esta complexidade, simplificações são geralmente efetuadas nos modelos. Uma delas é assumir que o processo de secagem seja independente dos efeitos dos gradientes de temperatura dentro do sólido.

A descrição matemática de um fenômeno é tanto mais complexa quanto mais o modelo utilizado se aproxima da realidade. Em processos de secagem pode haver um encolhimento do material e os coeficientes de difusão podem variar com o teor de umidade e/ou temperatura. Desta forma, uma representação matemática deste problema pode resultar em equações não

lineares, tornando a solução analítica difícil de ser obtida. Nestes casos, por serem mais gerais e incorporarem com facilidade as mudanças sofridas pelo sólido durante o processo, uma solução numérica para o problema é recomendável. As soluções analíticas e/ou numéricas da equação de difusão para vários casos, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constantes ou de tipo convectivo, para várias geometrias, podem ser encontradas em Carslaw e Jaeger (1959); Luikov (1968); Kakaç e Yener (1993); Crank (1992) Gebhart (1993); Nascimento (2001), todos para paralelepípedo, cilindro e esferas. Para esferóides prolatos podem ser citados os trabalhos de Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Lima et al. (1997), Lima e Nebra (1997), Lima (1999), Lima (2000), Lima (2001), enquanto que para esferóide oblato citam-se Haji-Sheikh (1986), Carmo (2000), Carmo e Lima (2000), Silva (2002) e Almeida (2003).

O objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento e solução numérica de um modelo de difusão de calor e massa em corpos sólidos com geometria do tipo esferoidal oblata. A seguir, é apresentada uma metodologia para se obter a equação (2.3) formulada no sistema de coordenadas esferoidais oblatas.

3.2 A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais oblato

A equação de difusão (Fick ou Fourier) no sistema de coordenadas cartesianas para o caso tridimensional é dada por:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^* \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^* \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^* \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

Como mencionado, esta equação é ideal para descrever o problema de difusão de massa em placas retangulares e em corpos com a forma geral de um paralelepípedo. Para sólidos esferoidais oblatos, o sistema adequado é o esferoidal oblato.

Na Figura 3.1 encontram-se as principais características de um corpo com a geometria esferoidal oblata. Para $L_2/L_1=1,00$ tem-se uma esfera e para $L_2/L_1 \rightarrow \infty$, o esferóide oblato tende a um disco circular.

As relações entre o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o esferoidal oblato (μ, φ, ω), são as seguintes (Magnus *et al.*, 1966).

$$x = L \cosh \mu \sin \phi \cos \omega \quad (3.2a)$$

$$y = L \cosh \mu \sin \phi \sin \omega \quad (3.2b)$$

$$z = L \sinh \mu \cos \phi \quad (3.2c)$$

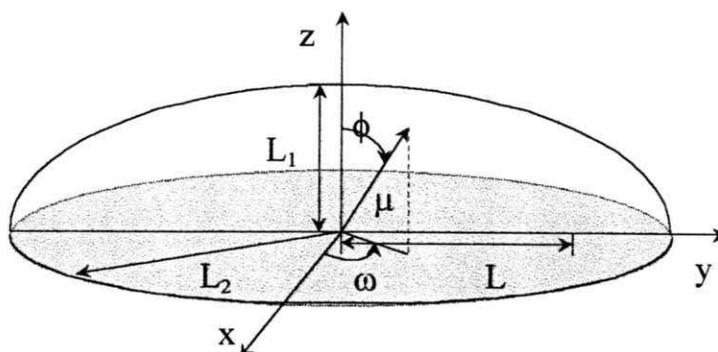


Figura 3.1 – Características de um corpo esferoidal oblato

Da Figura 3.1 têm-se também as seguintes relações.

$$\epsilon = L_2/L \quad (3.3a)$$

$$L_1 = L\sqrt{\epsilon^2 - 1} \quad (3.3b)$$

então, combinando as equações (3.3a) e (3.3b), pode-se mostrar que:

$$L = \sqrt{L_2^2 - L_1^2} \quad (3.3c)$$

Considerando as seguintes variáveis:

$$\xi = \sinh \mu \quad \eta = \cos \phi \quad \zeta = \cos \omega \quad (3.4)$$

e por substituição direta nas equações (3.2a-c), obtém-se:

$$x = L\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \zeta \quad (3.5a)$$

$$y = L\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.5b)$$

$$z = L \xi \eta \quad (3.5c)$$

O domínio das novas variáveis esferoidais ξ , η e ζ (em termos de ω) e relacionada com a Figura 3.1 é definido por:

$$0 \leq \xi \leq L_1/L \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (3.6)$$

Informações adicionais sobre o sistema de coordenadas esferoidal oblato podem ser encontradas em Page e Adams (1938); Page (1944a); Page (1944b); Aoi (1955); Stratton et al. (1941), Robin (1959), Acho (1992); Do-Nhat e MacPhie (1996 a e b) e Carmo (2000).

A equação de difusão no novo sistema de coordenadas será obtida a seguir, baseando-se na metodologia utilizada por Maliska (1995). A equação de conservação, aplicada a um volume de controle e escrita de forma a ser utilizada em qualquer sistema de coordenadas, é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\lambda \tilde{u} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\lambda \tilde{v} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\lambda \tilde{w} \Phi) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - P^\phi + S^\phi \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde J é denominado o jacobiano da transformação e pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Os outros termos da equação (3.7) são definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{a'}{J^2}; & \alpha_{22} &= \frac{b'}{J^2}; & \alpha_{33} &= \frac{c'}{J^2} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{d'}{J^2}; & \alpha_{31} = \alpha_{13} &= \frac{e'}{J^2}; & \alpha_{32} = \alpha_{23} &= \frac{f'}{J^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde:

$$a' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2$$

$$b' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2$$

$$c' = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2$$

$$d' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)$$

$$e' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

$$f' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

Um sistema de coordenadas é dito ser ortogonal se os vetores que definem o sistema forem ortogonais entre si. As condições necessárias e suficientes para que um sistema de coordenadas seja ortogonal são (Mac Robert, 1967):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$$

Pode-se verificar através das equações (3.10) que o sistema de coordenadas esferoidal oblato é um sistema ortogonal. Neste caso, os termos d' , e' e f' na equação (3.9) valem zero. Considerando que o problema é puramente difusivo e sem geração de massa, a equação (3.7) se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.11)$$

Determinando-se os valores do jacobiano e dos Coeficientes α_{11} , α_{22} e α_{33} , obtêm-se:

$$J^{-1} = \frac{L^3(\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\alpha_{11} = \frac{L^4(1+\xi^2)(\xi^2 + \eta^2)}{1-\zeta^2}$$

$$\alpha_{22} = \frac{L^4(1-\eta^2)(\xi^2 + \eta^2)}{1-\zeta^2}$$

$$\alpha_{33} = \frac{L^4(\xi^2 + \eta^2)^2}{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}$$

Substituindo os valores do Jacobiano e dos Coeficientes α_{11} , α_{22} e α_{33} tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda \Phi)}{\partial t} &= \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1-\zeta^2}) \Gamma^\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta é a equação de difusão escrita no sistema de coordenadas esferoidais oblato.

Como o sólido apresentado na Figura 3.1 é resultante da rotação de uma superfície elíptica em torno do eixo z, existe uma simetria em torno deste eixo e a derivada $\partial/\partial \omega$ será zero, implicando que $\partial/\partial \zeta = 0$. Por conseguinte o terceiro termo da equação (3.12) é zero, reduzindo-a à seguinte forma:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma^{\dagger} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma^{\dagger} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] \quad (3.13)$$

Outras quantidades transformadas podem ser obtidas através das seguintes relações (Magnus et al., 1966; Brodkey, 1967; Abromowitz e Stegun, 1972 e Kreyszig 1988):

▪ Volume diferencial:

$$dV = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.14)$$

▪ Áreas diferenciais de fluxo de Φ :

$$dS_{\xi} = \frac{1}{\hat{U}\hat{W}} d\eta d\zeta \quad (3.15)$$

$$dS_{\eta} = \frac{1}{\hat{V}\hat{U}} d\zeta d\xi \quad (3.16)$$

$$dS_{\zeta} = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta \quad (3.17)$$

▪ Gradiente de Φ

$$\nabla\Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \hat{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \hat{W} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.18)$$

onde:

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.21)$$

Os parâmetros \hat{U} , \hat{V} , e \hat{W} são chamados de coeficientes métricos da transformação. É possível demonstrar que o produto dos Coeficientes métricos dá como resultado o próprio jacobiano da transformação (J). Com a substituição dos coeficientes métricos nas equações de (3.14) a (3.18), obtém-se:

$$dV = \frac{L^3 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.22)$$

$$dS_\xi = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) (\xi^2 + 1)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\eta d\zeta \quad (3.23)$$

$$dS_\eta = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) (1 - \eta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\zeta \quad (3.23a)$$

$$dS_\zeta = \frac{L^2 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 + 1) (1 - \eta^2)}} d\xi d\eta \quad (3.23b)$$

$$\nabla\Phi = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.24)$$

A área superficial de um esferóide oblato é dada por (Selby, 1971):

$$S = 2\pi L_2^2 + \frac{\pi L_1^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \right) \quad (3.25)$$

O volume de um esferóide oblato é obtido pela integração da equação (3.22) sobre todo o domínio físico, e é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \pi L_1 L_2^2 \quad (3.26)$$

3.3 Solução numérica da equação de difusão para corpos esferoidais oblato

Soluções analíticas de problemas difusivos com geometrias dos tipos retangular, cilíndrica ou esférica que usam técnicas que transformam a equação diferencial parcial de difusão em equações lineares são facilmente encontradas em livros textos ou trabalhos científicos. Quando a representação matemática do problema exige equações não-lineares ou a utilização de geometrias complexas, diferentes das citadas acima, a solução analítica em geral se torna bastante complexa e de difícil obtenção. Nestes casos, uma solução numérica para a equação é mais apropriada, ou, muitas vezes a única possível. Com o advento dos computadores com memórias e velocidades de operação cada vez maiores, aliado ao número crescente de profissionais trabalhando com técnicas numéricas, a solução de um determinado problema físico utilizando-se de técnicas computacionais vem se tornando cada vez mais viável.

Um determinado método numérico, em síntese, transforma a equação diferencial parcial que descreve o problema, em um conjunto ou sistema de equações algébricas lineares. A solução deste sistema resulta nos valores da grandeza física que está sendo analisada, em pontos discretos do domínio de interesse.

Pode-se encontrar com facilidade na literatura atual o desenvolvimento de várias técnicas numéricas. Normalmente, cada termo da equação envolvendo as diferenciais, é aproximado por somas ou diferenças de valores pontuais da grandeza física representativa do fenômeno, localizadas em pontos discretos do domínio, denominados de pontos nodais. Neste trabalho, será utilizado o método dos volumes finitos para a obtenção do sistema de equações algébricas.

Naturalmente existem outros métodos que poderiam ser empregados aqui, tais como: elementos finitos, diferenças finitas e elementos de fronteira. Várias discussões sobre cada um destes métodos podem ser encontradas nos trabalhos de Patankar (1980); Shih (1984); Maliska (1995) e Minkowicz et al., (1988).

3.3.1 Discretização da equação de difusão.

A formulação numérica para um problema qualquer começa com a identificação do domínio de interesse e, a partir daí sua subdivisão em um número finito de sub-domínios. A proposta deste trabalho é a difusão de massa no sólido ilustrado na Figura 3.1. Nesta figura pode-se observar planos de simetria que passam pelos pontos $(x=0, y=0, z=0)$ e $(x=0, y=L_2,$

$z = 0$), em particular, o plano xy perpendicular ao eixo z . Outros planos de simetria passam pelos pontos $(x=0, y=0, z=0)$ e $(x=0, y=0, z = L_1)$, particularmente o plano zy perpendicular ao eixo x .

Na Figura 3.2 são mostradas as linhas com ξ e η constantes, que delimitam cada um dos pontos nodais “P”, distribuídos ao longo do domínio. Os pontos nodais N, S, E, W vizinhos a “P”, bem como as respectivas dimensões e distâncias de P a seus vizinhos também são mostrados.

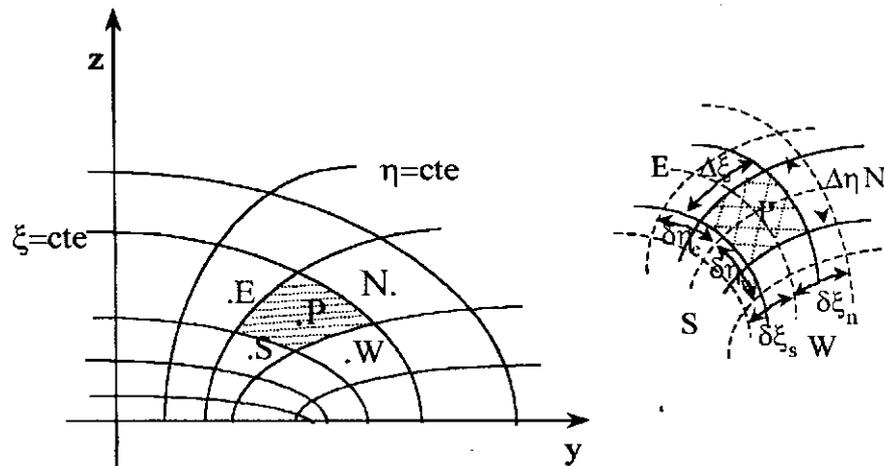


Figura 3.2 – Superfície contínua subdividida em pontos nodais

A interseção das linhas ξ e η em torno dos pontos “P” definem a malha numérica. Como já mencionado anteriormente, o sistema esférico oblato é ortogonal, então, o cálculo do fluxo de Φ através das faces do volume de controle é facilitado, pois as linhas que unem dois pontos nodais são perpendiculares à face (por exemplo, a linha PN na Figura 3.2).

O método dos volumes finitos consiste na integração da equação 3.11 para cada volume de controle, ao longo de toda a malha mostrada na Figura 3.2. Assumindo uma formulação totalmente implícita, isto é, o valor da variável Φ em um ponto nodal é admitido ser constante durante todo o intervalo de tempo Δt , e igual ao valor de Φ no instante $t + \Delta t$, integrando-se a equação 3.11, no volume e no tempo para todos os pontos internos do volume de controle tem-se que (Patankar, 1980; Maliska, 1995) :

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^o \Phi_p^o}{\Delta t} \right] = \left[\left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.27)$$

Na equação (3.27), os coeficientes D_{ij} , para $i = j$ e ΔV valem:

$$D_{11} = \Gamma^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta \Delta \zeta \quad D_{22} = \Gamma^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi \Delta \zeta \quad \Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \quad (3.28)$$

A principal vantagem da utilização do procedimento totalmente implícito é que este é incondicionalmente estável (Patankar, 1980). Para o problema proposto, leva-se em conta apenas efeitos difusivos; nestes casos, é razoável utilizar uma função linear como função de interpolação espacial entre os pontos nodais. Desta forma a aproximação para as derivadas pode ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n &= \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta \xi_n} & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s &= \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta \xi_s} \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e &= \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta \eta_e} & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w &= \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta \eta_w} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.28) e (3.29), juntamente com os valores conhecidos de J e α_{ij} na equação (3.27), obtêm-se a equação de difusão na forma algébrica, aplicada para cada ponto "P" do domínio de interesse, dada por:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_P^0 \Phi_P^0 \quad (3.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{\Gamma_n^\phi L (\xi_n^2 + 1)}{\delta \xi_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \Delta \eta & A_S &= \frac{\Gamma_s^\phi L (\xi_s^2 + 1)}{\delta \xi_s \sqrt{1 - \zeta_s^2}} \Delta \eta \\ A_E &= \frac{\Gamma_e^\phi L (1 - \eta_e^2)}{\delta \eta_e \sqrt{1 - \zeta_e^2}} \Delta \xi & A_W &= \frac{\Gamma_w^\phi L (1 - \eta_w^2)}{\delta \eta_w \sqrt{1 - \zeta_w^2}} \Delta \xi \\ A_P^0 &= \frac{\Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_P^2 + \eta_P^2) \lambda_P^0}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta_P^2}} & A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_P \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t (\sqrt{1 - \zeta_P^2})} \end{aligned}$$

Para a integração espacial nos volumes de fronteira, deve-se especificar os fluxos difusivos através dos pontos “f”. Três diferentes tipos de condições de contorno podem ser utilizadas: ϕ prescrito, fluxo de ϕ prescrito e convecção.

▪ Φ prescrito

$$\Phi'' = \Gamma_n^\phi \left(\frac{\Phi_n - \Phi_p}{\delta \xi_n} \right) \quad (3.32)$$

onde Φ_n é a propriedade especificada na fronteira.

▪ Fluxo de Φ prescrito

$$\Phi'' dS_\xi = \text{valor conhecido} = D_{11} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n \quad (3.33)$$

Neste caso, o valor de Φ'' deve ser substituído pelo valor prescrito do fluxo na fronteira.

▪ Convecção

Neste caso, o fluxo difusivo que atravessa a fronteira é igual ao fluxo convectivo nas vizinhanças da mesma.

$$\Phi_f'' = h_m (\Phi_p - \Phi_\infty) = \text{fluxo convectivo} \quad (3.34)$$

Nas equações (3.32), (3.33) e (3.34), se Φ representar o teor de umidade, $\Phi'' dS_\xi$ e $\Im \Phi_f'' dS_\xi$ representarão o fluxo de água que atravessa uma face do volume de controle.

A integração da equação de difusão (equação 3.11) para os volumes de fronteira (ponto “P” da Figura 3.2) dará o seguinte resultado :

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0}{\Delta t} \right] = \left[\Im \Phi_f'' dS_\xi - \left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.35)$$

Comparando a equação (3.35) com a equação (3.27), vê-se que o termo representativo do fluxo através da fronteira norte foi substituído por $\mathfrak{I}\Phi_f^* dS_z$. Isto é devido ao fato de que para pontos nodais localizados na fronteira, não existindo um valor definido para o ponto vizinho Φ_N , não existirá o termo $A_N\Phi_N$ que aparece na equação (3.27). No lugar deste termo aparecerá o fluxo especificado pela condição de contorno. Este procedimento para a discretização dos pontos nos volumes de fronteira não é único, outra alternativa, por exemplo, seria a criação de volumes fictícios em torno da fronteira do corpo. Esta técnica, descrita em Maliska (1995), tem como principal desvantagem o aumento do tamanho da malha numérica, implicando em maior tempo e esforço computacional. Na equação (3.35), D_{11} e D_{22} tem o mesmo significado já mencionado anteriormente. Para o caso de difusão de massa \mathfrak{I} é igual a ρ e, para o caso de difusão de calor $\mathfrak{I} = 1$.

3.4 Modelos difusionais

Até então, foi desenvolvida uma formulação geral para a transformação de sistemas de coordenadas e a discretização da equação de difusão, ou seja, a obtenção de um sistema de equações lineares a partir da equação diferencial que descreve o problema. A solução deste sistema de equações dará os valores das propriedades em estudo, nos pontos discretos pertencentes ao domínio computacional escolhido. Este sistema de equações define de forma geral qualquer problema de difusão em uma geometria esférica oblata. A seguir, 4 modelos para o problema de difusão serão apresentados, cada um apresentando modificações nas condições de contorno e/ou propriedades de transportes características do processo. Primeiramente, será descrito o problema de secagem de sólidos com condição convectiva na superfície, levando em conta o fenômeno de encolhimento do sólido durante o processo. No segundo modelo, os fenômenos de transporte de calor e massa serão acoplados na superfície do produto; o terceiro modelo descreverá a secagem de forma intermitente e, o quarto modelo, além do encolhimento do produto e acoplamento do fenômeno de transporte de calor e massa, considerará variáveis as propriedades de transporte no interior do produto.

3.4.1 Modelo I – Modelo difusional de massa com condição convectiva na superfície, considerando o fenômeno de encolhimento e propriedades constantes.

3.4.1.1 Formulação analítica

- Transporte de massa

As seguintes simplificações para a formulação matemática do problema foram consideradas:

- a) O produto é assumido ser homogêneo e isotrópico;
- b) O processo de difusão na partícula individual ocorre sob taxa decrescente;
- c) Os processos de transferência de calor e massa através do esferóide oblato são independentes um do outro;
- d) O campo do teor de umidade é considerado ser axi-simétrico em torno do eixo z, constante e uniforme no início do processo;
- e) As propriedades termo-físicas são constantes, durante o processo, isto é, são independentes da posição e do teor de umidade no interior do produto;
- f) Não há efeito de capilaridade;
- g) O volume do sólido é assumido ser linearmente dependente do teor de umidade;
- h) O processo ocorre sob condição convectiva, com o teor de umidade na superfície dependente da posição angular e do tempo.

Para esta situação, a equação (3.13) que agora representa o transporte de massa, assumirá a seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \quad (3.36)$$

As condições iniciais e de contorno para este problema de difusão são as seguintes:

- Superfície livre: Fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo de umidade.

$$\frac{-D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_f} = h_m [M(\xi = \xi_f; \eta; t) - M_e] \quad (3.37)$$

onde $\xi_f = L_1/L$ representa a superfície do sólido.

- Planos de simetria : os gradientes radiais e angulares do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi, 1, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi, 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(0, \eta, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.38)$$

- Condição inicial no interior do sólido.

$$M(\xi, \eta, 0) = M_0 = \text{constante} \quad (3.39)$$

Para generalizar os resultados, uma prática comum e bastante recomendável na literatura é obter a equação de difusão na forma adimensional. O problema, ao ser apresentado nesta forma, tem uma solução independente de valores particulares de cada um dos parâmetros D , t , L_1 e L_2 , dependendo apenas de valores globais tais como o número de Fourier, número de Biot de transferência de massa e a razão de aspecto do sólido.

Para se obter a equação de difusão na forma adimensional considere as definições das seguintes variáveis adimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_e}{M_0 - M_e}, \quad \eta^* = \eta, \quad \xi^* = \xi, \quad t_m^* = \frac{Dt}{L^2}, \quad V^* = \frac{V}{L^3}, \quad Bi_m = \frac{h_m L}{D} \quad (3.40 \text{ a-d})$$

Por substituição das equações (3.40 a-d) e suas derivadas na equação (3.36), tem-se a seguinte equação na forma adimensional:

$$\frac{\partial M^*}{\partial t_m^*} = \frac{1}{[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2]} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^*} [(\xi^*)^2 + 1] \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \right\} + \frac{1}{[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2]} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta^*} [1 - (\eta^*)^2] \frac{\partial M^*}{\partial \eta^*} \right\} \quad (3.41)$$

Na formulação onde são consideradas as variáveis adimensionais, as condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$M^*(\xi^* = \xi_r; \eta^*; t_m^*) = \frac{-1}{Bi_m} \sqrt{\frac{\xi^{*2} + 1}{\xi^{*2} + \eta^{*2}}} \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^* = \xi_r} \quad M^*(\xi^*, \eta^*, 0) = 1 \quad (3.42a-b)$$

$$\frac{\partial M^*(\xi^*, 1, t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(\xi^*, 0, t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(0, \eta^*, t_m^*)}{\partial \xi^*} = 0 \quad (3.42c-e)$$

Aqui, t_m^* é designado por número de Fourier e Bi_m é o número de Biot de transferência de massa. O parâmetro t_m^* é definido como sendo a razão entre a taxa de difusão de massa no sólido e a taxa de acúmulo de massa no mesmo e o Bi_m é definido como a razão entre a resistência convectiva à transferência de massa e a resistência interna ao fluxo de massa, medidos na superfície do corpo (Incropera e DeWitt, 1990).

No modelo de difusão líquida, o transporte de umidade no sólido é gerado a partir de um gradiente do teor de umidade no interior do mesmo. Sabe-se também que o teor de umidade no interior do sólido durante o estado transiente do processo de difusão é uma função da posição e do tempo, logo, pode-se definir para o sólido um teor de umidade médio. Este teor de umidade médio é dado por (Whitaker, 1980):

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (3.43)$$

Na forma adimensional tem-se:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} M^* dV^* \quad (3.44)$$

ou ainda,

$$\bar{M}^* = \frac{1}{\int_0^1 \int_0^1 [(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2] d\xi^* d\eta^*} \int_0^1 \int_0^1 M^*(\xi^*, \eta^*) [(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2] d\xi^* d\eta^* \quad (3.45)$$

onde V^* é o volume total no domínio considerado ($0 \leq \xi \leq L_1/L$ e $0 \leq \eta \leq 1$)

- **O encolhimento do sólido**

O efeito do encolhimento do material sobre o processo de secagem será considerado, baseando-se no trabalho de Lima (1999). É proposta a seguinte equação para o cálculo do volume do corpo em um instante qualquer.

$$(V)_t = V_o (B_1 + B_2 \bar{M}) \quad (3.46)$$

Desde que em $t = 0$, $\bar{M} = \bar{M}_0$ e $(V)_t = V_o$, a partir da equação (3.46), têm-se:

$$B_1 = 1 - B_2 \bar{M}_0 \quad (3.47)$$

Considerando os parâmetros adimensionais, já definidos, substituindo a equação (3.47) na equação (3.46) têm-se:

$$\frac{(V^*)_t}{V_o^*} = 1 - B(\bar{M}_0^* - \bar{M}^*) \quad (3.48)$$

sendo $B = B_2(\bar{M}_0 - \bar{M}_c)$ o coeficiente de encolhimento do corpo.

Durante o processo de secagem, o volume do material muda com o tempo, conseqüentemente, os valores de L_1 e L_2 mudarão. Considera-se esta mudança de tal forma que a qualquer instante:

$$\frac{L_1}{L_2} = \text{constante} \quad (3.49)$$

Sabendo que o volume do esferóide oblato é dado pela equação (3.26), pode-se utilizar as equações (3.48), (3.49) e (3.26) para determinar a cada instante os novos valores de L_1 e L_2 .

Para a determinação de B_2 é admitido que em qualquer tempo, a variação de volume sofrida pelo corpo é igual ao volume da água evaporada. Se o teor de umidade é dado em base seca e sabendo-se que a variação de volume sofrida pelo corpo é igual a massa de água evaporada dividida pela densidade da água, pode ser mostrado que:

$$B_2 = \frac{\left(\frac{m_s}{V_o}\right)}{\rho_w} \quad (3.50)$$

ou ainda:

$$B_2 = \frac{\rho_{so}}{\rho_w} \quad (3.51)$$

onde $\rho_{so} = m_s/V_o$, pode ser considerada como uma densidade aparente da fase sólida no início do processo.

Na Figura 3.4 encontram-se as dimensões do corpo no instante $t = 0$ e em outro instante posterior qualquer 't'.

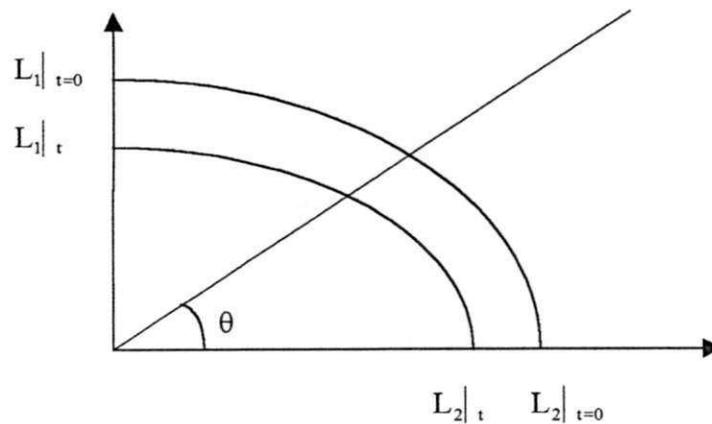


Figura 3.4 – Encolhimento do sólido esferoide oblato durante o processo de difusão.

3.4.1.2 Formulação numérica

Partindo da equação (3.41) e realizando-se um procedimento numérico similar ao que foi empregado anteriormente, pode ser obtida a seguinte equação algébrica para os pontos nodais pertencentes ao interior do domínio computacional:

$$A_P M_P^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_N M_N^* + A_S M_S^* + A_P^0 M_P^{*0} \quad (3.52)$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_E &= \frac{(1 - \eta_e^{*2})}{\delta \eta_e^*} \Delta \xi^*; & A_W &= \frac{(1 - \eta_w^{*2})}{\delta \eta_w^*} \Delta \xi^* \\
A_N &= \frac{(\xi_n^{*2} + 1)}{\delta \xi_n} \Delta \eta^*; & A_S &= \frac{(\xi_s^{*2} + 1)}{\delta \xi_s^*} \Delta \eta^* \\
A_P^0 &= \frac{(\xi_P^{*2} + \eta_P^{*2})}{\Delta t_m^*} \Delta \eta^* \Delta \xi^* & A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0
\end{aligned}$$

A equação (3.52) é válida para todos os elementos internos do domínio. Para a determinação das equações discretizadas válidas para os pontos de fronteira procede-se como se segue. Cada termo da equação (3.37) representa o fluxo de umidade por unidade de área que atravessa a superfície do sólido. Esta equação, discretizada, pode ser escrita na forma:

$$M_f'' = h_m [M_f - M_e] = \frac{D}{L} \sqrt{\frac{\xi_f^2 + 1}{\xi_f^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{M_P - M_f}{\delta \xi_s} \right) \quad (3.53)$$

Isolando o valor de M_f na equação (3.53) e substituindo-o no termo que representa o fluxo convectivo obtém-se:

$$M_f'' = \frac{(M_P - M_e)}{\frac{1}{h_m} + \frac{\delta \xi_s L}{D \sqrt{\frac{\xi_f^2 + 1}{\xi_f^2 + \eta_p^2}}}} \quad (3.54)$$

Considerando o fluxo nos pontos de fronteira dados pela equação (3.54) e a equação (3.35) com os parâmetros já definidos, pode-se obter agora a forma geral da equação discretizada, aplicadas aos pontos de fronteira submetidos à convecção.

$$A_P M_P^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_S M_S^* + A_P^0 M_P^{*0} \quad (3.55)$$

onde os termos A_E , A_w , A_S e A_p^0 , são idênticos aos apresentados na equação (3.52), sendo o coeficiente A_p agora dado por:

$$A_p = \sum A_K + A_p^0 + \overline{SM} \quad (3.56)$$

com:

$$\overline{SM} = \frac{\Delta\eta^*}{\frac{1}{\text{Bi}_m \left(\sqrt{(\xi_r^*)^2 + (\eta_p^*)^2} \right) \sqrt{(\xi_p^*)^2 + 1}} + \frac{\delta\xi_n^*}{(\xi_r^*)^2 + 1}} \quad (3.57)$$

A quantidade \overline{SM} é um termo fonte que contém o efeito convectivo na superfície e que é adicionado ao ponto nodal de fronteira. Esta é uma formulação geral para o modelo com condição convectiva na superfície. No caso particular do número de Biot ser infinito, este modelo recai num modelo com condição de equilíbrio na superfície (Carmo, 2000).

Os pontos situados nos planos de simetria não entram no sistema de equações a ser resolvido e são calculados separadamente. Os pontos situados na superfície do sólido são encontrados a partir da equação (3.54), na forma adimensional discretizada e são dados por:

$$M_r^* = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_m \delta\xi_s^*}{\sqrt{\frac{(\xi_r^*)^2 + 1}{(\xi_r^*)^2 + (\eta_r^*)^2}}} } \quad (3.58)$$

Nos pontos próximos aos eixos y e z , baseando-se na existência de simetrias do corpo, é razoável fazer as seguintes aproximações:

$$M^*(\xi^*, \eta^* = 0, t_m^*) = M^*(\xi^*, \eta^* = \frac{\Delta\eta}{2}, t_m^*) \quad (3.59a)$$

$$M^*(\xi^* = 0, \eta^*, t_m^*) = M^*(\xi^* = \frac{\Delta\xi}{2}, \eta^*, t_m^*) \quad (3.59b)$$

$$M^*(\xi^*, \eta^* = 1, t_m^*) = M^*(\xi^*, \eta^* = 1 - \frac{\Delta\eta}{2}, t_m^*) \quad (3.59c)$$

A equação (3.52) aplicada aos volumes de controle internos da malha numérica mais as equações 3.55, 3.56 e 3.57 aplicadas aos pontos de fronteira, juntamente com as aproximações mostradas nas equações (3.59a-c) definem o sistema de equações algébricas a ser resolvido. A solução deste sistema dará os valores do teor de umidade em pontos discretos do domínio estudado.

O teor de umidade médio do material em um determinado instante é dado por:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{V^*} \sum_{i=2}^{npx} \sum_{j=2}^{npy} M_{i,j}^* \Delta V_{ij}^* \quad (3.60)$$

onde npx e npy são respectivamente o número de pontos nas direções das coordenadas ξ e η e os pares (i, j) dão a localização destes pontos na malha.

A malha numérica utilizada é ortogonal, regular e definida em coordenadas esféricas oblatas. A distância do j -ésimo ponto nodal ao eixo y é dado por:

$$\xi_j^* = (j-1) \frac{\Delta \xi^*}{2}; \quad j = 1, 2, 4, \dots, npy \quad (3.61)$$

com:

$$\Delta \xi^* = \frac{\frac{L_1}{L}}{\frac{npy-1}{2}}, \text{ com } npy \text{ ímpar}$$

representando o espaçamento entre duas coordenadas ξ^* consecutivas. Similarmente, a distância do i -ésimo ponto nodal ao eixo z é dado por:

$$\eta_i^* = (i-1) \frac{\Delta \eta^*}{2}, \quad i = 1, 2, 4, \dots, npx \quad (3.62)$$

com:

$$\Delta \eta^* = \frac{1}{\frac{npx-1}{2}} \quad \text{com } npx \text{ ímpar}$$

representando o espaçamento entre duas coordenadas η^* consecutivas.

Para resolver o conjunto de equações gerado pelas equações (3.52), foi utilizado um programa computacional codificado em Fortran, desenvolvido por Lima (1999), que utiliza o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver o sistema de equações algébricas gerado a partir da equação discretizada, o qual foi adaptado para o problema objeto deste trabalho. O algoritmo do código computacional aplicado neste e nos outros modelos que serão apresentados a frente está ilustrado na Figura 3.7.

Considerou-se que a solução numérica convergiu quando os seguintes critérios foram satisfeitos:

$$\left| M^{*n-1} - M^{*n} \right| \leq 10^{-8} \quad (3.63)$$

onde M é o teor de umidade em cada ponto nodal e n representa a n -ésima interação em cada instante de tempo.

No que se refere aos pontos localizados nos planos de simetria, estes não entram no conjunto de equações a ser resolvido. Após a resolução do sistema de equações, é feito este cálculo assumindo-se que o fluxo de umidade é unidimensional na face do volume de controle, ou seja, o fluxo de umidade que sai do ponto adjacente ao ponto de simetria é igual ao fluxo de umidade que chega neste ponto. Matematicamente, pode-se escrever:

□ para os pontos em $\eta=0$ ($L \leq y < L_2$)

$$\left(\frac{-D \sqrt{1-\eta^2}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_e = \left(\frac{-D \sqrt{1-\eta^2}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_w \quad (3.64)$$

Discretizando e arranjando os termos, têm-se:

$$M_w = \left[1 + \frac{D_e \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta \eta_e \sqrt{\xi_P^2 + \eta_e^2}} \right] M_P - \left[\frac{D_e \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta \eta_e \sqrt{\xi_P^2 + \eta_e^2}} \right] M_E \quad (3.65)$$

Para o coeficiente de difusão constante e utilizando-se das variáveis adimensionais tem-se que:

$$M_w^* = \left[\begin{array}{c} +1 \sqrt{1 - (\eta_e^*)^2} \\ \delta \eta_e^* \sqrt{(\xi_p^*)^2 + (\eta_e^*)^2} \end{array} \right] M_p^* - \left[\begin{array}{c} +1 \sqrt{1 - (\eta_w^*)^2} \\ \delta \eta_w^* \sqrt{(\xi_p^*)^2 + (\eta_w^*)^2} \end{array} \right] M_E^* \quad (3.66)$$

□ para pontos em $\eta=1,0$ ($0 \leq z \leq L_1$)

$$\left(\frac{-D \sqrt{1 - \eta^2}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_w = \left(\frac{-D \sqrt{1 - \eta^2}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_e \quad (3.67)$$

Discretizando e rearranjando os termos, têm-se:

$$M_E = \left[\begin{array}{c} D_w \sqrt{1 - \eta_w^2} \\ \delta \eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2} \end{array} \right] M_p - \left[\begin{array}{c} D_e \sqrt{1 - \eta_e^2} \\ \delta \eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2} \end{array} \right] M_w \quad (3.68)$$

ou ainda, usando-se das variáveis adimensionais, com a consideração de que o coeficiente de difusão é constante, pode-se escrever:

$$M_E^* = \left[\begin{array}{c} 1 \sqrt{1 - (\eta_w^*)^2} \\ \delta \eta_w^* \sqrt{(\xi_p^*)^2 + (\eta_w^*)^2} \end{array} \right] M_p^* - \left[\begin{array}{c} 1 \sqrt{1 - (\eta_e^*)^2} \\ \delta \eta_e^* \sqrt{(\xi_p^*)^2 + (\eta_e^*)^2} \end{array} \right] M_w^* \quad (3.69)$$

□ Para os pontos $\xi=0,0$ ($0 \leq y \leq L$)

$$\left(\frac{-D \sqrt{\xi^2 + 1}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_n = \left(\frac{-D \sqrt{\xi^2 + 1}}{L \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial t} \right) \Big|_s \quad (3.70)$$

Discretizando, tem-se:

$$M_s = \left[1 + \frac{D_n \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta \xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right] M_p - \left[\frac{D_n \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta \xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right] M_N \quad (3.71)$$

$$\left[\frac{D_c \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta \xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}} \right]$$

Na base das variáveis adimensionais, tem-se que:

$$M_s^* = \left[1 + \frac{1 \sqrt{(\xi_n^*)^2 + 1}}{\delta \xi_n^* \sqrt{(\xi_n^*)^2 + (\eta_p^*)^2}} \right] M_p^* - \left[\frac{1 \sqrt{(\xi_n^*)^2 + 1}}{\delta \xi_n^* \sqrt{(\xi_n^*)^2 + (\eta_p^*)^2}} \right] M_N^* \quad (3.72)$$

$$\left[\frac{1 \sqrt{(\xi_s^*)^2 + 1}}{\delta \xi_s^* \sqrt{(\xi_s^*)^2 + (\eta_p^*)^2}} \right]$$

3.4.2 Modelo II – Modelo difusional de calor e massa com condição convectiva na superfície, considerando o fenômeno de encolhimento e propriedades constantes.

3.4.2.1 Formulação analítica

Uma simplificação considerada no modelo matemático anteriormente apresentado (modelo I) foi a de que a transferência de massa se dá independentemente dos gradientes de temperatura no interior do sólido durante o processo de secagem. Como se sabe, as características físicas e químicas dos sólidos, inerentes ao processo de transferência de calor e massa variam principalmente com o teor de umidade e com a temperatura; desta forma, um modelo que considere a condução de calor e determine o campo de temperatura transiente no interior do sólido é de extrema importância.

a) Transporte de massa e encolhimento

No modelo II, a transferência de massa e as variações dimensionais se dão de forma idêntica àquela já apresentada para o modelo I, inclusive as condições de contorno e os parâmetros adimensionais. Portanto, o mesmo é composto pelas equações (3.41) e (3.48).

b) Transporte de calor

No modelo II, para a transferência de calor serão assumidas todas as simplificações propostas no modelo I, a menos do item c. As seguintes considerações são acrescentadas.

i) Inicialmente a distribuição de temperatura é uniforme, sendo simétrica em torno do eixo z durante todo o processo;

j) a transferência de calor dentro da partícula é por condução e na superfície do material é por convecção;

A equação de conservação de energia é dada pela equação (3.13), trocando-se Γ^* por k , Φ por θ e λ por ρc_p . Desde que $\frac{k}{\rho c_p} = \alpha$, a difusividade térmica do material, pode-se escrever:

ver:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.73)$$

As condições iniciais e de contorno, para o referido modelo são as seguintes:

- Superfície livre: o fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo do calor na superfície do sólido, adicionadas a energia necessária para evaporar a água e para aquecê-la até a temperatura de secagem.

$$\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_f} = h_c [\theta_\infty - \theta(\xi = \xi_f, \eta, t)] + \frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} [h_{fg} + c_v (\theta_\infty - \theta_f)] \quad (3.74)$$

com $\xi_f = L_1/L$ na superfície do sólido.

- Planos de simetria: os gradientes angulares e radial da temperatura são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial \theta(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \theta(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \theta(0; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.75)$$

- Condição inicial de temperatura no interior do sólido:

$$\theta(\xi; \eta; 0) = \theta_o = \text{cte.} \quad (3.76)$$

Para generalizar os resultados, foram definidos parâmetros adimensionais em função das propriedades que controlam a condução de calor:

$$\theta^* = \frac{\theta_\infty - \theta}{\theta_\infty - \theta_0} \quad t_c^* = \frac{\alpha t}{L^2} \quad Bi_c = \frac{h_c L}{k} \quad (3.77)$$

O número de Biot de transferência de calor é definido como sendo a razão de difusão de calor no sólido e a taxa de acúmulo de energia no mesmo.

Desta forma, a equação (3.73), pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t_c^*} = \frac{1}{(\xi^{*2} + \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left((\xi^{*2} + 1) \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi^*} \right) \right] + \frac{1}{(\xi^{*2} + \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \eta^*} \left((1 - \eta^{*2}) \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta^*} \right) \right] \quad (3.78)$$

onde t_c^* é o número de Fourier (de transferência de calor).

Baseando-se nas variáveis adimensionais, as condições inicial, de simetria e de fronteira para a equação (3.78) são:

$$\theta^*(\xi^*; \eta^*; \eta^*; 0) = 1 \quad \frac{\partial \theta^*(\xi^*; 1; t_c^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta^*(\xi^*; 0; t_c^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta^*(0; \eta^*; t_c^*)}{\partial \xi^*} = 0 \quad (3.79)$$

$$-\frac{1}{Bi_c} \sqrt{\frac{(\xi^{*2} + 1)}{(\xi^{*2} + \eta^{*2})}} \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi=\xi_f} = \theta_f^* + \frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_0)} + c_v \theta_f^* \right] \quad (3.80)$$

A temperatura média do sólido é determinada a partir da equação (3.44), trocando-se M por θ .

3.4.2.2 Formulação numérica

A formulação numérica para transferência de calor e massa acoplados segue o mesmo procedimento apresentado no modelo I. Para transferência de calor, o seguinte sistema de equações adimensionais pode ser obtido:

- Pontos internos

$$A_p \theta_p^* = A_E \theta_E^* + A_w \theta_w^* + A_s \theta_s^* + A_N \theta_N^* + A_p \theta_p^* + \overline{TF\theta} \quad (3.81)$$

onde A_E , A_W , A_S , A_N e A_p° são como antes, e:

$$A_p = \sum A_k + A_p^\circ + \overline{ST} \quad (3.82)$$

com $\overline{TF\theta} = 0$ e $\overline{ST} = 0$.

- Pontos de fronteira

É utilizada a equação (3.81) fornecida acima, sendo os Coeficientes A_E , A_W e A_S iguais ao do modelo I, $A_N = 0$ e:

$$\overline{ST} = \frac{\Delta\eta^*}{\left[\frac{1}{Bi_c \sqrt{[(\xi_f^*)^2 + (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 + 1]}} + \frac{\delta\xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 + 1]} \right]}$$

$$\overline{TF\theta} = \frac{-\frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_o)} + c_v \theta_f^* \right] \frac{\Delta\eta^*}{h_c}}{\left[\frac{1}{Bi_c \sqrt{[(\xi_f^*)^2 + (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 + 1]}} + \frac{\delta\xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 + 1]} \right]} \quad (3.83a-b)$$

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} = (M_o - M_e) \frac{(\overline{M}^* - \overline{M}^{\circ*})}{\Delta t} \quad (3.84)$$

A temperatura nos pontos de simetria é dada pelas equações de (3.64) até (3.72), substituindo os a variável M^* por θ^* . Seguindo o procedimento utilizado no modelo I, após resolvido o sistema de equações que determina as temperaturas nos pontos nodais, a temperatura na superfície do sólido é calculada pela expressão:

$$\theta_f^* = \frac{\frac{1}{Bi_c \delta\xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} + 1}{\xi_f^{*2} + \eta_f^{*2}}}}{\left(1 + \frac{1}{Bi_c \delta\xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} + 1}{\xi_f^{*2} + \eta_f^{*2}}} \right)} \theta_p^* - \frac{\left\{ \frac{\rho_s V}{h_c S} \frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_o)} + c_v \theta_f^* \right] \right\}}{\left(1 + \frac{1}{Bi_c \delta\xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} + 1}{\xi_f^{*2} + \eta_f^{*2}}} \right)} \quad (3.85)$$

3.4.3 Modelo III - Modelo difusional de têmpera, com propriedades constantes.

Das diferentes técnicas de secagem utilizadas por pesquisadores, uma grande parte delas visa racionalizar o uso de energia e/ou reduzir problemas causados em vários produtos devido ao aquecimento em altas temperaturas, especialmente em produtos biológicos.

O processo de têmpera se baseia na possibilidade de se uniformizar o teor de umidade dentro do sólido que está sendo seco, em qualquer instante desejado. Segundo Lima (1999), vários autores têm estudado o processo de têmpera. A secagem intermitente comumente é baseada em uma análise empírica, e poucos trabalhos são publicados, em comparação à grande variedade de produtos biológicos que pode utilizá-la (Singh et al., Zhang e Litchfield, citados por Lima 1999). Utilizando-se de análise numérica é possível modelar e descrever o processo de secagem intermitente e, principalmente, determinar o tempo de têmpera ótimo que trará vantagens quanto à utilização da energia usada para a secagem do sólido e quanto à qualidade final do produto que está sendo seco.

3.4.3.1 Formulação analítica

Uma das formas de calcular o tempo de têmpera é impor a condição de que a superfície do sólido seja impermeável. Idealmente, na têmpera o material pode ser considerado como um sistema isolado, sem perda de umidade e nem calor. Na prática, esta pequena perda de umidade existe, mas para este modelo ela pode ser considerada desprezível. Assim, sob estas condições, a variação do teor de umidade médio do sólido durante o período de repouso é desprezível, e são aceitas variações na distribuição do teor de umidade dentro do mesmo.

O modelo matemático que descreve o processo de têmpera é baseado na consideração de que a difusão é o único mecanismo de migração de umidade. É dado pela equação (3.36), com as seguintes condições inicial e de contorno:

$$\frac{\partial M(L_1/L; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.86)$$

$$M(\xi; \eta; 0) = f(\xi; \eta) \quad (3.87)$$

A função $f(\xi, \eta)$ no início do período de têmpera corresponde ao perfil do teor de umidade no sólido no instante que a secagem contínua é interrompida, este perfil pode ser forne-

cido por qualquer dos modelos já apresentados. Esta função não é uniforme dentro do sólido, mas é uma função das coordenadas esferoidais radial e angular.

A consideração de que a superfície é impermeável à migração de umidade durante a têmpera implica em considerar desprezível a quantidade de umidade perdida pelo sólido ou seja, a taxa de variação do teor de umidade médio do sólido é zero. Portanto, a taxa de armazenagem do teor de umidade na superfície deve ser igual à variação do teor de umidade dentro do sólido, ao longo da têmpera. Em outras palavras, a umidade que migra do centro do sólido para sua superfície, é armazenada nessa região.

Utilizando os parâmetros adimensionais definidos anteriormente para os modelos I e II, as equações (3.86) e (3.87) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial M^*(L_1/L; \eta^*; t_m^*)}{\partial \xi^*} = 0 \text{ (na superfície)} \quad (3.88)$$

$$M^*(\xi^*; \eta^*; 0) = f^*(\xi^*; \eta^*) \quad (3.89)$$

3.4.3.2 Formulação numérica

Como já descrito, o conjunto de equações que corresponde ao modelo de secagem contínua foi resolvido numericamente utilizando o método de volumes finitos, portanto, de forma idêntica aos modelos I e II é necessário resolver numericamente as equações (3.88) e (3.89). Numericamente, a condição dada pela equação (3.88) corresponde à situação em que o teor de umidade no ponto nodal na superfície do sólido é igual ao seu valor no ponto nodal imediatamente próximo à superfície. Sob o aspecto matemático, isto é equivalente a uma condição de simetria. Este resultado foi obtido fazendo-se simplesmente $h_m \rightarrow 0$ na equação (3.37).

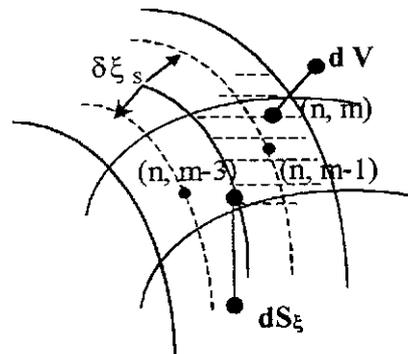


Figura 3.5 – Ponto nodal próximo à superfície

Em todos os cálculos foram utilizados os mesmos critérios de convergência e o tipo de malha já apresentada nos modelos I e II. Contudo, para determinar o Fourier de têmpera sob a condi o que a distribui o do teor de umidade seja uniforme dentro do sólido, foi necessário assumir um critério de parada, que   dependente da precisão requerida no modelo. Neste trabalho foi assumido $|M^{**} - M^*| \leq 10^{-7}$ em todos os pontos nodais.

3.4.4 Modelo IV – Modelo difusional com condi o convectiva na superfície, propriedades variáveis e fenômenos simultâneos de transferência de calor, massa e encolhimento.

Como já mencionado na revisão bibliográfica, as propriedades físicas do material que caracterizam um processo de secagem, são fun oes do teor de umidade e da temperatura em cada ponto do sólido. Neste sentido, o modelo IV   de suma importância e engloba os fenômenos mais importantes que podem afetar os desvios existentes entre os valores experimentais e teóricos obtidos, tornando-o assim o modelo mais completo dentre todos os modelos considerados neste trabalho, portanto mais realista fisicamente.

As equa oes que compoem este modelo são a equa o (3.13), com as seguintes condi oes iniciais, de contorno e simetria:

$$\Phi(\xi, \eta, t = 0) = \Phi_0 \quad (3.90)$$

$$\Phi(\xi = L_1/L, \eta, t) = f_1(\eta, t) \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \Phi(\xi, \eta = 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \Phi(\xi, \eta = 1, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \Phi(\xi = 0, \eta, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.92 \text{ a-c})$$

e as equa oes (3.22), (3.23), (3.24), (3.43), (3.48), (3.52), (3.58) e (3.60).

A gera o de malha, o método de soluço iterativa, critérios de convergência e determina o dos pontos de simetria são obtidos similarmente aos outros modelos. Nos problemas de difusão com a propriedade Γ^ϕ variável, para a obten o dos valores destas propriedades nas faces dos volumes de controle   assumido uma varia o de Γ^ϕ entre os pontos P e seu vizinho em qualquer dire o (E, W, N ou S) dada por (Patankar 1980):

$$\Gamma_i^\phi = \left(\frac{1 - \hat{f}_i}{\Gamma_P^\phi} - \frac{\hat{f}_i}{\Gamma_E^\phi} \right)^{-1} \quad (3.93)$$

onde \hat{f}_i é o fator de interpolação, definido por $\hat{f}_i = \frac{(\delta d)_i^+}{(\delta d)_i}$, conforme a Figura 3.6

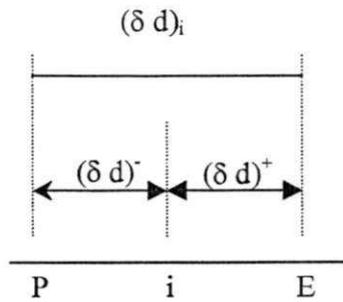


Figura 3.6 – Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E

Se a interface está situada no ponto médio que une os pontos P e E de uma malha uniforme, $\hat{f}_i = 0.5$, e, neste caso Γ_i^ϕ é dado por:

$$\Gamma_i^\phi = \frac{2\Gamma_P^\phi \Gamma_E^\phi}{\Gamma_P^\phi + \Gamma_E^\phi} \quad (3.94)$$

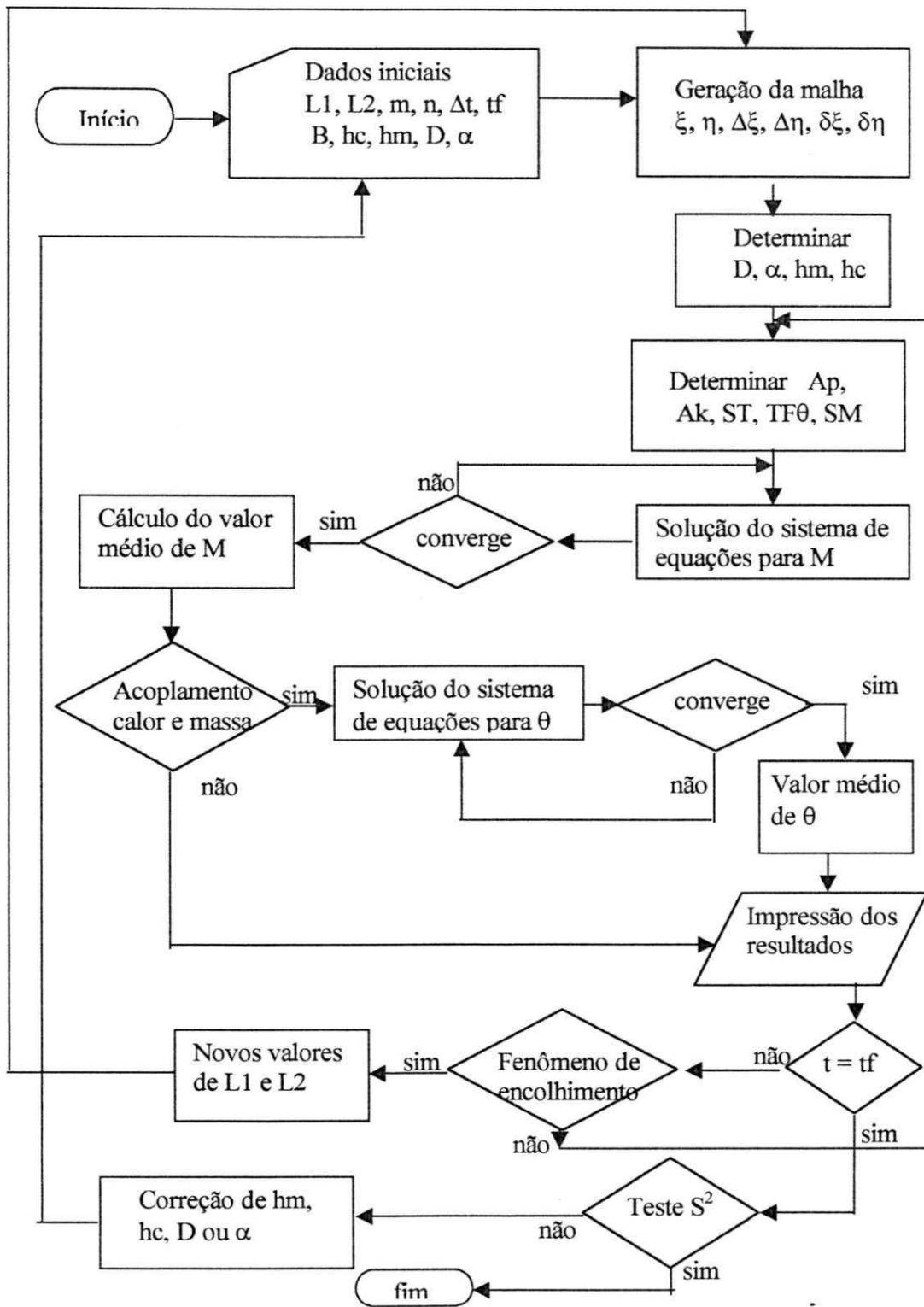


Figura 3.7 – Diagrama do algoritmo computacional

3.5 Aplicação da modelagem a dados experimentais de secagem de lentilhas.

Na Tabela 3.1 apresentam-se as condições de secagem bem como os teores de umidade inicial (M_0), de equilíbrio (M_e) e final (M_f) da lentilha. O tempo total de secagem em todos os casos é de 24 horas e as diferentes situações impostas aos processos de secagem são caracterizadas por uma mesma velocidade do ar e coeficiente de encolhimento.

Tabela 3.1 – Casos de cinética de lentilhas, sob diferentes condições do ar de secagem

C a s o s	Ar			Lentilha						t (h)
	T (°C)	UR (%)	v (m/s)	M_0 (%b.s.)	M_e (%b.s.)	M_f (%b.s.)	L_2 (cm)	L_1 (cm)	B	
1	23	15	0.3	24.5	8.5	14.9	0.34	0.14	0.17	24
2	23	30	0.3	24.5	10.7	15.7	0.34	0.14	0.17	24
3	23	50	0.3	24.5	13.9	16.3	0.34	0.14	0.17	24
4	40	5	0.3	24.5	6.1	11.7	0.34	0.14	0.17	24
5	40	30	0.3	24.5	9.3	13.3	0.34	0.14	0.17	24
6	40	50	0.3	24.5	12.1	14.0	0.34	0.14	0.17	24
7	60	5	0.3	24.5	5.2	7.8	0.34	0.14	0.17	24
8	60	30	0.3	24.5	7.9	9.4	0.34	0.14	0.17	24
9	60	50	0.3	24.5	10.3	12.3	0.34	0.14	0.17	24

Fonte: (Tang e Sokansanj, 1994).

Os dados sobre a secagem de lentilhas apresentados na Tabela 3.1 foram retirados da literatura (Tang e Sokansanj 1994). Os métodos experimentais e o material utilizado na obtenção destes dados são descritos no referido trabalho.

Com respeito aos dados dos teores de umidade ao longo de todo o processo de secagem, pode-se dizer que as taxas do teor de umidade são maiores durante o período inicial do processo, requerendo do pesquisador a leitura destes dados em menores intervalos de tempo. Para um tratamento estatístico, o mais adequado é realizar o ajuste de parâmetros a partir de uma distribuição uniforme de pontos ao longo do processo; para isto, propõe-se um ajuste destes dados experimentais a uma equação de três termos e 6 parâmetros. Esta equação tem a seguinte forma:

$$\bar{M}^* = A_1 \exp(-k_1 t) + A_2 \exp(-k_2 t) + A_3 \exp(-k_3 t) \quad (3.97)$$

A estimação não-linear dos parâmetros da equação (3.97) foi realizada utilizando o software Lab Fit Curve Fitting Software e o método numérico foi o de regressão não linear (mínimos quadrados) utilizando o algoritmo de Levenberg – Marquardt, para todos os casos, com critério de convergência de $1,0 \times 10^{-6}$. A escolha desta forma de equação de ajuste foi baseada no trabalho de Lima (1999) que constatou ser as equações exponenciais com três termos e seis parâmetros suficientes para o ajuste a dados experimentais de cinética de secagem.

Com as constantes da equação (3.97) determinadas para cada caso, pôde-se tomar de forma uniforme ao longo do tempo, os valores do teor de umidade médio da lentilha submetida aos diferentes processos de secagem. Posteriormente, a equação (3.97), ajustada para cada caso de secagem foi utilizada juntamente com o programa SPHEROIDIFF (modificado para simular processos de difusão em corpos esféroidais oblato) para estimar os coeficientes de difusão efetivo e de transferência convectiva de massa para a lentilha.

Os desvios entre os valores experimentais e simulados bem como a variância foram calculados como se segue:

$$ERMQ = \sum_{i=1}^{\bar{n}} (\Phi_{i,num}^* - \Phi_{i,exp}^*)^2 \quad (3.98)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{ERMQ}{(\bar{n} - \hat{n})} \quad (3.99)$$

Na equação (3.99) \bar{n} é o número de pontos experimentais e \hat{n} o número de parâmetros ajustados.

Na metodologia de comparação entre valores experimentais e simulados utilizada neste trabalho, os menores valores de ERMQ e \bar{S}^2 obtidos na comparação foram usados para obter os melhores valores do coeficiente de difusão D e o coeficiente de transferência convectiva de massa (h_m). Semelhante procedimento também pode ser utilizado para a determinação dos coeficientes de transporte de calor.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Comentários iniciais

Dados obtidos através da solução analítica ou numérica de uma equação diferencial que descreve um problema físico, normalmente diferem de resultados experimentais. No caso da secagem de corpos sólidos considerando a difusão de calor e massa como mecanismo de transporte no interior do produto, estas discrepâncias têm como causa, entre outras a consideração de propriedades constantes ao longo de todo o processo de secagem e/ou a escolha inadequada das condições de contorno envolvendo a solução da equação.

O modelo matemático apresentado neste trabalho é capaz de prever o processo transitente de calor e umidade no interior de um produto com a geometria de um esferóide oblato, incluindo disco circular ($L_2/L_1 \rightarrow \infty$) e esfera ($L_2/L_1=1,00$), como casos particulares extremos.

Neste capítulo vários resultados do teor de umidade e temperatura são mostrados e analisados. Os resultados foram obtidos através da solução numérica da equação de difusão, submetida a diferentes condições de contorno na superfície do material.

4.2 Resultados numéricos

4.2.1 Refinamento de malha e de tempo

Os resultados numéricos obtidos a partir da discretização de uma equação diferencial parcial são influenciados pelo número de pontos que irá formar a malha numérica e do intervalo de tempo Δt entre dois valores consecutivos (no tempo) da variável estudada, para um mesmo ponto da malha. Para uma escolha otimizada destes valores, vários resultados obtidos com o modelo I, considerando $D = 1,22 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, coeficiente de encolhimento igual a zero e número de Biot de transferência de massa igual a 10, para 3 padrões de malha (10×10; 20×20; 40×40 pontos nodais) e três valores de intervalo de tempo foram analisados. Estes resultados são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Teor de umidade médio adimensional para diferentes malhas, em diferentes valores do intervalo de tempo. $L_2/L_1=2,00$ e número de Biot igual a 10,00

Δt_m^*	t_m^*	\bar{M}^*			ERRO (%)	
		Malha A: (10×10)	Malha B: (20 ×20)	Malha C: (40 × 40)	(A-B) / A	(C-B) / C
0,000244	0,00146	0,9517	0,9496	0,9492	0,2206	0,0421
	0,00732	0,8155	0,8132	0,8128	0,2820	0,0492
	0,0366	0,4694	0,4686	0,4685	0,1704	0,0213
0,000366	0,00146	0,9520	0,9500	0,9496	0,2100	0,04200
	0,00732	0,8159	0,8136	0,8132	0,2818	0,0491
	0,0366	0,4697	0,4690	0,4688	0,1490	0,0426
0,000488	0,00146	0,9523	0,9503	0,9499	0,2100	0,0420
	0,00732	0,8164	0,8141	0,8136	0,2817	0,0614
	0,0366	0,4701	0,4693	0,4692	0,1701	0,0213

Observa-se que as três malhas apresentaram resultados semelhantes para os teores de umidade médio nos vários instantes de secagem. No início do processo, a malha com 10 ×10 pontos apresentou uma pequena discrepância em relação às outras duas; portanto, foi descartada. Para as outras duas malhas, os resultados obtidos foram muito próximos um do outro, contudo, em virtude da malha 20×20 pontos apresentar menor tempo computacional, esta foi selecionada.

Fixado o número de pontos da malha, obteve-se resultados para diferentes intervalos de tempo ($\Delta t_m^* = 0,000244, 0,000366$ e $0,000488$). Não foram observadas discrepâncias significativas entre os casos avaliados. Desta forma, tendo em vista que o processo considerado é transiente, a escolha de um menor intervalo de tempo é mais apropriada. Com base nesta análise, uma malha 20×20 pontos e um intervalo de tempo $\Delta t_m^* = 0,000244$ (que é equivalente a $\Delta t = 20s$) foram utilizados para gerar todos os resultados apresentados neste trabalho. Vale destacar que quando estes resultados são apresentados na forma adimensional são independentes do valor particular escolhido para o coeficiente de difusão.

Como já foi mencionado, o sistema esferoidal oblato é ortogonal. Nas Figuras 4.1 e 4.2, são ilustrados alguns esferóides oblatos e suas respectivas malhas numéricas. Neste trabalho a razão L_2/L_1 é definida como a razão de aspecto do corpo.

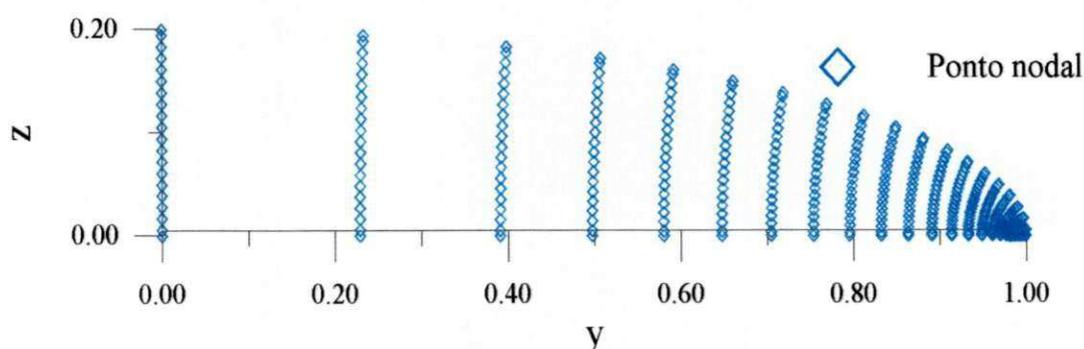


Figura 4.1 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 5,00$.

No plano computacional, tem-se uma malha regularmente espaçada ($\Delta \xi$ e $\Delta \eta$ são iguais para todos os volumes de controle). Contudo no plano físico $y \times z$, vê-se que a malha numérica não é regular. Existe uma região com uma maior concentração de pontos nodais localizada próxima ao eixo y , nas vizinhanças do ponto focal. No plano físico o ponto focal se localiza no ponto ($y=L, z=0$). Os pontos nodais próximos ao eixo z ($\eta=1$) estão notadamente mais afastados uns dos outros.

Quando a razão de aspecto L_2/L_1 tende para o valor 1,00, a forma do corpo se aproxima de uma esfera. Neste caso, o ponto focal tende para o centro do corpo sólido. Quando L_2/L_1 cresce, o ponto focal se aproxima da superfície do corpo, sendo que com $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ a forma do corpo se aproxima de um disco circular.

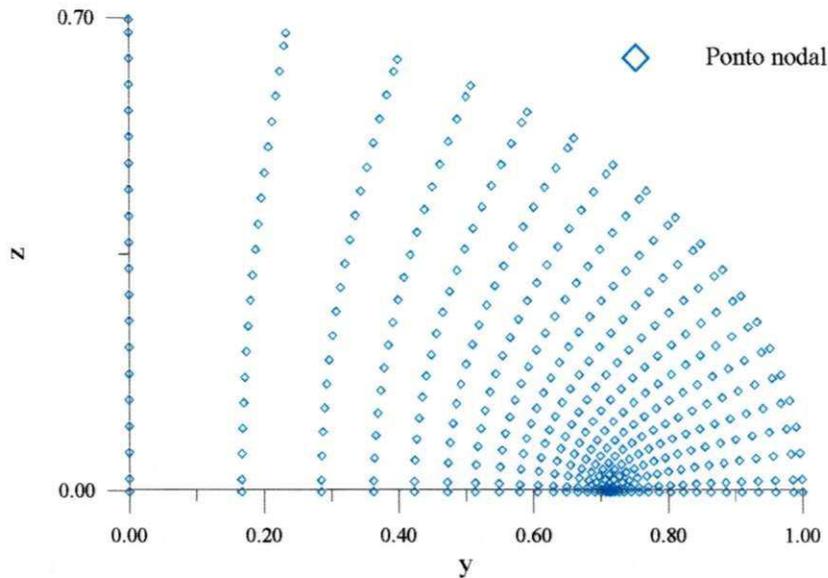


Figura 4.2 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1=1,43$.

4.2.2 Validação da solução

Para validar o modelo matemático e sua solução numérica, resultados numéricos do teor de umidade adimensional no centro de uma esfera e no centro de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,00$ assumindo $B=0,00$ e $Bi_m \rightarrow \infty$, são comparados com resultados analíticos reportados por Haji Sheikh (1986) e por Farias (2002) conforme pode ser constatado nas Figuras 4.3 e 4.4. Observa-se, nessas figuras uma excelente concordância entre todos os resultados.

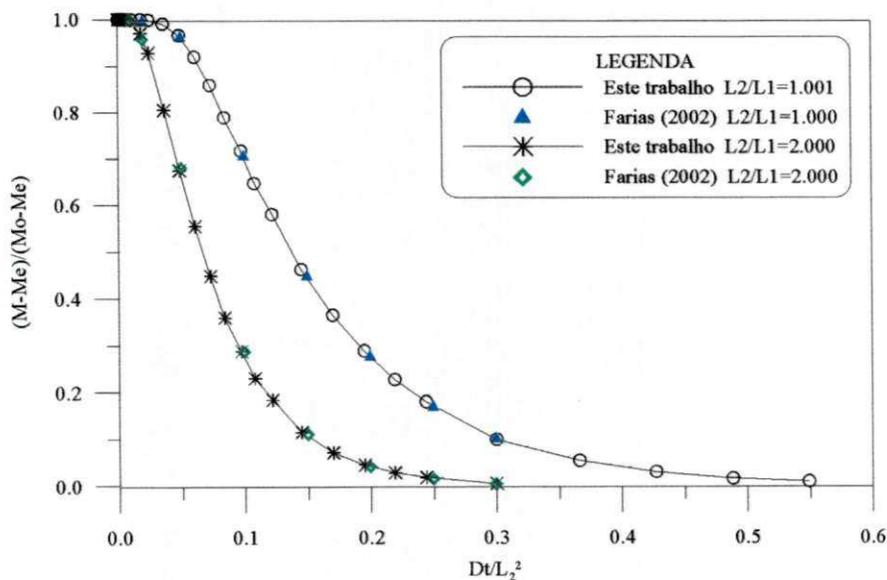


Figura 4.3 – Comparação entre os teores de umidade adimensionais numéricos e analíticos (Farias 2002), no centro de uma esfera e de um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$, $B=0,00$ e $Bi_m \rightarrow \infty$

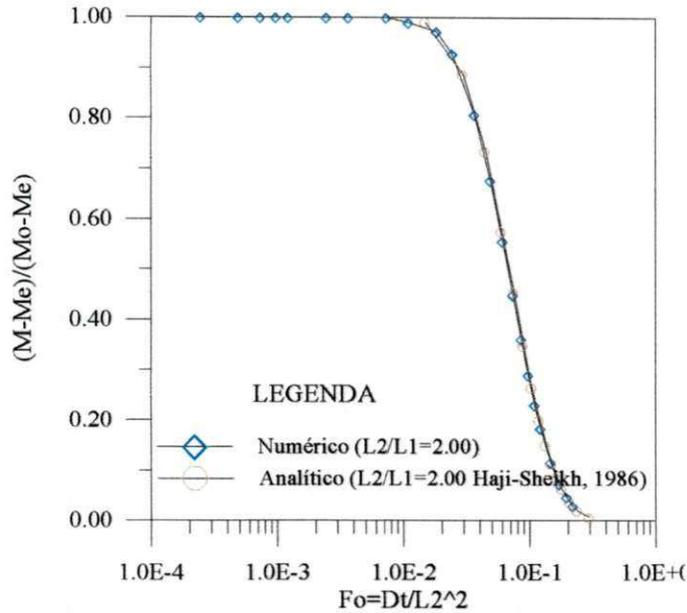


Figura 4.4 – Comparação entre os teores de umidade adimensionais numéricos e analíticos (Haji-Sheikh, 1986), no centro de um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$, $B=0,00$ e $Bi_m \rightarrow \infty$

4.2.3 Resultados obtidos com o modelo I

Uma importante abordagem feita neste trabalho, que aproxima bastante a simulação do processo real, é a consideração do efeito do encolhimento sobre a cinética de secagem. Na Figura 4.5, vê-se as cinéticas de secagem para um sólido esferoidal com razão de aspecto, $L_2/L_1 = 2,00$ e os coeficientes de encolhimento $B=0,00$, $B=0,30$ e $B=0,50$. Observa-se que a partir da Figura 4.3, o número de Fourier (Fo) foi definido de forma diferente para ser possível a comparação entre os vários resultados simulados. Nota-se que com o aumento do número de Fourier, no caso de um processo de secagem, sempre há um decréscimo na razão de umidade média e, quanto maior for o coeficiente de encolhimento, mais rapidamente o sólido perde umidade.

Nas Figuras 4.6 e 4.7 é visto a distribuição do teor de umidade no interior do sólido, em $Fo=0,0061$, para $B=0,00$ e $0,60$ respectivamente. Nestas figuras, estão mostrados pontos no interior do sólido que têm o mesmo teor de umidade; são as linhas de isso-umidade. Nas Figuras 4.8 e 4.9 estão resultados semelhantes aos mostrados com as Figuras 4.6 e 4.7, sendo desta vez para $Fo=0,0195$. Neste instante, pode-se notar que o efeito do encolhimento sobre a secagem do sólido é mais acentuado. Para se ter uma idéia, em $Fo=0,0610$ para os casos com $B=0,00$ e $B=0,60$, os teores de umidade médio são respectivamente $0,8095$ e $0,8051$. Já no instante em que $Fo=0,0195$, seus valores são $0,5499$ e $0,5213$ respectivamente. Nesta última

comparação tem-se uma diferença de 5,2%. A legenda apresentada na Figura 4.6 é válida para as demais figuras apresentadas.

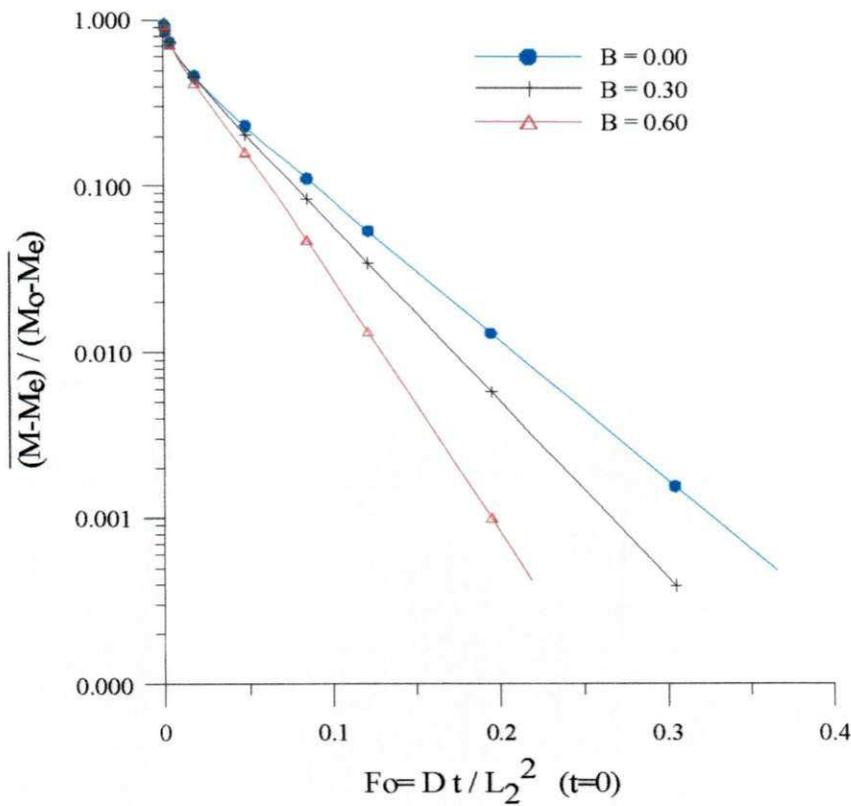


Figura 4.5 – Teor de umidade adimensional médio em função do número de Fourier para três coeficientes de encolhimento adimensional.

Quando se considera o encolhimento, a redução nas dimensões do sólido normalmente acelera o processo de secagem, no entanto, observando as Figuras 4.6 - 4.9, nota-se que os gradientes de umidade adimensional no interior do produto praticamente não variam. Dessa forma, pode-se verificar que o possível dano físico no material proveniente de altos gradientes de umidade adimensional, é devido principalmente às condições de secagem.

Vale salientar que o tempo total de secagem é sempre menor, quando o encolhimento do produto é considerado na modelagem matemática. Desta forma, um melhor dimensionamento do consumo energético em um secador industrial pode ser obtido. Além disso, o estudo do fenômeno de deformações e variações dimensionais é de grande importância para melhor elucidar o fenômeno de secagem, fornecer subsídios para se realizar uma secagem ótima sob o ponto de vista energético, e prevenir trincas no interior do sólido, durante o processo.

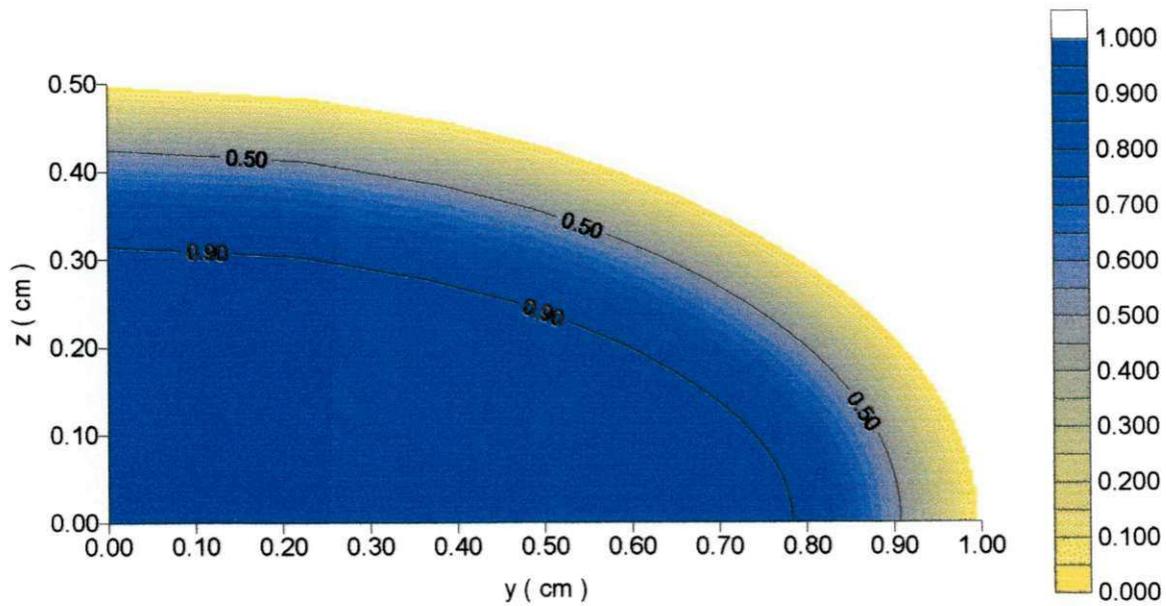


Figura 4.6 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2.00$, $F_0 = 0,0061$, $B = 0,00$ e Bi_m infinito.

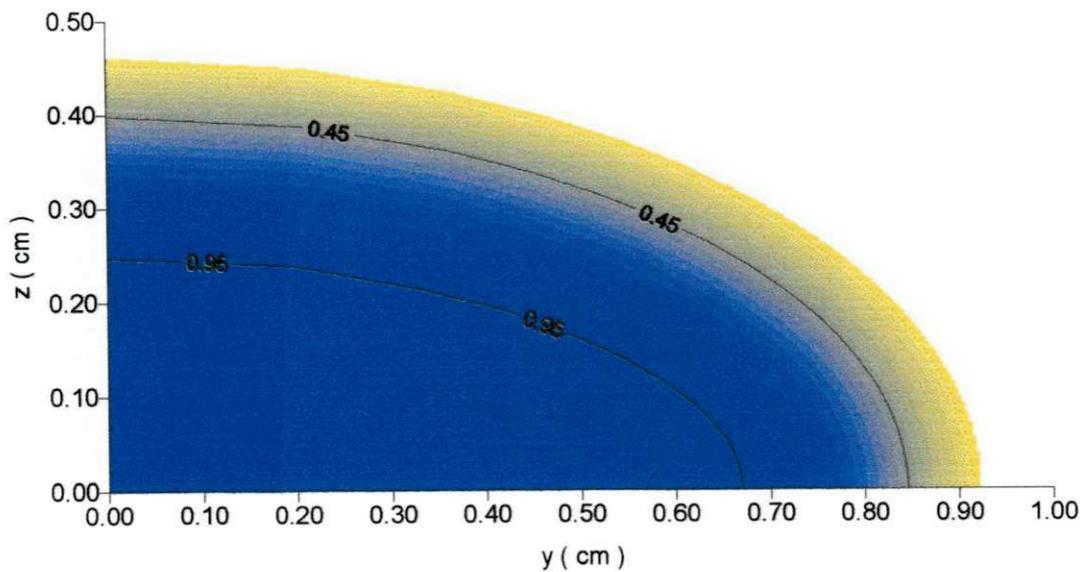


Figura 4.7 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2.00$, $F_0 = 0,0061$, $B = 0,60$ e Bi_m infinito.

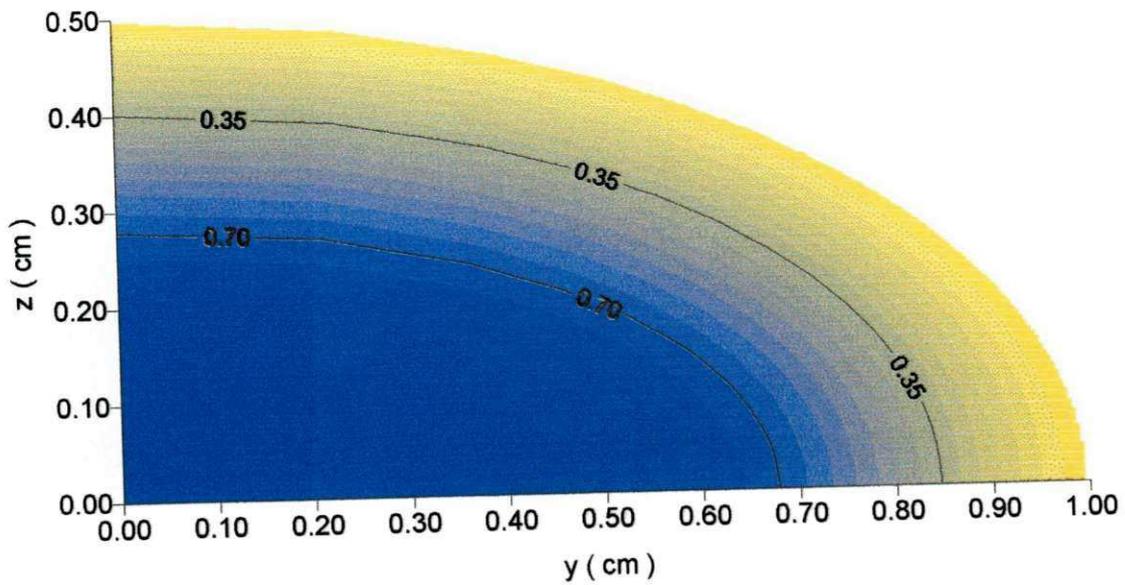


Figura 4.8 – Teor de umidade no interior de um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,0$, $F_0=0,0195$, $B=0,00$ e Bi_m infinito.

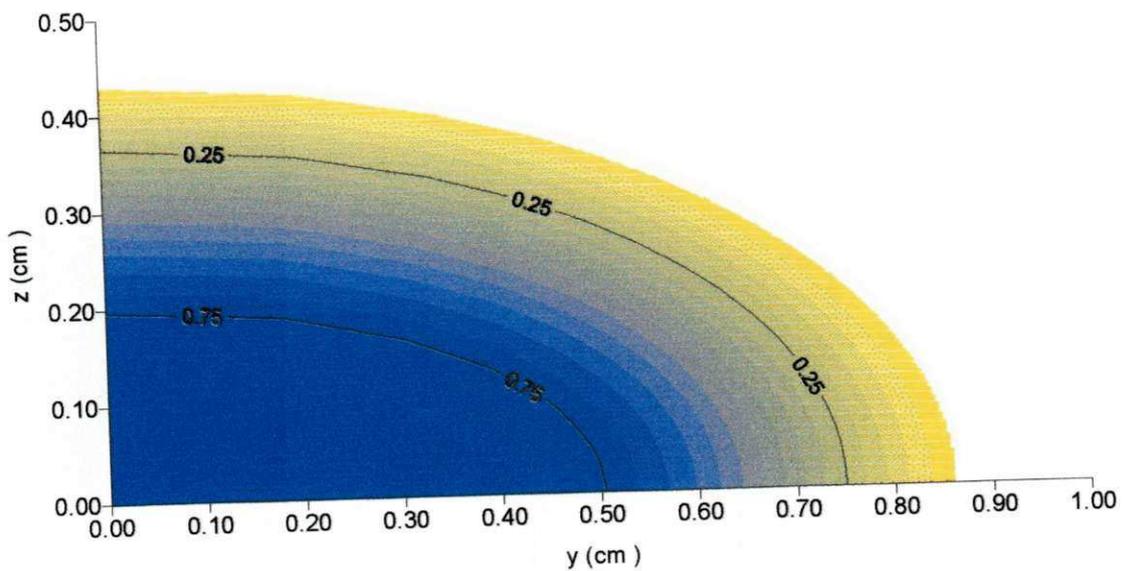


Figura 4.9 – Teor de umidade no interior de um sólido, com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,0$, $F_0=0,0195$, $B=0,60$. e Bi_m infinito.

A Figura 4.10 ilustra o efeito do número de Fourier e do número de Biot na cinética de secagem. São mostradas curvas para diferentes números de Biot e diferentes coeficientes de encolhimento. A análise das curvas indica que o teor de umidade médio decresce com o incremento do número de Fourier, para qualquer número de Biot, conforme o esperado. Para valores fixos da razão de aspecto, o incremento do número de Biot e do coeficiente de encolhimento, aumenta a taxa de secagem do produto. Vale salientar que a partir de um certo valor do número de Biot, a cinética de secagem do produto será praticamente equivalente. Este valor limite pode ser considerado como número de Biot infinito.

Em trabalhos anteriores (Carmo e Lima, 2000; Carmo e Lima, 2001) foi mostrado que quanto maior o número de Biot característico de um processo de secagem, maiores são os gradientes de umidade no interior do produto.

Na Figura 4.11 pode-se constatar a influência da razão de aspecto do sólido na cinética de secagem. As curvas mostradas representam a variação do teor de umidade médio para sólidos com diferentes razões de aspecto e submetidas às mesmas condições de secagem, ou seja, mesmo número de Biot. O coeficiente de encolhimento também é considerado o mesmo para todos os sólidos. A análise das curvas indica que o teor de umidade médio decresce com o aumento da razão de aspecto, para um determinado número de Fourier.

A distribuição do teor de umidade no interior do esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,00$ em $Fo=0,0976$ estão nas Figuras 4.12 e 4.13. Pode ser notado que o teor de umidade em quase todos os pontos no interior do corpo decresce com o aumento do coeficiente de encolhimento. Comparando as Figuras 4.9 e 4.13, fica evidente o efeito do número de Biot no encolhimento do sólido. Como no modelo matemático desenvolvido, foi considerado que a variação de volume sofrida pelo produto é proporcional ao volume de água retirada do mesmo através da evaporação na sua superfície, nota-se que para menores números de Biot, o encolhimento acontece mais lentamente.

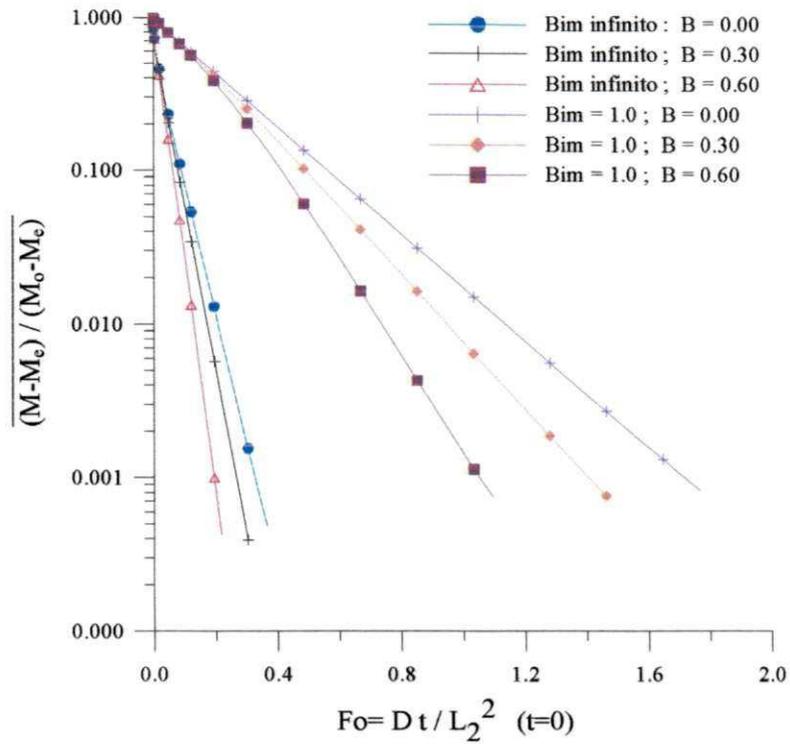


Figura 4.10 – Teor de umidade médio de um sólido esferoide oblato com $L_2/L_1=2,0$, em função do número de Fourier, para dois números de Biot e três coeficientes de encolhimento.

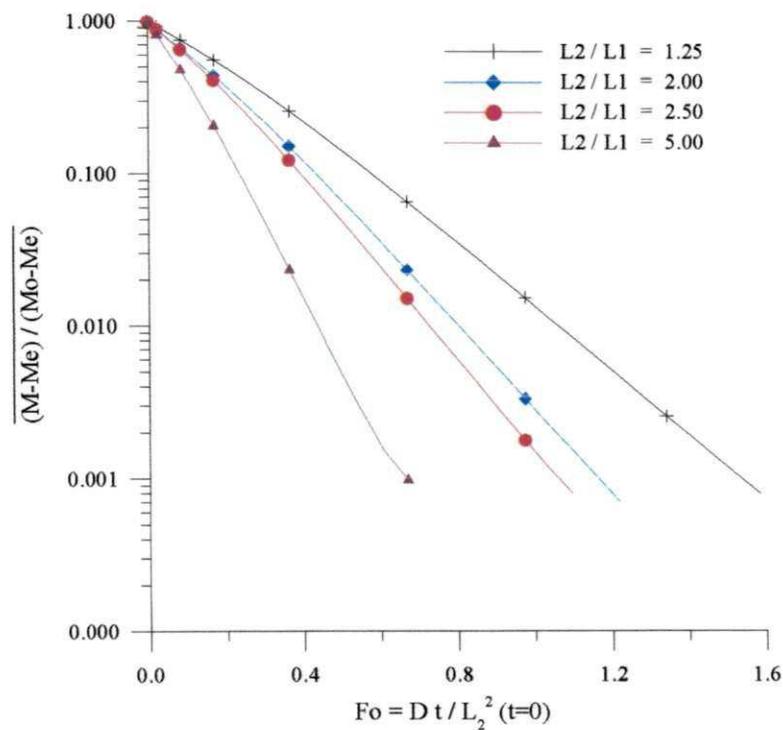


Figura 4.11 – Teor de umidade médio de um sólido esferoide oblato em função do número de Fourier, para $Bi_m = 1,0$, $B=0,50$ e várias razões de aspecto.

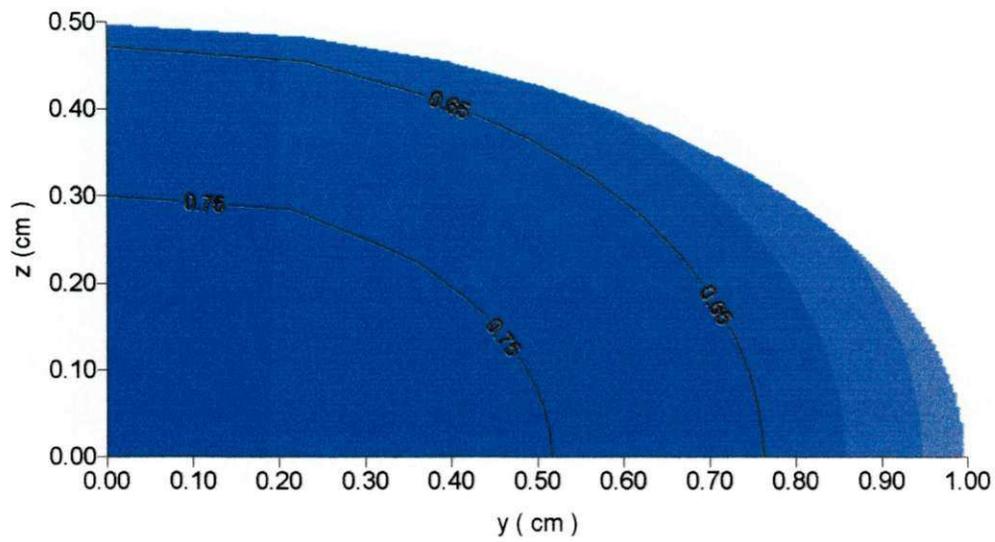


Figura 4.12 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2.0$, $Bi_m=1.0$, $B=0.00$ e $Fo = 0.09759$

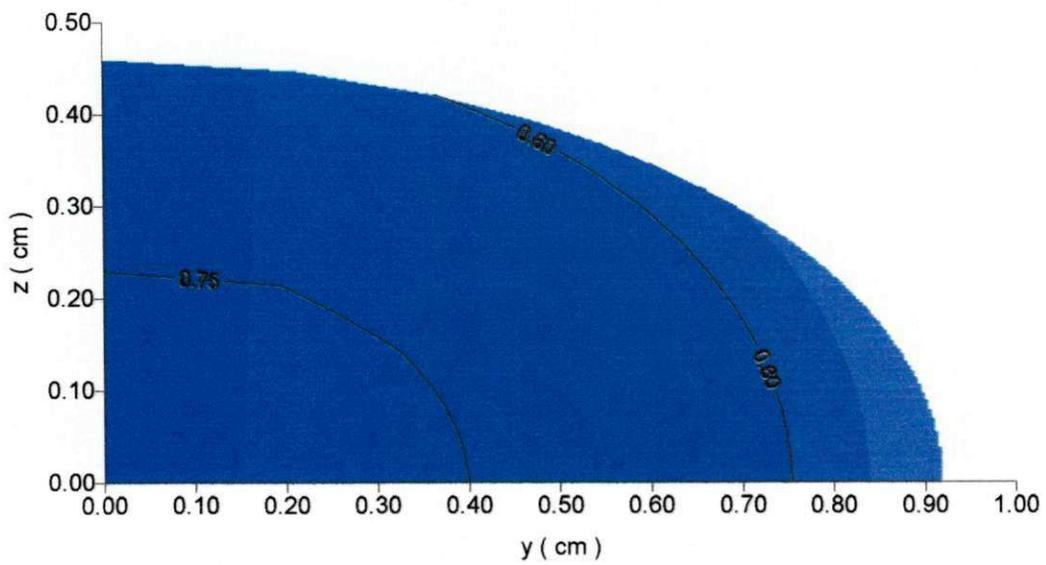


Figura 4.13 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2.0$, $Bi_m=1.0$, $B=0.60$ e $Fo = 0.09759$

Já foi dito que o modelo matemático apresentado permite a simulação do processo de secagem de um sólido esferoidal oblato, tendo formas que variam desde um disco circular até uma esfera. Então, este modelo possibilita a comparação entre a cinética de secagem de um sólido esferoidal e uma esfera que tenham o mesmo volume. Uma metodologia bastante utilizada no estudo da cinética de secagem de sólidos úmidos com uma forma qualquer é a de considerá-lo como se fosse uma esfera com o mesmo volume do sólido (Cavalcanti Mata, 1997). Na Figura 4.14 pode ser observada a cinética de secagem de três sólidos com formas de esferóides oblato com diferentes dimensões porém apresentando o mesmo volume. Pela metodologia da esfera de igual volume, estes três sólidos teriam a mesma cinética de secagem; no entanto, observando-se a Figura 4.14, verifica-se que isto não é verdade; seca mais lentamente o sólido cuja forma mais se aproxima de uma esfera. Fatores relevantes para o estudo da cinética de secagem são a razão área /volume e a forma geométrica do sólido. Em geral, pode-se dizer que quanto maior a relação área/volume, mais rápida é a secagem do sólido. Para a figura (4.14) o número de Fourier ($Fo = D t / R^2$) é definido com R sendo o raio da esfera de volume igual àquele dos três sólidos apresentados.

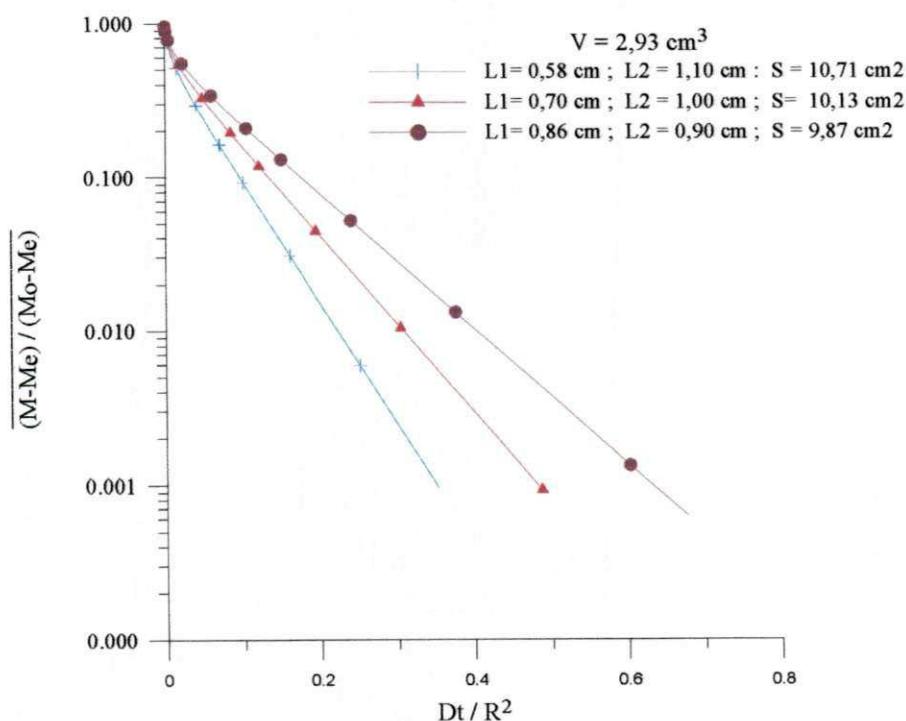


Figura 4.14 – Comparação entre a cinética de secagem de esferóides com igual volume e diferentes áreas superficiais.

4.2.4 Resultados obtidos com o modelo II

O modelo II apresentado neste trabalho trata da transferência simultânea de calor e massa no interior de um sólido, com condição de contorno convectiva na superfície de separação entre o produto e o ar de secagem. A seguir será simulada a cinética de secagem em camada fina da lentilha, evolução temporal da temperatura no seu centro e a distribuição de temperatura para dois tempos de secagem distintos.

Neste caso, os seguintes valores para as propriedades físicas da lentilha e do ar de secagem são considerados (Tang e Sokhansanj, 1993).

$T_a = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ → temperatura do ar de secagem

$UR = 30\%$ → umidade relativa do ar de secagem

$v_a = 0,3 \text{ m/s}$ → velocidade do ar de secagem

$k_f = 26,3 \times 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$ → condutividade térmica do fluido

$h_{fg} = 2430,75 \text{ kJ/kg}$ → calor latente de vaporização da água livre

$c_v = 1,9023 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ → calor sensível do vapor de água

$L_1 = 0,14 \text{ cm}$ e $L_2 = 0,34 \text{ cm}$ → dimensões da lentilha

$\bar{L} = 0,68 \text{ cm}$ → comprimento característico

$c_p = 1,8 \times 10^{-3} \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ → calor específico do produto

$\rho_p = 1375 \text{ kg/m}^3$ → densidade do produto

$k_p = 0,15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ condutividade térmica do produto

De acordo com Eckert e Drake, citados por Tang e Sokhansanj (1993a), o número de Lewis característico do processo de secagem de um produto é igual ao quociente entre a difusividade térmica e a difusividade de massa deste produto ($Le = \alpha/D$). Este número é um valor comparativo entre as taxas simultâneas de transferência de calor e massa. Na literatura, foi estimado para a lentilha um número de Lewis igual a 842 (Tang e Sokhansanj, 1993).

Segundo Young, citado por Tang e Sokhansanj (1993a), para valores do número de Lewis maiores que 60, o perfil de temperatura no interior do produto se desenvolve rapidamente, de tal forma que pode ser considerado que o produto está sendo seco a uma temperatura constante (condição isotérmica) e igual a temperatura do ar de secagem.

O número de Nusselt é um parâmetro adimensional que possibilita o cálculo da transferência convectiva de calor na superfície entre dois diferentes meios. Apesar de variados estudos relativos a escoamento de fluidos sobre sólidos esféricos, pouquíssimos trabalhos são dedicados à determinação do coeficiente de transferência convectiva de calor e massa na superfícies destes sólidos. Para altos números de Peclet e número de Reynolds tendendo a zero, é reportado no trabalho de Lima (1999) a seguinte correlação para o número de Nusselt médio.

$$\overline{NU} = 0,991 \bar{k} P_e^{1/3} \quad (4.1)$$

onde \bar{k} é um fator de correção que depende da razão de aspecto do esférico e P_e é o número de Peclet.

Normalmente, as correlações para se determinar os coeficientes de transporte de calor e massa são obtidos a partir de estudos envolvendo produtos não-biológicos. Embora a analogia entre os fenômenos de transferência de calor e massa em produtos biológicos não seja razoável, alguns pesquisadores se utilizam dela em seus modelos; outros, preferem obter os coeficientes de transferência a partir do ajuste dos dados obtidos com o modelo matemático aos dados experimentais.

O escoamento paralelo sobre uma placa plana é freqüentemente utilizado como uma aproximação para o escoamento sobre superfícies levemente curvas. Para este tipo de escoamento, a seguinte correlação pode ser utilizada (Incropera e DeWitt, 1990):

$$\overline{NU} = \frac{\bar{h}_c \bar{L}}{k_f} = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (4.2)$$

Re = número de Reynolds

Pr = número de Prandtl

\bar{h}_c = coeficiente médio de transferência de calor

\bar{L} = comprimento característico

k_f = condutividade térmica do fluido

Com os valores para as propriedades do produto e do ar de secagem apresentados, o número de Nusselt característico (dado pela equação 4.2) é 6,75 e o coeficiente de transferência de calor (h_c) 26 W/m² K. A simulação que será apresentada considera este valor de h_c , a transferência de massa do sólido para o ar de secagem se dando com condições de contorno de equilíbrio na superfície e coeficiente de encolhimento $B=0.0$.

A Figura 4.15 mostra a cinética de secagem e a variação da temperatura adimensional no centro da lentilha ao longo do processo. Como já foi mencionado, a temperatura final de equilíbrio da lentilha é atingida rapidamente; isto ocorre para um tempo próximo de 300s.

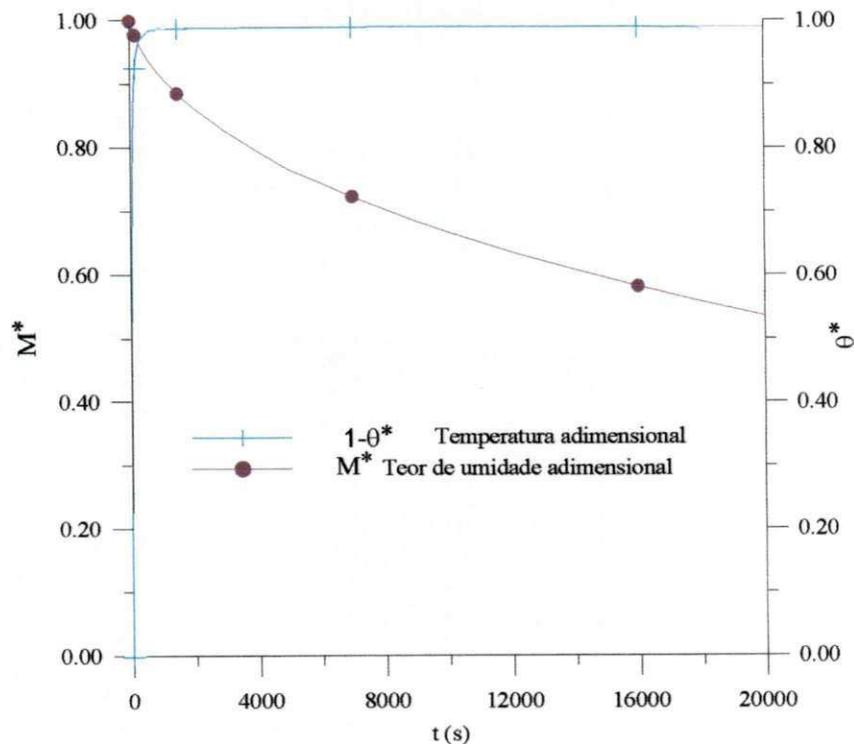


Figura 4.15 – Cinética de secagem e valores preditos para a temperatura no centro do produto

A Figura 4.16 mostra a distribuição de temperatura no interior da lentilha para o tempo de 20 s. Neste tempo, o valor da temperatura adimensional média é de 0,7913. Como era de se esperar, o comportamento da temperatura no interior do corpo é semelhante ao comportamento do teor de umidade, ou seja, nas regiões perto do centro da lentilha a temperatura de equilíbrio demora mais a ser atingida.

Na Figura 4.17 uma situação semelhante é apresentada, só que agora para um tempo de 100s. Neste tempo, a temperatura adimensional média é de 0,3161 e pode ser notado que a temperatura de equilíbrio da lentilha já está próxima de ser atingida.

O modelo que considera o fluxo de calor e massa acoplados resulta num aquecimento mais lento para o sólido. Nestas circunstâncias, se o modelo considerar a difusividade de massa dependente da temperatura do sólido, o acoplamento entre calor e massa terá também considerada influência nos resultados da cinética de secagem.

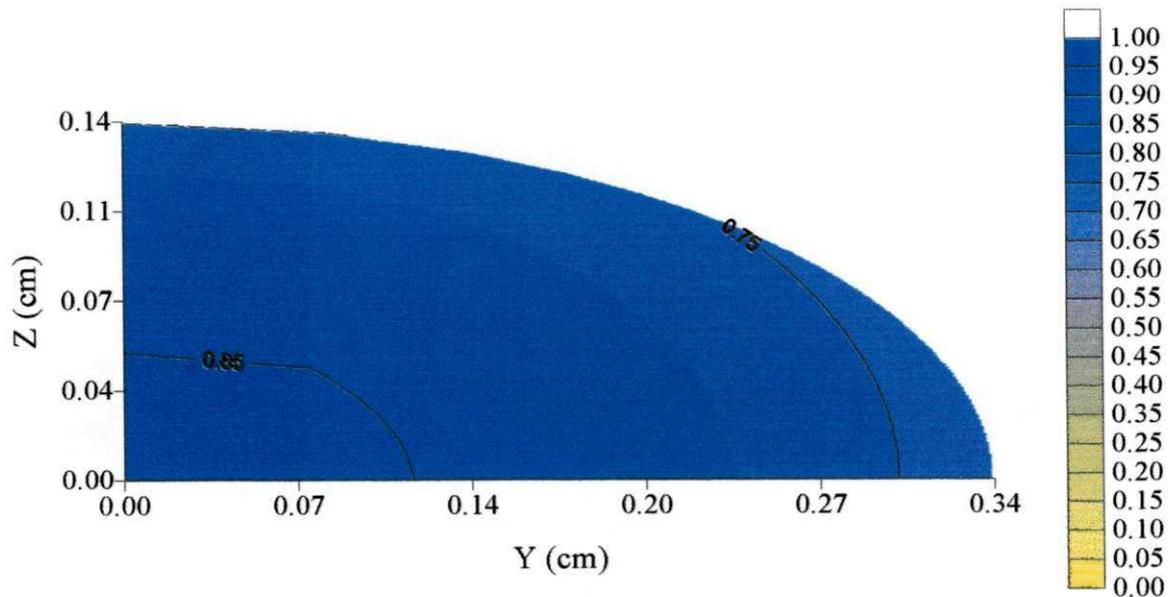


Figura 4.16 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo igual a 20 s.

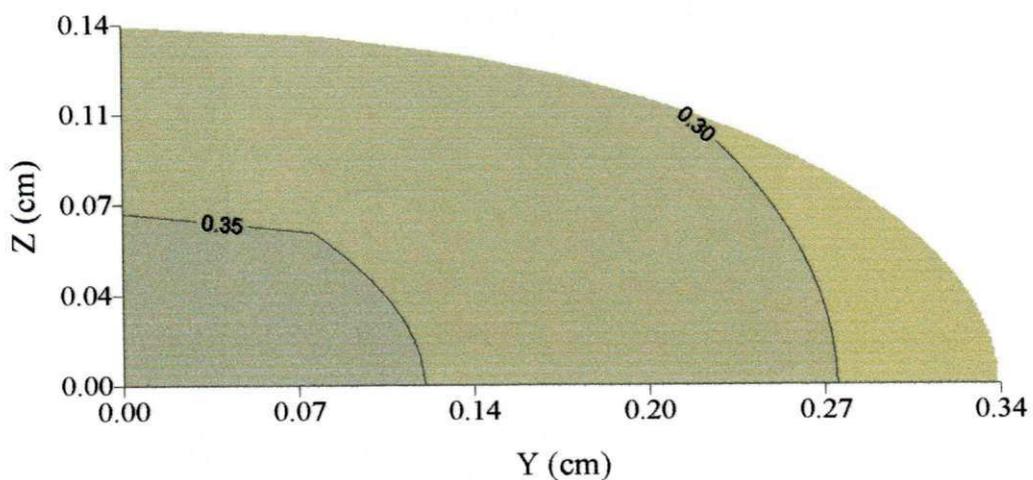


Figura 4.17 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo igual a 100 s.

4.2.5 Resultados obtidos com o modelo III

Atualmente, a eficiência energética é um dos principais objetivos a serem cumpridos no projeto de novos secadores. Anteriormente a esta concepção, a preocupação principal era com a capacidade de secagem do secador. Para aumentar esta capacidade e ao mesmo tempo manter um padrão de secagem uniforme para todo o produto, a solução clássica era o aumento da temperatura e do fluxo do ar de secagem junto com a diminuição do tamanho da coluna do grão; como consequência, uma maior quantidade de energia era requerida na operação do secador. Para adicionar aos antigos projetos de secadores a possibilidade de um menor consumo de energia, novas técnicas de operação foram concebidas; uma delas é a secagem intermitente, ou, processo de têmpera.

Sabbah *et al.*, citados por Fioreze (1986) definiram o tempo total para o processo de têmpera como o tempo necessário para o teor de umidade na superfície atingir um valor máximo, a partir do momento em que o processo de secagem é interrompido. Considerando que no momento da interrupção toda a água se encontrasse no centro do produto esférico, matematicamente este tempo é dado pela expressão:

$$t = \frac{R^2}{6 D_{esf}} \quad (4.3)$$

onde R é o raio da esfera e D é o coeficiente de difusão.

Troger e Butler, citados por Fioreze (1986) desenvolveram pesquisas com secagem de amendoim com interrupções temporárias do fluxo de ar e concluíram que um processo de secagem utilizando altos valores do fluxo de ar gasta 74% mais energia em comparação com a secagem a baixos valores do fluxo, enquanto que o tempo de secagem diminui apenas 20%, e que interrupções periódicas no fluxo de ar não implica em significativas mudanças na temperatura do grão e nem incremento no tempo de secagem.

Vários outros trabalhos, mudando a velocidade do fluxo de ar, temperatura do ar e/ou tempo de têmpera podem ser encontrados na literatura; todas estas variações nos parâmetros de operação do secador têm como objetivo a maior eficiência do processo de secagem e a obtenção de melhor qualidade do produto no final do processo.

Na Figura 4.18 pode-se ver a cinética de secagem em camada fina da lentilha, utilizando as propriedades físicas e dimensões da lentilha usadas no modelo anterior (modelo II). Na figura é apresentado o processo de secagem durante 24h, utilizando o método de secagem contínua e o método de secagem intermitente (ou de têmpera). Tomando como base um tempo de têmpera de 30000s e a existência de somente um período de têmpera (1 passe) durante o tempo total de secagem, verifica-se que o momento mais eficiente para se começar a têmpera é 25000s. Vê-se que o teor de umidade médio no final de 24h de secagem efetiva é menor quando é usado um processo de secagem intermitente. Isto está de acordo com os trabalhos de Fio-reze (1986) e Lima (1999).

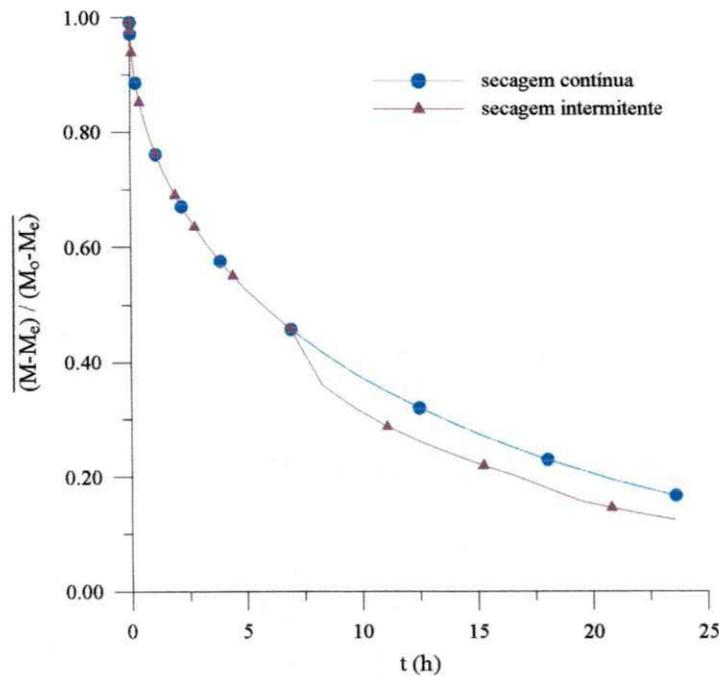


Figura 4.18 – Comparação entre a cinética de secagem contínua e a secagem intermitente da lentilha para um tempo de parada de 8,33h.

Na Figura 4.19-a pode ser visto o processo de secagem da lentilha em 4 diferentes situações. O tempo total de processo em todos os casos é de 23,3 h. Neste caso, a secagem contínua apresenta o menor teor de umidade no final do processo, entretanto um maior tempo útil de operação do secador é utilizado. Para os outros casos, um tempo total de têmpera de 30000s é considerado, sendo que o processo de secagem é realizado em 1passe de 30000s, 2pases de 15000s ou 3 pases de 10000s. Nestes casos, a secagem realizada com um único passe apresenta o maior teor de umidade final. Com 2 ou 3 pases as curvas apresentam praticamente o mesmo teor de umidade final, no entanto, se consegue um menor teor de umidade no final do processo, em relação àquele conseguido com somente um passe de secagem.

Pode-se ver na Figura 4.19-b os mesmos casos apresentados na Figura 4.19-a, sem a visualização da cinética de secagem nos intervalos de têmpera. Nota-se agora que sempre depois de um intervalo de têmpera, uma melhor taxa de secagem é obtida.

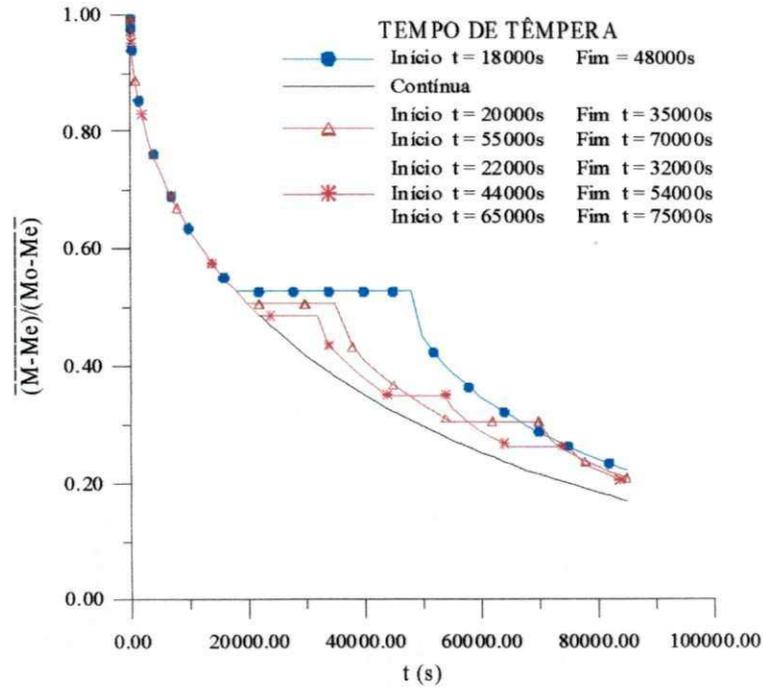


Figura 4.19-a –Cinética de secagem da lentilha (mostrando o tempo de têmpera)

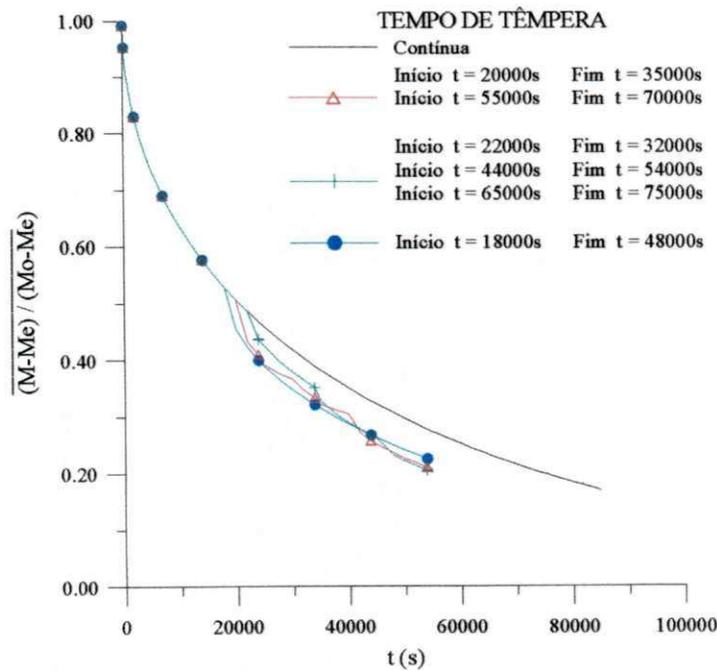


Figura 4.19-b Cinética de secagem da lentilha (omitindo o tempo de têmpera)

As Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 mostram a distribuição do teor umidade nos instantes inicial, intermediário e final do processo de têmpera. Observando-se estas figuras é notado que com o avanço do tempo de têmpera, a umidade no interior do produto vai se uniformizando; se o tempo for suficientemente longo (tempo total de têmpera) a umidade no interior do corpo estará totalmente uniforme (Figura 4.23).

Apesar dos sólidos (Figuras 4.20, 4.21 e 4.22) terem diferentes perfis de umidade, eles possuem o mesmo teor de umidade médio. Neste caso, este teor de umidade é aquele obtido no início do processo de têmpera e vale 0,4599. Na Figura (4.20) aparecem linhas que indicam teores de umidade de 0,25, 0,50 e 0,75 no interior do sólido. A Figura (4.21) indica que os pontos com teores de umidade de 0,25 estão restritos a uma pequena região perto do foco e, na figura (4.22), pontos com teores de umidade de 0,25 e 0,75 já não existem. A Figura 4.23 ilustra o perfil de umidade no interior do sólido depois do tempo denominado “tempo total de têmpera”, neste instante, este perfil é praticamente uniforme, com uma diferença de 2.9 % entre o maior e menor teor de umidade pontual.

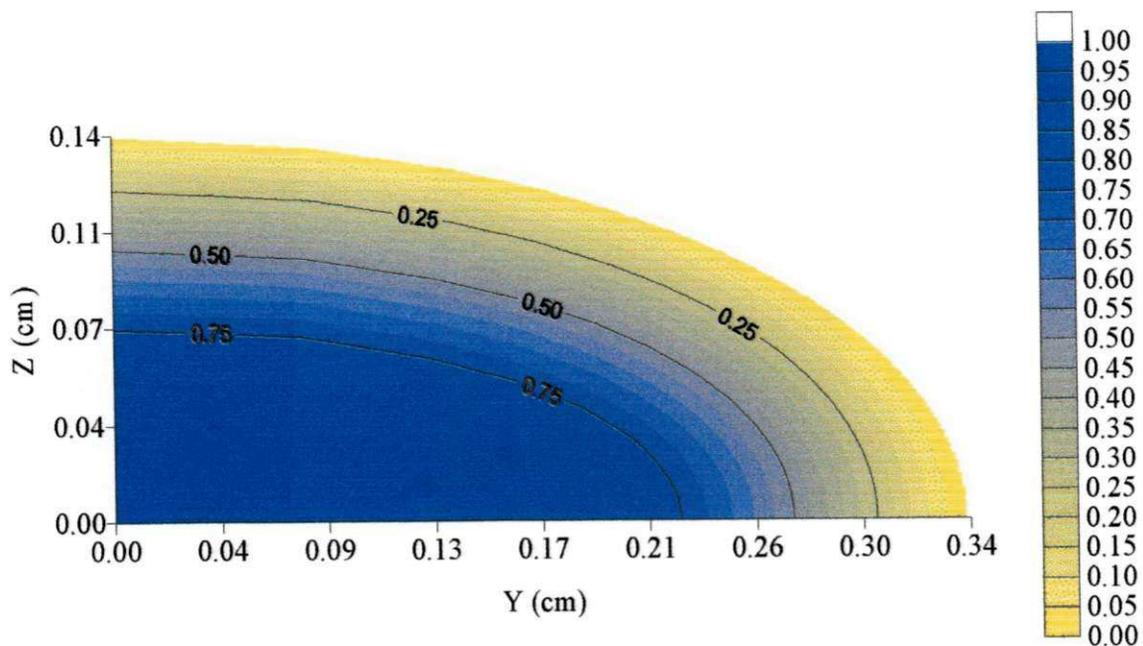


Figura 4.20 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 25000s$ (tempo equivalente ao início do processo de têmpera)

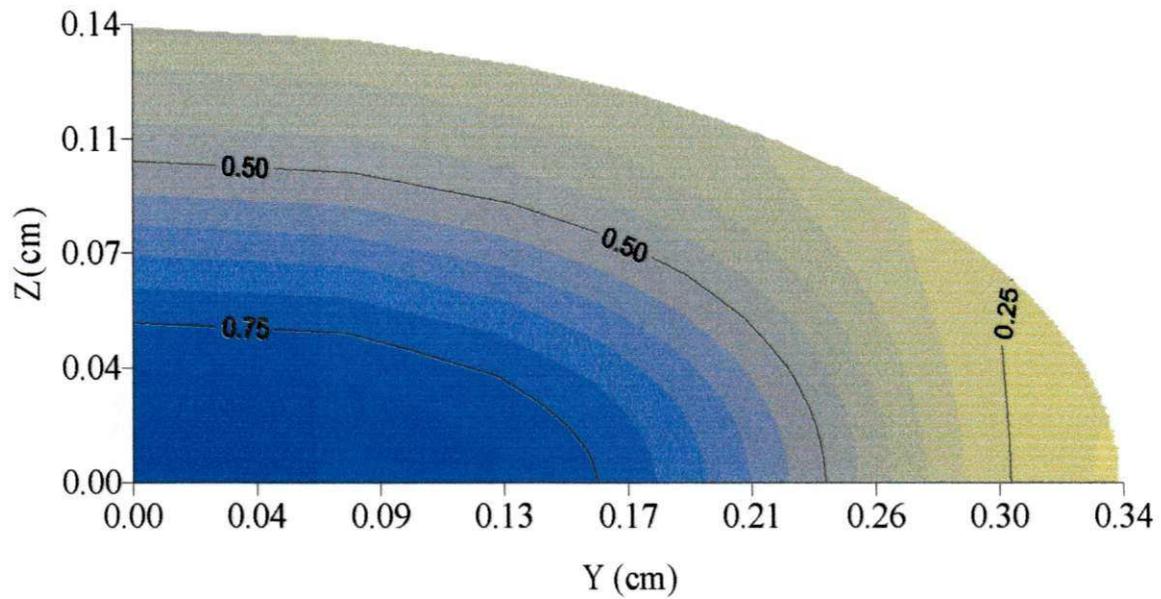


Figura 4.21 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 40000s$ (tempo equivalente à metade do processo de têmpera)

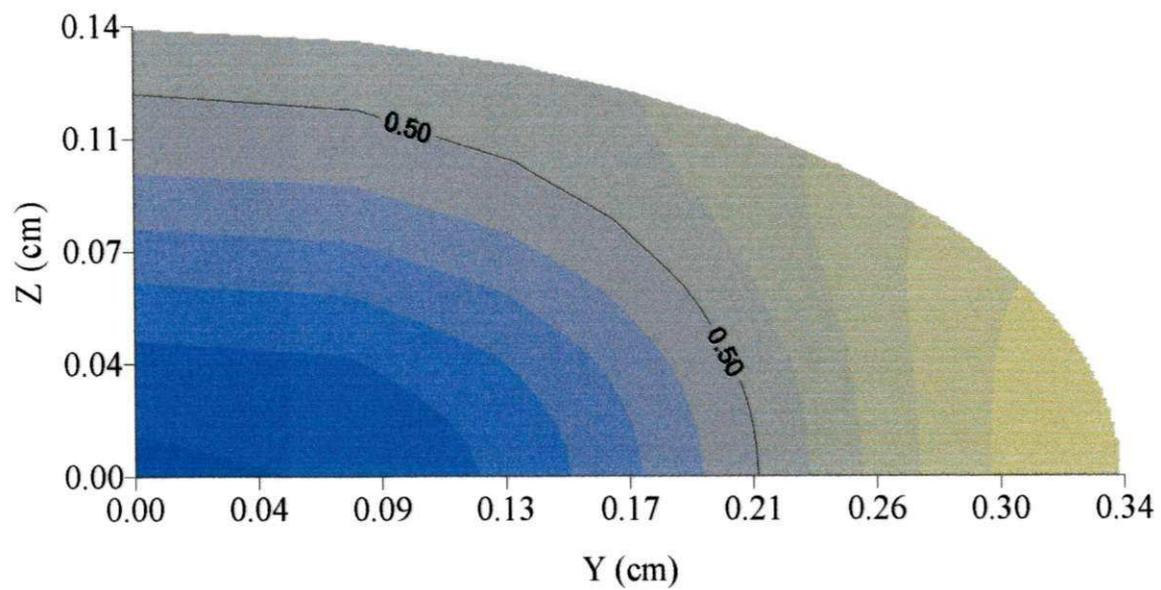


Figura 4.22 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t = 55000s$ (tempo equivalente ao final do processo de têmpera)

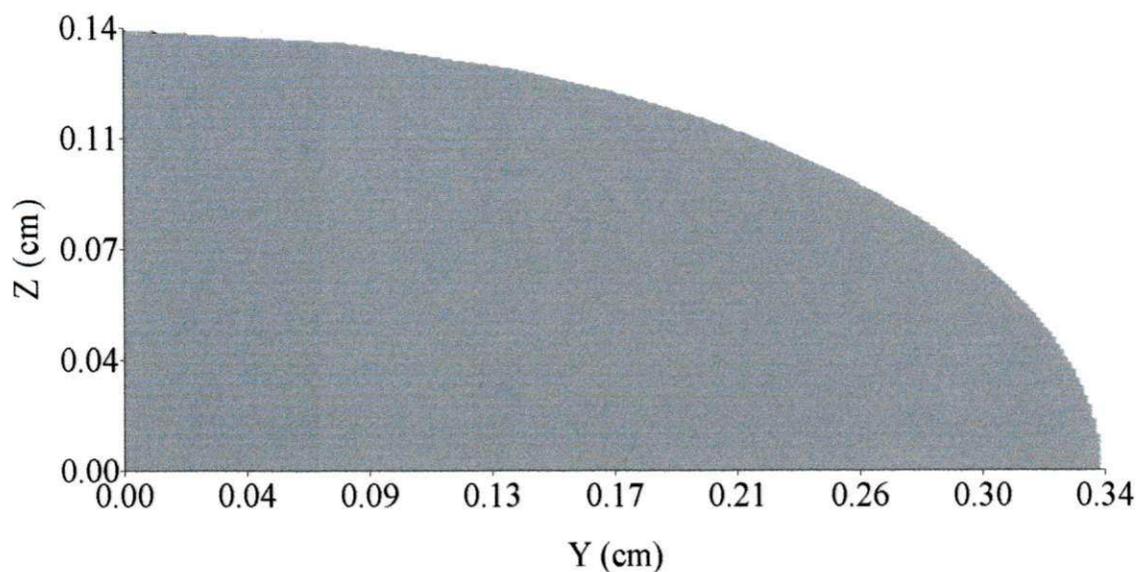


Figura 4.23 – Distribuição de umidade no interior da lentilha para $t=400000s$ (tempo total de têmpera)

Utilizando um tempo de $8,5 \times 10^4s$ (23,3h) de operação útil do secador, pode-se simular um processo de secagem contínuo, com um passe de têmpera entre $2,5 \times 10^4s$ e $5,5 \times 10^4s$ ou ainda com um passe de têmpera entre $2,5 \times 10^4s$ e $4,0 \times 10^5s$. O teor de umidade médio no final de cada processo será respectivamente 0.1698, 0.1374 e 0.1162. A diferença do teor de umidade entre o caso contínuo e o último caso é de 16%. Como se vê, diferentes simulações visando a eficiência energética do secador e/ ou a qualidade final do produto podem ser analisadas com a utilização do modelo III. Estes estudos visam principalmente determinar o número de passes e o tempo de têmpera para a otimização do processo de secagem.

4.3 Aplicação dos modelos a dados experimentais de secagem de lentilhas.

4.3.1 Estimação não linear dos parâmetros

Nas Figuras de 4.24 a 4.29 encontram-se as cinéticas de secagem da lentilha obtidas na literatura, sendo que no eixo das ordenadas é indicado o teor de umidade médio. Vale salientar que ao plotar os resultados com \bar{M}^* pôde-se notar que há uma inversão na representação gráfica da cinética de secagem. Por exemplo, para $T = 23\text{ }^\circ\text{C}$ (Figura 4.27), a curva que decai mais rapidamente é aquela em que a umidade relativa do ar é 50 %, enquanto que a curva mais lenta é a de umidade relativa 15 %. Caso semelhante pôde ser notado para as demais curvas de secagem. Na verdade, estes resultados são devidos ao valor do teor de umidade de equilíbrio que é considerado na definição de \bar{M}^* (equação 3.40).

Posteriormente, para calcular os coeficientes de difusão e de transferência convectiva para a lentilha, nas diferentes condições de secagem, uma correlação entre pontos experimentais será obtida, conforme mencionado no capítulo 3. A tabela 4.2 mostra os valores de A_i e k_i que aparecem na equação 3.97, para todos os casos estudados.

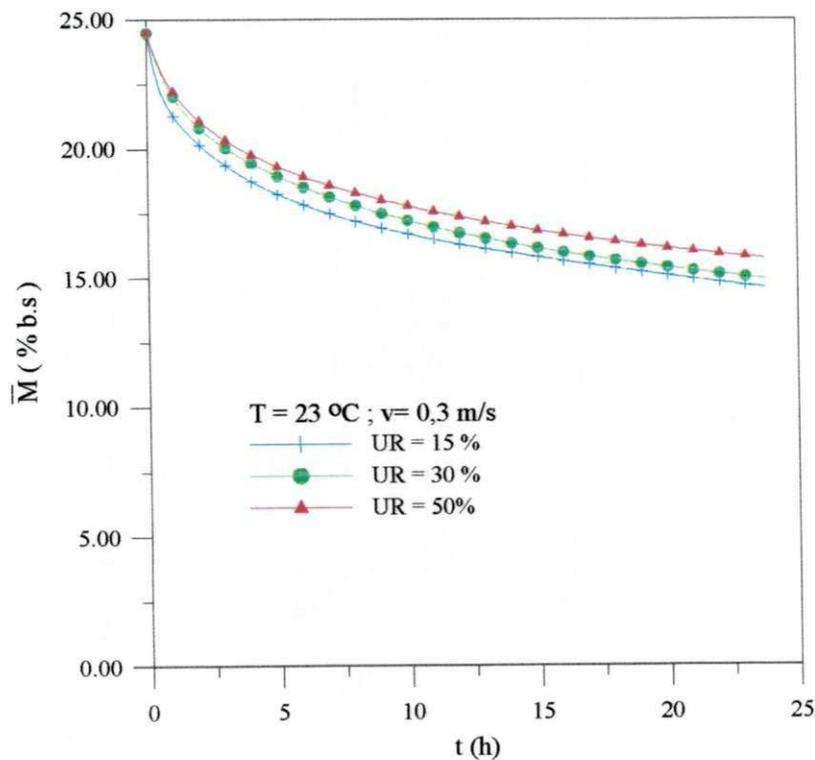


Figura 4.24 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a secagem de lentilhas par a $T = 23\text{ }^\circ\text{C}$

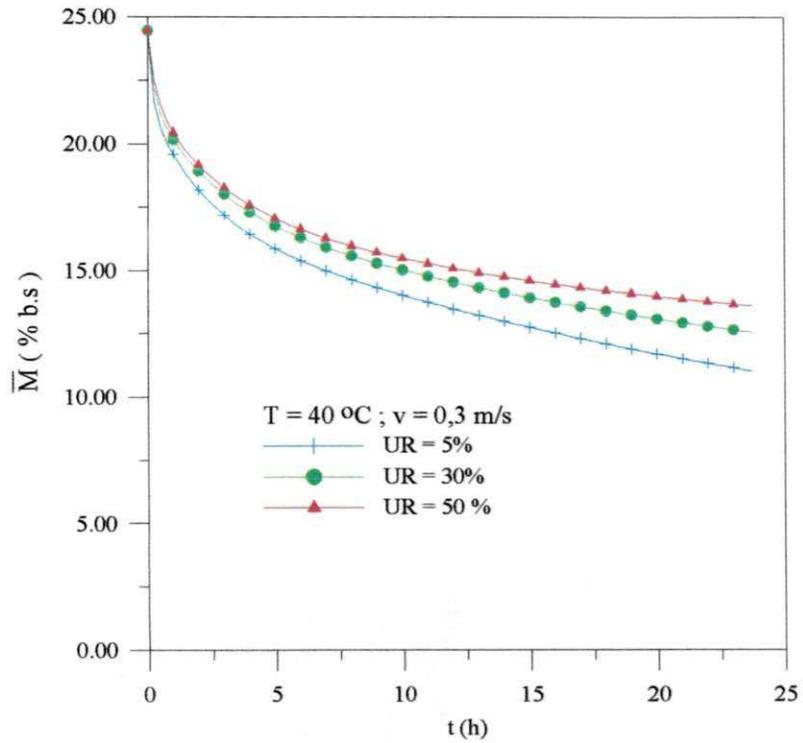


Figura 4.25 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a secagem de lentilhas para $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

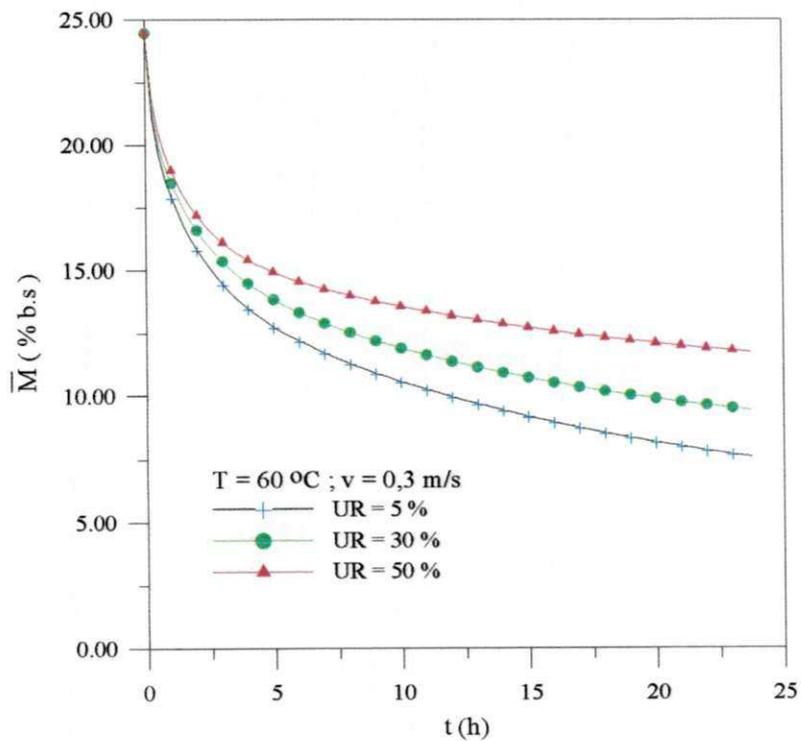


Figura 4.26 – Dados experimentais do teor de umidade médio durante a secagem de lentilhas para $T = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$.

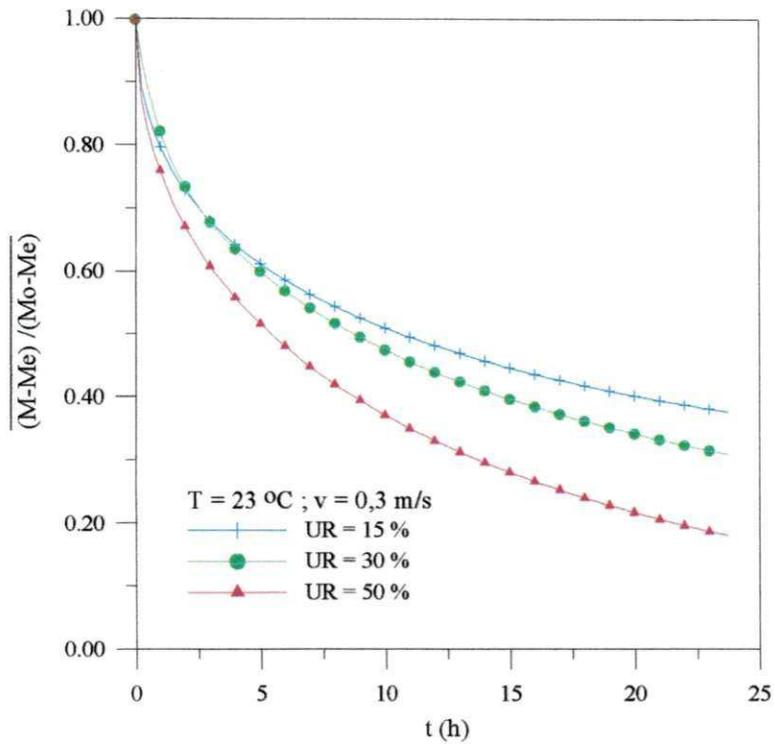


Figura 4.27 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 23 \text{ }^\circ\text{C}$.

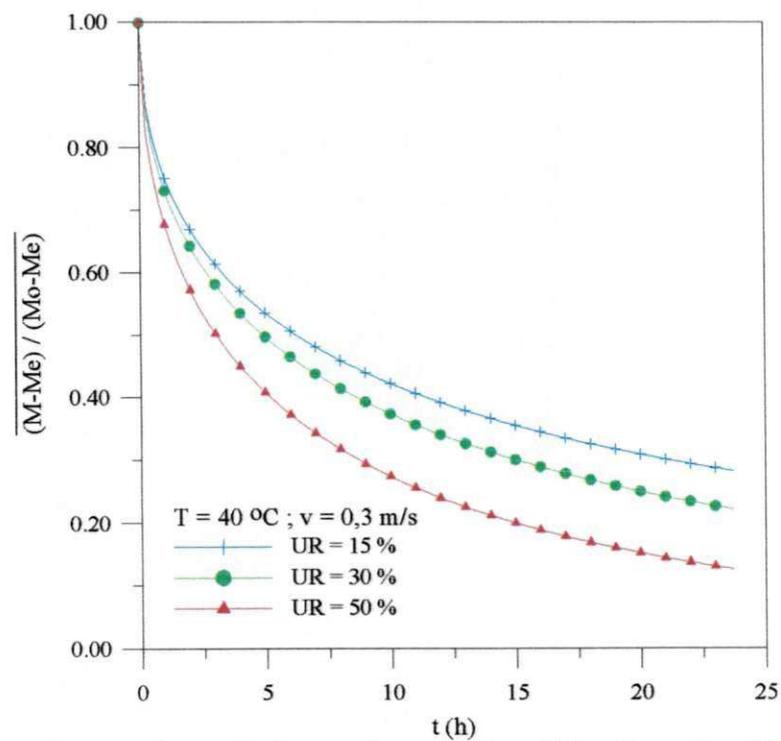


Figura 4.28 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 40 \text{ }^\circ\text{C}$

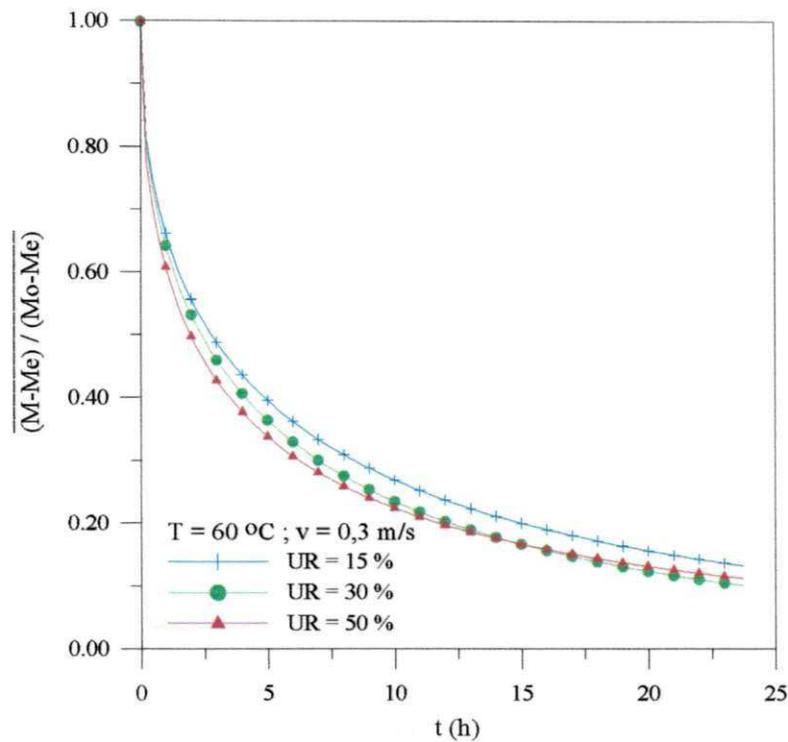


Figura 4.29 – Figura 4.27 – Dados experimentais do teor de umidade médio adimensional durante a secagem da lentilha para $T = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$

Na Tabela (4.2) encontram-se os coeficientes A_i e k_i que ajustam a equação (3.97) aos dados experimentais obtidos na literatura e que foram utilizados nos estudos realizados neste trabalho, bem como os coeficientes de correlação dos ajustes (R).

Tabela 4.2 – Parâmetros da equação (3.97) ajustados aos dados experimentais de razão de umidade média.

	A1	A2	A3	K1	K2	K3	R
Caso 1	0,2638	0,6072	0,1290	0,00008451	0,000005603	0,0008055	0,99972
Caso 2	0,1740	0,2913	0,5348	0,0003212	0,0004712	0,000006567	0,99959
Caso 3	0,1386	0,2522	0,6093	0,0004143	0,00009825	0,00001436	0,99972
Caso 4	0,1583	0,2382	0,6035	0,001570	0,0001284	0,000009421	0,99978
Caso 5	0,1794	0,2645	0,5561	0,001106	0,0001080	0,00001106	0,99962
Caso 6	0,1993	0,3284	0,4724	0,0009276	0,0001082	0,00001561	0,99915
Caso 7	0,1762	0,3266	0,4972	0,001370	0,00011534	0,00001630	0,99947
Caso 8	0,1817	0,3393	0,4790	0,001439	0,0001582	0,00001896	0,99968
Caso 9	0,1691	0,4161	0,4148	0,001274	0,0001582	0,00001610	0,99979

4.3.2 Aplicação dos modelos propostos à secagem de lentilha

4.3.2.1 Modelo I

a) h_m infinito e $B=0.0$

O modelo I, apresentado no item 3.4.1 do capítulo 3 é baseado na solução da equação de difusão em coordenadas esferoidais oblatas, com condição convectiva na superfície e incorporando o encolhimento do produto durante o processo de secagem. nas Figuras de 4.30 até 4.38 estão o ajuste dos dados obtidos com o modelo I aos dados experimentais da literatura, considerando o coeficiente de transferência convectiva de massa (h_m) infinito e o coeficiente de encolhimento (B) igual a zero.

Para todos os casos apresentados na Tabela 3.1, o ajuste obtido com o modelo I, com h_m infinito e $B = 0.0$ não foi satisfatório. Este resultado já era previsto e é devido às condições de contorno utilizadas, à não consideração do coeficiente de encolhimento diferente de zero e ao fato de considerar-se a difusividade de massa constante no decorrer de todo processo de secagem.

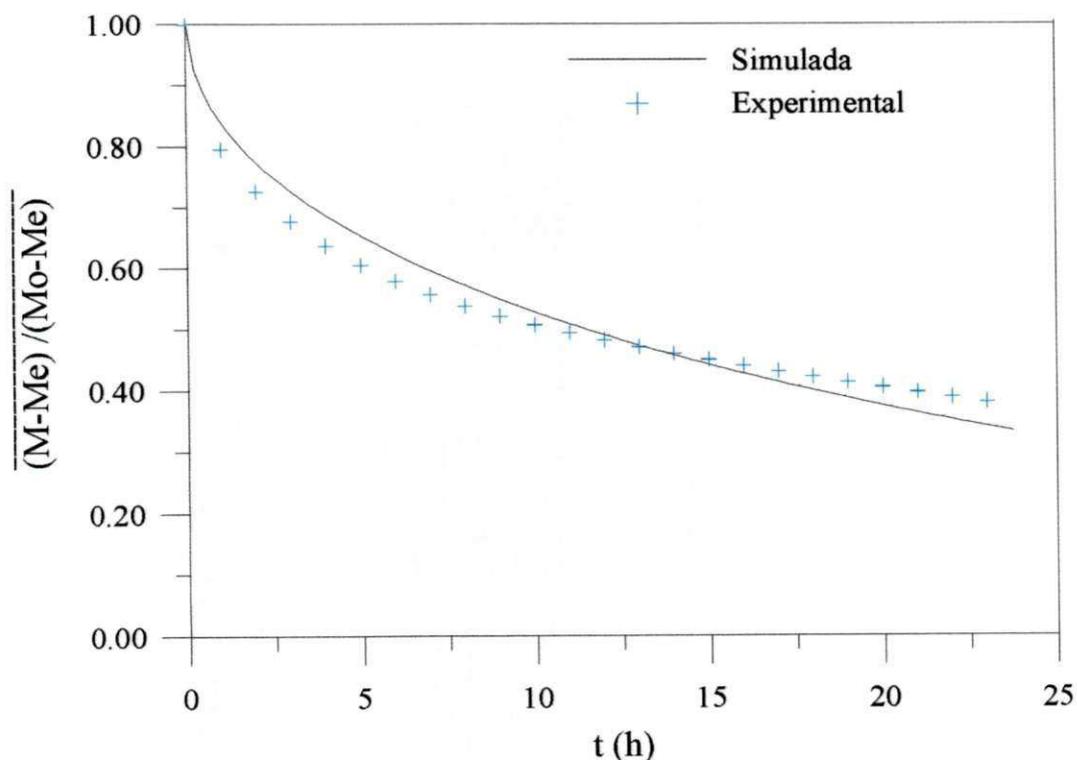


Figura 4.30 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).

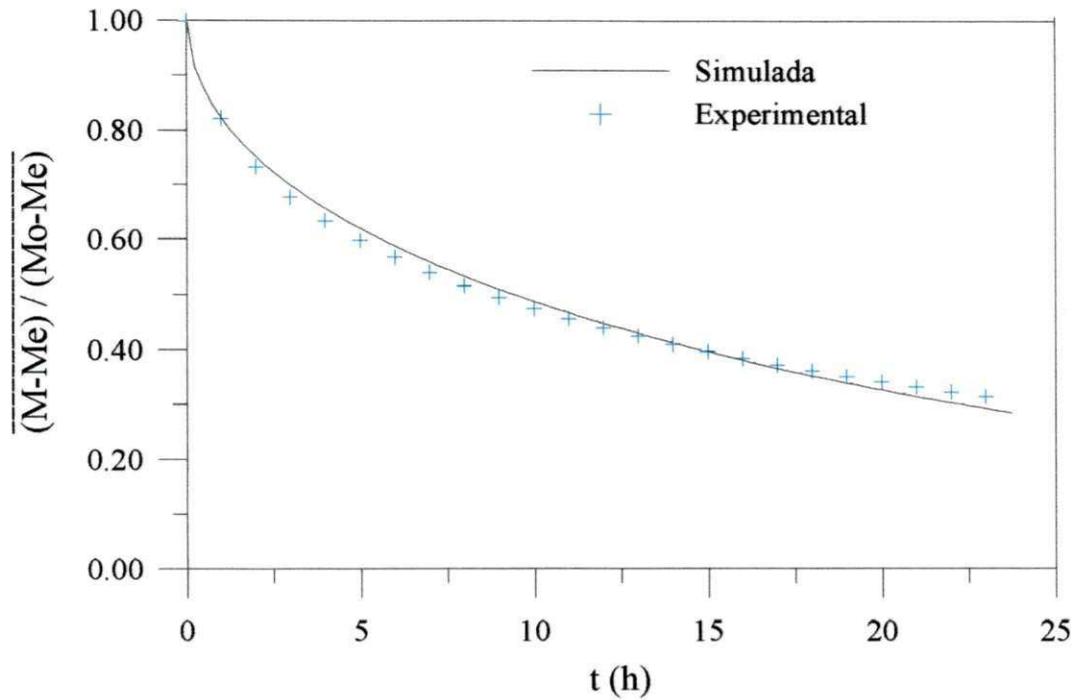


Figura 4.31 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).

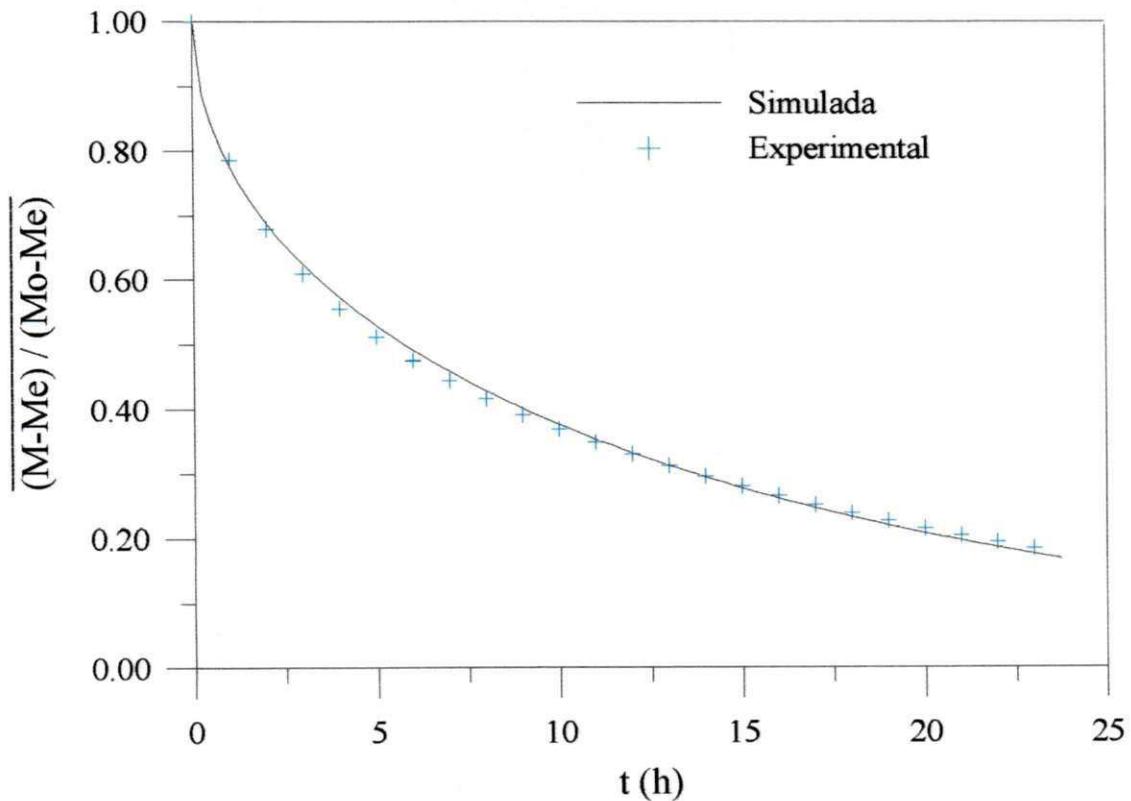


Figura 4.32 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).

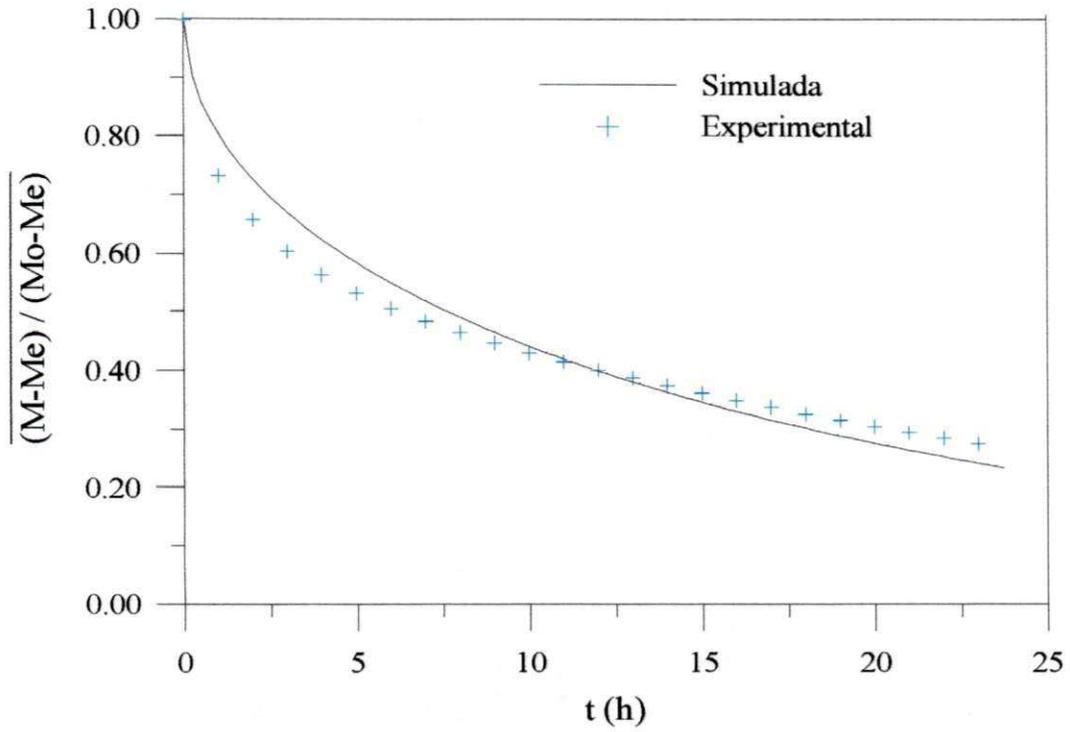


Figura 4.33 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).

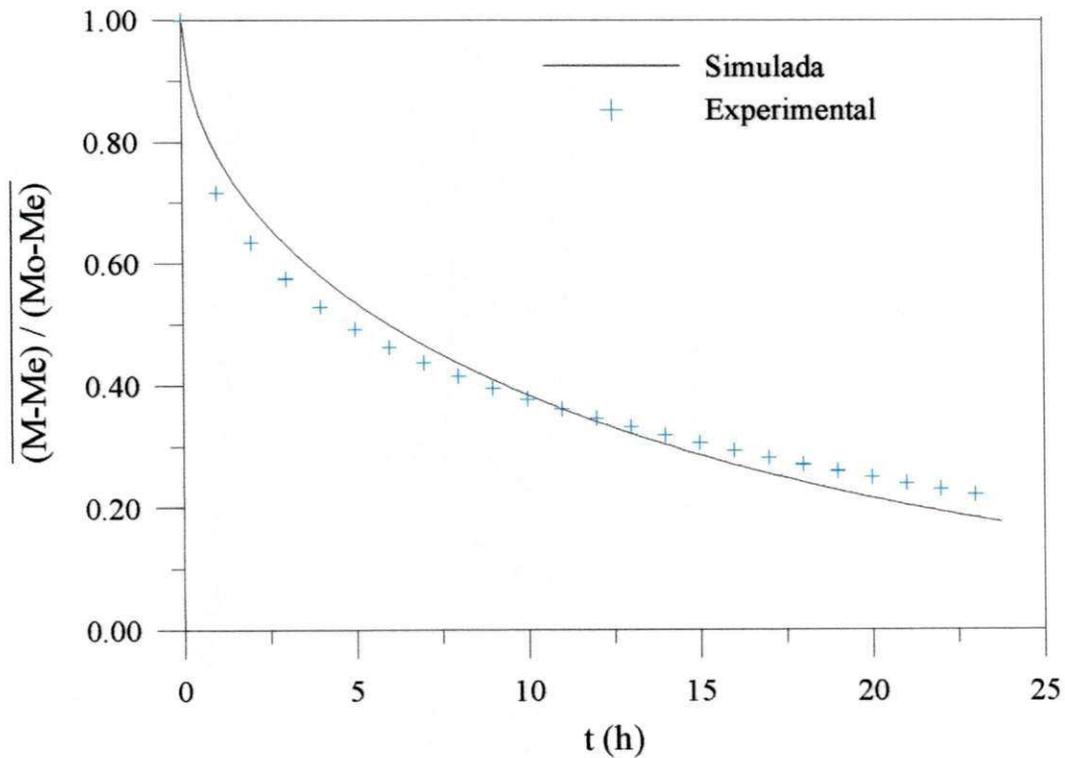


Figura 4.34 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).

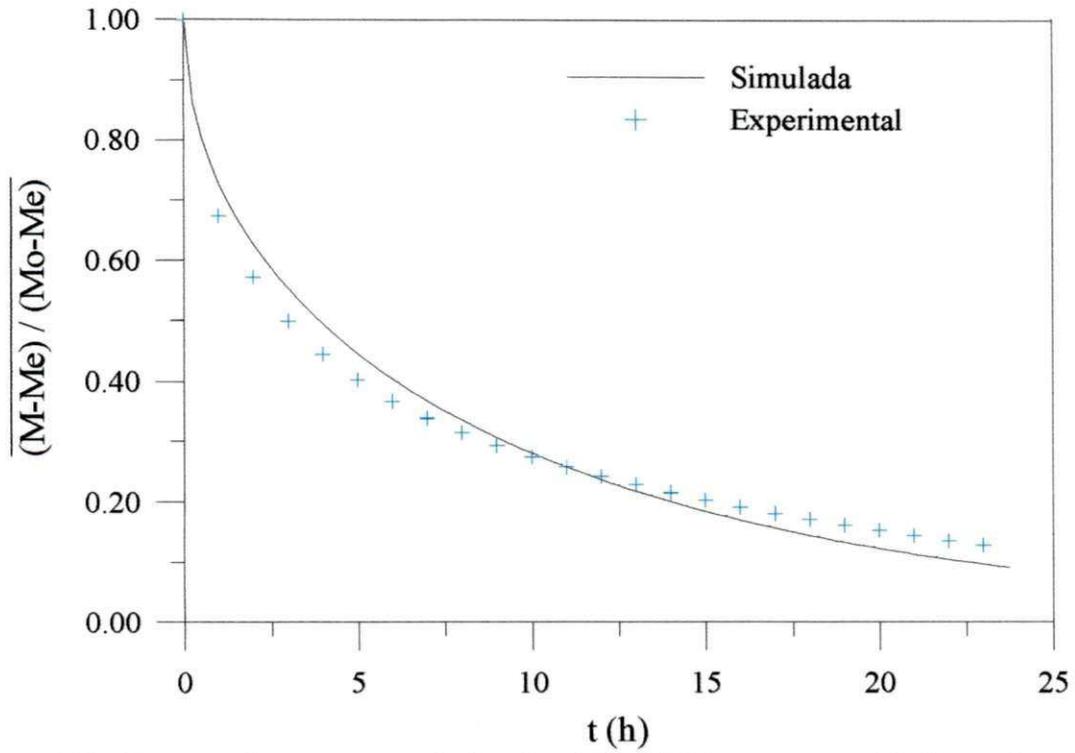


Figura 4.35 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).

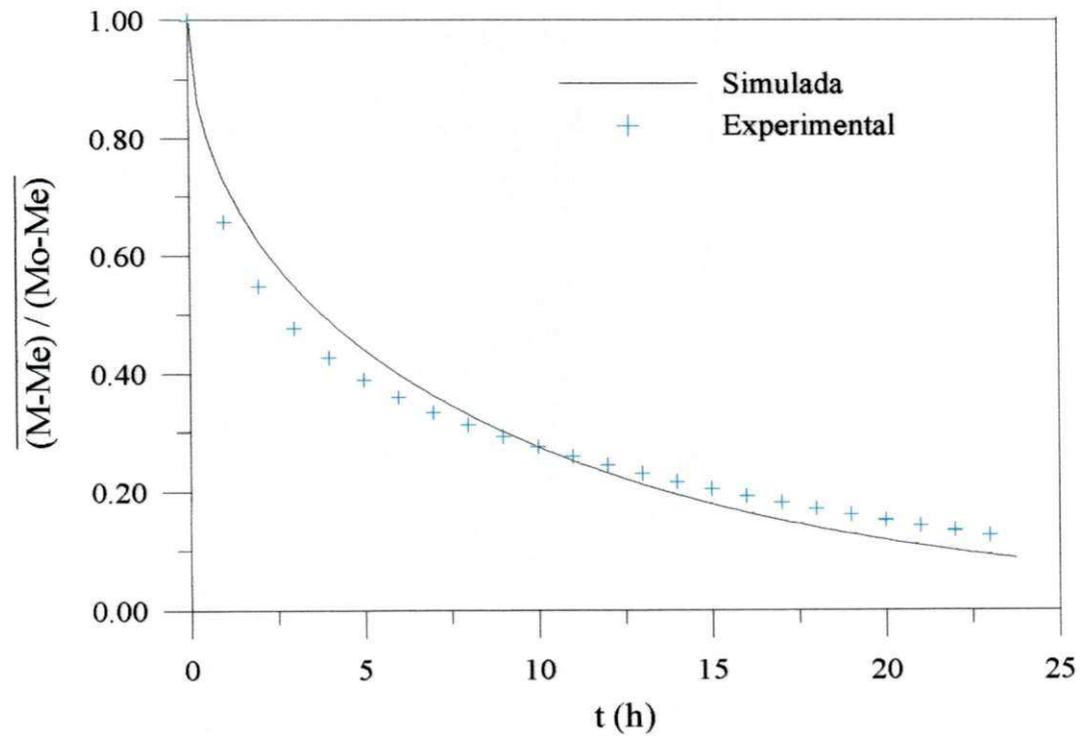


Figura 4.36 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,0$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).

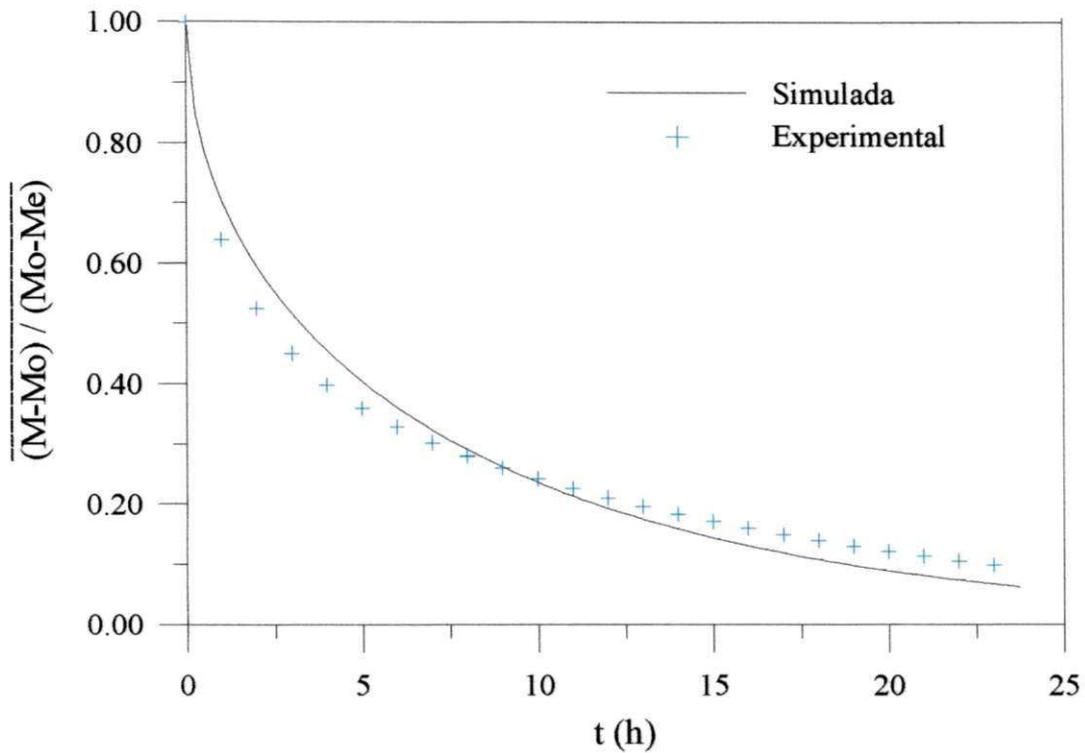


Figura 4.37 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).

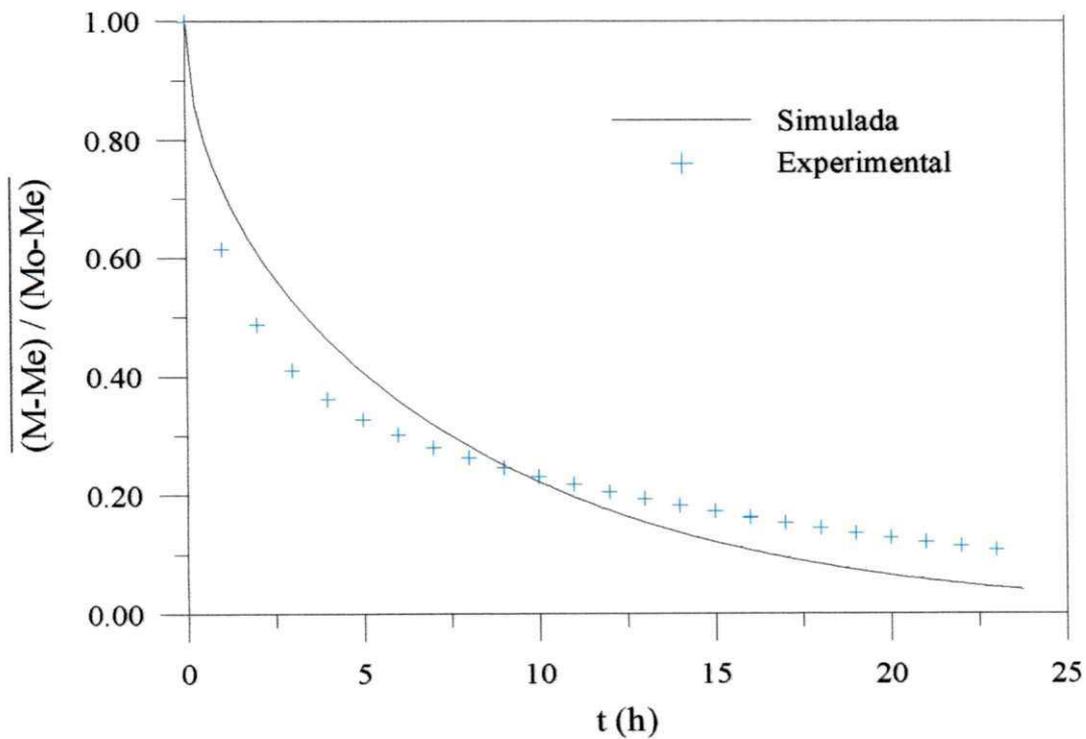


Figura 4.38 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).

Numa análise das curvas apresentadas nas Figuras de 4.30 até 4.38, observa-se um decréscimo mais acentuado da razão de umidade nas curvas experimentais durante as primeiras horas do processo de secagem. Ocorre a inversão deste resultado a partir de um determinado instante do processo. Isto se dá devido às altas taxas do teor de umidade médio no início do processo de secagem da lentilha, dificultando assim o ajuste com a difusividade de massa considerada constante, principalmente para temperaturas mais elevadas.

b) h_m infinito e $B = 0.17$

A lentilha a 15 % de teor de umidade (b.s), tem uma espessura média de 2,8 mm e um diâmetro médio de 6,8 mm, de acordo com Tang e Sokhansanj, (1994). O volume médio da lentilha quando seu teor de umidade decresce de 24,1 % até 5 % reduz em média 17 %. Desde que o coeficiente de encolhimento adimensional B representa exatamente este decréscimo de volume, nas Figuras de 4.39 até 4.47 observa-se o ajuste utilizando o modelo I com o coeficiente de encolhimento $B = 0,17$.

A simulação da cinética de secagem da lentilha considerando o seu encolhimento não apresentou melhor ajuste do que o obtido com o modelo I-a. Como pode ser visto na tabela 4.3 da seção 4.3.3, o erro relativo quando o encolhimento da lentilha foi considerado aumentou. No entanto, embora o erro tenha aumentado, este modelo é fisicamente mais realista; portanto, os resultados por ele apresentados são mais consistentes.

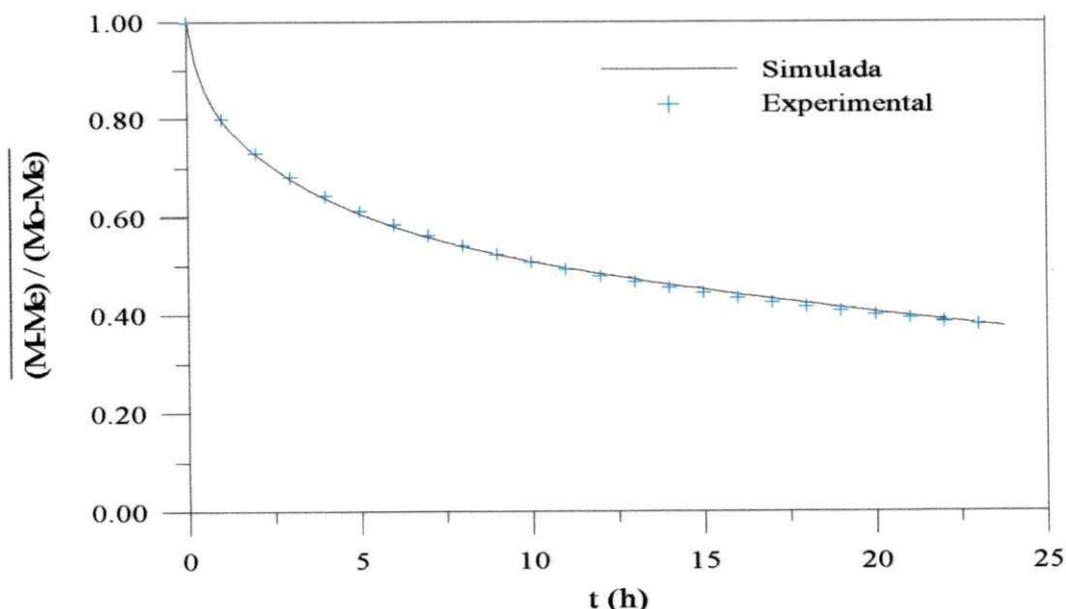


Figura 4.39 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).

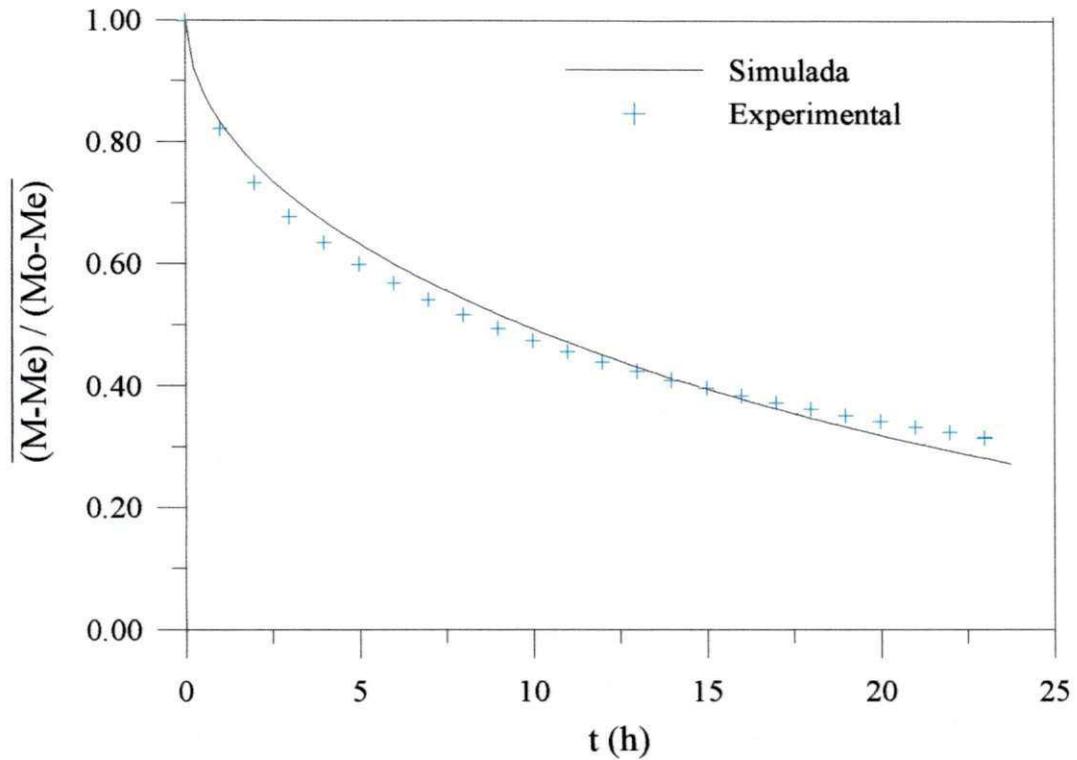


Figura 4.40 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).

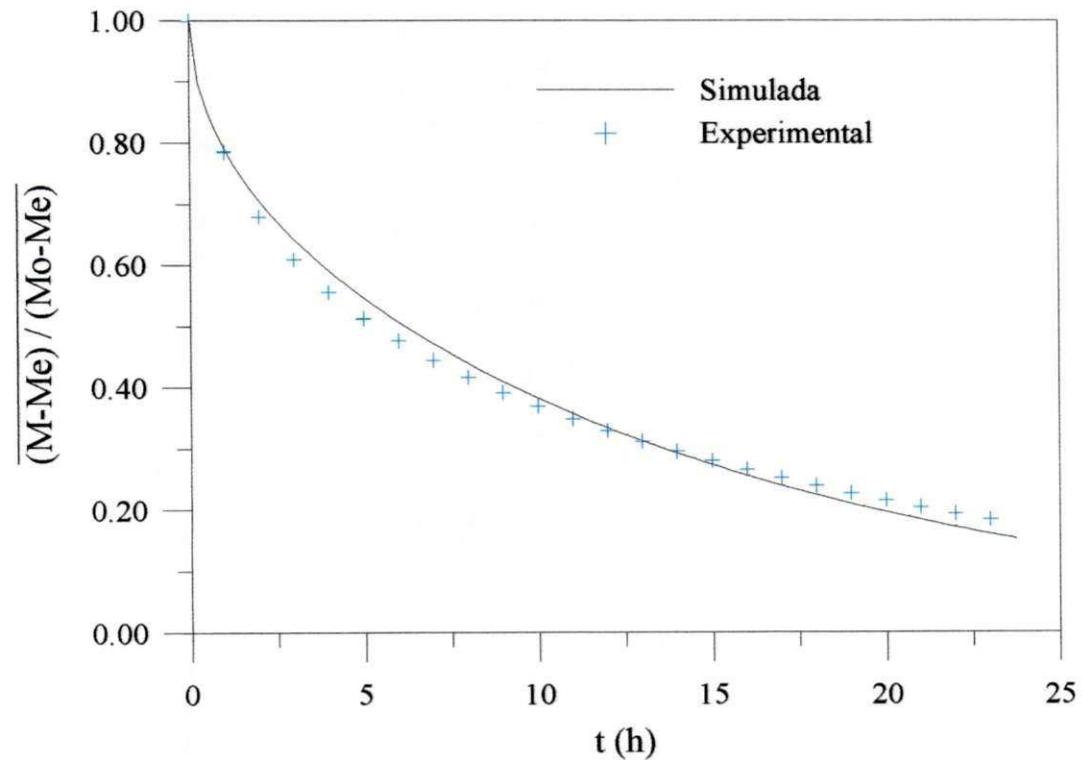


Figura 4.41 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).

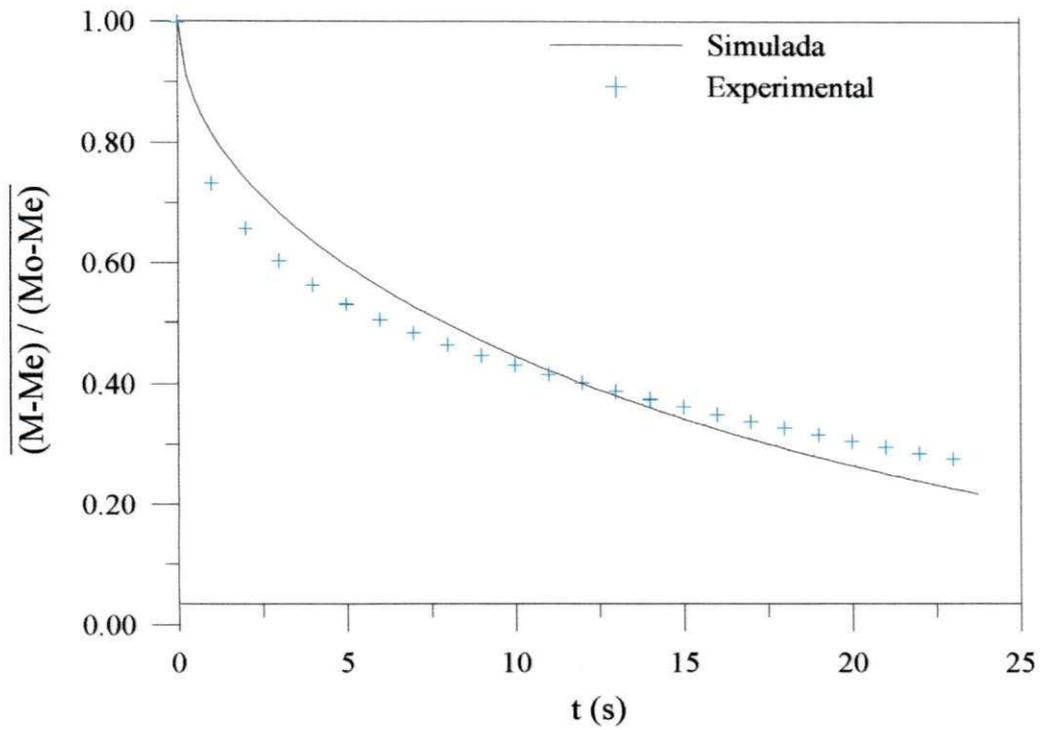


Figura 4.42 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).

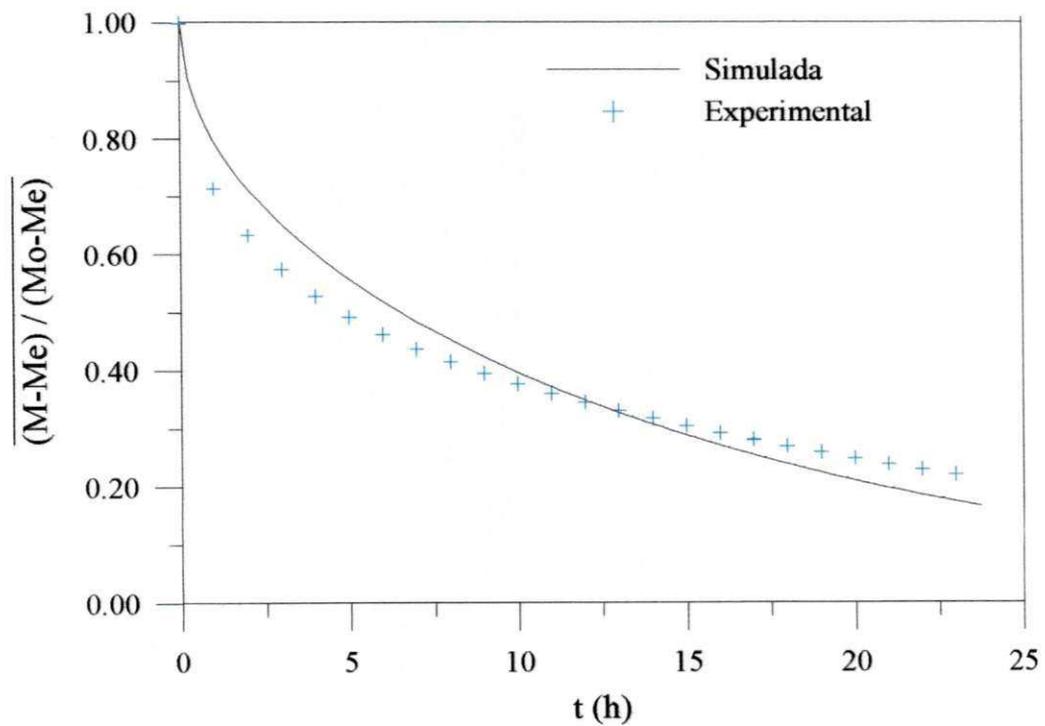


Figura 4.43 - Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).

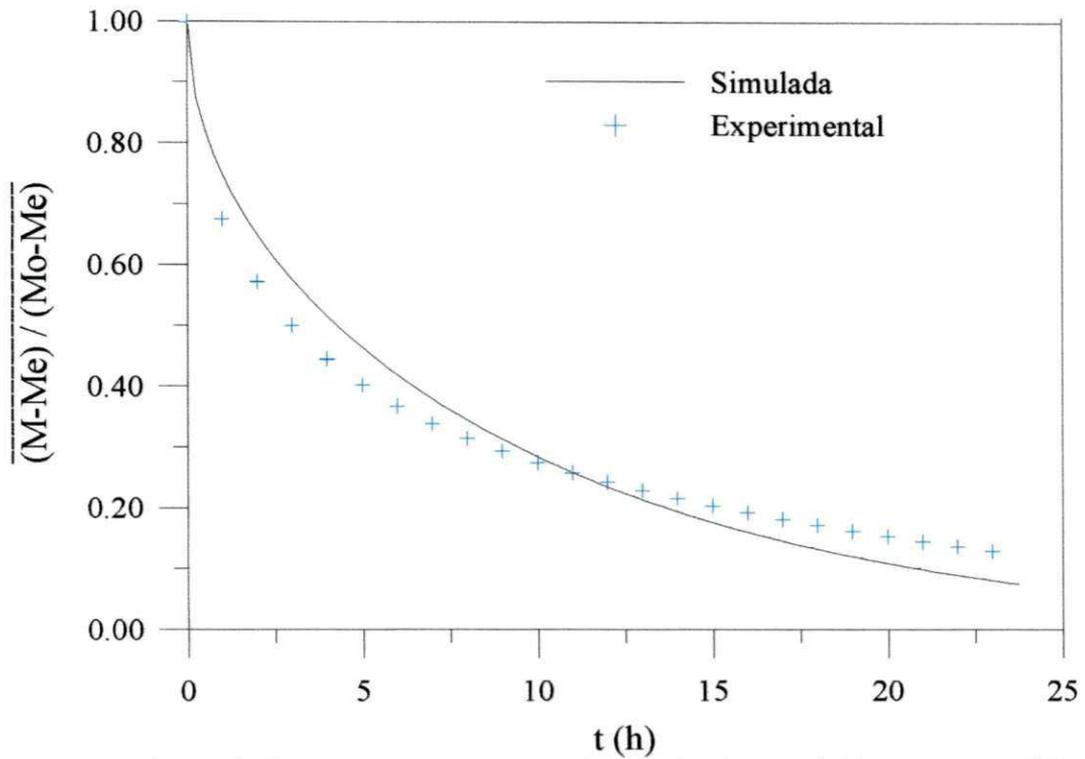


Figura 4.44 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).

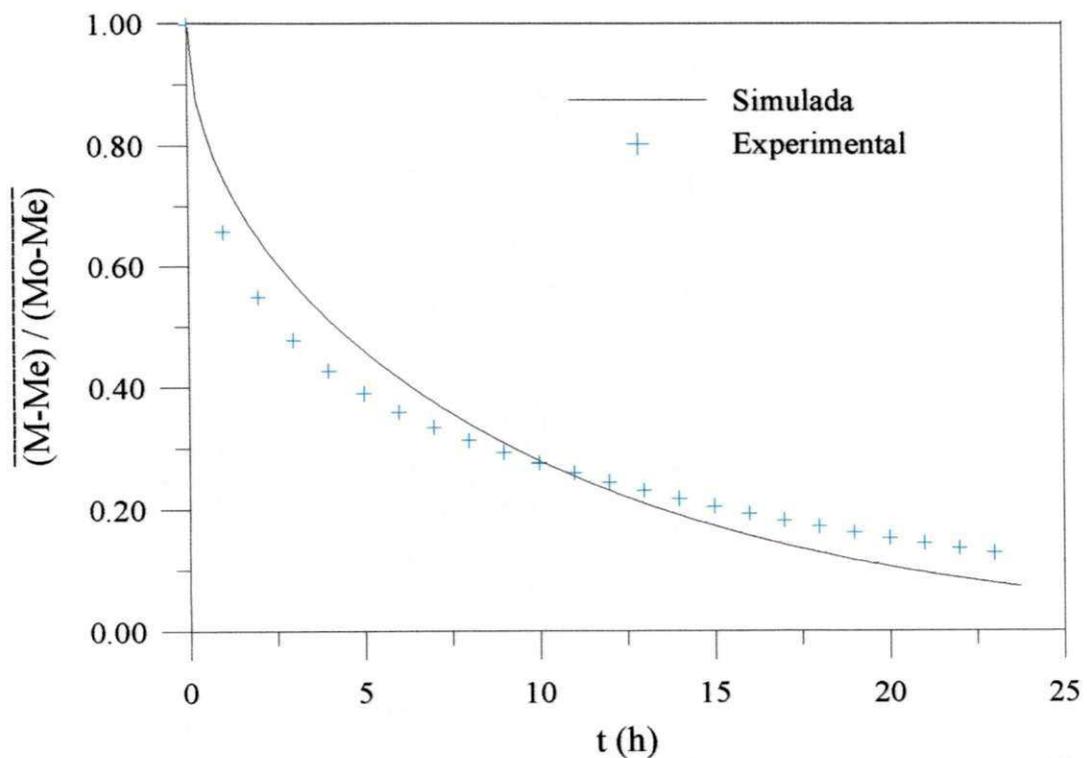


Figura 4.45 — Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).

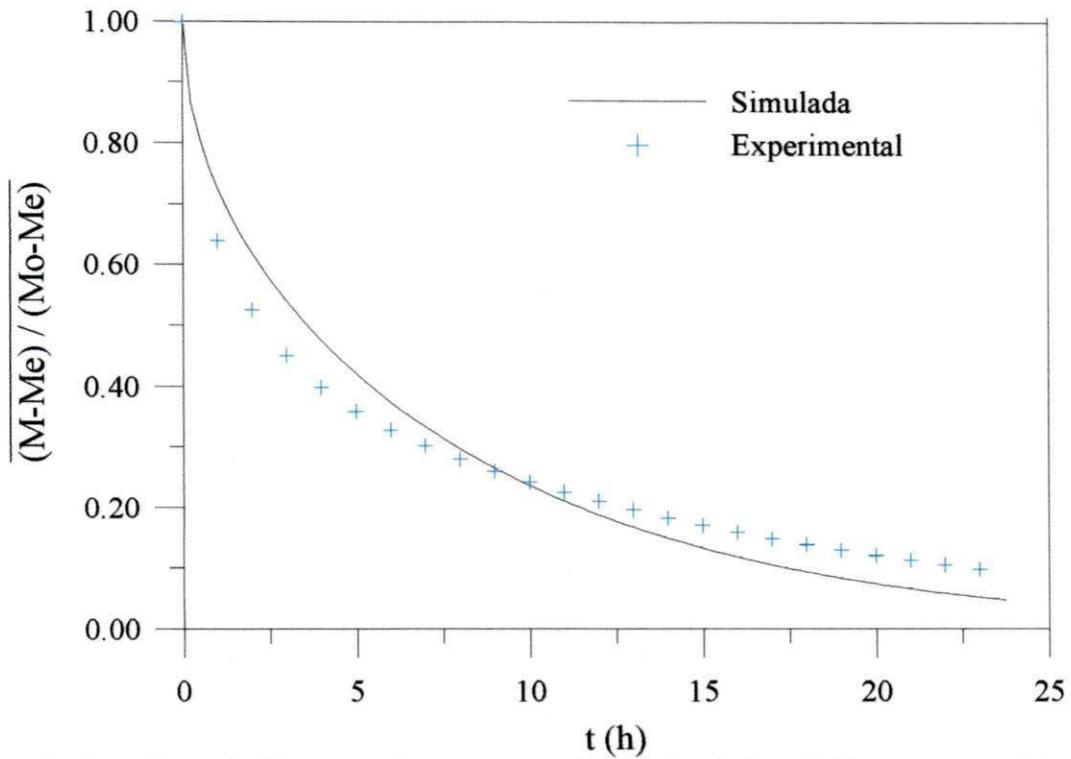


Figura 4.46 — Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).

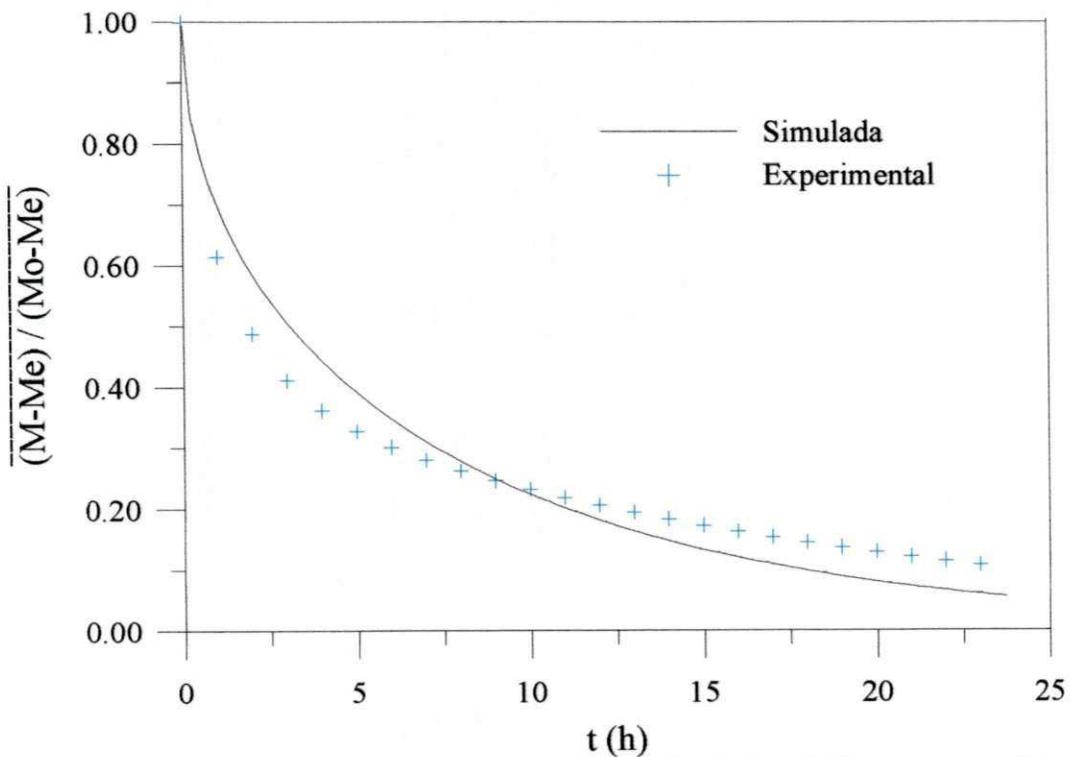


Figura 4.47 – Curva de Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).

c) h_m finito e $B = 0,0$.

É conhecido que a analogia entre a transferência de calor e massa nem sempre funciona bem quando utilizada para produtos biológicos. Mesmo assim, alguns pesquisadores a utilizam nos estudos de difusão de massa. No entanto, na sua grande maioria, outros pesquisadores preferem obter o coeficiente de transferência convectiva de massa a partir do ajuste dos resultados obtidos com o modelo matemático aos dados experimentais (Lima, 1999).

Nas figuras de 4.48 a 4.56 estão os ajustes obtidos utilizando-se um coeficiente h_m finito. Os valores finitos de h_m encontrados a partir do ajuste entre os dados simulados e experimentais se encontram na Tabela 4.3, para todos os casos estudados. Analisando estas figuras, verifica-se que nenhuma melhora no ajuste entre os dados experimentais da cinética de secagem e os simulados pelo modelo matemático aplicado foi conseguida. Vale salientar que os valores da difusividade do material encontrados para o modelo com h_m finito são os mesmos daqueles encontrados para h_m infinito.

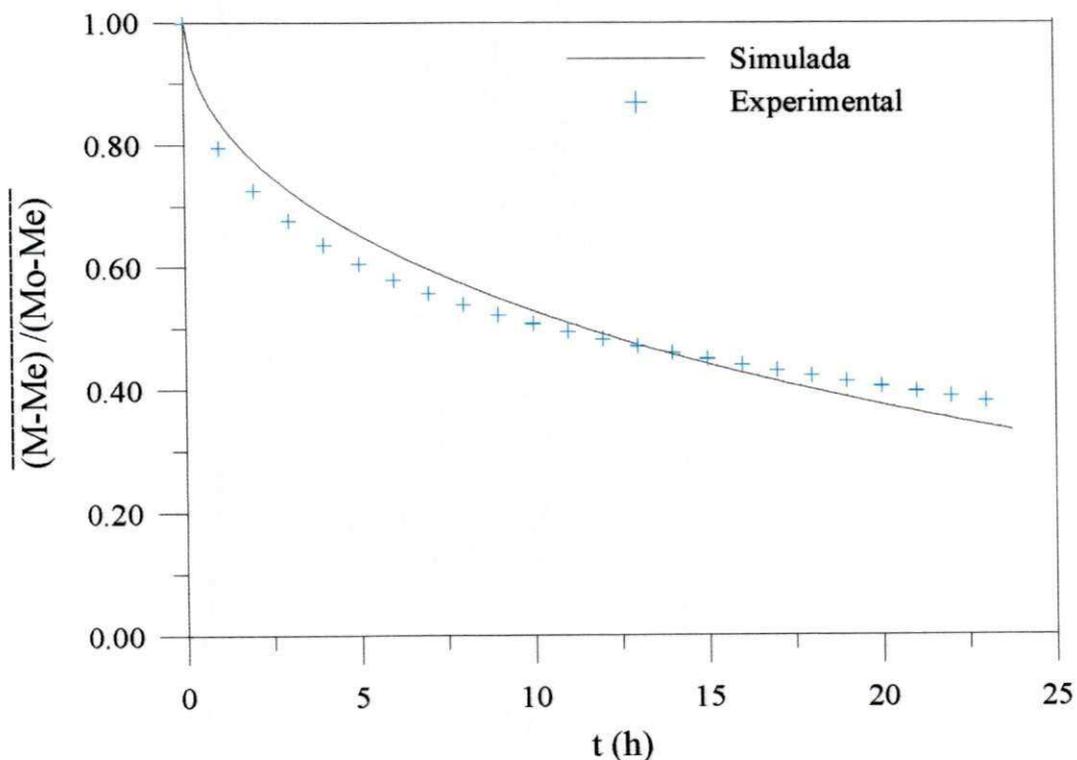


Figura 4.48 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).

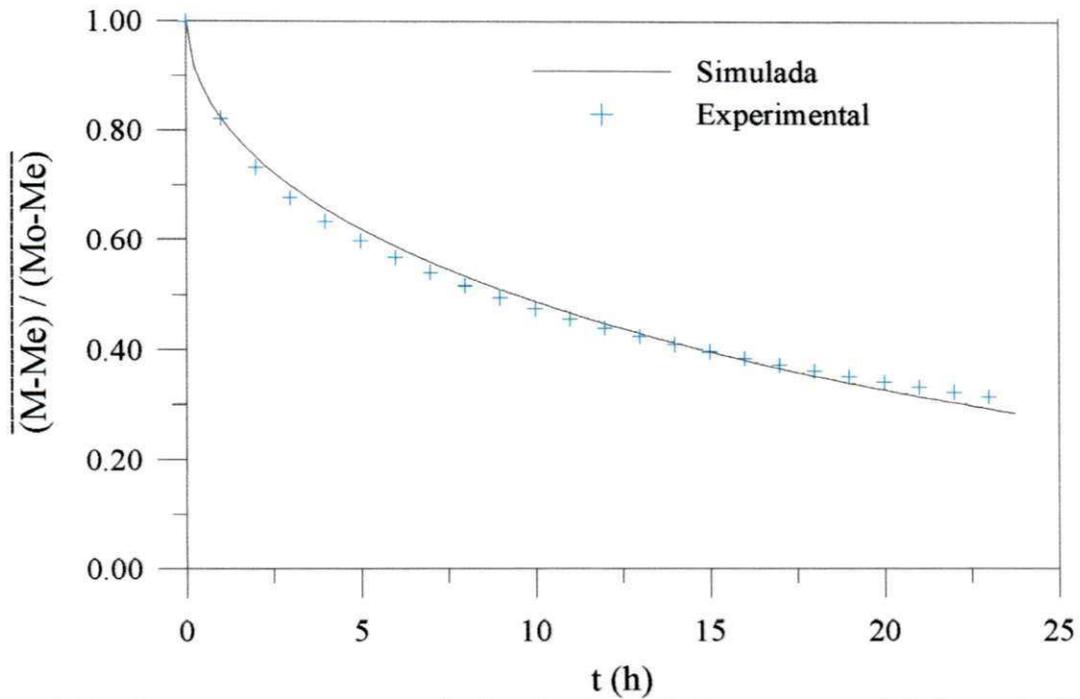


Figura 4.49 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).

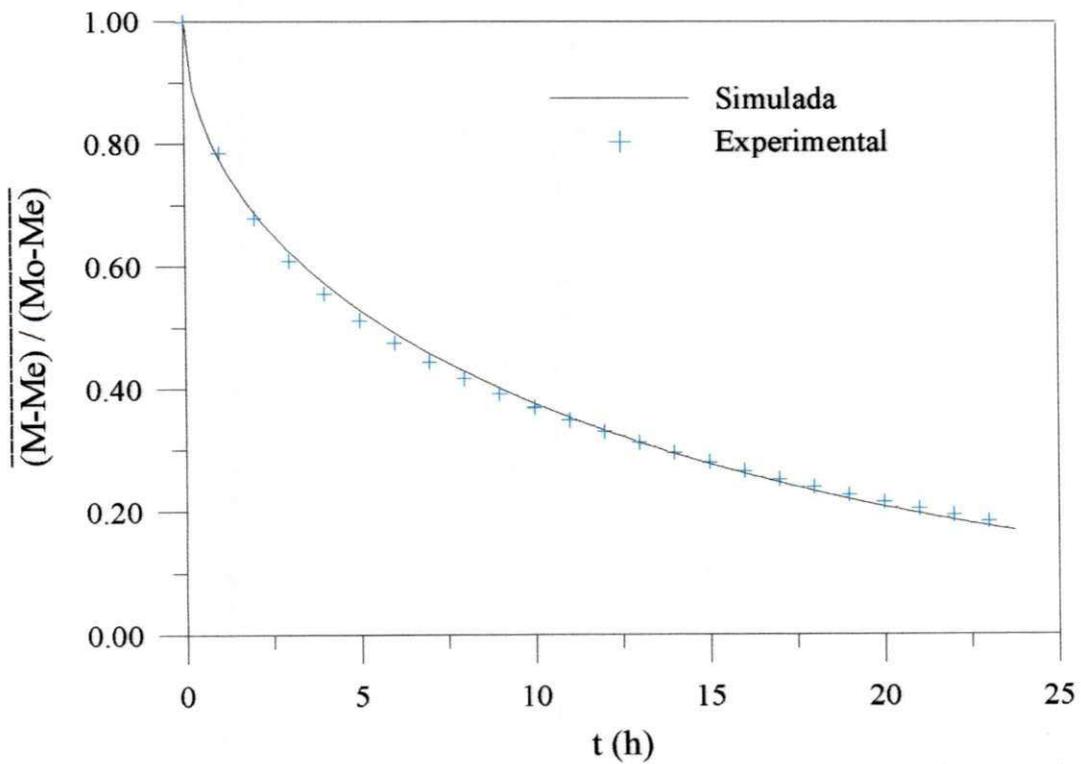


Figura 4.50 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).

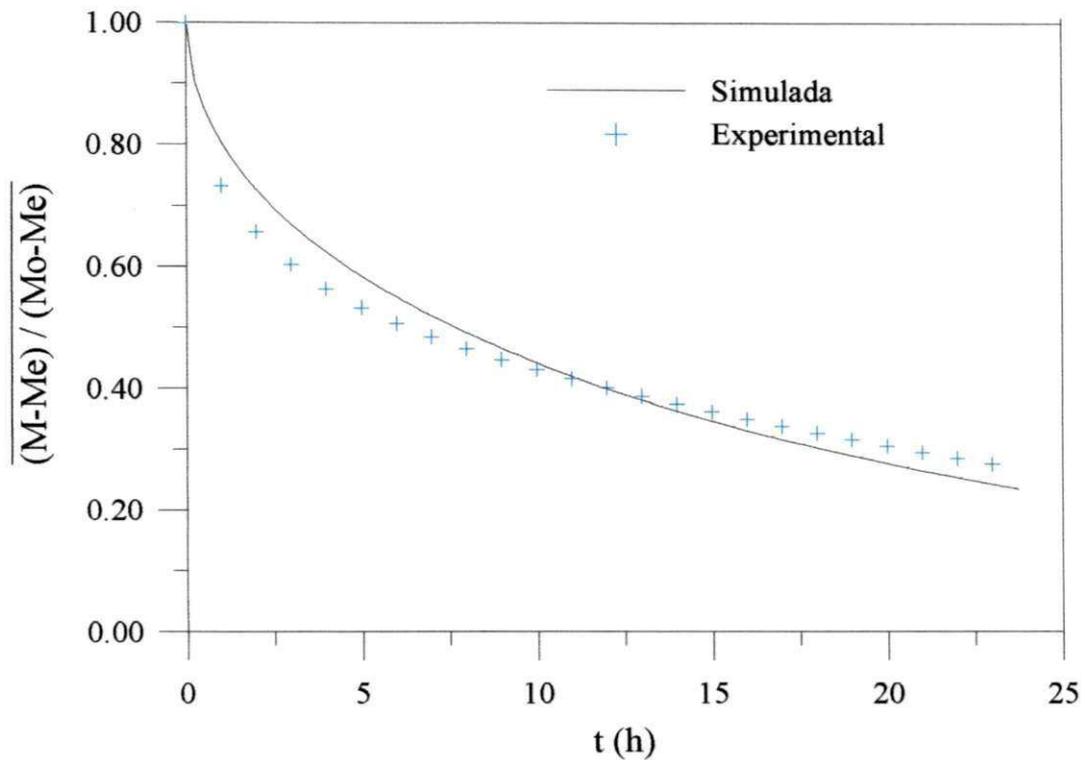


Figura 4.51 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).

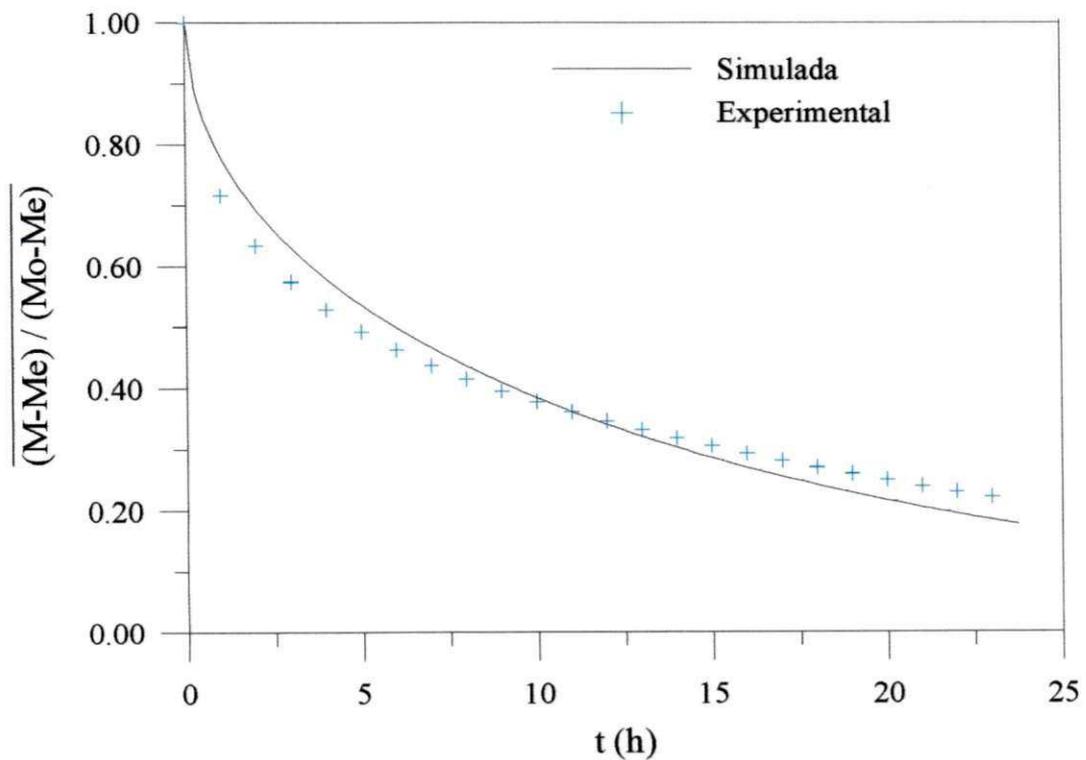


Figura 4.52 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).

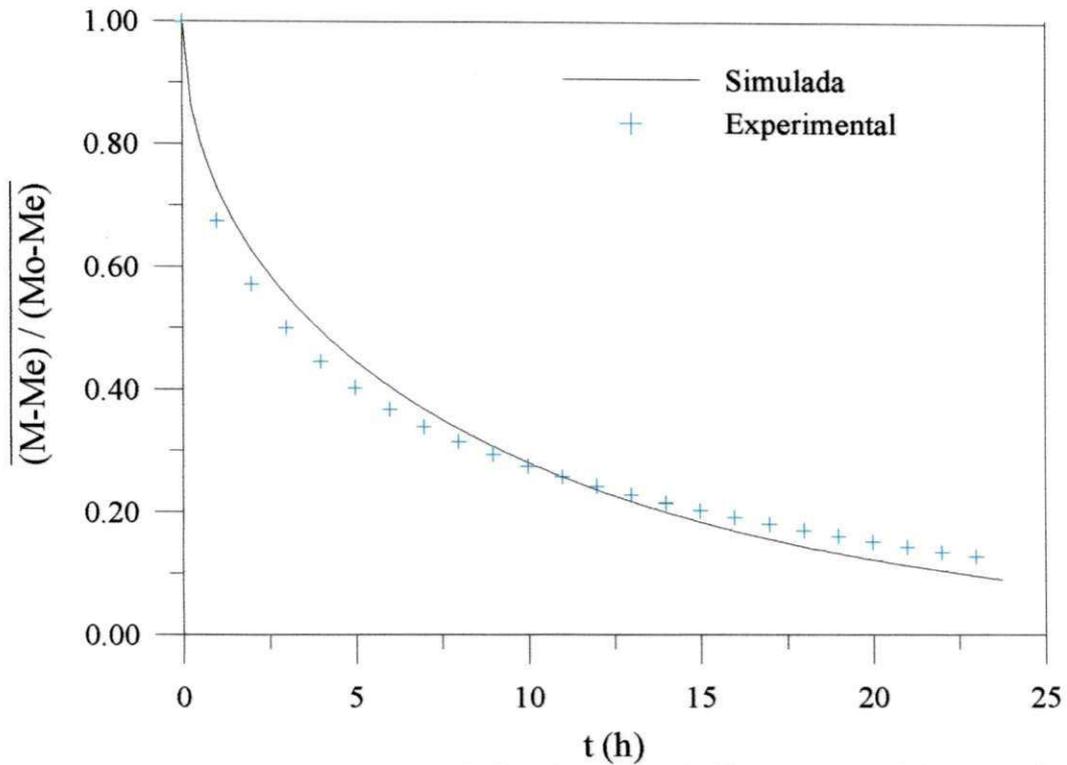


Figura 4.53 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).

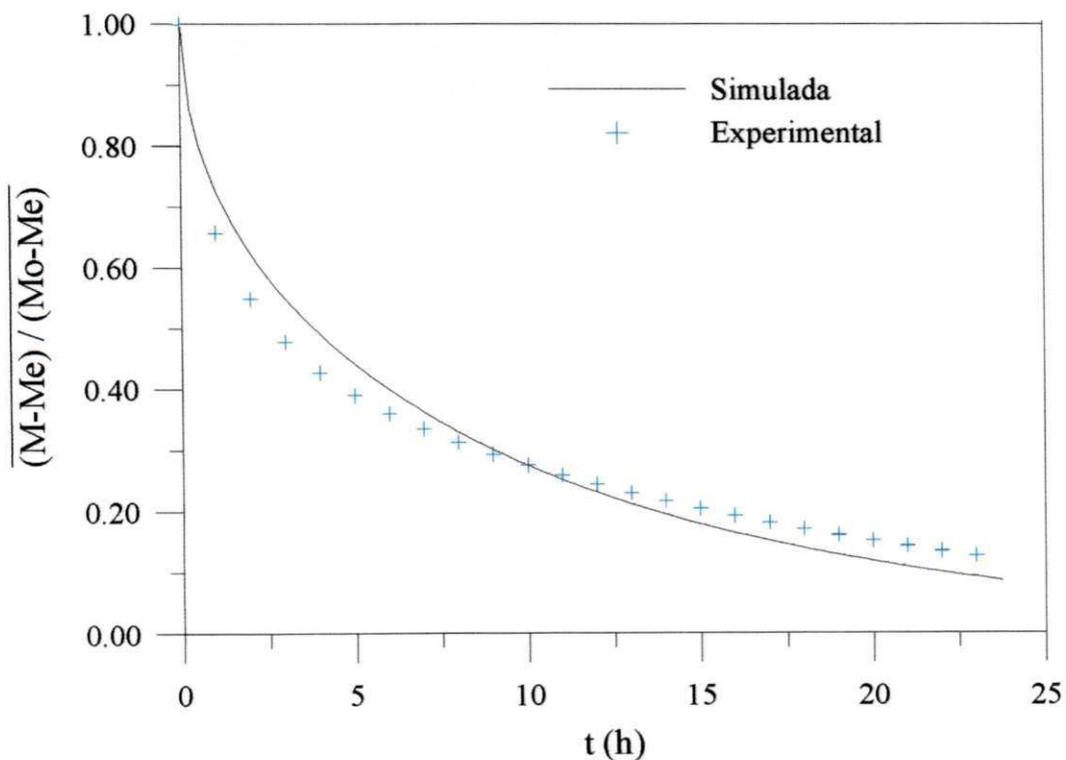


Figura 4.54 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).

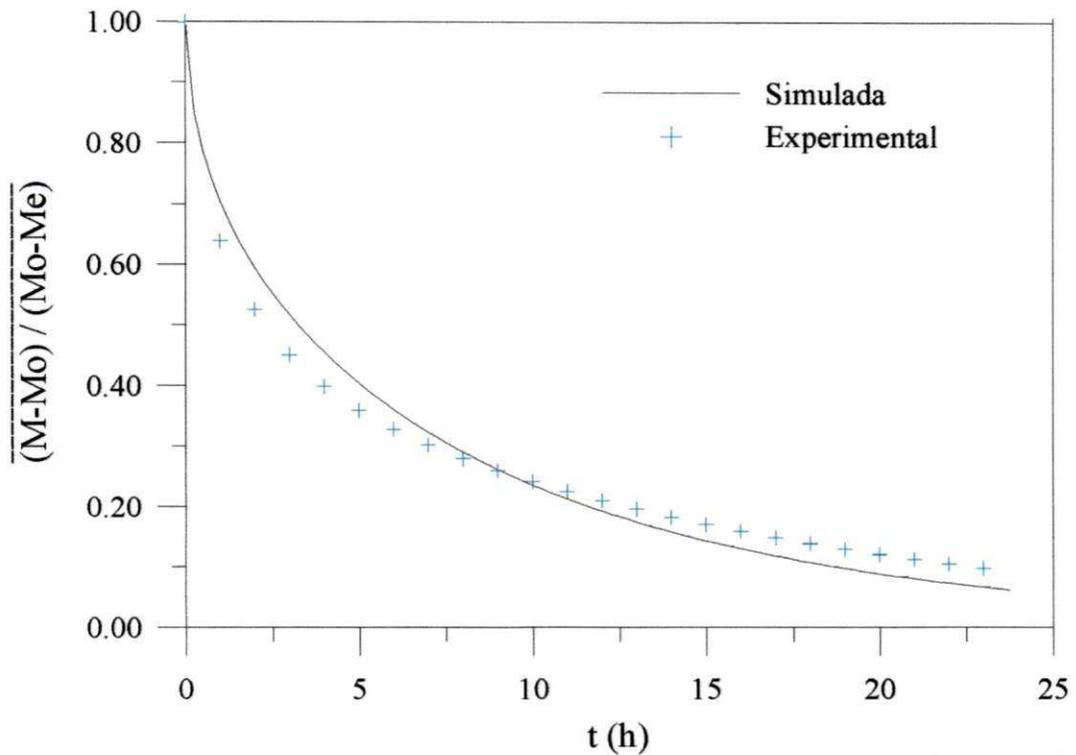


Figura 4.55- Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).

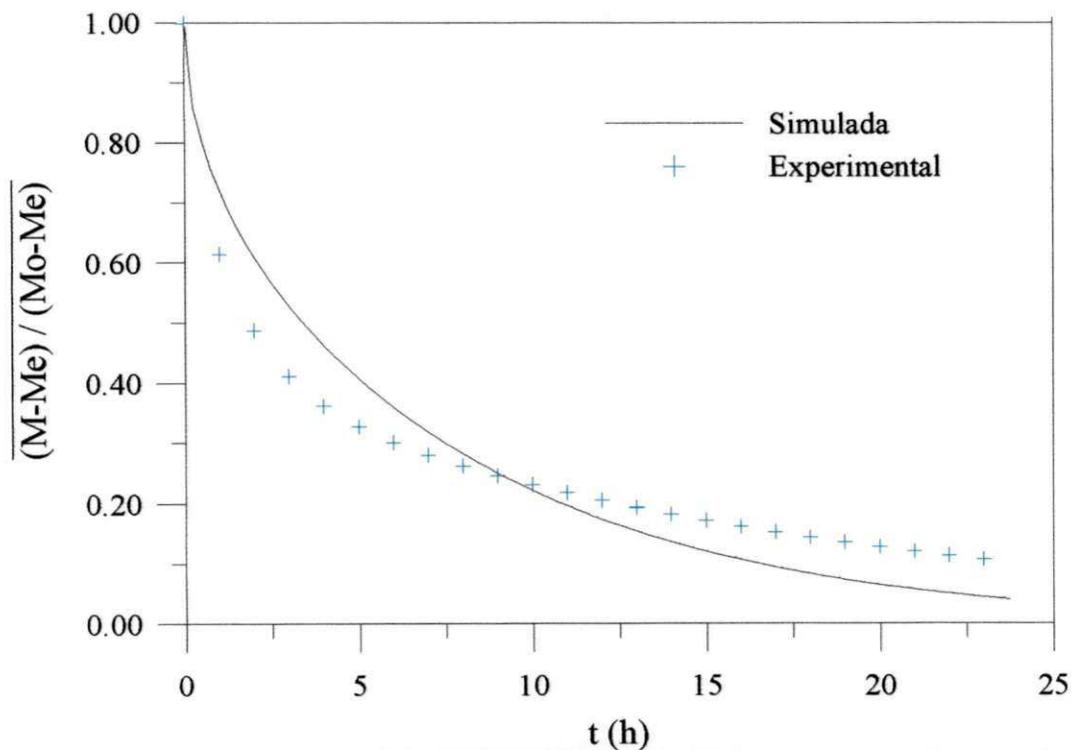


Figura 4.56 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo I, com h_m finito e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).

Como nenhuma melhora significativa foi alcançada quando o encolhimento ou um coeficiente de transferência convectiva de massa finito foi considerado, o caminho então é partir para a utilização de um modelo onde as propriedades físicas do material são consideradas variáveis com o teor de umidade.

Com o intuito de se obter um coeficiente de transferência de massa para o processo de secagem da lentilha a partir da analogia com a transferência de calor, utilizou-se uma correlação reportada por Incropera e DeWitt (1990), válida para placas ou superfícies com pequenas curvaturas como se segue:

$$\overline{Sh}_x = 0,664 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (4.4)$$

onde o número de Reynolds e o número de Schmidt são calculados utilizando-se as propriedades do ar de secagem. Posteriormente, com a definição do número de Sherwood médio, o coeficiente de transferência convectiva de massa pode ser determinado.

$$\overline{Sh} = \frac{\overline{h}_m L}{D_{AB}} \quad (4.5)$$

Com os valores das propriedades do ar de secagem para as temperaturas de 23°C, 40°C e 60 °C, os coeficientes de transferência convectiva de massa (\hat{h}_m) são respectivamente 2.44 cm/s, 2.39 cm/s e 2.39 cm/s. O valores de \hat{h}_m encontrados acima têm o mesmo significado daqueles que aparecem na equação (2.8-b), ou seja, é um valor encontrado a partir das soluções das equações gerais de conservação aplicadas às camadas limites que aparecem nas vizinhanças do produto. Comparando as equações (2.38 a -b), verifica-se que h_m é aproximadamente $10^{-3} \times \hat{h}_m$, pois geralmente, ρ_s é aproximadamente $10^{+3} \times \rho_w$. Desta forma, sendo o coeficiente de transferência convectiva de massa que aparece no modelamento matemático apresentado neste trabalho equivalente àquele da equação (2.38-a), os valores finitos de h_m calculados para se utilizar na simulação do processo de secagem da lentilha que será apresentado a seguir seriam 2.44×10^{-3} cm/s, 2.39×10^{-3} cm/s e 2.39×10^{-3} cm/s, respectivamente.

Os valores de h_m obtidos a partir do ajuste do modelo matemático aos dados experimentais apresentados na Tabela 4.3, no item 4.3.3 são da mesma ordem de grandeza dos valores

dos coeficientes de transferência convectiva calculados a partir de correlações no caso da lentilha..

Várias tentativas para melhorar o ajuste com valores finitos do coeficiente de transferência de massa e coeficientes de encolhimento nulo foram realizadas sem sucesso. Chegou-se a conclusão que devido às condições de secagem e às pequenas dimensões da lentilha, o melhor modelo que representa os processos de secagem apresentados na Tabela 3.1 é aquele com condições de h_m infinito.

4.3.2.2 Modelo IV

a) h_m infinito e $B = 0,00$.

Nas Figuras 4.24, 4.25 e 4.26, principalmente nos casos onde as temperaturas do ar de secagem são mais elevadas, pode-se notar um rápido decaimento do teor de umidade no início do processo, seguido de um decaimento menos acentuado em instantes posteriores. Isto sugere que a difusividade de massa é alta para os maiores valores do teor de umidade, decrescendo ao longo do processo. Desta forma, foi proposto que a difusividade diminua linearmente com teor de umidade segundo a equação:

$$D(\bar{M}^*) = a \bar{M}^* + b \quad (4.6)$$

Por esta equação, maiores valores da difusividade de massa serão obtidos justamente no início do processo de secagem, quando $\bar{M}^* = 1$. Nas Figuras de 4.57 até 4.65 apresentam-se as comparações entre as curvas simuladas e experimentais para cada um dos casos de secagem em estudo; em todos eles, uma excelente concordância é obtida. Nas Tabelas 4.4 e 4.5 estão os valores de a e b da equação (4.6), quando o ajuste entre os valores simulados e os dados experimentais é realizado.

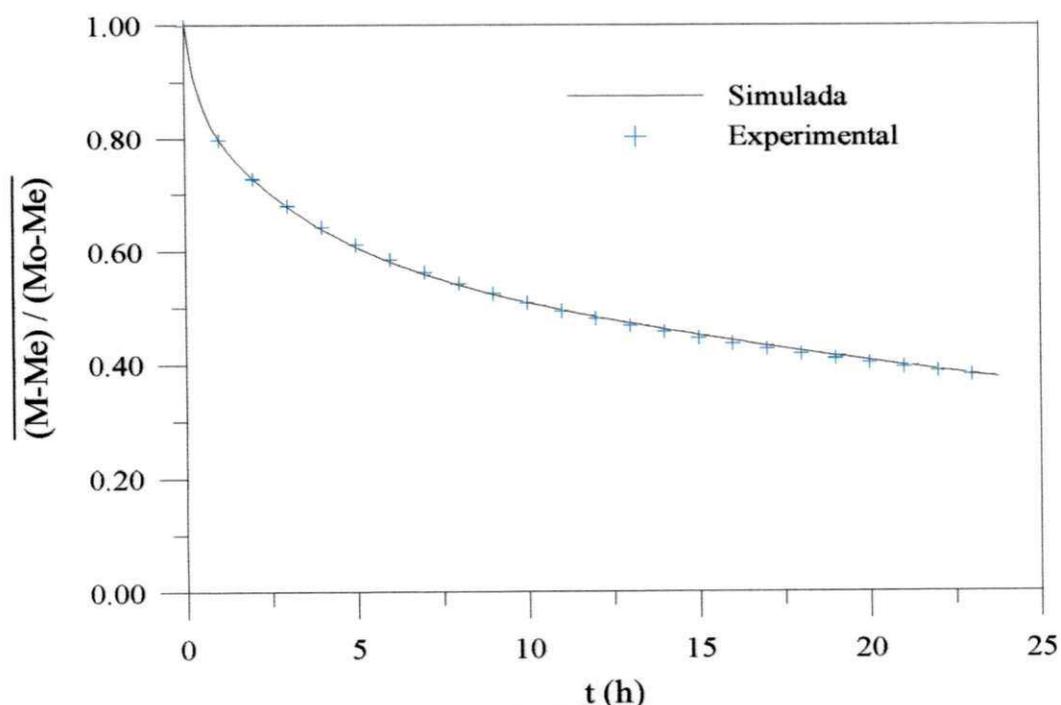


Figura 4.57 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).

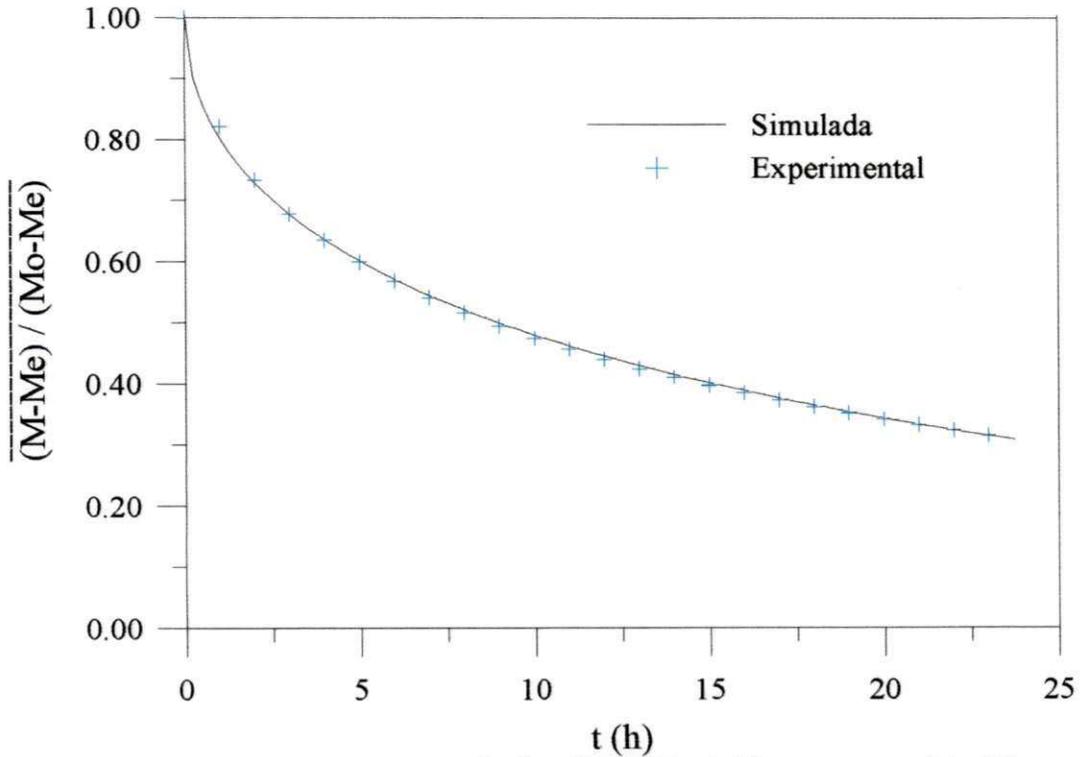


Figura 4.58 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).

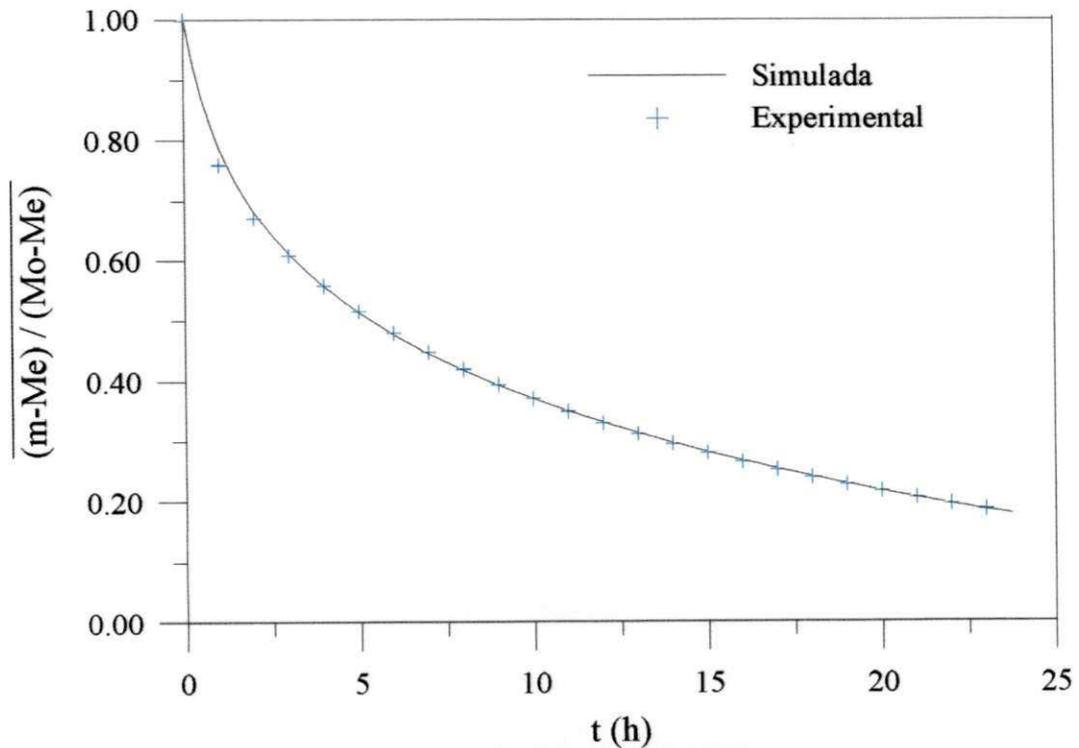


Figura 4.59 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).

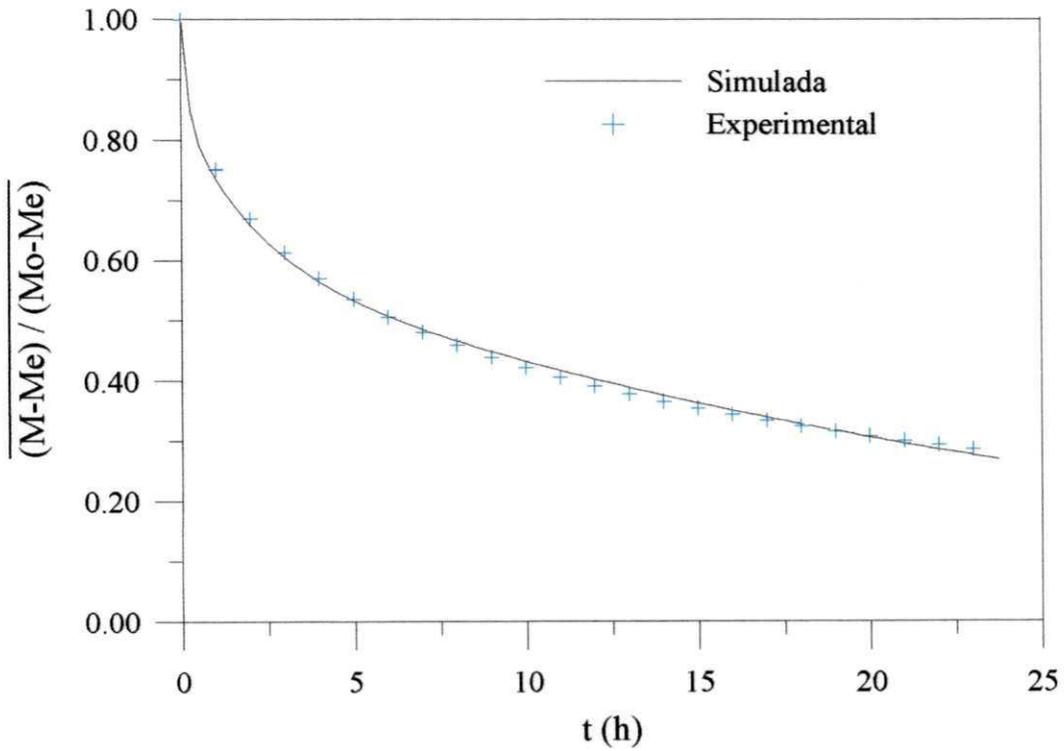


Figura 4.60 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).

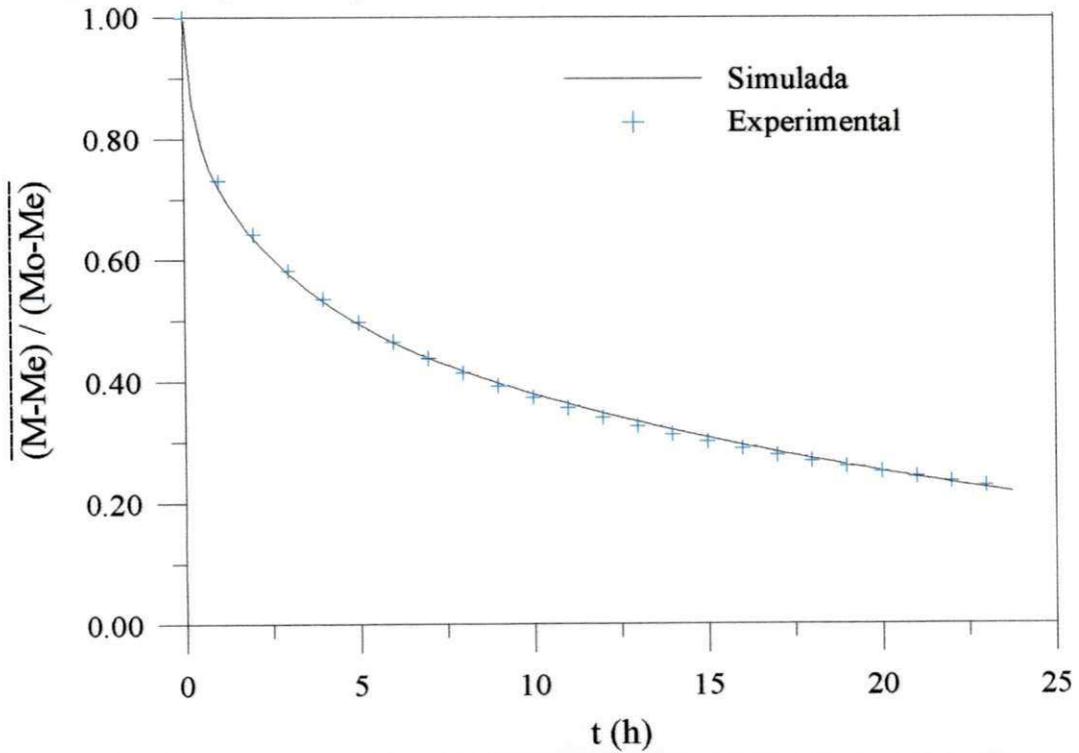


Figura 4.61 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).

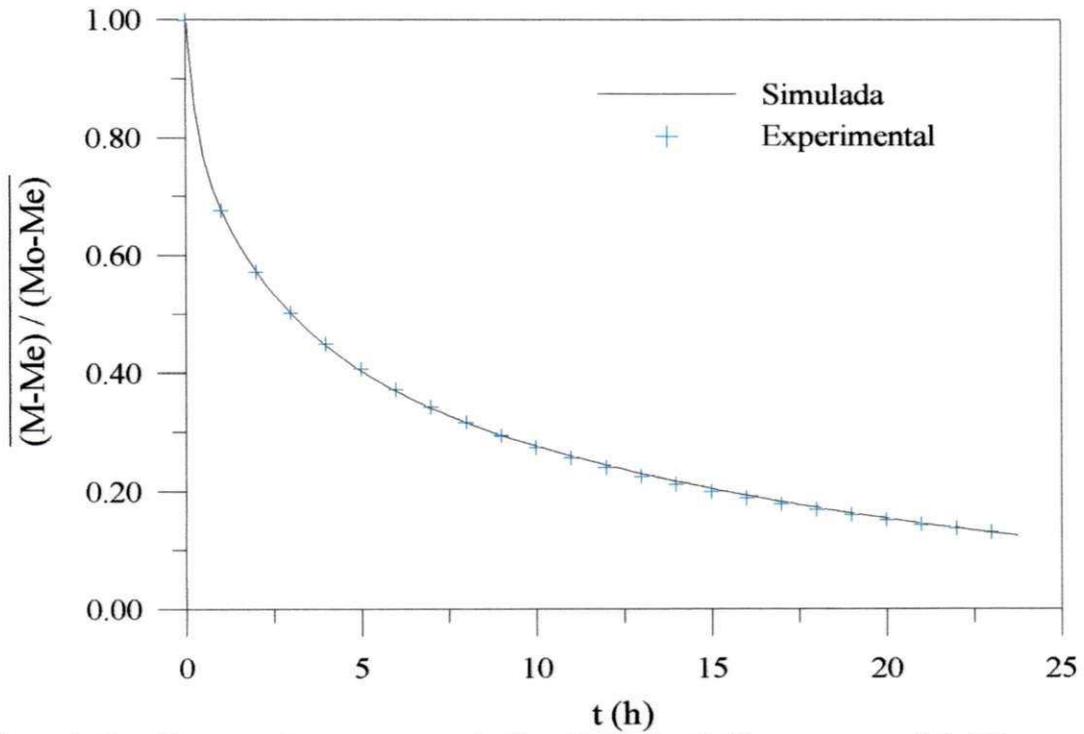


Figura 4.62 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).

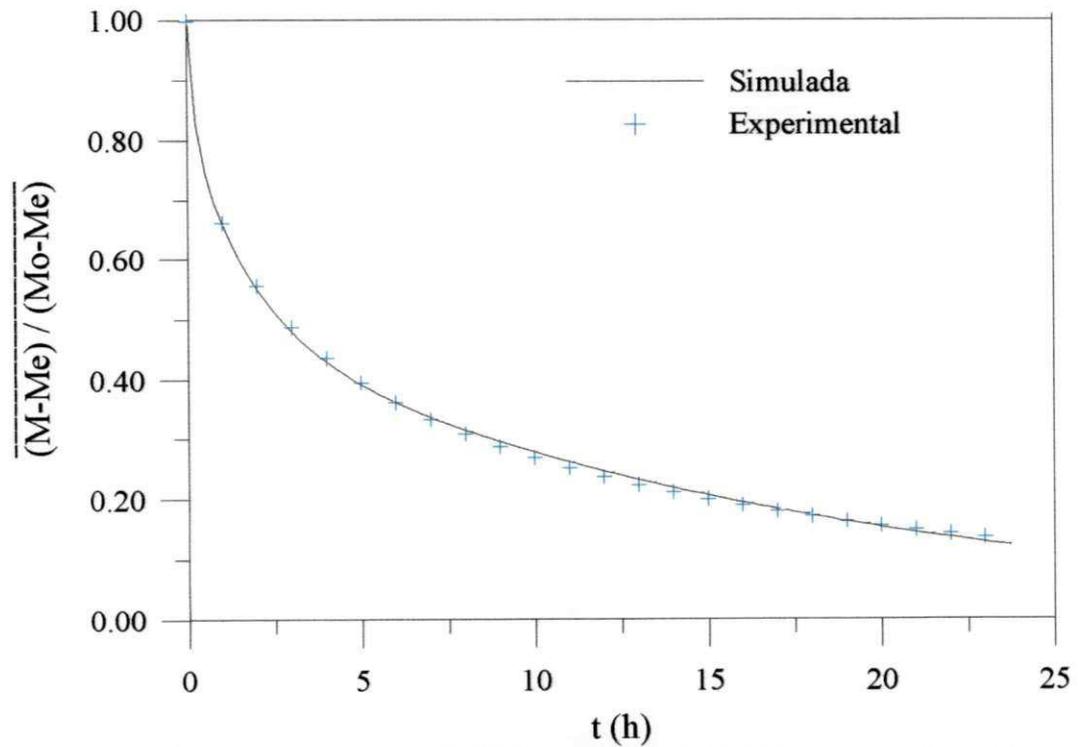


Figura 4.63 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).

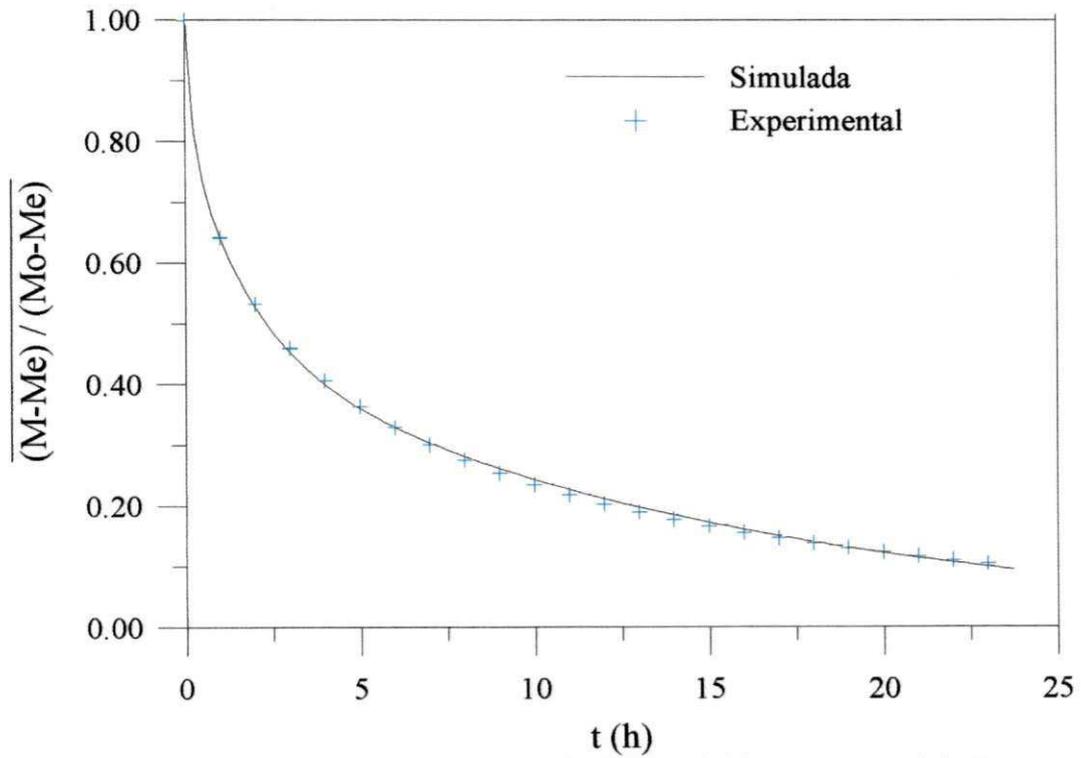


Figura 4.64 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).

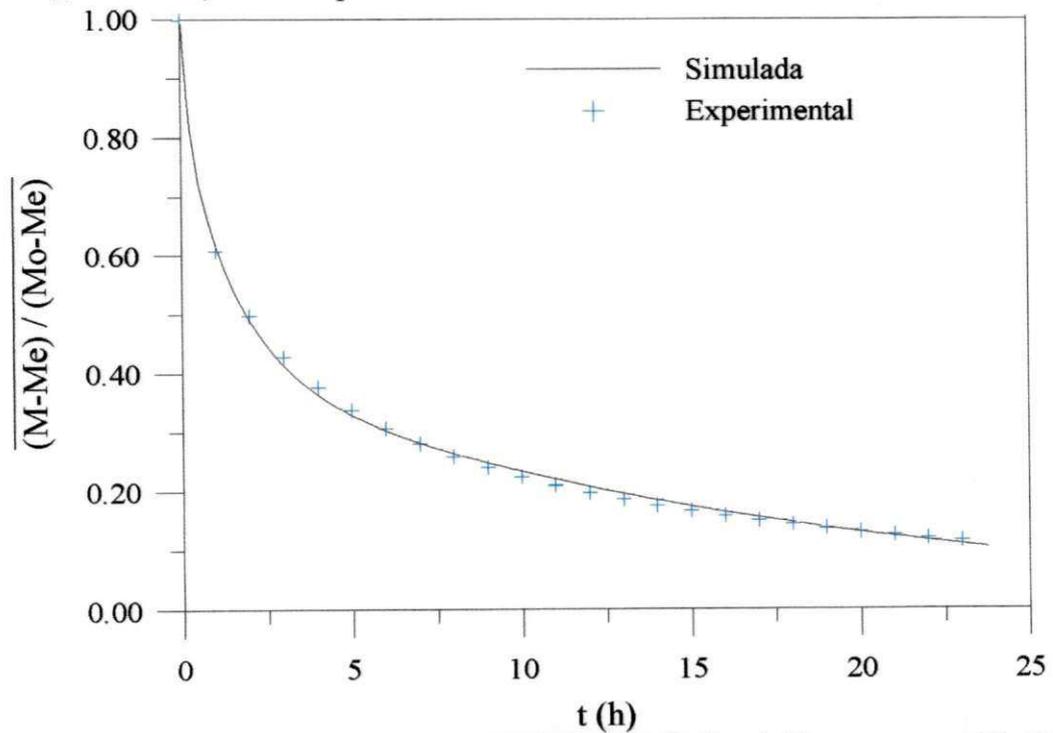


Figura 4.65 – curva Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,00$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 9).

b) h_m infinito $B = 0,17$.

A seguir, nas Figuras 4.66 até 4.74, estão os ajustes entre as curvas simuladas e experimentais, considerando o encolhimento do produto e propriedades físicas variáveis. Os resultados são parecidos com aqueles já obtidos desconsiderando o encolhimento, no entanto, como era de se esperar, houve uma mudança na variação dos valores da difusividade, como pode ser visto na Tabela 4.5.

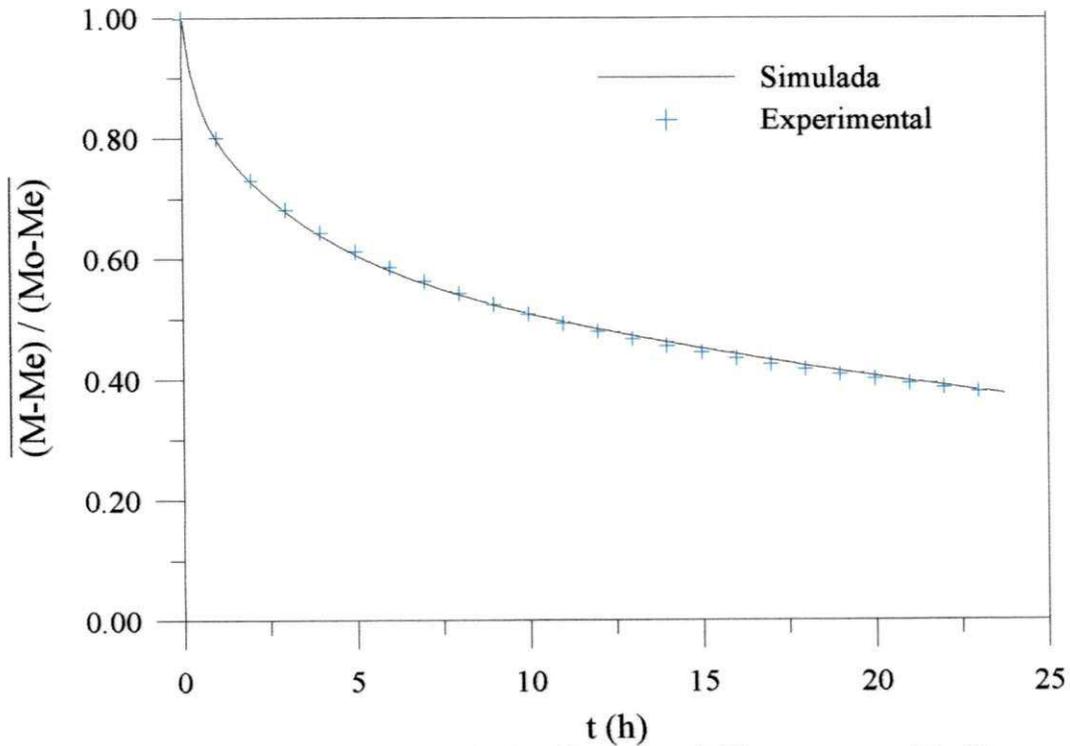


Figura 4.66 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 1).

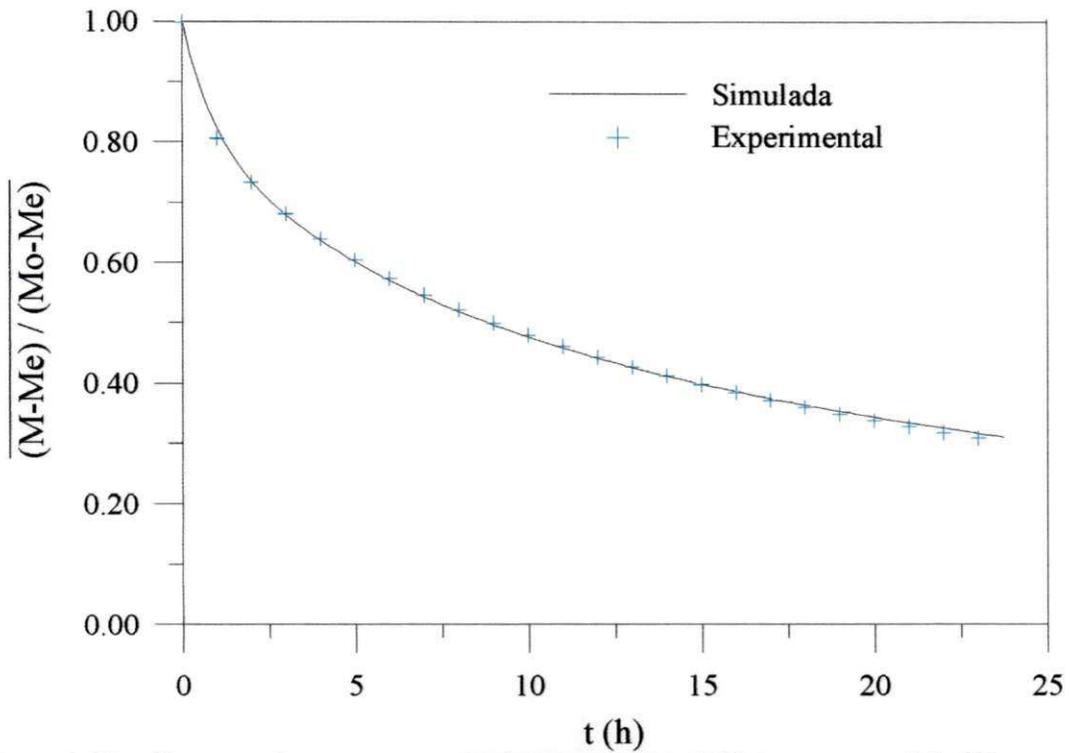


Figura 4.67 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m=\infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 2).

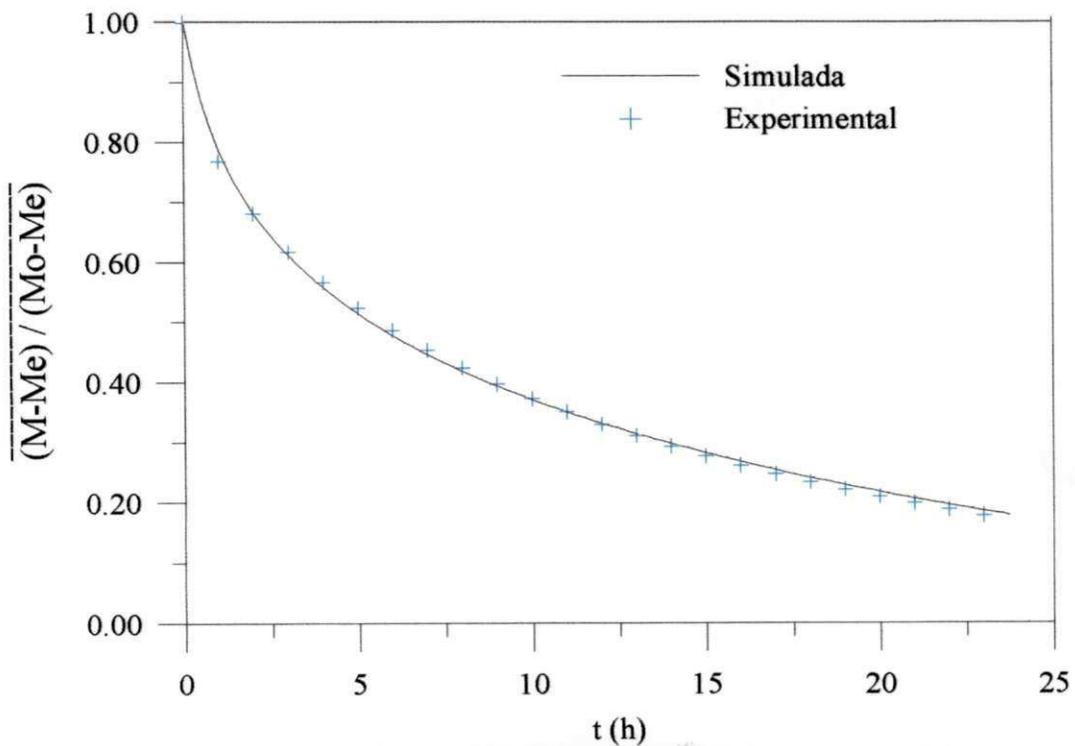


Figura 4.68 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m=\infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 3).

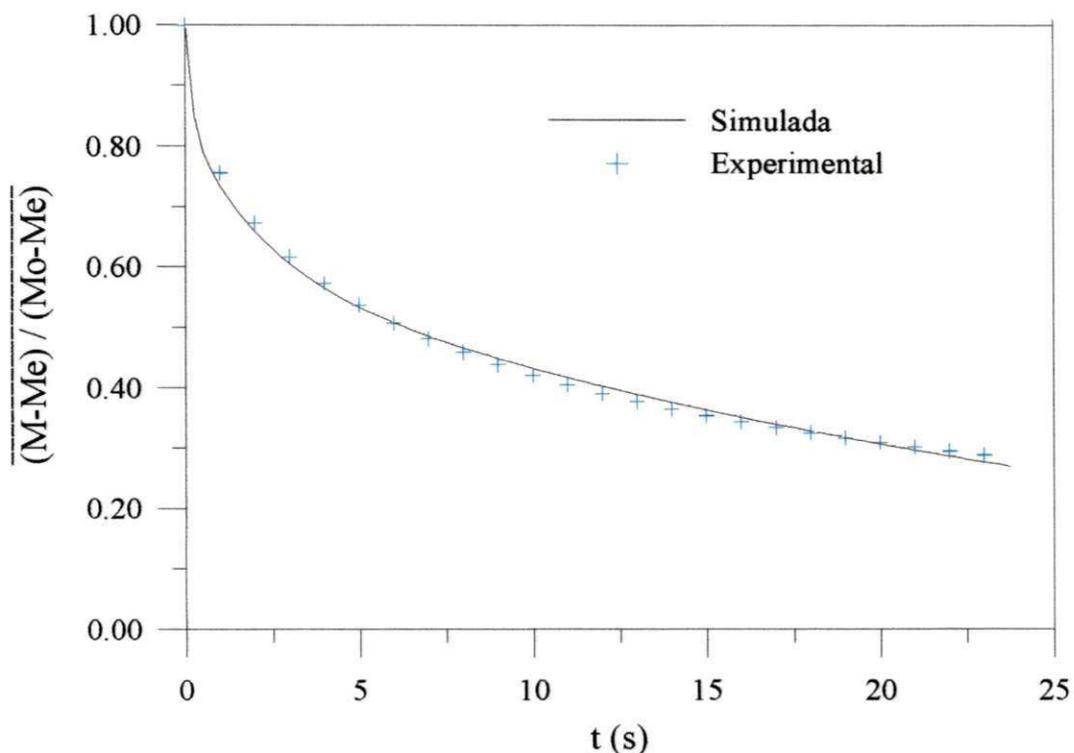


Figura 4.69 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 4).

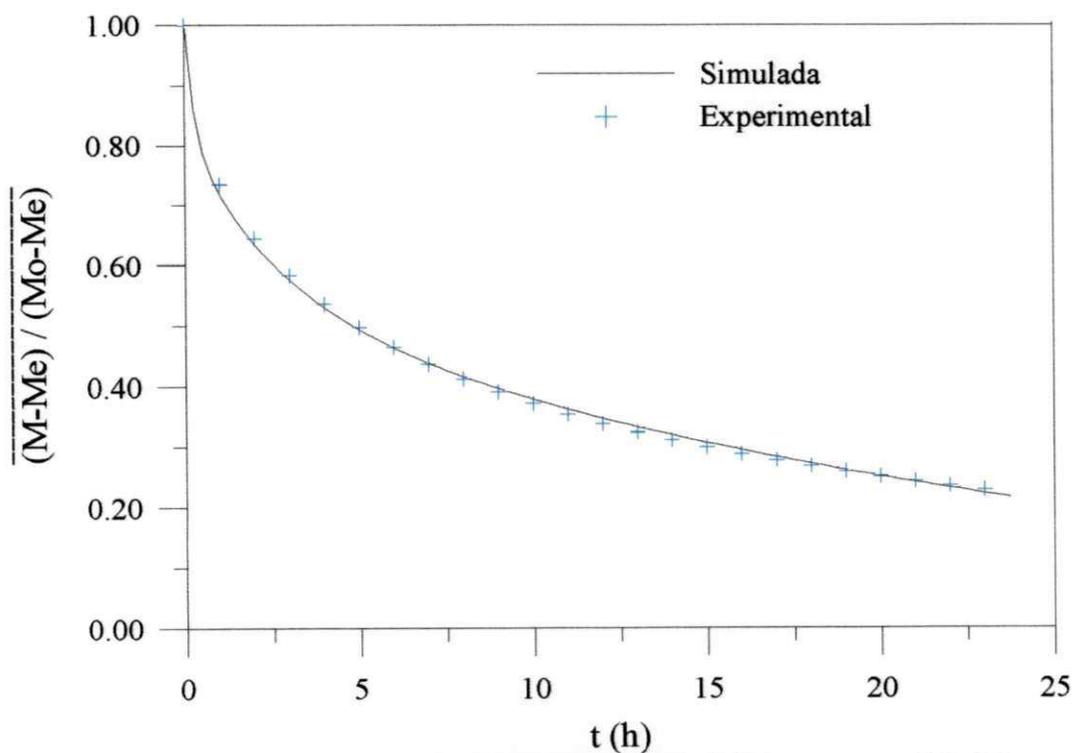


Figura 4.70 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 5).

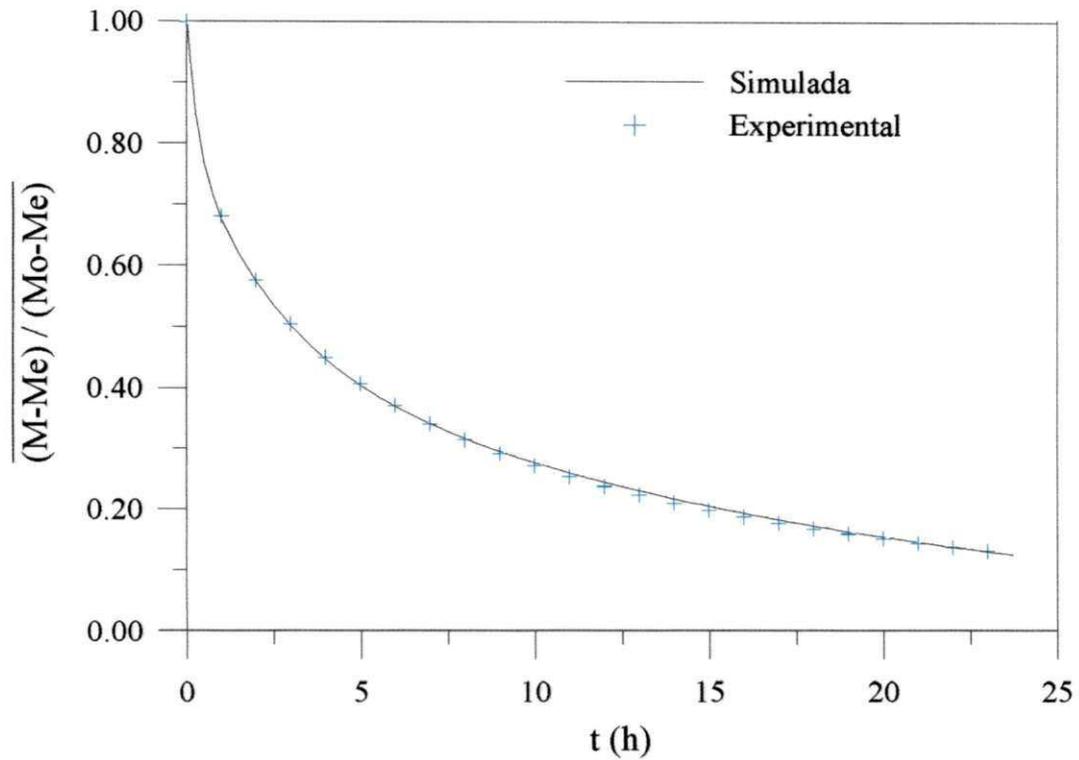


Figura 4.71 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 6).

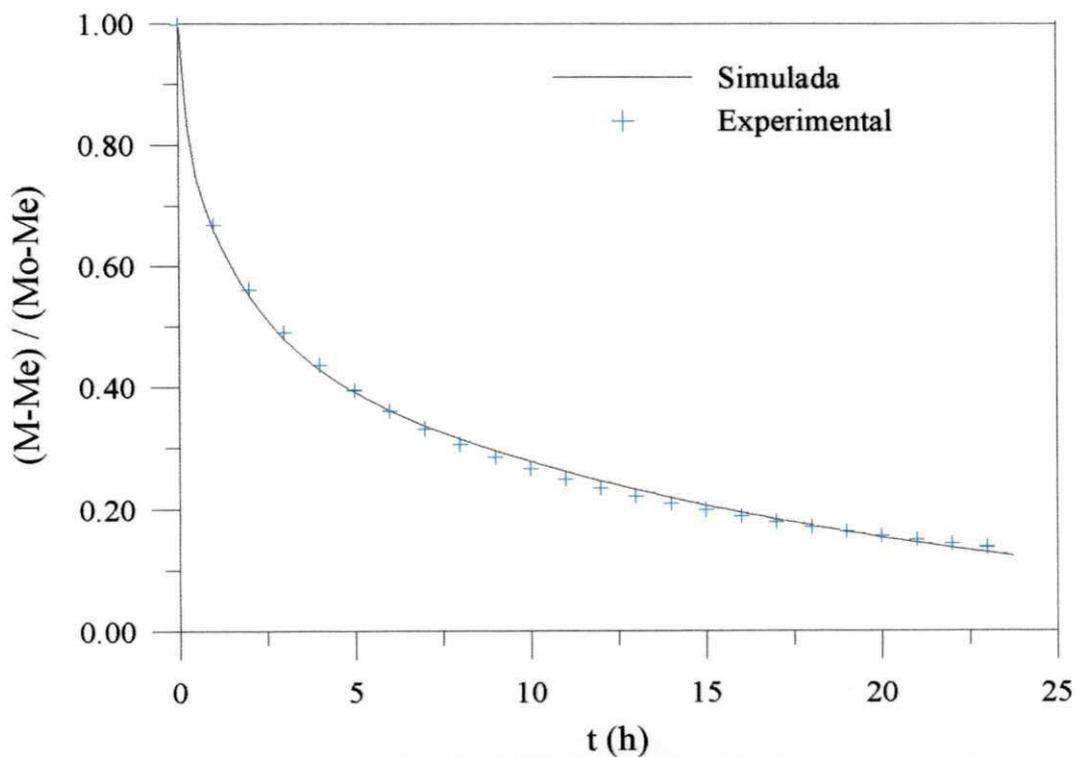


Figura 4.72 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 7).

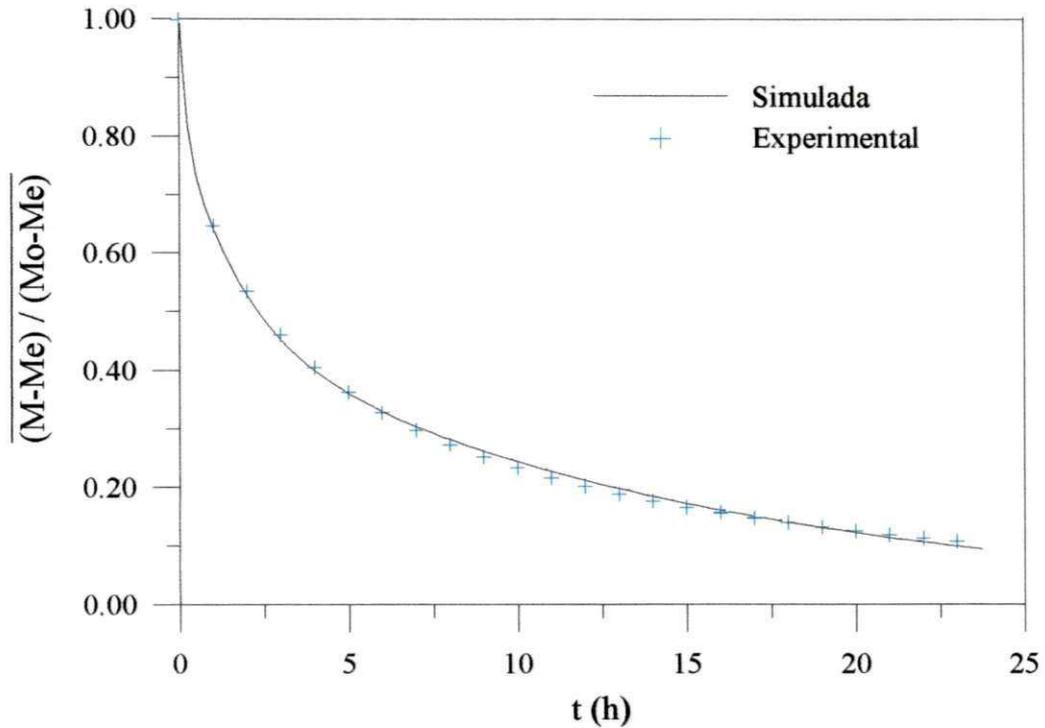


Figura 4.73 – Comparação entre os resultados simulados obtidos com o modelo IV, com $h_m = \infty$ e $B = 0,17$ e os experimentais do teor de umidade da lentilha (caso 8).

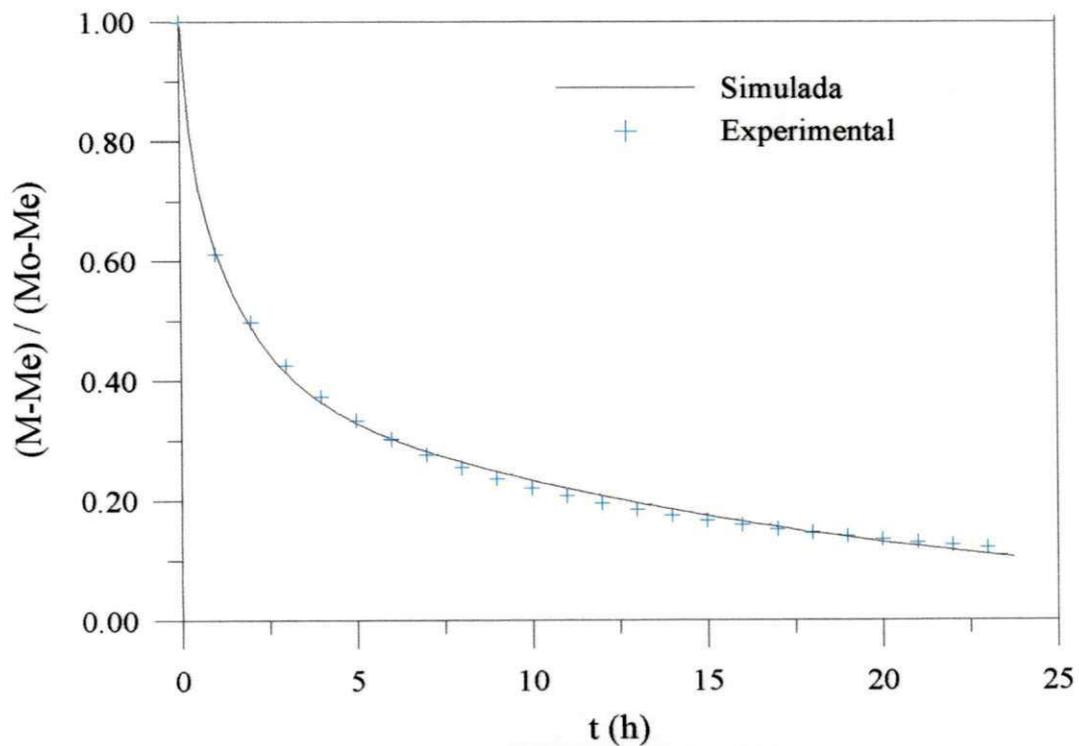


Figura 4.74 – Comparação entre as curvas simulada e experimental, para o caso 9, com $h_m = \infty$, coeficiente de encolhimento $B=0.17$ e difusividade variável.

Os resultados do ajuste das curvas simuladas às curvas experimentais, obtidos quando se considera a variação da difusividade com o teor de umidade médio do produto foram satisfatórios em todos os casos. Com os bons resultados obtidos para a cinética de secagem nas variadas condições do ar de secagem, utilizando-se o modelo IV, a distribuição do teor de umidade e o campo de temperatura no interior do corpo também podem ser obtidos.

Nas Figuras (4.75 - 4.77) estão a distribuição do teor de umidade após 1, 10 e 20 horas respectivamente. Analisando estas figuras pode-se observar o encolhimento do sólido ao longo do processo de secagem. Segundo o modelo de encolhimento apresentado neste trabalho, a variação do volume é considerada ser diretamente proporcional à quantidade de água retirada do sólido; por meio das Figuras de 4.75 a 4.77 pode-se verificar que o encolhimento do sólido entre 1h e 10h é maior que aquele entre 10 e 20h, já que a secagem do sólido no modelo apresentado se dá com uma taxa de secagem decrescente no tempo.

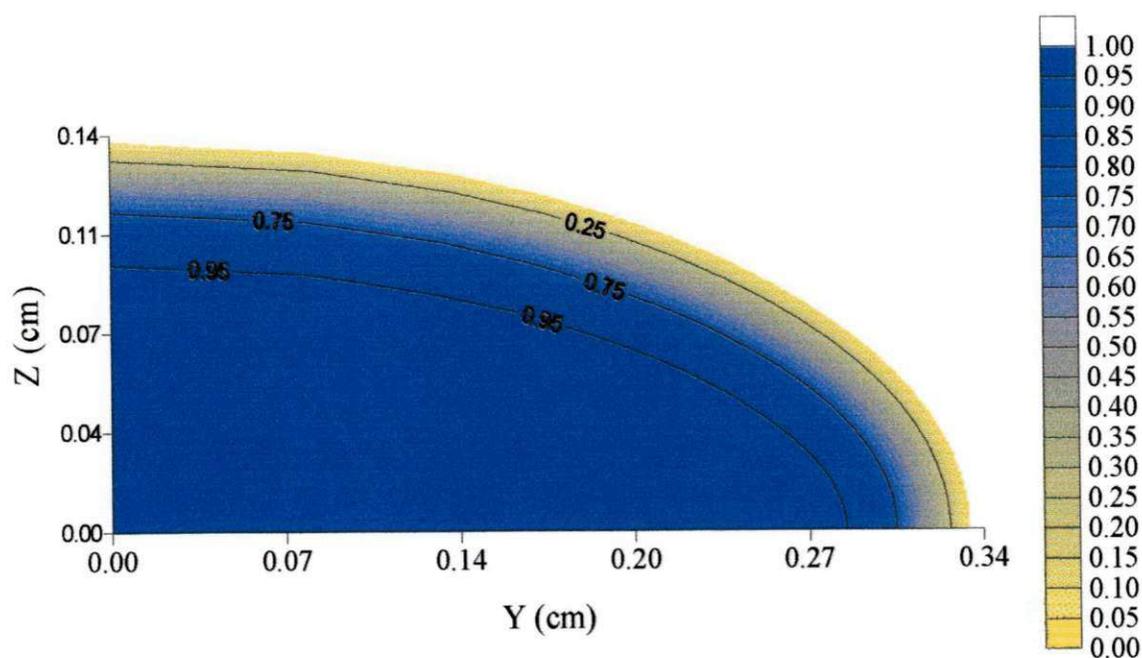


Figura 4.75 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 1$ h, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

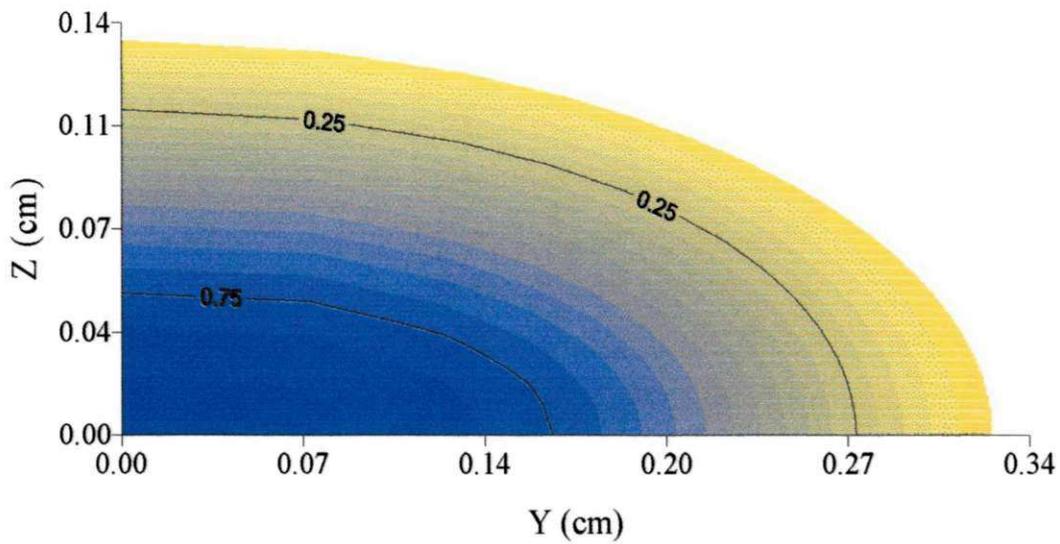


Figura 4.76 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 10$ h, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

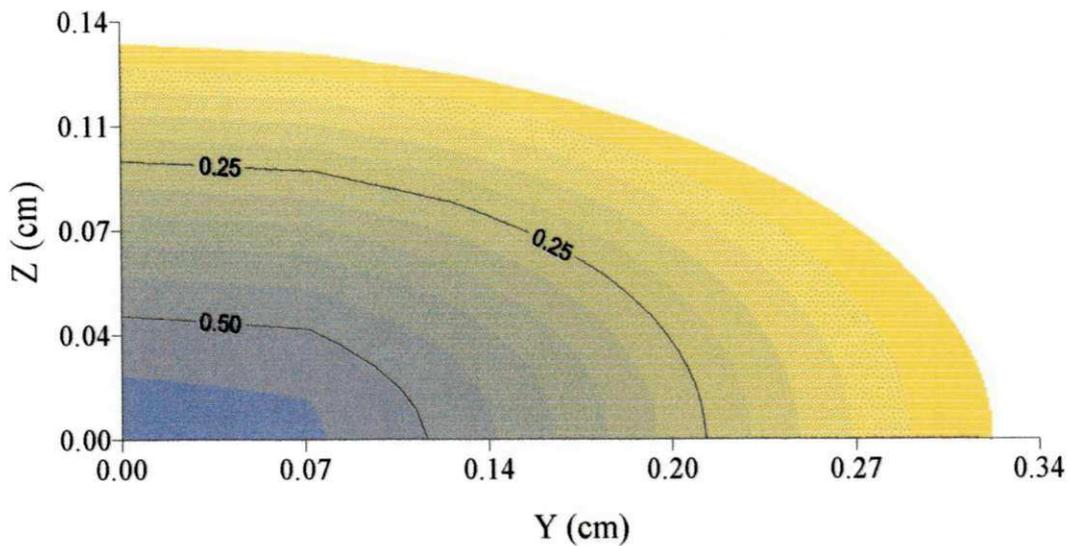


Figura 4.77 – Distribuição de umidade no interior da lentilha no tempo $t = 20$ h, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

Nas Figuras de (4.78 - 4.80) encontram-se as variações de temperatura nos tempos 20, 100 e 200s. Para a determinação destes resultados, foram utilizadas todas as propriedades termofísicas do modelo II. Mais uma vez pode ser observado que a temperatura de equilíbrio do sólido é atingida rapidamente; como em até 200s ocorreram poucas mudanças no teor de umidade do sólido, praticamente nenhum encolhimento é notado.

Processos de secagem inadequados podem ser a principal causa de fissuras ou quebra de grãos. A formação de fissuras são resultados de tensões e compressões que surgem no interior do grão devido a gradientes de umidade ou de temperatura. Quanto mais rápido for o processo de secagem, maiores gradientes são produzidos e, desta forma, maiores possibilidades de fissuras. Para se obter uma secagem eficiente e ao mesmo tempo resguardar a qualidade final do grão, é muito utilizada a técnica de secagem que incorpora um procedimento de têmpera.

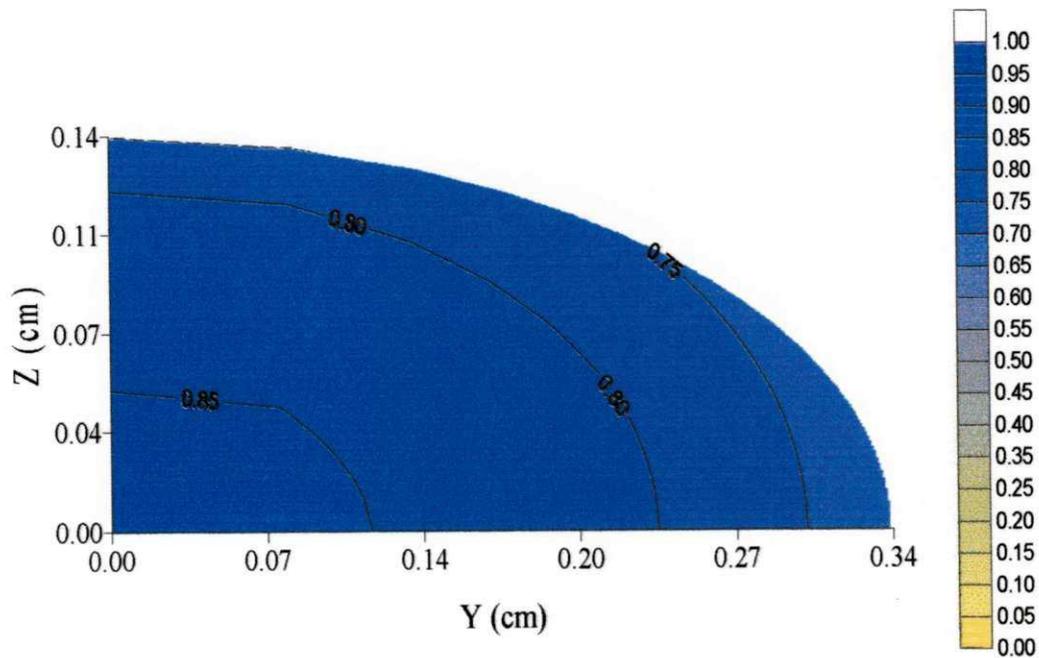


Figura 4.78 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 20s$, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

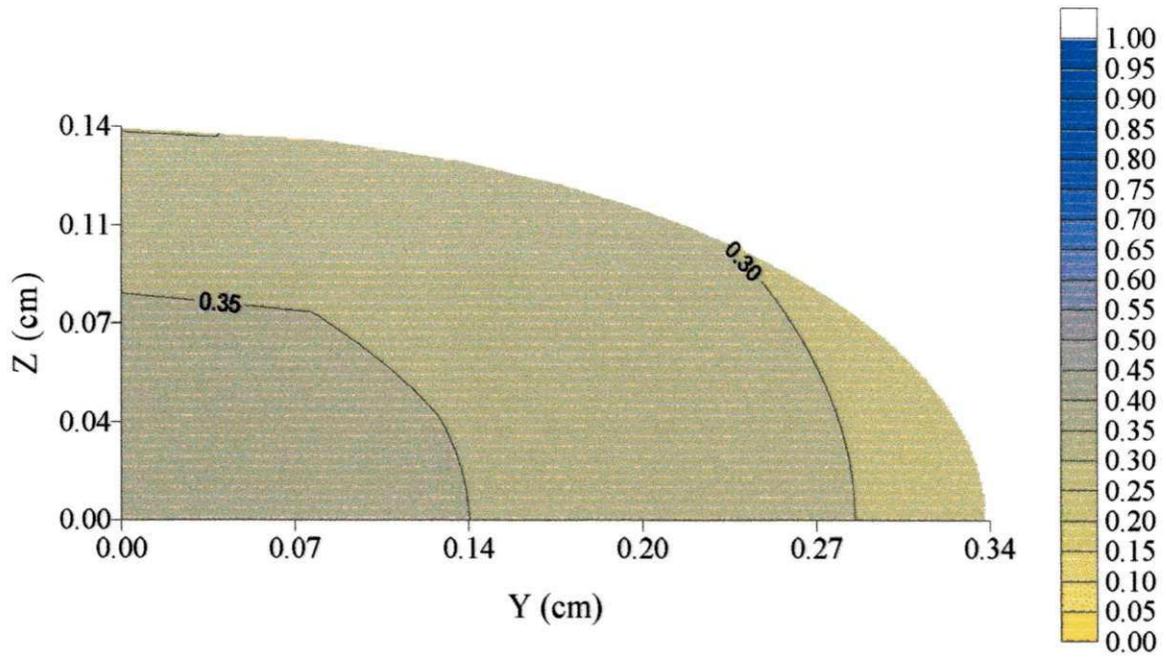


Figura 4.79 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 100s$, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

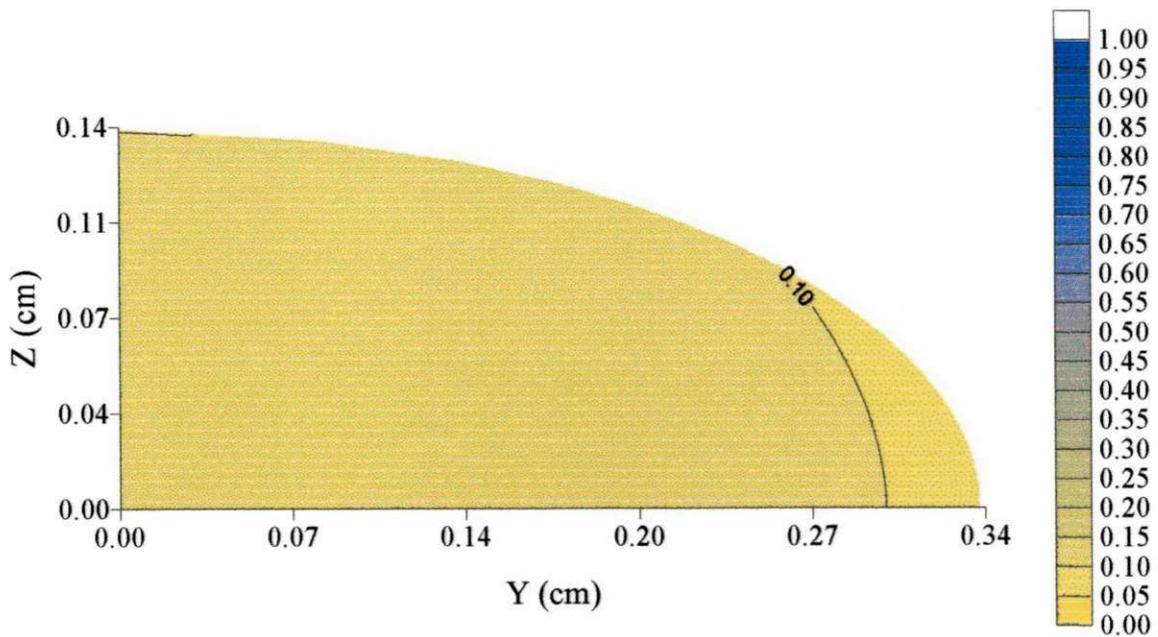


Figura 4.80 – Distribuição de temperatura no interior da lentilha no tempo $t = 200s$, com h_m infinito, e $B = 0.17$ e coeficiente de difusão variável (modelo IV).

4.3.3 Estimativa dos coeficientes de transporte (D e h_m)

Os coeficientes de transporte D e h_m foram estimados a partir da minimização do erro entre os valores do teor de umidade simulados e experimentais. A Tabela 4.3 apresenta os valores dos coeficientes de transporte bem como o erro relativo para cada caso apresentado na Tabela 3.1. A maior resistência interna ao fluxo de umidade é obtida com a aplicação do modelo I-b. Para uma mesma condição de secagem, este modelo é o que apresenta os menores valores da difusividade de massa.

Para os diversos casos e modelos utilizados com propriedades físicas constantes, aquele que apresenta o menor erro relativo é o caso 3. Os valores destes erros são $1,18 \times 10^{-4}$, $4,3 \times 10^{-4}$ e $1,19 \times 10^{-4}$ para a aplicação dos modelos I-a, I-b e I-c respectivamente. É importante notar que o caso 3 se caracteriza por uma cinética com o ar de secagem tendo a menor temperatura e maior umidade relativa; ou seja, são as circunstâncias em que a secagem ocorre mais lentamente.

Como já era de se esperar, a difusividade de massa aumenta com o aumento da temperatura. Para uma mesma temperatura, pode-se observar um aumento da difusividade de massa com o aumento da umidade relativa. Este fato está de acordo com o que já foi observado e comentado anteriormente; existe uma inversão nas curvas de secagem quando estas são representadas através da variação do teor de umidade \bar{M} (kg/kg) ou do teor de umidade adimensional $\bar{M}^* = (\bar{M} - \bar{M}_e) / (\bar{M}_o - \bar{M}_e)$.

Tabela 4.3 – Coeficientes de transporte estimados pelos modelos numéricos e a variância, para cada caso de secagem.

M O D E L O	C A S O	$D \times 10^{+12}$ (m²/s)	$h_m \times 10^{+4}$ (cm/s)	$Bi_m \times 10^{-4}$	$\bar{S}^2 \times 10^{+4}$
I-a	1	3,33	infinito	infinito	10,52
	2	4,06	infinito	infinito	2,38
	3	6,62	infinito	infinito	1,18
	4	5,00	infinito	infinito	13,96
	5	6,40	infinito	infinito	11,95
	6	9,80	infinito	infinito	10,08
	7	10,00	infinito	infinito	15,40
	8	11,80	infinito	infinito	13,52
	9	12,40	infinito	infinito	27,19
I-b	1	2,80	infinito	infinito	16,10
	2	3,40	infinito	infinito	5,61
	3	5,40	infinito	infinito	4,3
	4	4,20	infinito	infinito	22,47
	5	5,10	infinito	infinito	21,02
	6	7,80	infinito	infinito	20,69
	7	7,90	infinito	infinito	28,02
	8	9,30	infinito	infinito	25,82
	9	9,80	infinito	infinito	43,89
I-c	1	3,33	0,69	6,42	10,66
	2	4,06	0,99	7,55	2,40
	3	6,62	1,09	5,10	1,19
	4	5,00	0,99	6,14	14,09
	5	6,40	0,89	4,31	12,07
	6	9,80	1,49	4,71	10,19
	7	10,00	1,19	3,69	15,88
	8	11,80	1,39	3,65	13,65
	9	12,40	1,09	2,72	27,43

Como pode ser observado na Tabela 4.3, o modelo I-c, que considera os valores do coeficiente de transporte convectivo (h_m) finito, apresenta altos valores para esta propriedade, da ordem de 10^{-2} cm/s, ao mesmo tempo em que os valores encontrados para a difusividade de massa (D) são os mesmos daqueles encontrados no modelo I-a. Isto leva a concluir que os dados experimentais de secagem da lentilha utilizados neste trabalho, se ajustam melhor a um modelo com coeficiente convectivo de massa infinito. O ajuste com número de Biot infinito para a secagem da lentilha se deve tanto às condições do ar de secagem como também às pequenas dimensões do produto.

Outro resultado que também pode ser citado é que os valores de h_m encontrados quando o modelo I-c é utilizado são da mesma ordem daqueles previstos pela correlação apresentada na equação (4.4) Para se ter uma idéia, para $T = 23^\circ\text{C}$ e $UR = 15\%$, o valor de h_m encontrado pela correlação é de $2,44 \times 10^{-3}$ cm/s e o obtido pelo ajuste aos dados experimentais é $6,9 \times 10^{-3}$ cm/s.

Tang e Sokhansanj (1993-b), consideraram o grão de lentilha composto de três regiões distintas e determinaram a difusividade de umidade de cada uma delas. Foram encontrados para o hilo, cotilédone e tegumento, valores para a difusividade de massa da ordem de 10^{-9} , 10^{-11} e 10^{-13} m²/s. As condições do ar de secagem foram de 30°C e $UR = 30\%$. O modelo considerado neste trabalho determina a difusividade da lentilha para todo o grão, que é da ordem de 10^{-12} m²/s, para condições semelhantes do ar de secagem. Segundo Tang e Sokhansanj (1993b), Syarief et al., determinaram para o endosperma do milho, uma difusividade entre $2,6 \times 10^{-11}$ e $1,2 \times 10^{-10}$ m²/s e Steffe e Sing determinaram para o arroz, uma difusividade entre 6×10^{-11} e $1,3 \times 10^{-11}$ m²/s. Nota-se que os valores para a difusividade da lentilha encontradas neste trabalho é coerente com os valores da difusividade encontrados por outros autores, já que cada autor utiliza modelos matemáticos diferentes para a simulação do processo de secagem.

Tabela 4.4 – Valores dos parâmetros da equação (4.6) que determinam a variação da difusividade com o teor de umidade para o caso de $h_m = \infty$ e $\beta=0.0$

CASOS	$a \times 10^{+12} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$b \times 10^{+12} \text{ (m}^2/\text{s)}$
Caso 1	7,25	-1,01
Caso 2	3,67	1,91
Caso 3	2,78	5,19
Caso 4	10,12	-0,36
Caso 5	10,00	1,32
Caso 6	12,80	4,23
Caso 7	16,67	2,88
Caso 8	17,50	4,56
Caso 9	27,70	1,58

Tabela 4.5– Valores dos parâmetros da equação (4.6) que determinam a variação da difusividade com o teor de umidade para o caso de $h_m = \infty$ e $\beta=0.17$

CASOS	$a \times 10^{+12} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$b \times 10^{+12} \text{ (m}^2/\text{s)}$
Caso 1	7,27	-1,47
Caso 2	3,95	1,13
Caso 3	3,41	3,67
Caso 4	10,15	-1,19
Caso 5	10,47	-0,02
Caso 6	13,80	1,88
Caso 7	16,77	0,86
Caso 8	18,52	1,74
Caso 9	27,31	-0,73

Como comentário, observa-se nas Tabelas (4.4) e (4.5) que em alguns casos de cinética de secagem é encontrado um valor negativo para o coeficiente b da equação (4.6). Isto não seria coerente se a cinética de secagem estivesse sendo representada até o seu teor de umidade de equilíbrio pois nesse ponto $\bar{M}^* = 0$. Isto implica pela equação (4.6) que um valor negativo para a difusividade de massa seria obtido, o que não teria sentido físico. Então, pode-se dizer que se o teor de umidade do sólido atingisse o seu teor de umidade de equilíbrio, outros valores de a e b seriam determinados após ajuste dos dados numéricos aos dados experimentais.

As Figuras de 4.81 e 4.82 mostram a variação da difusividade com o teor de umidade do produto, para todos os casos de secagem da lentilha, considerando o coeficiente de encolhimento $B = 0.0$ e $B = 0.17$, respectivamente. Pode-se observar que nos casos 2 e 3 os coeficientes angulares são menores, ou seja, apresentam uma menor diferença entre o maior e menor valor da difusividade ao longo do período total de secagem. Verifica-se que quanto maior a variação da difusividade ao longo do processo, maior o erro relativo no ajuste entre dados simulados e experimentais, quando a difusividade foi considerada constante. Observa-se ainda que para temperaturas mais elevadas do ar de secagem maior a inclinação da curva D versus \bar{M}^* , indicando que nestas condições, uma maior variação da difusividade de massa ocorre.

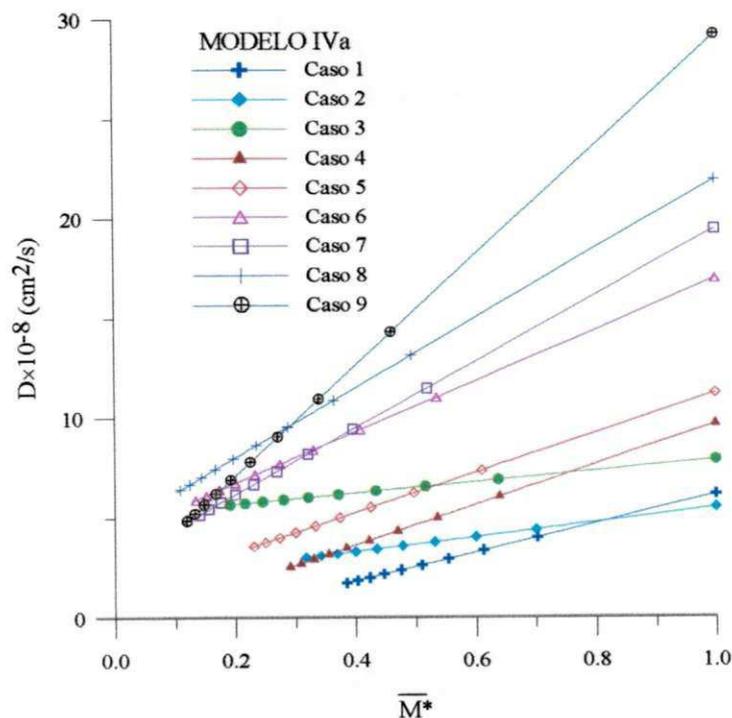


Figura 4.81 – Valores da difusividade em função de \bar{M}^* com $B = 0.0$

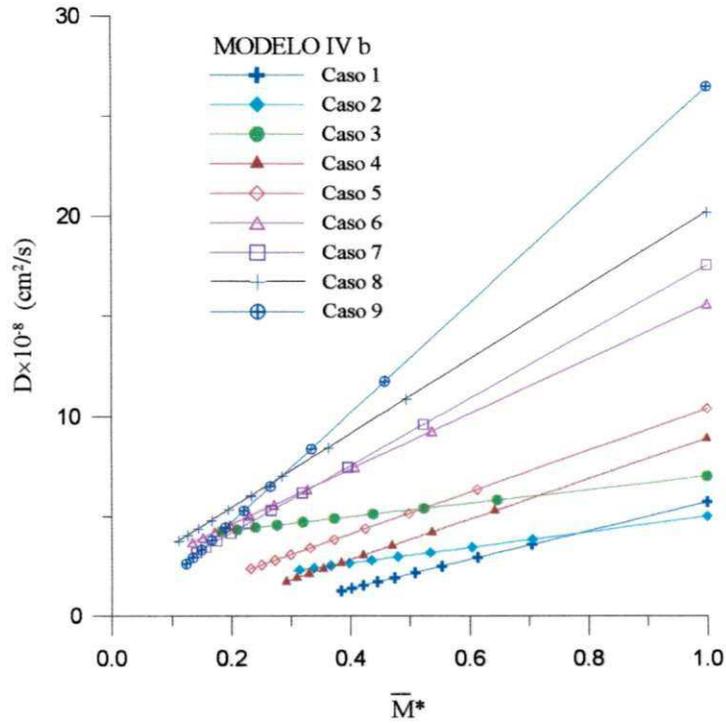


Figura 4.82 – Valores da difusividade em função de \bar{M}^* com $B = 0.17$

Percebe-se que a incorporação do efeito de encolhimento no modelo resultou em menores valores da difusividade de massa.

Nenhuma equação de D em função de T foi ajustada tendo em vista ter-se trabalhado com apenas 3 temperaturas distintas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 Conclusões

Considerando os dados obtidos com a simulação da secagem de corpos com a geometria esferoidal oblato, pode-se concluir de maneira geral que:

- O tratamento matemático para se obter a solução da equação de difusão em coordenadas esferoidais oblato se mostrou adequado podendo ser utilizado para a análise de outros fenômenos tais como umidificação, aquecimento e resfriamento de sólidos. Além da distribuição interna da grandeza em estudo, a solução da equação de difusão permite a análise da cinética de secagem
- O método de volumes finitos mostrou-se adequado na discretização da equação de difusão em coordenadas esferoidais oblatas, sendo possível prever o fenômeno de difusão transiente no interior de sólidos com forma esferoidal variando desde um disco circular até uma esfera. Os modelos apresentados são versáteis, podendo apresentar coeficiente de difusão constante ou variável, com condição de contorno de equilíbrio na superfície ou do tipo convectiva.
- O modelo esferoidal oblato prediz regiões do sólido com mais rápido aquecimento ou secagem.

- Para sólidos esferoidais oblatos, a taxa de secagem aumenta com o aumento da razão de aspecto do sólido.
- Para sólidos esferoidais oblatos com o mesmo volume, seca mais rápido aquele que tem a maior relação área / volume.
- Quando se considera o acoplamento de calor e massa na superfície do corpo, a taxa de variação da temperatura dentro do sólido é alterada.
- A consideração do encolhimento do sólido na equação de difusão altera sua taxa de secagem. Quanto maior for o coeficiente de encolhimento, maior é taxa de secagem do sólido.
- O processo de secagem intermitente é um valioso método que permite estudar a minimização da energia em um processo de secagem, podendo ser aplicado em secadores industriais, para aumentar a sua eficiência e reduzir custos de processo.
- Em todos os casos de têmpera, a taxa de secagem foi maior, quando comparada com a secagem contínua. Pôde-se perceber que o início do processo de têmpera e o tempo de repouso afetam diretamente a taxa de secagem do produto.
- Para um mesmo tempo total de têmpera, quanto maior o número de passes, maior é a eficiência na secagem do produto. No entanto, esta eficiência é limitada a um certo número de passes.
- A equação (3.97) que determina uma distribuição uniforme de pontos a partir dos dados experimentais obtidos na literatura, se ajusta muito bem a estes dados, com o coeficiente de correlação maior que 0,999 para todos os casos.
- Pelo fato da lentilha apresentar uma alta taxa de secagem no início do processo, somente o modelo que considera as propriedades físicas do produto variáveis apresenta uma boa aproximação entre os valores teóricos e experimentais.
- Entre os modelos que consideram as propriedades do material constantes, apresentam melhor concordância com os dados experimentais aqueles cujo ar de secagem tem a menor temperatura. Para determinadas condições fixas do ar de secagem, quanto menor a temperatura, mais lenta é a cinética de secagem.

- Os valores encontrados para a difusividade de massa (D), quando o ajuste é feito com modelos utilizando h_m finito e infinito são iguais.
- Para modelos que utilizam h_m infinito e coeficiente de encolhimento $B=0,0$ ou $B=0,17$, diferentes valores da difusividade de massa são encontrados. Entretanto, a incorporação do coeficiente de encolhimento torna o modelo mais realista fisicamente.
- Os valores da difusividade de massa da lentilha mostram-se dependentes da temperatura e da umidade relativa, tendendo a aumentar com o aumento da temperatura.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Estudar a difusão em corpos esferoidais oblatos no caso tridimensional;
- Aplicar os modelos apresentados neste trabalho à secagem de outros produtos biológicos;
- Ampliar os modelos apresentados, incorporando o efeito de transferência de calor por radiação, para processos a altas temperaturas;
- Incorporar nos modelos, termos de difusão de vapor e estudar o fenômeno de difusão simultânea de líquido e vapor
- Ampliar os modelos para os casos onde se tem efeitos eletromagnéticos (secagem com microondas, infravermelho, e outros) e aplicá-lo a situações práticas;
- Validar experimentalmente o modelo numérico de secagem intermitente;
- Estudar os efeitos de tensões termo-mecânicas em produtos biológicos com geometria elipsoidal;
- Estudar o fenômeno de anisotropia, bastante comum em alimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1972, **Handbook of mathematical functions**, New York: Dover Publications, Inc, USA, p. 752-772, 1972

Acho, T.M. Scalar wave scattering of a prolate spheroid as a parameter expansion of that of a sphere. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.L n.3, p.451-468, 1992.

Alagusundaram, K.; Jayas, D. S.; Muir, W. E.; White, N. D. G. Thermal conductivity of bulk barley lentils and peãs. **Transaction of the Asae**. v. 34, n.4, July-August, 1991.

Almeida, G. S. **Transferência de calor e massa em sólidos heterogêneos com geometria arbitrária: uma análise concentrada**. Campina Grande. Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, 2003, 78 p. Dissertação (Mestrado).

Alsina, O.L.S.; Aragão, R.F.; Monteiro, L.F.; Thin layer drying of mesquite beans. **IADC**, v. B, 1997

Aoi, T. On spheroidal function. **Journal of the Physical Society of Japan**. v. 10, n.2, p. 130-141, 1955.

Azzouz, S.; Jomaa, W.; Belghith, A. Drying kinetic equation of single layer of grapes. **Drying 98**, Thessaloniki, Greece, Ziti publishing Co, v.B, 1998

Berger, D., Pei, D. C. T. Drying of hygroscopic capillary porous solids: A theoretical approach, **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 16, p. 293-302, 1973.

- Brasileiro, I. M. N. **Cinética de secagem de acerola “In Natura” em monocamada**. Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Química, 1999, 75 p. Dissertação (Mestrado).
- Brodkey, R. S. **The phenomena of fluid motions**. London: Addison- Wesley Publishing Company, p. 18-23, 1967.
- Carmo, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblatos. Modelagem e simulação**. Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, 2000, 80p.
- Carmo, J.E.F; Lima, A.G.B. Mass transfer in oblate spheroidal solids. In Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT 2000), Porto Alegre: Proceedings..., 2000
- Carmo, J.E.F., Lima, A.G.B Modelling and simulation of mass transfer inside the oblate spheroidal solids, In: Inter-American drying conference, México, :Proceedings v. B p.173-183. 2001.
- Carlsaw, H. S.; Jaeger, J. C. **Conduction of Heat in Solids**, New York, Oxford University Press, 1959, 510 p.
- Cavalcanti Mata, M. E. R. M. **Efeitos da secagem em altas temperaturas por curtos períodos de tempo, em camada estacionária, sobre a armazenabilidade de sementes de feijão(Phaseolus vulgaris L.), variedade “carioca”: avaliação, modelagem e simulação**. Campinas. Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 314p. Tese (doutorado).
- Cnossen A. G.; Jiménez.; M. J. Siebenmorgen. Rice fissuring response to high drying and tempering temperature. **Journal of Food Engineering**, v. 59, p. 61-69, 2003.
- Chua, K. J.; Mujundar, A S.; Chou, S. K. Intermittent drying of bio-products – on overview. **Bioreource Thecnology**. v. 90, p. 285-295, 2003
- Cinhan, A; Ece, M. C. Liquid difusión model for intermittent drying of roug rice. **Journal of Food Engineering**, v. 49, p. 327-331, 2001.
- Cnossen, A. G.; Jiménez, T. J.; Siebenmorgen, T. J. Rice fissuring response to high drying and tempering temperatures. **Journal of Food Engineering**, v.59, p.61-69, 2003.
- Cautelieiris, F.; Burganos, V. N.; Payatakes, A. C. Convective diffusion and adsorption in swarm of spheroidal particles. **AIChE Journal** v.41, n.5, p. 1122-1134, 1995.

- Crank, J. **The mathematics of diffusion**, New York, Oxford Science Publications, USA, 1992, 414p.
- Do-Nhat, T., Macphie, R.H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. **Quartely of applied mathematics**, v. 54, n. 4, p.677-685, 1966a.
- Do-Nhat, T., Macphie, R.H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. **Quartely of applied mathematics**, v. 54, n.4, p.721-725, 1966b.
- Elvira, C. the diffusion process modelling in elliptic shaped bodies. In: International Congress of Engeinereing and Food, London. **Proceedings...**v.1, p.456-464, 1990.
- Farias, S. N. **Secagem de sólidos esferoidais usando o método de Galerkin**. Universidade Federal de Campina Grande. 2002, p. 65. Dissertação (Mestrado).
- Fioreze, Romeu. **The intermittent drying agricultural crops with particular reference to energy requeriments**. Granfield Institute of Technology, Silsoe College, 1986. 153p. Tese (Doutorado).
- Flammer, C. **Spheroidal wave functions**. Standford: Stanford University Press, 1957. 220 p.
- Fortes, M.; Okos, M.R. Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, **Advances in drying**. Washington: Hemisphere Publishing Corporartion, Chapter Five: v.1, p. 119-154, 1980.
- Gebhart, B **Heat conduction and mass diffusion**. McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1993. 634p.
- Gouveia, J.P.G.; Almeida, F.A C.; Murr, F.E.X. Estudo da difusividade e do encolhimento do gengibre durante a secagem. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**. v.1 n.1, 1999.
- Haghighi, K.; Irudayaraj, Stroshine, R. L. , Sokhansanj, S. Grain kernel drying simulation using the finite element method. **Transaction of the ASAE**. v.33, n.6, p.1957-1965, 1990.
- Haji-Sheikh, A.; Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid; Transactions of the ASAE: **Journal of Heat Transfer**, v. 88, no. 3, p. 331-333, 1966.
- Haji-Sheikh, A , Sparrow, E. M. The solution of heat conduction problems by probality methods. Transactions of the ASAE. **Journal of Heat Transfer**, 1967, v.89 n.2, p. 121-131, May 1967. series C.

- Haji-Sheikh, A. **Integral Methods in Science and Engineering**. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functionsp. 467-479, , 1986..
- Hatamipour, M. S.; Mowla, D. Shrinkage of carrot during drying in a inert médium fluidized bed. **Journal of food Engineering**. 2002
- Henry, P. S. H. **Difusion in absorbing media**. London, Proc. R. Soc vol. 171a, p.215-241, 1939.
- Hernandez, J.A., Pavón, G., Garcia, M.A. “Analitical solution of transfer equation considering shrinkage for modeling food-drying kinetics”, **Journal of Food Engineering**. , v. 45, p. 1-10, 2000.
- Hougen, O. A. Limitation of diffusion equation in drying. **Trans. AICHE**, v. 36, n. 2, p. 183-206, 1940.
- Iglesias, M. H., Chirife, J. An empirical equation for fitting water sorption isotherms of fruits and related products. **Canadian Institute of Food Science and Technology Journal**, v.11, n.1, p.12-15, 1978.
- Iglesias, M. H., Chirife. **Handbook of Food Isotherms: Water parameters for Food and Food Components**, New York Academic Press, Inc: 1982.
- Incropera, F.P., DeWitt, D.P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1990, 455p.
- Jöholm, I. S.; Gekas, V. Apple Shrinkage upon drying. **Journal of Food Engineering**, v. 25, p.123-130, 1995.
- Júnior, P. C. A. ; Correa, P. C.; Andrade, E. T. Análise da variação das propriedades físicas e concentração dos grãos de milheto (*Pennisetum glaucum*), durante o processo de secagem. **Revista Brasileira de Armazenamento**, Viçosa. V.25, n.1, p.15-21, 2000.
- Júnior, P.E.P; Cairncross, R.A. Otimization of single-zone drying of polimer solution coting to avoid blister defects. **Drying 98**, Thessaloniki,Greece, Ziti publishing Co, v.C, 1998
- Kakaç, S., Yener Y **Heat Conduction**, 1993, Washington, USA, Ed. Taylor and Francis Inc, 1990.
- Kreyszig, E. **Advanced engineering mathematics**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons p. 498-504, 1988.

Lang, W.; Sokhansanj, S.; Rohani, S. Dynamic shrinkage and variable parameters in Bakker-Arkema's mathematical simulation of wheat and canola drying. **Drying Technology** v.12 n.7, p. 1687-1708, 1994.

Lima, A. G. B. **Fenômeno de Difusão em sólidos esferoidais oblatos. Estudo de Caso: Secagem de Banana.** Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil. 1999, 243p..

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids. **Drying Technology**, v. 18, n. 1-2, p. 21-48, 2000.

Lima, A. G. B., Nebra, S. A., Altemani, C. A. C. Simulation of the drying kinetics of the silkworm cocoon considering diffusive mechanism in elliptical coordinate. Proceedings of Inter-American Drying Conference (IADC. v. B, Itu-SP, Brasil, p. 317-324,), 1997.

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. Influência de parâmetros geométricos na cinética de secagem de elipsóides sólidos, In: Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, (25 ENEMP), v.1, São Carlos-SP, Brasil, p. 195-202, 1997.

Lima, L. A. **Difusão em sólidos com geometrias arbitrárias: Uma abordagem concentrada.** Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Campina Grande. 2001,30 p. Relatório técnico científico.

Losano, J. E.; Rotstein, E.; Urbicain, M. J. Shrinkage, porosity and bulk density of foodstuffs at changing moisture content. **Journal of Food Science**, v.48, p. 1497-1502, 1983.

Lu, R.; Siebenmorgen, T. J. Moisture diffusivity of long-grain in rice components. **Transactions of the ASAE**, v. 35, n. 6, p. 1955-1961, 1992.

Luccas, V. **Obtenção de fatias de banana desidratada crocantes através da pré secagem a altas temperaturas e curto tempo em leito fluidizado,** Campinas, Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, 1996,104p. Dissertação (Mestrado).

Luikov, A.V. **Analytical Heat Diffusion Theory,** Academic Press, Inc. Ltd., London, England, 1968.

Luikov, A.V. **Heat and mass transfer in capillary- porous bodies,** Pergamon, Oxford, 1966.

Mac Robert, T. M. **Spherical harmonics: Elementary treatise on harmonic function with application.** Oxford: Pergamon Press, 1967, 349p.

- Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R. P. **Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics**. Berlin: Springer-Verlag, p.472-495, 1966.
- Maliska, C. R. **Computational heat transfer and fluid mechanics**, LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 1995.
- Manara, W.; Manara, N.T.F.; Veiga, P.; Taragó, M.F.S. A cultura da lentilha. **Informe Agropecuário**, Belo Horizonte, M.G, v.16, n.174, p.61-70, 1992.
- Marinos-Kouris D., Maroulis, B. Transport properties in the drying of solids. **Handbook of Industrial Drying**. . New York, Marcel Dekker Inc. v.1 p.113-150, 1995
- Menkov, N. D. Moisture sorption of lentils seeds at several temperatures. **Journal of Food Engineering**. v. 44, p.205-211, 2000.
- Minkowycz, W. J.; Sparrow, E. M.; Schneider, G. E.; Pletcher, R. H. **Handbook of numerical heat transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1204p..
- Nascimento, J. J.; Belo, F. A.; Lima, A. G.B. **Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of parallepiped solids** Proceedings of the second inter-american drying conference, p. 535-544, . 2001.
- Niven, C. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. **Philosophical Transactions Royal Society**, London: v.171, p.117-151, 1880.
- Norminton, E. J., Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids and the thin circular disk. **Quart. Journ. Mech. and Applied Math.**, v.17, part 1, Febr. 1964.
- Oliveira, V.A.B. **Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica**. Universidade Federal de Campina Grande, 74p., 2001 Dissertação (Mestrado).
- Paje, L. The electrical oscilation of prolate spheroidal. Paper II. Prolate spheroidal wave functions. **The Physical Review**, v.65, n. 3 e 4, p.111-117, 1944 a.
- Paje, L. The electrical oscilation of prolate spheroidal. Paper III. The antenna problem.. **The Physical Review**, v.65, n. 3 e 4, p.98-110,1944 b.
- Paje, L., Adams, N.I.A. The electrical oscilation of prolate spheroidal. **The Physical Review**, v.53, p.819-831, May, 1938.

- Patankar, S. V., 1980, **Numerical heat transfer and fluid flow**, New York, Hemisphere Publishing Corporation, 197p.
- Philip, J. R.; De Vries, D. A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients, **Trans. Am. Geophys. Union**, v. 38, n. 2, p. 222-232, 1957.
- Prachayawaracorn, S.; Soponronnarit, S.; Wetchacama, S.; Chinnabum, K. Methodology for enhancing drying rate and improving maize quality in fluidised-bed dryer. **Journal of Stored Products Research**. v.40, p.379-393, 2004.
- Queiroz, M.R., Nebra, S. A, 2000, "Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas" **Journal of food engineering** 47,p. 127-132, (2001).
- Queiroz, M. R. **Estudo teórico experimental da secagem de bananas**. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1994, 176p. Tese (Doutorado).
- Robin, L. **Functions spheriques de Legendre et Functions spheroidales**. Paris: Gauthier-Villars, 1959, 288p.
- Rovedo, C.; Suarez, C.; Viollaz, P. Analysis of moisture profiles, mass Biot number and driving force during drying of potato slabs, **Journal of Food Engineering**, v.36. p.211-231, 1998.
- Sabarez, H. T.; Price, W. E. "A diffusion model for prune dehydration" **Journal of food engineering**, v. 42 p.167-172, 1999.
- Sanjuan, N.; Bom, J.; Benedito, J.; Mulet, A. Effect of pretreatments on dehydrate broccoli steam quality. **Drying 98**, Thessaloniki, Greece: Ziti publishing Co, v.B, 1998
- Saravacos, G. d., Kostaropoulos, A. Transport properties in processing of fruits and vegetables. **Food Technology**, p. 99-105, Setember, 1995.
- Selby, S. M. **Standart mathematical tables**. Cleveland: The Chemical Rubber Co., 1971, 18p.
- Sharma, A D.; Kunze, O. R.; Tolley, H. D. Rough rice drying as a two-compartment model. **Transactions of the ASAE**, v.25, p.221-224, 1982.
- Sheen, S.; Hayakawa, K. Parametric analysis for frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. **Journal of Food Science**, v.57, n.1, p.236-248, 1992.
- Shih, T. **Numerical heat transfer**. Washigton: Hemisphere Publishing Corporation, 1984, 536p.

Shivhare, U. S., Gupta, A.; Bawa, A.; S., Gupta, P. Drying characteristics and product quality of okra. **Drying Technology**. Marcel Dekker, Inc. v.18.n.1e2 p. 409-419, 2000.

Silva, J. B. **Secagem de sólidos em camada fina via análise concentra: Modelagem e simulação**. Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de engenharia mecânica, 2002, 49 p. Dissertação (Mestrado).

Sjöholm, I.; Gekas, V. Apple Shrinkage Upon Drying. *Journal of Food Engineering*. v..25, p.123-130, 1995.

Sokhansanj, S. Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application, In: **International Drying Symposium (IDS'80)**, Montreal: Proceeding...v.2, p. 229-232, 1980.

Sokhasanj, S.; Falacinski, A.A.; Sosulski, F.W.; Jayas, D.S.; Tang, J. Resitence of bulk lentils to airflow. **American Society of Agricultural Engineer**. v.33, n.4, July-August, 1990.

Stratton, J. A.; Morse, P. M.; Chu, L. J.; Little, J. D. C.; Huntner, R. A. **Elliptic cylinder and spheroidal wave functions**, The New York, USA: Tech. Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, Inc, 1941, 127p.

Strumillo, C.; Kudra, T. **Drying: Principles, applications and and Design**, New York: Gordon and Beach Publishing, 1986, 448p..

Tang, J.; Sokhansanj, S. A model for thin-layer drying of lentils. **Drying Technology**, v.12, n.4, p. 849-867, 1994.

Tang, J.; Sokhasanj, S. Drying parameter effects on lentil seed viability. **American Society of Agricultural Engineer**. v. 36, n.3, p. 855-861, may-june, 1993a.

Tang, J.; Sokhasanj, S. Geometric changes in lentils seed caused by drying. **Journal Agricultural Engineering Research** v.56, p. 313-326, 1993b.

Tang, J.; Sokhasanj.; Yannacopoulos, S.; Kasap, S. O. Specific heat of lentils by differential scanning calorimetry. **Transaction of Asae**, v.34, n. 4, p. 517-522, 1991.

Teruel, B., Cortez, L., Lima, A.G.B. Transferência de calor durante o resfriamento de frutas com ar forçado e com água. **Brazilian Journal of Food Technology**, v.5, p. 131-138, 2002.

Whitaker, S. O, **Advances in Drying**, Ed. A. S. Mujumdar, Hemisphere Publishing Corporation, New York. Chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media, p. 23-61, 1980.

Whitney J. D.; Porterfield, J. C. Moisture movement in porous, hygroscopic solid, **Trans. ASAE**, v. 11, p. 716-723, 1968.

Wrobel, L. C.; Brebbia, C. A. A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. **International Journal Heat and Mass Transfer**, v. 24, n. 5, p. 843-850, 1981.

Zienkiewicz, O. C., Parekh, C. J. Transient field problem: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 2, p. 61-71, 1970.