

Felipe Gomes Pontes

Relatório de Estágio Supervisionado

Campina Grande, Paraíba

Janeiro de 2017

Felipe Gomes Pontes

Relatório de Estágio Supervisionado

Relatório de Estágio Supervisionado submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: Péricles Rezende Barros, Phd.

Coorientador: George Acioli Júnior

Campina Grande, Paraíba

Janeiro de 2017

Felipe Gomes Pontes

Relatório de Estágio Supervisionado/ Felipe Gomes Pontes. – Campina Grande, Paraíba, Janeiro de 2017-

44 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Péricles Rezende Barros, Phd.

Relatório de Estágio Supervisionado – Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE, Janeiro de 2017.

1. controle preditivo. 2. MPC. 3. DMC. 4. GPC.

Felipe Gomes Pontes

Relatório de Estágio Supervisionado

Relatório de Estágio Supervisionado submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica

Trabalho aprovado. Campina Grande, Paraíba, 24 de novembro de 2012:

Péricles Rezende Barros, Phd.
Orientador

Professor George Acioli Junior
Convidado 1

Campina Grande, Paraíba
Janeiro de 2017

*Este trabalho é dedicado à minha família e a todos
que me apoiaram durante essa jornada.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a meus pais, Simone e Helder, que proporcionaram a oportunidade de realizar o sonho de estudar fora e obter uma formação em uma Universidade de qualidade.

Aos meus irmãos, Carlos Henrique e Heldelana, sempre presentes na minha vida, pacientes e dispostos a me ajudar no que eu precisasse.

Aos meus primos, Pedro Neto e Rodrigo, que tenho como irmãos e, através do apoio e momentos de descontração, traziam com eles um alívio para o estresse e tensão que a vida universitária podia trazer.

Aos amigos que formei durante a vida universitária, Víctor Lima, Oeslle Lucena, Érico Castro, Lucas Henriques, Mateus Lucena, Geraldo Landim, Artur Freitas, Lucas Moreira e Mateus Queiroga, que me apoiaram em momentos de necessidade e deram suporte quando podiam.

A minha namorada Karla, que, através de seu amor, companheirismo e dedicação, contribuiu como um exemplo a ser seguido.

Finalmente, aos meus professores, pois, sem eles, não haveria chegado onde cheguei. Em especial aos professores Saulo Oliveira Dornellas Luiz, que foi um professor dedicado, atencioso e presente, e Péricles Rezende Barros, orientador que, consciente ou inconscientemente, fez com que eu quisesse ser bem mais do que eu sou e, através de diversos estímulos, acreditasse no prazer que o estudo pode proporcionar.

*“And above all things,
never think that you’re not good enough yourself.
A man should never think that.
My belief is that in life people will take you at your own reckoning.
(Isaac Asimov)*

Resumo

Este relatório apresenta o trabalho realizado pelo aluno Felipe Gomes Pontes em seu estágio supervisionado no Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle (LIEC), pertencente ao Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), sob orientação do Professor Péricles Rezende Barros e supervisão do Professor George Acióli Junior. O foco do estágio foi o estudo das técnicas de controle preditivo e aplicação dos conhecimentos adquiridos em plantas presentes no próprio LIEC.

Palavras-chave: controle preditivo. mpc. dmc. gpc.

Abstract

This report presents the work done by the student Felipe Gomes Pontes in his supervised internship at Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle (LIEC), which belongs to Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) of the Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), under guidance of Professor Péricles Rezende Barros and supervision of Professor George Acióli Junior. The purpose of the internship was the study of predictive control techniques and application of the acquired knowledge in plants at the LIEC.

Keywords: predictive control. mpc. dmc. gpc.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Faixada do prédio do LIEC	14
Figura 2 – Planta a ser controlada	30
Figura 3 – Amplificador	30
Figura 4 – <i>SainSmart</i> UNO	31
Figura 5 – Diagrama de blocos para o sistema de controle	32
Figura 6 – Conjunto peltier	33
Figura 7 – Resposta de cada saída para um degrau nas entradas	33
Figura 8 – Resposta de cada saída para um degrau nas entradas	34
Figura 9 – Interface	35
Figura 10 – Tipos de entradas para malha aberta	36
Figura 11 – Setor para malha aberta	36
Figura 12 – Interface executando para setor de malha aberta	36
Figura 13 – Tipos de referências permitidas	37
Figura 14 – Interface executando para setor de malha fechada	37

Lista de abreviaturas e siglas

UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
DEE	Departamento de Engenharia Elétrica
LIEC	Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
MPC	Modelo de Controle Preditivo
MIMO	Múltiplas-Entradas-Múltiplas-Saídas
SISO	Única-Entrada-Única-Saída
DMC	Controle por Matriz Dinâmica
GPC	Controle Preditivo Generalizado
QP	Programação Quadrática
GUI	Graphical User Interface
GUIDE	GUI Development Environment

Lista de símbolos

N	Horizonte do modelo
R	Horizonte de predição
L	Horizonte de controle
\hat{y}	Saída predita/estimada
y^c	Saída corrigida
y^d	Saída desejada/Trajectoria de referência
\tilde{x}	Diferença entre variável futura e atual

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
	Introdução	13
2	LOCAL DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
3.1	DMC	17
3.1.1	SISO	17
3.1.2	MIMO	20
3.1.3	Rejeição de perturbações	23
3.1.4	Restrições no DMC	23
3.2	Controle preditivo usando espaço de estados	26
4	PLANTA	30
5	IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE UTILIZANDO DMC	32
6	INTERFACE GRÁFICA	35
6.1	Malha Aberta	36
6.2	Malha Fechada	37
7	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	40
	APÊNDICE A – QP: PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	41
A.1	Restrições em igualdades	41
A.2	Restrições em inequações	42
A.2.1	Condições de Kuhn-Tucker	42
A.2.2	Método Primal-Dual	43
A.2.3	Processo de Programação Quadrática de Hildreth	43

1 Introdução

A disciplina Estágio Supervisionado, que compõe a grade curricular do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), tem como finalidade permitir que o aluno, no término do seu curso de graduação, aplique os conhecimentos adquiridos nas disciplinas ao longo da sua formação em atividades que aprimorem sua desenvoltura no âmbito profissional. Este relatório contém a descrição das tarefas realizadas entre o período de 14 de novembro e 21 de dezembro, com carga horária de 40 horas semanais, totalizando 217 horas, sob orientação do Professor Péricles Rezende Barros e supervisão do professor George Acióli Junior.

O local de realização foi o Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle (LIEC), integrante do Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) da UFCG. Situa-se na Rua Aprígio Veloso, 882, Bairro Universitário, no município de Campina Grande, Paraíba. O ponto principal das atividades executadas foi a aplicação do controle preditivo a algumas plantas presentes no próprio LIEC.

O plano de estágio foi dividido de tal forma que, primeiramente, foi feito um estudo sobre controle preditivo e suas técnicas, seguido por uma aplicação desses conhecimentos adquiridos nas plantas.

2 Local do Estágio Supervisionado

Criado em 1973, o LIEC vêm desenvolvendo pesquisa e extensão na área de controle, automação e instrumentação desde então. Este é pertencente ao Departamento de Engenharia Elétrica da UFCG, localizado no setor C do Campus I, Campina Grande. Sua estrutura física é de aproximadamente 600 m^2 divididos em oito laboratórios de desenvolvimento, duas salas de apoio técnico, salas para apresentação de trabalhos, salas para pós-graduação e salas para professores (LIEC, 2015). Sua fachada é ilustrada na Figura 1.



Figura 1 – Faixada do prédio do LIEC

Os principais laboratórios são:

- Laboratório de Aplicações Wireless: soluções baseadas em dispositivos móveis para ambientes industriais são desenvolvidas;
- Laboratório de Automação Industrial: aborda trabalhos com sintonia de controladores PID industriais (Mono e Multivariável), automação industrial, instrumentação industrial, IHM industrial e avaliação de confiabilidade em malhas de controle.
- Laboratório de Controle e Otimização: produz projetos de sintonia de controladores PID e modelagem e simulação de processos e sistemas supervisórios.
- Laboratório de Instrumentação Eletrônica: projetos de sintonia de PID são desenvolvidos.

- Laboratório de Redes Industriais: permite o estudo de técnicas e tecnologias para a comunicação entre dispositivos industriais.
- Laboratório de RFID: desenvolvimento de aplicações baseadas em tecnologia RFID para ambientes industriais.
- Laboratório de UltraSom: trabalha-se com o desenvolvimento de sensor de incrustação e desenvolvimento de técnicas de medição de incrustação.

No LIEC, alunos de graduação e de pós-graduação encontram um ambiente propício ao aperfeiçoamento dos conhecimentos teóricos e das habilidades práticas, por intermédio das diversas pesquisas e outras atividades realizadas no mesmo.

3 Fundamentação Teórica

Controle preditivo (ou MPC - *Model Predictive Control*) é uma técnica de controle avançado que é aplicado na indústria há mais de 30 anos, porém só atraiu o interesse do meio acadêmico no início da década de 80. Baseado na observação do comportamento humano, este tipo controle procura, assim como uma pessoa tende a planejar suas atividades para otimizar o tempo ou calcular quanto deve abrir uma torneira para encher um recipiente sem transbordá-lo, prever a saída do sistema e, assim, impor entradas que otimizem o desempenho.

Como o controle preditivo utiliza diretamente o modelo do processo para calcular as ações de controle, várias vantagens são apresentadas quando comparado com o controle clássico PID, no qual o controlador atua sobre os erros para calcular as ações de controle (KWONG, 2005). Dentre elas:

- Há pouca diferença entre a estratégia de controle para processos multivariáveis (MIMO - *Multiple-Input-Multiple-Output*) e com uma entrada e uma saída (SISO - *Single-Input-Single-Output*);
- Acomoda restrições na entrada, nas variações da variável de entrada e na saída;
- O MPC pode ser integrado com estratégias de otimização on-line para otimizar o desempenho da planta

Como apresenta (WANG, 2009), há três formas gerais para projeto de controle preditivo: Controle por Matriz Dinâmica (DMC - *Dynamic Matrix Control*), Controle Preditivo Generalizado (GPC - *Generalized Predictive Control*) e controle preditivo usando espaço de estados.

Um conceito básico para o controle preditivo é o de horizonte, que nada mais é do que até onde se pode enxergar. Para este estudo, três diferentes horizontes são utilizados: o do modelo, o de predição e o de controle.

Como é apresentado por (KWONG, 2005), Horizonte do modelo, aqui tratado como N , representa o tempo de resposta do processo. Horizonte de predição, doravante chamado de R , é um valor que informa até que intervalo de amostragem é realizado a predição. Finalmente, horizonte de controle, representado por L , trata de uma sequência de movimentos de controle tal que uma função objetivo seja minimizado. No entanto, apenas o primeiro movimento calculado nas entradas do processo é implementado. Depois, todos os cálculos de predição são refeitos, com mesmos valores de horizontes, porém um passo a frente. A tal estratégia pode ser atribuído o nome de "Horizonte Móvel".

3.1 DMC

A técnica DMC é explicitada como mostrada por (KWONG, 2005).

3.1.1 SISO

Para um sistema com uma saída e uma entrada, o modelo de convolução discreto utilizado para prever a saída no próximo instante de amostragem, $k+1$, pode ser expresso por (3.1).

$$\hat{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^N h_i u_{k+1-i} \quad (3.1)$$

Em (3.1), k representa o instante atual. Logo, \hat{y}_{k+1} é a saída predita do sistema e u_{k+1-i} , a entrada do sistema. Sabendo que $u_k = \Delta u_k + u_{k-1}$ esse modelo de resposta ao impulso pode ser expresso por um método recursivo, como apresenta (3.2).

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u_{k+1-i} \quad (3.2)$$

Generalizando (3.2) para R instantes de amostragem, obtém-se:

$$\hat{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j-1} + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u_{k+j-i} \quad (3.3)$$

Em (3.3), $j = 1, 2, \dots, R$, $R < N$. Percebe-se que, para fazer a predição de y_{k+1} , utiliza-se u_k , ou seja, a entrada atual, por ser um sistema discreto, só fará efeito no próximo instante de amostragem. Utilizando a equação recursiva (3.3), pode-se notar que a realimentação é, então, realizada a partir de y_k .

Sabendo disso, é possível fazer uma correção na predição, considerando $y_k^c = y_k$. Assim:

$$y_{k+j}^c = \hat{y}_{k+j} + (y_{k+j-1}^c - \hat{y}_{k+j-1}) \quad (3.4)$$

Utilizar (3.4) equivale a admitir que o erro no instante atual é igual a todos os erros futuros. Substituindo (3.4) em (3.3), obtém-se:

$$y_{k+j}^c = y_{k+j-1}^c + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u_{k+j-i} \quad (3.5)$$

Representando (3.5) na forma matricial para R instantes futuros:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^c \\ y_{k+2}^c \\ \vdots \\ y_{k+R-1}^c \\ y_{k+R}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{R-1} & a_{R-2} & \dots & a_1 & 0 \\ a_R & a_{R-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+R-2} \\ \Delta u_{k+R-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_k + P_1 \\ y_k + P_2 \\ \vdots \\ y_k + P_{R-1} \\ y_k + P_R \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Em (3.6), os a_i são coeficientes da resposta ao degrau $a_i = \sum_{j=1}^i h_j$, enquanto que os outros termos são encontrados por meio de uma manipulação do somatório $\sum_{i=1}^N h_i \Delta u_{k+j-i}$. O vetor mais a direita, cujos elementos são dados por $y_k + P_j$, com $j = 1, 2, \dots, R$, é chamado por alguns autores de Resposta Livre e representa funções de entradas passadas, como apresentam (3.7) e (3.8). Já as duas matrizes multiplicadas são conhecidas como Resposta Forçada e caracterizam as mudanças atuais e futuras da variável de entrada. Assim:

$$P_i = \sum_{m=1}^i S_m \quad i = 1, 2, \dots, R \quad (3.7)$$

$$S_m = \sum_{i=m+1}^N h_i \Delta u_{k+m-i} \quad m = 1, 2, \dots, R \quad (3.8)$$

Sabe-se, porém, que apenas L sequências de controle são calculadas. Então, a matriz \mathbf{A}' , que possui dimensão $R \times R$, passa a ser $R \times L$ e o vetor $\Delta \mathbf{u}$, $L \times 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_{R-1} & a_{R-2} & \dots & a_{R-L} \\ a_R & a_{R-1} & \dots & a_{R-L+1} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+L-2} \\ \Delta u_{k+L-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A trajetória de referência, tratada como $y_{k+j}^d (j = 1, 2, \dots, R)$, é definida como:

$$y_{k+j}^d = \alpha^j y_k + (1 - \alpha^j) r_k \quad (3.10)$$

O parâmetro α , que pode apresentar um valor $0 \leq \alpha < 1$, determina o quão rapidamente a trajetória atinge o *setpoint*. Em forma matricial, (3.10) pode ser expressa

como (3.11).

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^d \\ y_{k+2}^d \\ \vdots \\ y_{k+R-1}^d \\ y_{k+R}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^1 y_k + (1 - \alpha^1) r_k \\ \alpha^2 y_k + (1 - \alpha^2) r_k \\ \vdots \\ \alpha^{R-1} y_k + (1 - \alpha^{R-1}) r_k \\ \alpha^R y_k + (1 - \alpha^R) r_k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Uma subtração de (3.11) por (3.6) resulta em (3.12).

$$\hat{\mathbf{E}} = -\mathbf{A}\Delta\mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}' \quad (3.12)$$

Em $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{E}}'$ são vetores de erros preditos e são expressos como apresentam (3.13) e (3.14). $\hat{\mathbf{E}}$ refere-se à predição em malha fechada, visto que é a diferença entre a referência e valores futuros da saída. Já $\hat{\mathbf{E}}'$ é uma predição em malha aberta, uma vez que é calculado com base nas ações de controle passadas.

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} y_{k+1}^d - y_{k+1}^c \\ y_{k+2}^d - y_{k+2}^c \\ \vdots \\ y_{k+R-1}^d - y_{k+R-1}^c \\ y_{k+R}^d - y_{k+R}^c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{E}}' = \begin{bmatrix} (1 - \alpha^1)E_k - P_1 \\ (1 - \alpha^2)E_k - P_2 \\ \vdots \\ (1 - \alpha^{R-1})E_k - P_{R-1} \\ (1 - \alpha^R)E_k - P_R \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Se for exigido que a saída predita seja igual à saída desejada, o que corresponde ao projeto protótipo mínimo, então $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$. Assim:

$$\Delta\mathbf{u} = (\mathbf{A})^{-1}\hat{\mathbf{E}}' \quad (3.15)$$

O sistema (3.12) é sobredeterminado, ou seja, possui mais equações do que variáveis. Logo, não tem solução exata. A melhor solução pode, então, ser encontrada utilizando o método dos mínimos quadrados com a adição de um termo responsável pela ponderação dos movimentos de controle da função.

$$J(\Delta\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}} + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta\mathbf{u} \quad (3.16)$$

Em (3.16), J é conhecida como função objetivo e $\Delta \mathbf{u}$, variável de decisão. A matriz \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação. A matriz \mathbf{R} é definida como $\mathbf{R} = r_w \mathbf{I}_{N_c \times N_c}$. Para um $r_w = 0$, não há restrições para quão grande os incrementos na entrada podem ser. A solução ótima é dada pela derivada parcial de (3.16) em relação à $\Delta \mathbf{u}$ e igualada a zero. Assim, sabendo que $\frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ e $\frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{X}^T \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{B} \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} J(\Delta \mathbf{u}) &= (-\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}')^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} (-\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}') + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} \\ J(\Delta \mathbf{u}) &= (-\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} + \hat{\mathbf{E}}'^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) (-\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}') + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Fazendo a derivada parcial da função objetivo em função de $\Delta \mathbf{u}$ e igualando a zero, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} - \hat{\mathbf{E}}'^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{E}}'^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}]}{\partial \Delta \mathbf{u}} &= 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + (\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A})^T - (\hat{\mathbf{E}}'^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A})^T - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' + \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} + (\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R})^T &= 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' + \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} &= 0 \\ \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' &= \mathbf{K}_C \hat{\mathbf{E}}' \end{aligned} \quad (3.18)$$

A matriz \mathbf{K}_C é a matriz de ganhos com dimensão $L \times R$. Sabe-se, porém, que apenas a primeira ação de controle é implementada. Então, pode-se reduzir os cálculos por meio da utilização somente da primeira linha de \mathbf{K}_C . Este vetor linha é aqui chamado de \mathbf{K}_L .

$$\Delta u_k = \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{E}}' \quad (3.19)$$

3.1.2 MIMO

O mesmo raciocínio feito para sistemas SISO é utilizado para MIMO, diferenciando apenas a dimensão dos vetores e matrizes. Assim, para um sistema com M entradas e M saídas, denota-se a saída predita como $\hat{y}_{M,k+j}$ e a entrada como $u_{M,k+j-i}$, onde m indica qual saída ou entrada utilizada, k , o instante atual, e $j = 0, 1, 2, \dots, R$. Os coeficientes da resposta ao impulso podem ser expressados como $h_{MM,i}$. Em (3.20) é apresentado o valor corrigido para cada saída.

$$\begin{aligned} y_{1,k+j}^c &= \hat{y}_{1,k+j-1}^c + \sum_{i=1}^N h_{11,i} \Delta u_{1,k+1-i} + \dots + \sum_{i=1}^N h_{1M,i} \Delta u_{M,k+1-i} \\ y_{2,k+j}^c &= \hat{y}_{2,k+j-1}^c + \sum_{i=1}^N h_{21,i} \Delta u_{1,k+1-i} + \dots + \sum_{i=1}^N h_{2M,i} \Delta u_{M,k+1-i} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y_{M,k+j}^c = \hat{y}_{M,k+j-1}^c + \sum_{i=1}^N h_{M1,i} \Delta u_{1,k+1-i} + \dots + \sum_{i=1}^N h_{MM,i} \Delta u_{M,k+1-i} \quad (3.20)$$

Como para o sistema SISO, aqui é admitido que o erro de correção no momento atual é igual aos dos instantes futuros e $y_{1,k}^c = y_{1,k}$, $y_{2,k}^c = y_{2,k}$, ..., $y_{M,k}^c = y_{M,k}$. Escreve-se em forma matricial, como apresenta (3.21).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^c \\ \mathbf{y}_2^c \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{M-1}^c \\ \mathbf{y}_M^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{12} & \dots & \mathbf{A}'_{1M-1} & \mathbf{A}'_{1M} \\ \mathbf{A}'_{21} & \mathbf{A}'_{22} & \dots & \mathbf{A}'_{2M-1} & \mathbf{A}'_{2M} \\ & & \vdots & & \\ \mathbf{A}'_{M-11} & \mathbf{A}'_{M-12} & \dots & \mathbf{A}'_{M-1M-1} & \mathbf{A}'_{M-1M} \\ \mathbf{A}'_{M1} & \mathbf{A}'_{M2} & \dots & \mathbf{A}'_{MM-1} & \mathbf{A}'_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{M-1} \\ \Delta \mathbf{u}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{1,k} \mathbf{F} + \mathbf{P}_1 \\ y_{2,k} \mathbf{F} + \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ y_{M-1,k} \mathbf{F} + \mathbf{P}_{M-1} \\ y_{M,k} \mathbf{F} + \mathbf{P}_M \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Em (3.21), cada partição é triangular.

$$\mathbf{A}'_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{ij,2} & a_{ij,1} & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{ij,R-1} & a_{ij,R-2} & \dots & a_{ij,1} & 0 \\ a_{ij,R} & a_{ij,R-1} & \dots & a_{ij,2} & a_{ij,1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Cada vetor em (3.21) e os coeficientes em \mathbf{A}' podem ser definidos como segue:

$$a_{ij,p} = \sum_{l=1}^p h_{ij,l} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{y}_n^c = [y_{n,k+1}^c \quad y_{n,k+2}^c \quad \dots \quad y_{n,k+R}^c]^T \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (3.24)$$

$$\Delta \mathbf{u}_n = [\Delta u_{n,k} \quad \Delta u_{n,k+1} \quad \dots \quad \Delta u_{n,k+R}]^T \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (3.25)$$

$$\mathbf{F} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T \quad (3.26)$$

$$\mathbf{P}_n = [P_{n,1} \quad P_{n,2} \quad \dots \quad P_{n,R}]^T \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (3.27)$$

$$P_{n,j} = \sum_{m=1}^j S_{n,m} \quad j = 1, 2, \dots, R \quad (3.28)$$

$$S_{n,m} = \sum_{i=m+1}^N \sum_{l=1}^M h_{nl,i} \Delta u_{l,k+m-i} \quad m = 1, 2, \dots, R \quad (3.29)$$

Como L passos são calculados, a matriz \mathbf{A}' , que possui dimensão MRxMR, pode ser reduzida para uma matriz \mathbf{A} , cuja dimensão é MRxML, e $\Delta \mathbf{u}$, que é MRx1, passa a

ser MLx1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1M-1} & \mathbf{A}_{1M} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2M-1} & \mathbf{A}_{2M} \\ & & \vdots & & \\ \mathbf{A}_{M-11} & \mathbf{A}_{M-12} & \dots & \mathbf{A}_{M-1M-1} & \mathbf{A}_{M-1M} \\ \mathbf{A}_{M1} & \mathbf{A}_{M2} & \dots & \mathbf{A}_{MM-1} & \mathbf{A}_{MM} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \Delta u_{n,k} \\ \Delta u_{n,k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{n,k+L-2} \\ \Delta u_{n,k+L-1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A trajetória desejada pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1,k+j}^d &= \alpha_1^j y_{1,k} + (1 - \alpha_1^j) r_{1,k} \\ \hat{y}_{2,k+j}^d &= \alpha_2^j y_{2,k} + (1 - \alpha_2^j) r_{2,k} \\ &\vdots \\ \hat{y}_{M,k+j}^d &= \alpha_M^j y_{M,k} + (1 - \alpha_M^j) r_{M,k} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim como a grande maioria das equações utilizadas até aqui, (3.31) nada mais é do que uma extensão de (3.10) para um sistema multivariável. Colocando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^d \\ \mathbf{y}_2^d \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{M-1}^d \\ \mathbf{y}_M^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 y_{1,k} + (\mathbf{F} - \mathbf{c}_1) r_{1,k} \\ \mathbf{c}_2 y_{2,k} + (\mathbf{F} - \mathbf{c}_2) r_{2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{M-1} y_{M-1,k} + (\mathbf{F} - \mathbf{c}_{M-1}) r_{M-1,k} \\ \mathbf{c}_M y_{M,k} + (\mathbf{F} - \mathbf{c}_M) r_{M,k} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Sabe-se que $\mathbf{c}_n = [\alpha_n^1 \quad \alpha_n^2 \quad \dots \quad \alpha_n^R]^T$. Então, subtraindo-se (3.21) de (3.32), encontra-se:

$$\hat{\mathbf{E}} = -\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}' \quad (3.33)$$

Os vetores $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{E}}'$ são representado como mostra (3.34).

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^d - \mathbf{y}_1^c \\ \mathbf{y}_2^d - \mathbf{y}_2^c \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{M-1}^d - \mathbf{y}_{M-1}^c \\ \mathbf{y}_M^d - \mathbf{y}_M^c \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{E}}' = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} - \mathbf{c}_1) E_{1,k} - \mathbf{P}_1 \\ (\mathbf{F} - \mathbf{c}_2) E_{2,k} - \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{F} - \mathbf{c}_{M-1}) E_{M-1,k} - \mathbf{P}_{M-1} \\ (\mathbf{F} - \mathbf{c}_M) E_{M,k} - \mathbf{P}_M \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Em (3.34), $E_{M,k} = r_{M,k} - y_{M,k}$. A lei de controle pode ser encontrada da mesma forma como foi calculada para um sistema SISO, porém \mathbf{K}_L não é mais um vetor linha, mas uma matriz MxMR, onde cada linha corresponde à linha k de cada saída da matriz \mathbf{K}_C .

3.1.3 Rejeição de perturbações

A inclusão de uma ação responsável pela rejeição de perturbações utilizando o DMC é realizada de forma bastante direta, desde que o distúrbio possa ser medido. Para isso, basta a adição de um modelo da resposta ao degrau da perturbação na saída predita. Assim, considerando um modelo de perturbação representado por (3.35), pode-se obter (3.36).

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^N h_{d,i} d_{k-i} \quad \Delta u_k = d_k - d_{k-1} \quad (3.35)$$

$$\hat{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j-1} + \sum_{i=1}^N h_{u,i} \Delta u_{k+j-i} + \sum_{i=1}^N h_{d,i} \Delta d_{k+j-i} \quad (3.36)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para a correção da saída predita e expondo na forma matricial, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^c \\ y_{k+2}^c \\ \vdots \\ y_{k+R-1}^c \\ y_{k+R}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{u,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{u,2} & a_{u,1} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_{u,R-1} & a_{u,R-2} & \dots & a_{u,R-L} \\ a_{u,R} & a_{u,R-1} & \dots & a_{u,R-L+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+L-2} \\ \Delta u_{k+L-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_k + P_{u,1} + P_{d,1} \\ y_k + P_{u,2} + P_{d,2} \\ \vdots \\ y_k + P_{u,R-1} + P_{d,R-1} \\ y_k + P_{u,R} + P_{d,R} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A diferença em relação à (3.6) é, portanto, o acréscimo do termo $P_{d,j}$, onde j varia de 1 até R .

$$P_{d,i} = \sum_{m=1}^i S_{d,m} \quad i = 1, 2, \dots, R \quad (3.38)$$

$$S_{d,m} = \sum_{i=m+1}^N h_{d,i} \Delta d_{k+m-i} \quad m = 1, 2, \dots, R \quad (3.39)$$

3.1.4 Restrições no DMC

A maior vantagem do controle preditivo é a possibilidade deste funcionar respeitando certas restrições, fato que permite uma zona de segurança para o funcionamento dos equipamentos e pode gerar uma certa lucratividade, levando a uma economia nos gastos.

Há três tipos de restrições: limites inferior e superior das entradas, limites inferior e superior das variações das entradas e limites inferior e superior das saídas. Em todos os casos, as restrições são dadas por inequações, como apresentadas em (3.40).

$$\text{Restrições} \begin{cases} u_{min} \leq u_k \leq u_{max} \\ \Delta u_{min} \leq \Delta u_k \leq \Delta u_{max} \\ y_{min} \leq \hat{y}_k \leq y_{max} \end{cases} \quad (3.40)$$

Um forma de respeitar essas restrições é utilizar Programação Quadrática (QP - *Quadratic Programming*), que possui a forma apresentada em (3.41).

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{G} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (3.41)$$

Como mostrado na [subseção 3.1.1](#), a função objetivo pode ser escrita como:

$$J = \Delta \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{R}) \Delta \mathbf{u} - 2 \hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}' \quad (3.42)$$

Como apresentado em (IKONEN, 2011), o termo constante, $\hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{E}}'$, pode ser omitido pois não depende da variável de decisão. Percebe-se a semelhança entre (3.40) e (3.42). Assim:

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{R} \\ \mathbf{c}^T = -\hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \end{cases} \quad (3.43)$$

O \mathbf{H} é a matriz Hessiana, cujos valores são constantes e pode ser calculada *off-line*, ou seja, antes da execução do processo, e \mathbf{c} , o vetor gradiente, que varia a cada instante de amostragem.

As restrições na entrada, apresentadas na primeira linha de (3.40), podem ser reescritas como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u} \geq \mathbf{u}_{min} \end{cases} \quad (3.44)$$

Reescrevendo (3.44) em função de $\Delta \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \Delta u_k &\leq u_{max,1} - u(k-1) \\ \Delta u_{k+1} + \Delta u_k &\leq u_{max,2} - u(k-1) \\ &\vdots \\ \Delta u_{k+c-1} + \dots + \Delta u_k &\leq u_{max,c} - u(k-1) \end{aligned}$$

Percebe-se, então, que (3.44) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ -\mathbf{I}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+c-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{max,1} \\ u_{max,2} \\ \vdots \\ u_{max,c} \\ -u_{min,1} \\ -u_{min,2} \\ \vdots \\ -u_{min,c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} u_{k-1} \quad \text{com } \mathbf{I}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, as restrições nas variações na entrada, apresentadas na segunda linha de (3.40), podem ser reescritas como segue:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \\ \Delta \mathbf{u} \geq \Delta \mathbf{u}_{min} \end{cases} \quad (3.46)$$

Deixando em uma forma semelhante à (3.45):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+c-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max,1} \\ \Delta u_{max,2} \\ \vdots \\ \Delta u_{max,c} \\ -\Delta u_{min,1} \\ -\Delta u_{min,2} \\ \vdots \\ -\Delta u_{min,c} \end{bmatrix} \quad \text{com } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Para o caso das restrições nas saídas, apresentadas na terceira linha de (3.40), obtém-se:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}_{max} \\ \hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y}_{min} \end{cases} \quad (3.48)$$

Sabendo que $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}^P$, onde \mathbf{y}^P corresponde ao vetor referente às ações passadas, pode-se reescrever (3.48).

$$\begin{cases} \mathbf{A}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}^P \leq \mathbf{y}_{max} \\ -(\mathbf{A}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}^P) \leq \mathbf{y}_{max} \end{cases} \quad (3.49)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+c-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max} - \mathbf{y}^P \\ -\mathbf{y}_{min} + \mathbf{y}^P \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Agora, em posse da forma matricial dos três tipos de restrições, pode-se combiná-las para obtenção de uma forma geral, que pode diretamente ser aplicada na Programação Quadrática.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{I}_L \\ -\mathbf{I}_L \\ \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{max} \\ -\Delta \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_{max} - u_{k-1} \\ -\mathbf{u}_{min} + u_{k-1} \\ \mathbf{y}_{max} - \mathbf{y}^P \\ -\mathbf{y}_{min} + \mathbf{y}^P \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

A matriz mais à esquerda é constante e pode ser calculada *off-line*, porém o mesmo não acontece para a matriz mais à direita, que é diferente para cada instante de amostragem.

Como salientado em (KWONG, 2005), restrições na saída podem tornar o problema infactível. Isso ocorre devido ao fato de não haver valor que satisfaça às restrições. Pra resolver essa não factibilidade, pode-se relaxar as restrições, ou seja, relaxar os limites rígidos em limites mais brandos.

3.2 Controle preditivo usando espaço de estados

As equações de estado para sistemas SISO discretos podem ser representadas como:

$$\mathbf{x}_{k+1}^m = \mathbf{\Phi}^m \mathbf{x}_k^m + \mathbf{\Gamma}^m u_k \quad (3.52)$$

$$y_k = \mathbf{C}^m \mathbf{x}_k^m \quad (3.53)$$

O expoente m indica que o termo denota o modelo. O termo *mathbf{D}* não é considerado pois, como mencionado em seções anteriores, a entrada no instante atual surte efeito apenas na saída do instante seguinte. Necessita-se, então, encontrar uma forma de relacionar as variações da entrada, Δu , com a saída, y . Para isso, realiza-se uma subtração entre o estado futuro menos o atual.

$$\mathbf{x}_{k+1}^m - \mathbf{x}_k^m = \mathbf{\Phi}^m (\mathbf{x}_k^m - \mathbf{x}_{k-1}^m) + \mathbf{\Gamma}^m (u_k - u_{k-1}) \quad (3.54)$$

Reescreve-se (3.54):

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1}^m = \Phi^m \Delta \mathbf{x}_k^m + \Gamma \Delta u_k \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) em (3.53) e seguindo o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= \mathbf{C}^m (\mathbf{x}_{k+1}^m - \mathbf{x}_k^m) \\ &= \mathbf{C}^m \Delta \mathbf{x}_{k+1}^m \\ &= \mathbf{C}^m \Phi^m \Delta \mathbf{x}_k^m + \mathbf{C}^m \Gamma \Delta u_k \end{aligned} \quad (3.56)$$

Cria-se um novo vetor para criar uma relação entre a variação na entrada e a saída.

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k^{mT} & y_k \end{bmatrix}^T \quad (3.57)$$

Combinando (3.57) com a nova expressão de y_k , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\Delta \mathbf{x}_{k+1}^m}^{\mathbf{x}_{k+1}} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\Phi^m}^{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^m \Phi^m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\Delta \mathbf{x}_k^m}^{\mathbf{x}_k} \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{\Gamma^m}^{\Gamma} \\ \mathbf{C}^m \Gamma^m \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (3.58)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{0}}^{\mathbf{C}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k^m \\ y_k \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

O trio $(\Phi, \Gamma, \mathbf{C})$ é chamado de modelo aumentado e utilizado no controle preditivo. Baseado nisso, pode ser calculado, sequencialmente, as futuras variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \Delta u_k \\ x_{k+2} &= \Phi \mathbf{x}_{k+1} + \Gamma \Delta u_{k+1} \\ &= \Phi^2 \mathbf{x}_k + \Phi \Gamma \Delta u_k + \Gamma \Delta u_{k+1} \\ &\vdots \\ x_{k+R} &= \Phi^R \mathbf{x}_k + \Phi^{R-1} \Gamma \Delta u_k + \Phi^{R-2} \Gamma \Delta u_{k+1} + \dots + \Phi^{R-L} \Gamma \Delta u_{k+L-1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Para o caso das variáveis de saída:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \mathbf{C} \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \Gamma \Delta u_k \\ y_{k+2} &= \mathbf{C} \Phi^2 \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \Phi \Gamma \Delta u_k + \mathbf{C} \Gamma \Delta u_{k+1} \\ y_{k+3} &= \mathbf{C} \Phi^3 \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \Phi^2 \Gamma \Delta u_k + \mathbf{C} \Phi \Gamma \Delta u_{k+1} + \mathbf{C} \Gamma \Delta u_{k+2} \\ &\vdots \\ y_{k+R} &= \mathbf{C} \Phi^R \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \Phi^{R-1} \Gamma \Delta u_k + \mathbf{C} \Phi^{R-2} \Gamma \Delta u_{k+1} + \dots + \mathbf{C} \Phi^{R-L} \Gamma \Delta u_{k+L-1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pode expressar as variáveis de saída em uma forma matricial. Assim:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \\ \vdots \\ y_{k+R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\Phi \\ \mathbf{C}\Phi^2 \\ \mathbf{C}\Phi^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^R \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\Gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\Phi\Gamma & \mathbf{C}\Gamma & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\Phi^2\Gamma & \mathbf{C}\Phi\Gamma & \mathbf{C}\Gamma & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ \mathbf{C}\Phi^{R-1}\Gamma & \mathbf{C}\Phi^{R-2}\Gamma & \mathbf{C}\Phi^{R-3}\Gamma & \dots & \mathbf{C}\Phi^{R-L}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \Delta u_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+L-1} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A expressão em (3.62) pode ser reescrita compactamente como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_k \quad (3.63)$$

Percebe-se que há uma certa semelhança com (3.6). As matrizes presentes em (3.63) são definidas como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\Phi \\ \mathbf{C}\Phi^2 \\ \mathbf{C}\Phi^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^R \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\Gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\Phi\Gamma & \mathbf{C}\Gamma & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\Phi^2\Gamma & \mathbf{C}\Phi\Gamma & \mathbf{C}\Gamma & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ \mathbf{C}\Phi^{R-1}\Gamma & \mathbf{C}\Phi^{R-2}\Gamma & \mathbf{C}\Phi^{R-3}\Gamma & \dots & \mathbf{C}\Phi^{R-L}\Gamma \end{bmatrix}$$

Como mostrado para o DMC, a otimização é realizada através de uma função objetivo cujo erro é dado pela referência menos o sinal de saída. Assim, com uma referência representada por $\mathbf{R}_s = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T r_k$:

$$J = (\mathbf{R} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y}) + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta\mathbf{u} \quad (3.64)$$

A solução ótima para (3.64) é dada por:

$$\Delta\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\mathbf{x}_k) \quad (3.65)$$

Assim como no DMC, utiliza-se apenas o primeiro elemento de $\Delta\mathbf{u}$. Portanto:

$$\Delta u_k = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{R}_s - \mathbf{A}^T \mathbf{F}\mathbf{x}_k) = K_y r_k - K_{mpc} x_k \quad (3.66)$$

Percebe-se que K_y é um escalar e representa o primeiro elemento de $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_s$, enquanto que \mathbf{K}_{mpc} é a primeira linha de $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{F}$. O ganho de realimentação é o vetor K_{mpc} . Logo, utilizando o modelo aumentado:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \Delta u_k \\
 &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma (K_y r_k - \mathbf{K}_{mpc} x_k) \\
 &= (\Phi - \Gamma \mathbf{K}_{mpc}) \mathbf{x}_k + \Gamma K_y r_k
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Percebe-se que K_y é o último elemento de \mathbf{K}_{mpc} , fato que se deve à estrutura das matrizes \mathbf{C} e Φ . Assim, \mathbf{K}_{mpc} pode ser representado como $\mathbf{K}_{mpc} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & K_y \end{bmatrix}$.

Um *SainSmart* UNO é utilizado para a criação de um servidor OPC, que disponibiliza para um cliente acesso aos terminais do UNO. Como pode ser observado na [Figura 4](#), seis pinos são utilizados: dois para entrada (leitura da saída dos amplificadores) e 4 para saída (definição dos ciclos dos pwms e da direção do fluxo de calor nas células).

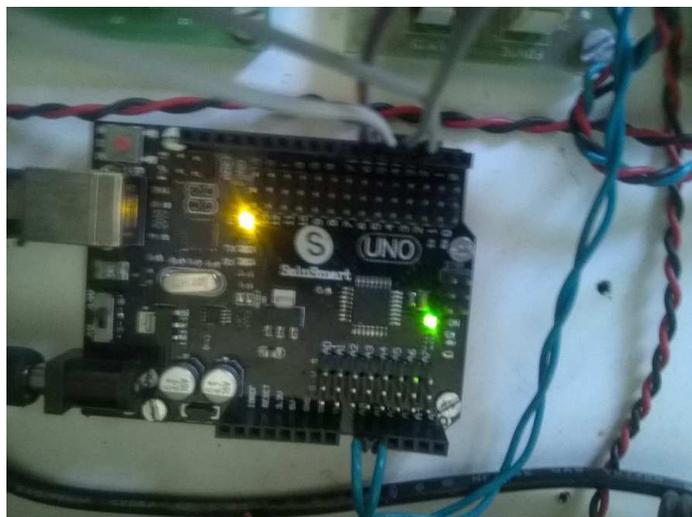


Figura 4 – *SainSmart* UNO

A criação do cliente OPC foi realizada por meio do *Matlab*.

5 Implementação do controle utilizando DMC

A [Figura 5](#) apresenta um diagrama de blocos para o controle da planta. O sensor LM35 mede a temperatura do peltier e envia a tensão resultante para um dos pinos do *SainSmart* UNO, que utiliza o valor recebido no servidor OPC. O cliente OPC do *Matlab* resgata os valores presentes no servidor e realiza os cálculos de controle.

O resultado dos cálculos, um valor para o PWM, é escrito no servidor OPC, que escreve na placa geradora de PWM e modifica a alimentação do peltier.

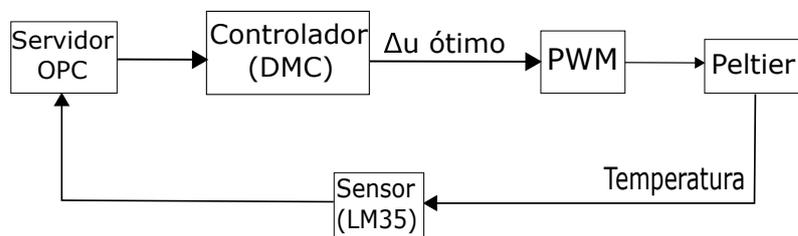


Figura 5 – Diagrama de blocos para o sistema de controle

Sabe-se que, para ser feito um controle preditivo com a utilização de matriz dinâmica, necessita-se dos coeficientes da resposta ao degrau do sistema. No entanto, a célula peltier é um sistema não-linear. Para tentar sanar este problema, pequenas variações no PWM foram feitas no intuito de diminuir a não linearidade.

Inicialmente, definiu-se o valor para o regime estável: PWM em 30%. Os coeficientes foram, então, encontrados com variações a partir desse valor. Percebe-se que há restrições na variável manipulada, pois existe um valor mínimo e máximo para o PWM, e em suas variações, visto que variações muito bruscas aumentam a não linearidade do sistema. Assim, estas podem ser escritas como:

$$0\% \leq u \leq 100\% \quad (5.1)$$

$$0\% \leq \Delta u \leq 20\% \quad (5.2)$$

As placas metálicas presentes na planta são conectadas por um cilindro metálico, como é possível perceber através da [Figura 6](#). Isto acarreta em um acoplamento dos sistemas, pois uma variação em um PWM influencia na temperatura do outro peltier.

A planta é, portanto, um sistema MIMO. Necessita-se, então, encontrar a resposta dos peltier para cada entrada. Para isso, o regime permanente correspondente ao PWM em 30% foi encontrado e a direção do fluxo de calor foi em direção à placa metálica, ou seja, esquentando o LM35.



Figura 6 – Conjunto peltier

Resta encontrar os coeficientes das respostas ao degrau de cada sistema. Para isso, coloca-se o PWM do sistema 1 em 50% mantendo o PWM do sistema 2 em 30%. Encontrado os coeficientes, estabelece-se o regime permanente em 30% para os dois PWMs novamente e modifica-se apenas o PWM do sistema 2 para 50%. As respostas podem ser vistas na [Figura 7](#), cujos gráficos estão com proporção diminuída, ou seja, os valores presentes no eixo y foram divididos por 20, fato que aproximou a resposta para um degrau de 1%.

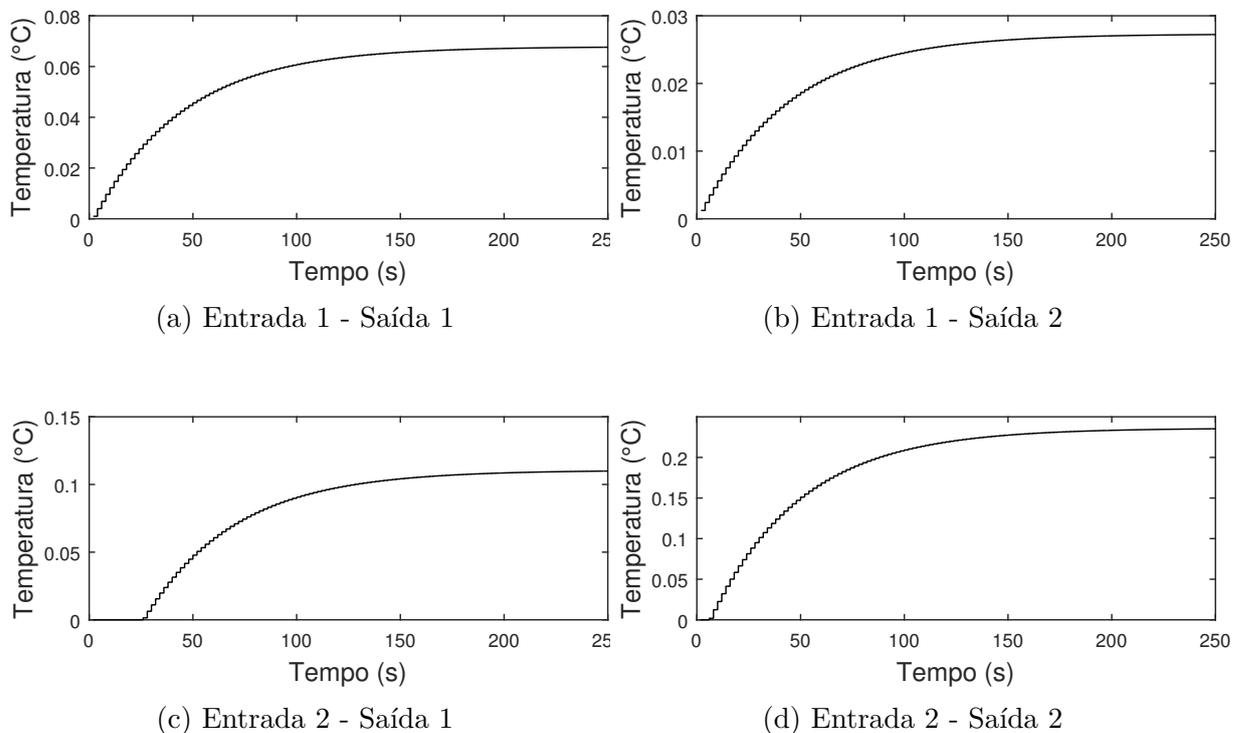
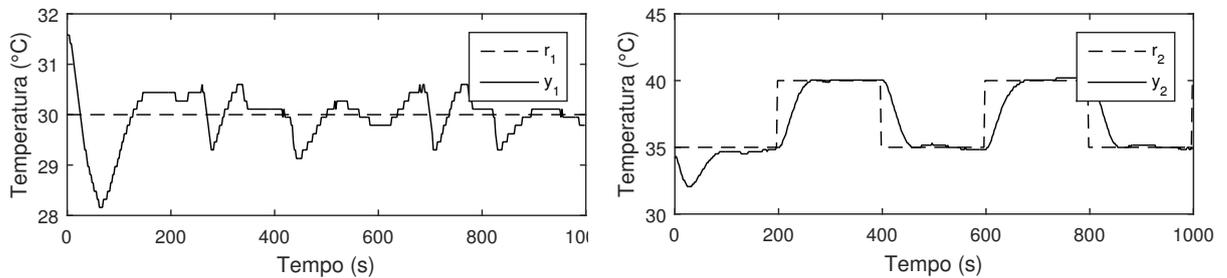


Figura 7 – Resposta de cada saída para um degrau nas entradas

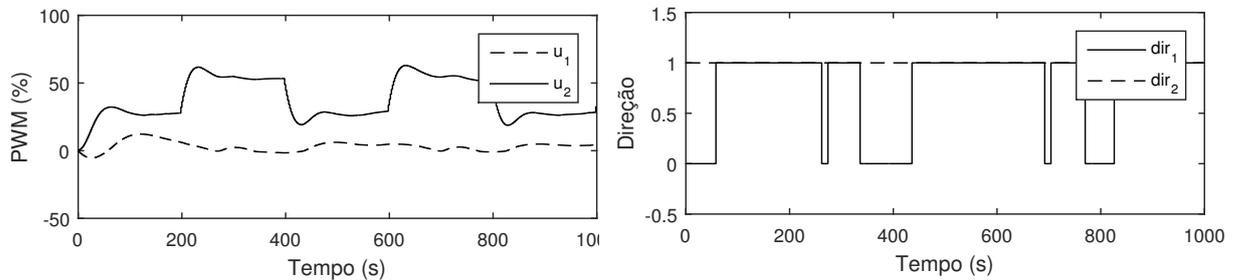
Devido à dinâmica do sistema, foi optado por um tempo de amostragem de dois

segundos. O horizonte do modelo foi definido como $N = 100$. O horizonte de predição foi escolhido como a primeira amostragem após o maior atraso, ou seja, como o maior atraso é o apresentado na Figura 7d e é de 24 segundos (12 passos de amostragem), o horizonte de predição é $R = 13$. O horizonte de controle foi escolhido como $L = 4$. Aqui não serão expostos os valores das matrizes pois estas possuem ordem elevada.

Com os coeficientes em mãos, resta aplicar os conceitos apresentados e utilizar as equações correspondentes. O vetor de entrada foi ponderado com um fator de 0.5 multiplicando a matriz identidade. Para o controle, foi considerado que, caso fosse calculado uma entrada com um valor menor do que 0%, o fluxo de calor tem sua direção alterada, o que acarreta em um resfriamento da placa metálica. Assim, quando isso acontece, o pino de controle do fluxo de calor vai para zero.



(a) Saída1(contínuo) e Referência1(tracejado) (b) Saída2(contínuo) e Referência2(tracejado)



(c) Entrada1 (tracejado) e Entrada2 (contínuo) (d) Pino1 (tracejado) e Pino2 (contínuo)

Figura 8 – Resposta de cada saída para um degrau nas entradas

É perceptível como um sinal de entrada afeta o outro quando o valor de referência é modificado. Ambas as entradas tentam se balancear de tal sorte que os dois valores de temperatura sigam a referência com o menor erro possível.

6 Interface Gráfica

Em posse dos resultados da implementação do controle da planta, passíveis de utilização para verificação, torna-se possível a criação de uma interface gráfica para um usuário. A principal intenção com tal ferramenta é que uma pessoa qualquer consiga realizar testes em malha aberta e fechada nas células Peltier.



Figura 9 – Interface

A GUI (*Graphical User Interface*) foi implementada utilizando GUIDE (*GUI Development Environment*), uma ferramenta do *Matlab* própria para a criação de interfaces. Os códigos utilizados para a identificação do modelo e para a implementação do controle foram incorporados à interface, fato que tornou necessário apenas uma organização que permitisse ao usuário acesso a todas as variáveis necessárias.

Antes de qualquer coisa, há a necessidade do acesso às variáveis presentes no servidor. Assim, no painel de dados do servidor, é possível realizar a conexão e conferir o status do servidor (*connected* ou *disconnected*) e se está "Executando" ou "Ocioso". Foram acrescentados dois botões para que fosse possível salvar os gráficos e variáveis, permitindo, assim, uma análise futura dos resultados ou documentação.

Para alcançar tal objetivo, dividiu-se a interface em dois setores: um dedicado ao controle em malha aberta e outro para malha fechada. Isso pode ser escolhido ao lado da tela que mostra os dados do servidor.

6.1 Malha Aberta

No setor de malha aberta é possível realizar testes em ambas as células. Quatro tipos de entradas são permitidos: degrau, onda quadrada, onda senoidal e sinal externo, como apresenta a [Figura 10](#).

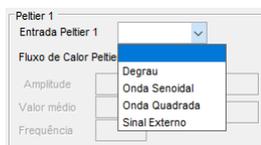


Figura 10 – Tipos de entradas para malha aberta

Além da escolha do tipo da entrada, pode-se escolher a direção do fluxo de calor de cada célula. A [Figura 11](#) expõe todo o setor para a malha aberta e os dados que devem ser inseridos.

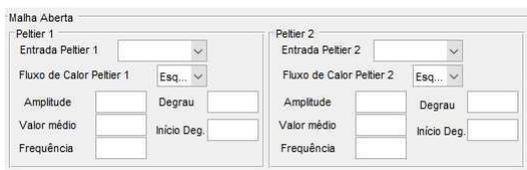


Figura 11 – Setor para malha aberta

Deve-se definir também o tempo de amostragem e de simulação no painel de "Configurações". A [Figura 12](#) apresenta como fica a interface.

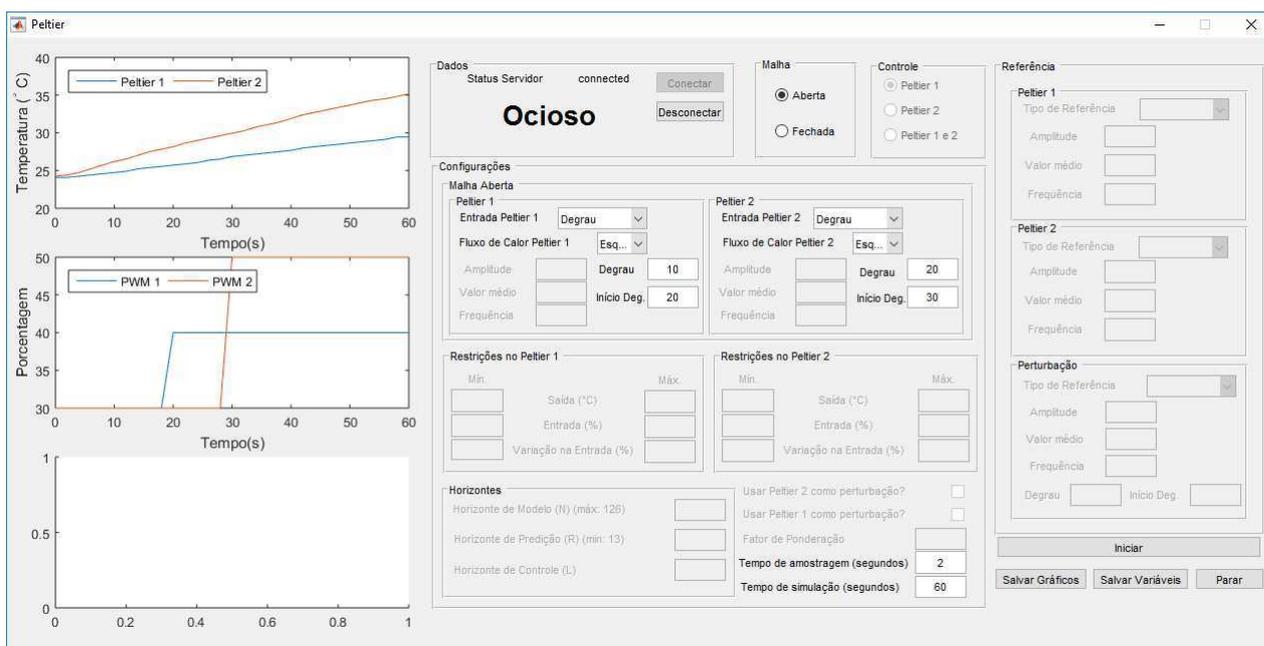


Figura 12 – Interface executando para setor de malha aberta

6.2 Malha Fechada

No setor de malha fechada, diversos tipos de testes podem ser feitos: pode-se realizar o controle das células simultaneamente ou o controle de apenas uma célula com a opção de utilizar a outra como uma perturbação.

Primeiro é escolhido quais células serão controladas no painel "Controle". Feito isso, coloca-se os valores das restrições no painel correspondente.

Três tipo de referências para o controle das células são permitidas: onda quadrada, onda senoidal e um sinal externo. Já para a perturbação, além das que existem para o controle, há o degrau.



Figura 13 – Tipos de referências permitidas

A Figura 14 apresenta como fica a interface.



Figura 14 – Interface executando para setor de malha fechada

7 Conclusão

Com os trabalhos realizados nesse estágio foi possível notar a eficiência do controle preditivo e como sua aplicação simplifica problemas complexos de controle. A interface também se mostrou uma ferramenta versátil, que pode ser utilizada tanto para um estudo da planta através de testes e pesquisa quanto para uma aplicação mais didática.

Como pôde ser percebido nos resultados, devido à antecipação da saída, a entrada é definida de modo tal que a referência é seguida sem sobre-sinais elevados quando não há restrições na saída.

Contudo, apesar de o sinal de saída ter seguido a referência, o controle pode ser melhorado ainda mais quando o controle preditivo é usado como supervisor, ou seja, em cascata com outro controlador.

Referências

- IKONEN, E. *Advanced Control and Systems Engineering*. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 24.
- KWONG, W. H. *Introdução ao Controle Preditico com MATLAB*. [S.l.]: EdUFSCar, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 26.
- LIEC. <http://liec.ufcg.edu.br/Default.cshtml>. 2015. Citado na página 14.
- WANG, L. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 41.

Apêndices

APÊNDICE A – QP: Programação Quadrática

Programa Quadrática, doravante chamada de QP, é uma solução numérica para cálculos de otimização levando em consideração restrições. Sua demonstração, como aqui apresentada, foi retirada de (WANG, 2009), onde há exemplos para melhor entendimento, caso necessário.

A função objetivo J e essas restrições podem ser expressas como:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{F} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{M} \mathbf{x} \leq \gamma \quad (\text{A.2})$$

A matriz \mathbf{E} aqui apresentada é definida positiva, ou seja, para qualquer vetor \mathbf{z} de mesma dimensão com elementos diferentes de zero, o escalar resultante de $\mathbf{z}^T \mathbf{E} \mathbf{z}$ é positivo. Como demonstrado em (WANG, 2009), inicialmente considera-se a expressão de Lagrange:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{F} + \lambda^T (\mathbf{M} \mathbf{x} - \gamma) \quad (\text{A.3})$$

A.1 Restrições em igualdades

Como pode ser notado em (A.3), se as restrições em igualdade $\mathbf{M} \mathbf{x} = \gamma$ forem satisfeitas, (A.3) torna-se (A.1). Caso contrário, como há duas variáveis de decisão, necessita-se de duas derivadas parciais. Assim:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{F} + \mathbf{M}^T \lambda = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \mathbf{M} \mathbf{x} - \gamma = 0 \quad (\text{A.5})$$

O vetor γ é conhecido como Multiplicadores de Lagrange. O cálculo dessas derivadas parciais resulta em:

$$\lambda = -(\mathbf{M} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}^T)^{-1} (\gamma + \mathbf{M} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{E}^{-1} (\mathbf{M}^T \lambda + \mathbf{F}) = -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}^T \lambda - \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

Percebe-se que, em (A.7), o primeiro termo, independente dos multiplicadores de Lagrange, fornece uma solução ótima para um caso sem restrições, enquanto que o segundo termo corrige levando em conta as restrições em igualdades.

No entanto, caso as restrições sejam linearmente dependentes, não há soluções realizáveis e a matriz $\mathbf{M}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}$ pode não ser invertível.

A.2 Restrições em inequações

Ao contrário do caso apresentado em seção A.1, na qual o número de restrições deve ser menor ou igual ao número de variáveis de decisão, as restrições em inequações permite um número maior de restrições do que variáveis de decisão.

Devido ao fato de inequações serem utilizadas, pode acontecer de $\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \gamma$ conter casos onde $\mathbf{M}_i \mathbf{x} < \gamma_i$, chamados de restrições inativas, ou $\mathbf{M}_i \mathbf{x} = \gamma_i$, chamados de restrições ativas. M_i , juntamente com γ_i , formam a i -ésima restrição, ou seja, representam a i -ésima linha de \mathbf{M} e o i -ésimo elemento de γ , respectivamente.

A.2.1 Condições de Kuhn-Tucker

Todas as equações até agora utilizadas podem ser compiladas, formando as condições de Kuhn-Tucker.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{F} + \mathbf{M}^T \lambda &= 0 \\
 \lambda^T (\mathbf{M}\mathbf{x} - \gamma) &= 0 \\
 \mathbf{M}\mathbf{x} - \gamma &= 0 \\
 \lambda &\geq 0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

É importante utilizar as equações apresentadas em função das restrições ativas. Utilizando o subíndice *ativa* para denotar restrições ativas, então:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{F} + \sum_{i \in \mathbf{S}_{ativa}} \lambda_i \mathbf{M}_i^T &= 0 \\
 \mathbf{M}_i \mathbf{x} - \gamma_i &= 0 & i \in \mathbf{S}_{ativa} \\
 \mathbf{M}_i \mathbf{x} - \gamma_i &< 0 & i \notin \mathbf{S}_{ativa} \\
 \lambda_i &\geq 0 & i \in \mathbf{S}_{ativa} \\
 \lambda_i &= 0 & i \notin \mathbf{S}_{ativa}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

A termo \mathbf{S}_{ativa} representa o conjunto de restrições ativas. A solução ótima é encontrada utilizando o conjunto de restrições ativas no momento. A cada instante de amostragem, as restrições são analisadas para definir quais estão inativas no momento.

Necessita-se, portanto, de um método de iteração para que seja possível determinar quais restrições estão ativas. São utilizados o Método Primal-Dual e o Processo de Programação Quadrática de Hildreth.

A.2.2 Método Primal-Dual

Assumindo realizabilidade, ou seja, há um x tal que $\mathbf{M}\mathbf{x} < \gamma$, o problema primal é equivalente a:

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_x \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{F} + \lambda^T (\mathbf{M}\mathbf{x} - \gamma) \right] \quad (\text{A.10})$$

Enquanto que os multiplicadores de Lagrange devem ser maiores que zero, não há restrições para a minimização de x , como pode ser observado em (A.10). Substituindo (A.7) em (A.10), obtém-se o problema dual apresentado em (A.11), cuja resolução pode ser mais fácil do que do problema primal.

$$\max_{\lambda \geq 0} \left(-\frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{H} \lambda - \lambda^T \mathbf{K} - \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \right) \quad (\text{A.11})$$

As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{K} são definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{M} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}^T \\ \mathbf{K} &= \gamma + \mathbf{M} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Um modo equivalente de se escrever o problema dual é:

$$\min_{\lambda \geq 0} \left(\frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{H} \lambda + \lambda^T \mathbf{K} + \frac{1}{2} \gamma^T \mathbf{E}^{-1} \gamma \right) \quad (\text{A.13})$$

Os multiplicadores de Lagrange que minimizam a função objetivo apresentada em (A.13), sujeitos a $\lambda \geq 0$ são chamados de λ_{ativa} , com as restrições correspondentes dadas por M_{ativa} e γ_{ativa} . Com esses valores, pode-se encontrar o vetor da variável de decisão \mathbf{x} , considerando as restrições em igualdade.

$$\mathbf{x} = -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} - \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}_{ativa}^T \lambda_{ativa} \quad (\text{A.14})$$

A.2.3 Processo de Programação Quadrática de Hildreth

Utilizado para solucionar o problema dual, o processo de programação quadrática de Hildreth varia cada multiplicador de Lagrange por vez. Considera-se uma função quadrática de cada i -ésimo componente. Assim, λ_i é utilizado para minimizar a respectiva função

objetivo. Se $\lambda_i < 0$, ajusta-se para $\lambda_i = 0$. Feito isso para todos os componente, finaliza-se uma iteração, cuja representação é dada como um sobrescrito.

$$\lambda_i^{m+1} = \max(0, w_i^{m+1}) \quad (\text{A.15})$$

$$w_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ii}} \left[k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} \lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \lambda_j^m \right] \quad (\text{A.16})$$

Em (A.16), o escalar h_{ij} é o ij -ésimo elemento da matriz \mathbf{H} e k_i é o i -ésimo elemento do vetor \mathbf{K} . Haverá a convergência para um vetor de multiplicadores denotado por λ^* , que consistirá em valores positivos ou iguais a zero.

Percebe-se que não há inversão de matrizes nesse procedimento, fato responsável pela computação ininterrupta até que o contador de iteração atinja um valor máximo. Um ponto forte desse processo, principalmente para aplicações em tempo real, é que ele retorna um resultado quase ótimo considerando as restrições caso haja algum conflito entre elas.