



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Maria do Socorro Ferreira Lopes

**O CÁLCULO E O TEOREMA DE PAPUS**

Cuité-PB

2014

Maria do Socorro Ferreira Lopes

## O CÁLCULO E O TEOREMA DE PAPUS

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB

2014



Biblioteca Setorial do CES.

Julho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

L864c      Lopes, Maria do Socorro Ferreira.

O cálculo e o Teorema de Pappus. / Maria do Socorro  
Ferreira Lopes – Cuité: CES, 2014.

59 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) –  
Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.  
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Integral de Riemann. 2. Teorema de Pappus. 3. Sólidos  
de Revolução. I. Título.

CDU 517.2/3



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE**

Maria do Socorro Ferreira Lopes

### **O Cálculo e o Teorema de Pappus**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

#### **Banca Examinadora**

*Márcia Cristina Silva Brito*

Prof.<sup>a</sup> Márcia Cristina Silva Brito  
(Orientadora)

*Maria Gisélia Vasconcelos*

Prof.<sup>a</sup> Maria Gisélia Vasconcelos  
(Coorientadora)

*José Fernando Leite Aires*

Prof. José Fernando Leite Aires

Este trabalho de conclusão de curso é dedicado em especial a Emily Suzanny, minha filha, a quem amo infinitamente.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus, porque mesmo depois de tudo que passei para chegar ao fim desse curso, não desisti, e Ele deu-me forças em cada momento em que desanimava.

A minha mãe, que por diversas vezes me ajudou, ficando com minha filha para que eu pudesse estudar. A minha avó que me deu abrigo por uns tempos em sua casa.

A minha querida e amada filha, que por muitas vezes teve que conviver com a ausência da mãe em alguns momentos de sua vida.

Em especial agradeço também aos meus amigos que são para mim como irmãos: Adriana, Jaqueline, Jucileide e Gerivaldo. Agradeço a Ana Cristina e suas irmãs, Cristiane e Adione, que me deram abrigo em suas casas por várias noites.

Agradeço as minhas queridas e inesquecíveis professoras: Márcia Cristina e Gisélia Vasconcelos, pela orientação e a paciência que as duas tiveram ao longo desse curso.

Agradeço a gentileza do professor José Fernando Leite Aires por aceitar o convite para participar da banca e por suas observações que muito contribuíram para o resultado final.

E por fim a todos os professores que passaram por minha vida acadêmica que me ajudaram e incentivaram para que conseguisse o meu objetivo.

Meu muito obrigada a todos!

*“Deus está sempre comigo, ele não me abandona nunca!”*

## Resumo

Neste trabalho discutiremos sobre os Teoremas de Pappus para cálculo de áreas e de volumes de sólidos de revolução e apresentaremos suas demonstrações, bem como as propriedades referentes à integral de uma função. Apresentaremos a integral no sentido de Riemann, algumas aplicações, teoremas e proposições que são necessários a demonstração dos teoremas de Pappus. Finalizaremos com algumas aplicações, às quais mostram a importância dos Teoremas de Pappus para Sólidos de Revolução.

**Palavras-chave:** Integral de Riemann. Teorema de Pappus. Sólidos de revolução.



## Abstract

In this paper we discuss about the theorems of Pappus to calculate areas and volumes of solids of revolution and present their statements, and the properties related to the integral of a function. We will present the full sense of Riemann, some of its applications, theorems and propositions that are required when working with the theorems of Pappus. Conclude with some applications, which show the importance of Theorems of Pappus for Solid Revolution.

**Keywords:** Riemann integral. Theorem of Pappus. Solids of revolution.

# Sumário

Introdução	9
1 Aspectos Históricos	10
2 Integral	17
2.1 O cálculo diferencial e Integral . . . . .	17
2.2 Área . . . . .	21
2.3 Integral de Riemann . . . . .	25
3 O Teorema de Pappus	33
3.1 Aplicações da Integral Definida . . . . .	33
3.2 Teorema de Pappus . . . . .	47
Conclusão	54
Referências Bibliográficas	55



# Introdução

Neste trabalho apresentaremos de maneira resumida o contexto histórico que envolve o cálculo e as contribuições de grandes nomes da história da matemática para a sistematização e formalização do Cálculo Integral e Diferencial. Daremos também uma série de conceitos e resultados, que serão utilizados como uma preparação mínima para se trabalhar com o Teorema de Pappus. Faremos uma breve análise das propriedades relacionadas à integral. Veremos também definições, proposições e teoremas que serão de alguma forma utilizados ao longo do trabalho para demonstração e aplicação desse teorema.

Como veremos, os teoremas de Pappus estabelecem uma surpreendente conexão entre centróides e sólidos de revolução. No livro VII, chamado *Tesouro da Análise* da obra a **Coleção** de Pappus de Alexandria, encontra-se o mais importante dos teoremas atribuído a ele, que diz que o volume gerado pela revolução da área envolvida por uma curva plana situada inteiramente num dos lados do eixo é igual aquela área multiplicada pela circunferência descrita por seu centro de gravidade. Esse resultado é chamado as vezes, de teorema de Guldin, como reconhecimento ao matemático que o descobriu independentemente. É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Neste livro Pappus também apresentou o teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a revolução.

E por fim, apresentaremos o teorema de Pappus para cálculo de volumes de sólidos de revolução, sua demonstração e algumas aplicações. Também usaremos o teorema análogo para o cálculo da área de sólido de revolução.

# Capítulo 1

## Aspectos Históricos

Neste capítulo vamos discutir os aspectos históricos que envolve o cálculo. O teorema que discutiremos foi descoberto por Pappus de Alexandria. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [1], [3], [4], [10] e [11].

### O cálculo

O problema de calcular a área de uma figura plana ou o volume de um sólido foi uma das questões centrais da Matemática na Grécia antiga.

O poder criador da matemática grega chegaria a seu ponto culminante com **Arquimedes (287-212 a.C.)**, por muitos considerado o mais eminente dos matemáticos da Antiguidade, ocupou-se intensamente com esse problema, calculando áreas e os volumes de diversas figuras geométricas. Superou todos os outros pela quantidade e dificuldade dos problemas que tratou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações. O procedimento usado nesses cálculos empregava sempre o chamado **método de exaustão**, que consistia, essencialmente, em “exaurir” a figura dada por meio de outras áreas ou volumes conhecidos. Esse método, atribuído a Eudoxo (406 -355 a.C.), foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes.

Para obter uma aproximação para a área do círculo, Arquimedes foi inscrevendo polígonos regulares no círculo, e dobrando o número de lados a cada passo; de maneira análoga com polígonos circunscritos.

Na figura 1.1,  $n$  representa o número de lados do polígono utilizado. A área do círculo seria um valor que figurava rigorosamente entre a área do polígono circunscrito

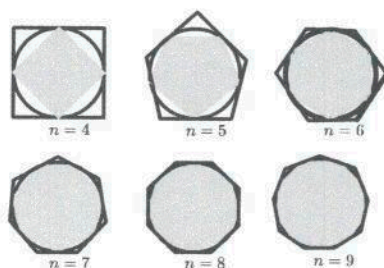


Figura 1.1: Exemplo do método de exaustão

e a área do polígono inscrito. Quanto maior o número de lados do polígono utilizado, maior exatidão se teria para o valor da área do círculo.

Vejamos como Arquimedes procedeu à quadratura de um segmento parabólico.

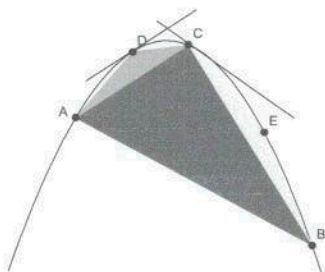


Figura 1.2: Quadratura de um segmento parabólico.

Arquimedes usou como primeira aproximação o triângulo  $ABC$ , em que  $C$  foi tomado de modo que a reta tangente à parábola que passa pelo ponto  $C$  seja paralela à reta  $AB$ . De modo semelhante são escolhidos os pontos  $D$  e  $E$ , e construídos os triângulos  $ACD$  e  $BCE$  e assim por diante, indefinidamente. Esses triângulos vão exaurindo a área do segmento de parábola, de forma que essa área pode ser obtida, com a aproximação desejada, somando as áreas de um número suficientemente grande de triângulos. Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que a área do maior triângulo inscrito,  $ABC$ , sobre a base  $AB$  é quatro vezes a soma dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados  $AC$  e  $CB$  como base, isto é:

$$\triangle CDA + \triangle CEB = \frac{\triangle ABC}{4}.$$

Repetindo sucessivamente o processo fica claro que a área do segmento parabólico  $ABC$  é dada pela soma da série infinita

$$\triangle ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \dots + \frac{\triangle ABC}{4^n} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \triangle ABC \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) \\
 &= \frac{4}{3} \triangle ABC.
 \end{aligned}$$

Desse modo, Arquimedes provou que a área do segmento de parábola é  $4/3$  da área do triângulo  $ABC$  nele inscrito.

Pelos os exemplos do círculo e da parábola, vemos que o inconveniente do método de exaustão é que para cada novo problema havia a necessidade de um tipo particular de aproximação. Sem dúvida foi esse, um dos motivos pelo qual o cálculo integral não alcançou completa sistematização com Arquimedes, embora esse sábio já possuísse as idéias fundamentais da nova ciência.

O cálculo não se desenvolveu na antiguidade, ficou esperando mais dezoito séculos para desabrochar por inteiro, o que só aconteceu nos tempos modernos.

No século XVII, o cálculo de áreas e volumes pelo métodos infinitesimais teve início com os trabalhos de **Johann Kepler (1571-1630)**. Kepler teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário, *o raio vetor que une um planeta ao sol varre áreas iguais em tempos iguais*, e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho.

Ao tratar problemas de áreas como esse da segunda lei, Kepler pensava na área formada por uma infinidade de pequenos triângulos com vértices no sol (Figura 1.3) e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma ele pôde usar uma forma grosseira de calcular integral.

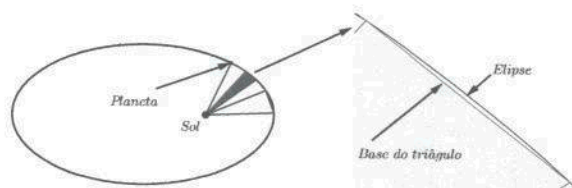


Figura 1.3: Pequenos triângulos com vértices no sol.

Kepler lembra que o procedimento usado por Arquimedes no cálculo da área do círculo era equivalente a dividir o círculo em  $n$  setores iguais por meio da divisão da circunferência em  $n$  partes iguais.

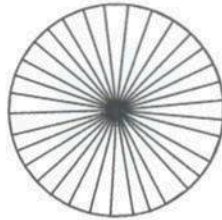


Figura 1.4: Procedimento usado por Arquimedes.

Esses setores são mais e mais parecidos com triângulos, quanto maior o  $n$ . E como eles tem a mesma altura  $r$ , a soma de suas áreas é o produto da soma dos comprimentos das bases, vezes o raio, dividido por 2.

Observando que as alturas dos triângulos infinitamente finos (Figura 1.4) são iguais ao raio. Se chamarmos  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  as bases infinitamente pequenas repouso ao longo da circunferência, então a área  $A$  do círculo (a soma das áreas dos triângulos) será

$$A = \frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + \dots + \frac{1}{2}b_nr + \dots = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots) = \frac{1}{2}rC,$$

onde  $C$  é o comprimento da circunferência que nada mais é que a soma dos  $b_i$ 's. Esse bem conhecido teorema antigo fora provado por Arquimedes mais cuidadosamente.

Do mesmo modo, o volume da esfera é uma infinidade de pirâmides delgadas de volume iguais a um terço da área da base pela a altura. Disso decorre que o volume da esfera é um terço do produto de sua superfície pelo o raio.

A importância maior do trabalho de Kepler foi em desenvolver cálculos de volumes de vários sólidos tridimensionais através de “fatias” muito finas chamadas de infinitésimos (ou indivisíveis) cuja soma se aproximaria do volume total do sólido. Ele também utilizou o método de infinitésimos para encontrar a quadratura de segmentos de uma elipse ao formular a sua segunda lei sobre o movimento dos planetas.

**Galileu Galilei (1564-1642)** também através do método de infinitésimos mostrou que a área sob a curva velocidade versus tempo era a distância percorrida, para a aceleração uniforme.

**Bonaventura Cavalieri (1598 -1647)**, italiano com vasta obra em matemática, óptica e astronomia, desenvolveu o método dos indivisíveis, presente no tratado **Geometria indivisibilibus** publicada em sua versão final em 1635. Os indivisíveis de Cavalieri têm raízes em Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes, mas talvez a motivação maior tenha sido encontrada nos métodos de Kepler de calcular certas áreas (segunda lei) e volumes. Cavalieri não definia em suas obras o que seriam os **indivisíveis**. Segundo ele, porém, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida por uma infinidade de seções planas paralelas entre si. A essas cordas e a essas seções ele chamava de indivisíveis.

**Pierre de Fermat (1601-1665)**, contribuiu significativamente ao desenvolvimento do cálculo. Fermat determinou tangentes de curvas de modo geral e valores extremos de funções. Dentre os problemas resolvidos a História menciona o cálculo da área da região sob a curva  $y = x^n$  de  $x = 0$  a  $x = b$  e acima do eixo  $x$ , para todo inteiro  $n$ .

Podemos citar ainda vários matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, como **Evangelista Torricelli (1608-1647)**, **James Gregory (1638-1675)** e **Isaac Barrow (1630-1677)**. Barrow parece ter reconhecido claramente a relação inversa entre os problemas de tangentes e de quadraturas.

Após a metade do século XVII já havia então vários métodos bem sucedidos para as questões que envolviam cálculo de tangentes e quadraturas, mas nenhum deles trazia uma sistematização que facilitasse o seu uso de maneira geral. Então, finalmente dois grandes nomes entraram para a história, **Isaac Newton (1642-1727)** e **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)**, por inventarem o Cálculo Infinitesimal ou Cálculo Diferencial e Integral.

A grande realização de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a íntima conexão entre esses problemas, que ninguém tinha entendido completamente. Eles foram os primeiros a entender o significado do **Teorema Fundamental do Cálculo**, o qual diz, com efeito, que a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área.

Para Newton, tomar fluxos de fluentes significava associar uma velocidade finita a uma variável. Para Leibniz, a diferenciação associava uma diferencial (diferença) infinitamente pequena a uma variável. Foram caminhos bem diferentes, mas que convergiam



a um mesmo princípio em comum, a descoberta do cálculo.

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi sir Issac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que “*Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes*”. Dois destes gigantes eram Pierre de Fermat e seu professor em Cambridge, Issac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz. Ele usou pela primeira vez o símbolo de integral, um  $S$  alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma). O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo. Na prática, a descoberta fundamental foi a possibilidade de exprimir a integral de uma função em termos de uma primitiva. Nascia assim o “Teorema Fundamental do Cálculo”.

O trabalho destes cientistas foi uma sistematização de idéias e métodos surgidos principalmente ao longo dos séculos XVI e XVII, os primórdios da chamada era da Ciência Moderna, que teve início com a Teoria heliocêntrica de Copérnico (1473-1543).

As bases do Cálculo Integral foi formulado por Newton e Leibniz no século XVII, mas a primeira tentativa de uma conceituação precisa foi feita por volta de 1820, pelo matemático francês **Augustin Louis Cauchy (1789-1857)**. Os estudos de Cauchy foram incompletos, mas muito importantes por terem dado início à investigação sobre os fundamentos do Cálculo Integral, levando ao desenvolvimento da Análise Matemática e da teoria das funções.

Em 1854, o matemático alemão **Bernhard Riemann (1826-1866)** realizou um estudo aprofundado da integral e formulou a definição atual, nos padrões da Análise Moderna, tornando-a um instrumento poderoso na resolução de inúmeros problemas. Devido a isso, as somas usadas na definição da integral são chamadas “Somas de Riemann” e em sua homenagem a integral estudada por ele passou a receber o nome de Integral de Riemann.

## Papus de Alexandria

**Papus de Alexandria** nascido, provavelmente, por volta de 340 d.C em Alexandria, considerado por muitos como um dos últimos grandes matemáticos gregos, sucedendo Ptolomeu, Apolônio, Euclides e Arquimedes. Suas principais contribuições apareceram em aproximadamente 320 numa serie de oito livros, chamados **Coleção** ou **Synagoge** a qual é uma valiosa síntese da matemática grega da época, representando um dos poucos registros da produção científica daquele tempo.

O livro I e a primeira parte do livro II perderam-se e os outros livros abordam geometria plana, curvas, retas tangentes, mecânica, cônicas, entre outros assuntos. Considerado o mais importante, o livro VII traz obras, principalmente de Euclides, Aristeu e Apolônio. Essa obra deveria ser conhecida por todos que tivessem interesse em aprofundar-se na matemática daquela época. Desse ponto de vista, o livro VII serviria como um pré-requisito para todos que estudavam matemática naquele tempo.

No livro VII, chamado *Tesouro da Análise*, o mais importante dos teorema atribuído a Papus, na Coleção, é o elegante teorema, que diz que o volume gerado pela revolução da área envolvida por uma curva plana situada inteiramente num dos lados do eixo é igual àquela área multiplicada pela a circunferência descrita por seu centro de gravidade. Esse resultado é chamado, às vezes, de teorema de Guldin, como reconhecimento ao matemático suíço Paul Guldin (1577 – 1643), que o redescobriu independentemente. É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Papus também demonstrou o teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela a distância percorrida pelo centróide da curva durante a revolução.

Apesar de ter sido um matemático extraordinário teve a má sorte de nascer quando a era dos grandes matemáticos gregos estava chegando ao seu fim, depois de Papus, a Matemática debilitou-se e quase desapareceu, teve que esperar por 1.300 anos para ressurgir no começo do século XVII.

A obra de Papus é uma fonte riquíssima em Geometria, muito se deve a este tratado que é o último compêndio matemático antigo significativo, no entanto a tentativa, de Papus, de ressuscitar a Geometria não teve sucesso. Ele faz citações a trabalhos de

mais de trinta matemáticos de renome da antiguidade. Depois de Pappus, muitas obras foram escritas em grego por mais de um milênio, mas os autores jamais atingiram o nível de Pappus.

# Capítulo 2

## Integral

Neste capítulo vamos estabelecer alguns resultados da integral definida e damos uma prova do teorema fundamental do cálculo. As referências utilizadas para os estudos realizados neste capítulo que são [1], [5], [7], [12] e [13].

### 2.1 O cálculo diferencial e Integral

Quase todas as ideias e aplicações do Cálculo giram em torno de dois problemas geométricos que são de fácil entendimento. Ambos se referem ao gráfico de uma função  $y = f(x)$ .

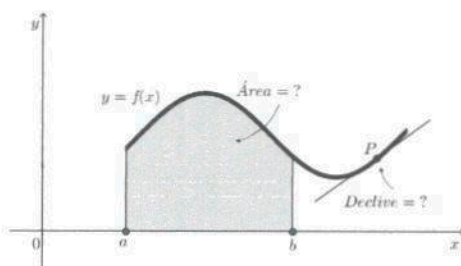


Figura 2.1: Problema geométrico

**Problema 1:** O problema básico do cálculo diferencial é o *problema das tangentes*: calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num dado ponto  $P$ .

**Problema 2:** O problema básico do cálculo integral é o *problema das áreas*: calcular a área abaixo do gráfico, entre os pontos  $x = a$  e  $x = b$ .

Esses problemas parecem de alcance bem limitado. O surpreendente é constatar que eles tem aplicações profundas e de longo alcance em várias ciências. O cálculo adquire importância no grande mundo fora da matemática por meio dessas aplicações científicas.

Newton e Leibniz foram os primeiros a entender o significado do **Teorema Fundamental do Cálculo**, o qual diz, com efeito, que a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área.

A solução do Problema das tangentes, é o que hoje chamamos de derivada que é definida como segue:

**Definição 2.1.** A *derivada* de uma função  $f$  é uma função denotada por  $f'$ , tal que o seu valor em qualquer número  $x$  do domínio de  $f$  seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

se esse limite existir.

A interpretação geométrica da derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

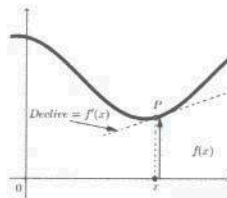


Figura 2.2: Coeficiente angular da reta tangente.

Porém esta interpretação não é parte essencial do conceito de derivada, existem outras interpretações igualmente importantes que não tem nada a ver com geometria. Devemos considerar  $f'$  como uma função e reconhecer que ela tem diversas interpretações, sem existir necessariamente nenhuma conexão entre elas.

O conceito de derivada está intimamente relacionado com o problema de calcular a velocidade de um objeto móvel. Foi este fato que tornou o Cálculo um instrumento de pensamento importante para Newton, em seus esforços para descobrir os Princípios da Dinâmica e compreender os movimentos dos planetas. Estas ideias dão uma introdução bastante fácil ao conceito geral de taxa de variação e esse conceito é importante em

muitos outros campos de estudo, incluindo as ciências biológicas e sociais, especialmente Economia.

## A Notação de Diferenciais

A definição de derivada  $f'(x)$  de uma função  $y = f(x)$  pode ser enunciada como se segue:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Aqui se subentende que  $\Delta x$  é a variação não nula na variável independente  $x$  e que  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  é a correspondente variação de  $y$ .

Considere uma função arbitrária

$$y = f(x) \quad (2.2)$$

e suponha que essa função tenha derivada em  $x$ . Se  $P$  é o ponto correspondente no gráfico,

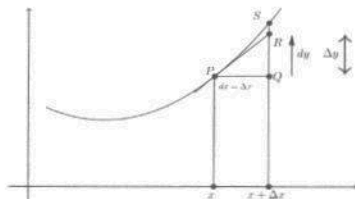


Figura 2.3: Diferenciais  $dx$  e  $dy$ .

então a tangente em  $P$  é a reta  $PR$  com coeficiente angular  $m = f'(x)$ . Por *diferenciais*  $dx$  e  $dy$  que surgem a partir da expressão (2.2) queremos significar os incrementos nas variáveis  $x$  e  $y$  que estão associados com essa reta tangente. A diferencial  $dx$  da variável independente  $x$  é qualquer incremento  $\Delta x$  em  $x$ , ou seja,

$$dx = \Delta x$$

e a diferencial  $dy$  da variável dependente  $y$  é o correspondente incremento em  $y$  ao longo da reta tangente, ou seja,

$$dy = f'(x)dx$$

## Antiderivada

Em muitas situações práticas, estamos diante do problema de encontrar uma função  $F$  cuja derivada é uma função conhecida  $f$ .

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque deseja saber a quantidade de água escoada durante um certo tempo. Um biólogo que conhecer a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento do futuro.

Se a função  $F$  existir, ela é chamada *antiderivada* de  $f$ .

**Definição 2.2.** Uma função  $F$  é denominada uma **antiderivada** de  $f$  sobre um intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ .

**Teorema 2.1.** Seja  $f$  contínua no intervalo  $I$ . Se  $f'(x) = 0$  em todo  $x$  interior a  $I$ , então existirá uma constante  $K$  tal que  $f(x) = K$  para todo  $x$  em  $I$ .

*Demonstração.* Considere  $p$  um ponto fixo em  $I$ . Provaremos que, para todo  $x$  em  $I$ ,  $f(x) = f(p)$ , implicando que  $f$  é constante em  $I$ . Como  $f$  é contínua no intervalo fechado de extremos  $x$  e  $p$  e derivável no intervalo aberto de mesmos extremos, para todo  $x$  em  $I$ ,  $x \neq p$ , existe, pelo o Teorema do Valor Médio,  $\bar{x}$  pertencente ao intervalo aberto de extremos  $x$  e  $p$  tal que

$$f(x) - f(p) = f'(\bar{x})(x - p).$$

Como  $\bar{x}$  é interior a  $I$ , pela hipótese  $f'(\bar{x}) = 0$ , logo

$$f(x) - f(p) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = f(p)$$

para todo  $x$  em  $I$ . Tomando-se  $K = f(p)$ , resulta o teorema.  $\square$

**Teorema 2.2.** Sejam  $f$  e  $g$  contínuas no intervalo  $I$ . Se  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  interior a  $I$ , então existirá uma constante  $K$ , tal que

$$f(x) = g(x) + K$$

para todo  $x$  em  $I$ .

*Demonstração.* Seja  $h(x) = f(x) - g(x)$  uma função definida em  $I$ . A função é contínua em  $I$  e para todo  $x$  interior a  $I$ ,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Pelo o teorema 2.1, existe uma constante  $K$ , tal que

$$f(x) - g(x) = K \quad \text{ou} \quad f(x) = g(x) + K$$

para todo  $x$  em  $I$ .

□

Sendo  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $I$ , então para toda constante  $K$ ,  $F(x) + K$  é também primitiva de  $f$ . Segue do Teorema 2.2 que as primitivas de  $f$  em  $I$  são funções da forma  $F(x) + K$ ,  $K$  constante. A família das primitivas de  $f$  em  $I$ , é dada por:

$$G(x) = F(x) + K, \quad k \text{ constante.}$$

**Antidiferenciação** é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma função  $f$  dada.

A notação

$$\int f(x)dx \tag{2.3}$$

será usada para representar a família de primitivas de  $f$ :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde  $F'(x) = f(x)$  e  $d(F(x)) = f(x)dx$  (isto é, a diferencial de  $F(x)$  é  $f(x)dx$ ). Na notação  $\int f(x)dx$ , a função  $f$  denomina-se *integrando*.

Leibniz introduziu a convenção de escrever a diferencial de uma função após a símbolo de antidiferenciação.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Assim, podemos considerar que o símbolo de antidiferenciação  $\int$  significa a operação inversa da operação denotada por  $d$  para o cálculo da diferencial.

Se  $\{F(x) + C\}$  for o conjunto de todas as funções cujas diferencial é  $f(x)dx$ , também será o conjunto de todas as funções cujas derivadas são  $f(x)$ .

Por motivos históricos, uma antiderivada de  $f(x)$  é usualmente chamada de uma *integral* de  $f(x)$ , e a antiderivação chama-se *integração*.



## 2.2 Área

A ideia intuitiva do que entendemos por *área* de certas figuras geométrica é a medida que, de alguma forma, indica o tamanho da região encerrada pela figura. A área de uma retângulo é o produto de seu comprimento pela largura e a área de um triângulo é a metade do produto do comprimento da base pela altura.

A área de um polígono pode ser definida como a soma das áreas dos triângulos nos quais ela pode ser decomposta e podemos provar que a área assim obtida independe de como o polígono é decomposto em triângulos.

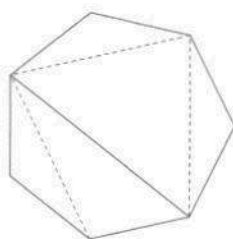


Figura 2.4: Área de um polígono.

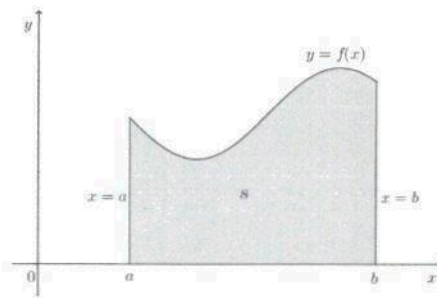
Quando atribuímos uma área a uma região plana, associamos um número a um conjunto  $S$  do plano. De um ponto de vista puramente matemático, isto significa que temos uma função  $\alpha$  (a função área) que atribuímos um número real  $\alpha(S)$  (a área de  $S$ ) de uma certa coleção de conjuntos dado. Uma função deste tipo, cujo domínio é uma coleção de conjuntos e cujos valores são números reais, chama-se *função de conjunto*. O problema fundamental é o seguinte: Dado um conjunto do plano  $S$ , que área  $\alpha(S)$  devemos atribuir a  $S$ ?

A coleção de conjuntos do plano aos quais pode ser atribuída uma área, chamamos de *mensuráveis*. Representaremos a coleção de todos os conjuntos mensuráveis por  $\mathcal{M}$ .

Entretanto, como definir a área de uma região plana se ela for limitada por uma curva?

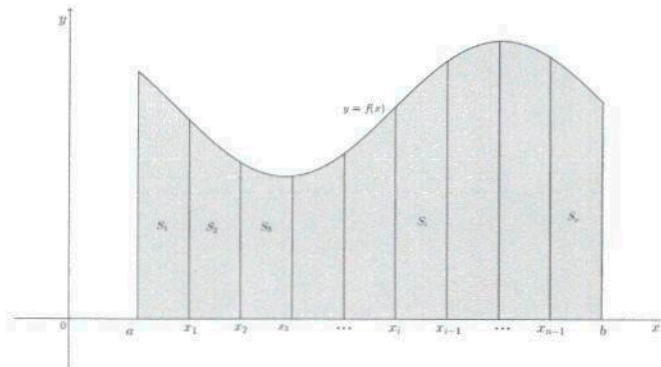
Considere uma região  $S$  no plano, conforme mostra a figura 2.5.

A região  $S$  que é limitada pelo eixo dos  $x$ , e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  e pela curva tendo equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  é uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  (com  $f(x) \geq 0$ ).

Figura 2.5: Região  $S$  no plano.

Queremos atribuir à medida da área  $S$  um número  $\alpha(S)$ , usando um processo de limite semelhante ao usado para definir a área de um círculo. Vemos intuitivamente que qualquer que seja o número escolhido para representar  $\alpha(S)$ , esse número deverá ser, no mínimo, tão grande quanto a medida da área de qualquer região poligonal contida em  $S$  e não deverá ser maior do que a medida da área de qualquer região poligonal contendo  $S$ .

Começamos por subdividir  $S$  em  $n$  faixas  $S_1, S_2, \dots, S_n$  de iguais larguras, como na figura 2.6.

Figura 2.6: Partição de  $S$  em  $n$  faixas.

A largura do intervalo  $[a, b]$  é  $b - a$ ; assim, a largura de cada uma das  $n$  faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essas faixas dividem o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos. Vamos denotar os extremos desses intervalos por  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n - 1)\Delta x, x_n = b.$$

Seja  $[x_{i-1}, x_i]$  o  $i$ -ésimo subintervalo. Como  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , ela é contínua em cada um dos subintervalos. Pelo teorema do valor extremos, existe um número em cada subintervalo para o qual  $f$  tem um valor mínimo absoluto. No  $i$ -ésimo subintervalo, seja  $c_i$  esse número, assim  $f(c_i)$  será o valor mínimo absoluto de  $f$  no subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Considere  $n$  retângulos, cada um com um comprimento de  $\Delta x$  unidades e uma altura  $f(c_i)$  unidades.

Sejam  $R_n$  unidades quadradas a soma das áreas desses  $n$  retângulos; então

$$R_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_i)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

ou, com somatória,

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x \quad (2.4)$$

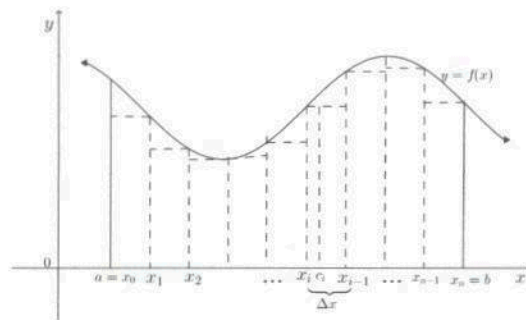


Figura 2.7: Áreas de  $n$  retângulos.

A somatória do segundo membro de (2.4) dá a soma das medidas das áreas dos  $n$  retângulos inscritos. Assim, não importa como  $\alpha(S)$  seja definido, ele deve ser tal que

$$\alpha(S) \geq R_n$$

Enquanto  $n$  cresce, os valores de  $R_n$  encontrados pela fórmula (2.4) aumentam, e valores sucessivos de  $R_n$  diferem um do outro por quantidade que se tornam arbitrariamente pequenas. Este fato é provado em Cálculo Avançado por um teorema que afirma que se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então quando  $n$  cresce indefinidamente, os valores de  $R_n$  dados por (2.4) tendem a um limite. É esse limite que iremos tomar como a definição de medida da área da região  $S$ .

## Partição

Uma partição  $P$  de um intervalo  $[a, b]$  é um conjunto finito  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  onde  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Essa partição divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .



Figura 2.8: Partição de um intervalo  $[a, b]$

A amplitude do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  será indicada por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Assim,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, \text{ etc.}$$

Os números  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se *norma* da partição  $P$  e é denotado por  $\|\Delta\|$ .

Uma partição  $P$  é dita **regular** se todos os subintervalos têm o mesmo comprimento

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b - a}{n}, \forall n$$

**Definição 2.3.** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  com  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$  e seja  $S$  região limitada pela curva  $y = f(x)$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$ . Seja  $P$  uma partição regular de  $[a, b]$ . Então se  $f(c_i)$  for o valor funcional mínimo absoluto de  $f$  no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , a medida da área da região  $S$  será dada por

$$a(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \tag{2.5}$$

A igualdade (2.5) significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe um número natural  $N > 0$  tal que se  $n$  for um inteiro positivo e se

$$n > N \quad \text{então} \quad \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x - a(S) \right| < \epsilon \tag{2.6}$$

Poderíamos ter considerado retângulos circunscritos ao invés de retângulos inscritos. Nesse caso, tomamos como medida das alturas dos retângulos o valor máximo absoluto de  $f$  em cada subintervalo, esses valores existem em virtude do teorema do

valor extremo. As somas correspondentes das medidas das áreas dos retângulos circunscritos são, no mínimo, tão grande quanto a medida da área da região  $S$  e pode ser mostrado que o limite dessas somas quando  $n$  cresce indefinidamente é exatamente igual ao limite da soma das medidas dos retângulos inscritos.

Assim sendo, poderíamos definir a medida da área da região  $S$  por

$$\alpha(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x \quad (2.7)$$

onde  $f(d_i)$  é o valor máximo absoluto de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ .

## Soma de Riemann

Sejam  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Para cada índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) seja  $c_i$  um número em  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhido arbitrariamente.

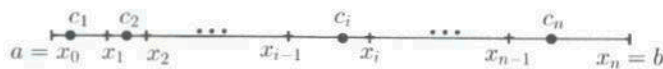


Figura 2.9:

A soma,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_i) \Delta x_i + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se *Soma de Riemann*<sup>1</sup> de  $f$ , relativa à partição  $P$  e aos números  $c_i$ .

## 2.3 Integral de Riemann

Seja  $f$  uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado  $[a, b]$ . Suponha que exista um número  $L$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right|$$

possa ser tão pequeno quanto desejarmos para todas as partições  $P$  que tenham normas suficientemente pequenas, e para qualquer  $c_i$  no intervalo fechado  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $f$  é chamada de *integrável* em  $[a, b]$ .

<sup>1</sup>Assim chamada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

**Definição 2.4.** Seja  $f$  uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado  $[a, b]$ . Então,  $f$  será **integrável** em  $[a, b]$  se existir um número  $L$  satisfazendo a seguinte condição: para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda partição  $P$  de  $[a, b]$  para a qual  $\|\Delta\| < \delta$ , com  $c_i$  no intervalo fechado  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \epsilon \quad (2.8)$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \quad (2.9)$$

De acordo com a definição acima, para uma dada função  $f$  definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , podemos tornar os valores das Somas de Riemann tão próximos de  $L$  quanto desejarmos, tomando  $\|\Delta\|$  de todas as partições  $P$  de  $[a, b]$  suficientemente pequenas para todas as escolhas possíveis dos números  $c_i$  para os quais  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . De acordo com a definição de limite, se existe um número  $L$  satisfazendo a definição 2.4, então ele será único.

**Definição 2.5.** Se  $f$  for uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , então a **integral definida** de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por  $\int_a^b f(x) dx$ , será dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (2.10)$$

se o limite existir.

Na notação de integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $f(x)$  é chamada de **integrand**,  $a$  de **limite inferior** e  $b$  de **limite superior**. O sinal de integral  $\int$  é chamado de **sinal de integração**. O sinal de integração lembra uma letra S alongada, como em “soma”, escolhida por causa da semelhança entre uma integral definida e uma soma de pequenas quantidades.

**Observação 2.1.** Ainda, por definição:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad e \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (a < b).$$

A questão é saber sob que condições o número  $L$  satisfaz a definição (2.4), ou seja, sob que condições uma função  $f$  é integrável.

**Teorema 2.3.** *Se uma função  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , então ela será integrável em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* Vê [6] □

O limite usado na definição (2.3) para definir a medida de área de uma região é um caso particular do limite usado na definição (2.4), para definir a integral definida.

Assim, podemos definir a área de uma região de uma forma mais geral.

**Definição 2.6.** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Seja  $S$  região limitada pela curva  $y = f(x)$  pelo eixo  $x$  e as pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Então, a medida  $\alpha(S)$  da área da região  $S$  será dada por*

$$\alpha(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \Leftrightarrow \alpha(S) = \int_a^b f(x) dx$$

Essa definição estabelece que se  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , a integral definida poderá ser interpretada geometricamente como a medida da área da região  $S$ .

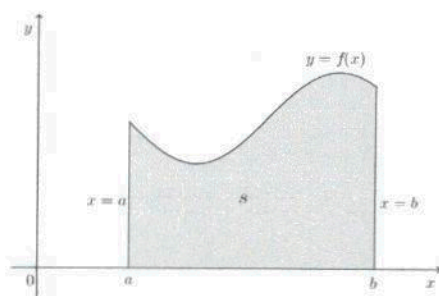


Figura 2.10: A medida da área da região  $S$ .

## Propriedades da Integral

**Teorema 2.4.** *Sejam  $f, g$  integráveis em  $[a, b]$  e  $k$  é uma constante. Então:*

- i)  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ii)  $kf$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .
- iii) Se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

iv) Se  $c \in ]a, b[$  e  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$  então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Demonstração.*

i) Para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  e qualquer que seja a escolha de  $c_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i - \left[ \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right] \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)dx \right|.$$

Da integrabilidade de  $f$  e  $g$  segue que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\|\Delta\| < \delta$ . Logo,

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i - \left[ \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right] \right| < \epsilon$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\|\Delta\| < \delta$ . Assim,

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ou seja  $f + g$  é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) Como  $f$  é uma função integrável em  $[a, b]$  e  $k$  uma constante, existe o limite

$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ , e portanto podemos escrever

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(c_i)\Delta x_i = k \cdot \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx.$$

iii) Como  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  e qualquer que seja a escolha dos  $c_i$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \geq 0.$$



Se tivéssemos  $\int_a^b f(x)dx < 0$ , tomando-se  $\epsilon > 0$  tal que  $\int_a^b f(x)dx + \epsilon < 0$ , existiria um  $\delta > 0$  tal que  $\int_a^b f(x)dx - \epsilon < \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\|\Delta\| < \delta$ . Assim, para alguma partição  $P$  teríamos  $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i < 0$  que é uma contradição.

iv) Para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $c \in P$ , temos,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \left[ \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right] \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta x_i - \left[ \int_a^c f(x)dx \right] \right| + \left| \sum_{i=m+1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)dx \right|$$

como por hipótese,  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $c \in P$ , e  $\|\Delta\| < \delta$ , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{i=m+1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Segue, então da integrabilidade de  $f$  em  $[a, b]$  que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

□

A condição *i*) pode ser estendida a qualquer número de funções. Isto é, se as funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$  forem todas integráveis em  $[a, b]$ , então  $(f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n)$  será integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b (f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n)dx = \int_a^b f_1dx \pm \int_a^b f_2dx \pm \dots \pm \int_a^b f_ndx$$

Em geral, se  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[a, b]$  e se  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

**Teorema 2.5.** Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , então para cada real  $k \neq 0$  temos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

*Demonstração.* Vê [1] □

**Teorema 2.6.** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $I = [a, b]$ . Se  $m$  e  $M$  forem, respectivamente, os valores mínimos e máximos absolutos de  $f$  em  $[a, b]$ , ou seja  $m \leq f(x) \leq M$ , para  $a \leq x \leq b$  então,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

*Demonstração.* Vê [8] □

**Teorema 2.7** (Teorema do Valor Médio para Integrais). Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $I = [a, b]$ . Então, existe um número  $\xi$  em  $[a, b]$ , tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

*Demonstração.* Vê [8] □

## Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma forte conexão entre integrais definidas e antiderivadas.

**Teorema 2.8** (Teorema Fundamental do Cálculo). Se  $f$  for integrável em  $I = [a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $I$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Demonstração.* Se  $f$  for integrável em  $I$ , pela definição de integral, temos que

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

será sempre o mesmo, independente da escolha dos  $c_i$ . Assim, se, para uma particular escolha dos  $c_i$ , tivermos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

então teremos  $L = \int_a^b f(x)dx$ .

Suponhamos, agora, que  $f$  seja integrável em  $I$  e que admita uma primitiva  $F(x)$  em  $I$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  em  $I$ . Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição qualquer de  $I$ . Temos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue que, do Teorema do Valor Médio, que, para uma conveniente escolha de  $\bar{c}_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , teremos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i) \Delta x_i \text{ ou} \\ F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se, para cada partição  $P$  de  $I$ , os  $\bar{c}_i$  forem escolhidos como em (2.11), teremos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Consideremos  $f$  uma função contínua no intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto em  $I$ . Assim, para todo  $x$  em  $I$ , a integral  $\int_a^x f(t)dt$  existe; podemos, então, considerar a função  $F$  definida em  $I$  e dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Mostra-se que a função  $F$  acima definida é uma primitiva de  $f$  em  $I$ , isto é  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ . Este resultado é referido como 2º teorema fundamental do cálculo ou simplesmente, *teorema fundamental do cálculo*.

**Teorema 2.9** (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja  $f$  definida e contínua no intervalo  $I$  e seja  $a \in I$ . Nestas condições, a função  $F$  dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

*é uma primitiva de  $f$  em  $I$ , isto é  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ .*

*Demonstração.* Precisamos provar que, para todo  $x \in I$ ,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Temos, para  $h \neq 0$ ,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe  $c$  entre  $x$  e  $x+h$  tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h$$

Assim,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

Logo, segue da continuidade de  $f$  em  $I$  e observando que  $c$  tende a  $x$  quando  $h$  tende a zero que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

□

Observe que o teorema fundamental do cálculo garante-nos que toda função contínua em um intervalo admite, neste intervalo, uma primitiva e, além disso, exibem-nos, ainda, uma primitiva.

## Capítulo 3

# O Teorema de Pappus

Neste capítulo apresentamos o mais importante dos teoremas atribuídos a Pappus, é o elegante teorema descoberto por Paul Guldin, matemático do XVII, para volume e área de sólido de revolução. Antes, porém vamos estabelecer alguns resultados necessário para obtenção do Teorema. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [1], [5], [7], [12] e [13].

### 3.1 Aplicações da Integral Definida

#### Área entre Curvas

Considere a região  $S$  que está entre duas curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  e entre as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

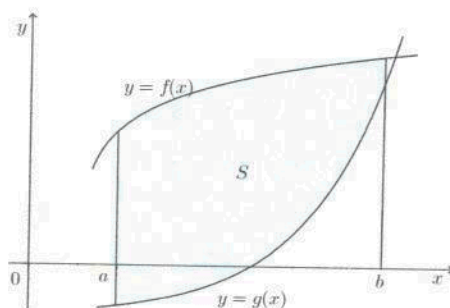


Figura 3.1:  $S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

**Proposição 3.1.** *Seja  $a$  a área da região limitada pelas curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  e entre as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então*

$$a = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

*Demonstração.* Vê [1] □

**Exemplo 3.1** (Área do Círculo). *Um círculo de raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos sobre uma circunferência de raio  $r$  e todos os que lhe são interiores. Um tal círculo é congruente com a região compreendida entre os gráficos de duas funções  $f$  e  $g$  definidas no intervalo  $[-r, r]$  pelas fórmulas*

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad e \quad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

*Cada uma das funções é limitada e monótona em  $[-r, r]$  de modo que cada uma delas é integrável em  $[-r, r]$ .*

*A área da região limitada pelos gráficos destas funções é,  $\int_{-r}^r [f(x) - g(x)] dx$ . Representemos por  $A(r)$  a área do círculo. Vamos provar que*

$$A(r) = r^2 A(1)$$

*isto é, que a área do círculo de raio  $r$  é igual ao produto da área do círculo unitário (círculo de raio 1) por  $r^2$ . Como  $f(x) - g(x) = 2f(x)$ , temos que,*

$$A(r) = \int_{-r}^r 2f(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

*Em particular, quando  $r = 1$ , temos a fórmula*

$$A(1) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

*Modificando a escala no eixo- $x$  e usando o Teorema 2.5 com  $k = 1/r$ , obtém-se*

$$\begin{aligned} A(r) &= 2 \int_{-r}^r f(x) dx = 2r \int_{-1}^1 f(rx) dx = 2r \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - (rx)^2} dx \\ &= 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = r^2 A(1) \end{aligned}$$

*o que prova que  $A(r) = r^2 A(1)$  como se tinha afirmado.*

**Definição 3.1.** Define-se o número  $\pi$  como a área do círculo unitário.

A fórmula que acabamos de demonstrar escreve-se então

$$A(r) = \pi r^2$$

Suponhamos que  $S$  é um dado conjunto de pontos do plano e consideremos um novo conjunto de pontos obtidos por multiplicação das coordenadas de cada ponto de  $S$  por um fator constante  $k > 0$ . Representaremos este novo conjunto por  $kS$  e dizemos que é *semelhante* a  $S$ . O processo que produz  $kS$  a partir de  $S$  chama-se *transformação por semelhança*. Cada ponto desloca-se, ao longo de uma reta que passa pela origem, de um segmento  $k$  vezes a sua distância inicial à origem.

- Se  $k > 1$  a transformação diz-se um *alongamento* ou *dilatação* (a partir da origem);
- Se  $0 < k < 1$  a transformação diz-se um *encolhimento* ou *contração* (em direção à origem).

Se  $S$  é uma região limitada por um circunferência de raio uma unidade de centro na origem, então  $kS$  é uma região circular concêntrica com a anterior e cujo raio é  $k$ . No exemplo, mostramos que, para regiões circulares, a área de  $kS$  é  $k^2$  vezes a área de  $S$ . Esta propriedade de área é válida para qualquer conjunto de ordenadas.

**Exemplo 3.2.** Comportamento da área de um conjunto de ordenadas perante uma transformação por semelhança.

Seja  $f$  uma função não negativa e integrável em  $[a, b]$  e  $S$  o seu conjunto de ordenadas.

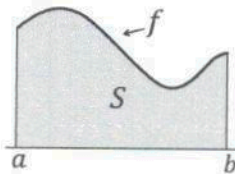
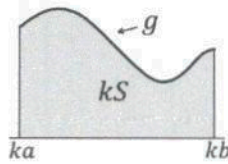


Figura 3.2: Região  $S$

Se aplicarmos uma transformação por semelhança com um fator positivo  $k$ , então  $kS$  é o conjunto de ordenadas de uma nova função, seja  $g$ , sobre o intervalo  $[ka, kb]$ .

Figura 3.3: Região  $kS$ 

Um ponto  $(x, y)$  pertence ao gráfico de  $g$  se, e somente se o ponto  $(x/k, y/k)$  pertence ao gráfico de  $f$ . Logo,  $y/k = f(x/k)$  e portanto  $y = kf(x/k)$ . Assim, a nova função  $g$  está relacionada com  $f$  pela fórmula.

$$g(x) = kf(x/k)$$

para cada  $x$  em  $[ka, kb]$ . Deste modo, a área de  $kS$  é dada por

$$\alpha(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x) dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k) dx = k^2 \int_a^b f(x) dx$$

onde, na última passagem, se utilizou a propriedade de dilatação para os integrais. Uma vez que  $\int_a^b f(x) dx = \alpha(S)$ , isso prova que  $\alpha(kS) = k^2 \alpha(S)$ . A área de  $kS$  é  $k^2$  vezes a área de  $S$ .

## Volumes

Suponhamos que existem certos conjuntos  $S$  de pontos no espaço tridimensional, aos quais chamamos de *conjuntos mensuráveis*, e uma função de conjunto  $\vartheta$  chamada *função volume* que atribui a cada conjunto mensurável  $S$  um número  $\vartheta(S)$ , chamado o volume de  $S$ . A classe de todos os conjuntos mensuráveis do espaço tridimensional representa-se por  $\mathcal{A}$  e a cada conjunto  $S$  de  $\mathcal{A}$  chamamos *sólido*.

O chamado *Princípio de Cavallieri*, atribui volumes iguais a sólidos congruentes e também a certos sólidos que, embora não sendo congruentes, tem seções de áreas iguais ao serem intersectados por planos perpendiculares a uma dada reta.

Suponhamos que  $S$  é um sólido dado e  $L$  uma determinada reta. Se um plano  $F$  é perpendicular a  $L$ , a intersecção de  $F \cap S$  diz-se uma seção plana perpendicular a  $L$ . Se cada seção plana perpendicular a  $L$  é um conjunto mensurável no seu próprio plano, dizemos que  $S$  é um *Sólido de Cavallieri*. O princípio de Cavallieri define volumes iguais para dois sólidos de Cavallieri  $S$  e  $T$ , se  $\alpha(S \cap F) = \alpha(T \cap F)$ , para todo o plano  $F$  perpendicular a uma reta  $L$  dada.



Pode-se interpretar intuitivamente o princípio de Cavallieri do seguinte modo.

Imaginemos um sólido de Cavallieri como sendo uma pilha de lâminas materiais delgadas, semelhantes a um baralho de cartas, cada uma perpendicular a uma reta dada  $L$ . Se deslizamos, cada lâmina no seu próprio plano, podemos alterar a forma do sólido, mas não o seu volume.

### Volume de um Sólido de Revolução

Seja  $R$  uma região plana e seja  $l$  um reta que está no mesmo plano de  $R$ , mas sem tocar em  $R$  a não ser em pontos da fronteira de  $R$ . O sólido  $S$  gerado quando  $R$  é girado em torno da reta  $l$  como um eixo é chamado de **sólido de revolução**.

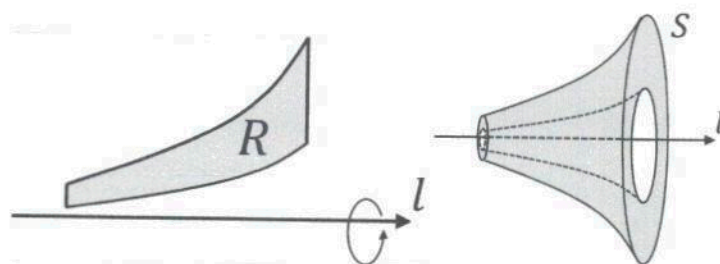
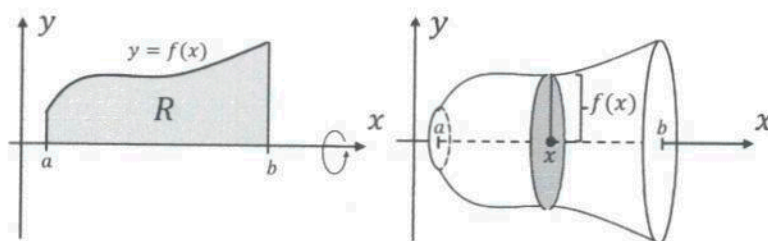


Figura 3.4: Revolução em torno da reta  $l$ .

Ao tentarmos encontrar o volume de um sólido nos deparamos com o mesmo tipo de problema para calcular as áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando cálculo para dar uma definição exata de volume.

Consideremos agora, o problema de definir o volume do sólido  $S$ , gerado pela rotação em torno do eixo dos  $x$ , da região plana  $R$ .

Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Seja  $S$  o conjunto obtido pela a rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto  $R$  do plano limitado pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ .

Figura 3.5: Revolução em torno do eixo  $x$ .

Seja  $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , escolhamos um ponto qualquer  $c_i$ . Para cada  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  construímos um retângulo  $R_i$ , de base  $\Delta x_i$  e altura  $f(c_i)$ . Fazendo cada retângulo  $R_i$  girar em torno do eixo dos  $x$ , o sólido de revolução obtido é um cilindro, cujo volume é dado por  $\pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$ .

A soma dos volumes dos  $n$  cilindros, que representamos por  $V_n$ , é dada por:

$$V_n = \pi[f(c_1)]^2 \Delta x_1 + \pi[f(c_2)]^2 \Delta x_2 + \dots + \pi[f(c_n)]^2 \Delta x_n = \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i,$$

que nos dá uma aproximação do volume do sólido  $S$ . A medida que  $n$  cresce muito cada  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos  $n$  cilindros aproxima-se do que intuitivamente entendemos como volume do sólido  $S$ .

**Definição 3.2.** *Seja  $y = f(x)$  uma função contínua não negativa em  $[a, b]$ . Seja  $R$  a região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $b$ . O volume do sólido  $S$ , gerado pela revolução de  $R$  em torno do eixo dos  $x$ , é definido por*

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$

A soma que aparece acima é uma soma de Riemann da função  $[f(c_i)]^2$ . Como  $f$  é contínua, o limite dessa soma existe, então, pela definição da integral definida, temos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

### Volume por anéis circulares

**Proposição 3.2.** *Suponhamos que  $w$  e  $v$  são funções contínuas no intervalo  $[c, d]$ , com  $c \geq 0$ , onde  $w(y) \geq v(y) \geq 0$  para todo  $y \in [c, d]$ . Seja  $A$  a área da região  $R$ , limitada pelas curvas  $x = w(y)$ ,  $x = v(y)$  e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ . Seja  $V$  o volume do sólido obtido pela rotação de  $R$  em torno do eixo  $y$ , então*

$$V = \pi \int_c^d [w(y)^2 - v(y)^2] dy.$$

*Demonstração.* Vê [1] □

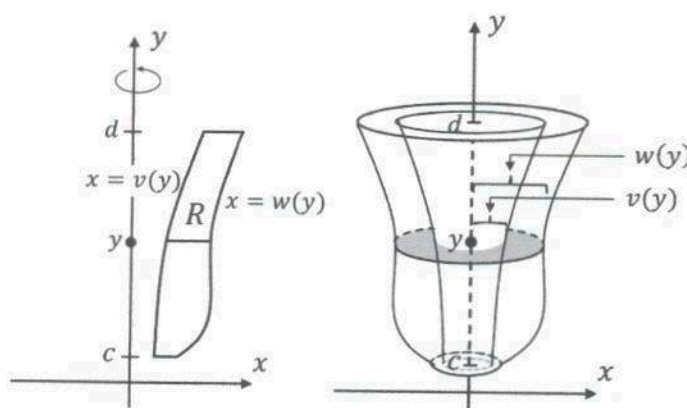


Figura 3.6: Anéis circulares

**Proposição 3.3.** *Suponhamos que  $f$  e  $g$  são funções contínuas no intervalo  $[a, b]$ , com  $a \geq 0$ , onde  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Seja  $A$  a área da região  $R$ , limitada pelas curvas  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  e pelas retas horizontais  $x = a$  e  $x = b$ . Seja  $V$  o volume do sólido obtido pela rotação de  $R$  em torno do eixo  $x$ , então*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

*Demonstração.* Vê [1] □

### Volumes por Cascas Cilíndricas

Um casco cilíndrica é um sólido gerado pela revolução de um retângulo em torno de uma reta paralela a um de seus lados; tal reta é chamada de eixo do invólucro cilíndrico.

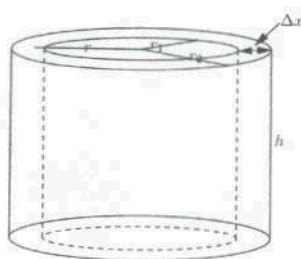


Figura 3.7: Casca cilíndrica.

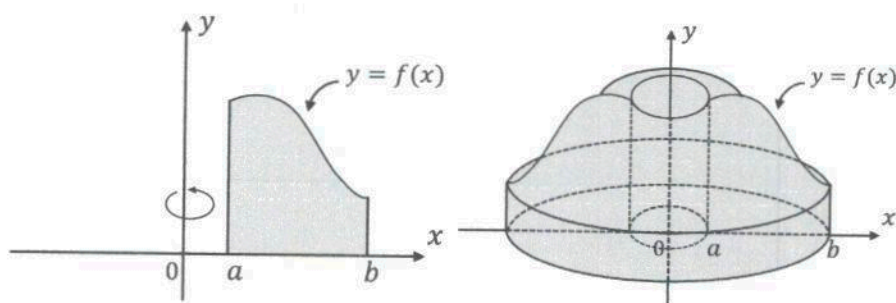
O volume de uma casca cilíndrica de altura  $h$ , raios interno  $r_1$  e externo  $r_2$ , é o volume do cilindro de raio  $r_2$  menos o volume do cilindro de raio  $r_1$ ; assim, o volume do invólucro cilíndrico é

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2^2 - r_1^2) = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1).$$

Se fizermos  $r_2 - r_1 = \Delta r$  (espessura da casca) e  $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$  (raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica torna-se

$$V = 2\pi r h \Delta r.$$

Suponha  $f(x) \geq 0$  e contínua em  $[a, b]$ . Seja  $R$  o conjunto do plano de todos os pares  $(x, y)$  tais que  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq y \leq f(x)$ . Seja  $S$  o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , do conjunto  $R$ .

Figura 3.8: Revolução em torno do eixo  $y$ .

Seja  $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e seja  $c_i$  o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$ . Se o retângulo com base  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura  $0 \leq f(c_i) \leq y$  é girado ao redor do eixo  $y$ , então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio

$c_i$ , altura  $f(c_i)$  e espessura  $\Delta x_i$ . Assim, pela fórmula vista anteriormente seu volume é

$$V_i = 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$$

Deste modo, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$$

é um valor aproximado para o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , do conjunto  $R$ . Por outro lado, pelo o fato de  $f$  ser contínua, tem-se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x [f(x)] dx.$$

O volume do sólido na figura 3.8, obtido pela rotação ao redor do eixo  $y$  da região sob a curva  $y = f(x)$  de  $a$  até  $b$  é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad \text{onde } 0 \leq a < b.$$

**Proposição 3.4.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ , com  $a \geq 0$ , onde  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Se  $R$  for a região limitada pelas curvas  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , se  $S$  for o sólido de revolução obtido pela rotação da região  $R$  em torno do eixo  $y$ , e se  $V$  representa o volume de  $S$ , então*

$$V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx.$$

*Demonstração.* Vê [1]

□

## Comprimento de Arco

Suponha que uma curva  $C$  seja definida pela equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e seja  $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . O polígono com vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , ilustrado na Figura 3.9 é uma boa aproximação para  $C$ .

Seja  $y = f(x)$  com derivada contínua em  $[a, b]$ . Indicando por  $L(P)$  o comprimento da poligonal de vértices  $P_i = (x_i, f(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

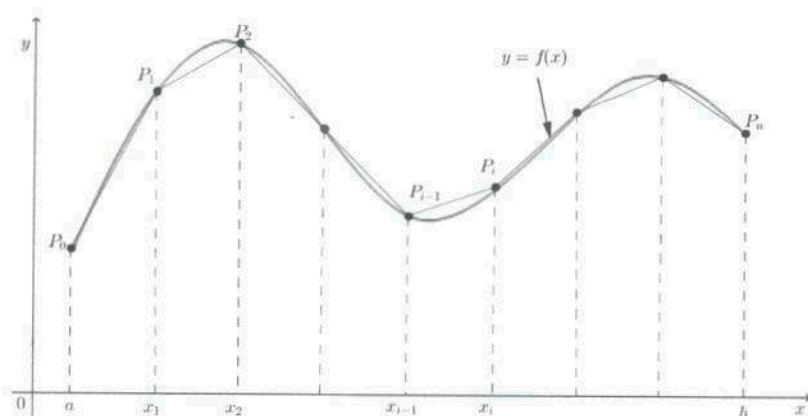


Figura 3.9: Comprimento de arco

onde  $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1}) + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$  é o comprimento do lado de vértices  $P_{i-1}$  e  $P_i$ . Pelo o teorema do valor médio, para cada  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , existe  $c_i$ ,  $x_{i-1} < c_i < x_i$ , tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i, \quad \text{onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Segue que,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x_i.$$

Portanto

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Proposição 3.5.** Se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$ , então o comprimento  $L$  do arco da curva  $y = f(x)$   $a \leq x \leq b$ , é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Demonstração.* Vê [1]

□

## Área de uma Superfície de Revolução

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução.

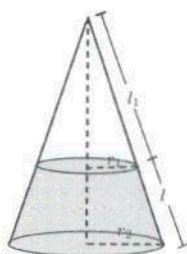


Figura 3.10: Tronco de cone.

A área de um tronco de cone, com geratriz  $l$  e raios superior e inferior  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, é calculado pela subtração das áreas dos dois cones:

$$A = \pi r_2(l_1 - l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l] \quad (3.1)$$

Por semelhança de triângulos temos  $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$  o que resulta em

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \quad \text{ou} \quad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

Substituindo na equação 3.1 obtemos  $A = \pi(r_1 l + r_2 l)$  ou

$$A = 2\pi r l \quad (3.2)$$

onde  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  é o raio médio do tronco.

Considere uma curva  $y = f(x)$  com  $x \in [a, b]$ , onde  $f(x) \geq 0$  e  $f'$  é contínua para todo  $x \in [a, b]$ . Quando rotacionamos o arco de curva, de extremidades  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , em torno do eixo  $x$  geramos uma superfície, mostrada na figura 3.11.

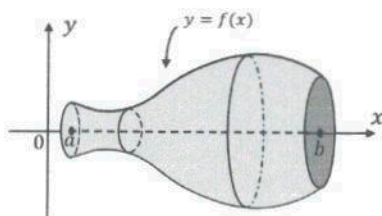


Figura 3.11: Superfície de revolução

Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Se  $y_i = f(x_i)$ , então o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está sobre a curva. A parte da superfície entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  pode ser aproximada tomando-se o segmento de reta  $P_{i-1}P_i$  e girando-o ao redor do eixo  $x$ .

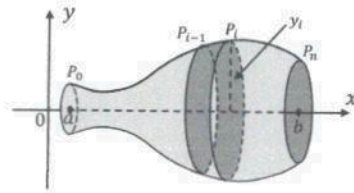


Figura 3.12: Fatiamento da superfície.

O resultado é uma faixa (tronco de cone) com geratriz  $l = |P_{i-1}P_i|$  e raio médio  $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ ; assim pela fórmula 3.2, a área da superfície é

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|.$$

Temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

onde  $c_i$  é algum número em  $[x_{i-1}, x_i]$ .

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do segmento  $P_{i-1}P_i$  é:

$$2\pi f(c_i) |P_{i-1}P_i| = 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

e se  $\Delta x_i$  for suficientemente pequeno é uma boa aproximação para o que pensamos ser a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$  do trecho do gráfico entre as retas  $x = x_{i-1}$  e  $x = x_i$ .

**Observação 3.1.** Observe que trocando  $f(c_i)$  na igualdade acima,

$$2\pi c_i \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

será uma boa aproximação para a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $y$  do trecho acima mencionado.

**Definição 3.3.** Seja  $y = f(x)$  uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $f(x) \geq 0$  e  $f'$  é contínua nesse intervalo, definimos a área da superfície obtida pela rotação da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , ao redor do eixo  $x$  como

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



## Centro de Massa

Nosso principal objetivo é encontrar o ponto  $P$  tal que se fixarmos nele um fio, no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente. Esse ponto é chamado **centro de massa** (ou centro de gravidade) da placa.

Consideramos a situação mostrada na Figura 3.13, onde duas massas  $m_1$  e  $m_2$  são

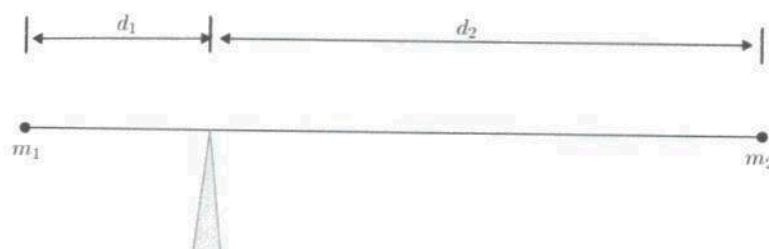


Figura 3.13:

presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias  $d_1$  e  $d_2$  do apoio. O eixo ficará em equilíbrio se

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad (3.3)$$

Esse princípio foi descoberto por Arquimedes e é conhecido como a *Lei da Alavanca*.

Considere duas crianças de pesos  $m_1$  e  $m_2$  sentadas a uma distância  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, do ponto de apoio de uma gangorra. Como acontece com uma gangorra, se um objeto de peso  $m_1$  for colocado a uma distância  $d_1$  à direita de  $\bar{x}$ , esse peso fará com que  $L$  gire em torno de  $\bar{x}$  no sentido horário. De forma equivalente, se um objeto de peso  $m_2$  for colocado a uma distância  $d_2$  à esquerda de  $\bar{x}$ , esse peso fará com que  $L$  gire em torno de  $\bar{x}$  no sentido anti-horário.

Suponha que o eixo esteja sobre o eixo  $x$  com  $m_1$  em  $x_1$  e  $m_2$  em  $x_2$  e o centro de massa em  $\bar{x}$ .



Figura 3.14:

Se comparamos as Figuras 3.13 e 3.14 veremos que  $d_1 = \bar{x} - x_1$  e  $d_2 = x_2 - \bar{x}$  e

assim a Equação 3.3 dá

$$\begin{aligned} m_1(\bar{x} - x_1) &= m_2(x_2 - \bar{x}) \\ m_1\bar{x} + m_2\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Os números  $m_1x_1$  e  $m_2x_2$  são denominados **momentos** das massas  $m_1$  e  $m_2$  (em relação a origem) e a Equação 3.4 diz que o centro de massa  $\bar{x}$  é obtido pela soma dos momentos das massas e divisão pela massa total  $m = m_1 + m_2$ .

De modo geral, temos um sistema de  $n$  partículas com massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , localizadas nos pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sobre o eixo  $x$ . Podemos mostrar similarmente que o centro de massa do sistema está localizado em

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad (3.5)$$

onde  $m = \sum m_i$  é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

é chamado momento do sistema em relação à origem.

Agora estendendo esses conceitos para o plano.

**Definição 3.4.** Considere um sistema de  $n$  partículas com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  no plano  $xy$ . Definimos o momento do sistema com relação ao eixo  $y$  como

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

e o momento do sistema com relação ao eixo  $x$  como

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  dessas  $n$  partículas no plano é dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad e \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

onde  $m = \sum m_i$  é a massa total.

Estamos interessados agora em determinar o centro de massa (**centróide**) de uma lâmina ou chapa metálica, de densidade constante.

Considere uma placa fina, ou lâmina, de densidade superficial uniforme igual  $\rho$ , que ocupa uma região  $R$  de área  $A$  no plano.

Suponhamos,  $R$  da forma

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde  $f$  e  $g$  são contínuas em em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x)$  em  $[a, b]$ .

Utilizando a proposição 3.1, a definição 3.4 e elementos do Cálculo obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 3.6** (Centro de Massa de uma Região Plana). *Sejam  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  duas funções onde  $f(x) \geq g(x)$  em  $[a, b]$  e além disso  $f$  e  $g$  são consideradas contínuas no intervalo  $[a, b]$ . Seja  $A$  a área da região  $R$  limitada pelas funções  $f$  e  $g$  no intervalo  $[a, b]$ . O centro de massa dessa lâmina, ou centróide  $(\bar{x}, \bar{y})$  da região  $R$ , é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

*Demonstração.* Vê [1] □

A seguir iremos determinar as coordenadas do centro de massa de um arco de comprimento  $L$ , ou seja, de uma parte de um gráfico de uma função no plano cartesiano. Podemos considerar um fio fino e homogêneo, de densidade linear constante  $\rho$ , como um arco.

**Proposição 3.7** (Centro de Massa de um arco). *Seja  $f$  uma função contínua, com derivada contínua no intervalo  $[a, b]$ . Seja  $L$  o comprimento do arco da função  $f$ , de extremos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . O centro de massa, ou centróide  $(\bar{x}, \bar{y})$ , desse arco é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

*Demonstração.* Usando a proposição 3.5 e a definição 3.4 obtemos o resultado. □

### 3.2 Teorema de Pappus

Os seguintes teorema, estabelecem uma surpreendente conexão entre centróides e sólidos de revolução.

**Teorema 3.1** ( Teorema de Pappus para volume de um sólido de revolução). *Seja  $R$  uma região plana situada, no mesmo plano de uma reta  $L$  e totalmente contida em um dos lados determinados por  $L$ . Seja  $r$  a distância do centróide de  $R$  a reta  $L$ , e seja  $A$  a área de  $R$ . Então o volume  $V$  do sólido de revolução gerado pela rotação de  $R$  ao redor da linha  $L$  é dado através de*

$$V = 2\pi r A.$$

*Demonstração.*

- Método das cascas cilíndricas.

Considere o caso em que  $R$  é uma região como na Figura 3.15 e  $L$  o eixo  $y$ .

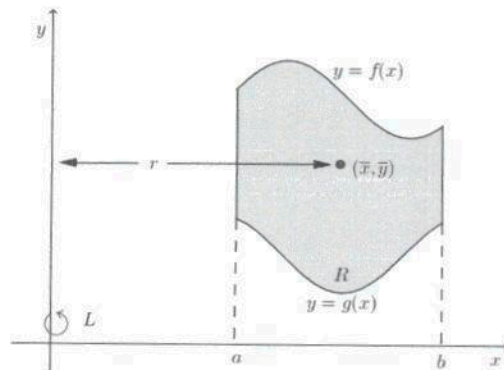


Figura 3.15:

Note que  $r = \bar{x}$ . Pela definição de  $\bar{x}$  proposição 3.6, temos

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Portanto, usando o método das cascas cilíndricas visto na proposição 3.4 obtemos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \\ &= (2\pi A)\bar{x} = 2\pi r A. \end{aligned}$$

Portanto  $V = 2\pi rA$ , onde  $2\pi r$  é o perímetro da circunferência cujo raio  $\bar{x}$  é a distância do eixo de rotação  $y$  ao centro de gravidade da região, de área  $A$ , que foi rotacionada.

- Método dos anéis circulares

Note que  $r = \bar{y}$ . Pela definição de  $\bar{y}$  proposição 3.6, temos

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

Portanto, usando o método dos anéis circulares visto na proposição 3.3 obtemos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx = (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx \\ &= (2\pi A) \bar{y} = 2\pi rA. \end{aligned}$$

Portanto  $V = 2\pi rA$ , e nesse caso  $2\pi r$  é o perímetro da circunferência cujo raio  $r = \bar{y}$  é a distância do centro de gravidade da região de área  $A$  ao eixo de rotação  $x$ .

A demonstração para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos é completamente análoga

□

**Exemplo 3.3.** Considere um retângulo situado no semiplano  $y \geq 0$  e com um lado paralelo ao eixo  $x$ . Seja  $P$  a interseção das diagonais. O volume do sólido obtido pela a rotação em torno do eixo  $x$  é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo o ponto  $P$ .

Consideremos o retângulo  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq c \leq y \leq d$ .

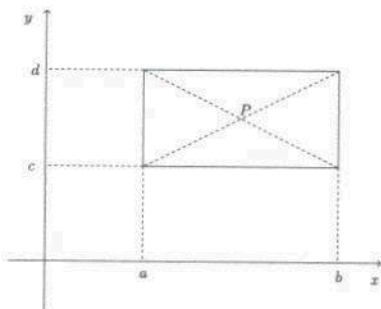


Figura 3.16: Retângulo  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq c \leq y \leq d$ .

O volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , deste retângulo é

$$V = \pi \left[ \int_a^b d^2 dx - \int_a^b c^2 dx \right]$$

ou seja,

$$V = \pi(d^2 - c^2)(b - a)$$

e, portanto,

$$V = 2\pi \frac{d+c}{2} (d-c)(b-a)$$

onde  $2\pi \frac{d+c}{2}$  é o comprimento da circunferência gerada pelo ponto  $P$  e  $(d-c)(b-a)$  é a área do retângulo.

**Exemplo 3.4.** Podemos calcular facilmente o volume de um cone como aplicação do Teorema de Pappus. Um cone de revolução é obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos. A figura 3.17, mostra um triângulo  $ABC$  com catetos  $AB = R$  e  $AC = h$  e o eixo  $E$  que contém  $AC$ .

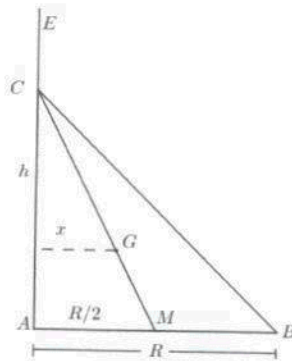


Figura 3.17: Triângulo  $ABC$ .

O baricentro de  $ABC$  é o ponto  $G$ , situado sobre a mediana  $AM$  e tal que

$$CG = \frac{2}{3} CM.$$

Se  $x$  é a distância de  $G$  ao eixo, então

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{3}.$$

Como a área de  $ABC$  é

$$S = \frac{Rh}{2},$$

o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de  $ABC$  em torno de  $E$ , será igual a:

$$V = 2\pi xS = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{Rh}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

ou seja, a terça parte do produto da área da base pela altura.

**Exemplo 3.5.** Um toro é o sólido gerado pela rotação de um círculo em torno de um eixo de seu plano. Encontre o volume do toro obtido pela rotação do círculo  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 \leq 4$ , mostrado na figura 3.18, em torno do eixo  $y$ .

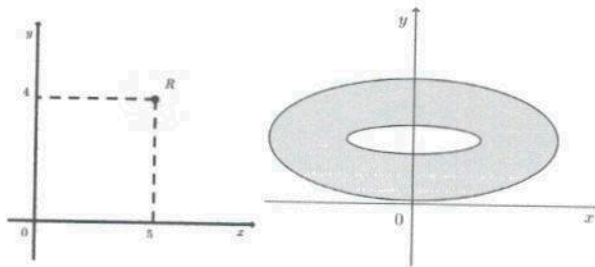


Figura 3.18: Toro de revolução.

Nesse caso  $d = 5$  já que o centro de gravidade do círculo é dado no ponto  $(5, 4)$  e além disso a sua área é  $A = \pi(2)^2 = 4\pi$ . De maneira equivalente, podemos determinar o volume do toro obtido pela rotação desse mesmo círculo em torno da reta  $x = 8$ , utilizando o 1 teorema de Pappus:

$$V = 2\pi dA = 2\pi(3)(4\pi) = 24\pi^2.$$

Podemos utilizar esses teoremas no sentido inverso, ou seja, para determinar centros de gravidade de uma região ou de um arco de uma curva do plano quando conhecemos, de antemão, as dimensões da figura rotacionada e a área da superfície ou o volume do sólido obtido pela sua rotação em torno de um determinado eixo de revolução.

**Exemplo 3.6.** Utilize o teorema de Pappus para determinar o centro de gravidade do retângulo mostrado na figura 3.19, que é limitado pelos eixos coordenados e pelas retas  $x = 4$  e  $y = 6$ . Sabemos que se esse retângulo de área  $A = 24$  for rotacionado em

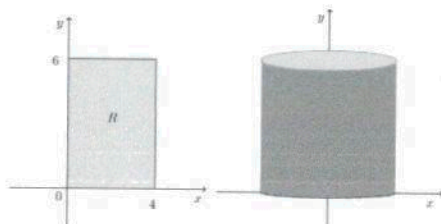


Figura 3.19:

torno do eixo  $y$  obteremos um cilindro circular reto cujo volume pode ser calculado diretamente por

$$V = \pi(4)^2(6) = 96\pi.$$

Agora basta utilizar teorema de Pappus para encontrarmos a distância  $d$  do seu centro de gravidade ao eixo  $y$ , isto é,

$$V = 2\pi dA \Rightarrow 96\pi = 2\pi(d)(24) \Rightarrow d = 2.$$

De forma equivalente, podemos rotacionar esse mesmo retângulo em torno do eixo  $x$  e obter

$$V = 2\pi dA \Rightarrow 144\pi = 2\pi(d)(24) \Rightarrow d = 3.$$

**Teorema 3.2** (Teorema de Pappus para área de superfície de revolução). Se um arco, de perímetro  $L$ , que tem centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$ , é rotacionado em torno de um eixo que não o intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro  $L$  do arco e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse arco e o eixo de rotação.

*Demonstração.*

- Arco de perímetro  $L$  é rotacionado em torno do eixo  $y$ . Temos, pelas proposições 3.5 e 3.7, que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \bar{x} = 2\pi \bar{x} L = 2\pi dL. \end{aligned}$$



Portanto  $A = 2\pi dL$ , onde  $L$  representa o perímetro do arco rotacionado e  $2\pi d$  é o comprimento de uma circunferência cujo raio  $d = \bar{x}$  é a distância entre o centro de gravidade do arco e o eixo  $y$ .

- Arco de perímetro  $L$  é rotacionado em torno do eixo  $x$ .

Pela a definição de área de superfície de revolução e pela proposição 3.7, temos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \bar{y} = 2\pi dL. \end{aligned}$$

Dessa forma temos que  $A = 2\pi dL$ , onde  $2\pi d$  representa o comprimento de uma circunferência cujo raio  $d = \bar{y}$  é dado pela distância do centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$  ao eixo  $x$ , enquanto que  $L$  é o perímetro, ou comprimento, do arco que foi rotacionado.

Aqui, novamente, a prova para o caso em que um arco é rotacionado em torno de uma reta paralela a um dos eixos é obtida de forma análoga ao que foi demonstrado.  $\square$

**Exemplo 3.7.** A área lateral de um tronco de cone circular reto, de geratriz  $g$ , raio de base maior  $R$  e raio de base menor  $r$ , é igual à área do trapézio de altura  $g$ , base maior  $2\pi R$  e base menor  $2\pi r$ :

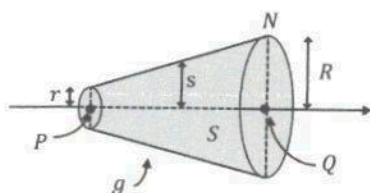


Figura 3.20: Área do tronco de cone

Sendo  $s$  o ponto médio do segmento  $PQ$ .

$$s = \frac{R + r}{2}, \text{ daí } \pi(R + r)g = 2\pi sg.$$

Observe que a área da superfície gerada pela rotação da geratriz, em torno do eixo  $PQ$ , é igual ao produto do comprimento  $g$  dessa geratriz pelo o comprimento  $2\pi s$  da circunferência gerada pelo o ponto médio da geratriz.

**Exemplo 3.8.** Qual é a área da superfície gerada pela rotação de um segmento  $AB$  mostrado na figura 3.21, com  $A = (4, 1)$  e  $B = (4, 9)$  pertencentes a reta vertical  $x = 4$ , em torno do eixo  $y$ ?

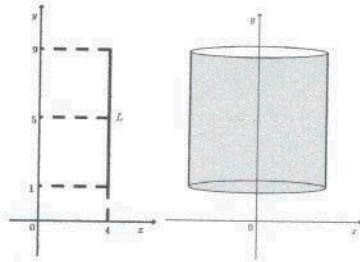


Figura 3.21:

O centro de gravidade do segmento  $AB$  é dado pelas coordenadas do seu ponto médio, ou seja,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 5)$ . Como esse segmento é paralelo ao eixo de rotação, teremos que  $d = 4$ . Dessa forma, utilizando o teorema de Pappus, obtemos

$$A = 2\pi dL = 2\pi(4)(8) = 64\pi.$$

## Conclusão

Neste trabalho apresentamos resumidamente o contexto histórico que envolve o cálculo e algumas das contribuições de grandes nomes da história da Matemática para a sistematização e formalização do Cálculo Integral e Diferencial. Damos também alguns conceitos e resultados, que utilizamos quando trabalhamos com o Teorema de Pappus. Também foi apresentado nesse trabalho uma breve análise das propriedades relacionadas à integral, também alguns definições, proposições e teoremas que foram utilizados no desenvolvimento do trabalho para demonstração e aplicação do Teorema de Pappus.

E por fim, apresentamos o teorema de Pappus para cálculo de volumes de sólidos de revolução, sua demonstração e algumas aplicações, e com isso percebemos a facilidade de encontrar volumes e áreas de sólidos de revolução, utilizando o teorema de Pappus.

## Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. M. *Cálculo; v.1*. Editorial Reverté, S.A., 1996.
- [2] ÁVILA, G. *CÁLCULO das funções de uma variável; v.2*. 7ªed. Rio de Janeiro, L.T.C.,2004.
- [3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ªed. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.
- [4] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3ªed. Campinas. São Paulo, Editora da Unicamp. 2002.
- [5] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo; vol.1*. 5ªed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2008.
- [6] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo; vol.2*. 5ªed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2008.
- [7] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica; v.1*. 3ªed. São Paulo, Harbra Ltda, 1994.
- [8] LIMA, E, L. *Curso de Análise; v.1*. 12ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 413p.
- [9] MUNEN, M. A. *Cálculo; v.1*. 2ªed. Rio de Janeiro, L.T.C., ANO.
- [10] *Os Teoremas de Pappus para Sólido de Revolução*. Disponível em <http://www.repositorio.utfpr.edu.br>  
(Acessado em 09/08/2013.)
- [11] *Pappus de Alexandria*. Disponível em <http://www.matematizare.blogspot.com.br/2013/01/pappus-de-alexandria.html>  
(Acessado em 30/10/2013.)

- [12] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica; v.1.* 2ªed. São Paulo, Pearson Makron Books, 1987.
- [13] STEWART, J. *Cálculo; v.1.* São Paulo, Cengage Learning, 2008.