



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO
Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Bosoerg Pereira da Silva

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SÉRIES
DE FOURIER ATRAVÉS DO PROBLEMA DE
CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA**

Cuité-PB

2014

UFCEG / BIBLIOTECA

Bososerq Pereira da Silva

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SÉRIES
DE FOURIER ATRAVÉS DO PROBLEMA DE
CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA**

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Cuité-PB
2014

UFCG / BIBLIOTECA



Biblioteca Setorial do CES.

Julho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586i

Silva, Bosoerg Pereira da.

Uma introdução ao estudo das séries de Fourier através do problema de condução de calor em uma barra. / Bosoerg Pereira da Silva – Cuité: CES, 2014.

95 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2014.

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva.

1. Fourier. 2. Calor. 3. Convergência. I. Título.

CDU 514.745.8



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Bosoerg Pereira da Silva

**Uma Introdução das Séries de Fourier
Através do Problema de Condução de Calor em uma Barra**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 26 de março de 2014.

Banca Examinadora

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Prof.^a. Maria de Jesus Rodrigues da Silva
(Orientadora)

Célia Maria Rufino Franco

Prof.^a. Célia Maria Rufino Franco

Luciano Martins Barros

Prof. Luciano Martins Barros

Aos meus pais Genézio, Lucia e aos meu colegas de curso.

UFMG / BIBLIOTECA

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada. Aos meus pais que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

À professora Maria de Jesus, pela paciência e incentivo durante a orientação que tornou possível a conclusão desta monografia.

Aos Professores Luciano e Célia Maria por terem aceito o convite para participar da banca e pelas sugestões que enriqueceram ainda mais este trabalho.

Aos meus colegas de curso em especial aos amigos e irmãos: Fagner, José Filho, Leonardo e Elizangela pelo incentivo e pelo apoio constante. Ao pessoal de Sossego, companheiros de viagens e de diversão. Enfim agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha conquista.

Resumo

Apresentaremos neste trabalho uma análise do problema de condução de calor numa barra, um problema da Física Matemática que será solucionado usando a teoria das Séries de Fourier. Como motivação para o estudo de tais séries, verificaremos que o problema em tela não pode ser resolvido usando apenas os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral e das Equações Diferenciais, necessitaremos de uma ferramenta mais poderosa, a qual será nosso principal objeto de estudo.

Usaremos o método de Fourier ou método da separação de variáveis que indicará uma função candidata à solução do problema. Em seguida, abordaremos minuciosamente os resultados necessários e suficientes para mostrar que esta é realmente a solução de tal problema. Antes, porém, faremos uma revisão em alguns temas relevantes ao trabalho.

Palavras-chave: Fourier, Calor, Convergência.

Abstract

This paper will show an analysis of the problem of heat conduction in a bar, a problem of Physical Mathematics that is going to be solved using Fourier series. As motivation for the study of such series, we will verify that the problem in question can not be solved using only the knowledge of the Differential and Integral Calculus and Differential Equations, we will need a more powerful tool, which will be our main object of study.

We will use the Fourier's method or the method of separation of variables that indicates a function candidate solution to the problem. Then we will thoroughly discuss the necessary and sufficient results to show that this really is the solution of such a problem. First, however, we will review some relevant themes to the work.

Keywords: Fourier, Heat, Convergence.

Sumário

Introdução	10
1 O Problema de Condução de Calor em uma Barra.	12
1.1 Condução do Calor em uma Barra	12
1.2 Matematização do Problema	17
2 Alguns Resultados Preliminares	23
2.1 Integral de Riemann	23
2.2 Funções Pares e Funções Ímpares	26
2.3 Funções Periódicas e Relações de Ortogonalidade	27
2.3.1 Funções Periódicas	27
2.3.2 Relações de Ortogonalidade	29
2.4 Sequências e Séries de Números Reais	31
2.5 Sequência e Séries de Funções	33
2.6 Equações Diferenciais	37
2.6.1 Equações Diferenciais Ordinárias	38
2.6.2 Equações Diferenciais Parciais	44
3 Série de Fourier	45
3.1 Coeficientes de Fourier	45
3.2 Série de Fourier	47
3.2.1 Coeficientes de Fourier de Funções Pares e Ímpares	49
3.3 Integral de Séries de Fourier	50
3.4 Estimativas para os Coeficientes de Fourier	54
3.5 Classe das Funções Consideradas	55

	9
3.6 Lema de Riemann-Lebesgue	59
3.7 Convergência Pontual da Série de Fourier	61
4 Condução do Calor	68
4.1 Desigualdades	69
4.1.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz	69
4.1.2 Desigualdade de Bessel	72
4.1.3 Desigualdade de Minkowski	75
4.2 Convergência Uniforme da Série de Fourier	78
4.3 Retorno ao Problema de Condução do Calor em uma Barra	79
4.3.1 Condução do Calor com as Extremidades da Barra Isolada Termicamente	86
4.3.2 Condições de Fronteira Não-homogêneas	88
4.3.3 Equação do Calor Não-homogênea	89
4.4 Unicidade de Solução do PVIF (1)	91
Referências Bibliográficas	94

Introdução

Como sabemos, tudo na matemática nasceu através de uma necessidade humana e com a teoria das séries de Fourier não foi diferente. No século XIX um problema Físico aparecia nos estudos dos matemáticos da época, o problema de condução de calor em uma barra. Percebeu-se que a temperatura $u(x, t)$ no ponto x , em um instante t deveria satisfazer a equação:

$$u_t = K u_{xx}. \quad (1)$$

Além disto, a solução deveria satisfazer a certas condições iniciais e de fronteiras.

Buscar soluções para esse problema não é uma tarefa muito fácil. Inicialmente faremos uma análise sobre o problema de variação de temperatura em uma barra para justificar que a equação do calor realmente é dada por (1), em seguida utilizaremos o método conhecido como separação de variáveis e encontraremos que a solução para o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF) com as extremidades isoladas terminamente deve satisfazer

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

onde $\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}$.

Em 1807 Fourier apresentou à Academia de Ciências da França um artigo onde faz um estudo sobre a condução de calor em sólidos matemáticos, mas devido sua afirmação de que toda função podia ser expressa como uma combinação linear de senos e cossenos, o artigo acabou sendo recusado. Em 1811 Fourier submeteu este artigo revisado mas foi só onze anos mais tarde, em 1822 que ele publicou sua obra *Théorie Analytique*

de la Chaleu, onde descreve os coeficientes de Fourier e escreve a série de seno e de cosseno de diversas funções. A partir daí, diversos matemáticos deram sua contribuição para o estudo destas séries, buscando condições para garantir a convergência pontual e uniforme das mesmas.

Um dos primeiros a produzir critérios para a convergência da série de Fourier foi Dirichlet em 1829 e 1837. Em 1880 surge o critério de Dini que nos dá condições mais fáceis de garantir a convergência pontual da série de Fourier. Todas estas investigações acabaram conduzindo a uma maior compreensão das funções descontínuas e propiciaram os trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, que culminaram com a introdução de um novo conceito de integral que é a integral de Lebesgue.

Neste trabalho almejamos despertar a importância do estudo das séries de Fourier. Tendo como motivação o estudo do problema físico de condução do calor em uma barra.

No Capítulo 1 faremos uma análise sobre o problema de variação de calor em uma barra na qual encontraremos condições iniciais e de fronteira. Inicialmente estudamos a condição de fronteira onde as extremidades estão isoladas termicamente e encontramos uma função candidata a solução do problema.

No capítulo 2 faremos uma revisão sobre alguns conceitos preliminares, entre eles sequências, séries de funções, alguns resultados de EDO e noções de EDP.

No capítulo 3 apresentamos inicialmente aspectos básicos sobre a teoria de Fourier e em seguida tratamos da convergência pontual da série de Fourier.

No capítulo 4 mostraremos algumas desigualdades necessárias e trataremos da convergência uniforme da série de Fourier, para então mostrarmos que a função encontrada no capítulo 1 é realmente solução do PVIF1 e estudaremos o problema sujeito a outras condições de fronteira.

Capítulo 1

O Problema de Condução de Calor em uma Barra.

Neste capítulo abordaremos as considerações físicas acerca do problema de condução do calor em uma barra, bem como a matematização de tal problema. Tentaremos resolvê-lo usando apenas a teoria vista nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferenciais, veremos que necessitaremos de algo a mais, que são as séries de Fourier.

1.1 Condução do Calor em uma Barra

Consideremos uma barra de comprimento L , cuja seção transversal tem área A , feita de um material condutor uniforme de calor. Para facilitarmos os cálculos, suponhamos que as superfícies laterais da barra estejam isoladas termicamente de modo a não permitir, através delas, a transferência de calor com o meio ambiente. Suponha também que a função temperatura tenha derivadas parciais até segunda ordem contínuas na região $R = \{(x, t); 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$.

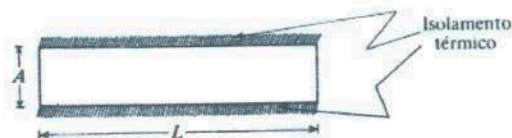


Figura 1.1: Barra vista superior (Figueiredo, 2009)

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA.13

Note que o fluxo de calor ocorre em apenas na direção longitudinal, isto é, o fluxo de calor ocorre apenas em uma direção. A lei de resfriamento de Fourier em uma dimensão, diz que, dada duas placas P_1 e P_2 , de áreas A , com temperaturas constantes T_1 e T_2 , respectivamente; se posicionarmos as placas paralelamente a uma distância d , haverá a passagem de calor da placa mais quente para a placa mais fria. E a quantidade de calor, por unidade de tempo, transferida de uma placa para a outra é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d},$$

onde k é a condutibilidade térmica do material entre as placas.

Para ajustarmos a barra nas hipóteses da lei de Fourier, imaginemos que a mesma esteja sobre o eixo x , tomemos duas secções transversais localizadas em x e em $x + d$ e consideremos essas secções as barras P_1 e P_2 , como na figura abaixo:

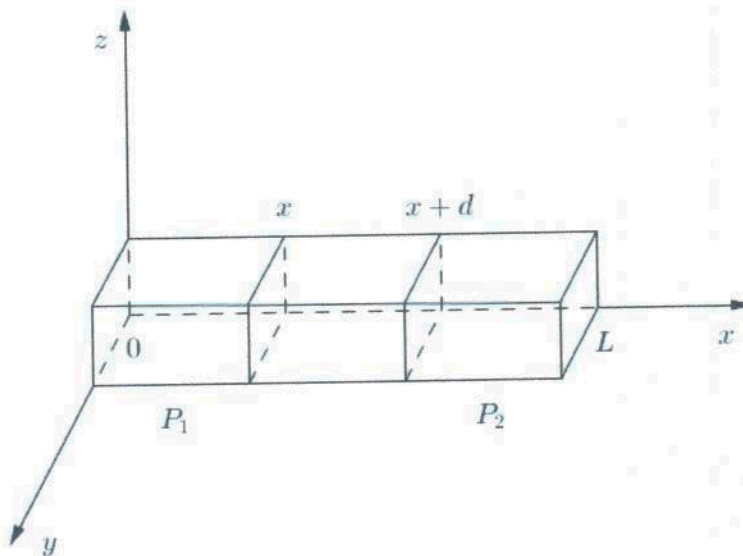


Figura 1.2: Barra sobre os eixos coordenados

Para suprimirmos a dificuldade das temperaturas serem constantes, introduzimos a grandeza Fluxo de Calor através da secção x no instante t da seguinte forma: na lei de Fourier, fixemos o tempo t e façamos $T_2 = u(x + d, t)$ e $T_1 = u(x, t)$ e passamos o limite quando d tende a zero, obtemos

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d} = kA \left| \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x + d, t) - u(x, t)}{d} \right| = kA |u_x(x, t)| \quad (1.1)$$

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA.14

Definimos assim o fluxo de calor na direção positiva do eixo como uma função $q(x, t)$ dada por

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t) \quad (1.2)$$

Observação 1.1. O sinal de menos em (1.2) é justificado da seguinte forma:

I) Imaginemos que a temperatura cresce com x , isto é, a parte mais quente encontra-se na extremidade em L então, nesse caso, a temperatura deve ser positiva, mas o calor fluirá para a esquerda e então q deveria ser negativo.

II) Se a temperatura decresce com x , isto é, se a parte mais quente estiver na extremidade da origem, então a temperatura deve ser negativa, mas a quantidade de calor fluirá para a direita então q deve ser positivo.

Fixemos agora um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + d$, suponhamos sem perda de generalidade que a temperatura cresce com x , e calculemos qual a quantidade de calor q que entra nesse local, no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$. Por um lado a quantidade de fluxo de calor será dada por

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t)dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t)dt,$$

ou seja,

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)]Adt. \quad (1.3)$$

Observe que pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} u_{xx}(x, t)dx = u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t).$$

Desta forma, (1.3) fica

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t)Adxdt. \quad (1.4)$$

Por outro lado, pela Lei Fundamental da Calorimetria ($q = mc\Delta t$) temos que a quantidade de calor em função do calor específico (c) do material da barra é dado por:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} cu_t(x, t)dt\rho Adx, \quad (1.5)$$

Assim, igualando (1.4) e (1.5) obtemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} k u_{xx}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho u_t(x, t) dt dx, \quad (1.6)$$

como esta igualdade é válida para $\tau, \delta, t_0 > 0$ e para $0 < x_0 < L$, concluímos que

$$k u_{xx}(x, t) = c \rho u_t(x, t),$$

isto é,

$$u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t), \quad (1.7)$$

onde $K = \frac{k}{c\rho}$.

Observação 1.2. *A quantidade de calor específico de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a temperatura de um grama dessa substância.*

A Equação (1.7) é chamada a equação do calor, e é a lei de variação da temperatura $u(x, t)$ numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente. Observe que a equação (1.7) é uma Equação Diferencial Parcial (EDP)¹.

A equação do calor (1.7) é uma EDP de segunda ordem, linear e homogênea. Observemos também que esta equação possui diversas soluções, por exemplo qualquer constante é solução da equação (1.7). Outra solução trivial seria $u(x, t) = cx$ onde c é uma constante. Para descobirmos qual dessas soluções representa a distribuição da temperatura na barra devemos supor informações iniciais.

Analisando o problema, vemos que a distribuição de temperatura ao longo da barra deve depender da temperatura inicial da barra, assim no instante $t = 0$ devemos ter uma função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que descreve a temperatura nos vários pontos da barra, daí escrevemos a condição inicial do problema,

$$u(x, 0) = f(x). \quad (1.8)$$

Além disso, como as extremidades localizadas na origem e em L não estão isoladas termicamente, pode haver pontos de troca de calor com o meio ambiente. Desta forma, é sensato saber o que se passa nas extremidades ou melhor dizendo, devemos saber o que se passa nas fronteiras. Vejamos algumas condições de fronteira que podemos ter:

¹Ver resultados na seção 2.6.2

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA.16

Tipo 1: Suponhamos que, por algum processo, as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas conhecidas.

Exemplo 1.1. *As extremidades estão mantidas a zero grau*

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u(L, t) = 0.$$

Exemplo 1.2. *As extremidades estão mantidas a temperaturas constantes:*

$$u(0, t) = T_1 \quad e \quad u(L, t) = T_2,$$

onde T_1 e T_2 são temperaturas dadas.

Exemplo 1.3. *Conhecemos a variação de temperatura em uma, ou em ambas as extremidades:*

$$u(0, t) = h_0(t) \quad e \quad u(L, t) = h_1(t) \quad t \geq 0,$$

onde $h_0(t)$ e $h_1(t)$ são as temperaturas (conhecidas) em cada uma das extremidades.

Tipo 2: Suponhamos que as extremidades estejam isoladas termicamente. Então o fluxo de calor será nulo, pois não haverá passagem de calor através delas e assim

$$q(x, t) = -KAu_x(x, t) = 0,$$

para $x = 0$ e $x = L$, logo as condições laterais neste caso têm a forma

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Tipo 3: Suponhamos que o meio ambiente tenha temperatura u_0 e que haja transferência de calor entre a barra e o meio ambiente, regidas pela lei:

$$ku_x(0, t) = e\{u(0, t) - u_0\},$$

$$-ku_x(L, t) = e\{u(L, t) - u_0\},$$

onde e é uma constante, dita emissividade, característica do par constituído pelo material da barra e pelo meio ambiente.

Tipo 4: Uma combinação de duas quaisquer das condições acima.

Exemplo 1.4. A temperatura em uma das laterais é nula e a outra esta isolada termicamente, isto é:

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u_x(L, t) = 0.$$

1.2 Matemáticação do Problema

Considere as seguintes regiões do plano

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\},$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t > 0\}$$

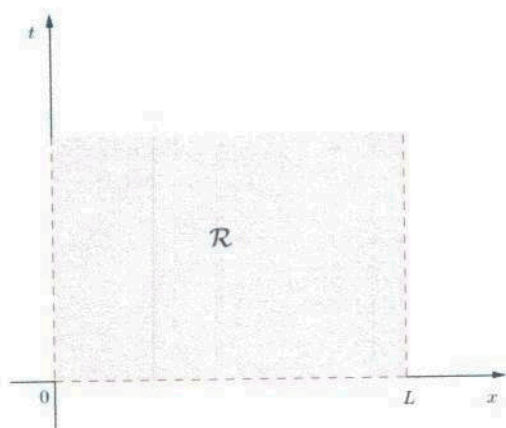


Figura 1.3: Região \mathcal{R}

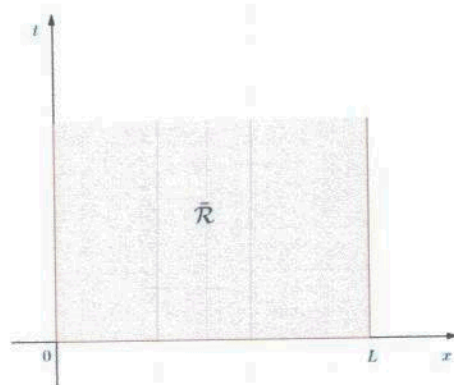


Figura 1.4: Região $\bar{\mathcal{R}}$

O problema de condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\bar{\mathcal{R}}$ que satisfaça a equação do calor

$$u_t = K u_{xx} \text{ em } \mathcal{R},$$

a condição inicial,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada e as condições de fronteira.

Para iniciar nossos estudos consideremos o caso em que as temperaturas nas extremidades estejam mantidas a zero grau, isto é,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

e procuremos uma possível solução para o problema

$$(PVIF1) \begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{em } \mathcal{R} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Observação 1.3. Para melhorar as referências futuras denotaremos este Problema de Valor Inicial e de Fronteira com as temperatura laterais mantidas a zero grau por PVIF1. Notemos que $f(0) = f(L) = 0$ já que as extremidades estão a zero grau.

Para solucionarmos o PVIF1, vamos utilizar o Método de Fourier, ver referência [2], que consiste inicialmente em supor que a solução pode ser da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$, isto é, procuremos soluções que são múltiplas de funções de uma variável. Desta forma, suponhamos que a solução do problema acima é

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

com $F(x)G(t) \neq 0$, pois não estamos procurando soluções triviais. Notemos

$$u_x(x, t) = F'(x)G(t),$$

$$u_{xx}(x, t) = F''(x)G(t),$$

$$u_t(x, t) = F(x)G'(t),$$

e como estamos supondo que u é solução da equação do calor, temos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t)$$

multiplicando por $\frac{1}{KG(t)}$ e depois por $\frac{1}{F(x)}$ obtemos

$$\frac{G'(t)}{KG(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \quad (1.9)$$

Assim (1.9) nos diz que tanto o lado esquerdo quanto o lado direito deve independer de x e de t respectivamente. Seja σ este parâmetro, logo

$$\frac{G'(t)}{KG(t)} = \sigma \Rightarrow G'(t) - \sigma KG(t) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \Rightarrow F''(x) - \sigma F(x) = 0. \quad (1.11)$$

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA. 19

Além disso, como $u(0, t) = u(L, t) = 0$ vem que $F(L) = F(0) = 0$, portanto resolver o problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF1) recai em resolver as EDOs² dadas em (1.10) e (1.11).

Começemos analisando a EDO (1.11), a equação característica a ela associada é $r^2 - \sigma = 0$ cujo discriminante é $\Delta = -4\sigma$. Desta forma o sinal do discriminante depende apenas do sinal de σ , daí temos três casos a analisar:

I) Se $\sigma > 0$, então a solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x},$$

mas $F(L) = F(0) = 0$ então

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0 \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_1(e^{\sqrt{\sigma}L} - \frac{1}{e^{\sqrt{\sigma}L}}) = 0 \end{cases}$$

Calculando c_1 :

$$c_1 \left(\frac{e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1}{e^{\sqrt{\sigma}L}} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ c_1(e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ ou } e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1 = 0$$

mas $2\sqrt{\sigma}L > 0$ o que implica $c_1 = 0$. Portanto $c_1 = c_2 = 0$ e $F(x) \equiv 0$ o que não interessa.

II) Se $\sigma = 0$, teremos que

$$F''(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = c_1 x + c_2,$$

como $F(L) = F(0) = 0$ segue que

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 L + c_2 = 0, \end{cases}$$

²Ver resultados na secção 2.6.1

o que implica $c_1 = c_2 = 0$ e então $F(x) \equiv 0$ o que não nos convêm.

III) se $\sigma < 0$, façamos $\sigma = -\lambda^2$ e então temos

$$\begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \\ F(L) = F(0) = 0, \end{cases}$$

nesse caso a solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Daí

$$\begin{cases} c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \\ c_1 \cos(\lambda L) + c_2 \sin(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

como não queremos soluções triviais, admitamos que $\sin(\lambda L) = 0$ então $\lambda L = n\pi$ onde $n \in \mathbb{Z}^*$, assim $\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow \sigma = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$. Logo encontramos $F(x) = c_2 \sin(\sqrt{-\sigma}x)$, assim

$$F_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Os valores de $\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ que acabamos de encontrar são chamados **valores próprios** ou **autovalores** do problema de valores de contorno ou de autovalores

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 \\ F(L) = F(0) = 0 \end{cases}$$

e as funções

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.13)$$

com $n \in \mathbb{N}^*$, são chamadas **funções próprias** ou **autofunções** associadas ao problema de autovalores.

Agora voltemos a EDO (1.10), cuja solução geral é da forma:

$$G(t) = b_n e^{\sigma K t}$$

para $\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, tem-se

$$G_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K t} \quad (1.14)$$

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA. 21

portanto, $u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}$ para $n = 1, 2, \dots$

Vemos sem dificuldades que $u_n(x, t)$, para cada $n = 1, 2, \dots$ satisfaz a equação do calor, resta-nos mostrar que u_n satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial.

Observemos que

$$\begin{cases} u_n(0, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) = 0, \\ u_n(L, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin(n\pi) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a condição inicial

$$u_n(x, 0) = e^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

onde,

$$u_1(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) ; u_2(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) ; \dots ; u_n(x, 0) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (1.15)$$

portanto u_n é solução de (PVIF1) se f for da forma $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$.

O princípio da superposição de soluções, diz que dadas as soluções u_1, u_2, \dots, u_m de uma equação diferencial e a_1, a_2, \dots, a_m constantes quaisquer, a combinação linear $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$ também é solução.

Bom se considerarmos $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t), \dots$ soluções de uma equação diferencial e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, poderemos aplicar este princípio varias vezes de modo a termos uma motivação informal, para o estudo das séries de Fourier. Supondo que a função f dada possa ser expressa na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.16)$$

e então consideremos a solução do (PVIF1) da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (1.17)$$

O método de Fourier termina nos indicando este candidato, mas algumas questões surgem:

- 1) A função f dada, pode ser escrita como (1.16)?
- 2) Que classe de funções pode ser escrita como (1.16)?
- 3) Podemos exibir os coeficientes c_n ?

CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA.22

4) As equações (1.16) e (1.17) são séries de funções então entra em cena as questões de convergência.

Os próximos capítulos irão nos ajudar a responder estas questões.

Capítulo 2

Alguns Resultados Preliminares

Este capítulo será dedicado a algumas definições e resultados relevantes da teoria da Análise Real e das Equações Diferenciais, que empregaremos nos capítulos subsequentes. Por serem de uso frequente, omitiremos algumas demonstrações, contudo, indicaremos as referências bibliográficas onde podem ser encontradas. Em seguida, mostraremos os resultados mais específicos deste trabalho.

2.1 Integral de Riemann

Definição 2.1. *Seja \mathbb{K} um corpo ordenado e A um subconjunto não vazio de \mathbb{K} ,*

(i) dizemos que a é cota superior de A se $x \leq a$ para todo $x \in A$;

(ii) dizemos que b é cota inferior de A se $x \geq b$ para todo $x \in A$.

Definição 2.2. *A menor das cotas superiores é chamada de supremo e a maior das cotas inferiores é chamada de ínfimo.*

Consideremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f seja limitada. Denotaremos o supremo de uma função limitada por $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ e o ínfimo por $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$.

Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$, $b \in P$ e os t_i serão postos da seguinte forma. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de comprimento $t_i - t_{i-1}$ é chamado i -ésimo intervalo da partição P . Evidentemente $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Notação: Denotaremos por $m_i = \inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ o ínfimo que f assume no i -ésimo intervalo, $M_i = \sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ o supremo que f assume nesse intervalo e $\omega_i = M_i - m_i$ a oscilação de f no mesmo intervalo.

Em particular, se f for contínua e os valores m_i, M_i são assumidos efetivamente por f , então existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$.

Definição 2.3. Consideremos uma função f e a partição P , ao número $\sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$ chamaremos soma inferior e denotaremos por $s(f; P)$ e ao número $\sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$ chamaremos soma superior a qual denotaremos por $S(f; P)$.

Observação 2.1. Uma consequência imediata dessa definição é que, $m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a)$ seja qual for a partição P . Notemos também que $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1})$

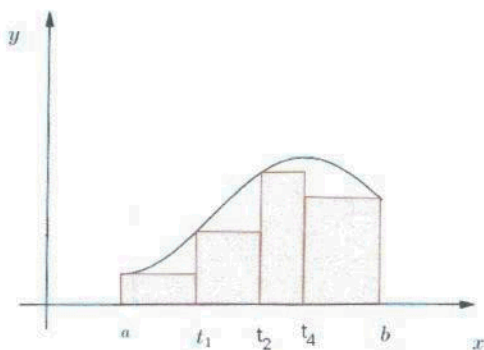


Figura 2.1: Soma Inferior

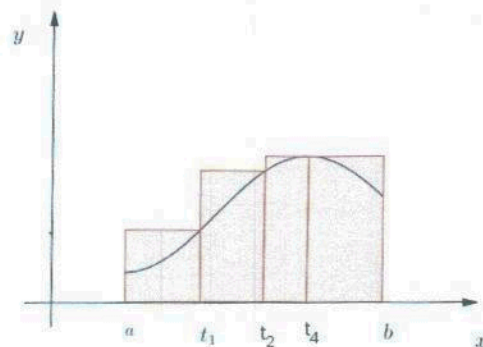


Figura 2.2: Soma Superior

Definição 2.4. Consideremos uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a integral inferior e a integral superior, respectivamente como

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f; P), \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf_P S(f; P).$$

Com o supremo e o ínfimo tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a, b]$.

Agora observe que se A é a área do plano limitado pelo seguimento $[a, b]$, pelas retas, $x = a, x = b$ e pelo gráfico da f , isto é, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq$

$f(x)$ }, então a integral inferior tenta se aproximar de A por falta e a integral superior tenta se aproximar de A por excesso, isto é, $\int_a^b f \leq A \leq \int_a^b f$.

Definição 2.5. Dizemos que uma função limitada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Definição 2.6. Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada, definida em um intervalo $[a, b]$ limitado da reta. Então f será integrável se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em intervalos menores I_1, I_2, \dots, I_n com $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, n$, tais que para quaisquer $\delta > 0$ e $\delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e existem os limites:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x) dx.$$

Como consequência, a integral imprópria de f é:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx.$$

Uma função f será absolutamente integrável se o valor absoluto $|f|$ for integrável em um dos sentidos das definições 2.5 e 2.6.

A integral de Riemann é uma aproximação quase que perfeita da área A . Vejamos agora um exemplo de uma função que não é integrável a Riemann.

Exemplo 2.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

considere a partição P com $x_0 = 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1$ temos que a soma inferior é

$$s(f; P) = \sum_{i=0}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^n 0(x_i - x_{i-1}) = 0$$

enquanto que a soma superior

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_{i=0}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^n 1(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

logo a soma inferior é diferente da soma superior e portanto f não é integrável a Riemann.

Teorema 2.1. *Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Ver Referência [6].

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Consideremos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I . As seguintes afirmações sobre $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:*

- (1) F é uma primitiva indefinida de f , isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.
- (2) F é uma primitiva de f , isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Ver Referência [3].

2.2 Funções Pares e Funções Ímpares

Definição 2.7. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ e é ímpar se $f(x) = -f(-x)$.*

Exemplo 2.2. *A função $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par e $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é ímpar.*

Proposição 2.1. *são válidas as seguintes afirmações:*

- (i) *A soma de duas funções pares é par e a soma de duas funções ímpares é ímpar.*
- (ii) *O produto de duas funções pares é uma função par.*
- (iii) *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*
- (iv) *O produto de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar.*

Demonstração. Consideremos f e g duas funções pares e h e p duas funções ímpares.

(i) suponha $z(x)$ uma função tal que $z(x) = f(x) + g(x)$, por definição

$$z(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = z(-x),$$

daí z é par.

Agora suponha que $z(x) = h(x) + p(x)$, por definição

$$z(x) = h(x) + p(x) = -h(-x) - p(-x) = -(h(-x) + p(-x)) = -z(-x),$$

logo z é ímpar.

(ii) suponha $m(x)$ uma função tal que $m(x) = f(x)g(x)$, por definição

$$m(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = m(-x),$$

donde m é par.

As proposições (iii) e (iv) são demonstradas seguindo a mesma ideia. ■

Proposição 2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado.*

(i) Se f for par, então

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f,$$

(ii) Se f for ímpar, então

$$\int_{-L}^L f = 0.$$

Demonstração. (i) Suponhamos f uma função integrável e par. Observe que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx,$$

fazendo $x = -y$, temos

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(y)dy,$$

que podemos reescrever

$$\int_0^L f(x)dx,$$

assim

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_0^L f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) É demonstrada com um raciocínio análogo. ■

2.3 Funções Periódicas e Relações de Ortogonalidade

2.3.1 Funções Periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x . O menor período T não nulo é chamado **período fundamental**. A partir de agora quando falarmos em período, estaremos falando em período fundamental.

Exemplo 2.3. As funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas de período 2π .

De fato: Temos que

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) = \sin(x)$$

e

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x)$$

Proposição 2.3. Sejam f e g funções periódicas de período T , então:

(a) $af + bg$, com a e b constantes, é periódica de período T ,

(b) fg é periódica de período T .

Demonstração. Ver Referência [8].

Teorema 2.3. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e integrável em qualquer intervalo $[x, x + T]$ da reta. Então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Demonstração. Pela propriedade aditiva da integral temos que

$$\int_x^z f(t) dt = \int_x^c f(t) dt + \int_c^z f(t) dt$$

sempre que $x \leq c \leq z$. Suponha $nT \leq x \leq (n+1)T$

daí $nT \leq x \leq (n+1)T \leq x + T \leq (n+2)T$ e portanto

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_x^{(n+1)T} f(t) dt + \int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt \quad (i)$$

note que

$$\int_x^{(n+1)T} f(t) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) dt - \int_{nT}^x f(t) dt \quad (ii)$$

substituindo (ii) em (i) obtemos

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \left[\int_{nT}^{(n+1)T} f(t) dt - \int_{nT}^x f(t) dt \right] + \int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt \quad (iii)$$

mas f é periódica, então $f(x + T) = f(x)$ fazendo $z = t - T$ para reescrever a última integral em (iii), temos

$$\int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt = \int_{nT}^x f(z + T) dz = \int_{nT}^x f(z) dz = \int_{nT}^x f(t) dt \quad (iv)$$

substituindo (iv) em (iii) obtemos

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt = \int_{nT}^{nT+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

onde a última igualdade se justifica porque estamos integrando a função no período T . ■

2.3.2 Relações de Ortogonalidade

Mostraremos agora as relações de ortogonalidade que nos será de bastante utilidade. Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(1) \quad \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = 0, \text{ se } m, n \geq 1;$$

$$(2) \quad \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases};$$

$$(3) \quad \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}.$$

Para verificar as relações de ortogonalidade recordemos as identidades trigonométricas:

$$I) \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$II) \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

$$III) \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$IV) \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Vamos provar a relação (2). Temos dois casos a analisar:

1° caso: Se $m = n$, então

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{1 + \cos\left(\frac{2nx\pi}{L}\right)}{2} dx = \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx + \int_{-L}^L \frac{\cos\left(\frac{2nx\pi}{L}\right)}{2} dx = \frac{1}{2}(L + L) = L. \end{aligned}$$

2º caso: Se $m \neq n$, então devemos transformar o produto em uma soma e para isso vamos utilizar (III), com

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = \frac{nx\pi}{L} \\ \frac{p-q}{2} = \frac{mx\pi}{L} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q = 2\frac{nx\pi}{L} \quad (i) \\ p-q = 2\frac{mx\pi}{L} \quad (ii). \end{cases}$$

Fazendo (i) + (ii) obtemos

$$2p = 2\left(\frac{nx\pi}{L} + \frac{mx\pi}{L}\right) \Rightarrow p = (n+m)\frac{x\pi}{L}$$

e substituindo p em (i) obtemos

$$(n+m)\frac{x\pi}{L} + q = 2\frac{nx\pi}{L} \Rightarrow q = (n-m)\frac{x\pi}{L},$$

daí

$$\cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) = \frac{1}{2} \cos\left[(n+m)\frac{x\pi}{L}\right] + \frac{1}{2} \cos\left[(n-m)\frac{x\pi}{L}\right]. \quad (2.1)$$

Assim (2) fica.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left[(n+m)\frac{x\pi}{L}\right] dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left[(n-m)\frac{x\pi}{L}\right] dx \\ &= \frac{L}{2(m+n)\pi} \left[\sin\left(\frac{(m+n)x\pi}{L}\right) \right] \Big|_{-L}^L + \frac{L}{2(n-m)\pi} \left[\sin\left(\frac{(n-m)x\pi}{L}\right) \right] \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{L}{2(m+n)\pi} [\sin((m+n)\pi) - \sin(-(m+n)\pi)] + \frac{L}{2(n-m)\pi} [\sin((n-m)\pi) - \sin(-(n-m)\pi)], \end{aligned}$$

mas seno é ímpar, então

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = \frac{L \sin[(n+m)\pi]}{(m+n)\pi} - \frac{L \sin[(m-n)\pi]}{(n-m)\pi}. \quad (2.2)$$

Observemos que se $m+n$ for par, isto é, $m+n=2k$ então

$$m-n = m-n + n-n = \overbrace{m+n}^{\text{é par}} - \underbrace{2n}_{\text{é par}},$$

daí $m-n=2p$ o que implica que

$$\sin[(n+m)\pi] = \sin(2k\pi) = \sin[(m-n)\pi] = \sin(2p\pi) = 0$$

e portanto (2.2) é identicamente nula.

Por outro lado se $m + n$ é ímpar, então

$$m - n = m - n + n - n = \overbrace{m + n}^{\text{é ímpar}} - \underbrace{2n}_{\text{é par}}$$

daí $m - n$ é ímpar, logo

$$\frac{L \sin[(n + m)\pi]}{(m + n)\pi} = \frac{L \sin[(m - n)\pi]}{(n - m)\pi}$$

donde

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = 0.$$

Portanto

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{mx\pi}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}$$

As outras relações de ortogonalidade são verificadas de modo análogo.

2.4 Sequências e Séries de Números Reais

Definição 2.8. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência. Denotamos uma sequência de números reais por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.9. Dizemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número real L , se para todo número real $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Quando este fato ocorre denotaremos por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Definição 2.10. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona se para todo $n \in \mathbb{N}$:

- I) $a_n \leq a_{n+1}$ (monótona não-decrescente)
- II) $a_n \geq a_{n+1}$ (monótona não-crescente)
- III) $a_n < a_{n+1}$ (monótona crescente)
- IV) $a_n > a_{n+1}$ (monótona decrescente)

Definição 2.11. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existe uma constante M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Ver Referência [6].

Consideremos uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a partir desta sequência podemos construir uma nova sequência (s_n) , onde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots, \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao número S , escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S. \quad (2.3)$$

A expressão (2.3) é dita *série infinita* com termo geral a_n .

Definição 2.12. *Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita convergente se existir o limite*

$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ e neste caso $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Caso não exista o limite diremos que a série é divergente.*

Teorema 2.5. *(Critério de Comparação) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Suponha que existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n < cb_n$ para todo $n > n_0$,*

i) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

ii) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração. Ver Referência [6].

Teorema 2.6. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.*

Demonstração. Ver Referência [6].

Teorema 2.7. (Teste da Razão) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$.

I) Se $L < 1$, então a série converge.

II) Se $L > 1$, então a série diverge.

III) Se $L = 1$, então temos nada a concluir.

Demonstração. Ver Referência [3].

2.5 Sequência e Séries de Funções

Consideremos \mathbb{F} o conjunto das funções reais definidas em $I \subset \mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{F}(I, \mathbb{R}) = \{f/f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Definição 2.13. Uma sequência de funções é uma correspondência que associa a cada número natural uma única função:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F},$$

Denotaremos a sequência de funções por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.14. Consideremos uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente ou simplesmente para a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se para todo x e todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Geometricamente, isso quer dizer que se traçarmos uma reta vertical passando por um ponto $x \in I$ e observarmos a intersecção dessa reta com os gráficos de $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ obteremos uma sequência de pontos que converge para o ponto $(x, f(x))$ que é a intersecção da reta vertical com o gráfico de f .

Exemplo 2.4. Consideremos $I = [0, 1]$, a sequência $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, x^2, x^3, \dots)$ converge pontualmente para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Definição 2.15. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ quando dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, (dependente apenas de ε), tal que $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in I$.

No plano \mathbb{R}^2 , dado $\varepsilon > 0$, a faixa de raio ε em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f; \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\},$$

onde X é um conjunto compacto, isto é, X é um conjunto fechado e limitado.

Dizer que f_n converge para f uniformemente em I quer dizer que a partir de um certo índice n_0 , os gráficos das f_n encontram-se todos comportados dentro da faixa de raio $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.8. *Suponha que $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e que cada f_n é contínua no ponto $a \in I$ então f é contínua no ponto a .*

Demonstração. Como f_n converge uniformemente para f , segue que dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in I$. Fixado $n > n_0$ a continuidade de f_n no ponto $a \in I$ implica na existência de um $\delta > 0$ tal que $x \in I$, $|x - a| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(x) - f_n(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| = |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e isto implica na continuidade de f no ponto a . ■

Teorema 2.9. *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Demonstração. Pela convergência uniforme, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $x \in [a, b]$. Por outro lado, fixado $m > n_0$, a integrabilidade de f_m indica a existência de uma partição P de $[a, b]$ tal que, Sejam w_i e w'_i respectivamente as oscilações de f e f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P , tem-se $\sum w'_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + \\ &+ |f_m(x) - f(x)| < w'_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Portanto $w_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Segue-se que

$$\sum w_i(t_i, t_{i-1}) \leq \sum w'_i(t_i, t_{i-1}) + \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right] \sum (t_i, t_{i-1}) = A$$

$$A < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que mostra que f é integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon \end{aligned}$$

Teorema 2.10. (*Derivação Termo a Termo para Sequência de Funções*) Seja (f_n) uma sequência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Se para um certo $c \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g , então (f_n) converge em $[a, b]$ uniformemente para uma função f , de classe C^1 , tal que $f' = g$.

Demonstração. Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ pela Definição 2.9 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e vale $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt$ além disso g é contínua pelo Teorema 2.8. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo f é derivável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Em particular f' é contínua, isto é, f é de classe C^1 . Resta mostrar que a convergência é uniforme.

Note que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \\ &= \left| f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt - f(c) - \int_c^x g(t) dt \right| = P \\ P &= \left| f_n(c) - f(c) + \int_c^x [f'_n(t) - g(t)] dt \right| \leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f'_n(t) - g(t)| dt \end{aligned} \quad (I)$$

Como f'_n converge uniformemente para g , segue que integral em (I) é zero e devido a convergência de $f_n(c)$, temos $|f_n(c) - f(c)| < \varepsilon$. Portanto f_n converge uniformemente para f .

Seja a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$ e construamos a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x).$$

Se a sequência $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para $S(x)$, dizemos que a série de funções converge pontualmente e escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

Se a sequência $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $S(x)$, dizemos que a série de funções converge uniformemente e escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S.$$

Teorema 2.11. (*Teste M de Weierstrass*) Consideremos $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais convergente com $a_n \geq 0$, tais que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in I$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ são uniformemente convergentes.

Demonstração. Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ são convergentes para todo $x \in I$ pelo Critério da Comparação.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n > n_0} a_n < \varepsilon$. Defina,

$$R_n(x) = \sum_{k > n} |f_k(x)| \quad \text{e} \quad r_n(x) = \sum_{k > n} f_k(x)$$

e temos

$|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k > n} a_k < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. E isto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ são uniformemente convergentes. ■

Teorema 2.12. Consideremos $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uma série de funções que converge uniformemente para $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ em I , se cada f_n for contínua em $x_0 \in I$ então s também será contínua em x_0 .

Demonstração. Temos que

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

onde $s_n(x)$ são as reduzidas da sequência f_n , como a convergência é uniforme em I e cada s_n é contínua pelo Teorema 2.8 $s(x)$ é contínua. ■

Teorema 2.13 (Integração Termo a Termo). *Consideremos o intervalo $I = [a, b]$ e seja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uma série de funções integráveis. Se a série convergir uniformemente à s em I então*

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x).$$

Demonstração. Temos que $s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$ onde s_n são as reduzidas de f_n , e como a convergência é uniforme em I , pelo Teorema 2.9 temos que

$$\int_a^b s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b s_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n f_k(x) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x),$$

o que mostra o Teorema. ■

Teorema 2.14 (Derivação Termo a Termo). *Consideremos o intervalo $I = [a, b]$ e seja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uma série de funções que converge para $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, se cada f_k for de classe C^1 em I e se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ convergir uniformemente em I , então para todo $x \in I$,*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

Demonstração. Temos que $s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$ onde s_n são as reduzidas de f_n . Como cada f_n é de classe C^1 e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente para uma função g em I então pelo Teorema 2.10 $s(x)$ converge uniformemente para uma função h de classe C^1 em I tal que $h' = g$, isto é

$$s'(x) = h' = g = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n. \quad \blacksquare$$

2.6 Equações Diferenciais

Uma equação algébrica é uma equação que envolve apenas números, enquanto uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e envolve ainda derivadas destas funções.

Exemplo 2.3. As funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas de período 2π .

De fato: Temos que

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) = \sin(x)$$

e

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x)$$

Proposição 2.3. Sejam f e g funções periódicas de período T , então:

- (a) $af + bg$, com a e b constantes, é periódica de período T ,
 (b) fg é periódica de período T .

Demonstração. Ver Referência [8].

Teorema 2.3. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e integrável em qualquer intervalo $[x, x + T]$ da reta. Então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Demonstração. Pela propriedade aditiva da integral temos que

$$\int_x^z f(t) dt = \int_x^c f(t) dt + \int_c^z f(t) dt$$

sempre que $x \leq c \leq z$. Suponha $nT \leq x \leq (n+1)T$

daí $nT \leq x \leq (n+1)T \leq x + T \leq (n+2)T$ e portanto

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_x^{(n+1)T} f(t) dt + \int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt \quad (i)$$

note que

$$\int_x^{(n+1)T} f(t) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) dt - \int_{nT}^x f(t) dt \quad (ii)$$

substituindo (ii) em (i) obtemos

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \left[\int_{nT}^{(n+1)T} f(t) dt - \int_{nT}^x f(t) dt \right] + \int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt \quad (iii)$$

mas f é periódica, então $f(x + T) = f(x)$ fazendo $z = t - T$ para reescrever a última integral em (iii), temos

$$\int_{(n+1)T}^{x+T} f(t) dt = \int_{nT}^x f(z + T) dz = \int_{nT}^x f(z) dz = \int_{nT}^x f(t) dt \quad (iv)$$

Suponhamos inicialmente que $p(t) = 0$, assim (2.4) fica

$$\frac{dy}{dt} = q(t).$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int q(t) dt \Rightarrow y(t) = \int q(t) dt.$$

Então se $p(t) = 0$ a solução geral é dada por

$$y(t) = \int q(t) dt.$$

Suponhamos agora $q(t) = 0$ assim (2.4) fica

$$\frac{dy}{dt}(t) = -p(t)y(t).$$

Para trabalharmos mais a vontade vamos esquecer do sinal de menos, isto é,

$$\frac{dy}{dt}(t) = p(t)y(t),$$

consideremos que $y(t) \neq 0$ pois não estamos com interesse em soluções identicamente nulas. Multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{y(t)}$, temos

$$\frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt}(t) = p(t).$$

Como $\frac{d}{dy}(\ln |y(t)|) = \frac{1}{y(t)}$, seque que

$$\frac{d}{dy}(\ln |y(t)|) \frac{dy}{dt}(t) = p(t).$$

Pela regra da cadeia, podemos reescrever na forma

$$\frac{d}{dt}(\ln |y(t)|) = p(t),$$

integrando ambos os membros, conseguimos que

$$\ln |y(t)| = \int p(t) dt \Rightarrow |y(t)| = e^{\int p(t) dt} \Rightarrow y(t) = k e^{\int p(t) dt}.$$

No caso mais geral, ver referência [7].

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Uma EDO de segunda ordem é uma equação que pode ser escrita na forma

$$h(t)y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t). \quad (2.5)$$

Definição 2.21. Dizemos que uma EDO de segunda ordem é homogênea se na equação (2.5) $g(t) = 0$, isto é,

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0. \quad (2.6)$$

Caso contrário dizemos que ela é não homogênea.

Teorema 2.15 (Princípio da Superposição). Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação homogênea (2.6), então

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

para c_1 e c_2 constantes, também o é.

Demonstração. Suponhamos que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é solução da equação (2.6) então

$$\begin{aligned} & y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = \\ &= [c_1y_1(t) + c_2y_2(t)]'' + p(t)[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)]' + q(t)[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] = \\ &= c_1y_1''(t) + c_2y_2''(t) + c_1p(t)y_1'(t) + c_2p(t)y_2'(t) + c_1q(t)y_1(t) + c_2q(t)y_2(t) = \\ &= c_1 \underbrace{(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t))}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t))}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.16. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (i)$$

em um intervalo aberto I , onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, tais que, em um ponto $t_0 \in I$, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y'_0) , existem constantes c_1 e c_2 tais que o problema de valor inicial (i), tem como única solução no intervalo I ,

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Demonstração. Suponha que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ seja solução de (i) em um intervalo I qualquer, então para $t_0 \in I$ temos

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y'_1(t_0) + c_2y'_2(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (ii),$$

que podemos reescrever na forma de matriz

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema (ii) tem uma única solução (c_1, c_2) se a Matriz A for invertível. Mais A é invertível, pois seu determinante, por hipótese, é diferente de zero. Assim para todo par de condições iniciais (y_0, y'_0) , existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é solução única de (i). ■

Definição 2.22. (a) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado de wronskiano das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0 .

(b) Dizemos que duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais se o seu wronskiano em um ponto t_0 é diferente de zero.

Corolário 2.1. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções fundamentais de $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ em um intervalo aberto I , então a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Demonstração. Ver referência [7].

Vamos analisar agora as equações da forma

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \text{onde } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (2.7)$$

Uma das soluções desta EDO é $y(t) = e^{rt}$ onde r é uma constante.

De fato: Observemos que $y(t) = e^{rt}$, $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$, substituindo na equação (2.7), obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Assim $y(t) = e^{rt}$ é solução se, e somente se, r é solução de

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.8)$$

Essa equação algébrica é conhecida como equação característica.

A equação característica é uma equação de segundo grau, então podemos ter duas raízes reais, somente uma raiz real ou duas raízes complexas. Assim temos três situações distintas para analisar.

(I) Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a equação (2.8) tem duas raízes reais distintas e as funções

$$y_1(t) = e^{r_1t} \text{ e } y_2(t) = e^{r_2t}$$

são as soluções fundamentais de (2.7).

De fato: O wronskiano de y_1 e y_2 é

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{bmatrix} = \\ &= e^{r_1t}e^{r_2t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\Delta > 0$ a solução é da forma

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

(II) Se $\Delta = 0$, então a equação característica tem duas raízes reais iguais e uma das soluções de (2.7) é $y_1(t) = e^{rt}$, mas podemos obter uma outra solução fundamental y_2 dada por $y_2 = te^{rt}$ conforme referência [7]. Assim a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}. \quad (2.9)$$

(III) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a equação característica tem duas raízes complexas conjugadas, que são conjugadas, ou seja, $r_1 = a + ib$ é uma raiz e a outra é $r_2 = a - ib$.

Por (I)

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \text{ e } y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções fundamentais de (2.9). Portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t}, \quad (2.10)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Usando a fórmula de Euler, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{at} [\cos(bt) + i \sin(bt)] + c_2 e^{at} [\cos(bt) - i \sin(bt)] = \\ &= (c_1 + c_2) e^{at} \cos(bt) + i(c_1 - c_2) e^{at} \sin(bt). \end{aligned}$$

Em particular, se tomarmos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ obtemos a solução real $u(t) = e^{at} \cos(bt)$. E se tomarmos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2i}$ obtemos a solução real $v(t) = e^{at} \sin(bt)$. Mostremos agora que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais de (2.9).

Temos que

$$\begin{aligned} W[u, v](t) &= \det \begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} \cos(bt) & e^{at} \sin(bt) \\ e^{at}(a \cos(bt) - b \sin(bt)) & e^{at}(a \sin(bt) + b \cos(bt)) \end{bmatrix} = \\ &= e^{at} \{ \cos(bt)[a \sin(bt) + b \cos(bt)] - \sin(bt)[a \cos(bt) - b \sin(bt)] \} = \\ &= e^{at} [a \cos(bt) \sin(bt) + b \cos^2(bt) - a \cos(bt) \sin(bt) + b \sin^2(bt)] = b e^{at}, \end{aligned}$$

assim

$$W[u, v](t) \neq 0.$$

Portanto se $\Delta < 0$ a solução geral será

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt).$$

Em particular se a raiz complexa for um número imaginário puro, então a solução geral de (2.7) é da forma

$$y(t) = c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt).$$

2.6.2 Equações Diferenciais Parciais

Definição 2.23. Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes x_1, \dots, x_n e derivadas parciais de uma função $u(x_1, \dots, x_n)$. Mais precisamente, uma EDP é uma equação da forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}) = 0,$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \omega$, ω um subconjunto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u = u(x)$ a função a ser determinada.

A ordem de uma EDP é dada pela derivada de maior ordem que ocorre na equação.

Definição 2.24. Dizemos que uma EDP é linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário dizemos que a EDP é dita não-linear.

Exemplo 2.6. A forma mais geral de uma EDP linear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0, \quad (2.11)$$

onde algum dos a_{ij} não é identicamente nulo.

Definição 2.25. Dizemos que uma EDP linear é homogênea se o termo independente de u é identicamente nulo; caso contrário, é não homogênea.

Exemplo 2.7. A equação (2.11) é homogênea, se $d(x)$ for identicamente nula.

Definição 2.26. Solução clássica de uma EDP de ordem k em um domínio aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma função $u \in C^k(\Omega)$ que satisfaz a equação em todos os pontos de Ω .

Capítulo 3

Série de Fourier

Neste capítulo tentaremos responder aos questionamentos levantados no capítulo

1. Vimos a necessidade de saber se (ou quando) uma função real $f(x)$, definida em $0 \leq x \leq L$, pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com c_n escolhido adequadamente. Veremos na secção 4.4.1 que com condições laterais isoladas termicamente, o método de Fourier indicará uma função f que deverá ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Desta forma, devemos estudar sob quais condições podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Nesse caso, os números a_n e b_n são definidos como os coeficientes de Fourier da função f e a expressão do lado direito é chamada a série de Fourier de f .

3.1 Coeficientes de Fourier

Suponhamos que podemos expressar f como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.1)$$

e que a série em (3.1) convirja uniformemente, vamos descobrir a relação existente entre os a_n, b_n e a função f . Note que f é periódica de período $2L$, isso decorre da

periodicidade do seno e do cosseno.

O Teorema 2.12 implica que f é contínua e portanto a expressão (3.1) é integrável, daí

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx,$$

pele Teorema 2.13, temos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right].$$

Mas, $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$. Então

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (3.2)$$

Para encontrarmos a relação do número a_n com a f , basta multiplicarmos (3.1) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, com $m \geq 1$ fixado, em seguida integrarmos, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &+ \sum_n \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Pelas relações de ortogonalidade vistas na secção 2.3.2, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 + \sum_n (La_m + 0),$$

logo

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.3)$$

De maneira análoga, se multiplicarmos a equação (3.1) por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrarmos obtemos

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.4)$$

De posse desses fatos podemos dar uma boa definição. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado. Os números a_n para $n \geq 0$ e b_n para $n \geq 1$ dados em (3.3) e (3.4) são os *coeficientes de Fourier* da função f .

3.2 Série de Fourier

Definição 3.1. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier, pelas expressões (3.2), (3.3) e (3.4) e escrevemos

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.5)$$

Onde o sinal \approx foi usado porque não estamos pedindo a convergência uniforme, daí a proposta de estudar condições suficientes para que a função f seja igual a sua série de Fourier.

Definição 3.2. Dizemos que uma função f é seccionalmente contínua, se dados $a < b$ existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n-1$, e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Em outras palavras, uma função é seccionalmente contínua se ela possuir um número finito de descontinuidade (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado.

Definição 3.3. Dizemos que uma função f é seccionalmente diferenciável, se ela é seccionalmente contínua e sua derivada f' também o for.

Exemplo 3.1. A função sinal de x , definida por

$$\text{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

é seccionalmente diferenciável.

Exemplo 3.2. A função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1, \\ \text{e periódica de período } 2, & \end{cases}$$

é contínua, mas não é seccionalmente diferenciável.

O resultado a seguir é um dos mais importantes resultados deste capítulo, pois fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Teorema 3.1 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada pela expressão da direita em (3.5), converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_n^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

A demonstração desse resultado será feita um pouco mais adiante. No momento, vamos apenas aplicá-lo para obtenção de alguns resultados.

Exemplo 3.3. *Vamos calcular a série de Fourier da função dada por;*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ \text{e periódica de período } & 2\pi. \end{cases}$$

Solução: Calculemos os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{\pi} [0 + \pi] = 1,$$

para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$$

observe que se n for par, então $b_{2k} = 0$ e se n for ímpar teremos $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$, com $k = 1, 2, \dots$.

Assim a série de Fourier é

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin[(2k-1)x].$$

Note que a série de Fourier não é convergente, pois nos pontos de descontinuidade a série converge para $\frac{1}{2}$, pelo Teorema de Fourier.

3.2.1 Coeficientes de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Aplicamos as proposições (2.1) e (2.2) ao cálculo da série de Fourier de funções pares e ímpares.

a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então os coeficientes de Fourier ficam

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = 0$$

e nesse caso teríamos uma série de Fourier na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

b) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, teríamos que os coeficientes de Fourier seriam

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx$$

e para f ímpar teríamos uma série de Fourier na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Exemplo 3.4. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ definida por $f(x) = x$, para $-L \leq x \leq L$. Calculemos a sua série de Fourier.

Solução: Por f ser ímpar, temos uma série de senos cujos coeficientes são

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx$$

Fazendo $y = \frac{nx\pi}{L}$, obtemos

$$b_n = \frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} y \sin y dy,$$

integrando por partes obtemos

$$\int_0^{n\pi} y \sin y dy = -y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y dy = -n\pi \cos(n\pi).$$

Logo

$$b_n = -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi).$$

Mas observe que $\cos(n\pi) = \cos(\pi) + \cos(2\pi) + \dots + \cos(n\pi) = (-1)^n$, daí reescrevemos b_n como

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$f \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Note que não podemos usar o sinal de igualdade, pois nos pontos de descontinuidade a série converge para zero, pelo Teorema de Fourier.

3.3 Integral de Séries de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua série de Fourier converge uniformemente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

então podemos aplicar o Teorema 2.12, para garantir a continuidade e, portanto, a integrabilidade de f . Depois, a partir do Teorema 2.13 pode-se obter que a integral de f é

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_a^b b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.6)$$

Pode-se mostrar que (3.6) é válida mesmo se a série de Fourier não converja para f .

Começemos com uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua. Definindo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (3.7)$$

a qual é contínua. Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que F' existe em todos os pontos onde f é contínua e ainda $F'(x) = f(x)$, nesses pontos. Concluímos, desta forma, que F' é seccionalmente contínua.

Observação 3.1. F é periódica de período $2L$, pois

$$\begin{aligned} F(x+2L) - F(x) &= \int_0^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_0^{2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{-L}^L f(t) dt - \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt$$

e assim obtemos

$$F(x+2L) - F(x) = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt - \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = 0$$

donde $F(x+2L) = F(x)$.

Concluimos com essas observações que dada uma função f seccionalmente contínua, podemos construir uma função F que satisfaz as hipóteses do teorema de Fourier e teremos

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.8)$$

onde,

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{com } n \geq 0, \quad (3.9)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{com } n \geq 1. \quad (3.10)$$

Agora verifiquemos se os coeficiente de Fourier da F , A_n e B_n tem alguma relação com os coeficientes de Fourier da f . Integrando (3.9) por partes obtemos

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[F(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[F(L) \frac{L}{n\pi} \sin(n\pi) - F(-L) \frac{L}{n\pi} \sin(-n\pi) - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \end{aligned}$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

mas $F'(x) = f(x)$ donde

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = Lb_n.$$

Logo, concluímos que

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n, \quad n \geq 1 \quad (3.11)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio com B_n , obtemos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{L} \left[-F(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} [-F(L) + F(-L) + La_n] \end{aligned}$$

notemos que $F(-L) = F(L)$, isso ocorre porque F é periódica de período $2L$, assim

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Quanto ao A_0 basta fazer $x = 0$ em (3.8) e obtemos

$$F(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi \cdot 0}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi \cdot 0}{L}\right) \right]$$

e lembrando que $F(0) = \int_0^0 [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = 0$ tem-se:

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n. \quad (3.13)$$

Agora, substituindo (3.7), (3.11), (3.12), (3.13) em (3.8) obtemos

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{L}{n\pi} b_n (1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Observemos que $\frac{L}{n\pi} (1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)) = \int_0^x \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$ e $\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^x \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$,
donde

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt + \int_0^x b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right) \quad (3.14)$$

Fazendo $x = b$ e $x = a$ em (3.14) e subtraindo-se as expressões obtidas obtemos exatamente (3.6).

Em outras palavras o que acabamos de fazer foi: se

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

então

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.15)$$

Em resumo, acabamos de demonstrar o teorema seguinte:

Teorema 3.2 (Integração de Série de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

sua série de Fourier. Então

i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f , isto é, vale (3.6);

ii) a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$ é periódica de período $2L$, contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier, isto é,

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Exemplo 3.5. *Vamos ver a aplicabilidade do Teorema acima. Já vimos no exemplo (3.4) que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ definida por $f(x) = x$, para $-L \leq x \leq L$ tem a sua série de Fourier dada por*

$$f \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

logo

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{x^2}{2} dx = \frac{L^2}{6},$$

como

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

obtemos então que

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad -L \leq x \leq L.$$

3.4 Estimativas para os Coeficientes de Fourier

A partir das hipóteses de derivação de uma função, podemos exibir algumas estimativas sobre os coeficientes de Fourier, é o que mostraremos nessa secção.

Inicialmente suponhamos f periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Devido a propriedade de integral absoluta $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, é de imediato obtermos as estimativas:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right)| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right)| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx.$$

Logo com as hipóteses de f ser periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, concluimos que existe uma constante $M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$ tal que

$$|a_n| \leq M, \quad |b_n| \leq M \quad \text{para todo } n.$$

Agora suponhamos que f seja periódica de período $2L$, derivável e que f' seja integrável e absolutamente integrável. Então aplicando a formula de integração por partes em a_n , para $n \geq 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} La_n &= \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \\ a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx, \end{aligned} \quad (3.16)$$

daí

$$|a_n| = \left| -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$$

de maneira semelhante

$$\begin{aligned} Lb_n &= -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \\ Lb_n &= -\frac{L}{n\pi} [f(L) \cos(n\pi) - f(-L) \cos(-n\pi)] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \end{aligned}$$

mas cosseno é par e a periodicidade de f implica que $f(L) = f(-L)$, donde

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx, \quad (3.17)$$

tomando valores absolutos,

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \right|$$

o que implica

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Portanto, com as hipóteses feitas sobre f , garantimos a existência de uma constante $M = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$, tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n} \text{ e } |b_n| \leq \frac{M}{n} \text{ para } n = 1, 2, \dots.$$

Podemos avançar mais no sentido de melhorar as estimativas acima, supondo f periódica de período $2L$, com primeira derivadas contínua e segunda derivada integrável e absolutamente integrável. Integrando por partes (3.16) e (3.17) podemos obter, seguindo o mesmo raciocínio, que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2} \text{ e } |b_n| \leq \frac{M}{n^2} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

com $M = \frac{1}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$.

3.5 Classe das Funções Consideradas

Bom, até agora em nosso estudo das séries de Fourier vimos que dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $2L$ e se, tal função, for integrável e absolutamente integrável em um intervalo de comprimento $2L$, poderemos calcular os coeficientes de Fourier e expressar a sua série de Fourier. Mais precisamente, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ só pode ser representada por sua série de Fourier, se as condições abaixo forem satisfeitas:

- (i) f é periódica de período $2L$;
- (ii) f é integrável, em $[0, L]$;
- (iii) $|f|$ é integrável em $[-L, L]$.

Para deixarmos as condições (ii) e (iii) em base mais sólida usaremos a integral de Riemann a qual já definimos na secção 2.1. Então quando falarmos em integrabilidade estaremos falando no sentido das definições 2.5 e 2.6.

Notação: uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será uma função $\mathcal{L}^1 \Leftrightarrow f$ e $|f|$ forem integráveis. Desta forma se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de \mathcal{L}^1 , então os coeficientes de Fourier de f estarão bem definidos.

Apresentaremos a seguir um resultado bastante relevante no estudo da convergência das séries de Fourier.

Teorema 3.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon$$

e

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Demonstração. (i) Suponha que f seja limitada e integrável. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (I)$$

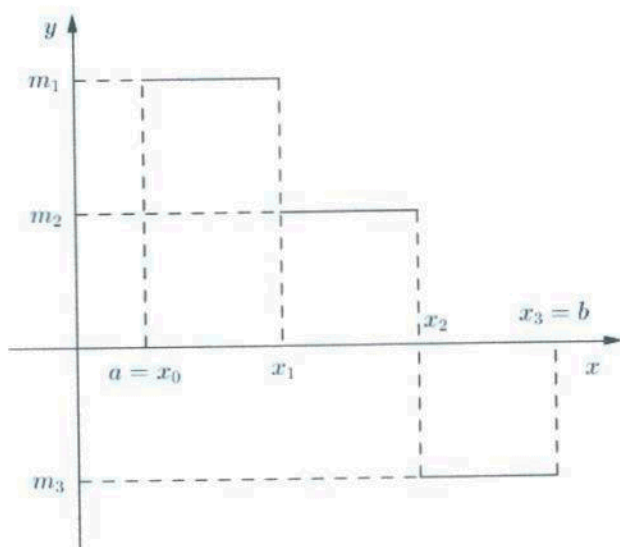
onde $m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$. Defina a função g , como $g(x) = m_j$, para $x_{j-1} \leq x \leq x_j$. Então podemos representar $\sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1})$ por $\int_a^b g(x) dx$ e assim (I) fica

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

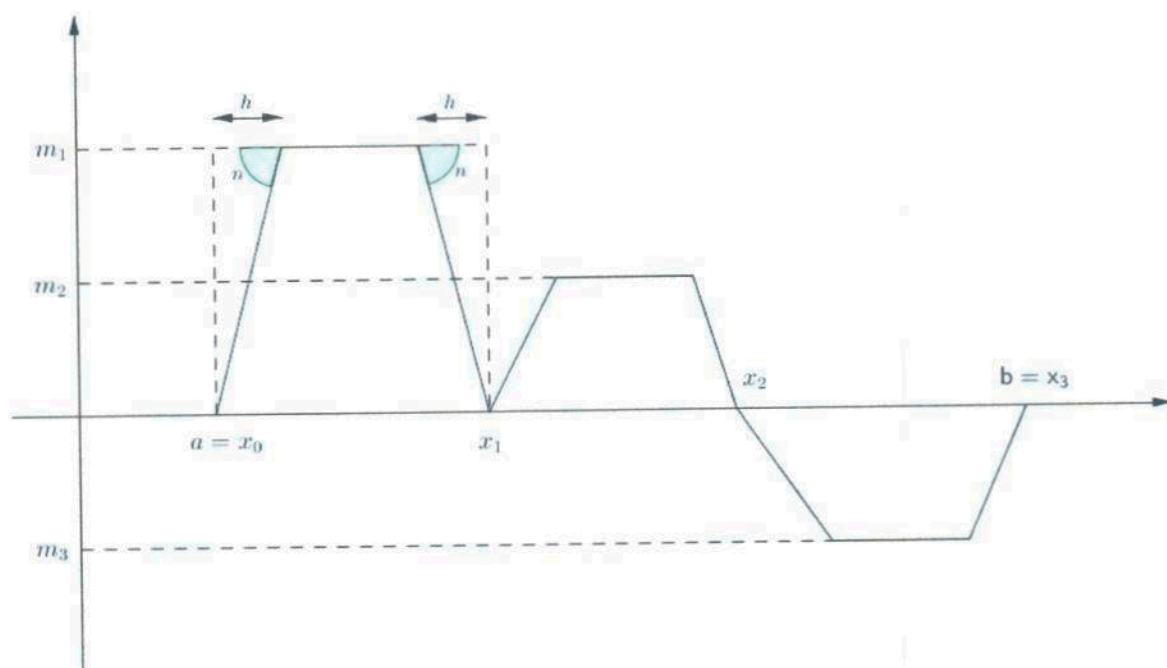
donde

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (II)$$

Vamos entender melhor a função g . Suponha, em particular, que a partição tenha quatro pontos e que o gráfico de g seja:



Observe que g não é contínua e para tornarmos contínua substituiremos os “retângulos” por “trapézios” cujos lados inclinados tem inclinação n . Assim para cada n considere-mos a função ψ_n assim obtida:



Note que a base maior de cada trapézio é $(x_j - x_{j-1})$ e a base menor é $(x_j - x_{j-1}) - 2h$, mas das propriedades de triângulo retângulo podemos encontrar que $h = \frac{m_j}{\tan n}$ e

assim a área A de cada trapézio é

$$A = \frac{b+B}{2}h = \left[(x_j - x_{j-1}) + (x_j - x_{j-1}) - 2\frac{m_j}{\tan n} \right] \frac{m_j}{2} = \left[\frac{2(x_j - x_{j-1}) \tan n - 2m_j}{\tan n} \right] \frac{m_j}{2}$$

ou seja,

$$A = (x_j - x_{j-1})m_j - \frac{m_j^2}{\tan n}.$$

Observe ainda que

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_a^b m_j(x_j - x_{j-1}) \text{ e } \int_a^b \psi_n(x)dx = \sum_{j=1}^k \left[(x_j - x_{j-1})m_j - \frac{m_j^2}{\tan n} \right].$$

Agora fazendo

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b [g(x) - \psi_n(x)]dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan n}.$$

Portanto

$$\int_a^b |g(x) - \psi_n(x)|dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan n},$$

como toda função contínua é limitada, seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b |g(x) - \psi_n(x)|dx \leq \frac{kM^2}{\tan n},$$

assim fazendo $k = \frac{\varepsilon \tan n}{2M^2}$ obtemos que

$$\int_a^b |g(x) - \psi_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (III)$$

Agora de (II) e (III) obtemos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ tal que:

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|dx = \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - \psi_n(x)|dx \leq \int_a^b [|f(x) - g(x)| + |g(x) - \psi_n(x)|]dx,$$

o que implica que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Agora suponhamos que f não seja limitada, mas seja integrável e absolutamente integrável no sentido da definição (2.6). Para facilitar, suponhamos que f se torne ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b . Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)|dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)|dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (a)$$

Como f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta]$, pelo que acabamos de mostrar, existe uma função contínua $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (b)$$

Defina a função $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta; \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta \quad \text{e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Temos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x) - 0| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x) - 0| dx$$

usando (a) e (b) obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx < \varepsilon,$$

o que conclui a demonstração do Teorema 3.3. ■

3.6 Lema de Riemann-Lebesgue

Esta secção será dedicada a um importante lema que nos auxiliá em demonstrações futuras.

Lema 3.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 em um intervalo $[a, b]$ então:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0$$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que f seja limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Como f é integrável e limitada. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

onde

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\},$$

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

são as somas superior e inferior associadas à partição P .

Consideremos a partição do intervalo $[a, b]$ determinada pelos pontos $x_j = a + \frac{j}{n(b-a)}$, para $j = 0, 1, \dots, n$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) \sin(tx) - f(x_j) \sin(tx) + f(x_j) \sin(tx)] dx = \\ &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \sin(tx) dx. \end{aligned}$$

Observe que

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \leq \frac{2}{t},$$

e que

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j \text{ para } x_{j-1} \leq x \leq x_j,$$

daí

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \sin(tx) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |f(x_j)| \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\sin(tx)| dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(x_j)| \cdot |\sin(tx)| dx \leq \\ &\leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_{j-1} - x_j) = \\ &= \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n M_j(x_{j-1} - x_j) - \sum_{j=1}^n m_j(x_{j-1} - x_j) = \frac{2nM}{t} + [S(f; P) - s(f; P)]. \end{aligned}$$

Agora, basta tomarmos t_0 tal que $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então dado $\varepsilon > 0$ tomemos n tal que $S(f; P) - s(f; P) < \frac{\varepsilon}{2}$, assim

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + [S(f; P) - s(f; P)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

De modo análogo, mostramos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0.$$

Suponhamos agora que f seja uma função \mathcal{L}^1 qualquer. Pelo Teorema 3.3, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\int_a^b f(x) \sin(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \sin(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \sin(tx) dx$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 , tal que, para $t \geq t_0$, se tem:

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \sin(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como queríamos demonstrar. ■

3.7 Convergência Pontual da Série de Fourier

Nesta secção daremos condições suficientes sobre a função f que garantam a convergência da série de Fourier num ponto fixado x para o valor $f(x)$. Além das hipóteses mínimas descritas na secção 3.5 para a definição dos coeficientes de Fourier, faremos algumas hipóteses sobre o comportamento de f nas vizinhanças do ponto x . Nosso objetivo é fazer estimativas do valor

$$e_n = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

onde s_n é a soma parcial da série de Fourier. Inicialmente vamos reescrever s_n de modo conveniente.

Sabemos que

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right)$$

com

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy, \quad k \geq 0 \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy, \quad k \geq 1$$

substituindo a_k e b_k em s_n , obtemos

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(\frac{ky\pi}{L}\right) dy \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left(\cos\left(\frac{ky\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + \sin\left(\frac{ky\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b),$$

obtemos

$$s_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) f(y) dy \right],$$

isto é,

$$\int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(x-y)}{L} \right) \right] f(y) dy \quad (3.18)$$

A expressão

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \quad (3.19)$$

é conhecida como o núcleo de Dirichlet, e tem as seguintes propriedades.

(i) $D_n(x)$ é uma função par;

(ii) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;

(iii) $D_n(x)$ é uma função contínua;

(iv) $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;

(v) $D_n(0) = \frac{n+\frac{1}{2}}{L}$;

(vi) Vale a seguinte expressão compacta de $D_n(x)$ para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$:

$$D_n(x) = \frac{\sin \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L} \right)}{2L \sin \frac{\pi x}{2L}}. \quad (3.20)$$

Demonstração. (i) Como cosseno é uma função par então $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \cos\left(-\frac{k\pi x}{L}\right)$ e

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(-\frac{k\pi x}{L} \right) \right] = D_n(-x)$$

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \right\} dx = \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{2L} dx + \int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned}$$

mas $\int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = 0$, daí

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2L} dx = \frac{1}{2L} (L + L) = 1.$$

(iii) Sabemos que a soma de funções contínuas ainda é uma função contínua e como a função cosseno é contínua, segue que $\sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$ é contínua e portanto $D_n(x)$ é contínua.

(iv) Como a função cosseno é periódica de período 2π temos que

$$D_n(x+2L) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(x+2L)}{L} \right) \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} + 2k\pi \right) \right] = D_n(x)$$

(v) Temos que

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi 0}{L}\right) \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right] = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}.$$

(vi) Para mostrarmos que

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)}{2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}, \text{ para } x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$$

vamos calcular a expressão

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

Note que

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right),$$

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re}(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta})$$

Que é a soma dos n primeiro termos de uma progressão Geométrica de razão $e^{i\theta}$, assim $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

Daí

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \cdot \left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right) =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2}) - i \sin(\frac{\theta}{2}) - \cos[(n + \frac{1}{2})\theta] - i \sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{\cos(\frac{\theta}{2}) - i \sin(\frac{\theta}{2}) - \cos(\frac{\theta}{2}) - i \sin(\frac{\theta}{2})} \right),$$

essa expressão só faz sentido se $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Assim

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos[(n + \frac{1}{2})\theta] - i\{\sin(\frac{\theta}{2}) + \sin[(n + \frac{1}{2})\theta]\}}{i2 \sin(\frac{\theta}{2})} \right).$$

Daí

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2 \sin(\frac{\theta}{2})},$$

portanto

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{2}$$

Fazendo $\theta = \frac{\pi x}{L}$ e substituindo isso na expressão (3.19) obtemos (3.20).

Voltemos a (3.18), usando (3.19) e mudando a variável independente $y = x - t$, obtemos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dt = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt.$$

Como D_n e f são periódicas de período $2L$ teremos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt$$

usando o fato de D_n ser uma função par, obtemos

$$\int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt = \int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt = \int_0^L D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

Assim,

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

Logo a expressão e_n que queremos estimar, ganha a forma:

$$e_n = \int_0^L D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

pela a propriedade (ii) do núcleo de Dirichlet, temos

$$= \int_0^L D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \left(\int_{-L}^L D_n(x)dx \right),$$

pela Proposição 2.2

$$\begin{aligned} & \int_0^L D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \int_0^L D_n(t)dt = \\ & = \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t)-f(x+0)]+[f(x-t)-f(x-0)]\}dt \end{aligned}$$

Definindo a função

$$g(x,t) = [f(x+t)-f(x+0)]+[f(x-t)-f(x-0)]$$

enunciaremos agora um resultado sobre a convergência da série de Fourier no ponto x .

Teorema 3.4 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixado x , em $[-L, L]$, suponha que $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (3.21)$$

Então $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Primeiramente vamos decompor $e_n = \int_0^L D_n(t)g(x,t)dt$ em duas partes,

$$e_n = \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x,t)}{t}dt + \int_\delta^L \frac{\sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi t}{L}}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} g(x,t)dt$$

Tomando δ convenientemente pequeno e usando a hipótese 3.21, observamos que a primeira integral é pequena.

De fato: Como $D_n(t) = \frac{\sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi t}{L}}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}}$ para $t \neq 0, \pm 2L, \dots$, então podemos concluir que

$$|tD_n(t)| = \left| t \frac{\sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi t}{L}}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} \right| \leq \frac{t}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}},$$

mas estamos tomando δ pequeno, deste modo t também é pequeno, daí obtemos a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2} \text{ para } t \in [0, \delta].$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome δ pequeno, tal que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x,t)}{t}dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quanto a segunda integral, basta mostrarmos que

$$h(t) = \frac{g(x,t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável. E isso é imediato, pois o denominador de $h(t)$ nunca se anula e $g(x,t)$ é uma função integrável. Logo podemos aplicar o lema de Riemann-Lebesgue e portanto, para n suficientemente grande,

$$\left| \int_\delta^L \frac{\sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi t}{L}}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} g(x,t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

o que conclui a demonstração do teste de Dini. ■

O teste de Dini é de grande utilidade pois pode ser usado para obtenção de condições suficientes para a convergência da série de Fourier, condições que sejam mais fáceis de se verificar.

Exemplo 3.6. Suponha que f seja Holder contínua na vizinhança do ponto x , isto é, existem constantes α, δ e $K > 0$ tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\alpha$$

para $t, s \in [x - \delta, x + \delta]$. a desigualdade acima implica que f é contínua em x , logo $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$.

Daí

$$|g(x, t)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leq Kt^\alpha + Kt^\alpha = 2Kt^\alpha,$$

logo

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq 2k \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt < \infty$$

então as condições do teste de Dine são satisfeitas.

Agora temos condições de demonstrar o Teorema de Fourier, (Teorema 3.1)

Demonstração do Teorema 3.1 Suponha que f seja uma função seccionalmente contínua e que as razões incrementais

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

$$\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

sejam limitadas para $t > 0$ suficientemente pequeno.

Isso acontece, se existem $f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ e $f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$.

Agora verifiquemos a seguinte condição do teste de Dini:

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty$$

Note que

$$\int_0^\eta \left| \frac{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]}{t} \right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^\eta \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt + \int_0^\eta \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} dt.$$

Então basta mostrar que $g_1(x) = \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t}$ e $g_2(x) = \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t}$ são integráveis em $[0, \eta]$.

Suponhamos que na vizinhança de um ponto x fixado, f' seja uma função seccionalmente contínua. Então tanto g_1 quanto g_2 são seccionalmente contínuas em $[0, \eta]$ para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. E como f' é seccionalmente contínua podemos fixar um x de tal modo que f' é continua numa vizinhança de x . Assim existe

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t},$$

e pela definição de limite. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \mathbb{R}$,

$0 < |t| < \delta \Rightarrow |f'(x) - \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}| < \varepsilon$. Temos que

$$|f'(x) - \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}| \geq |f'(x)| - \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} = |f'(x)| - g_1(x),$$

daí

$$|f'(x)| - g_1(x) < \varepsilon \Rightarrow g_1(x) < |f'(x)| - \varepsilon.$$

Isso implica que g_1 está tão próximo quanto se queira da f' na vizinhança do ponto x . Logo, não temos escolha, g_1 é contínua nessa vizinhança e portanto integrável. De maneira análoga mostramos que g_2 também é contínua e integrável nessa vizinhança. Portanto a condição do teste de Dini está satisfeita, o que nos leva a concluir que

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Capítulo 4

Condução do Calor

Neste capítulo veremos sob quais condições a série de Fourier converge uniformemente. Mostraremos também que a função candidata a solução do PVIF(1) encontrada no capítulo 1 é realmente a solução de tal problema, além disso, analisaremos o PVIF sobre outras condições de fronteira e veremos que podemos reduzir ao PVIF(1) já estudado.

Antes de prosseguirmos nesse sentido vamos definir o espaço das funções de \mathcal{L}^2 .

Definição 4.1. Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de quadrado integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis. Para nos referirmos a tal função diremos que ela é uma função \mathcal{L}^2 .

Sem dificuldades vemos que o espaço das funções \mathcal{L}^2 , com as operações usuais, é um espaço vetorial. Podemos, ainda, definir uma norma nesse espaço vetorial dada por

$$\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

De fato: Consideremos duas funções $f, g \in \mathcal{L}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$(i) \quad \|f\| = 0 \Rightarrow \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

$$(ii) \quad \|\alpha f\| = \left[\int_a^b |\alpha f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b (\alpha^2) |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|f\|$$

$$(iii) \quad \|f+g\| = \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\| + \|g\|.$$

É a desigualdade de Minkowski para funções \mathcal{L}^2 cuja demonstração encontra-se na secção 4.1.3.

Observações

(a) Se f for limitada por M e integrável a Riemann. Então vale a desigualdade,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a).$$

Logo f é uma função \mathcal{L}^2 , onde $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

(b) Se f não for uma função limitada, poderemos ter $f \in \mathcal{L}^1$, mas $f \notin \mathcal{L}^2$.

Um contra exemplo para a reciproca é a função $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, para $0 < x < 1$, pois

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_0^1 = 2$$

e

$$\int_0^1 |x^{-\frac{1}{2}}|^2 dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{-1} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \ln |x| \Big|_a^1 = \infty.$$

4.1 Desigualdades

Nesta secção abordaremos algumas desigualdades bastante relevantes para o estudo da convergência uniforme da série de Fourier.

4.1.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Consideremos dois vetores $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ com componentes não-negativas.

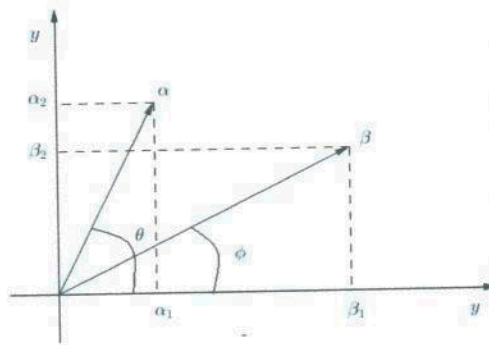
O produto escalar é definido como

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \quad (4.1)$$

A norma de um vetor é definida como

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

Seja θ o ângulo do vetor α com o semieixo positivo dos x e seja ϕ o ângulo do vetor β com o mesmo semieixo.



Temos que $\cos(\theta) = \frac{\alpha_1}{|\alpha|}$, $\sin(\theta) = \frac{\alpha_2}{|\alpha|}$, $\cos(\beta) = \frac{\beta_1}{|\beta|}$ e $\sin(\beta) = \frac{\beta_2}{|\beta|}$. Logo podemos escrever

$$\alpha = (|\alpha| \cos \theta, |\alpha| \sin \theta)$$

e

$$\beta = (|\beta| \cos \phi, |\beta| \sin \phi),$$

assim o produto escalar poderá ser reescrito como

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= |\alpha| \cos \theta |\beta| \cos \phi + |\alpha| \sin \theta |\beta| \sin \phi = \\ &= |\alpha| |\beta| (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi), \end{aligned}$$

isto é,

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| |\beta| \cos(\theta - \phi). \tag{4.2}$$

Das igualdades 4.1 e 4.2 seque que

$$\alpha \cdot \beta = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \text{ e } \alpha \cdot \beta = |\alpha| |\beta| \cos(\theta - \phi).$$

concluimos que

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = |\alpha| |\beta| \cos(\theta - \phi).$$

Assim

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 &\leq |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2| = |\alpha| |\beta| \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 &\leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \end{aligned}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^2 .

Agora suponhamos que os vetores estejam no \mathbb{R}^n e sejam $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no \mathbb{R}^n tem a forma

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para demonstrá-la considere a expressão:

$$\sum_{j=1}^n (a_j + tb_j)^2$$

que é sempre maior ou igual a zero. Desenvolvendo e distribuindo os somatórios, obtemos

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n b_j a_j + t^2 \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

Observe que lembra um trinômio do segundo grau em t e pelo fato de ser maior ou igual a zero terá discriminante menor ou igual a zero, isto é,

$$\Delta = \left(2 \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) \leq 0$$

o que implica

$$4 \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)$$

extraindo a raiz quadrada obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no \mathbb{R}^n .

Teorema 4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz para Funções de Quadrado Integrável). *Consideremos as funções de quadrado integrável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. A demonstração acontece de maneira análoga ao de vetores no \mathbb{R}^n , basta considerar a expressão

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx &= \int_a^b [f(x)^2 + 2tf(x)g(x) + t^2g(x)^2] dx = \\ &= \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g(x)^2 dx \end{aligned}$$

que lembra um trinômio de segundo grau em t e da mesma forma:

$$\Delta = \left(2 \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right) \leq 0,$$

o que implica

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right),$$

que extraindo as raízes quadrada na desigualdade anterior obtemos o que queremos. ■

Corolário 4.1. Se f for uma função \mathcal{L}^2 então f é necessariamente uma função \mathcal{L}^1 , isto é, $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$.

Demonstração. Consideremos f e g funções \mathcal{L}^2 em um intervalo $[a, b]$. Obviamente fg é absolutamente integrável e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Basta tomarmos $g(x) \equiv 1$ para obtermos

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

o que mostra que f é uma função \mathcal{L}^1 . ■

4.1.2 Desigualdade de Bessel

Uma sucessão (f_n) de funções de quadrado integráveis, em um intervalo $[a, b]$, converge, em média quadrática para uma função f de quadrado integrável, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

onde $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$ é conhecida como *erro médio quadrático*, na aproximação de f por f_n .

Mostraremos agora que a melhor aproximação em média quadrática das reduzidas $s_n(x)$ da série de Fourier, são os polinômios trigonométricos. Para isto consideremos o polinômio trigonométrico:

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]$$

e mostremos que

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Fazendo $e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx$ e $\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx$. Calculando e_n :

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
 e_n &= \int_{-L}^L \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \right] - f(x) \right|^2 dx = \\
 &= \int_{-L}^L \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right)) + \sum_{k=1}^n (b_k \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right)) - f(x) \right|^2 dx = \\
 &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) + \dots + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - f(x) \right] \cdot \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{1x\pi}{L}\right) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) - f(x) \right] dx
 \end{aligned}$$

Calculando o produto e usando o Teorema 2.13 obteremos

$$\begin{aligned}
 &\int_{-L}^L \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dx + \frac{a_0}{2} \sum_{k=0}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) + \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx) - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \\
 &+ \frac{a_0 a_1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx + a_1 \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) + a_1 \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) \\
 &- a_1 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) f(x) dx + \frac{a_0 a_2}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) dx + a_2 \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) + \\
 &+ a_2 \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) - a_2 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) f(x) dx + \dots + \frac{a_0 a_n}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx + \\
 &\quad + a_n \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) + a_n \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) dx) - \\
 &- a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) f(x) dx + \frac{a_0 b_1}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx + b_1 \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx) + \\
 &b_1 \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx) - b_1 \int_{-L}^L \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) f(x) dx + \dots + \frac{a_0 b_n}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx + \\
 &\quad b_n \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx) + b_n \sum_{k=1}^n (b_k \int_{-L}^L \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx) - \\
 &b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) f(x) dx - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx - a_1 \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx - a_2 \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) dx - \dots - \\
 &- a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx - b_1 \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx - \dots - b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx + \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx
 \end{aligned}$$

mas

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = 0 \text{ e } \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx = 0 \text{ para } n = 1, \dots, n$$

Então os somatórios envolvendo essas integrais irão zerar, por outro lado, usando as relações de ortogonalidade mostradas na secção 2.3.2 obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dx - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + La_1^2 - a_1 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) f(x) dx + La_2^2 - a_2 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) f(x) dx + \dots + \\ & + La_n^2 - a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) f(x) dx + Lb_1^2 - b_1 \int_{-L}^L \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) f(x) dx + \dots + Lb_n^2 - \\ & - b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) f(x) dx - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx - a_1 \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx - \\ & - a_2 \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right) dx - \dots - a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx - \\ & - b_1 \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx - \dots - b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx + \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Dos coeficientes de Fourier de uma função f , sabemos que $\int_{-L}^L f(x) dx = La_0$, $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{px\pi}{L}\right) f(x) dx = La_p$ e $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{px\pi}{L}\right) f(x) dx = Lb_p$ para $p = 1, 2, \dots, n$.

Logo a expressão acima fica:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0^2 L}{2} - \frac{a_0^2 L}{2} + La_1^2 - La_1^2 + La_2^2 - La_2^2 + \dots + La_n^2 - La_n^2 + Lb_1^2 - Lb_1^2 + \dots + Lb_n^2 - Lb_n^2 - \\ & - \frac{a_0^2 L}{2} - La_1^2 - La_2^2 - \dots - La_n^2 - Lb_1^2 - \dots - Lb_n^2 + \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

E assim e_n ganha a forma

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

De maneira análoga podemos obter que \hat{e}_n ¹

$$\begin{aligned} \hat{e}_n &= \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx = \\ &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - La_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ em \hat{e}_n obtemos

$$\frac{L}{2} c_0^2 - La_0 c_0 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) + L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

¹Ver referência [4] onde se faz o cálculo de \hat{e}_n

Agora, somando e subtraindo $\frac{La_0^2}{2}$ e juntando os somatórios, teremos

$$\frac{L}{2}c_0^2 - La_0c_0 + \frac{La_0^2}{2} - \frac{La_0^2}{2} + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n [L(c_k^2 + d_k^2) - 2L(a_kc_k + b_kd_k) + L(a_k^2 + b_k^2) - L(a_k^2 + b_k^2)],$$

que podemos reescrever,

$$\frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 - \frac{La_0^2}{2} + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n [L(c_k - a_k)^2 - L(d_k - b_k)^2 - L(a_k^2 + b_k^2)].$$

Portanto

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Observe que o menor valor de \hat{e}_n será obtido quando $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ para $k = 1, 2, \dots, n$ e nessas condições \hat{e}_n torna-se e_n logo

$$e_n \leq \hat{e}_n,$$

e mais, podemos reescrever a igualdade

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

da seguinte forma

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{1}{L} \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

mas $\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \geq 0$. De onde obtemos a desigualdade de Bessel:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

4.1.3 Desigualdade de Minkowski

Uma desigualdade bastante útil é a desigualdade de Minkowski ou desigualdade do triângulo:

$$\left[\sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a norma de um vetor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada por, $\|a\| = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, assim

a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

De fato: Consideremos a identidade

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j + \sum_{j=1}^n b_j^2$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 &= \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j + \sum_{j=1}^n b_j^2 \leq \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n b_j^2 = \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left[\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

que é a desigualdade de Minkowski para vetores no \mathbb{R}^n .

Teorema 4.2 (Desigualdade de Minkowski para funções \mathcal{L}^2). *Consideremos as funções de quadrado integrável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então*

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, basta considerar a identidade

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b |f(x)||g(x)| dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

e proceder de forma análoga à demonstração anterior. ■

Proposição 4.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de quadrado integrável. Então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a) = \psi(b) = 0$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx = 0$$

Demonstração. Primeiramente suponhamos que f seja uma função limitada. Como f é de quadrado integrável segue-se da desigualdade

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

que é consequência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Essa desigualdade implica que f é absolutamente integrável e assim, pelo Teorema 3.3, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\psi(a) = \psi(b) = 0$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Sabemos que $|\psi(x)| \leq M$, onde M é uma constante, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.

Essas majorações nos permitem escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi(x)| |f(x) - \psi(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b (|f(x)| + |\psi(x)|) |f(x) - \psi(x)| dx < 2M \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora suponhamos que f não seja limitada, nesse caso suponha que f torne-se ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b .

Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta > 0$, tal que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

como já mostramos, existe uma função $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definindo a função

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq a + \delta, \\ \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta, \\ 0, & \text{se } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} &\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx = \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Uma consequência imediata dessa proposição, é que dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e de quadrado integrável em $[-L, L]$, então existe uma sucessão (ψ_n) de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódicas de período $2L$ com $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

4.2 Convergência Uniforme da Série de Fourier

Nesta secção, mostraremos quais as condições suficientes para que a série de Fourier convirja uniformemente.

Teorema 4.3. *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira de quadrado integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

Demonstração. Sejam

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})] \text{ e } \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b'_n \sin(\frac{n\pi x}{L})]$$

as séries de Fourier de f e f' respectivamente. No capítulo anterior mostramos na secção 3.4 que se f é periódica de período $2L$, derivável e $f' \in \mathcal{L}^1$, então

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx.$$

Mas, $\int_{-L}^L f'(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx = La'_n$ e $\int_{-L}^L f'(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx = Lb'_n$, logo

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} a'_n \text{ e } b_n = \frac{L}{n\pi} b'_n$$

Essas relações são válidas para uma f nas condições do teorema pois, $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$. Agora observemos que

$$\left| a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \right| \leq |a_n| \text{ e } \left| b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \right| \leq |b_n|,$$

assim a série de Fourier da f é majorada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \tag{4.3}$$

Então se mostrarmos a convergência da parte que envolve o somatório, podemos concluir pelo teste M de Weierstrass que a série de Fourier converge uniformemente.

Temos que as reduzidas de $\sum_n (|a_n| + |b_n|)$ são

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no \mathbb{R}^n , encontramos a majoração

$$\frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}},$$

novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no \mathbb{R}^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n 2(|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} &= \\ = \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

portanto a série em (4.3) é majorada por

$$\frac{a_0}{2} + \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

e pela desigualdade de Bessel temos

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\ \leq \frac{a_0}{2} + \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{a_0^2}{2} \right) &< \infty, \end{aligned}$$

pois f' é de quadrado integrável e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge. Logo, pelo teste M de Weierstrass a série em (4.3) converge. O que conclui a demonstração do teorema. ■

4.3 Retorno ao Problema de Condução do Calor em uma Barra

No capítulo 1 apresentamos o problema de condução de calor em uma barra onde utilizamos os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferen-

ciais. Chegamos a conclusão que solucionar o problema seria solucionar:

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{em } R \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

e com as condições de fronteiras citadas no capítulo 1. Consideramos inicialmente que as laterais estivessem mantidas a zero grau, isto é, $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e vimos que um possível candidato a solução seria

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K t} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (4.4)$$

e os c_n deveriam ser escolhidos de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right), \quad (4.5)$$

então não resta dúvidas os c_n devem ser os coeficientes de Fourier da função f dada em $[0, L]$ e estendida para o resto de \mathbb{R} de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$.

Assim,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx. \quad (4.6)$$

Mas, como já vimos a igualdade (4.5) só é satisfeita se f for contínua, $f(0) = f(L) = 0$ e f' for seccionalmente contínua. Antes de mostrarmos que isto realmente acontece, temos que definir o que é uma solução do Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF).

$$(PVIF) \begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{em } R \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Consideremos as seguintes regiões do plano

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\},$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$$

e

$$\hat{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t > 0\}.$$

Definição 4.2 (Definição (I)). *Uma função $u : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF(1) se ela for contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em \mathcal{R} e satisfizer às três relações em (1).*

Observação 4.1. A definição (I) exige que a função $f(x)$ seja uma função contínua e que $f(0) = f(L) = 0$, mas existem casos na Física em que isto não ocorre. Para estes casos consideremos a Definição (II).

Definição 4.3 (Definição (II)). Uma função contínua $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do **PVIF(1)**, se

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx. \end{cases}$$

para toda função ψ seccionalmente contínua em $[0, L]$.

A definição (II) é uma extensão da definição (I), isto é, se o **PVIF** tiver solução no sentido (I), então esta solução é também no sentido (II):

De fato: Consideremos uma função $\psi(x)$ seccionalmente contínua e sejam $I_j, j = 1, 2, \dots, k$, intervalos disjuntos que formam uma partição de $[0, L]$ e tais que ψ seja contínua em cada um deles. Assim basta provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx.$$

Note que para cada I_j a função $u(x, t) \psi(x)$ é uniformemente contínua no conjunto $\{(x, t) : x \in I_j, 0 \leq t \leq 1\}$ e como u é solução no sentido (I) temos que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{I_j} u(x, t) \psi(x) dx = \int_{I_j} f(x) \psi(x) dx$$

e como I_j formam uma partição para $[0, L]$ então a igualdade acima é válida para $[0, L]$.

Teorema 4.4. Se f for de quadrado integrável em $[0, L]$, então a expressão (4.4) define uma função em $\widehat{\mathcal{R}}$ que é solução no sentido (II).

Demonstração. Queremos mostrar que (4.4) satisfaz

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx. \end{cases}$$

Inicialmente devemos mostrar que a expressão $\sum_n c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ define uma função contínua em $\widehat{\mathcal{R}}$. Para isso basta mostrarmos que a série

$$\sum_n c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

converge uniformemente em cada sub-retângulo

$$\bar{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L, 0 < t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\}$$

observe que a série acima é majorada por

$$\sum_n M e^{-\alpha n^2}$$

onde $\alpha = \frac{K t_1 \pi^2}{L^2}$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M e^{-\alpha(n+1)^2}}{M e^{-\alpha n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha(2n+1)}}{e^{-\alpha(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha(2n+1)}} = 0 < 1,$$

assim pelo teste da razão obtemos que $M \sum_n e^{-\alpha n^2}$ converge e pelo teste M de Weierstrass a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ converge uniformemente em cada sub-retângulo $\bar{\mathcal{R}}_{12}$ e isso implica (pelo teorema 2.12) que $u(x, t)$ é uma função contínua em $\widehat{\mathcal{R}}$.

Mostraremos que as derivadas u_t e u_{xx} existem e são contínuas em $\bar{\mathcal{R}}_{12}$.

Note que

$$u_t = \sum_n c_n \left[-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$u_{xx} = \sum_n c_n \left[\frac{-n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

assim $u_t = K u_{xx}$ o que mostra que $u(x, t)$ satisfaz a equação do calor em $\widehat{\mathcal{R}}$.

Agora observemos que a série

$$\sum_n c_n \left[-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

é majorada pela série $\sum_n n^2 e^{-\alpha n^2}$ onde $\alpha = \frac{\pi^2}{L^2} K t_1$. Aplicando o teste da Razão obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 e^{-\alpha(n+1)^2}}{n^2 e^{-\alpha n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{e^{\alpha(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{e^{\alpha(2n+1)}} = 0.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-an^2}$ converge e pelo Teste M de Weirstrass a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{-n^2 \pi^2 K}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

converge uniformemente. Logo u_t e u_{xx} existem e são contínuas em $\bar{\mathcal{R}}_{12}$.

Quanto as condições de fronteira, observemos que

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin(0) = 0$$

e

$$u(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin(n\pi) = 0.$$

Resta mostrar que para qualquer ψ seccionalmente contínua em $[0, L]$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx,$$

para isso seja b_n os coeficientes de Fourier de $\psi(x)$ estendida como uma função ímpar e periódica de período $2L$.

Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \psi(x) dx.$$

De fato : Sejam

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ e } \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Então

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \psi(x) dx &= \int_0^L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} dx = \\ &= \int_0^L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [c_n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)] \right\}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 2.13 obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n b_n \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] = \sum_n c_n b_n \frac{L}{2}$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \psi(x) dx.$

Por outro lado

$$\int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx,$$

mas $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)$ para $t \geq 0$ fixado converge uniformemente. Usando o Teorema 2.12 para obter

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \frac{1}{2} \frac{L}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx = \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\psi(x)dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} b_n, \quad t > 0 \end{aligned}$$

daí

$$\int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \frac{L}{2} \sum_n c_n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}.$$

Finalmente observamos que

$$\left| \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |b_n| \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right] < \infty,$$

onde usamos a desigualdade $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ que é consequência imediata de $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ e a desigualdade de Bessel para garantir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Portanto a

série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}$ define uma função contínua, para $t \geq 0$, consequentemente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\psi(x)dx$$

assim

$$\frac{2}{L} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\psi(x)dx,$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \int_0^L f(x)\psi(x)dx$$

portanto $u(x, t)$ é solução no sentido (II). ■

Teorema 4.5. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e tal que a derivada f' exista em $[0, L]$ e seja de quadrado integrável. Então a expressão (4.4) define uma função contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, que é solução do **PVIF(1)** no sentido(I).*

Demonstração. Como f é contínua, então f e $|f|$ são integráveis, logo podemos aplicar o teorema anterior e concluir que $u(x, t)$ é solução no sentido (II).

Daí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx$$

para qualquer ψ seccionalmente contínua em $[0, L]$. Basta tomarmos $\psi \equiv 1$ e se provarmos que a expressão (4.4) define uma função contínua para $t \geq 0$, podemos concluir que $u(x, 0) = f(x)$.

Notemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é majorada por $\sum_n |c_n|$, mas

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando a formula de integração por partes, obtemos

$$Lc_n = -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$Lc_n = -\frac{L}{n\pi} [f(L) \cos(n\pi) - f(-L) \cos(-n\pi)] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

mas cosseno é par e a periodicidade de f implica que $f(L) = f(-L)$, donde

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

o que implica

$$c_n = \frac{L}{n\pi} d_n,$$

onde d_n são os coeficientes de Fourier de $f'(x)$ estendida como uma função par e periódica de período $2L$. Com o auxílio da desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{L}{n\pi} d_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{2n^2\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

onde o primeiro somatório é uma série p com $p = 2$ que converge e a segunda converge devido a desigualdade de Bessel, $\sum d_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f'|^2 dx$, logo pelo teste de Weirstrass a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ converge uniformemente e pelo teorema 2.11 concluimos que 4.4 é uma função continua para $t \geq 0$. ■

4.3.1 Condução do Calor com as Extremidades da Barra Isolada Termicamente

Consideremos agora uma barra com as superfícies laterais e extremidades isoladas termicamente. O problema matemático é determinar uma função $u(x, t)$ que satisfaça o problema abaixo

$$PVIF(2) \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } \mathcal{R} \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para resolvê-lo usaremos o método de separação de variáveis. Fazendo $u(x, t) = F(x)G(t)$ obteremos novamente as Equações Diferenciais Ordinárias

$$G'(t) - \sigma KG(t) = 0, t \geq 0 \quad (p)$$

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, 0 \leq x \leq L \quad (pp),$$

onde o parâmetro σ deve ser determinado de modo que

$$F'(0) = F'(L) = 0.$$

Resolvendo a equação (pp).

(i) Se $\sigma > 0$, então a solução de (pp) é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x},$$

daí

$$F'(x) = c_1 \sqrt{\sigma} x e^{\sqrt{\sigma}x} - c_2 \sqrt{\sigma} x e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

e c_1 e c_2 deverão satisfazer o sistema

$$\begin{cases} F'(0) = c_1 \sqrt{\sigma} 0 e^0 - c_2 \sqrt{\sigma} 0 e^0 = 0 \\ F'(L) = c_1 \sqrt{\sigma} L e^{\sqrt{\sigma}L} - c_2 \sqrt{\sigma} L e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = c_2 = 0$ que não interessa;

(ii) Se $\sigma = 0$, então a solução de (pp) é da forma

$$F(x) = c_1 x + c_2$$

sem dificuldades vemos que $c_1 = c_2 = 0$ que não interessa.

(iii) Se $\sigma < 0$ fazemos $\sigma = -\lambda^2$, e a solução é da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

daí

$$F'(x) = -c_1 \lambda \sin(\lambda x) + c_2 \lambda \cos(\lambda x)$$

e c_1 e c_2 deverão satisfazer o sistema

$$\begin{cases} F'(0) = -c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0 & \rightarrow & c_2 = 0, \\ F'(L) = -c_1 \lambda \sin(\lambda L) + c_2 \lambda \cos(\lambda L) = 0 & \rightarrow & -\lambda c_1 \sin(\lambda L) = 0. \end{cases}$$

Assim, os autovalores são dados por

$$\sigma_n = \frac{-n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as autofunções são

$$F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e como já sabemos, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(t) = e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}}$$

é solução de (p). Assim, encontramos uma família enumerável de soluções do **PVIF**(2)

$$u_n(x, t) = e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e pelo princípio da superposição ficamos motivados a tomar uma combinação linear infinita, isto é,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde os coeficientes c_n devem ser obtidos de modo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

e portanto eles devem ser os coeficientes de Fourier da f definida em $[0, L]$ estendida de modo a ser par e periódica de período $2L$, isto é,

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Claramente u define uma função contínua em $\hat{\mathcal{R}}$ e infinitamente diferenciável em \mathcal{R} , u satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira. Quanto a condição inicial deve-se fazer algumas suposições:

(i) Suponha f contínua, f' existe e seja seccionalmente contínua. Então

$$c_n = \frac{-L}{n\pi} d_n,$$

onde d_n são os coeficientes de f' .

Assim, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{L}{n\pi} d_n \right| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

As duas últimas séries convergem, a primeira em virtude de ser uma série p com $p = 2$ e a outra em virtude da desigualdade de Bessel.

(ii) Se f não for contínua, então suponha que f seja de quadrado integrável e pelo Teorema 4.4 $u(x, t)$ é solução no sentido (II).

4.3.2 Condições de Fronteira Não-homogêneas

Consideremos uma barra submetida a temperaturas não nulas nas extremidades. Então temos de determinar $u(x, t)$ tal que

$$PVIF(3) \begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) = h_0(t), \quad u_x(L, t) = h_1(t) & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } 0 < x < L, \end{cases}$$

onde f, h_0 e h_1 são funções dadas.

Para resolvermos esse problema vamos fazer uma mudança de variável, para reduzi-lo a algum dos problemas já estudados.

Suponha que possamos achar uma $v(x, t)$ de classe C^2 em $\bar{\mathcal{R}}$ tal que

$$v(0, t) = h_0(t) \text{ e } v(L, t) = h_1(t).$$

Digamos que u seja solução do PVIF(3) e fazendo $w = u - v$ obtemos que

$$w_t = u_t - v_t, \quad w_{xx} = u_{xx} - v_{xx},$$

daí

$$u_t = w_t + v_t, u_{xx} = w_{xx} + v_{xx}$$

como u satisfaz a equação do calor, temos

$$w_t + v_t = Kw_{xx} + Kv_{xx} \Rightarrow w_t = Kw_{xx} + Kv_{xx} - v_t$$

Fazendo $g(x, t) = Kv_{xx} - v_t$, obtemos

$$w_t = Kw_{xx} + g(x, t).$$

Por outro lado,

$$w(0, t) = u(0, t) - v(0, t) = h_0(t) - h_0(t) = 0,$$

$$w(L, t) = u(L, t) - v(L, t) = h_1(t) - h_1(t) = 0,$$

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - v(x, 0).$$

Portanto, reescrevemos o **PVIF**(3) do seguinte modo

$$\begin{aligned} w_t &= Kw_{xx} + g(x, t) && \text{em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0 && \text{para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x, 0) && \text{para } 0 < x < L. \end{aligned} \quad (4)$$

Assim, se conseguirmos determinar uma v tal que $v_t = Kv_{xx}$ teremos que $g(x, t) \equiv 0$ e recaímos no **PVIF**(1) que já estudamos.

4.3.3 Equação do Calor Não-homogênea

Voltemos a dedução da equação do calor em uma barra onde consideramos a temperatura das extremidades mantidas a zero grau e suponhamos que a barra tenha uma fonte de calor interna. A dedução da equação do calor será a mesma utilizada até o momento em que vamos calcular a quantidade de calor entre x_0 e $x_{0+\delta}$ no intervalo de tempo t_0 e $t_{0+\delta}$. Na expressão

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt$$

deve-se adicionar a quantidade de calor fornecida pela fonte de calor interna que é dada por

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x, t) dx dt.$$

Assim a quantidade de calor para a barra entre x_0 e $x_{0+\delta}$ no intervalo de tempo t_0 e $t_{0+\delta}$ é a seguinte

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x, t) dx dt,$$

isto é,

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)] dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x, t) dx dt$$

Após este ajuste prosseguimos de maneira análoga ao capítulo 1 e encontramos a equação:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t) dx dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x, t) dt dx,$$

ou seja,

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [ku_{xx}(x, t) + g(x, t)] dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x, t) dt dx.$$

Portanto, a equação do calor para este caso é

$$u_t = Ku_{xx} + g(x, t),$$

onde $g(x, t)$ é o termo fonte. Esta equação é conhecida como equação do calor não-homogênea.

Quanto as condições inicial e de fronteira podem existir várias, diferentes até das abordadas no capítulo 1. Mas a nível de experiência, estudemos o **PVIF** a seguir

$$PVIF(4) \begin{cases} u_t = u_{xx} + g(x, t) & \text{em } \mathcal{R} \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para resolvemos o **PVIF**(4) vamos utilizar o método conhecido como variação dos parâmetros. Suponhamos que $g \equiv 0$, então a solução será da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{K n^2 \pi^2}{L^2} K t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

então vamos tentar a solução do **PVIF**(4) na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.7}$$

Percebe-se que a equação (4.7) satisfaz as condições de fronteiras. Observemos também que

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) n^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

assim obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -K \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) n^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + g(x, t),$$

agora suponhamos que para cada $t > 0$, $g(x, t)$ possa ser representada por sua série de Fourier (de senos), isto é,

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Donde obtemos a equação diferencial para $c_n(t)$

$$c'_n(t) = -\frac{K\pi^2 n^2}{L^2} c_n(t) + g_n(t), \quad t > 0.$$

e da condição inicial temos que

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4.8)$$

e assim encontramos que a solução para $c_n(t)$ é

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-\frac{K\pi^2 n^2}{L^2} t} + e^{-\frac{K\pi^2 n^2}{L^2} t} \int_0^t g_n(s) e^{\frac{K\pi^2 n^2}{L^2} s} ds.$$

Portanto a solução do PVIF(4) tem por solução $u(x, t)$ dada por (4.7) com os coeficientes c_n dados por (4.8)

Na próxima secção mostraremos a unicidade do PVIF(1).

4.4 Unicidade de Solução do PVIF(1)

Teorema 4.6 (Princípio do Máximo-Mínimo). *Seja $u(x, t)$ uma função contínua no retângulo $\bar{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$, e tal que $u_t = Ku_{xx}$, para $x_1 < x < x_2$ e $t_1 < t < t_2$. Então o máximo de u é assumido em um dos seguintes lados de $\bar{\mathcal{R}}_{12}$:*

BIBLIOTECA

$$l_1 = \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\}, l_2 = \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\}, l_3 = \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Demonstração: Seja M o máximo de u em $\bar{\mathcal{R}}_{12}$ e m o máximo de u em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Queremos mostrar que $M = m$.

Suponhamos por contradição, que $M > m$, já que não podemos ter $M < m$, pois $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \subset \bar{\mathcal{R}}_{12}$.

Seja $P(x_0, t_0)$ um ponto de $\bar{\mathcal{R}}_{12} - (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$, onde u assume seu valor máximo.

Definamos a função

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2}(x - x_0)^2,$$

onde $L = x_2 - x_1$. Como $u(x, t) < m$ em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ temos

$$v(x, t) < m + \frac{M - m}{4L^2}L^2 = \frac{4m + M - m}{4} = \frac{3m}{4} + \frac{M}{4} < \frac{3M}{4} + \frac{M}{4} = M$$

e

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M.$$

Mas v não assume seu máximo neste ponto, assim consideremos que o máximo de v é assumido em $\bar{\mathcal{R}}_{12} - (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ em um ponto $Q(\bar{x}, \bar{t})$.

Pela propriedade de máximos e mínimos de funções de várias variáveis, devemos ter que

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0 \quad e \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0. \quad (4.9)$$

Por outro lado, derivando v no ponto Q obtemos

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t})$$

$$v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - m}{2L^2}$$

mas u satisfaz a equação do calor, assim

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = K \left[v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{M - m}{2L^2} \right] < K v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0,$$

pois, $M > m$. O que é um absurdo pois $v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$ e assim temos que $M = m$.

Para vermos que o mínimo também é atingido, basta observar que $-u$ satisfaz à equação do calor e que o mínimo de u é igual a $-\max(-u)$.

Corolário 4.2. *Seja f uma função dada em $[0, L]$. Então, a solução do **PVIF**(1) no sentido da definição (I) é única, caso exista.*

Demonstração: Sejam $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ duas soluções do **PVIF**(1).

Considere $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ queremos mostrar que $v \equiv 0$ como u_1 e u_2 são contínuas, então v também será. Observemos ainda que as derivadas parciais de v são

$$\begin{aligned}v_t &= (u_1)_t - (u_2)_t, \\v_{xx} &= (u_1)_{xx} - (u_2)_{xx},\end{aligned}$$

mas u_1 e u_2 satisfazem a equação do calor. Logo

$$v_t = K(u_1)_{xx} - K(u_2)_{xx} = K[(u_1)_{xx} - (u_2)_{xx}] = Kv_{xx},$$

daí v também satisfaz a equação do calor.

E mais,

$$v(0, t) = u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0 - 0 = 0$$

e

$$v(L, t) = u_1(L, t) - u_2(L, t) = 0 - 0 = 0$$

logo v satisfaz as condições de fronteira do **PVIF**(1). A condição inicial é.

$$v(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Assim devemos encontrar v tal que

$$\begin{cases}v_t = Kv_{xx}, \\v(0, t) = v(L, t) = 0, \\v(x, 0) = 0.\end{cases}$$

Pelo Teorema do Máximo-Mínimo teremos que o máximo e o mínimo serão assumidos por v em $v(0, t)$, $v(L, t)$ ou $v(x, 0)$ e em ambos os locais v é nula. Portanto $v \equiv 0$, o que mostra a unicidade da solução do **PVIF**(1).

Corolário 4.3. *Seja f uma função de quadrado integrável em $[0, L]$. Então a solução do **PVIF**(1) no sentido da definição(II) é única*

Demonstração: Definamos duas soluções u_1 e u_2 no sentido da definição (II). Façamos $v = u_1 - u_2$ e o resto da demonstração segue-se com um raciocínio análogo ao da demonstração anterior.

Referências Bibliográficas

- [1] Eves, Howard *Introdução à História da Matemática* / Howard Eves; Tradução: Hygino H. Domingues - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004
Tradução de: Ah Introduction to the History of Mathematics.
- [2] Fiqueredo, Djairo Guedes de *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009 Blücher Ltda, 1974.
- [3] Guidorizzi, Hamilton Luiz *Um Curso de Cálculo*. Volume 4. 5ª ed. Rio de Janeiro. LTC. 2002.
- [4] Holetz, MELISSA SAMANTA. *Método de Fourier para a resolução de Problemas de Valores Inicial e de Fronteira para a Equação do Calor*, Disponível em http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97166/Melissa_Samanta_Holets.PDF.sequence=1
(Acessado em 20/12/2013.)
- [5] Iório jr, Rafael, Iório, Valeria de Magalhães *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. 2ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2010.
- [6] LIMA, E.L. *Análise Real volume 1. Funções de uma variável* 11ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2012.
- [7] Santos, Reginaldo J. *Equações Diferenciais Parciais : Uma Introdução*. versão Preliminar. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/regi/eqdif/eqparc.pdf>
(Acessado em 26/12/2013.)

- [8] VILCHES, MAURICIO A. *Equações Diferenciais: Métodos de Séries*. Rio de Janeiro: Departamento de Análise - IME UERJ, Disponível em <http://aiecp.files.wordpress.com/2012/07/calculo4.pdf>

(Acessado em 26/12/2013.)