



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Fagner da Silva Lima

TEOREMA EGREGIUM:

a invariância da curvatura gaussiana.

Cuité-PB

2013

Fagner da Silva Lima

TEOREMA EGREGIUM:

a invariância da curvatura gaussiana.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB

2013



Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

L732t Lima, Fagner da Silva.

Teorema Egregium: a invariância da curvatura gaussiana. / Fagner da Silva Lima – Cuité: CES, 2013.

48 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) –
Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2013.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Geometria diferencial. 2. Superfície regular. 3. Teorema Egregium de Gauss. I. Título.

CDU 514.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Fagner da Silva Lima

Teorema Egregium: a invariância da curvatura gaussiana

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.


A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

Banca Examinadora


Prof. Gerardo de Oliveira Filho


Prof.^a Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)


Prof.^a Márcia Cristina Silva Brito
(Coorientadora)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Agradecimentos

À Deus, por amparar nos momentos difíceis, me encorajar, mostrar caminhos nas horas duvidosas e suprir minhas necessidades.

À minha mãe Jacira Alves, por me apoiar sempre deste o primário, seus conselhos foram fundamentais.

Aos meus irmãos Robson, José Gilberto, Eduardo e minha irmã Edilene, pelo incentivo e apoio.

À minha esposa Eliene e meu filho Luís Fernando, pela compreensão no momento de ausência, ao longo deste quatro anos, compreendo que dediquei muito do meu tempo a graduação.

A todos meus amigos, sem distinção alguma, que contribuíram de forma direta e indireta para execução deste trabalho.

Aos companheiros de curso que prefiro chamá-los de Irmãos (Bosoerg, Elizangela, Jéssica, Leonardo, Zé Filho) passamos por muitos momentos legais, e muitos outros difíceis (como pensar em desisti).

À ONG Nova Baraúna, na pessoa de Pedro Souto, por acreditar que em mim havia algum talento e investi no início da formação.

Aos todos professores do curso de graduação em Licenciatura em Matemática - CES/UFCG, pelos ensinamentos, experiências por mim aprendidas ao longo desta formação.

Ao professor Geraldo de Oliveira Filho, pela disponibilidade de compor a banca além de suas valorosas contribuições.

Em especial, a minha orientadora professora Maria Gisélia Vasconcelos, por sempre me encorajar nos momentos difíceis, por dedicar seu precioso tempo, pela paciência, cobranças, exigências, compromisso com o resultado deste trabalho.

Em especial ainda, a minha coorientadora professora Márcia Cristina Silva Brito, que no momento crucial não deixou-me abandonar este trabalho. Além do conhecimento adquirido nas disciplinas por ela ministradas, bem como me mostrar a Matemática “viva”, na Geometria Diferencial.

Dedico essa monografia, à minha família pelo apoio, as pessoas que sempre acreditaram no meu esforço, aos meus amigos, em especial a minha esposa Eliene e filho Luís Fernando, este é o resultado da confiança de vocês.

“ A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida. ”

Jacques Bernoulli

Resumo

Neste trabalho iremos falar sobre conceitos relacionados a geometria diferencial, como Superfície Regular, Primeira e Segunda forma fundamental, Aplicação de Gauss, Isometria e de forma especial do Teorema Egregium de Gauss, provado por Carl Gauss (1827), que é considerado, pela extensão de suas consequências, um dos fatos mais importantes da geometria diferencial.

Palavras-chave: Superfície Regular. Teorema Egregium de Gauss. Geometria Diferencial.

Abstract

In this paper we will discuss concepts related to differential geometry, such as Surface Regular, First and Second fundamental form, Application of Gauss, Isometry and more specifically of the Theorem egregium Gauss, shown by Carl Gauss (1827), which is considered, by extension consequences, one of the most important facts of differential geometry.

Keywords: Surface Regular. Theorem Egregium Gauss. Differential Geometry.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 Superfícies Regulares	12
1.2 Plano Tangente	19
1.3 Aplicação Normal de Gauss	24
2 Isometrias	31
2.1 Isometrias	31
3 Teorema Egregium de Gauss	40
Referências Bibliográficas	47

UFUg
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Introdução

Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 - Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855), foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica.

Alguns o referem como *princeps mathematicorum* (em latim, “o príncipe da matemática” ou “o mais notável dos matemáticos”) e um “grande matemático desde a antiguidade.” Gauss é um dos mais influentes na história da matemática. Ele refere-se à matemática como “a rainha das ciências”.

Em 1827, Gauss publicou a sua famosa obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*. Nesta publicação, Gauss apresenta, entre outras coisas, uma demonstração de um teorema que o próprio designou de *Egregium*.

O Teorema Egrégio (do latim *Theorema Egregium*, “teorema notável”) é um resultado fundamental em geometria diferencial que trata da curvatura das superfícies. O teorema afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície fica completamente determinada pela medição de ângulos, distâncias e suas proporções na própria superfície, sem qualquer referência à forma particular segundo a qual a superfície esteja situada no ambiente do espaço tridimensional euclidiano. Assim, a curvatura gaussiana é um invariante intrínseco das superfícies.

O teorema é “notável” porque a definição inicial da curvatura gaussiana faz uso direto da posição que a superfície ocupa no espaço. Deste modo, é bastante surpreendente o fato de que o resultado final não depende de sua imersão apesar de todas as deformações submetidas.

Em termos matemáticos modernos, o teorema pode ser enunciado como segue: a

curvatura gaussiana de uma superfície é invariante sob isometrias locais.

Uma esfera de raio R tem uma curvatura gaussiana constante que é igual a $1/R^2$. Ao mesmo tempo, a curvatura gaussiana de um plano é zero. Como consequência do teorema egrégio, não se pode embrulhar uma esfera com um pedaço de papel sem amassá-lo. Reciprocamente, a superfície de uma esfera não pode ser desdobrada em uma superfície plana, sem distorcer as distâncias. Se alguém fosse pisar em uma casca de ovo vazia, suas bordas teriam que se quebrar ao expandir antes de poder ser achatada. Matematicamente falando, uma esfera e um plano não são isométricos, nem mesmo localmente. Este fato é de grande importância para a cartografia: ele implica que é impossível criar um mapa perfeito da Terra, mesmo que seja para um pedaço pequeno de sua superfície. Portanto toda projeção cartográfica distorcerá necessariamente pelo menos algumas distâncias.

O catenóide e o helicóide são duas superfícies bem diferentes em sua aparência. Apesar disso, pode-se deformar continuamente cada uma delas na outra: elas são localmente isométricas. Segue do teorema notável que sob esta deformação a curvatura gaussiana em quaisquer dois pontos correspondentes do catenóide e do helicóide é sempre a mesma. Desse modo uma isometria consiste simplesmente de torcer e entortar uma superfície sem qualquer amassamento ou rasgo interno, em outras palavras, sem qualquer tensão, compressão ou cisalhamento extra.

Neste trabalho daremos a definição de superfície regular em \mathbb{R}^3 . Uma superfície regular, intuitivamente, é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos dessa figura. Tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade.

Como posso fazer geometria, ou seja, medir distâncias, ângulos ou áreas dentro de uma superfície, investigamos os aspectos fundamentais da geometria clássica das superfícies. Talvez a mais importante delas seja a primeira forma fundamental.

Fazemos um estudo da Aplicação de Gauss, instrumento fundamental para o estudo das propriedades invariantes por isometria. Posteriormente, introduz-se uma maneira de medir a curvatura de uma superfície. A diferencial da aplicação Gauss é um operador autoadjunto e este fato permite associá-la a uma forma quadrática. A esta forma chamamos de segunda forma fundamental. As curvaturas principais são

os autovalores da diferencial da aplicação Gauss. A partir delas é possível definir duas invariantes importantes associados com esta aplicação: a curvatura de Gauss e a curvatura média.

Apresentamos a noção de isometria entre superfícies, como uma aplicação que preserva a primeira forma fundamental. Isto significa que a aplicação preserva os conceitos métricos definidos a partir da primeira forma, ou seja, comprimentos, ângulos e áreas. O trabalho termina com a prova do Teorema Egregium de Gauss, um dos teoremas mais importantes do século XIX. Este teorema mostra que a curvatura de Gauss é um conceito intrínseco de uma superfície. Para demonstrar este resultado clássico, é necessário introduzir os chamados símbolos de Christoffel - símbolos que apenas dependem dos coeficientes da primeira forma fundamental e das suas derivadas.

A descoberta de Gauss foi um divisor de águas no estudo de superfícies. Ele mostrou que algumas propriedades das superfícies não dependem do espaço onde elas estão, somente da sua natureza intrínseca. Após a descoberta de Gauss, os matemáticos viram que não era necessário pensar que uma superfície estava dentro de um espaço maior (como o espaço tridimensional em que vivemos, por exemplo), e isso foi um grande passo em direção a definição de variedades, objetos nos quais se faz geometria atualmente. Isso deixa a geometria ser aplicada a problemas diversos, desde economia à física teórica.

Capítulo 1

Preliminares

Inicialmente, definiremos superfície regular, e com base nesta definição, introduziremos a primeira forma fundamental, a aplicação de Gauss e alguns conceitos da geometria intrínseca das superfícies. As referências para os estudos neste trabalho são [2], [10] e [11].

1.1 Superfícies Regulares

Faremos de início uma breve discussão sobre curvas e em seguida estabeleceremos alguns resultados sobre superfícies regulares.

Definição 1.1. *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo aberto em \mathbb{R} . Escrevemos,*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

com $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$. Esta curva é dita **curva regular**, se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

A partir desse momento, omitiremos o termo diferenciável apenas por simplicidade. Dado $t_0 \in I$, o comprimento de arco de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 é, por definição,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Definição 1.2. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ e um homeomorfismo diferenciável $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto, tal que, para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é denominada uma **parametrização** de S no ponto p e a vizinhança $V \cap S$ se denomina vizinhança coordenada, (ver Figura 1.1).

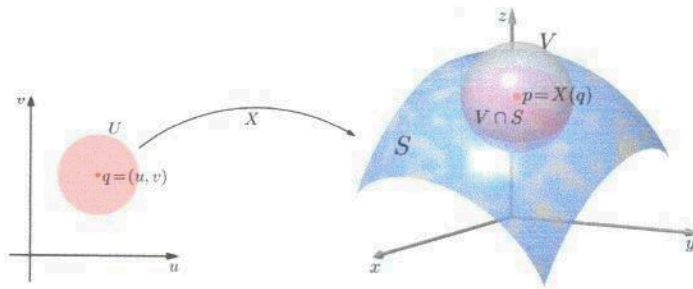


Figura 1.1: Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$

Vamos calcular a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , com coordenadas (u, v) e $\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 , com coordenadas (x, y, z) .

Seja $q = (u_0, v_0)$. O vetor e_1 é tangente à curva $u \rightarrow (u, v_0)$ cuja imagem por X é a curva na superfície S

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

chamada **curva coordenada** (ver. Figura 1.2) $v = v_0$. O vetor tangente desta curva tem em $X(q)$ é o vetor

$$dX(e_1) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) = X_u.$$

Analogamente, o vetor tangente à curva coordenada $u = u_0$

$$v \rightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) = \frac{\partial X}{\partial v}(q) = X_v.$$

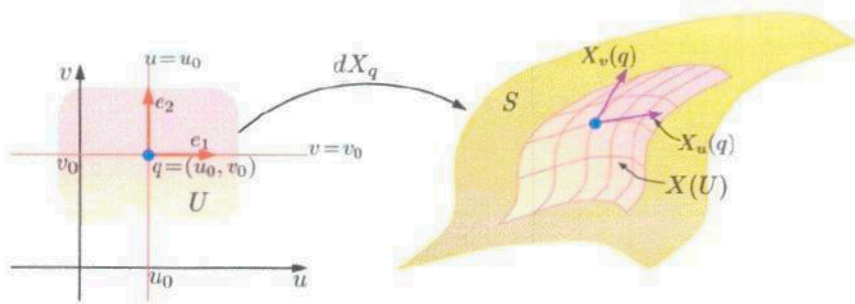


Figura 1.2: Curvas Coordenadas

Portanto, a matriz da aplicação linear dX_q (que designamos pela mesma notação para simplificar) nas bases canônicas do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Observação 1.1. Para a aplicação diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ser injetiva, significa que os dois vetores coluna da matriz Jacobiana acima são linearmente independentes, ou seja, que

$$X_u \wedge X_v \neq 0$$

ou ainda, que um dos determinantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

é diferente de zero.

UFCCG / BIBLIOTECA

Exemplo 1.1. (*Superfícies de Revolução*) Sejam π um plano, $L \subset \pi$ e $C \subset \pi$ uma curva regular que não intersecta a reta L . A superfície girando a curva C em torno da reta L é chamada **Superfície de Revolução** com geratriz C e **eixo de revolução**

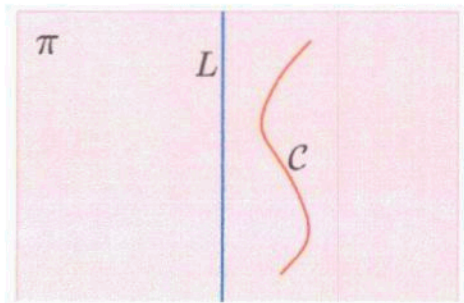


Figura 1.3: Curva C e reta L no plano π

a reta L . Os círculos descritos pelos pontos de C são os **paralelos** de S e as várias posições de C , sobre a superfície S (intersecções de S com os planos que contem o eixo de revolução) são denominadas **meridianos** de S .

Vamos considerar o caso em que $\pi =$ plano xz e $L =$ eixo Oz .

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha(a, b) = V \cap C$, $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $f(v) > 0$, uma parametrização de C , onde V é um aberto de \mathbb{R}^3 , e designamos por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz .

Consideramos a aplicação $X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow S$ dada por:

$$X(u, v) = (f(u) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

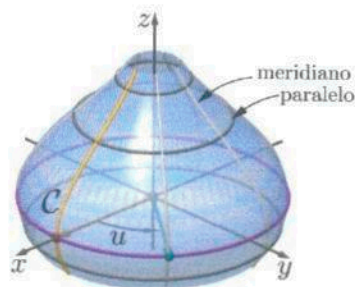


Figura 1.4: As curvas $v = \text{const.}$ são os paralelos e as curvas $u = \text{const.}$ são os meridianos de S .

- $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S , onde $U = (0, 2\pi) \times (a, b)$.

De fato:

1. $X(U) = S \cap (\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \text{ e } x \geq 0\})$ é um aberto de S .
2. X é diferenciável, pois $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.
3. $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2(u, v) &= \|(-f(v) \operatorname{sen} u, f(v) \cos u, 0) \wedge (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{sen} u, g'(v))\|^2 \\ &= \|(f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \operatorname{sen} u, -f(v)f'(v))\|^2 \\ &= f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2) > 0, \end{aligned}$$

para todo $(u, v) \in U$.

4. $X : U \rightarrow X(U)$ é injetora e $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua.

De fato, seja $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v))$. Então, $z = g(v)$ e $f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b))$, $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, é um homeomorfismo, v é determinado de maneira única por $v = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$ e é uma função contínua de $\sqrt{x^2 + y^2}$ e z , e portanto, uma função contínua de x, y e z .

Além disso, como $\cos u = \frac{x}{f(v)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\operatorname{sen} u = \frac{y}{f(v)} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, e $u \in (0, 2\pi)$, o parâmetro u é determinado de modo único. Logo, X é injetora.

Para provar que X^{-1} é contínua, temos que mostrar ainda que u é uma função contínua de x, y e z .

Seja $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)) \in X(U)$. Como $u \in (0, 2\pi)$ temos que $\frac{u}{2} \in (0, \pi)$ e, portanto, $\cotg \frac{u}{2}$ está definida, para todo $u \in (0, 2\pi)$ e

$$\cotg \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 - \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}.$$

Observe que $\sqrt{x^2 + y^2} - x \neq 0$, pois $X(U) \subset \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$.

Então $u = 2 \cotg \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right)$ é uma função contínua de x, y e z .

Como S pode ser coberta inteiramente por parametrizações similares, segue-se que S é uma superfície regular.

A esfera e o catenóide são exemplos de superfície de revolução.

Exemplo 1.2. Seja S o subconjunto de \mathbb{R}^3 , dado pela imagem da aplicação $X : (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), a \neq 0$$

Tal subconjunto é chamado de **Helicóide** (ver Figura 1.5). Demonstraremos que S é regular.

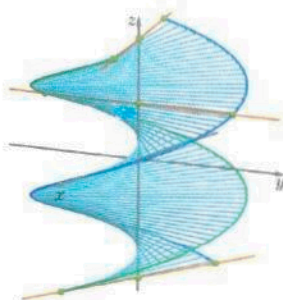


Figura 1.5: Helicóide

A inversa da aplicação contínua diferenciável X , dada por

$$X^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{z}{a}, x \cos \left(\frac{z}{a} \right) + y \sin \left(\frac{z}{a} \right) \right),$$

é contínua. Daí, concluímos que X é um homeomorfismo diferenciável.

Observamos que a diferencial de X é injetiva. De fato,

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 = v^4 + a^2 > 0.$$

Logo algum dos determinantes Jacobianos é não - nulo. Portanto o helicóide é uma superfície regular.

Pela definição de superfície regular, cada ponto p de uma superfície regular S pertence a uma vizinhança coordenada. Para falarmos em diferenciabilidade de uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ num ponto p sobre a superfície, vamos tomar uma vizinhança de p , com coordenadas u e v , e f será dita diferenciável em p se sua expressão em termos das coordenadas admite derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Porém, o mesmo ponto p pode pertencer á várias vizinhanças coordenadas, logo poderíamos eleger outra parametrização em uma vizinhança de p . Para que a definição de superfície regular tenha sentido, é necessário que esta não dependa da parametrização escolhida.

Para isto, é fundamental mostrar que quando um ponto p pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u, v) e (ξ, η) , é possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

Seja p um ponto de uma superfície regular S , e sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas parametrizações de S , tais que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$.

Como X e Y são homeomorfismos, temos que W é um aberto de S e, portanto $X^{-1}(W)$ e $Y^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^2 .

Se X e Y são dadas por

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

$$Y(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in V,$$

então a **mudança de parâmetros** $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ dada por

$$h(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)),$$

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in Y^{-1}(W),$$

é um homeomorfismo com inversa $h^{-1} = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}$,

$$h^{-1}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v)).$$

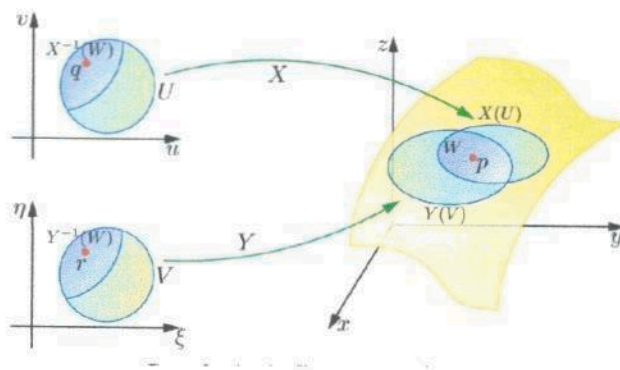


Figura 1.6: Coordenadas diferentes em torno do ponto p .

Proposição 1.1. (Mudança de Parâmetros)

A aplicação $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ .

Demonstração. Ver [2].

□

1.2 Plano Tangente

Definição 1.3. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^3$ é um **vetor tangente** a S em p se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e $\alpha(0) = p$.*

Denotaremos por $T_p S$ o conjunto de todos os vetores tangentes à S em p .

Definição 1.4. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e q um ponto em U . O subespaço vetorial de dimensão dois, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, que coincide com o conjunto $T_{X(q)}(S)$ dos vetores tangentes à S em $X(q)$, é chamado **plano tangente** à S em p .*

O plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $p = X(q)$, não depende da parametrização X .

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$. Fazendo a identificação $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2)$, temos que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é uma base de $T_p S$ chamada a base de $T_p S$ associada a X .

Dada uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p , podemos escolher um **vetor unitário normal** em cada ponto $p \in X(U)$ da seguinte maneira:

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|}(q),$$

onde $X(q) = p$, $q \in U$. Obtemos, assim, uma aplicação $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável.

O produto interno canônico de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ uma superfície regular S um produto interno que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Assim se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, isto é,

$$\langle u, v \rangle_p = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica (isto é, $\langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p$ é e linear em u e em v), corresponde uma forma quadrática

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0$$

Definição 1.5. *A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$, é chamada **primeira forma fundamental da superfície regular S em $p \in S$.***

Geometricamente a primeira forma permite realizar medições sobre a superfície.

Vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS associada a uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ de S em p .

Seja $v \in T_pS$. Então existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U)$ diferenciável em 0 tal que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $p = \alpha(0)$ e $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$, onde $X(q) = p$ e $q \in U$.

Então

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle_p \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS .

Observação 1.2. As funções $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ , $E(u, v) > 0$, $G(u, v) > 0$ e $(EG - F^2)(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0$$

já que $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ são L.I..

Exemplo 1.3. Seja $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de \mathbb{R}^3 , isto é, X descreve o plano ortogonal a $w_1 \times w_2$ que passa por p_0 . Então, $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortogonais, obtemos que os coeficientes da primeira forma quadrática são as funções constantes $E(u, v) = G(u, v) = 1$ e $F(u, v) = 0$.

Exemplo 1.4. Seja o cilindro reto cuja parametrização $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por (ver Figura 1.7)

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}.$$

Para calcular os coeficientes da primeira forma fundamental, observamos que $X_u = (-\text{sen } u, \cos u, 0)$, $X_v = (0, 0, 1)$. Logo, $E = \text{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$, $F = 0$ e $G = 1$.

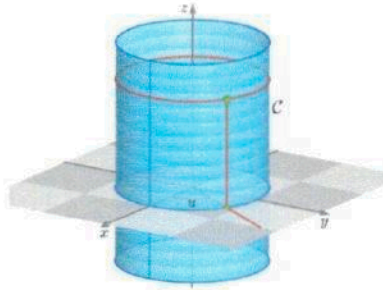


Figura 1.7: Cilindro reto sobre o Círculo $x^2 + y^2 = 1$

O plano e o cilindro acima, tem a mesma primeira forma fundamental. A justificativa geométrica para isto é a seguinte: uma folha de papel plana pode ser enrolada num cilindro, de modo óbvio, sem deformação. Se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada torna-se uma curva no cilindro e, como não houve deformação, os comprimentos de ambas as curvas coincidem.

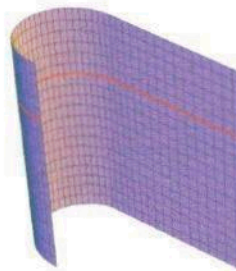


Figura 1.8: Curva na folha plana, depois de enrolada torna-se uma curva no cilindro.

Exemplo 1.5. Consideremos a seguinte parametrização do Helicóide

$$X(u, v) = (v \cos u, v \text{sen } u, au), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty.$$

O cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental nesta parametrização nos dá:

$$X_u = (-v \text{sen } u, v \cos u, a) \text{ e } X_v = (\cos u, \text{sen } u, 0).$$

E assim os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = v^2 + a^2, F = 0 \text{ e } G = 1$$

Exemplo 1.6. Consideremos a superfície de rotação

$$X(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$$

onde $u \in (0, 2\pi)$, $a < v < b$ e $\varphi(v) > 0$.

Como,

$$X_u = (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0) \text{ e } X_v = (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, \psi'(v))$$

Daí temos,

$$E = \varphi^2(v), F = 0 \text{ e } G = (\varphi'(v))^2 + (\psi'(v))^2.$$

Exemplo 1.7. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária de centro na origem $X : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2$

$$X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u),$$

uma parametrização de S^2 dada por suas coordenadas esféricas.

Temos que

$$X_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

e

$$X_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0).$$

Portanto,

$$E = 1, F = 0 \text{ e } G = \sin^2 u.$$

A importância da primeira forma fundamental é podemos resolver problemas métricos de uma superfície regular sem fazer referência ao ambiente \mathbb{R}^3 no qual S está mergulhada.

Usando a primeira forma fundamental de S , podemos reescrever o comprimento de arco de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt,$$

pois $I_p(\alpha'(t)) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_p = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = |\alpha'(t)|^2$. Além disso, se $\alpha : I \rightarrow S$ está contida numa vizinhança coordenada correspondente a parametrização $X(u, v)$, podemos calcular o **comprimento de arco** de α por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$$

O **ângulo** θ de duas curvas parametrizadas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ que se interceptam em $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ fazem neste ponto é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o cosseno do ângulo φ entre as curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ é

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Então, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente

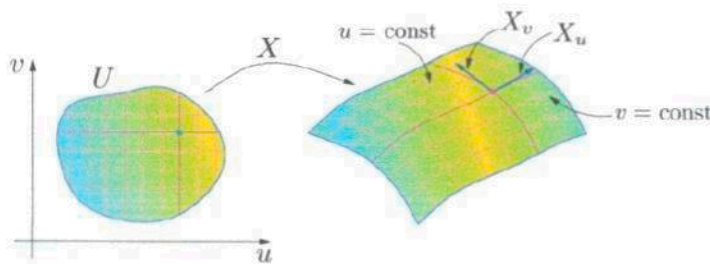


Figura 1.9: Curvas Coordenadas

se, $F(u, v) = 0$, para todo $(u, v) \in U$. Uma parametrização assim é chamada uma **parametrização ortogonal**.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular S .

Definição 1.6. *Um domínio (regular) em S é um subconjunto aberto e conexo de S tal que sua fronteira é a imagem de um círculo por uma aplicação que é um homeomorfismo diferenciável regular (isto é, sua diferencial não se anula) exceto num número finito de pontos. Uma região S é a união de um domínio com sua fronteira. Uma região de S é limitada se está contida em alguma bola de \mathbb{R}^3 .*

Vamos considerar regiões R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S . Isto é, $R = X(Q)$, onde Q é uma região limitada de \mathbb{R}^3 contida em U .

Definição 1.7. *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície S contida em uma vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$. O número*

positivo

$$A(R) = \iint_Q |X_u \wedge X_v| dudv,$$

é chamada área de R , onde $Q = X^{-1}(R)$.

Convém notar que,

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

o que mostra que o integrando de $A(R)$, pode ser escrito como

$$|X_u \wedge X_v|^2 = \sqrt{EG - F^2}$$

Definição 1.8. Uma superfície regular S é **orientável** se é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de forma que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças desta família, então a mudança de coordenadas tem determinante jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada **uma orientação de S** , e a superfície S , neste caso, é dita **orientada**.

1.3 Aplicação Normal de Gauss

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S no ponto $p \in S$, podemos escolher um **vetor unitário normal** em cada ponto $p \in X(U)$ da seguinte forma:

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|}(q),$$

onde $X(U) = p$, $q \in U$. Visto que

$$\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v = (X_u \wedge X_v) \begin{pmatrix} \partial(u, v) \\ \partial(\bar{u}, \bar{v}) \end{pmatrix}$$

para $\bar{X}(u, v)$ outra parametrização de S em p , então o sinal de N muda de acordo com sinal do determinante de mudanças de variáveis.

A aplicação $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$. Sendo V um aberto de S , a aplicação $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada de **campo diferenciável de vetores normais unitários** em V . Se pudermos definir esse campo em cada $V \subset S$ de maneira contínua, então diremos que N é uma **orientação** de S e, neste caso, a superfície será dita **orientável**.

De agora em diante, S denotará uma superfície regular orientável na qual foi escolhida uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N .

Definição 1.9. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a **Aplicação de Gauss de S** .

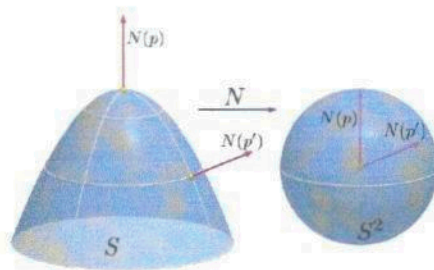


Figura 1.10: Aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$.

Observação 1.3. *A aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ é diferenciável.*

De fato, a aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é contínua e se $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ é uma parametrização de S em p , $p \in S$ e $Y : V \rightarrow Y(V)$, então a aplicação

$$Y^{-1} \circ N \circ X : U \rightarrow V$$

é diferenciável, pois $N \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, e Y^{-1} é a restrição de uma aplicação diferenciável definida num aberto de \mathbb{R}^3 .

Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ a diferencial da aplicação de N em p . Como $T_{N(p)} S^2 = T_p S$, $T_{N(p)} S^2$ é o plano perpendicular a $N(p)$, dN_p pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p S$. Seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss em p e seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p S$. Então $dN_p(v) = N'(0) \in T_p S$, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$, mede a taxa de variação com que N , restrita à curva α , muda de direção numa vizinhança de $t = 0$.

Assim, dN_p mede o quanto N se afasta de $N(p)$ numa vizinhança de p , isto é, mede quanto S se afasta de $T_p S$ numa vizinhança de p .

UFCCG BIBLIOTECA

No caso das curvas essa medida é dada pelo um número, a curvatura. Para as superfícies, esta medida é dada por um aplicação linear, a diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ de N no ponto $p \in S$.

Proposição 1.2. *A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta.*

Demonstração. Como dN_p é linear. A demonstração consiste em mostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$, para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS . Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (N \circ X(u(t), v(t))) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

Usando a linearidade de dN e comparando a primeira e última linha das expressões anteriores temos que : $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Assim para concluirmos a demonstração basta, mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_u \rangle$$

Derivemos $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$, em relação a v e u , respectivamente e obteremos $\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$ e $\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0$. Como X é de classe C^2 , garante que $X_{uv} = X_{vu}$ daí temos,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$$

□

O fato da $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ ser uma aplicação linear autoadjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS , dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_pS$.

Definição 1.10. *A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada **Segunda Forma Fundamental** se S em p .*

Como dN_p é uma aplicação autoadjunta, então dN_p possui autovalores e autovetores. Os autovetores de $-dN_p$, k_1, k_2 , com $(k_1 \geq k_2)$, são chamados **Curvaturas Principais** de S no ponto p .

Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a *curvatura Gaussiana* K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado curvatura média de S em p . Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

A segunda forma fundamental reúne todas informação acerca das curvaturas principais, gaussiana e média dos pontos da superfície.

- A matriz da Segunda Forma Fundamental relativa à base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS .

Seja

$$\begin{bmatrix} e(u, v) & f(u, v) \\ f(u, v) & g(u, v) \end{bmatrix}$$

tal matriz, cujas entradas são as funções $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ são **coeficientes da segunda forma fundamental**, e são calculados por

$$\begin{aligned} e &= \langle X_u, -dN_p(X_u) \rangle = \langle X_u, -N_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle \\ f &= \langle X_u, -dN_p(X_v) \rangle = \langle X_v, -dN_p(X_u) \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle \\ g &= \langle X_v, -dN_p(X_v) \rangle = \langle X_v, -N_v \rangle = \langle X_{vv}, N \rangle \end{aligned} \tag{1.1}$$

- A matriz associada a aplicação dN_p relativa a base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS .

Suponhamos que esta seja a matriz

$$[dN_p] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

onde suas entradas são determinadas pelo sistema

$$\begin{cases} N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{cases} \tag{1.2}$$

fazendo o produto interno de cada equação de (1.2) com X_u e X_v , obtemos

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F, & -f &= a_{11}E + a_{21}G \\ -f &= a_{12}E + a_{22}F, & -g &= a_{12}F + a_{22}G \end{aligned} \tag{1.3}$$



onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$.

Escrevendo na forma matricial, temos

$$-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Visto que $EG - F^2$ é diferente de zero.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da matriz associada a dN_p são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

As equações

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \text{ e } N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

com $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ obtidos acima, são conhecidas como as **equações de Weingarten**.

Usando (1.4), podemos reescrever as fórmulas para as curvaturas média e Gaussiana. Assim teremos

$$K(p) = \det(-dN_p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.5)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p) = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{eG - efF + gE}{EG - F^2} \quad (1.6)$$

Classificação dos Pontos de uma superfície

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. De acordo com os valores das curvaturas Gaussiana e Média, um ponto $p = (u, v)$, diz-se :

- **Elíptico** se $K(p) > 0$ (isto é, se as curvaturas principais forem ambas positivas ou ambas negativas;)
- **Hiperbólico** se $K(p) < 0$ (as curvaturas principais têm sinais opostos);

- **Parabólico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$ (uma das curvaturas principais é nula e a outra é não - nula);
- **Planar** se $K(p) = H(p) = 0$ (as curvaturas principais são nulas);
- **Umbílico** se $K_1(p) = k_2(p)$.

Exemplo 1.8. O plano π de \mathbb{R}^3 definido pelo exemplo(1.3), com a seguinte parametrização $X(u, v) = p_0 + w_1u + w_2v$, tem os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental,

$$E = G = 1 \text{ e } F = 0$$

Temos que $X_{uu} = 0, X_{uv} = 0, X_{vv} = 0,$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = 0$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = 0$$

E portanto, $K = H = 0$.

Exemplo 1.9. O cilindro definido no exemplo (1.4), com a parametrização para o cilindro dada por,

$$\begin{aligned} X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

Com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$. Temos que,

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0) \text{ e } X_v = (0, 0, 1),$$

e,

$$X_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0), \quad X_{uv} = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad X_{vv} = (0, 0, 0).$$

Assim,

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = 1.$$

O vetor normal ao cilindro é $N = (\cos u, \sin u, 0)$.

Os coeficientes da segunda forma são:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = -1, \quad f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad g = \langle N, X_{vv} \rangle = 0.$$

Portanto,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - f^2} = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 1.10. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, com $V = \{(u, v); 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por,

$$X(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos u).$$

Pelo exemplo (1.7) os coeficientes são primeira forma fundamental para a esfera são:

$$E = 1, F = 0 \text{ e } G = \text{sen}^2 u$$

Como $X_u = (\cos u \cos v, \cos u \text{ sen } v, \text{sen } u)$ e $X_v = (-\text{sen } u \text{ sen } v, \text{sen } u \cos v, 0)$, teremos que

$$N = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos u)$$

$$X_{uu} = (-\text{sen } u \cos v, -\text{sen } u \text{ sen } v, -\cos u)$$

$$X_{uv} = (-\cos u \text{ sen } v, \cos u \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (-\text{sen } u \cos v, -\text{sen } u \text{ sen } v, 0)$$

Logo os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = -1, f = 0 \text{ e } g = -\text{sen}^2 u.$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e média serão:

$$K = 1, H = -2.$$

Capítulo 2

Isometrias

Definiremos a noção de isometria, que essencialmente torna precisa a noção intuitiva de duas superfícies terem a “mesma” primeira forma fundamental. As referências básicas no estudo deste capítulo foram [2] e [10].

2.1 Isometrias

A noção de isometria é o conceito natural de equivalência para propriedades métricas das superfícies regulares. No que segue S e \bar{S} denotam superfícies regulares.

Definição 2.1. Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma **isometria** se

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$. Dizemos que as superfícies S e \bar{S} são **isométricas**.

Observação 2.1. Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria se, e somente se,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $p \in S$ e todo $w \in T_p S$.

De fato, se φ é uma isometria, então

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Agora suponhamos que φ preserva a primeira forma fundamental. Então

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{2}(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)) \\ &= \frac{1}{2}(I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2))) \\ &= \langle (d\varphi_p(w_1))(d\varphi_p(w_2))_{\varphi(p)} \rangle \end{aligned}$$

Definição 2.2. Uma aplicação $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ é uma isometria local em p se existe uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é uma isometria. Se existir uma isometria local em \bar{S} para todo ponto $p \in S$, dizemos que S é **localmente isométrica** a \bar{S} . S e \bar{S} são **localmente isométricas** se S é localmente isométrica a \bar{S} e \bar{S} é localmente isométrica a S .

Observação 2.2. Se existir uma aplicação diferenciável $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ sobrejetora tal que $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} \bar{S}$ preserva produto interno para todo $p \in S$, então S e \bar{S} são localmente isométricas.

De fato, como $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} \bar{S}$ é um isomorfismo, existem, pelo Teorema da Aplicação Inversa um aberto $V \subset S$, com $p \in V$ e um aberto $\bar{V} \subset \bar{S}$, com $\varphi(p) \in \bar{V}$, tais que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é um difeomorfismo e, portanto, é uma isometria.

Observação 2.3. Duas superfícies podem ser localmente isométricas sem serem globalmente isométricas.

Exemplo 2.1. Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, 0)$ uma parametrização do plano xy , com $E = G = 1$ e $F = 0$ e $\bar{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, uma parametrização do cilindro $C : x^2 + y^2 = 1$, com $\bar{E} = \bar{G} = 1$ e $\bar{F} = 0$ e $X(U) = C - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1, y = 0 \text{ e } z \in \mathbb{R}\}$, onde $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Afirmção : A aplicação $\varphi : X \circ \bar{X}^{-1} : \bar{X}(U) \rightarrow X(U)$ é uma isometria local (ver figura 2.1). Note que cada vetor w , tangente ao cilindro em um ponto $p \in \bar{X}(U)$, é tangente a uma curva $\bar{X}(u(t), v(t))$, onde $(u(t), v(t))$ é uma curva em $U \subset \mathbb{R}^2$. Ora assim w pode ser escrito da seguinte maneira

$$w = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'.$$

No entanto

$$\varphi(\bar{X}(u(t), v(t))) = X(u(t), v(t)).$$

Logo, $d\varphi(w) = X_u u' + X_v v'$. E como $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}$, obtemos que

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + F u' v' + G(v')^2 \\ &= \bar{E}(u')^2 + \bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \end{aligned}$$

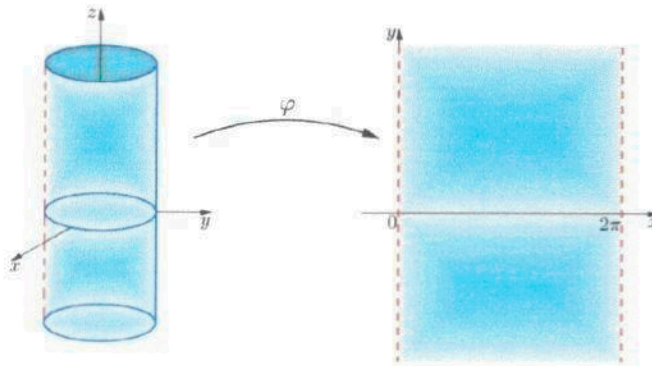


Figura 2.1: Isometria entre o cilindro menos uma reta e plano

Observação 2.4. O cilindro e o plano não são globalmente isométricos. Pois o cilindro não é nem homeomorfo a um plano. Não cabe aqui uma demonstração rigorosa desta última afirmação, mas um argumento intuitivo dado a seguir pode dar uma ideia da demonstração. Qualquer curva fechada simples no plano pode ser deformada continuamente em um ponto sem deixar o plano. Tal propriedade é certamente preservada por um homeomorfismo. Mas um paralelo do cilindro não possui esta propriedade, e contradiz a existência de um homeomorfismo entre o plano e o cilindro.

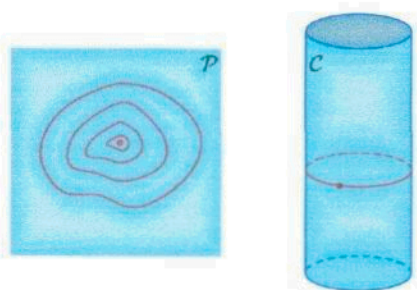


Figura 2.2: No plano as curvas fechadas simples são contráteis a um ponto enquanto que no cilindro os paralelos do cilindro não são.

Observação 2.5. *Isometrias não preservam necessariamente a curvatura média em ponto correspondentes. Por exemplo, o plano e o cilindro são localmente isométricos, mas o plano tem curvatura média constante igual a zero e o cilindro C tem curvatura média igual a $-\frac{1}{2}$*

A proposição a seguir generaliza para S, \bar{S} superfícies regulares o caso ocorrido entre o cilindro e o plano.

Proposição 2.1. *Sejam $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U) \subset \bar{S}$ parametrizações de S e \bar{S} , respectivamente, tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ em U . Então a aplicação $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria local.*

Demonstração. Seja $p \in X(U)$ e $w \in T_p S$. Então w é tangente a uma curva $X(\alpha(t))$ em $t = 0$, onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ é uma curva em U , assim, w pode ser escrito

$$w = X_u u' + X_v v'.$$

Por definição, o vetor $d\varphi_p(w)$ é o vetor tangente à curva $\bar{X} \circ X^{-1} \circ X(\alpha(t))$, ou seja, à curva em $t = 0$. Logo

$$d\varphi(w) = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'.$$

E como,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \text{ para todo } p \in X(U) \text{ e todo } w \in T_p S$$

Portanto φ é uma isometria local. □

Exemplo 2.2. *Sejam*

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\}$$

e $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ definida por $f((u, v, 0) = (u, v, u^2 + v^2)$.

UFPA BIBLIOTECA

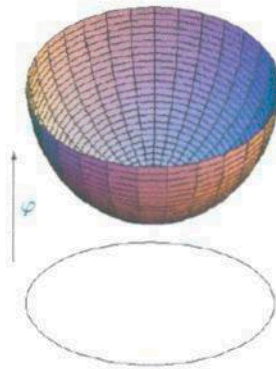


Figura 2.3: φ não é uma isometria

Denotando o aberto $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ de \mathbb{R}^2 por U , $X : U \rightarrow S_1$ definida por $X(u, v) = (u, v, 0)$ é uma parametrização de global S_1 , enquanto $\bar{X} = \varphi \circ X$ é uma parametrização global de S_2 . Como

$$X_u = (1, 0, 0), X_v = (0, 1, 0)$$

e

$$\bar{X}_u = (1, 0, 2x) \quad \bar{X}_v = (0, 1, 2y),$$

temos que

$$E = G = 1, \quad F = 0$$

$$\bar{E} = 1 + 4u^2, \bar{F} = 4uv \quad e \quad \bar{G} = 1 + 4v^2$$

ou seja, φ não é uma isometria.

A transformação φ do exemplo anterior (na qual a superfície S_1 foi transformada em metade de uma esfera) altera a geometria intrínseca da superfície, ou seja, a sua primeira forma fundamental.

Não existe nenhuma isometria entre a esfera o plano (ou mesmo entre uma parte da esfera e uma parte do plano). Pois tal isometria teria que preservar distâncias e ângulos, e teria que aplicar circunferências de círculo máximo (que são as geodésicas na esfera) em retas (que são as geodésicas no plano).

Exemplo 2.3. *Sejam*

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \frac{\pi}{2} \right\},$$

BIBLIOTECA

e

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, y = 0\}$$

e $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ definida por $g(u, 0, v) = (\text{sen } u, \cos u, v)$

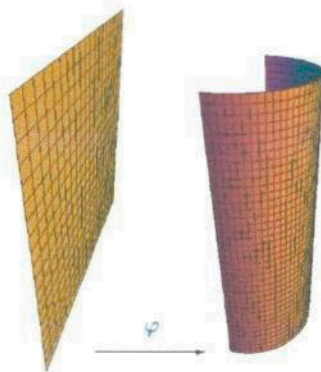


Figura 2.4: g é uma isometria

Tomando o aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | |u| < \frac{\pi}{2}\}$, parametrização global de T_1 , $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $X(u, v) = (u, 0, v)$ e a correspondente parametrização global $\bar{X} = \varphi \circ X$ de T_2 , temos

$$X_u = (0, 1, 0), X_v = (0, 0, 1)$$

e

$$\bar{X}_u = (\cos u, \text{sen } u, 0), \bar{X}_v = (0, 0, 1),$$

então

$$E = G = 1 \text{ e } F = 0$$

e

$$\bar{E} = \bar{G} = 1 \text{ e } \bar{F} = 0.$$

Assim, neste caso φ é uma isometria. Por outro lado,

$$X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0,$$

$$\bar{X}_{uu} = (-\text{sen } u, -\cos u, 0), \quad \bar{X}_{uv} = \bar{X}_{vv} = 0,$$

Temos

$$N_X = (-\text{sen } u, -\cos u, 0),$$

donde

$$e = g = f = 0$$

e

$$\bar{e} = -\langle N_X, \bar{X}_{uu} \rangle = -1 \neq 0$$

Portanto, φ não preserva a segunda forma fundamental apesar de ser uma isometria.

Neste exemplo, temos um folha de papel plana S_1 que é transformada em metade de um cilindro S_2 . A folha foi simplesmente arqueada, tendo-se somente modificado a sua relação com o espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Este fato é descrito pelo seguinte: a primeira forma quadrática não foi alterada; a segunda forma quadrática foi alterada. Dizemos que a primeira forma fundamental de uma superfície S descreve a geometria intrínseca de S e que a segunda forma fundamental descreve a geometria extrínseca de S .

Exemplo 2.4. *Seja S uma superfície de revolução e seja*

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), a < v < b, 0 < u < 2\pi, \quad f(v) > 0$$

uma parametrização de S . Os coeficientes da primeira forma fundamental na parametrização X são dados por:

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2$$

Em particular, a superfície de revolução da **catenária**,

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty$$

tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

e os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental são :

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2(\sinh^2 + 1) = a^2 \cosh^2 v$$

Esta superfície é chamada de **Catenóide**(ver Fig 2.5).

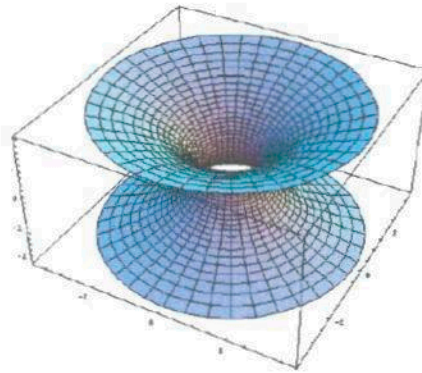


Figura 2.5: Catenóide

Mostraremos que existe uma isometria local entre o Helicóide e o Catenóide.

De fato, uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty,$$

Fazendo a seguinte mudança de parâmetros:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

que é possível pois a aplicação é evidentemente bijetiva, e o jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh v$$

nunca é zero. Assim, uma nova parametrização do helicóide é

$$X(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2 v.$$

Usando a proposição (2.1), o resultado segue.

A figura a seguir nos dá uma ideia geométrica de como ocorre tal isometria.

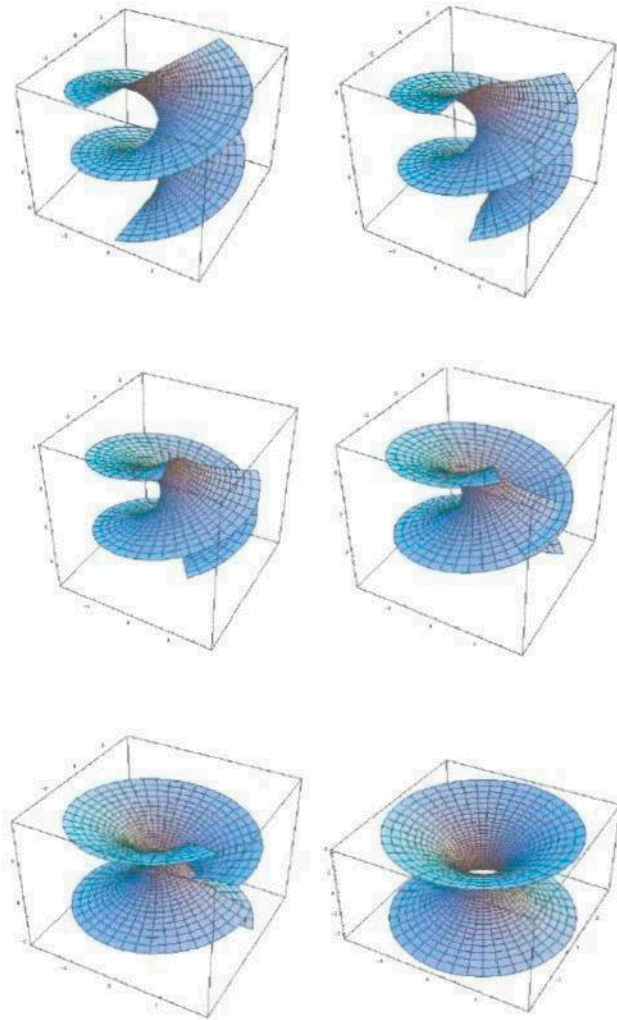


Figura 2.6: Transformação isométrica do Helicóide e o Catenóide

Capítulo 3

Teorema Egregium de Gauss

Seja S uma superfície regular orientada pelo campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow S^2$. Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S compatível com N , isto é,

$$N(u, v) = N(X(u, v)) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v), \forall (u, v) \in U$$

Associamos a cada ponto $p = X(u, v)$, o triedo positivo

$$\{X_u(u, v), X_v(u, v), N(u, v)\}$$

Expressando as derivadas dos vetores X_u, X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde os $a_{ij}, i, j = 1, 2$ foram calculados nas **equações de Weingarten**. Tomando o produto interno das quatro primeira relações de (3.1) com N , obtemos que:

$$L_1 = \langle X_{uu}, N \rangle = e, \quad L_2 = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle = \bar{L}_2 = f \quad e \quad L_3 = \langle X_{vv}, N \rangle = g$$

Os coeficientes $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$ são chamados **Símbolos de Christoffel** de S na parametrização X . Como $X_{uv} = X_{vu}$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad e \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2,$$

isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Lema 3.1. Os símbolos de Christoffel de uma superfície S relativamente a uma parametrização X estão relacionados com a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

Demonstração. É imediata de (3.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, X_u \rangle \\ &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, X_v \rangle \\ &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = \langle X_u, X_v \rangle_u - \langle X_u, X_{uv} \rangle \\ &= E_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 G &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_u \rangle \\ &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, X_v \rangle \\ &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_u \rangle \\ &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_u \rangle \\ &= \langle X_{vv}, X_u \rangle = \langle X_v, X_u \rangle_v - \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ &= F_v - \frac{1}{2} G_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_v \rangle \\ &= \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1. *Os símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias locais.*

Demonstração. Observe que as equações acima foram agrupadas em três pares de equações e que para cada par o determinante do sistema é $EG - F^2 \neq 0$, ou seja, é possível resolver os sistemas, iremos reescrevê-los na forma matricial.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

UFMG / BIBLIOTECA

Resolvendo cada um dos três sistemas, relativamente aos símbolos de Christoffel, obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{EG - F^2} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - 2EE_v - FE_u}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{EG - F^2} = \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{EG - F^2} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_u}{EG - F^2} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - eFF_v - FG_u}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Como podemos notar os símbolos Christoffel acima só depende dos coeficientes da primeira forma fundamental E, G e F e da suas derivadas. Portanto são invariantes por isometrias locais. □

- Agora iremos obter relações entre estes coeficientes usando as seguintes expressões

$$\begin{aligned} (X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= 0, \\ (X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Utilizando as expressões de (3.1), a segunda das relações em (3.2) pode ser escrita

$$\begin{aligned}
 (X_{vv})_u &= (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN)_u \\
 &= \Gamma_{22}^1 X_{uu} + \Gamma_{22}^2 X_{vu} + N_u g + (\Gamma_{22}^1)_u X_u + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + g_u N \\
 &= \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + (a_{11} X_u + a_{21} X_v)g + \\
 &\quad ((\Gamma_{22}^1)_u X_u + ((\Gamma_{22}^2)_u X_v + g_u N)
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 (X_{vv})_u &= (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + ga_{11} + (\Gamma_{22}^1)_u) X_u + \\
 &\quad + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 + ea_{21} + (\Gamma_{22}^2)_u) X_v + \\
 &\quad + (\Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f + g_u) N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (X_{vu})_v &= (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN)_v \\
 &= \Gamma_{21}^1 X_{uv} + \Gamma_{21}^2 X_{vv} + N_v f + (\Gamma_{21}^1)_v X_u + (\Gamma_{21}^2)_v X_v + f_v N \\
 &= \Gamma_{21}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \Gamma_{21}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + (a_{12} X_u + a_{22} X_v) f + \\
 &\quad ((\Gamma_{21}^1)_v X_u + ((\Gamma_{21}^2)_v X_v + f_v N)
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 (X_{vu})_v &= (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{12} + (\Gamma_{21}^1)_v) X_u + \\
 &\quad + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + fa_{22} + (\Gamma_{21}^2)_v) X_v + \\
 &\quad + (\Gamma_{21}^1 f + \Gamma_{21}^2 g + f_v) N
 \end{aligned}$$

Como $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$, e X_u , X_v e N são linearmente independentes. Igualando os coeficientes de X_u , obtemos

$$\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + ga_{11} + (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{12} + (\Gamma_{21}^1)_v.$$

ou seja

$$\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + (\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u = ga_{11} - fa_{12}.$$

Introduzindo os valores de a_{ij} já calculados segue-se que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + (\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u &= g \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \\
 &= G \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= GK
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

De modo análogo, das igualdades $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ e $N_{uv} = N_{vu}$, é possível formular EK e FK em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas, logo, em função de E, F, G e das suas derivadas. Como as funções E, F, G não se podem anular simultaneamente, podemos concluir que a curvatura gaussiana K de uma superfície regular só depende das funções E, F, G e das suas derivadas sendo, assim, invariante por isometria local.

A expressão, que nos fornece o valor de K em termos da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como **Fórmula de Gauss**. A equação (3.3) prova o seguinte teorema, devido a K. F. Gauss.

Teorema 3.1. Teorema Egregium (Gauss) *A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

De fato, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S em p e se $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$, onde $V \subset X(U)$ é uma vizinhança de p , é uma isometria local em p , então $Y = \varphi \circ X$ é uma parametrização de \bar{S} em $\varphi(p)$. Como φ é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações X e Y coincidem em pontos correspondentes q e $\varphi(q)$, $q \in V$, assim os respectivos símbolos de Christoffel também coincidem. Pela equação (3.3), K pode ser calculada em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Portanto $K(q) = K(\varphi(q))$, para todo $q \in V$.

O teorema de Gauss é considerado, pela extensão de suas consequências, um dos fatos mais importantes da Geometria Diferencial. Por exemplo, como o catenóide e o Helicóide, (ver exemplo 2.4) são localmente isométricos, concluímos pelo teorema de Gauss, que estas superfícies possuem curvaturas Gaussianas iguais em pontos correspondentes, um fato que não é geometricamente trivial.

Como as definições de ponto elíptico e de ponto Hiperbólico só dependem da curvatura de Gauss, uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos hiperbólicos em pontos hiperbólicos.

O mesmo não acontece com os pontos planares e parabólicos. Com efeito, as noções de ponto planar e ponto hiperbólico não são invariantes por isometria : dependem não só da primeira forma fundamental da superfície, mas também da segunda forma fundamental.

Exemplo 3.1. Não existe nenhuma isometria entre uma esfera e um plano: A curvatura de Gauss de uma esfera é diferente de zero, enquanto a de um plano é nula. Aqui reside a razão fundamental pelo qual qualquer mapa plano de qualquer região da Terra distorce sempre as distâncias.

Lema 3.2 (Lema de Gauss). Se X é uma parametrização ortogonal, então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Demonstração. Pela fórmula de Gauss (3.3),

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

Como X é uma parametrização ortogonal, temos que $F = 0$, e assim os símbolos de Christoffel, serão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u}{EG} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-2EE_v}{EG} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v}{EG} = \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u}{EG} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-GG_u}{EG} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v}{EG} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} -EK &= \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u - \left(\frac{E_v}{2G} \right)_v - \frac{E_u^2}{4EG} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{GG_{uu} - G_u^2}{G^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} - \frac{E_u G_u}{2EG} + \frac{G_u^2}{G^2} - \frac{E_v G_v}{2G^2} \right) \\ &= \frac{1}{2EG^2} \left(EGG_{uu} - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{GE_v^2}{2} - \frac{GE_u G_u}{2} + \frac{EG_u^2}{2} + \frac{EE_v G_v}{2} \right) \end{aligned}$$

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u) \quad (3.4)$$

Observe que desenvolvendo a expressão a seguir teremos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv} - E_v(E_v G + G_v E)/2\sqrt{EG}}{EG} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu} - G_u(E_u G + G_u E)/2\sqrt{EG}}{EG} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} (2EGE_{vv} - E_v^2 G - 2EGG_{uu} - GE_u G_u - EG_u^2) \end{aligned}$$

UFPA BIBLIOTECA

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2}(2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_vG_v - GE_v^2 - GE_uG_u). \quad (3.5)$$

Assim, por (3.4) e (3.5)

Segue que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.
- [2] CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [3] LIMA, E.L. *Álgebra Linear*. 7ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [4] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol.2. 9ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2006.
- [5] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, Katsumi. *Foundations of Differential Geometry*. Vol.II, John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [6] O'NEILL, B. *Elementary Differential Geometry*. Second Edition, Academic Press, San Diego, 1997.
- [7] OPREA, J. *Differential Geometry and Applications*. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [8] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. Segunda Edição, Blucher, São Paulo, 2008.
- [9] W. Kuhnel, *Differential Geometry - Curves, Surfaces, Manifolds*, American Mathematical Society, 2002.
- [10] PICADO, J. *Apontamentos de Geometria Diferencial*, 2003. Disponível em <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0405/Apontamentos.html> (Acessado em 03/06/2013)

- [11] FRENSEL, K. *Notas de aulas*. Disponível em <http://www.professores.uff.br/katia.frensel/aulasgeodif/gdif.pdf> (Acessado em 03/ 06 / 2013)