UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

SÉRIE GEOMÉTRICA:
Paradoxo da Dicotomia

Izidio Silva Soares

Cuité - PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

SÉRIE GEOMÉTRICA:
Paradoxo da Dicotomia

Izidio Silva Soares

Cuité - PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S676s Soares, Izidio Silva.

Série geométrica: paradoxo da dicotomia. / Izidio Silva Soares – Cuité: CES, 2013.

44 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Série geométrica. 2. Sequência. 3. Paradoxo da dicotomia. I. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Série Geométrica: Paradoxo da Dicotomia

Izidio Silva Soares

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 23 de abril de 2013.

Banca Examinadora

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Co-Orientadora)

Prof. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Agradecimentos

A DEUS, por ter me dado forças, sabedoria, esperança e fé para concluir mais uma etapa em minha vida, mantendo-me firme diante dos obstáculos desta caminhada;

Aos meus PAIS, Francisco de Assis Soares e Maria das Dores Silva Soares. A vocês que nunca mediram esforços para nos incentivar a estudar e conseguir nossos objetivos com dignidade. Amo vocês!

Aos meus irmãos que nunca me abandonaram, de modo especial aos meus irmãos Pe. Claudeci Silva Soares, Claudemir Silva Soares e Gilson Silva Soares que contribuíram com incentivos e ajuda financeira no inicio do curso quando mais precisei e a Francisco Silva Soares que por muitas vezes me trouxe até a cidade de moto, obrigado!

Ao meu tio José Francisco e sua esposa Luzia por me acolher em sua residência principalmente os dois primeiros anos do curso, obrigado;

A minha tia Josefa Costa Silva por ter disponibilizado sua casa para ficar o tempo que precisasse muito obrigado;

Aos meus avós Rosa Lopes da Silva e Graciliano Vieira da Costa por está sempre confiante em minhas capacidades de chegar a concluir este curso!

De modo especial as professoras Maria Gisélia Vasconcelos e Márcia Cristina Silva Brito que tanto contribuíram para a conclusão deste trabalho. Agradeço ao professor Luiz Antônio por ter se disponibilizado a participar da banca examinadora e por suas sugestões. A todos os mestres e amigos que me incentivaram para que eu chegasse a concluir este curso, muito obrigado!

Aos grandes amigos que fiz no âmbito da universidade: Luana, Ivanielma, Soliana, Eudes, Sérgio, Wellison, Jaldir e Santiago do curso que nunca mediram esforços enquanto estudávamos. E também Renato Silva Pereira que muito me ajudou quando precisei, muito obrigado.

A DEUS por ter me concedido esta graça. Aos meus pais por todo seu apoio e incentivo para que pudesse conseguir alcançar meus objetivos.

"O que se move sempre está no mesmo lugar agora."

Zenão de Eleia

Resumo

Nesse trabalho apresentamos um estudo sucinto das séries geométricas e suas aplicações. Discutiremos as séries geométricas enfatizando seus pontos de convergência e divergências, sendo, portanto necessário apresentar todo rigor da análise matemática. Finalizaremos nosso estudo com uma aplicação da série geométrica que será explorada recordando um problema formulado pelo filósofo grego Zenão de Eleia chamado de paradoxo da dicotomia.

Palavras-chave: Sequência. Série Geométrica. Paradoxo da Dicotomia.

Abstract

We present a brief study of the geometric series and its applications. We discuss the geometric series emphasizing their points of convergence and divergence, and therefore need to present any rigorous mathematical analysis. We will end our study with an application of geometric series that will be explored recalling a problem formulated by the Greek philosopher Zeno of Elea called paradox of the dichotomy.
Keywords: Sequence. Geometric Series. Paradox of the Dichotomy.

Sumário

Introdução

Ao longo deste trabalho, apresentaremos uma série de conceitos e resultados, que será fundamental para o objetivo do mesmo.

Fazendo uma abordagem histórica desde o surgimento das primeiras ideias que iriam conduzir o conceito de limite até uma formulação rigorosa deste conceito.

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral e está intimamente atrelado ao conceito de infinito. A forma mais simples, de se introduzir limites é através de sequências de números reais. Analisaremos tal conceito estudando suas propriedades e demonstrando os principais resultados que serão cruciais para o desenvolvimento de sequência e série. Para o estudo sucinto das propriedades de Sequência e Série Geométrica faz necessário adotar um ponto de vista voltado para a análise matemática.

Este conceito surgiu sob a forma de processos convergentes ilimitados. O primeiro testemunho literário encontra-se nos paradoxos de Zenão de Eleia, datando de aproximadamente 450 a.C. Um dos problemas propostos por Zenão chamado de "Paradoxo da Dicotomia" era equivalente ao seguinte: Considere que o intervalo AB tem medida igual a 1. O ponto M_1 divide o intervalo ao meio, portanto a primeira metade equivale a $\frac{1}{2}$. O segundo ponto, M_2, divide a metade restante ao meio, portanto equivale a $\frac{1}{4}$ do comprimento original. Logo, o intervalo pode ser expresso como uma soma de intervalos que cresce ilimitadamente por partes que sempre são menores que a imediatamente anterior:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Geometricamente, nunca chegaremos ao ponto B, veja: saindo do ponto 0 em direção ao ponto 1, temos que primeiro passar pelo ponto $\frac{1}{2}$(metade do espaço $0-1$), depois pelo ponto $\frac{1}{4}$(metade do espaço $\frac{1}{2}-1$), $\frac{1}{8}$(metade $\cdots$), $\frac{1}{16}$ (metade $\cdots$), $\frac{1}{32}$(metade $\cdots$). Agora, usando do "conceito"de somas dos infinitos termos de progressões geométricas podemos somar matematicamente estas parcelas infinitas, sem a necessidade de um tempo infinito.

O conceito de Séries Infinitas surge quando se pretende executar uma operação de somar sucessivamente sem que essa operação termine após um número finito de parcelas. Estudaremos a operação de adição de modo a atribuir significado a uma igualdade do tipo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1, \tag{1}$$

como se pode ver, o primeiro membro é uma "soma"com uma infinidade de parcelas e no segundo membro tem-se um valor real. Mas é evidente que não tem sentido somar uma sequência infinita de números reais. O que o primeiro membro da igualdade 1 exprime é o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Observe que na afirmação contida na igualdade 1 significa que, dado arbitrariamente qualquer $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n>n_0$, a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ difere de 1 por menos de ϵ.

Portanto, faz necessário definir somas infinitas através de limites, sendo assim, algumas somas podem ser efetuadas e outras não, uma vez que nem toda sequência possui limite.

No entanto, o conceito de série infinita estende o conceito aritmético de soma de uma quantidade finita de parcelas para soma de uma quantidade infinita de parcelas.

Finalmente, para complementar e reforçar a importância do Conceito de Limite e a Série Geométrica, apresentaremos uma aplicação voltada ao paradoxo da dicotomia.

Capítulo 1

Abordagem Histórica

Sabemos que a Matemática é a mais antiga das ciências e que a sua origem se esconde nas areias da antiga civilização egípcia. Todo o conhecimento que temos hoje sobre a matemática egípcia baseia-se em vários documentos, entre eles o Papiro de Rhind que é, sem dúvida, um dos preciosos documentos existentes relativos aos conhecimentos matemáticos dos egípcios.

Este papiro é composto por 84 problemas triviais e suas resoluções. Entre esses problemas, encontra-se um que cita "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2.041 espigas de trigo, 16.807 hectares"é presumível que o escriba estava tratando de Sequências Geométricas, onde cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas havia produzido sete medidas de grão (BOYER, 1996).

A consideração de somas infinitas é um problema estreitamente ligado ao problema da passagem ao limite. A falta por longo período de conceitos adequados e de uma teoria razoável levou os matemáticos a numerosas especulações e paradoxos a respeito da natureza das séries infinitas, a exemplo do paradoxo de Zenão.

No primeiro paradoxo, a Dicotomia, Zenão colocou um objeto se movendo uma distância finita entre dois pontos fixos em uma série infinita de intervalos de tempo (o tempo necessário para se mover metade da distância, em seguida o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.) durante o qual o movimento deve ocorrer. A conclusão surpreendente de Zenão foi que o movimento era impossível!

Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Em matemática, uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolverá as questões levantadas pelos paradoxos de Zenão.

Para suas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, Arquimedes (287- 212 a.C.) encontrou várias séries infinitas - somas que contêm um número infinito de termos. Não possuindo o conceito de limite propriamente dito, Arquimedes inventou argumentos muito engenhosos chamados de redução ao absurdo duplo, que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites.

Fibonacci (1170-1240) foi um grande matemático que contribuiu para esta área da matemática. Ele descobriu uma sequência de inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois antecessores $(1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$, introduzindo-a em termos de modelagem de uma população reprodutiva de coelhos. Esta sequência tem muitas propriedades curiosas e interessantes e continua sendo aplicada em várias áreas da matemática moderna e na própria ciência.

Pierre Fermat (1601-1665) desenvolveu um método algébrico para encontrar os pontos mais altos e mais baixos sobre certas curvas. Descrevendo a curva em questão por uma equação, Fermat chamou um número pequeno de E, e então fez alguns cálculos algébricos legítimos, e finalmente assumiu $E = 0$ de tal maneira que todos os termos restantes nos quais E estava presente desapareceriam! Essencialmente, Fermat colocou de lado o limite com o argumento que E é "infinitamente pequeno". Geometricamente, Fermat estava tentando mostrar que, exatamente nos pontos mais altos e mais baixos ao longo da curva, as retas tangentes à curva são horizontais, isto é, têm inclinação zero.

No século XVII vários matemáticos desenvolveram métodos algébricos para encontrar retas tangentes a determinadas curvas. Em cada um desses métodos o conceito de limite era utilizado, sem ser formulado explicitamente.

Isaac Newton (1641-1727), em Princípia Mathematica, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No início do Livro I do Princípia, ele tenta dar uma formulação precisa para o conceito de limite. Por outro lado, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que juntamente com Newton é considerado um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, no seu tratamento do cálculo de áreas por meio da uniformização do método de exaustão, fazia uso da noção de somas de infinitésimos, ou seja, somas de séries.

Dentre os líderes desse desenvolvimento do século XVIII estavam vários membros da família Bernoulli, Johann I (1667-1748), Nicolas I (1687-1759) e Daniel (1700-1782), além de outros grandes nomes como Brook Taylor (1685-1731), Leonhard Euler (1707-1783), e Alexis Claude Clairaut (1713-1765).

Euler usou frequentemente séries infinitas em seu trabalho para desenvolver novos métodos ou para modelar problemas aplicados. Publicou "Mechanica"em 1736, onde aplicou sistematicamente o cálculo à mecânica e desenvolveu novos métodos para resolver equações diferenciais usando séries de potências. Estabeleceu a notação de somatório que usamos hoje, usando sigma para o símbolo da soma.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) reconheceu explicitamente a importância central do limite no cálculo. Na famosa Encyclopédie (1751-1776), D'Alembert afirmou que a definição apropriada da derivada necessitava um entendimento do limite primeiro e então, deu a definição explícita: **Uma quantidade é o limite de outra quantidade quando a segunda puder se aproximar da primeira dentro de qualquer precisão dada, não importa quão pequena, apesar da segunda quantidade nunca exceder a quantidade que ela aproxima**.

No final do século XVIII, o grande matemático da época, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), conseguiu reformular toda a mecânica em termos de cálculo.

Ao longo do século XVIII, havia pouca preocupação com convergência ou divergência de sequências e séries infinitas; hoje, entendemos que tais problemas requerem o uso de limites. Em 1812, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) produziu o primeiro tratamento estritamente rigoroso da convergência de sequências e séries, embora ele não tenha usado a terminologia de limites.

Na sua famosa Teoria Analítica do Calor, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) tentou definir a convergência de uma série infinita, novamente sem usar limites, mas então ele afirmou que qualquer função poderia ser escrita como uma de suas séries, e não mencionou a convergência ou divergência desta série.

No primeiro estudo cuidadoso e rigoroso das diferenças entre curvas contínuas e descontínuas e funções, Bernhard Bolzano (1781-1848) olhou além da noção intuitiva da ausência de buracos e quebras e encontrou os conceitos mais fundamentais os quais expressamos hoje em termos de limites.

Finalmente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), um dos grandes matemáticos franceses da primeira metade do século XIX, formulou as noções modernas de limite, continuidade e convergência de séries, obtendo resultados que marcaram uma nova era para a Análise Matemática.

Contudo, Cauchy perdeu alguns dos detalhes técnicos, especialmente na aplicação da sua definição de limite a funções contínuas e à convergência de certas séries infinitas.

Niels Henrik Abel (1802-1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) estavam entre aqueles que desencavaram estes problemas delicados e não intuitivos.

Nas décadas de 1840 e 1850, enquanto era um professor do ensino médio, Karl Weierstrass (1815-1897) determinou que a primeira etapa necessária para corrigir estes erros era restabelecer a definição original de Cauchy do limite em termos estritamente aritméticos, usando apenas valores absolutos e desigualdades.

Embora fundamental, esse conceito demorou mais de dois milênios para finalmente ser rigorosamente definido pelos matemáticos do século XIX.

Capítulo 2

Sequência e Série

2.1 Sequências Geométricas e PG

As Sequências Geométricas são conhecidas no âmbito do Ensino Médio, como Progressões Geométricas (PG) infinitas, mas uma Progressão Geométrica finita não é uma sequência, uma vez que o domínio da PG finita é um conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., m\}$ que é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Definição 2.1 *(Progressão Geométrica finita) Uma Progressão Geométrica finita, é uma coleção finita de números reais com as mesmas características que uma sequência geométrica, mas com um número finito de elementos. As Progressões Geométricas (PG) são caracterizadas pelo fato que a divisão do termo seguinte pelo termo anterior é um quociente fixo. Se este conjunto possui m elementos, ele pode ser denotado por*

$$G = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m)$$

No caso de uma Progressão Geométrica finita, temos os seguintes termos técnicos.

(i) m é o número de termos da PG,

(ii) n indica uma posição na sequência e também o índice para a ordem do termo geral na no conjunto G,

(iii) a_n é o n-ésimo termo da PG, que se lê a índice n,

(iv) a_1 é o primeiro termo da PG, que se lê a índice 1,

(v) a_2 é o segundo termo da PG, que se lê a índice 2,

(vi) a_m é o último elemento da PG,

(vii) q é a razão da PG, que pode ser obtida pela divisão do termo posterior pelo termo anterior, ou seja, na PG definida por

$$G = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Observação 2.1 *Na Progressão Geométrica (PG), cada termo é a média geométrica entre o antecedente (anterior) e o consequente (seguinte) do termo tomado, daí a razão de tal denominação para este tipo de sequência.*

Teorema 2.1 *(Fórmula do termo geral da PG)*

A fórmula do termo geral de uma PG de razão q, cujo primeiro termo é a_1, o número de termos é n e a_n é o n-ésimo termo, é

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Demonstração: Observamos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 = a_1 q^0 \\ a_2 &= a_1 q = a_1 q^1 \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\ \vdots &= \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_n &= a_{n-1} q = a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

Pelo princípio da indução finita, obtemos a fórmula do termo geral da PG,

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

□

Definição 2.2 *Quanto ao aspecto de monotonia, uma PG pode ser:*

(i) Crescente, se para todo $n \geq 1 : q > 1$ *e* $a_n < a_{n+1}$.

(ii) Constante, se para todo $n \geq 1 : q = 1$ *e* $a_n = a_{n+1}$.

(iii) Decrescente, se para todo $n \geq 1 : 0 < q < 1$ *e* $a_n > a_{n+1}$.

(iv) Alternada, se para todo $n \geq 1 : q < 0$.

Exemplo 2.1 .

(i) A PG definida por $U = (5, 25, 125, 625)$ *é crescente, pois* $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

(ii) A PG definida por $O = (3, 3, 3)$ *é constante, pois* $a_1 = a_2 = a_3 = 3$.

(iii) A Progressão Geométrica definida por $N = (-2, -4, -8, -16)$ *é decrescente, pois* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

(iv) A Progressão Geométrica definida por $N = (-2, 4, -8, 16)$ *é alternada, pois* $q = -2 < 0$.

Definição 2.3 (Interpolação geométrica) *Interpolar* k *meios geométricos entre dois números dados* a *e* b*, equivale a obter uma PG com* $k+2$ *termos, em que* a *é o primeiro termo da PG,* b *é o último termo da PG. Para realizar a interpolação geométrica, basta obter a razão da PG.*

Exemplo 2.2 *Para interpolar três meios geométricos entre 3 e 48, basta tomar* $a_1 = 3$, $a_n = 48$, $k = 3$ *e* $n = 5$ *para obter a razão da PG. Como* $a_n = a_1 q^{n-1}$*, então* $48 = 3q^4$ *e segue que* $q^4 = 16$*, garantindo que a razão é* $q = 2$*. Temos então a PG:* $R = (3, 6, 12, 24, 48)$.

Teorema 2.2 *(Fórmula da soma dos termos de uma PG finita) Seja a PG finita,* $Y = (a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1})$*. A soma dos* n *primeiros termos desta PG é dada por*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Demonstração: Seja a soma dos n termos dessa PG, indicada por:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}$$

Se $q = 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 = na_1$$

Se q é diferente de 1, temos

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima pela razão q, obtemos

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Dispondo estas expressões de uma forma alinhada, obtemos:

$$S_n = a_1 + a_1q + ... + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Subtraindo membro a membro, a expressão de baixo da expressão de cima, obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

que pode ser simplificada em

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

ou seja

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

que é a fórmula para a soma dos n termos de uma PG finita de razão $q \neq 0$. $\square$

Exemplo 2.3 *Para obter a razão da PG definida por* $W = \{3, 9, 27, 81\}$, *devemos dividir o termo posterior pelo termo anterior, para obter* $q = \frac{9}{3} = 3$. *Como* $a_1 = 3$ *e* $n = 4$, *substituímos os dados na fórmula da soma dos termos de uma PG finita, para obter:*

$$S_4 = 3\frac{3^4-1}{3-1} = 3\frac{81-1}{2} = 3\frac{80}{2} = 120$$

Confirmação: $S_4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

Observação 2.2 *Uma sequência geométrica (infinita) é semelhante a uma PG, mas nesse caso ela possui infinitos elementos, pois o domínio desta função é o conjunto* $\mathbb{N}$.

2.2 Sequências de Números Reais

Nessa seção discutiremos sobre os conceitos básicos e apresentaremos alguns resultados considerados importantes para um estudo sucinto das sequências numéricas.

Definição 2.4 *Uma* **sequência** *de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número natural* n *um número real* x_n*, chamado de* n **- ésimo termo** *da sequência.*

Escreveremos $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* (x_n)*, para indicar a sequência* x*.*

Não se deve confundir a sequência x com o conjunto de seus termos

$$x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, \},$$

que pode ser finito.

Exemplo 2.4 *A sequência* $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ *tem como conjunto dos seus termos o conjunto unitário* $\{1\}$*. Nesse caso, a função* x *é a função constante definida por* $x_n = 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 2.5 *A sequência* $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ *é infinita, com* $x_n = -(-1)^n = (-1)^{n-1}$*. Mas observe que o seu conjunto de valores possui somente dois valores,* $+1$ *e* -1*, ou seja,* $\{x_n\} = \{+1, -1\}$*.*

Definição 2.5 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

i) **limitada superiormente** *quando existe* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, ou seja,* $x_n \in (-\infty, b]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

ii) **limitada inferiormente** *quando existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,ou seja,* $x_n \in [a, +\infty)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

iii) **limitada** *quando é limitada superior e inferiormente, ou seja, quando existe* $a, b \in \mathbb{N}$ *tais que* $x_n \in [a, b]$ *para toto* $n \in \mathbb{N}$*.*

iv) **ilimitada** *quando não é limitada.*

Assim, uma sequência é limitada se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1 *A sequência (x_n) números reais é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.*

Prova: Observe que todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo centrado em 0 da forma $[-c, c]$ para algum $c > 0$. Basta tomar $c = max\{|a|, |b|\}$, pois $-c \leq a \leq b \leq c$, já que $c \geq |b| \geq b$ e $c \geq |a| \geq -a$, ou seja $-c \leq a$.

Uma vez que $x_n \in [-c, c]$ é o mesmo que $|x_n| \leq c$, a sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada. □

Definição 2.6 *Uma* **subsequência** *da sequência de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a restrição da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_2}\}$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$.*

Exemplo 2.6 *Consideremos o subconjundo $\mathbb{N}' = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$. Se olharmos a restrição da sequência $x(n) = \frac{1}{2^n}$ ao subconjunto $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ obtemos a subsequência $(\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^6}, \cdots, \frac{1}{2^{3n}}, \cdots)$.*

Definição 2.7 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é*

i) **crescente** *quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$. Se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência* **não-decrescente**.

ii) **decrescente** *quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$. Se $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é* **não-crescente**.

iii) As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes, não-crescentes são chamadas sequências **sequências monótonas**.

Lema 2.2 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotóna é limitada se, e somente se, possui uma subsequência limitada.*

Prova: Se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona é limitada, é fácil ver que toda sequência é limitada.

Seja $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \cdots \leq x_{n_k} \leq \cdots \leq b$ uma subsequência limitada da sequência não-decrescente (x_n). Note que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n_k > n$ e, portanto, $n_k \leq x_{n_k} \leq b$. Logo, $x_n \leq b$ para todo n. Consequentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Exemplo 2.7 *Sendo $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência constante $(1, 1, 1, \cdots)$. Então ela é limitada não-decrescente e não-crescente.*

Exemplo 2.8 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e consideramos a sequência $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

i) Se $a = 0$ ou $a = 1$, então $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou $x_n = 1$ $n \in \mathbb{N}$ respectivamente. Nestes casos, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante.

ii) Se $0 < a < 1$, a sequência é decrescente e limitada.

Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ por a^n obtemos $a^{n+1} < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim a sequência é decrescente.

Observe que, todos os termos dessa sequência são positivos e portanto $0 < a^n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

iii) Se $-1 < a < 0$ a sequência $(a^n)_{\mathbb{N}}$ não é monótona, pois seus termos são alternadamente positivos e negativos, respectivamente se n é par ou ímpar, contudo, a sequência é limitada.

De fato, como $|a^n| = |a|^n$, e $0 < |a| < 1$, pelo item (ii) e Lema 2.1 conclui-se a afirmação.

iv) Se $a = -1$ então a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $(-1, 1, -1, 1, \cdots)$ e é portanto, limitada, mas não é monótona.

v) Se $a > 1$ obtemos uma sequência crescente e ilimitada.

Com efeito, $a > 1$ e $a^n > 0$ temos que multiplicando $a > 1$ por a^n obtemos $a^{n+1} > a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência é crescete.

Quanto a ser ilimitada, seja $h > 0$ tal que $a = 1 + h$. Então, pela desigualdade de Bernoulli, $a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$. Dado $b \in \mathbb{R}$, existe n tal que $n > \frac{b-1}{h}$. Logo, $a^n \geq 1 + nh > b$.

Portanto, a sequência (a^n) é crescente e ilimitada.

vi) $a < -1$ a sequência (a^n) não é monótona, pois seus termos são alternadamente positivos e negativos, e não é limitada superiormente e não é limitada inferiormente.

Com efeito,

- *Os termos de ordem par,* $x_n = a^{2n} = (a^2)^n$, *formam uma subsequência crescente ilimitada superiormente, de números positivos, a sequência das potências do número* $a^2 > 1$.

- *Os termos de ordem ímpar,* $x_{2n-1} = a^{2n-1} = \frac{a^{2n}}{a}$, *formam uma subsequência decrescente ilimitada inferiormente, pois* $a < 0$ *e* $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente ilimitada inferiormente.*

Exemplo 2.9 *Seja* $0 < a < 1$ *e consideremos a sequência que tem como termo geral*

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + \cdots + a^n.$$

A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente, pois* $x_{n+1} = x_n + a^{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*; e da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão a, temos*

$$x_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} < \frac{1}{1-a}.$$

Portanto, $1 < x_n < \frac{1}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *logo é limitada.*

Em particular, se $a = \frac{1}{2}$, *temos* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Limite de uma Sequência

Intuitivamente, dizer que um número real a é limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ significa afirmar que, a medida que o índice n cresce, os termos x_n tornam-se e se mantém tão próximo do número a quando se deseje. Dizer que x_n vai-se tornando tão proximo de a quanto se deseje significa dizer que $|x_n - a|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ϵ, por menor que seja, desde que façamos o índice n suficientemente grande.

Definição 2.8 *Dizemos que o número real a é* **limite** *da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, e escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim x_n = a \qquad ou \qquad x_n \to a$$

quando, para todo número real $\epsilon > 0$, *é possível obter um número natural* n_0 *tal que*

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

para todo $n > n_0$.

Simbolicamente, temos que

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n. \equiv .\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Observe que se $\lim x_n = a$ então qualquer intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, de centro a e raio $\epsilon > 0$, contém os termos x_n da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices n. Com efeito, dado o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, como $\lim x_n = a$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Assim, fora do intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$.

Reciprocamente, se qualquer intervalo de centro a contém todos x_n, salvo talvez para um número finito de índices n então $\lim x_n = a$. Com efeito, dado quaquer $\epsilon > 0$, o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ conterá todos os termos x_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_0 o maior índice n tal que $x_n \notin (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Então $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, ou seja $|x_n - a| < \epsilon$. Isto prova que $\lim x_n = a$.

Teorema 2.3 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$ *então* $a = b$

Demonstração: Suponhamos $a \neq b$ e consideremos

$$\epsilon < \frac{|a - b|}{2}.$$

Se $\lim x_n = a$, então, para um certo n_1 temos

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Da mesma forma se, $\lim x_n = b$ então, para um certo n_2 temos

$$n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \epsilon.$$

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, de forma que $n > n_0$ nos leva simultaneamente a $n > n_1$ e $n > n_2$. Assim, $n > n_0$ implica que

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\epsilon < |a - b|,$$

o que é um absurdo. Logo $a = b$. □

Teorema 2.4 *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para o limite* a.

Demonstração: Seja $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_i})$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então

$$n_i > n_{i_0} \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \epsilon.$$

Logo, $\lim x_{n_k} = a$. □

Corolário 2.1 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *então para todo* $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

Demonstração: Com efeito, $(x_{1+k}, x_{2+k}, x_{3+k}, \cdots, x_{n+k}, \cdots)$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e pelo teorema anterior seu limite é a. □

Observação 2.3 .

- *O limite de uma sequência não se altera quando dela retiramos um número finito de termos. Ou melhor, pelo o teorema 2.4, o limite se mantém quando se omite um número infinito de termos desde que reste ainda um número infinito de índices.*

- *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui duas sequências com limites distintos então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente.*

- *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge e a subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* a, *então* $x_n \to a$.

Teorema 2.5 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para a. Então dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

Isto quer dizer que a partir do índece $n = n_0 + 1$, a sequência é certamente limitada: à direita por $a + \epsilon$ e à esquerda por $a - \epsilon$. Falta, então, acrescentarmos os termos restantes da sequência, para isso, basta considerarmos, dentre todos os números

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, a - \epsilon, a + \epsilon,$$

aquele que é o menor de todos, digamos m, e aquele que é o maior de todos, digamos M e então será verdade, para todo n, que

$$m \leq x_n \leq M,$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 2.4 *A recíproca do teorema 2.5 não é verdadeira. Por exemplo, a sequência* $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ *é limitada, mas não é convergente, pois* $x_{2n} = 1 \to 1$ *e* $x_{2n-1} = 0 \to 0$, *ou seja* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possui duas subsequências que convergem para limites diferentes.*

Observação 2.5 *Se uma sequência não é limitada, ela não é convergente.*

Teorema 2.6 Bolzano-Weierstrass

Toda sequência limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Ver [3].

Teorema 2.7 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Consideremos, para fixar as idéias, a sequência $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots)$ não-decrescente limitada. A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, ou seja, seu conjunto de valores possui supremo $a = sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Vamos mostrar $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Dado $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos termos da sequência. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona,

$$n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$$

e, portanto,

$$a - \epsilon < x_n.$$

Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que

$$n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

Assim, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

De modo análogo, podemos provar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente então $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. □

Corolário 2.2 *Se uma sequência monótona $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2, a sequência monótona $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada porque possui subsequência convergente e, portanto limitada. Então, pelo teorema anterior,$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. □

Exemplo 2.10 *Seja $a \in \mathbb{R}$ a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então:*

- *Se $a = 1$ ou $a = 0$, a sequência constante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e tem limite 1 e 0, respectivamente.*

- *Se $a = -1$, a sequência $(-1, 1, -1, 1, \cdots)$ é divergente, pois possui duas subsequências, $(x^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(x^{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, que converge para limites diferentes.*

- *Se $a > 1$ a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente, pois é crescente e ilimitada superiormente.*

- *Se $a < -1$, a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente, pois não é limitada superiormente nem inferiormente.*

- *Se $0 < a < 1$, a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada, logo, convergente. Além disso, $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$.*

  Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\epsilon}$ para todo $n \geq n_0$, pois a sequência $\left((\frac{1}{a})^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e ilimitada superiormente, já que $\frac{1}{a} > 1$. Logo, $-\epsilon < a^n < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Observação 2.6

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0.$$

Exemplo 2.11 *Se $0 < a < 1$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},.$$

é convergente porque é crescente e limitada superiormente. Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{1-a}.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^n| < \epsilon(1-a)$ para todo $n > n_0$. Logo, $\left|x_n - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{|a^{n+1}|}{1-a} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

O mesmo valor para a tal que $0 \leq |a| \leq 1$, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{1-a}$, apesar de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, não ser monótona para $-1 < a < 0$. □

2.4 Sequências de Cauchy

Definição 2.9 *Dizemos que uma sequência (x_n) é de Cauchy quando para todo $\epsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|x_m - x_n| < \epsilon$ quaisquer que sejam m, $n > n_0$.*

Para (x_n) ser uma sequência de Cauchy, exige-se que seus termos x_m e x_n, para valores suficientemente grande dos índices m e n, se aproximam arbtrariamente uns dos outros, a partir de um determinado índice.

Lema 2.3 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, quaisquer que sejam $m, n > n_0$.

Logo, $|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todos $m, n > n_0$. □

Lema 2.4 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\epsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1,$$

ou seja,

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1).$$

Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}.$$

Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (x_n) é limitada. □

Lema 2.5 *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{N}$ então* $\lim x_n = a$.

Prova: Sendo (x_n) uma sequência de Cauchy temos que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja (x_{n_i}) uma subsequência de (x_n) convergindo para a. Então existe $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Com isso mostramos que $\lim x_n = a$. □

Teorema 2.8 *Toda sequência de Cauchy de números reais converge.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy.

Pelo Lema 2.4, ela é limitada. Consequentemente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência convergente. Finalmente do Lema 2.5 temos que (x_n) é convergente. □

2.5 Séries Numéricas

Em matemática, o conceito de séries, ou ainda, de série infinita, surgiu da tentativa de generalizar o conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

A partir de uma sequência de números reais (a_n) formamos uma nova sequência (s_n), cujos termos são somas:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N},$$

que chamamos as **reduzidas** da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

A parcela a_n é chamado o **n-ésimo termo** ou **termo geral** da série.

Se existe o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

dizemos que a série é **convergente** e que s é a soma da série. Escrevemos, então

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Se a sequência das reduzidas não converge, dizemos que a série $\sum a_n$ é **divergente**.

Observação 2.7 *Toda sequência (x_n) de números reais pode ser considerada como a sequência das reduzidas de uma série*

De fato, basta tomar $a_1 = x_1$ e $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois assim, teremos:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = x_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = x_1 + x_2 - x_1 = x_2, \\ \vdots &= \vdots \\ s_n &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n. \end{aligned}$$

Assim, a série $x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ converge se, e somente se, a sequência (x_n) é convergente. E, neste caso, a soma da série é igual a $\lim x_n$,

Teorema 2.9 *Se $\sum a_n$ é uma série convergente, então, $\lim a_n = 0$.*

Demonstração: Seja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Evidentemente, tem-se $\lim s_{n-1} = s$.

Logo,

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$$

□

Exemplo 2.12 *A recíproca do teorema acima é falsa.*

De fato, basta considerar a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero, mas a série diverge.

Com efeito, para $n \geq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

Logo, a subsequência s_{2^n} tende a $+\infty$. Como a sequência (s_n) é crescente e ilimitada superiormente, temos que $s_n \to +\infty$, ou seja, a série harmônica diverge.

Teorema 2.10 *(Soma de uma série geométrica)*

Seja uma sequência geométrica $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $x(n) = a_1 q^{n-1}$, cujos termos estão no conjunto infinito:

$$F = (a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \cdots, a_1 q^{n-1}, \cdots).$$

Se $-1 < q < 1$, a soma dos termos desta sequência geométrica, é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Demonstração: A soma dos termos desta sequência geométrica é a série geométrica de razão q e não é obtida da mesma forma que no caso das PGs (finitas), mas o processo finito é usado no presente cálculo.

Consideremos a soma dos termos desta sequência geométrica, como:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que também pode ser escrita da forma

$$(a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots)$$

ou na forma simplificada

$$S = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)$$

A expressão matemática dentro dos parênteses

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

é carente de significado pois temos uma quantidade infinita de termos e dependendo do valor de q, esta expressão, perderá o sentido real.

Analizaremos alguns casos possíveis, sendo que o último é o mais importante nas aplicações.

(i) Se $q > 1$, digamos $q = 2$, temos que

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots = \infty$$

e o resultado não é um número real.

(ii) Se q = 1, temos que

$$S = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty$$

e o resultado não é um número real.

(iii) Se q = - 1, temos que

$$s = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 + \cdots$$

e dependendo do modo como reunirmos os pares de números consecutivos desta PG, obtemos:

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1$$

mas se tomarmos:

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0$$

ficará claro que $q = -1$, a soma dos termos desta série se tornará complicada.

(iv) Se $q < -1$, digamos $q = -2$, temos que

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 + \cdots + 2^{n-1} - 2^n + \cdots$$

que também é uma expressão carente de justificativa.

(v) Se $-1 < q < 1$, temos o caso mais importante para as aplicações.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

A soma dos n primeiros termos desta série geométrica, será indicada por

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1},$$

e já mostramos antes que

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Mas se tomamos $-1 < q < 1$, a potência q^n se aproxima do valor zero, à medida que o expoente n se torna muito grande sem controle (os matemáticos dão o nome infinito ao pseudo-número com esta propriedade).

Para obter o valor de soma, devemos tomar o limite de S_n quando n tende a infinito. Assim, concluímos que para $-1 < q < 1$, vale a igualdade:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

De uma forma geral, se $-1 < q < 1$, a soma

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$$

pode ser obtida por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

□

Exemplo 2.13 1. *Para obter a soma dos termos da sequência geométrica* $S = (2, 4, 8, \cdots)$, *devemos obter a razão, que neste caso é* $q = 2$. *Assim, a soma dos termos desta PG infinita é dada por:*

$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

e esta série é divergente.

2. *Para obter a soma dos termos da sequência geométrica definida polo conjunto* $Y = (5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \cdots)$, *temos que a razão é* $q = \frac{1}{2}$ *e* $a_1 = 5$, *recaindo no caso* (5), *assim, basta tomar*

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10$$

Observação 2.8 *A série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *é*

- *divergente, se* $|a| \geq 1$, *pois, neste caso, seu termo geral* a^n *não tende para zero.*

- *convergente, se* $|a| < 1$, *pois, neste caso, a sequência das reduzidas é*

$$s_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

que tende para $\frac{1}{1-a}$. *Isto é,* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, *se* $|a| < 1$.

Exemplo 2.14 *Considere a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Trata-se de uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$, *cujo o valor absoluto é inferior a* 1, *donde se conclui que a série é convergente tendo-se* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Exemplo 2.15 *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n-1}$, *de razão* $r = -2$, *é divergente uma vez* $|r| \geq 1$.

Capítulo 3

Paradoxo da Dicotomia

3.1 Escola de Eleia

Tudo começou na Escola de Eleia onde Zenão (Zenon - nome grego) foi discípulo. A Escola foi fundada na cidade de Eleia, hoje Vélia, Itália, por Parmênides dizem uns e por Xenófanes dizem outros. Eleia era uma cidade portuária, com vários templos e com muralhas de grande extensão, situada a sudoeste de Itália.

Parmênides nasceu em Eleia cerca de 515-510 a.C., filósofo, poeta e o fundador da Escola Eleática."O principio fundamental dos Eleáticos era a unidade e a permanência do ser, ponto de vista que contrastava profundamente com as ideias pitagóricas de multiplicidade". Houve três teorias de Parmênides que ficaram famosas: "o ser e o não ser"onde comparava qualidades opostas e ordenava-as, por exemplo, o masculino em oposição ao feminino e cada um apenas com a negação do outro, em que o não ser era uma oposição do ser; "o vir a ser"que segundo Parmênides era quando o "ser e o não ser"agiam conjuntamente; E "o ser-absoluto"que era a unidade eterna (ver [8]).

Zenão concordava com as doutrinas do seu mestre, mas, utilizou métodos indiretos para defendê-las, como a redução ao absurdo. "... o método usado por Zenão era o método dialético, antecipou-se assim a Sócrates no uso do método indireto da razão que consiste em partir das premissas para terminar reduzindo-as ao absurdo". Não se sabe muito bem ao certo quando Zenão nasceu e morreu, diz-se que nasceu entre

496- 488 a.C. e morreu por volta de 435-425 a.C. Na sua juventude escreveu **Epicheiremata** onde defendeu a diferença entre o ser Uno, contínuo e indivisível (doutrina de Parmênides) contra o ser Múltiplo, descontínuo e divisível (doutrina de Heraclito e Pitágoras).

Zenão e os Seus Paradoxos

"Em 450 a.C. o pensador Zenão de Eleia propôs uma série de Paradoxos", onde tentou explicar os conceitos de movimento e de tempo, e foi assim que surgiram as primeiras ideias que iriam conduzir ao conceito de **limite**. A palavra **Paradoxo** vem do grego "Paradoxos", que significa contrário à previsão ou à opinião comum, portanto é uma afirmação que parece ser contraditória, incrível ou absurda, isto é, é tão absurda que jamais poderá ser verdadeira.

Os quatro Paradoxos bem conhecidos são:

- O Paradoxo da Dicotomia;
- O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga;
- O Paradoxo da Seta Voadora;
- O Paradoxo das Fileiras em Movimento ou Paradoxo do Estádio.

Nestes Paradoxos Zenão mostrou que se o conceito de contínuo e de divisão infinita for aplicado ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe; parecem ilógicos, confusos, mas são simples de explicar e conduzem a problemas matemáticos. Vamos então analisar o Paradoxo da Dicotomia.

No Paradoxo chamado a **Dicotomia**, Zenão parte da suposição de que certa distância tem infinitos pontos, e que um corredor teria que passar por todos eles antes de atingir a linha de chegada, para concluir que o corredor nunca atinge seu objetivo. Assim, a razão mostra que o movimento é impossível, e o que vemos é uma ilusão.

O que este paradoxo diz que é que não há movimento porque aquilo que se move tem de chegar à meio do seu percurso antes de chegar ao fim. Que aquilo que se move de um lado para o outro tem de primeiro chegar à meio do seu percurso, nada tem de extraordinário ou paradoxal, a conclusão de que isso implica que o movimento é impossível é que é estranha.

Um corredor nunca pode alcançar a meta numa corrida porque tem sempre que correr metade de qualquer distância antes de correr a distância total. Quer isso dizer que, tendo corrido a primeira metade, terá ainda que correr a segunda metade. Quando tiver corrido a metade desta, falta-lhe a oitava parte do inicial e assim *indefinidamente*.

Analisando o problema, Zenão concluiu que desta maneira o atleta nunca chegaria à meta. Portanto o movimento era impossível.

O argumento de Zenão está bem formulado embora com um pressuposto errado: o de que é impossível transpor uma infinidade de parcelas de espaço num tempo finito.

A soma de um número infinito de parcelas positivas pode ser um número finito, o contrário do que se pensava na Escola Eleática.

Zenão o Filósofo e Lógico

Zenão com este Paradoxo queria provar que o movimento não existe que este tal como as mudanças e as transformações físicas eram ilusões provocadas pelos nossos sentidos. Não nos podemos esquecer que Zenão era um eleata, todas estas questões eram tratadas, na altura, mais filosoficamente do que matematicamente.

Zenão era, sobretudo filósofo e lógico, mas os seus Paradoxos contribuíram para o desenvolvimento do rigor lógico e matemático e foram considerados insolúveis até ao desenvolvimento dos conceitos de continuidade e infinito. Ele foi o primeiro grande questionador na história da matemática, os seus Paradoxos espantaram matemáticos durante séculos e a tentativa de resolvê-los conduziu a numerosas descobertas.

Como consequência destes Paradoxos os Gregos desenvolveram o que se chamou de Horror ao Infinito.

Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência em particular para o infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los de parte, ficando ao "abandono"por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes Paradoxos podem ser explicados de um modo razoavelmente satisfatório. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos Paradoxos e as suas racionalizações.

Por exemplo, parece-nos natural dizer que o atleta chegará à meta, portanto a conclusão de Zenão é absurda, pois não corresponde à realidade, e que por isso o Paradoxo deva ser rejeitado. Mas, não adianta constatar o absurdo, é preciso apontar a falha no raciocínio de Zenão neste Paradoxo, como é tópico do raciocínio matemático.

3.2 Paradoxo da Dicotomia

Um corredor nunca pode alcançar a meta numa corrida porque tem sempre que correr metade de qualquer distância antes de correr a distância total. Ou seja, tendo corrido a primeira metade, terá ainda que correr a segunda metade. Quando tiver corrido a metade desta, falta-lhe a oitava parte do inicial e assim *indefinidamente*.

Zenão referia-se à corrida idealizando, evidentemente, uma situação na qual o corredor é considerado como um ponto em movimento de um extremo do segmento até ao outro extremo do segmento de reta.

Assim sendo, numa pista de corrida ou num estádio, seria sempre impossível chegar à meta, daí que haja quem dê esse nome ao Paradoxo (Paradoxo do corredor), se bem que o mais comum seja dicotomia devido à constante divisão por dois.

Pode-se considerar que o erro neste Paradoxo é o de confundir uma distância infinita com uma distância finita infinitamente divisível, como é o caso, pois entre dois pontos não temos uma distância infinita, mas uma distância que poderíamos dividir infinitamente.

A resposta para este problema não passa pelo simples argumento de que para dizer que de fato juntando todas as metades obter-se-ia a totalidade do percurso, pois se poderia reformular o enunciado (mantendo as ideias subjacentes) substituindo as metades por terços: antes de percorrer todo o projeto tem-se de percorrer um terço do trajeto; mas antes de percorrer um terço, tem-se de percorrer um terço do terço, um nono; e assim sucessivamente, mas o que não implicaria que não se completasse o trajeto.

Dizer que o corredor nunca atinge a meta, significa que ele não pode atingir esse ponto ao fim dum intervalo de tempo finito; ou, por outras palavras, que a soma de um número infinito de intervalos positivos de tempo não pode ser certamente finita.

Jamais se poderia em tempo finito contactar com um número infinito de coisas, só que isso não inviabiliza que se contacte com coisas infinitas no que diz respeito à divisibilidade porque, neste sentido, o próprio tempo é também infinitamente divisível. Existem infinitos pontos no espaço percorrido, mas também são infinitos os momentos do tempo utilizado para percorrê-lo.

Podemos formular o paradoxo de outra maneira. Suponhamos que o corredor parte do ponto 0 e corre para o ponto 1.

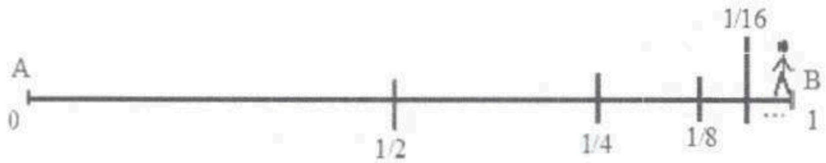

Figura 3.1: O corredor parte do ponto 0 e corre para o ponto 1.

As posições assinaladas com $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc., indicam a fração do percurso que falta percorrer quando esses pontos são alcançados.

Estas frações, cada uma das quais vale metade da anterior, subdividem o percurso total num número indefinido de pequenos segmentos cada vez menores.

Para percorrer cada um desses segmentos é necessário um certo intervalo de tempo e o tempo exigido para correr todo o percurso é a soma total de todos estes intervalos parciais.

Dizer que o corredor nunca atinge a meta, significa que ele não pode atingir esse ponto ao fim dum intervalo de tempo finito; ou, por outras palavras, que a soma dum número infinito de intervalos positivos de tempo não pode ser certamente finita.

"O problema por trás da Dicotomia, parece repousar na intuição de que o corredor demora um tempo finito mínimo para percorrer cada intervalo espacial sucessivo. Como há infinitos desses intervalos, o tempo de transcurso seria infinito. Porém, sabemos que essa intuição é errônea: o tempo de percurso por cada intervalo é proporcional ao comprimento do intervalo (supondo velocidade constante). Da mesma maneira que os intervalos espaciais somam 1 na série convergente, os intervalos temporais também o fazem. O corredor acaba completando o percurso!" (ver [7]).

Incoerências do Paradoxo

Ao se afirmar que, por tal argumento explicito acima, que o corredor nunca pode alcançar a meta, Zenão desconsidera qualquer reflexão sobre o que é o tempo. A conclusão de que corredor nunca pode alcançar a meta se sustenta sobre o argumento de infinitos deslocamentos simultâneos, mas que representam sempre metade em relação ao deslocamento anterior. Analogamente, o tempo transcorrido para cada deslocamento irá ser de metade do tempo do deslocamento anterior. Logo, tem-se que o tempo transcorrido é uma progressão geométrica de razão inferior a "um", o que significa que somando-se os infinitos intervalos de tempo dessa progressão, haverá um valor limite ao qual o somatório converge. Encontra-se, então, uma incoerência no paradoxo, porque ele define que corredor nunca pode alcançar a meta, porém a análise temporal demonstra que isto acontecerá apenas neste intervalo de tempo fixo.

3.3 Análise Matemática do Paradoxo

A solução clássica para esse paradoxo envolve a utilização do conceito de limite e convergência de séries numéricas. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para o corredor alcançar a meta. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma série geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que o corredor irá alcançar a meta.

Velocidade Constante

Tempo Gasto

Consideremos a seguinte situação: um corredor desloca-se, a uma velocidade constante, entre dois pontos que se encontram em linha reta, A e B, no que gasta certo tempo T.

Para atingir o ponto B terá primeiro que efetuar o percurso até o ponto médio entre A e B, o que lhe demorará o tempo $\frac{T}{2}$, terá depois que chegar ao ponto médio entre este e B, ou seja percorrer metade da distância restante, no que gastará o tempo $\frac{T}{4}$ e assim sucessiva e indefinidamente.

O tempo total que lhe demorará o trajeto entre A e B é, assim, dada pela expressão

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\cdots+\frac{T}{2^n}+\cdots$$

Temos, então, uma "soma"com uma infinidade de parcelas, todas positivas, o que nos pode leva a pensar que o seu resultado é infinito. No entanto, o valor da "soma"tem que ser T, pois este é o tempo que o corredor gasta no percurso.

Consideremos novamente a soma

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\cdots+\frac{T}{2^n}+\cdots.$$

Naturalmente, não podemos somar um número infinito de parcelas, mas podemos somar cada vez mais parcelas, calculando as chamadas somas parciais.

Com efeito, se calculamos vários destas somas parciais, encontramos

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{T}{2},\\
s_2 &= \frac{T}{2}+\frac{T}{4},\\
s_3 &= \frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8},\\
&\vdots\\
s_n &= \frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\cdots+\frac{T}{2^n}
\end{aligned}$$

e estudar o comportamento destas somas, quando n tende para $+\infty$.

O valor da "soma"infinita será, caso exista, o limite desta sequência.

Neste caso, a soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $\frac{T}{2}$, pelo que

$$s_n=\frac{T}{2}.\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=T\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)$$

Quando n tende para $+\infty$, s_n tende para T, que é o tempo efetivamente gasto pelo corredor.

Este processo limite parece invalidar a afirmação de que a soma de um número infinito de intervalos de tempo não pode ser nunca finita.

Onde o corpo deve chegar

Agora vamos determinar exatamente o ponto onde o corpo deve chegar.

Dado que um corpo deve-se percorrer uma determinada distância, digamos entre 0 e 1, onde o corpo inicia o trajeto do ponto 0 e segue em direção ao ponto 1.

Considere que o intervalo AB é igual a 1. O ponto M_1 divide o intervalo ao meio, portanto a primeira metade equivale a $\frac{1}{2}$. O segundo ponto, M_2, divide a metade restante ao meio, portanto equivale a $\frac{1}{4}$ do comprimento original. Logo, o intervalo pode ser expresso como uma soma de intervalos que cresce ilimitadamente por partes que sempre são menores que a imediatamente anterior:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Com efeito, se calculamos vários destas somas parciais, encontramos

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}, \\ s_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \\ s_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \\ &\vdots \\ s_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

e estudar o comportamento destas somas, quando n tende para $+\infty$.

Neste caso, a soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $\frac{1}{2}$, pelo que

$$s_n = \frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)$$

Quando n tende para $+\infty$, s_n tende para 1.

Portanto, o resultado da soma obtida é justamente o valor da distância que o corpo deverá chegar ao final do percurso e com esse cálculo podemos concluir que é possível dado uma determinada distância um corpo no estádio percorra todo o trajeto. Nesse caso, o resultado assim obtido é exatamente o valor da distância que o corpo deverá percorrer, ou seja, o intervalo considerado entre 0 e 1, partindo do ponto 0 e ao final do percurso o corpo chegará exatamente no ponto 1.

Geometricamente, nunca chegaremos ao ponto B, veja: saindo do ponto 0 em direção ao ponto 1, temos que primeiro passar pelo ponto $\frac{1}{2}$(metade do espaço 0 - 1), depois pelo ponto $\frac{1}{4}$ (metade do espaço $\frac{1}{2}-1$), $\frac{1}{8}$(metade $\cdots$), $\frac{1}{16}$ (metade $\cdots$), $\frac{1}{32}$(metade $\cdots$), conforme a Figura 3.2.

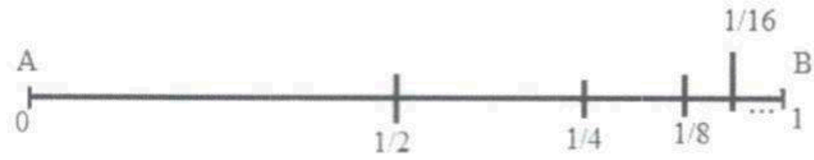

Figura 3.2: Interpretação Geométrica

Velocidade não Constante

Vamos agora apresentar um argumento que proporciona um considerável apoio ao ponto de vista de Zenão.

Suponhamos que a sua velocidade decresce gradualmente de tal maneira que ele gasta:

- T minutos para ir de 1 a $\frac{1}{2}$,
- $\frac{T}{2}$ minutos para ir de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$,
- $\frac{T}{3}$ minutos para ir de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{8}$ e,
- em geral, $\frac{T}{n}$ minutos para ir de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$.

O "tempo total"que gasta na corrida pode representar-se pela a série infinita:

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{3}+\cdots+\frac{T}{n}+\cdots \tag{3.1}$$

Neste caso o nosso sentido físico não sugere qualquer "soma"natural ou óbvia para atribuir a esta série e por isso devemos confiar inteiramente na análise matemática para tratar deste exemplo.

Procedamos como no caso anterior introduzindo as somas parciais s_n ou seja

$$s_n=T+\frac{T}{2}+\frac{T}{3}+\cdots+\frac{T}{n} \tag{3.2}$$

O nosso objetivo consiste em analisar o que acontece a s_n quando n cresce indefinidamente.

A teoria geral das séries infinitas faz uma distinção entre a série geométrica cujas as somas parciais tem limite finito e as séries harmônicas

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{3}+\cdots+\frac{T}{n}+\cdots$$

cujas somas parcias tendem para um limite infinito.

Por outras palavras, se a velocidade do corredor decresce da maneira que se indica atrás, devemos concordar com Zenão e concluir que o corredor não pode atingir a meta ao fim de qualquer intervalo de tempo finito.

3.4 Considerações Finais

Com a solução deste paradoxo esclarece o que por muitos séculos intrigava os matemáticos e conclui-se que Zenão de Eleia fez uso de um pressuposto errôneo para formular o paradoxo. O argumento que conduziu o Eleáta ao erro foi o de que seria impossível transpor um número infinito num espaço de tempo finito. Isso quer dizer que dado um certo intervalo, digamos 0 e 1, há infinitos pequenos intervalos, mas para Zenão se somar todos esses intervalos por mais pequenos que fosse, a soma resultaria em um número muito grande e que seria impossível partindo do ponto 0 e chegar ao final do percurso, no caso, alcançar o ponto 1, pois teria que sempre percorrer metade do percurso em um processo infinito.

A resolução deste Paradoxo leva a uma ideia inquietante: ao contrário do que se pensava na escola de Zenão, a soma de um número infinito de parcelas positivas pode ser um número finito!

Ou seja, é frequente muitas das intuições humanas estarem completamente erradas. Aliás, aquilo que é costume designar por "bom senso"poderia levar-nos a concluir, por exemplo: o Sol anda á volta da Terra. Com efeito, todos os dias o vemos aparecer, seguir uma determinada trajetória e mais tarde desaparecer. E o "bom senso"parece-nos mostrar que, estando nós em repouso, é com certeza o Sol que se desloca...

E são as estruturas matemáticas que, quando criadas e formalizadas, não só vêm resolver e dar luz a grandes mistérios, como também ajudam a abrir as nossas mentes e compreender situações que de outro modo seriam incompreensíveis. Claro que na Grécia Antiga ainda não se conhecia o conceito de limite e este só foi formalmente descoberto vinte e quatro séculos mais tarde com Cauchy (1789-1857).

Referências Bibliográficas

[1] APOSTOL, Tom M. *Cálculo I: Cálculo com Funções de uma Variável, com uma Indrodução à Álgebra Linear*. Edição em Português: Editora Reverté, S.A., 1988.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Revista por Uta C. Marzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ªed. – São Paulo: Edgard Brucher, 1996.

[3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 1*. 12ª.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

[4] SODRÉ, Ulysses. *Elementos de Análise na Reta: Sequências Geométricas e PG*. Matemática UEL Londrina-PR, 2008.

[5] THOMAS, George B. *Cálculo I* (George B. Thomas J r.) 12ª.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

[6] THOMAS, George B. *Cálculo II* (George B. Thomas J r.) 12ª.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

[7] *Paradoxos de Zenão*. Disponível em http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-12-Cap-1.pdf (Acessado em 20/12/2012).

[8] *Zenão e seus Paradoxos*. Disponível em http://www.google.com.br/#sclient=psy-ab&q=Zenão+e+seus+Paradoxos+tmmat (Acessado em 20/12/2012).