UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Área e a Fórmula de Pick

Jaqueline Silva Nascimento

Cuité - PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Área e a Fórmula de Pick

Jaqueline Silva Nascimento

Cuité - PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

N244a Nascimento, Jaqueline Silva.

Área e a fórmula de Pick. / Jaqueline Silva Nascimento – Cuité: CES, 2013.

34 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Co-orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Geoplano. 2. Área. 3. Fórmula de Pick. I. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Área e a Fórmula de Pick

Jaqueline Silva Nascimento

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do graude Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 23 de abril de 2013.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)

Joseilson R. Lima.

Prof. Joseilson Raimundo de Lima

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos.

Aos meus pais, pela orientação, dedicação e incentivo nessa fase do meu curso e durante toda minha vida.

Ao meu esposo Edilson e a minha filha Bianca.

A minha irmã, Joanita, que sempre está disposta a ajudar no que for necessário.

Aos amigos, Renato Silva, Gerivaldo, Socorro, Adriana e Jucileide, pela união e apoio, por sempre me ajudar com boa vontade e muita calma.

Aos amigos íntimos pelo incentivo e conselhos nas horas mais difíceis.

Aos professores e colegas que colaboraram com as diversas discussões sobre a prática docente, principalmente a minha orientadora Márcia Cristina Silva Brito, minha co-orientadora Maria Gisélia Vasconcelos, pois sem elas este trabalho não teria rumo algum e ao professor Joseilson Raimundo de Lima que se dispôs a fazer parte desta banca e pelas sugestões.

Enfim, sou grata a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

Este Trabalho de Conclusão de Curso é dedicado aos meus pais, o Sr. Benedito Bras do Nascimento e a Sra. Marisa Maria da Silva Nascimento e a minha filha, Bianca Nascimento Martins, que são razões da minha existência.

"Deus está sempre comigo, ele não me abandona nunca!"

Jaqueline Silva Nascimento

Resumo

O objetivo deste trabalho é trabalhar alguns conceitos ligados a medidas de áreas de figuras planas. Procuraremos explicitar um breve histórico do conceito de área, uma síntese de área enquanto conceito (objeto matemático) e alguns estudos sobre o conteúdo área. E apresentar o material didático manipulável denominado geoplano nos seus diferentes tipos (quadrado, isomérico, circular e oval) como uma possibilidade no ensino-aprendizagem da matemática do Ensino Básico, sobretudo com atividades geométricas. Dentre as atividades propostas serão enfatizados o estudo das figuras geométricas planas e área, com isso, procuramos reunir as diferentes ideias presentes na construção e evolução do conceito de área, apresentando a dedução das fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples, a partir da composição e decomposição de figuras, a demonstração do cálculo da área de figuras irregulares, através da Fórmula de Pick que relaciona a área de um polígono simples cujos os vértices têm coordenadas inteiras com um número de pontos no seu interior e no seu bordo.

Palavras-chave: Geoplano. Área. Fórmula de Pick.

Abstract

The objective of this work is to work some concepts linked to measures of area of plane figures. We will try to explain a brief history of the concept of area, while a synthesis of area magnitude (mathematical object) and some studies content area. This work presents the courseware manipulable called Geoplano in its different types (isometric, circular, oval and squared) as a possibility in the teaching and learning of mathematics at primary school, especially with geometric activities. Among the proposed activities will emphasize the following contents: the study of geometric figures and flat area. We seek to bring together the different ideas present in the construction and evolution of the concept of area, with the deduction of the usual formulas for the areas of simple polygons, from the composition and decomposition of figures, the demonstration of calculating the area of irregular figures by formula Pick. Pick's formula relates the area of a simple polygon whose vertices have integer coordinates with a number of points in its interior and on its edge.

Keywords: Geoplano. Area. Pick's Theorem.

Sumário

Introdução **9**

1 Aspectos Históricos **10**

1.1 Área 10

1.2 O Geoplano 11

1.3 Fórmula de Pick 12

2 Área de Figuras Planas **13**

2.1 Área de Polígonos 13

2.2 Área de um Polígono Qualquer 18

2.3 Área de Polígonos Regulares 19

3 A Fórmula de Pick **20**

3.1 Cálculo da área de polígonos 20

Referências Bibliográficas **34**

Introdução

O cálculo de área é muito utilizado desde as séries iniciais do ensino básico. Inicialmente, usamos o conceito de área como sendo a medida de superfícies e logo após, passamos a calcular áreas utilizando as fórmulas.

Este trabalho envolve um estudo com o cálculo de áreas de polígonos situados sobre uma malha retangular, mais precisamente, no *geoplano*, com o intuito de deduzir o cálculo da área de figuras planas com contornos regulares e irregulares.

Assim, vamos reunir algumas ideias na criação e evolução do conceito de *Área*, do *Geoplano* e também da *Fórmula de Pick*, expondo os aspectos históricos.

Também, a dedução das fórmulas usuais para o cálculo das áreas dos polígonos mais simples, utilizando como unidade padrão de medida o quadrado unitário, cuja área mede uma unidade de área.

Para calcular a área de figuras planas com contornos irregulares aplicamos a *Fórmula de Pick*, a qual definimos e, em seguida, apresentamos a demonstração da *Fórmula de Pick* para regiões poligonais.

Este trabalho é dividido em três capítulos. O primeiro aborda os aspectos históricos, onde fala sobre a noção de Área de Figuras Planas, o surgimento do Geoplano, quem o criou e a da Fórmula de Pick. No segundo capítulo, estudamos a dedução das fórmulas usuais para o cálculo de áreas de figuras planas utilizando o quadrado unitário como unidade, que sua área mede uma unidade de área. No capítulo três, analisaremos certas figuras geométricas desenhadas no plano cartesiano com vértices nos pontos de uma malha retangular, com coordenadas inteiras com o objetivo de encontrar a área dessas figuras, obtendo uma fórmula que seja válida para todos os casos.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

1.1 Área

Uma das primeiras noções geométricas a despertar o interesse do ser humano foi o cálculo de áreas. Ele é milenar. Tanto os egípcios quanto os babilônios (povos que habitaram a Mesopotâmia, região que hoje corresponde ao Iraque) já reconheciam o cálculo de áreas de figuras geométricas simples. Esses conhecimentos foram motivados por questões práticas de agrimessura. Sabemos que geometria significa literalmente "medida de terra".

Segundo LIMA(1991) nos Elementos de Euclides, os segmentos de reta não podem ser medidos, pois há segmentos incomensuráveis com qualquer unidade que se adote, dois segmentos eram comparados pela a razão entre eles e como não existia os números irracionais, a razão entre eles não podiam ser representados por números racionais. E com isso, não havia medida de áreas na Matemática grega. Euclides nem se deu ao trabalho de definir área.

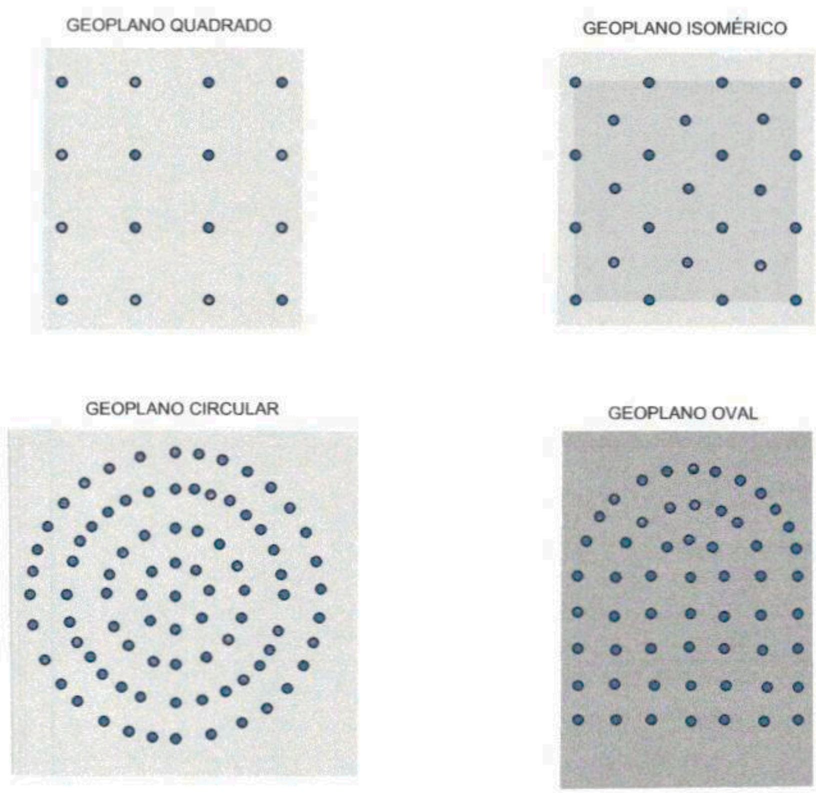
Nos Elementos, duas figuras são iguais quando têm o mesmo comprimento se são segmentos, a mesma área se são figuras planas, o mesmo volume se são sólidos ou a mesma abertura se são ângulos. A noção de figuras que coincidem por superposição, ou seja, que são congruentes, só veio a ter interesse independente em Geometria muito depois. A coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. Portanto, Euclides enuncia que triângulos e paralelogramos com bases iguais e situados entre as mesmas paralelas são iguais, isto quer dizer que as figuras em questão têm a mesma área.

1.2 O Geoplano

A palavra geoplano vem do inglês *geoboards* ou do francês *geoplans* onde *geo* vem de geometria e *plan* significa plano, tabuleiro, tábua ou superfície plana.

Um dos primeiros trabalhos sobre o geoplano foi do Dr. Calleb Gatteno em 1961. Ele foi reconhecido pelas inovações no ensino e na aprendizagem sobre a matemática. O geoplano chega como um recurso didático para o ensino da geometria plana elementar, entre outros. É uma forma de despertar a curiosidade e estimular as crianças a fazer perguntas, a criar hipóteses, a descobrir chegando a diversas conclusões.

Tipos de Geoplano



Ele é formado por uma placa de madeira e pregos dispostos formando uma malha, faz parte também desta placa, elástico ou barbantes, de preferência coloridos, com os quais podemos prendê-los aos pregos desenhando e formando figuras geométricas sobre o geoplano.

As atividades com o geoplano proporcionam a exploração de diversos conteúdos matemáticos, onde podemos destacar os seguintes:

- Introdução à geometria: Ponto, reta e plano, semirreta, semiplano; Estudo de diferentes tipos de polígonos como triângulos e quadriláteros; Teorema de Tales; Conceitos de medidas; Simetria; Comparações e medidas de áreas; Números quadrados perfeitos; Teorema de Pick; Ampliação e redução de figuras; Ângulos; Teorema de Pitágoras, Análise combinatória, entre outros.

1.3 Fórmula de Pick

A fórmula de Pick foi publicada em 1899 pelo matemático Georg Alexander Pick, que nasceu em 1859 em Viena de Áustria e morreu em 1943, durante a segunda guerra mundial, no campo de concentração em Theresienstadt. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da Matemática. Esta fórmula, que ficou conhecida como o **Teorema de Pick**, apareceu em um artigo publicado em Praga em 1899.

Esta fórmula explora o cálculo de área de polígonos com vértices em pontos de uma malha retangular no plano cartesiano, relacionando-a apenas ao número de pontos da malha localizados no interior do polígono e o número de pontos da malha contidos em seu bordo.

Há um apelo intrínseco pelo seu aspecto curioso de transformar o problema, em geral difícil, do cálculo de áreas, em uma "mera" contagem de pontos.

Capítulo 2

Área de Figuras Planas

2.1 Área de Polígonos

Polígonos

Dados dois pontos A e B no plano, denotamos por $\overline{AB}$ o **segmento de reta** que tem A e B como extremos.

Chamamos de interior de $\overline{AB}$ o conjunto de pontos de AB que são distintos de A e de B.

Dado um número finito de pontos distintos do plano, $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$, chamamos de **linha poligonal** com extremos em V_1 e V_n a união dos segmentos (chamados de arestas)$\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, ..., \overline{V_{n-1}V_n}$.

Supomos que três vértices consecutivos nunca são colineares. Chamamos de **linha poligonal fechada**, ou simplesmente **polígono**, com vértices $V_1, V_2, ..., V_n$, a união dos segmentos $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, ..., \overline{V_{n-1}V_n}, \overline{V_nV_1}$.

Também supomos que três vértices consecutivos de um polígono não são colineares, entendendo agora que $\{V_{n-1}, V_n, V_1\}$ e $\{V_n, V_1, V_2\}$ também são conjuntos de vértices consecutivos.

Diremos que o **polígono é simples** se a intersecção de um par de arestas não consecutivas é sempre vazia (um par de arestas consecutivas é determinado por cada conjunto de três vértices consecutivos).

Um polígono simples P divide um plano em duas regiões: o interior I e o exterior E de P.

Essas regiões são caracterizadas pelas seguintes propriedades.

Dois pontos do plano fora de P são extremos de alguma linha poligonal que não intersecta P se, e somente se, ou os dois pertencem a I ou os dois pertencem a E.

Além disso, I é limitada e E é ilimitada e P é fronteira comum de ambas (P ser "fronteira" de I e de E significa: qualquer pequeno disco centrado em qualquer ponto de P contém pontos de I e de E). Este é um caso particular do célebre Teorema de Jordan, para o qual uma prova elementar pode ser encontrada em [3].

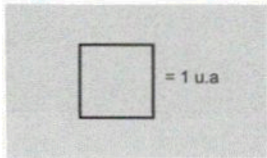
Medidas de Área

Calcular a área de uma figura plana é medir a região ou a porção do plano ocupada por essa figura. Assim, para medir a superfície de uma região é necessário utilizar uma outra *superfície* como unidade de medida e verificar quantas vezes essa unidade cabe dentro da outra região a ser medida. Em geral, toma-se um quadrado como unidade de medida e o número de vezes obtido é a *Área* da região medida. Outro recurso utilizado é a decomposição de uma figura em outras cujas áreas sejam conhecidas.

Essas estratégias têm suas origens nos antigos modos de medir, mas podem ser escritas em linguagem formal, como em LIMA(1991, p.21), através das seguintes propriedades:

> *Seja P um polígono do plano. A cada polígono P se pode associar um número real não negativo chamado área de P, com as seguintes propriedades:*
>
> 1. *Polígonos congruentes têm áreas iguais.*
> 2. *Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de $P = 1$.*
> 3. *Se P pode se decompor em n polígonos $P_1, ..., P_n$ tais que quaisquer dois deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.*

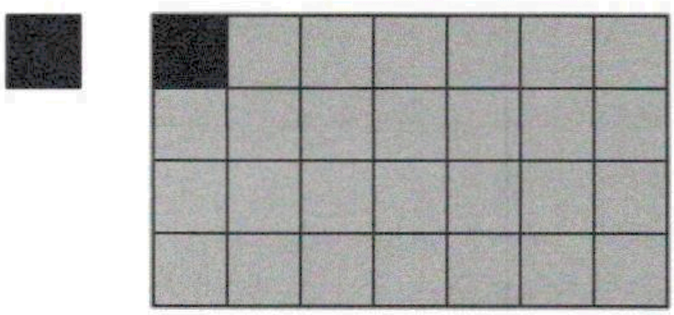
A partir dessas ideias apresentaremos modos de representar as áreas de algumas figuras planas. Para tanto assumiremos como unidade de medida um quadrado cujo lado mede uma **unidade de comprimento(u.c.)**, que será chamado **quadrado unitário**. Em decorrência, a área do quadrado unitário será igual a uma **unidade de área(u.a)**.



Área do Retângulo

No que se segue estamos supondo que as medidas são múltiplos inteiros da unidade de comprimento *(u.c)* adotada. As fórmulas obtidas podem ser generalizadas para medidas reais por meio de um argumento de densidade dos números racionais.

O retângulo é o quadrilátero que possui quatro ângulos retos e lados opostos paralelos iguais dois a dois. Para obter a área de um retângulo R cujos lados têm como medida a e b unidades de comprimento, tomamos a unidade de área, sobrepondo-a de modo a cobrir toda a superfície do retângulo.



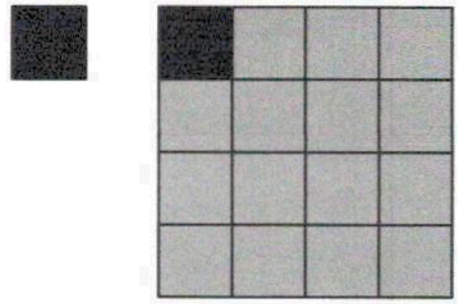
Verifica-se então que são necessários (ab) quadrados unitários, cada um deles com área 1, para cobrir a superfície de R da seguinte forma:

$$\text{Área de } R = a \cdot b \qquad (2.1)$$

Área do Quadrado

O quadrado pode ser compreendido como *um retângulo que possui todos os lados iguais* e sua área pode ser obtida de modo análogo à do retângulo.

Um quadrado Q cujo lado tem como medida a unidades de comprimento, pode ser recoberto por $a \cdot a$ ou a^2 quadrados unitários, cada um deles com área 1.

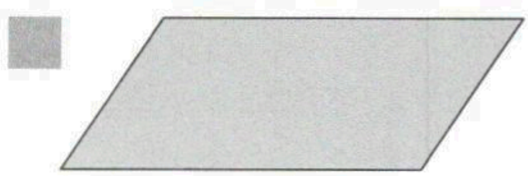


Assim, podemos expressar a área do quadrado Q cujo lado mede a da seguinte forma:

$$\text{Área de } Q = a^2 \tag{2.2}$$

Área do Paralelogramo

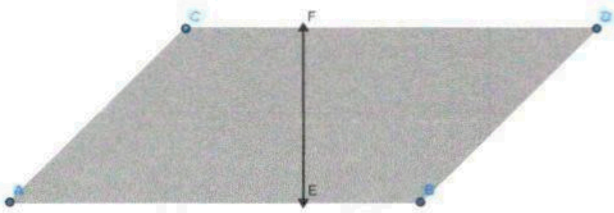
Um paralelogramo é um quadrilátero no qual tem os lados opostos paralelos, assim como o retângulo. Entretanto, ao tentarmos sobrepor quadrados unitários para obter sua área, nos depararmos com algumas limitações, pois os seus ângulos internos não são retos.



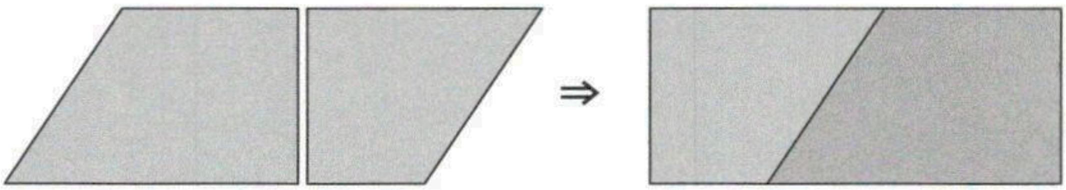
Para definir a área do paralelogramo recorremos à decomposição, de modo a compará-la com outra já conhecida, no caso do retângulo.

Em um paralelogramo, quando se toma um de seus lados como base , chama-se *altura* do paralelogramo à distância entre a base e o seu lado oposto.

No paralelogramo $ABCD$, tomando-se AB como base de medida a, o segmento EF, de medida b representa a sua altura.



Para obter a área do paralelogramo efetuamos um corte ao longo de sua altura EF, e em seguida recompomos as partes de modo a formar um retângulo.

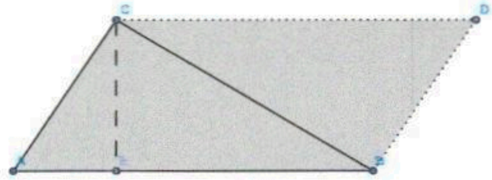


O retângulo formado tem as dimensões a e b, e sua área é dada por $a \cdot b$.

Deste modo, podemos afirmar que a área do paralelogramo corresponde ao produto do comprimento de uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Área do Triângulo

A área do triângulo pode ser obtida diretamente a partir da área do paralelogramo, visto que todo triângulo é a metade de um paralelogramo que tem uma base e altura correspondente cujas medidas são iguais as da base e da altura correspondente do triângulo.



No triângulo ABC e no paralelogramo $ABCD$, a base AB tem medida b e a altura correspondente CE tem medida a.

A área de $ABCD = b \cdot a$ e os triângulos ABC e BCD são congruentes, portanto a área do triângulo ABC é a metade da área de $ABCD$. Ou ainda, a área de um triângulo é a metade do produto da medida de uma base pela medida da altura correspondente.

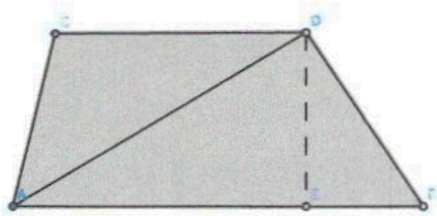
$$\text{Área de } ABC = \frac{1}{2}(a \cdot b) \tag{2.3}$$

2.2 Área de um Polígono Qualquer

Conhecidas essas áreas, podemos utilizá-las para obter a área de um polígono qualquer, subdividindo-o em figuras cuja área já sabemos resolver. A área do polígono que se quer encontrar será a soma das áreas das figuras em que este foi subdividido.

Tomemos como exemplos o trapézio e o losango:

No trapézio $ABCD$,

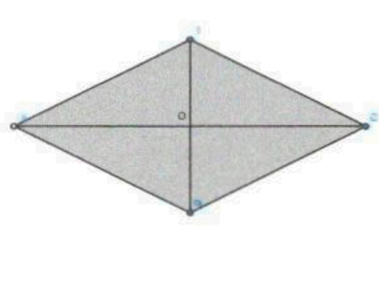


Consideremos as bases $AB = b_1$ e $CD = b_2$ e altura do trapézio $DE = a$.

O segmento de reta AD divide o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura a. A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos.

$$\text{Área de } ABCD = \frac{a(b_1 + b_2)}{2} \tag{2.4}$$

No losango $ABCD$,



Consideremos as diagonais $AC = d_1$ e $BD = d_2$. Observe que a diagonal subdivide o losango em dois triângulos congruentes, ABC e ACD com base comum $AC = d_1$ e alturas BO e DO iguais a $\frac{d_2}{2}$.

Desse modo, a área do losango será dada por:

$$\text{Área de } ABCD = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \qquad (2.5)$$

2.3 Área de Polígonos Regulares

Um **polígono é regular** se todos os seus lados e os seus ângulos internos são congruentes. Para se obter a área de uma superfície limitada por um polígono regular, é preciso considerar que todo polígono regular de lado l pode ser divido em n triângulos iguais, sendo n um número de lados do polígono. Cada triângulo tem como base o lado l do polígono e a altura igual ao apótema a do polígono. (*O apótema de um polígono regular é o segmento de reta que une o centro desse polígono ao ponto médio de qualquer um de seus lados).*

Desse modo, a área do polígono regular pode ser obtida multiplicando-se a área de cada triângulo pelo número de lados n do polígono, o que nos leva ao seguinte resultado:

$$\text{Área do Polígono } ABCD = n \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2}\right) \qquad (2.6)$$

Capítulo 3

A Fórmula de Pick

Agora, analisaremos certas figuras geométricas (polígonos) desenhados no plano cartesiano com vértices nos pontos de uma malha retangular especial: os pontos com coordenadas inteiras. O problema é a partir dessa referência, encontrar a área dessas figuras. O objetivo é obter uma fórmula que seja válida para todos os casos.

3.1 Cálculo da área de polígonos

Definição 3.1 *Uma **rede no plano** é um conjunto de pontos organizados em retas horizontais e verticais, onde a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.*

Observação 3.1 *Se tomarmos um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como um conjunto de todos os pontos do plano que as coordenadas (m, n) são números inteiros (positivos, negativos, ou zero).*

Definição 3.2 *O **bordo de um polígono** é o contorno do mesmo, ou seja, os pontos de fronteira. O **interior do polígono** são todos os pontos da rede que estão situados dentro do polígono.*

O polígono P diz-se **simples** quando não possui buracos no seu interior nem intersecções das suas arestas.

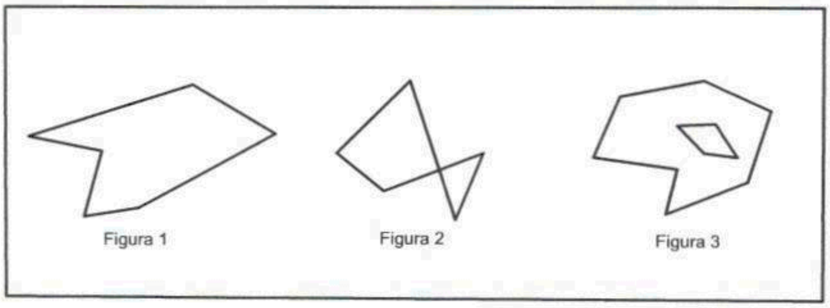


Figura 3.1: Polígonos

A Figura 1 representa um polígono simples. Na figura 2 o polígono não é simples, pois tem um vértice que pertence a mais de dois lados e o polígono da figura 3 não é simples porque tem um buraco.

O primeiro passo para encontrar uma relação entre os pontos da malha e a área de uma tal figura é pensar na influência que o número de pontos da malha contidos na figura tem no valor dessa área, pois intuitivamente uma figura com muitos pontos da malha tem área maior que figuras com poucos pontos na malha.

Primeiramente precisamos padronizar nossa unidade de área. Então tomemos o **menor** quadrado (o quadrado que contém apenas 4 pontos da malha) de área 1 como padrão.

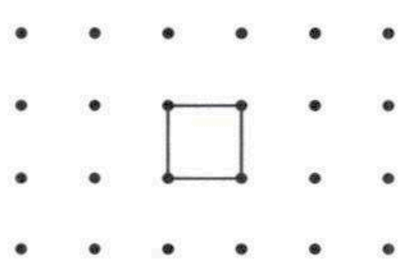


Figura 3.2: Quadrado Unitário

Assim, dividindo esse quadrado ao meio por uma diagonal, temos dois triângulos retângulos isósceles de área $\frac{1}{2}$. Note que tais triângulos têm a menor área positiva possível entre os polígonos com vértice na malha.

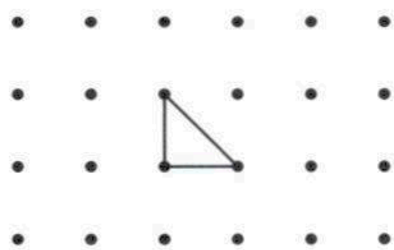


Figura 3.3: Metade do Quadrado Unitário

Se um modelo é proposto como solução do problema, tomando algumas figuras simples diferentes, mas todas formadas pela união desses triângulos (de modo que sabemos previamente o valor de sua área), podemos criar um sistema de equações lineares, de onde tiramos os valores dos parâmetros que relacionam pontos da malha contidos na figura e sua área.

A área está relacionada com o número I de pontos da malha internos ao polígono e o número B de pontos da malha na fronteira do mesmo, através de um modelo linear

$$A = Bx + Iy + z$$

Vamos aplicar tal modelo aos polígonos representados nas figuras e ao quadrado.

Figura 3.4: Modelo Linear

Temos então as equações:

$$\begin{aligned} A &= Bx + Iy + z \\ 2 &= 4x + 1y + z \\ 2 &= 6x + 0y + z \\ 1 &= 4x + 0y + z \end{aligned}$$

Como as três equações são linearmente independentes, conseguimos encontrar uma única solução para o sistema: $x = \frac{1}{2}, y = 1$ e $z = -1$. Então obtemos a chamada fórmula de Pick:

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1$$

Triângulo Fundamental

Definição 3.3 *Um **triângulo é fundamental** quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto do interior ou do bordo sobre a rede.*

Teorema 3.1 *Qualquer triângulo fundamental tem área igual a* $\frac{1}{2}$.

Demonstração: Podemos colocar o triângulo em um retângulo onde o maior lado do triângulo seja sua diagonal, como se mostra na figura.

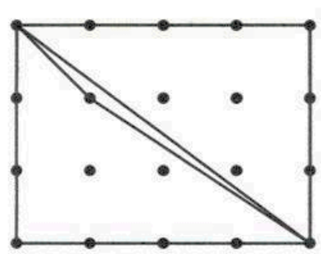


Figura 3.5: Triângulo Fundamental

Para calcular a área de um triângulo, calculemos a área do retângulo menos as áreas das figuras que denotamos com as letras A, B, C e D.

De fato, considere a seguinte figura:

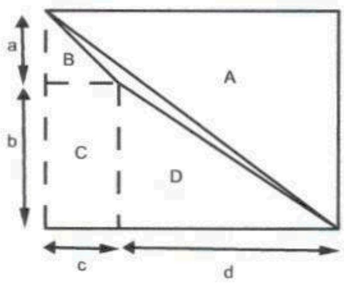


Figura 3.6: Cálculo da Área

Calculemos as áreas das figuras, tanto do retângulo como de cada uma das regiões A, B, C e D:

Área do retângulo grande:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Área do triângulo A:

$$\frac{(a+b)(c+d)}{2} = \frac{ac+ad+bc+bd}{2}.$$

Área do triângulo B:

$$\frac{ac}{2}.$$

Área do retângulo C:

$$bc.$$

Área do triângulo D:

$$\frac{bd}{2}.$$

Então a área do triângulo que buscamos é

$$ac + ad + bc + bd - \frac{ac+ad+bc+bd}{2} - \frac{ac}{2} - bc - \frac{bd}{2} = \frac{ad-bc}{2}.$$

Como queremos mostrar que a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$, falta demonstrar que $ad - bc = 1$.

Sabemos que o triângulo tem 3 pontos na fronteira e nenhum ponto no interior, de modo que teremos que usar esta informação.

Vamos contar os pontos da figura:

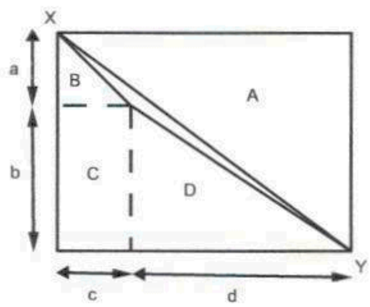


Figura 3.7: Contagem de Pontos

A altura do retângulo grande mede $a + b$, logo tem $(a + b + 1)$ pontos; a base mede $c + d$ logo tem $(c + d + 1)$ pontos. Portanto, em todo o retângulo tem:

$$(a + b + 1)(c + d + 1)$$

pontos no total.

Queremos obter metade dos pontos do retângulo, tiramos primeiro os dois pontos marcados com X e Y no vértice e depois de obter a metade agregamos os pontos que faltam ao triângulo A. De modo que o número de pontos da região A é:

$$\frac{(a + b + 1)(c + d + 1) - 2}{2} + 2 = \frac{(a + b + 1)(c + d + 1)}{2} + 1.$$

O número de pontos da região B é:

$$\frac{(a + 1)(c + 1)}{2} + 1.$$

O número de pontos da região C é:

$$(b + 1)(c + 1).$$

O número de pontos da região D é:

$$\frac{(b + 1)(d + 1)}{2} + 1.$$

O número de pontos da região A deve ser igual ao número da soma das regiões B, C e D, sem as repetições que puderem haver, isto é:

$$\frac{(a+b+1)(c+d+1)}{2}+1 = \left[\frac{(a+1)(c+1)}{2}+1\right]+[(b+1)(c+1)]+\left[\frac{(b+1)(d+1)}{2}+1\right]-(c+1)-(b+1).$$

Ao simplificar esta expressão temos que:

$$ad - bc = 1$$

$\square$

O Teorema de Pick

Com as definições anteriores podemos enunciar o Teorema de Pick, o qual dá uma fórmula, para obter a área de uma rede poligonal.

Teorema 3.2 *(Teorema de Pick) A área $\mathcal{P}$ de um polígono cujos os vértices são pontos de uma rede é dada pela a expressão*

$$\mathcal{P} = \frac{B}{2} + I - 1$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Esta fórmula só se aplica a um polígono simples (isto é, cujo o bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo o mesmo vértice).

Notação: Se denotará $\mathcal{A}(Q)$ a área de um polígono Q e $\mathcal{P}(Q)$ a fórmula de Pick para o polígono Q.

Primeiro provaremos que a fórmula de Pick é válida para retângulos e triângulos. Em seguida, provaremos que se a fórmula de Pick vale para rede poligonais com interiores disjuntos e com lado comum, então vale para a união e finalmente demonstrar que todo polígono pode ser triangulado, isto é, pode ser dividido em triângulos disjuntos.

Teorema 3.3 *Seja R um retângulo, com lados paralelos aos eixos, então*

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{P}(R)$$

Demonstração:

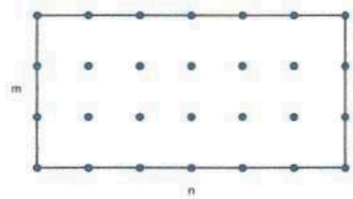


Figura 3.8: Contagem de Pontos

Seja R um retângulo $m \times n$, então R tem um total de $T = (m+1)(n+1)$ pontos. O lado de comprimento m tem $m+1$ pontos e o de comprimento n tem $n+1$ pontos, logo, os pontos da fronteira de R são:

$$B = 2(m+1) + 2(n+1) - 4 = 2m + 2n$$

Note que -4 é equivalente aos vértices do retângulo que foram contados duas vezes.

Logo, os pontos interiores são

$$\begin{aligned} I &= T - B \\ &= (m+1)(n+1) - (2m+2n) \\ &= mn - m - n + 1 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= (mn - m - n + 1) + \frac{2m+2n}{2} - 1 = mn \\ &= \mathcal{A}(R) \end{aligned}$$

assim, a fórmula de Pick é válida para retângulos de lados paralelos aos eixos.

$\square$

Teorema 3.4 *Seja $\triangle$ um triângulo retângulo, com um cateto vertical(e portanto outro horizontal), então*

$$\mathcal{A}(\triangle) = \mathcal{P}(\triangle)$$

Demonstração: Seja $\triangle$ um triângulo retângulo de catetos m e n. Assim, os lados m e n têm respectivamente $m+1$ e $n+1$ pontos. Seja k os pontos da diagonal (sem contar os extremos), então

$$\begin{aligned} B &= (m+1)(n+1)+k-1 \\ &= m+n+k+1 \end{aligned}$$

Seja R o retângulo formado unindo $\triangle$ e seu simétrico com respeito a hipotenusa.

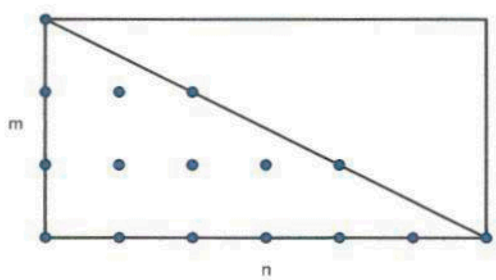


Figura 3.9: Triângulo Retângulo

Sabemos que o total de pontos interiores em R é $mn-m-n+1$. Se retiramos os k pontos da diagonal, então o número de pontos interiores a cada lado da diagonal, que é igual ao total de pontos interiores de $\triangle$, são

$$I = \frac{mn-m-n+1-k}{2}$$

Aplicando o teorema de Pick, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\triangle) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{mn-m-n+1-k}{2} + \frac{m+n+k+1}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2} \\ &= \mathcal{A}(\triangle) \end{aligned}$$

Assim, a fórmula de Pick é válida para triângulos retângulos com algum cateto vertical.

□

Observação 3.2 *Observamos que, se o número de Pick de um polígono simples é sua área, então ele deve ser aditivo, isto é, se $\mathfrak{P}$ é um polígono simples obtido pela a justaposição dos polígonos $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ ao longo de pelo menos uma aresta, então*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{P}) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}_1) + \mathcal{P}(\mathfrak{P}_2).$$

Observação 3.3 *Na observação "justapostos" significa que dois quaisquer desses polígonos não possuem pontos interiores em comum.*

Teorema 3.5 *Sejam $\mathfrak{P}$ um polígono e $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ dois polígonos tais que $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$, têm interiores disjuntos e um lado comum. Se $\mathcal{A}(\mathfrak{P}_1) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}_1)$ e $\mathcal{A}(\mathfrak{P}_2) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}_2)$ então*

$$\mathcal{A}(\mathfrak{P}) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}).$$

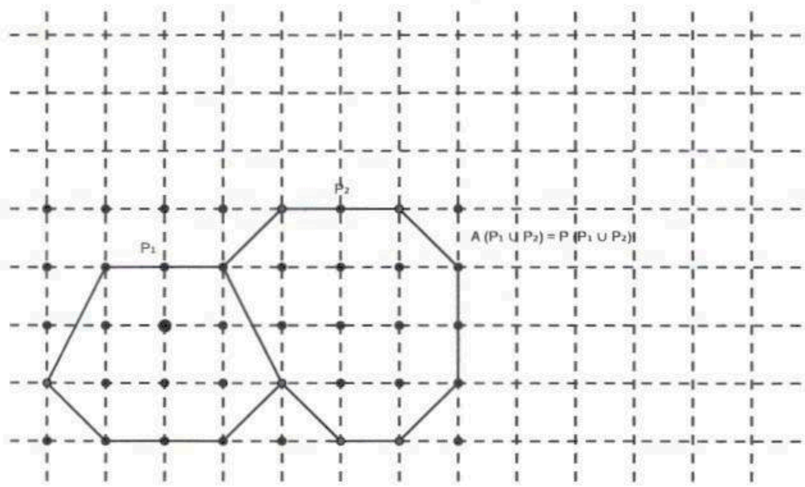


Figura 3.10: Polígono com Interiores Disjuntos e um Lado Comum

Demonstração: Seja $\mathfrak{P}$ um polígono tal que I e B são pontos interiores e de fronteira, respectivamente. Sejam I_1 e I_2, respectivamente o número de pontos contidos no interior das figuras $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$, e sejam B_1 e B_2, respectivamente o número de pontos na fronteira de $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$. Seja k o número de pontos da rede do lado comum de $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$, então:

O número B de pontos de fronteira de $\mathfrak{P}$, será dado por

$$\begin{aligned} B &= (B_1 - k) + (B_2 - k) + 2 \\ &= B_1 + B_2 - 2k + 2 \end{aligned}$$

onde, o 2 corresponde aos pontos extremos do lado comum.

O número I de pontos interiores de $\mathfrak{P}$ será dado por

$$I = I_1 + I_2 + k - 2$$

Como $\mathcal{A}(\mathfrak{P}) = \mathcal{A}(\mathfrak{P}_1) + \mathcal{A}(\mathfrak{P}_2)$ e por hipótese $\mathcal{A}(\mathfrak{P}_1) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}_1)$ e $\mathcal{A}(\mathfrak{P}_2) = \mathcal{P}(\mathfrak{P}_2)$ então

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathfrak{P}) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\
&= I_1 + I_2 + k - 2 + \frac{B_1 + B_2 - 2k + 2}{2} - 1 \\
&= I_1 + I_2 + k - 2 + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} - k + 1 - 1 \\
&= \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right) \\
&= \mathcal{P}(\mathfrak{P}_1) + \mathcal{P}(\mathfrak{P}_2) \\
&= \mathcal{A}(\mathfrak{P}_1) + \mathcal{A}(\mathfrak{P}_2) \\
&= \mathcal{A}(\mathfrak{P})
\end{aligned}$$

□

Observação 3.4 *Todo triângulo pode ser completado de modo a compor um retângulo, justapondo-se a ele triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos coordenados.*

Teorema 3.6 *Seja $\triangle$ um triângulo, então*

$$\mathcal{A}(\triangle) = \mathcal{P}(\triangle)$$

Demonstração: Nos aparecem três possibilidades;

Caso 1: Triângulo retângulo com catetos horizontal e vertical. Ver Teorema 3.4.

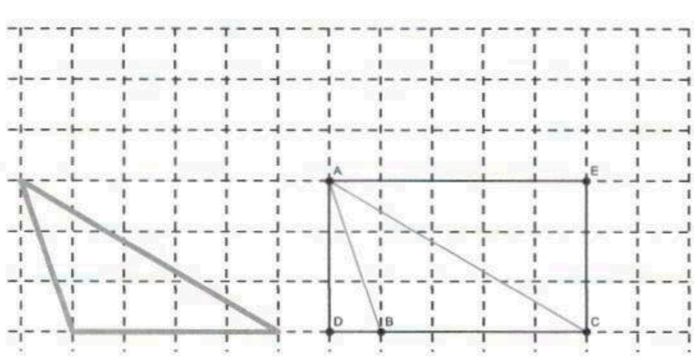


Figura 3.11: Triângulo com um Lado Horizontal

Caso 2: Triângulo com um só lado horizontal (o vertical). (ver figura).

Neste caso, se constrói um retângulo $ADCE$ (ver figura). Logo os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle AEC$ são retângulos e pelo teorema (3.4).

$$\mathcal{A}(\triangle ADB) = \mathcal{P}(\triangle ADB) \qquad \mathcal{A}(\triangle AEC) = \mathcal{P}(\triangle AEC)$$

Além disso, pelo Teorema (3.3) temos que $\mathcal{A}(\square ADCE) = \mathcal{P}(\square ADCE)$. Pelo Teorema (3.5) e as considerações anteriores:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\triangle ADB) + \mathcal{A}(\triangle ABC) \; + \; & \mathcal{A}(\triangle AEC) = \mathcal{P}(\square ADCE) \\
= \; & \mathcal{P}(\triangle ADB) + \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle AEC) \\
= \; & \mathcal{A}(\triangle ADB) + \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle AEC)
\end{aligned}$$

Cancelando os termos concluímos que $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{P}(\triangle ABC)$.

Caso 3: Triângulo sem lados horizontais e nem verticais. (ver figura).

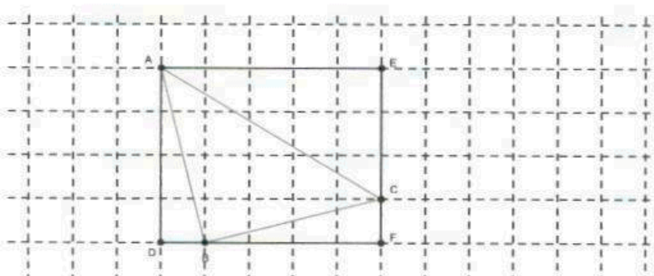


Figura 3.12: Triângulo sem lados Horizontais nem Verticais

A demonstração é análoga ao Caso 2.

□

Observação 3.5 *Qualquer polígono simples $\mathfrak{P}$, com vértices numa malha retangular, pode ser expresso como reunião de triângulos fundamentais cujos os vértices são também pontos da malha retangular.*

Observação 3.6 *Para a demonstração do Teorema de Pick falta garantir que uma rede poligonal pode ser triangularizada, isto é, mostrar que esta rede pode ser dividida em triângulos mediante diagonais que não se cortem, que são interiores ao polígono e cujos os vértices coincidem com os lados do polígono.*

Teorema 3.7 *Todo polígono simples pode ser triangulado.*

Demonstração: Ver [1]

Esboço da Demonstração do Teorema de Pick

Seja $\mathfrak{P}$ um polígono simples, então pelo teorema (3.7), se pode triangularizar em $T_1, T_2, ..., T_n$ triângulos, logo:

$$\mathcal{A}(\mathfrak{P}) = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) + ... + \mathcal{A}(T_n)$$

Pelo o Teorema (3.6)

$$\mathcal{A}(T_i) = \mathcal{P}(T_i), \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n$$

Aplicando n vezes o Teorema (3.6), concluímos que

$$\mathcal{A}(\mathfrak{P}) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

□

Aplicação do Teorema de Pick

Mostremos que não existem triângulos equiláteros cujos os vértices sejam inteiros.

Demonstração: De fato, suponhamos que existe um triângulo equilátero $\triangle$ cujos os vértices sejam inteiros. Assim, podemos utilizar a Fórmula de Pick para o cálculo da área do mesmo.

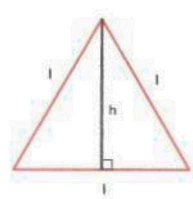
Seja a o número de pontos do bordo B e b o número de pontos do interior I, com a e $b \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} \text{Área de } \triangle &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{a}{2} + b - 1 \ \in \mathbb{Q}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, a área do triângulo é dada por

$$\text{Área de } \triangle = \frac{1}{2}(b \cdot h) \tag{3.2}$$

Para calcular a área, precisamos da *altura* h.



Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} l^2 &= \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \\ h^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3 \cdot l^2}{4} \\ h &= \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2} \end{aligned}$$

Substituindo h e l em (3.2), obtemos:

$$\text{Área de } \triangle = \frac{1}{2}\left(l \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}\right) = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \in \mathbb{I} \tag{3.3}$$

Como l^2 é a área do quadrado de lado l, então pelo Teorema de Pick l^2 é racional. Daí, por (3.1) e (3.3), $\sqrt{3}$ é racional, o que é um absurdo. Portanto, não existem triângulos equiláteros com vértices inteiros.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* 5ªed. Rio de Janeiro, S.B.M., 2006.

[2] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria(Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* 4ªed. Rio de Janeiro, S.B.M., 2009.

[3] COURANT, RICHARD e ROBBINS, HERBERT *O que é Matemática?* Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

[4] *Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick* Disponível em www.diaadiaeducacao.pr.gov.br (Acessado em 17/01/2013.)

[5] *O Uso do Geoplano para o Ensino de Geometria: uma Abordagem Através de Malhas Quadriculadas.* Disponível em http: www.sbem.com.br (Acessado em 06/09/2011.)

[6] DENECA, M. de L. *Catálogo de Materiais Didáticos Manipuláveis e Atividades para o Laboratório de Ensino de Matemática.* Disponível em http: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br (Acessado em 06/03/2012.)

[7] *El Teorema de Pick y Redes de Puntos* Disponível em http: www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010no5.pdf (Acessado em 06/11/2012.)