



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Maria Johnielle da Silva Melo

FÓRMULA DE EULER:

poliedros de Platão.

UFCC / BIBLIOTECA

Cuité-PB

2013

Maria Johnielle da Silva Melo

FÓRMULA DE EULER:
poliedros de Platão.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB

2013

UFCC / BIBLIOTECA



Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

M528f Melo, Maria Johnielle da Silva.

Fórmula de Euler: poliedros de Platão. / Maria Johnielle da Silva Melo – Cuité: CES, 2013.

45 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2013.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Geometria. 2. Teorema de Euler. 3. Poliedro. I. Título.

CDU 514



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Maria Johnielle da Silva Melo

Fórmula de Euler: poliedros de Platão

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

Banca Examinadora


Prof. Geraldo de Oliveira Filho


Prof.^a Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)


Prof.^a Márcia Cristina Silva Brito
(Coorientadora)

UFCG / BIBLIOTECA

Agradecimentos

Agradeço a Deus que me iluminou e me fortaleceu nos momentos mais difíceis.

Meus pais, por todo esforço que fizeram para que eu conseguisse realizar meus objetivos.

Minha família que sempre me apoiou.

Meu noivo, por toda paciência nos dias de prova.

Meus colegas de curso, que me ajudaram em muitos momentos: Jaqueline, Gerivaldo, Vanessa, Ivanielma.

Minhas amigas, Sarah, Illana, que nunca permitiram que eu me sentisse sozinha.

Minhas queridas professoras: Maria Gisélia Vasconcelos e Márcia Cristina Silva Brito.

Agradeço em especial ao Professor Geraldo de Oliveira Filho pelos ensinamentos e sugestões.

Meu muito obrigada a todos!

Este Trabalho de Conclusão de Curso é dedicado especialmente aos meus pais Irene Inácia da Silva Melo e João Batista de Melo, pelo amor, dedicação, apoio, força, e por todo esforço que fizeram para me proporcionar este momento.

"Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece."

Filipenses.4:13

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre Poliedros e o Teorema de Euler. Começaremos apresentando algumas considerações históricas a respeito do assunto e citando alguns personagens envolvidos. Em seguida apresentaremos alguns conceitos básicos para melhor entendimento do assunto. Neste trabalho foram abordados duas demonstrações para o Teorema de Euler. A primeira demonstração segue a prova apresentada por Azambuja Filho (1983), e a segunda demonstração é uma das mais divulgadas a respeito do teorema, a demonstração de Cauchy. Ainda, como consequência do Teorema de Euler, foi provado que existem apenas cinco poliedros convexos regulares, os conhecidos Poliedros de Platão.

Palavras-chave: Teorema de Euler. Poliedros.

Abstract

This work aims to present a study on Polyhedra and Euler's theorem. We begin by presenting some historical considerations on the subject and quoting some characters involved. Then we present some basic concepts for a better understanding of the subject. In this work we addressed two proofs of Theorem Euler. The first demonstration follows the evidence presented by Azambuja Filho (1983), and the second statement is one of the most publicized about the theorem, the proof of Cauchy. Still, as a consequence of Euler's theorem, it was proved that there are only five regular convex polyhedron, the known polyhedra Platão.

Keywords: Euler's theorem. Polyhedra.

Sumário

Introdução	9
1 Aspectos Históricos	10
1.1 Leonhard Euler	14
1.2 O Teorema de Euler	16
2 Poliedros	18
2.1 Polígonos	18
2.2 Poliedros	21
2.3 Poliedro Regular	23
2.4 Propriedade Fundamental do Teorema de Euler	25
3 Teorema de Euler e Aplicações	29
3.1 Demonstração do Teorema de Euler	29
3.2 Demonstração de Cauchy	34
3.3 Aplicação do Teorema de Euler	41
Referências Bibliográficas	46

UFMG/FEA/IECA

Introdução

Este trabalho tem como foco os Poliedros e o Teorema de Euler que relaciona o número de vértices, o número de arestas e o número de faces de um poliedro. O estudo dos poliedros é importante pois permite conhecer diferentes classes de poliedros. É importante também o contexto histórico pois envolve os estudantes com o prazer da descoberta, induzindo o entusiasmo e a curiosidade propiciando deste modo aprendizagem e prazer. Analisando os materiais escritos para o ensino de matemática na educação básica, é fácil notar que não existe um contexto histórico e também uma demonstração consistente que torne legítima e incontestável o Teorema de Euler. De fato, o que encontramos nos livros didáticos é uma pequena abordagem a respeito do Teorema com alguns exemplos. O Teorema de Euler e os poliedros é um assunto do ensino médio e também de pesquisas científicas, é de fundamental importância nas áreas de topologia. Os poliedros estão relacionados diretamente em nosso cotidiano de todas as formas, seja como uma simples caixa de sapato ou como uma linda rocha encontrada na natureza. Além disso, os poliedros são elementos de aplicações práticas, como por exemplo são usados em computação gráfica para representação de superfícies suaves e mais complicadas. Em meteorologia e climatologia, destacam-se cada vez mais os modelos numéricos globais do fluxo atmosférico que usam malhas baseadas em um icosaedro.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

Não é possível conhecer em que circunstâncias históricas começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros, identificados como sólidos de faces planas. Até onde se conhece os estudos sobre poliedros nos séculos XVII e XVIII se resume-se a poucos escritos. Entre estes, os comentários de Kepler (1571-1630) sobre poliedros estrelados e arquimedianos no *Harmonice Mundi* (1619), de Descartes no manuscrito compilado por Leibniz *Progymnasmata de Solidorum Elementis excerpta ex Manuscripto Cartesii* (aprox.1620), e de Euler nos artigos "*Elementa doctrinae solidorum*" (1758) e "*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*" (1758).

As formas poliédricas vêm sendo estudadas desde a antiguidade. As pirâmides evidenciam o conhecimento que os egípcios tinham de poliedros. Existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides. Um interessante documento egípcio é o *Papiro de Rhind* ou, *Ahmes* (BOYER, 1974, p.9), apresentando cálculos de área e volume de troncos de pirâmides.



Figura 1.1: Papiro de Rhind

Os poliedros fazem parte da cultura grega e foram estudados pelos grandes filósofos da antiguidade. Já no século IV a.C. o filósofo grego Platão, fundador da academia de Atenas, passou a estudar os cinco sólidos regulares. A escola de Platão tinha escrito sobre a porta, "Aquele que for ignorante em geometria aqui não entrará".

Platão nasceu em Atenas por volta de 428 a.C. e é considerado um dos grandes gênios da humanidade. Platão foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. A maior parte de seus trabalhos sobreviveu até hoje, o que permite uma ampla visão do pensamento grego, pois Platão escreveu sobre quase todos os assuntos da época.

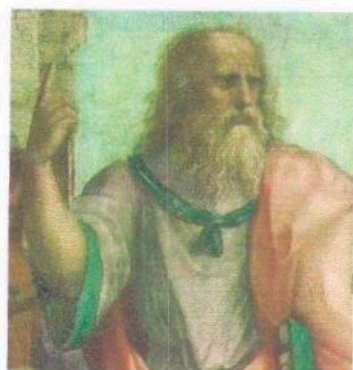


Figura 1.2: Platão

Os poliedros regulares fazem parte do estudo da geometria desde que este estudo se iniciou. Eles têm uma beleza simétrica que fascinou homens em todos os tempos. Alguns poliedros regulares eram conhecidos dos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura.

No livro XIII dos Elementos de Euclides há um início de tratamento matemático desses sólidos, conhecidos como sólidos de Platão, assim chamados erradamente, pois segundo Eves (p.114, 2004) "[...] três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto".

Conforme veremos no decorrer deste trabalho, existem apenas cinco poliedros regulares que chamaremos de Poliedros de Platão. Em um de seus diálogos preservados até hoje - de nome Timeu, sobre a natureza - Platão descreveu a construção do Universo a partir dos elementos terra, água, ar e fogo. Cada um deles foi associado a um poliedro regular. Restou ao dodecaedro o papel de Universo ou Cosmos, pois apresenta a forma

mais harmoniosa.

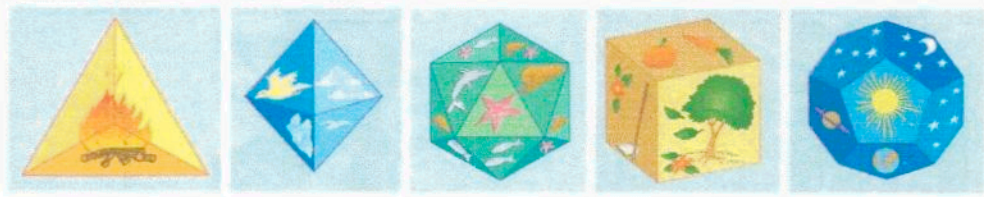


Figura 1.3: Sólidos platônicos

Há evidências de que os povos Neolíticos que viveram na Escócia tenham esculpido alguns destes sólidos 1000 anos antes. Alguns desses modelos, conforme apresentamos na figura 1.3 - Modelos Neolíticos de Sólidos Platônicos, encontram-se no Museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido.

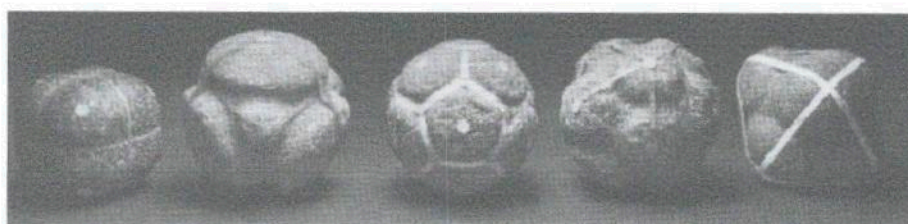


Figura 1.4: Sólidos regulares Neolíticos

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações do *Timeu*. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para a sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Essas relações volume - superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente o fogo é o mais seco dos quatro elementos e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções (EVES, 2004, p.114).



Figura 1.5: Johann Kepler

Em 1597, Kepler inspirou-se nos poliedro regulares para estudar o movimento dos planetas até então conhecidos (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio) e publicou a sua obra "The Cosmographic Mystery", onde utilizou um modelo de sistema solar composto por esferas concêntricas, separadas uma das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro para explicar as distâncias relativas dos planetas do sol.

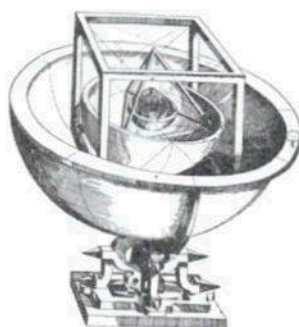


Figura 1.6: Modelo do sistema solar idealizado por Kepler

Foi também Kepler, quem descobriu o primeiro poliedro regular côncavo, que é o dodecaedro estrelado Figura (1.7), de faces regulares que resulta do prolongamento das faces do dodecaedro.

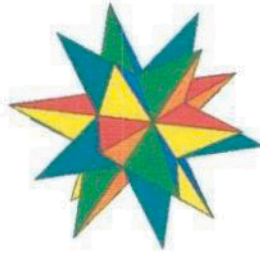


Figura 1.7: Dodecaedro estrelado

Kepler no início do Séc. XVII, sugeriu associar os Sólidos Platônicos aos planetas conhecidos nessa altura: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

Não há nenhuma disciplina matemática específica baseada nos cinco sólidos, mas muita coisa importante da matemática foi descoberta como subproduto do estudo dessas figuras.

1.1 Leonhard Euler

Leonhard Euler nasceu em Basileia, em 15 de abril de 1707. Aos 13 anos Euler ingressou na Universidade de Basel. Mesmo com a insistência de seu pai, um pastor calvinista, para que estudasse teologia, Euler encantou-se pela matemática. O pai, que havia estudado com Jakob Bernoulli, conseguiu que o filho fosse estudar com Johann Bernoulli.

Em 1727, Euler mudou-se para São Petersburgo, Rússia, onde conseguiu uma posição na Academia de São Petersburgo, recém-criada por Pedro, o grande. Em 1741, Euler aceitou um convite para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim, onde permaneceu até 1766. Após sua volta para Academia de São Petersburgo, onde viveria os 17 anos seguintes de sua vida, Euler escreveu quase metade de suas 866 obras. Euler morreu em 1783 com 76 anos de idade.

Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego. Aliás, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica as poses com que



Figura 1.8: Leonhard Euler.

aparece em seus retratos. A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas, assim como a surdez de Beethoven não o impediu de compor, Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas idéias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande. Entre livros e artigos, Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais 47 anos.

Em 1909, 202 anos após o nascimento de Leonhard, a Academia de Ciência da Suíça decidiu editar o conjunto completo de sua obra e os trabalhos começaram em 1911. Embora se soubesse que a torrente de papel havia sido realmente gigantesca, foi o projeto da *Opera Omnia*, como aquela coleção veio a ser chamada, que permitiu aos matemáticos dar-se conta do que havia sido a passagem do vendaval Euler pelo reino da Matemática. Atravessando as vicissitudes de duas grandes guerras mundiais, o projeto desenvolveu-se durante praticamente todo o século XX mas ainda não foi completado: 73 grandes volumes da *Opera Omnia*, totalizando 25.000 páginas, em Latim, Francês e Alemão, cobrindo os mais variados temas da Matemática pura e aplicada, já podem ser encontrados nas melhores bibliotecas e centros universitários do mundo, mas alguns novos volumes ainda estão previstos para este início do século XXI.

Sua obra, seu estilo, sua obstinação e seu exemplo, de uma forma ou de outra, continuam vivos até os dias de hoje e não houve matemático posterior que não tenha sido fortemente influenciado por ele.

1.2 O Teorema de Euler

Em 1750 Euler escreveu uma carta, dirigida a seu amigo também matemático Christian Goldbach. Em um dos trechos desta carta Euler escreve:

"Em todo o sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de vértices excede em dois o número de arestas"

Quando Euler enunciou seu teorema $V - A + F = 2$, em 1752, pretendia fazer o primeiro estudo classificatório sobre os poliedros. Euler não tinha dúvidas de que teoremas importantes poderiam ser descobertos no estudo dos sólidos limitados por faces planas.

Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados que levariam a obter a fórmula $V - A + F = 2$. Porém, ao que parece, Descartes não notou isso.

Euler não apresenta uma prova geral de seu teorema. Para convencer o leitor da validade de sua fórmula, ele demonstra a relação em inúmeros poliedros sem apresentar uma prova formal. Euler enganou-se ao generalizar a fórmula $V - A + F = 2$ para qualquer poliedro, pois não é difícil encontrarmos exemplos em que $V - A + F \neq 2$.

Uma saída para esse impasse é restringir a classe dos poliedros aos quais elas se aplica.

Todo poliedro convexo satisfaz à relação de Euler, porém, não é difícil achar exemplos de poliedros não convexos em que a relação também é válida.

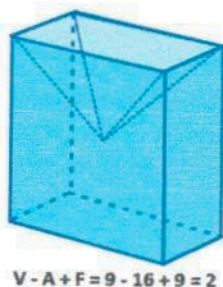


Figura 1.9: Exemplo de poliedro não convexo que satisfaz a relação de Euler.

Uma questão importante que se põe é a seguinte: para que classe de poliedros o Teorema de Euler é válido? Qual seria então o motivo da relação de Euler não ser válida para todos os poliedros não convexos?

Esta foi uma questão polêmica por quase um século e só foi resolvida por Poincaré em 1893.

Importantes matemáticos perceberam que era fácil encontrar casos em que a fórmula de Euler não se adequava, mas foi Poincaré o primeiro a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de topologia, e não de Geometria. Poincaré notou que o número $V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro P .

Hoje em dia chamamos $\chi(p) = V - A + F$ de característica de Euler-Poincaré do poliedro P .

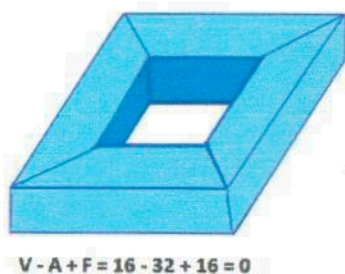


Figura 1.10: Poliedro com característica de Euler-Poincaré zero.

O número $V - A + F$ é, de fato, um achado de muita sorte. Depois de um longo período de trabalhos perdidos por vários matemáticos na direção de pistas falsas, coube finalmente a Poincaré descobrir o verdadeiro significado do número que Euler encontrou e, a partir daí, $\chi(p)$ se revelou ubíquo e fértil, como parte central de notáveis igualdades e como ponto de partida para importantes generalizações, revelando-se um verdadeiro traço de união entre ramos distintos da matemática (LIMA, 1985).

Capítulo 2

Poliedros

A palavra Poliedro vem do grego *poly*, que significa muitos e *edro*, que significa face, ou seja muitas faces. Os Poliedros estão presentes no cotidiano de todos, seja na forma de simples embalagens, no trabalho artístico ou até mesmo nas aplicações em *design* industrial.

2.1 Polígonos

Definição 2.1. (Conjunto Convexo) Um conjunto C , do plano ou do espaço, diz-se convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C .

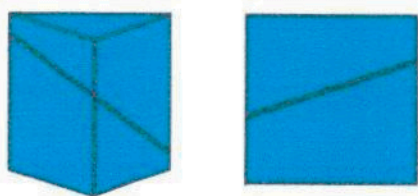


Figura 2.1: Conjuntos convexos

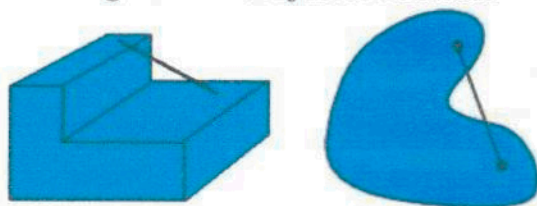


Figura 2.2: Conjuntos não convexos

Definição 2.2. (Polígono) Chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o outro lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais. As vezes, a palavra polígono também designa a região do plano limitada por essa linha poligonal fechada sem auto-interseções.

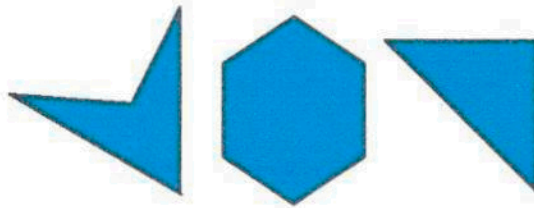


Figura 2.3: Exemplos de polígonos

Não são polígonos figuras de linhas curvas, que possuem contorno aberto ou com auto-interseções.

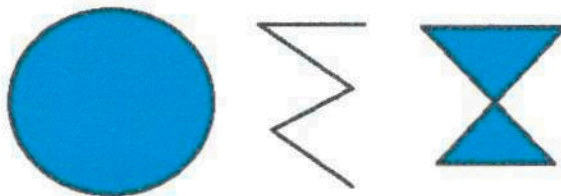


Figura 2.4: Exemplos de não polígonos.

Em um polígono podemos identificar os seguintes elementos : lados, vértices, ângulos internos, ângulos externos e diagonais. Os vértices constituem o ponto de encontro de dois segmentos laterais, os lados são as linhas poligonais que se encontram dois a dois em cada vértice. Os ângulos internos e externos são formados pelo encontro de dois lados consecutivos. As diagonais são segmentos de retas que unem dois vértices não consecutivos.

Observação 2.1. *O triângulo é o único polígono que não possui diagonais. E o pentágono é o único polígono cujo o número de diagonais é igual ao número de lados.*

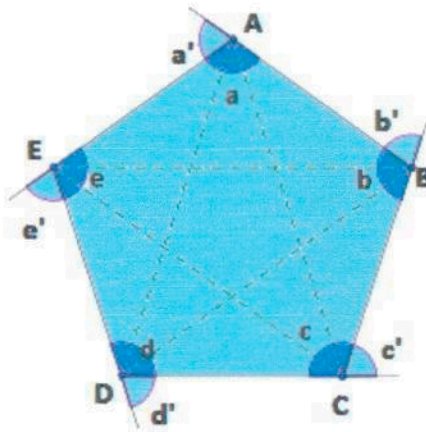


Figura 2.5: Elementos de um polígono

No polígono da figura acima temos :

Vértices: A, B, C, D e E .

Lados: AB, BC, CD, DE e AE .

Ângulos internos: a, b, c, d, e .

Ângulos externos: a', b', c' e d' .

Diagonais: AD, AC, BE, BD e CE .

Definição 2.3. (Polígono Convexo) Um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa.

Definição 2.4. (Polígono Regular) Um polígono convexo é denominado regular quando todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos internos são congruentes.

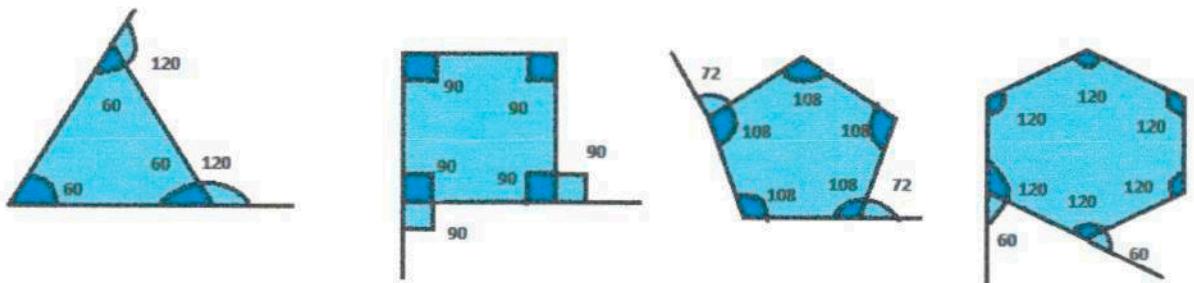


Figura 2.6: Polígonos convexas regulares.

Se um polígono convexo possui n lados, a soma das medidas de seus ângulos

UFCCG/INTECA

internos será dada por:

$$S = (n - 2)\pi.$$

Exemplo 2.1. A soma das medidas dos ângulos internos (S) de um triângulo é 180.

$$S = (n - 2)\pi = (3 - 2)\pi$$

$$S = \pi = 180$$

2.2 Poliedros

Definição 2.5. (Poliedro) Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

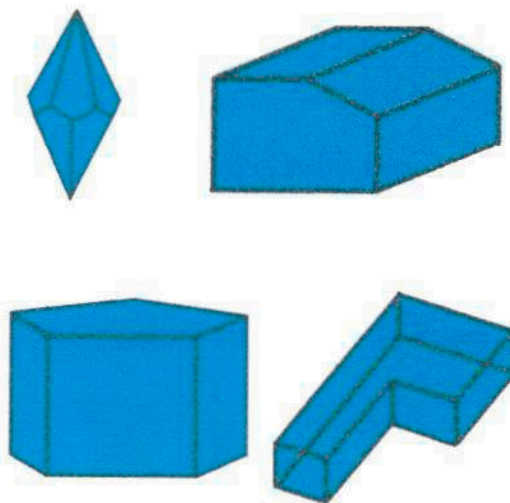


Figura 2.7: Exemplos de poliedros

Como um exemplo de uma figura que não é um poliedro, temos.

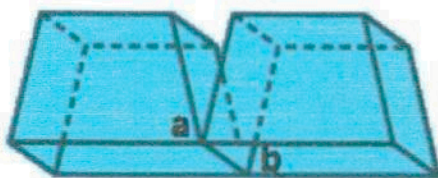


Figura 2.8: Exemplo de figura que não é poliedro

Não é poliedro, pois a aresta ab é lado de quatro faces, não cumprindo assim, a primeira condição na definição de poliedro.

Definição 2.6. (Poliedro Convexo) Um poliedro é convexo se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C .

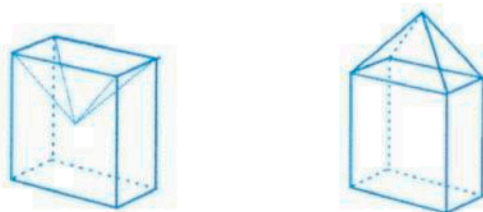


Figura 2.9: Exemplo de poliedro não-convexo e poliedro convexo.

Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.

Por muitos séculos poliedros foram chamados "sólidos". Depois, quando ocorreu a relação da teoria de poliedros com a Topologia, a suposição de ser oco passou a ser considerada.

De acordo com a definição (2.5), um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos satisfazendo certas condições. Se o poliedro é convexo, ele limita uma região do espaço: o seu interior. A reunião do poliedro com seu interior constitui o que chamamos de um sólido. Um poliedro é "oco", enquanto um sólido é "maciço".

Observação 2.2. Uma planificação de um poliedro é o resultado do processo de cortar o poliedro ao longo de curvas e, então, abri-lo de forma que ele possa ser disposto

sobre uma superfície plana, sem sobreposições e sem deformações das faces. Uma planificação por arestas é aquela obtida por cortes ao longo das arestas do poliedro.

Observemos, entretanto, que na definição (2.5) a região interior não faz parte do poliedro. Ao se considerar poliedro como um sólido geométrico, não faz sentido falar em planificação do poliedro, já que não é possível planificar um sólido. Neste caso, o que é planificado é apenas a superfície deste sólido, que é denominada superfície poliédrica, ou seja, não é considerado seu interior na planificação.

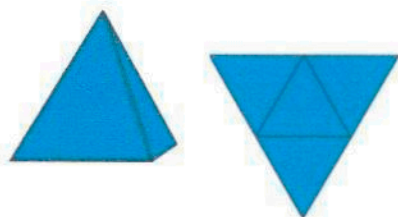


Figura 2.10: Tetraedro e sua planificação

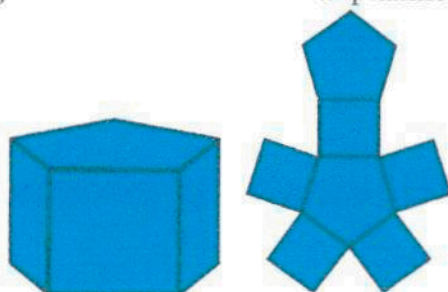


Figura 2.11: Prisma pentagonal reto e sua planificação

Usar o termo poliedro tanto para significar o corpo sólido ou a sua casca (superfície) é um abuso similar ao de usar a palavra polígono para designar tanto o contorno como o contorno e a região delimitada (referida como região poligonal).

2.3 Poliedro Regular

Dizemos que um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Tais poliedros são conhecidos como poliedros de Platão.

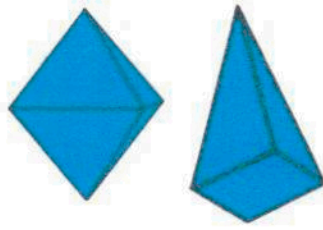


Figura 2.12: Exemplo de poliedro regular e não regular.

As idéias de Platão sobre os poliedros regulares foram registradas num diálogo intitulado *Timaeus*, presumivelmente do nome de um Pitagórico, que serviu como interlocutor principal. Não se sabe ao certo se Timaeus de Locri existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as idéias pitagóricas. Os poliedros regulares foram freqüentemente chamados "corpos cósmicos" ou "sólidos platônicos" devido a maneira pelo qual Platão, no *Timaeus*, os aplicou à explicação de fenômenos científicos(BOYER, 1974, p.58).

O tetraedro, o cubo e o octaedro se encontram na natureza como cristais, por exemplo, o sulfoantimoneto de sódio, sal comum e alúmen, respectivamente. Os outros dois não podem ocorrer na forma de cristais, mas se encontram na natureza como esqueletos de animais marinhos microscópicos chamados radiolários(EVES,2004, p.115).



Figura 2.13: Cristais na forma de sólidos Platônicos

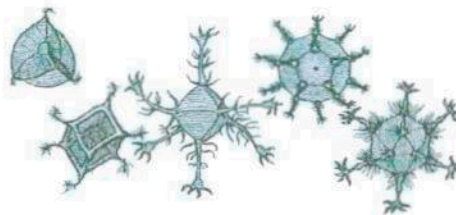


Figura 2.14: Radiolários

Existem apenas cinco poliedros convexos regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Esse resultado será provado no capítulo 3.

2.4 Propriedade Fundamental do Teorema de Euler

A Relação de Euler é expressa pela equação $V - A + F = 2$, como já foi mencionado anteriormente. Existem vários exemplos de poliedros convexos e não convexos onde a relação é válida.

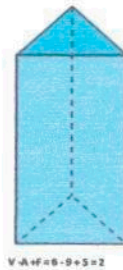


Figura 2.15: Poliedro convexo onde o Teorema de Euler é válido

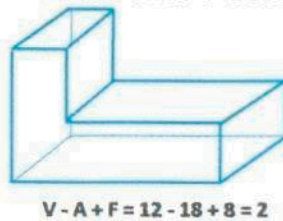


Figura 2.16: Poliedro não convexo onde o Teorema de Euler é válido

Mas, podemos verificar, através de exemplos, que o Teorema de Euler não é válido em toda generalidade.

Esta relação é sempre verdadeira para poliedros convexos, como será demonstrado no capítulo 3. Porém, para poliedros não convexos esta relação pode ou não ser verdadeira.

Qual seria então o motivo da relação de Euler não ser válida para todos os poliedros não convexos? Segundo Lima, a discussão sobre o teorema de Euler durou mais de um século, sendo encerrado por Poincaré, em 1893 com o desenvolvimento de uma área da matemática chamada Topologia. Poincaré compreendeu que o teorema de Euler não era um problema de Geometria, e sim, de Topologia, ao notar que o número $V - A + F = 2$ é um invariante topológico do poliedro P .

Para explicarmos invariante topológico precisamos definir homeomorfismo.

Dizemos que duas figuras são *homeomorfas* quando existe uma aplicação contínua $f : P \rightarrow Q$ cuja inversa, $f^{-1} : Q \rightarrow P$, também é contínua (chamamos f de homeomorfismo de P sobre Q).

Podemos entender homeomorfismo de maneira intuitiva. Assuma que o poliedro seja feito de borracha infinitamente inflável, e uma vez feito isso, ele se transformará em outra figura. Para ilustrar tal transformação, imagine um tetraedro, feito com esta borracha, sendo inflado, espera-se que ele se transforme em uma esfera, assim como um cubo ou ainda um dodecaedro, ambos pelo mesmo processo, mas se fizermos o mesmo processo com o sólido da figura 2.15, ele se transformará em uma figura chamada bitoro. De maneira formal, duas figuras se dizem homeomorfas ou topologicamente equivalentes, se for possível passar de uma para outra por um processo consistindo em esticar, contrair, torcer (sem rasgar ou colar) e fazer cortes, se assim desejar, desde que, nesse último caso, se rejuntem as bordas de cada uma de maneira a não deixar alterações.

Diremos, a partir daqui, através deste processo intuitivo, que poliedros que se transformam em esferas, toros, ou ainda, bitoros, são homeomorfas à esfera, ao toro e ao bitoro, respectivamente.

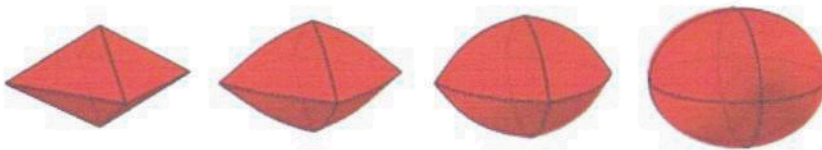


Figura 2.17: Poliedro homeomorfo a esfera

Nos dias de hoje, é de praxe chamarmos $\chi(P) = V - A + F$ de **característica de Euler-Poincaré** do poliedro P e $\chi(P)$ é um invariante topológico.

Poincaré mostrou que $V - A + F$ é um invariante topológico, isto é, se P e Q são poliedros homeomorfos, então $V_p - A_p + F_p = V_Q - A_Q + F_Q$, onde V_p indica o número de vértices do poliedro P e V_Q o número de vértices do poliedro Q , o mesmo ocorre como número de arestas e de faces. Ou seja, poliedros homeomorfos possuem a mesma característica de Euler-Poincaré.

De fato, a característica de Euler-Poincaré é até um invariante por mesmo tipo de homotopia (LIMA, 1991, p.73). (Grosseiramente falando, dois objetos tem mesmo tipo de homotopia, ou são homotopicamente equivalentes, se um pode ser deformado continuamente no outro).

Por exemplo, seja P é um tetraedro, $\chi(P) = 2$, e P é homeomorfo a esfera. Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro, ou seja, homeomorfo a esfera, tem característica de Euler-Poincaré igual a dois.

Na verdade, o fato supracitado ocorre com todo poliedro convexo P , pois projetando-o a partir de um ponto interior, sobre uma esfera S que contenha P , obtemos um homeomorfismo $f : P \rightarrow S$.

O poliedro abaixo não é homeomorfo a uma esfera. Se ele fosse feito de borracha, ao se injetar ar neste poliedro, ele se transformaria em um toro (um objeto na forma de um pneu).

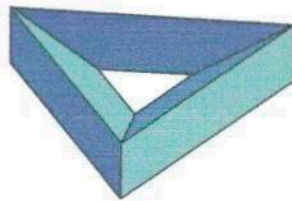


Figura 2.18: Poliedro homeomorfo ao toro

A propósito para poliedros que são homeomorfos a um toro, vale a seguinte relação $V - A + F = 0$. Mas geralmente, para um poliedro com g buracos passando por ele, vale que:

$$V - A + F = 2 - 2g.$$

Os números g e $V - A + F$ são denominados, respectivamente, gênero e característica de Euler do poliedro. Pode-se demonstrar que se um poliedro tem gênero g , então ele é homeomorfo a uma esfera (oca) com g alças. Para criar uma alça em uma esfera, basta abrir dois buracos e colar um cilindro entortado, como ilustra a figura abaixo.



Figura 2.19: Como criar uma alça em uma esfera.

Observação 2.3. Em uma superfície poliédrica aberta, vale a relação $V - A + F = 1$.

Em uma definição informal, uma superfície poliédrica aberta pode ser entendida como um poliedro onde faltam uma ou mais faces adjacentes.

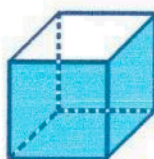


Figura 2.20: Superfície poliédrica aberta, $V - A + F = 8 - 12 + 5 = 1$.

Vamos fechar a superfície poliédrica, acrescentando um quadrado.

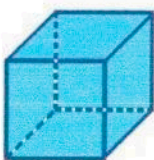


Figura 2.21: Superfície poliédrica fechada, $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$.

Capítulo 3

Teorema de Euler e Aplicações

3.1 Demonstração do Teorema de Euler

Daremos a seguir uma demonstração de Teorema de Euler baseada na soma dos ângulos internos de um poliedro. Para demonstrar o Teorema de Euler seguindo este ponto de vista, utilizam-se duas formas distintas de calcular a soma dos ângulos internos de um poliedro convexo. A demonstração que constará aqui para poliedros convexos, tem com referência Azambuja Filho (1983, p. 15-17), Lima et al. (2006, p. 235-238) e Mialich (2013).

Teorema 3.1. *(Zoroastro Azambuja Filho) Seja P um poliedro convexo com F faces. A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente*

$$F - A + V = 2.$$

Para demonstrar o Teorema de Euler começamos escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P . Tomamos também um plano H , que não intersecta P e é perpendicular a reta r . O plano H será chamado **plano horizontal** e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas **retas verticais**. H divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro P . Este será chamado o semiespaço superior; diremos que seus pontos estão acima de H .

Suponhamos o sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior onde todos os seus raios são retas paralelas à reta r . Todo ponto x do semi-espaço superior, possui uma projeção ortogonal (sombra) x' no plano H (estamos seguindo aqui a notação de

Azambuja Filho (1983, p. 15-17)). A sombra de qualquer conjunto X , contido no semi-espaco superior é, por definição, o conjunto X' , contido em H , formado pelas sombras dos pontos de X .

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P , ou é um único ponto de P . Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P .

O fato anterior pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P .

A sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno K' é a sombra de uma poligonal fechada K , formada por arestas de P . Cada ponto de K' é sombra de um único ponto de P (pertencente a K). A poligonal K é chamada o **contorno aparente** do poliedro P . Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a K') é sombra de 2 pontos de P .

Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos **ponto iluminado**; o mais baixo será chamado **sombrio**. Assim, a poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos **iluminados**, o conjunto dos pontos **sombrios** e o **contorno aparente** K .

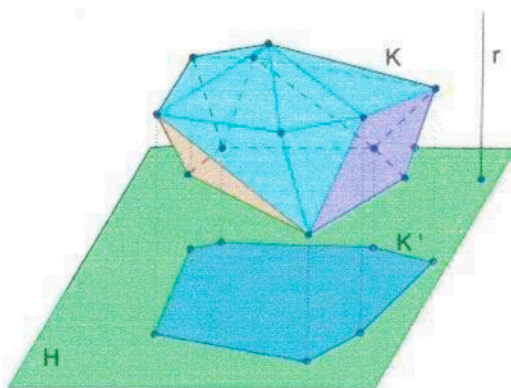


Figura 3.1: Projeção sobre o plano H

Considere P_1 o conjunto formado pelos pontos iluminados de P , unido com o contorno aparente K , e seja P'_1 a sombra de P_1 . Temos claramente uma correspondência biunívoca entre os elementos de P_1 e P'_1 .

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2 , formado pelos

pontos sombrios de P mais o contorno aparente K . A regra que associa a cada ponto de P_2 sua sombra também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P' . Escreveremos P'_2 para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P , contidas em P_2 (o que nos dá também uma reunião de polígonos justapostos).

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical e suas projeções, no plano, seja o mesmo ponto y'), as faces $AA'B'B$, $AA'D'D$ e $ABCD$ são iluminadas e as outras 3 faces são sombrias (Figura 3.2).

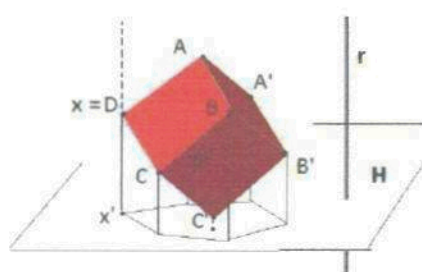


Figura 3.2: Cubo "pendurado pelo vértice A - Faces iluminadas e sombrias. (Projeção ortogonal dos pontos do cubo no plano H) .

Observemos que neste exemplo, os vértices $A' B' B C D D'$ são aparentes, A é iluminado e C' é sombrio (A e C' tem a mesma sombra). Ainda, o contorno aparente será a poligonal $A'B'BCDD'A'$ e Γ' é a sombra desse contorno, ou seja, a poligonal fechada Γ' , como na figura:

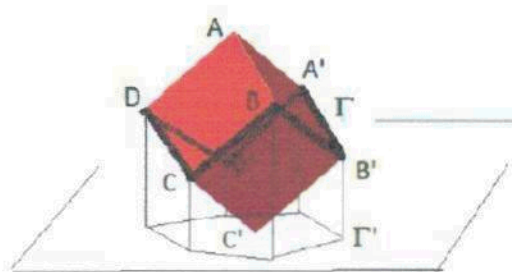


Figura 3.3: Cubo "pendurado pelo vértice A - Contorno aparente.

UFMG / BIBLIOTECA

No exemplo (cubo), P'_1 é formado pela reunião dos polígonos justapostos Q_1 (sombra da face iluminada $ABCD$); Q_2 (sombra da face iluminada $AA'BB''$) e Q_3 (sombra da face iluminada $AA'DD'$), como mostrado na figura 3.4:

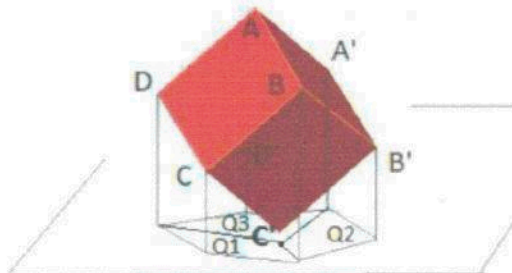


Figura 3.4: Cubo - Região P'_1 (sombra das faces iluminadas unido com contorno)

Observe que se decomposermos cada face do poliedro P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números F , A e V individualmente, mas a expressão $F - A + V$ permanecerá com o mesmo valor. Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há perda de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos.

A idéia da demonstração consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P .

Demonstração. Seja um poliedro convexo P de A arestas e F faces, onde todas as faces são triangulares. Traçando-se diagonais a relação $F - A + V$ não se altera, pois os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o número V não muda. Na expressão $F - A + V$, os acréscimos de F e A se cancelam. Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que $3F = 2A$.

Como existem F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a π radianos. Portanto $S = \pi F$. Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$, podemos escrever:

$$S = 2\pi A - 2\pi F$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombreados.

A fim de calcular S_1 , partimos da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos

de sua sombra T' . Daí resulta que S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais esta decomposto o polígono convexo P'_1 , sombra de P_1 . Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo triângulo por triângulo, como acima.

Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K . Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 também o número de vértices (e de lados) da poligonal K' , contorno do polígono convexo P' .

Em P_1 temos V_1 vértices interiores (sombas dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno K' . A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2 radianos (4 ângulos retos).

Como se vê na figura os vértices do contorno são: V_1, V_2, \dots, V_7 e os vértices iluminados do interior são: V_8 e V_9 .

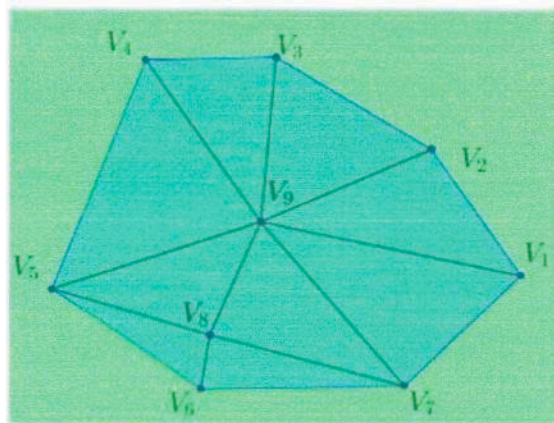


Figura 3.5: Contorno

A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno K' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos:

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi$$

Comparando com a igualdade $S = 2\pi A - 2\pi F$, acima, obtida, e dividindo por 2π , resulta que

$$A - F = V - 2,$$

ou seja,

$$F - A + V = 2,$$

como queríamos demonstrar.

□

3.2 Demonstração de Cauchy

Para conceber uma demonstração, Cauchy teve a idéia de achatar o poliedro de modo que ele se transforme em uma figura plana, através de uma projeção feita a partir de um ponto externo ao poliedro. O mais belo dessa demonstração é a criatividade de sair de um problema espacial para um problema no plano.

Teorema 3.2. *Para um poliedro convexo P de V vértices, A arestas e F faces, vale a relação de Euler $V - A + F = 2$.*

Demonstração

Primeira etapa:

O primeiro passo da demonstração é retiramos uma das faces do poliedro e dessa forma teremos um novo poliedro, porém isto não altera os números de vértices V e de arestas A , entretanto o número de faces F diminui uma unidade. Para este novo poliedro modificado, basta provarmos que $V - A + F = 1$. Ou seja, provar o teorema de Euler para um poliedro P é o mesmo que provar que o no poliedro modificado vale a relação $V - A + F + 1$.

Segunda etapa:

Diz-se que uma aresta do poliedro é livre quando é lado de apenas uma face. Após retirar uma face o poliedro modificado possui arestas livres que são os lados da face retirada. Esticando-se o poliedro modificado a partir de suas arestas livres obteremos uma figura plana. Durante este processo, os números de vértices V , arestas A e faces F não se alteram.

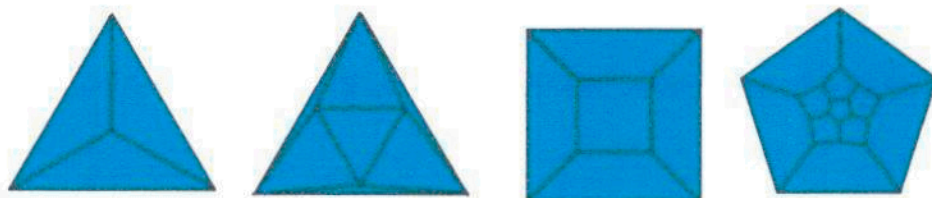


Figura 3.6: Tetraedro, octaedro, cubo e dodecaedro achatados.

Como o poliedro em questão é convexo, projeta-se o poliedro sobre o plano, a partir de um ponto suficientemente próximo da face omitida, de forma que nenhuma semirreta que parta do centro da projeção contenha mais de um ponto do poliedro. Uma idéia muito interessante é imaginar a origem dessas semirretas como foco luminoso, o modelo achatado do poliedro é sua sombra sobre o plano de projeção.

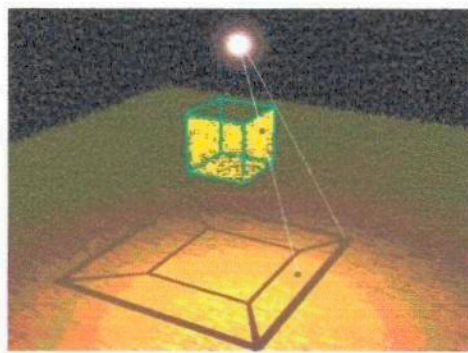


Figura 3.7: Cubo sem uma face (foco luminoso e poliedro achatado no plano)

Terceira etapa:

O próximo passo agora é traçar diagonais, que não se cortem, decompondo assim as faces do poliedro achatado em triângulos. Ao traçar cada diagonal que não intersecta as outras, temos que o número de vértices V não muda, enquanto o número de arestas A e o número de faces F aumentam de uma unidade, logo $V - A + F$ não se

altera. Podemos assim supor que todas as faces do poliedro são triângulos.

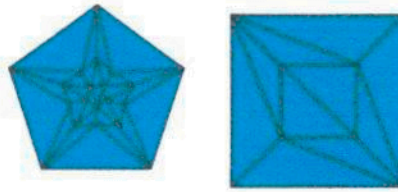


Figura 3.8: Dodecaedro e Cubo achatados e com as faces tringularizadas.

Quarta etapa:

Começa-se então o processo de "despetalar" o poliedro achatado. Ao retirarmos uma face que tem apenas uma aresta livre o número de vértices V não muda enquanto o número de arestas A e o número de faces F diminuem ambos de uma unidade, o que deixa $V - A + F$ constante. Ao retirarmos uma face que tem duas arestas livres, estaremos diminuindo um vértice, duas arestas e uma face, logo $V - A + F$ não se altera.

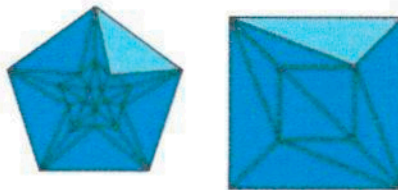


Figura 3.9: Retirando uma face com uma aresta livre representada na figura pela cor mas clara.

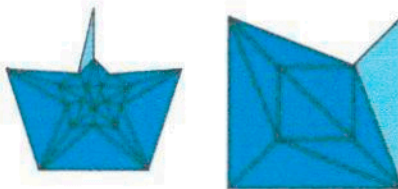


Figura 3.10: Retirando uma face com duas arestas livres representada na figura pela cor mas clara.

Quinta etapa:

Por fim retirando-se as faces, uma por vez, chega-se a última face que é um triângulo para o qual vale a expressão $V - A + F = 1$.

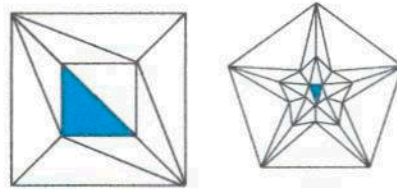


Figura 3.11: Última face a ser retirada.

Exemplo 3.1. *A seguir tem-se a seqüência dos passos descritos por Cauchy para um prisma triangular, o qual foi escolhido pela simplicidade da visualização do processo.*

Toma-se o poliedro inicialmente: um prisma triangular reto e em seguida retira-se uma de suas faces, por exemplo, o triângulo superior que é uma das bases, nesse caso.

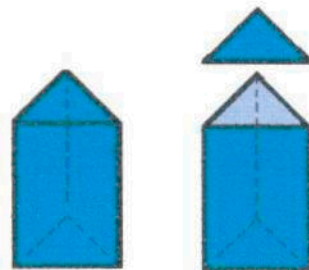


Figura 3.12: Prisma triangular reto. Retira-se a "tampa".

O passo seguinte é tomar um ponto próximo à face que foi retirada e usar esse ponto como origem de semirretas para projetar a sombra no plano. Na seqüência fica criada a imagem correspondente ao poliedro projetado no plano e neste caso tem-se:

$$V - A + F = 6 - 9 + 4$$

$$V - A + F = 1.$$

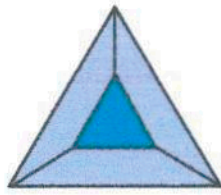


Figura 3.13: Poliedro achatado sem uma das faces.

Dividindo cada um dos polígonos planos com diagonais formando triângulos.

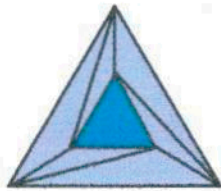


Figura 3.14: Faces divididas em triângulos

A figura ficou com 7 triângulos, com $V = 6$ (não alterou o número de vértices), $A = 12$ (aumentou em 3 o número de aresta) e $F = 7$ (aumentou em 3 o número de faces). Tem-se que:

$$V - A + F = 6 - 12 + 7 = 1.$$

As alterações sofridas pela figura não alteraram o valor da característica de Euler-Poincaré.

Iniciando o processo de despentalar a figura, retira-se um triângulo com uma aresta livre.

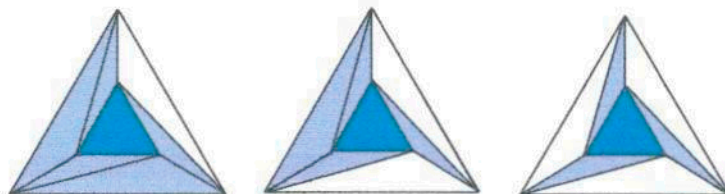


Figura 3.15: Despentalando: retirando um triângulo com uma aresta livre.

Diminuiu-se uma face e uma aresta, em cada retirada, logo a relação $V - A + F = 1$ não alterou.

Retirando-se em seguida, os triângulos com duas arestas livres, diminui-se uma face, duas arestas e um vértice, conservando-se ainda o valor da expressão:

$$V - A + F = 1.$$

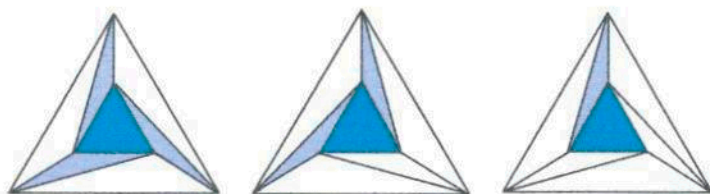


Figura 3.16: Despetalando: retirando triângulos com duas arestas livres

E finalmente chega-se a última face, tem-se um triângulo em que $A = 3$, $V = 3$ e $F = 1$, logo:

$$V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

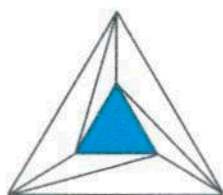
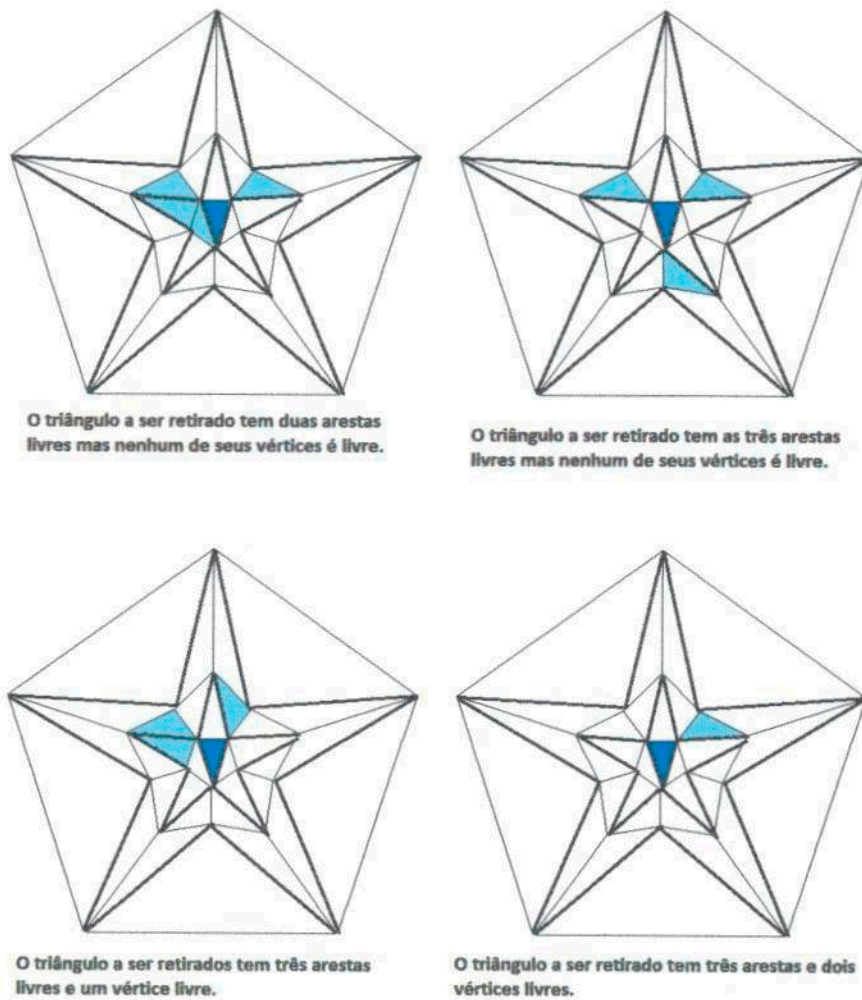


Figura 3.17: Última face

Para Lima (1991), a demonstração de Cauchy está incompleta e não se apoia em uma definição. Ele ressalta ainda que a demonstração se mostra deficiente na quarta etapa do processo, quando considera-se que ocorrem duas possibilidades para a retirada dos triângulos. Lima considera que as possibilidades a respeito do triângulo retirado não são apenas as duas consideradas por Cauchy, e mostra que existem ainda mais quatro possibilidades.

Na figura abaixo apresentamos as possibilidades consideradas por Lima. Considere o dodecaedro achatado e com faces triangulares:



UFGG / MEC

Figura 3.18: Possibilidades consideradas por Lima - Face a ser retirada indicada por azul escuro.

Segundo a análise feita por Lima (1991), admitir, que só ocorrem duas possibilidades para as faces com arestas livres, é a parte em que a demonstração de Cauchy se mostra mais deficiente.

3.3 Aplicação do Teorema de Euler

Teorema 3.3. *Existem somente cinco poliedros simples regulares.*

Demonstração. Suponha S um poliedro com V vértices, A arestas e F faces. Seja p o número de arestas se encontrando em cada vértice e n o número de arestas de cada face. Note que $n \geq 3$. Então

$$pV = 2A = nF,$$

$$V - A + F = 2.$$

Assim,

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2.$$

Logo,

$$F(2n - pn + 2m) = 4p \Rightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn} \quad (3.1)$$

e devemos ter

$$2n - np + 2p > 0.$$

Como $n \geq 3$, temos

$$2p > n(p - 2) \geq 3(p - 2) = 3p - 6,$$

donde $p < 6$.

Substituindo $n = 3$ na equação (3.1) temos:

Quando $p = 3$:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

$$F = \frac{12}{6 + 6 - 9}$$

$$F = 4$$

Ou seja, obtemos o tetraedro.



Quando $p = 4$:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

$$F = \frac{16}{8 + 6 - 12}$$

$$F = 8$$

Ou seja, obtemos o octaedro.



Quando $p = 5$:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

$$F = \frac{20}{10 + 6 - 15}$$

$$F = 20$$

Ou seja, obtemos o icosaedro.



Substituindo $n = 4$ na equação (3.1) temos:

Quando $p = 3$:

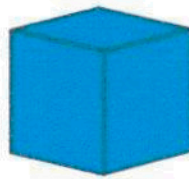
$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

$$F = \frac{12}{6 + 8 - 12}$$

$$F = 6$$

Ou seja, obtemos o hexaedro (cubo).

Substituindo $n = 5$ na equação (3.1) temos:



Quando $p = 3$:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

$$F = \frac{12}{6 + 10 - 15}$$

$$F = 12$$

Ou seja, obtemos o dodecaedro.



Assim, a relação

$$F(2n - pn + 2p) = 4p, \quad n \geq 3, p < 6$$

nos dá os seguintes possíveis valores para (p, n, F) :

(a) $(3, 3, 4)$, (b) $(4, 3, 8)$, (c) $(5, 3, 20)$, (d) $(3, 4, 6)$ e (e) $(3, 5, 12)$.

Portanto, só existem cinco poliedros regulares. Os conhecidos *Poliedros de Platão*.

□

Considerações Finais

A controvérsia sobre a fórmula de Euler e as sucessivas demonstrações e refutações da sua validade constitui por si só uma “história da geometria” fascinante.

Numa carta a Christian Goldbach, em 1750, Euler refere-se à sua descoberta de que num poliedro $V + F - A = 2$, sendo V , F e A respectivamente o número de vértices, faces e arestas do poliedro.

Mais tarde, Euler apresenta uma demonstração. No entanto, tal como Descartes e anteriormente Euclides, Euler não diz a que tipo de poliedros se está a referir. E não consegue apresentar uma demonstração aceitável.

Este é apenas o começo da longa história das “provas e refutações” da fórmula (ou teorema) de Euler. Matemáticos como Legendre, Cauchy, Gergonne, Steiner, Von Staudt e outros menos conhecidos estiveram envolvidos nesta longa polémica.

Um dos maiores motivos da controvérsia resulta da indefinição do termo poliedro. Por vezes as demonstrações, como no caso da de Cauchy em 1813, pressupunham que o poliedro era topologicamente equivalente a uma superfície esférica.

Nesse caso, um simples contra-exemplo, como o da figura 3.19, bastava para invalidar a demonstração e mesmo a generalidade com que era enunciado o teorema.

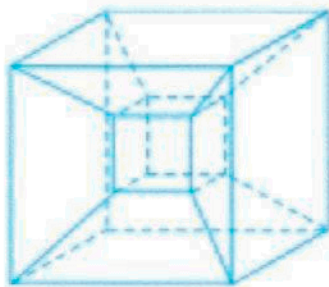


Figura 3.19:

Vê-se imediatamente que a fórmula de Euler não é válida para este sólido, pois $V + F - A = 16 + 16 - 32 = 0$. Quanto à demonstração apresentada por Cauchy, baseava-se na possibilidade de retirar uma face ao poliedro e em seguida deformá-lo continuamente até o estender sobre uma superfície plana, sem o rasgar. Ora no contra-exemplo, que não é topologicamente equivalente a uma superfície esférica (mas sim a um toro), tal não é possível. Tais contra-exemplos eram apelidados de “monstros” na

época, por não verificarem a fórmula de Euler.

Com o desenvolvimento de nosso trabalho foi possível compreender melhor a Fórmula de Euler e analisar a definição de poliedros, também refletir um pouco sobre o desenvolvimento das pesquisas Matemáticas a partir de alguns aspectos históricos relativos a prova do Teorema de Euler.

Referências Bibliográficas

- [1] BORTOLOSSI, H. J. Os Sólidos Platônicos. 2009a. Disponível em:
<http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>
(Acessado em 03/06/2013)
- [2] BORTOLOSSI, H. J. Uma Pletora de Poliedros. 2009b. Disponível em:
<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>
- [3] BORTOLOSSI, H. J. Uma Pletora de Poliedros. 2009b. Disponível em:
<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/definicoes-br.html>
(Acessado em 03/06/2013)
- [4] BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [5] DANTE, L. R. *Matemática (Ensino Médio) I*. 1ªed. São Paulo: Ática, 2004.
- [6] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3ª ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2002.
- [7] FILHO, Z. A. *Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos*. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática, 1983.
- [8] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* 5ªed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [9] LIMA, E. L. *A matemática do ensino médio*, volume 2. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

- [10] LIMA, E. L. *A característica de Euler-Poincaré*. Rio de Janeiro, IMPA, 1985.
- [11] MASCARENHAS, J. A. *Uma análise do Ensino de Geometria no ensino médio através do teorema de Euler para poliedros convexos*, Dissertação de Mestrado Profissional, Universidade Federal da Bahia.
- [12] MIALICH, F. R. *Poliedros e Teorema de Euler*, Dissertação de Mestrado Profissional, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.
- [13] SIQUEIRA, R. M. *Tradição e Pesquisa Sob Disputa: O Caso dos Poliedros na Geometria*. São Paulo: Revista Brasileira de História da Matemática, 2009.

UFPA