UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

DAMIÃO FRANCEILTON MARQUES DE SOUSA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADAS NA FÍSICA CLÁSSICA

CUITÉ – PB
2021

DAMIÃO FRANCEILTON MARQUES DE SOUSA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADAS NA FÍSICA CLÁSSICA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Física, da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cuité.

Orientador(a): Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ - PB

2021

S725e Sousa, Damião Franceilton Marques de.

Equações diferenciais ordinárias aplicadas na física clássica. / Damião Franceilton Marques de Sousa. - Cuité, 2021.

83 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2021.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".

Referências.

1. Equações diferenciais. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Física clássica. 4. Termodinâmica. 5. Eletromagnetismo. 6. Mecânica. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 514.745.8(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. JESIEL FERREIRA GOMES - CRB-15/256

DAMIÃO FRANCEILTON MARQUES DE SOUSA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADAS NA FÍSICA CLÁSSICA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Física, da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cuité.

Aprovada em: ___/___/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
(Orientadora)

____

Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros- UFCG
(Examinador interno)

____

Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas - UFCG
(Examinador interno)

____

Prof. Dr. Nilton Ferreira Frazão - UFCG
(Examinador interno suplente)

CUITÉ - PB

2021

Este trabalho é dedicado a toda minha família, principalmente, a fonte de toda minha motivação, meu pai que não está mais entre nós.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Criador maior por toda saúde e oportunidade durante esse percurso de graduação.

Agradeço a minha família a quem eu dedico essa vitória: meus pais, principalmente, meu pai que não está mais entre nós, meus irmãos Maria Franciene e André Marques, meu cunhado Amsterdã e meus sobrinhos Bianca e Bernardo. Já que, sem o apoio e compreensão de vocês eu não tinha chegado tão longe.

Agradeço a minha professora orientadora Célia Maria pela confiança, dedicação e paciência, tanto durante o período de escrita desse trabalho, quanto quando cursei a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, a qual foi ministrada por ela. E a todos os meus mestres que foram de suma importância durante todo esse percurso na graduação. Em especial, Fábio Ferreira, Joseclécio Dutra e Nilton Frazão, exemplos de profissionais e seres humanos.

Agradeço, também, principalmente,a duas pessoas especiais há quem muito me ajudaram na construção deste trabalho, nas disciplinas do curso, nos projetos da Universidade e na vida em si, Isaac Ferreira e Luís Gomes. Os meus outros dois considerados irmãos Randson Henrique e Hilbert Douglas, obrigado por toda ajuda. As minhas consideradas irmãs da UFCG e da vida Dayse Lima, Fabiany Lima e Rosanny Valência, pessoas com índoles incríveis, que sempre me ajudaram, apoiaram, aconselharam e foram essenciais neste percurso.

Agradeço aos demais colegas de turma Max Wendell, Raline Araújo, Reinaldo Fonseca e Ruam Adelmo. E todos os outros colegas de curso, Helymarckson, Hugo Rafael, Laedson Luan, Mariza Fernandes, Nallyson Willian, Pablo Martins, Rafael Medeiros, Raquel Almeida, Ronayde Emanuel e Ysac Anykueury por todo o apoio e ajuda até o presente momento. Vocês viraram mais que simples colegas de curso, são amigos, irmãos da vida.

Agradeço o apoio dos meus colegas, amigos e irmãos dos demais cursos: Anailde Felix, Alane Santos, Maria da Paz, Maria Elisângela, Natham Cândido e Rosymarya Valência. Aos amigos professores da época do estágio Ivanielma e Jabes. E aos que Cuité me proporcionou o prazer de conhecer: Cláudia Anjos, Érica Cristina, Fernanda Pessoa, Mayara Islaine, Raline Gomes e todos os outros que não citei o nome,

pois nessa hora é bastante difícil citar todos, mas saibam que vocês também foram essenciais para que eu chegasse aonde cheguei.

Enfim, agradeço a todos o que sempre acreditaram em mim, apoiando, ajudando, aconselhando, incentivando para que este dia chegasse, para todo vocês o meu muitíssimo obrigado.

RESUMO

As equações diferenciais, ou modelos matemáticos, têm uma enorme importância na modelagem de muitos problemas da ciência, principalmente, na Física. Assim, este trabalho visa abordar modelos matemáticos formulados através das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) nas principais áreas da Física Clássica: Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo. Através de uma pesquisa bibliográfica, investigamos, tanto no campo das Equações Diferenciais, quanto no campo da Física Clássica, os problemas mais comumente estudados, e que são modelados pela Matemática, como: Movimento Harmônico, Fenômeno de Resfriamento e Circuitos Elétricos do tipo RC. O objetivo deste trabalho é promover uma maior relação entre a Física e a Modelagem Matemática, e também, ressaltar a importância dessas ferramentas matemáticas através de aplicações no cotidiano. Além de contribuir para estudos e trabalhos posteriores na área.

PALAVRAS CHAVES: EDO, Física, Mecânica, Termodinâmica, Eletromagnetismo.

ABSTRACT

The Differential equations, or mathematical models, has one of enormous importance in modeling many problems in science, principally, in Physics. Thus, this work aims to approach mathematical models formulated through Ordinary Differential Equations (ODE) in the main areas of Classical Physics: Classical Mechanics, Thermodynamics and Electromagnetism. Through a bibliographic research, we investigated, both in the field of Differential Equations, and in the field of Classical Physics, the most commonly studied problems, and taht are modeled by Mathematics, as: Harmonic Movement, Cooling Phenomenon and Electric Circuits of the type RC. The objective of this work is to promote a greater relationship between Physics and Mathematical Modeling, and also, stand out the importance of these mathematical tools through applications in daily life. In addition to contributing for studies and further work in the area.

KEYWORDS: EDO, Physics, Mechanics, Thermodynamics, Electromagnetism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação de um conjunto massa-mola submetido a uma força externa.
Figura 2: Tipos de oscilações amortecidas.
Figura 3: Gráficos dos três tipos de oscilações amortecidas..
Figura 4: Modelos de resistores.
Figura 5: Estrutura de um capacitor em um circuito.
Figura 6: Representação de um circuito RC.
Figura 7: Representação visual da membrana onde se localiza os neurônios.
Figura 8: Modelo dos principais componentes dos neurônios.
Figura 9: Passo a passo do Impulso nervoso.
Figura 10: Modelo do potencial de ação passando pelo Axônio.
Figura 11: Representação de um Neurônio como circuito RC.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO ... 13

2. CONTEXTO HISTÓRICO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E AS ÁREAS DA FÍSICA CLÁSSICA. ... 16

2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ... 16

2.2. FÍSICA: Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo. ... 23

2.2.1. Mecânica Clássica ... 23

2.2.2. Termodinâmica ... 31

2.2.3. Eletromagnetismo ... 35

3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ... 41

3.1. Classificações: Tipo, Ordem, Linearidade. ... 41

3.1.1. Tipo ... 41

3.1.2. Ordem ... 42

3.1.3. Linearidade ... 42

3.2. Alguns Métodos de Soluções ... 43

3.2.1. Equações Diferenciais Separáveis ... 43

3.2.2. Equações diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: Método dos Fatores Integrantes. ... 44

3.2.3. Equações de segunda ordem: linear, homogênea, com coeficientes constantes. ... 45

4. APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NAS ÁREAS DA FÍSICA CLÁSSICA. ... 48

4.1. MECÂNICA: MOVIMENTO HARMÔNICO - VIBRAÇÕES ... 48

4.1.1. Movimento Harmônico Simples ... 49

4.1.2. Movimento Harmônico Amortecido ... 51

4.1.3. Movimento Harmônico – Amortecedores de Veículos ... 56

4.2. TERMODINÂMICA: LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON ... 59

4.2.1. Lei do Resfriamento de Newton. 59
4.2.2. Processo da Garrafa Térmica. 61
4.2.3. Variação de Temperatura – Problema criminalista. 62
4.3. Eletromagnetismo: Lei de Kirchhoffdas malhas em Circuitos RC 65
4.3.1. Corrente elétrica 65
4.3.2. Resistores 66
4.3.3. Capacitores 67
4.3.4. Lei de Kirchhoff das malhas em circuitos RC simples. 68
4.3.5. Circuitos RC – Neurônios. 70
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS. 75
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 77

1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais (ED), comumente, chamadas de modelos matemáticos, têm uma enorme importância no desenvolvimento da sociedade em si. Foi através delas que o homem conseguiu explicar fenômenos tanto de nível atômico e subatômico (problema da partícula em uma caixa[1]), quanto macroscópicos (estudos relacionados à Cosmologia, área da Física que estuda fenômenos relacionados a formação e a evolução do Universo). Além de outras contribuições em diversas áreas do conhecimento, como Medicina, Química, Biologia, Economia, entre outras.

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED). Essas equações podem ser classificadas de acordo com seu tipo, a ordem e linearidade (ZILL e CULLEN, 2001). Elas são consideradas uma das mais brilhantes e importantes aplicações da Matemática, podendo ser obtidas, por exemplo, através de leis físicas que regem o comportamento do sistema, como as leis de Newton para sistemas mecânicos ou as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos (STEWART, 2007; TONIDANDEL e ARAÚJO, 2012).

Seus estudos são realizados na disciplina de equações diferenciais ordinárias, rotineiramente conhecidas como EDO. É um componente curricular presente na maioria dos cursos de ciências exatas, que são cursos que têm em seus fundamentos os estudos de matemática, química e física (INEP, 2018). Assim, o objetivo dessa disciplina é apresentar conceitos e técnicas capazes de fazer o aluno entender, modelar e interpretar problemas relacionados ao cotidiano ou aplicações em áreas da Física, da Economia; áreas relacionadas à saúde como, por exemplo, em um estudo de uma pandemia.

De modo que, como essa disciplina, geralmente ministrada para turmas com alunos de cursos como, por exemplo, Matemática, Física, Engenharia, entre outros, um dos seus pré-requisitos da disciplina de EDO diante do aluno é que ele possua um conhecimento razoável de Cálculo Diferencial Integral. Porém, na maioria das vezes os alunos por não possuírem faz com que a disciplina acabe não tendo um ensino aprendizagem esperado, principalmente, em aplicações, onde o aluno sabe todo o

[1] Um dos problemas mais comum em Mecânica Quântica, representado por uma partícula em uma caixa com paredes infinitas com intuito de impossibilitar a saída dessa partícula, além da mesma não perder energia quando colidir com as paredes.

conceito e técnica, porém não sabe sobressair diante de certa situação problema, como afirma Oliveira e Igliori (2013):

> As dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos no estudo de Equações Diferenciais, estão presentes tanto no uso de técnicas para resolução dessas equações, quanto na produção de significados e compreensão de conceitos. Essas dificuldades se evidenciam principalmente no momento em que são estudadas as aplicações em problemas contextualizados, envolvendo a Física, a Química, a Engenharia etc. Em muitas situações, os alunos dominam as técnicas de resolução, porém têm dificuldade em identificar como aplicar as Equações Diferenciais na resolução de problemas.

Como essa disciplina é considerada uma extensão dos cursos de cálculo diferencial das áreas de exatas, o aluno precisa ter um bom conhecimento de cálculo para obter um bom desempenho na disciplina, porém nem sempre isso é a realidade. É comum ouvir discursos de alunos sobre as dificuldades encontradas nas disciplinas de cálculo no ensino superior, que assim levam à reprovação, ou até à desistência por parte da maioria deles. Segundo Pinto e Lima (2017), um dos fatores recorrentes que geram esse fracasso e desmotivação é a falta de convencimento por parte dos alunos, sobre o porquê estudá-las.

Além disso, essas dificuldades estão inteiramente ligadas a todo um processo sociopolítico educacional, que se alastra por diversas gerações no ensino, sendo dificuldades que os alunos possuem desde seu início na escola, como por exemplo, afirma Nascimento (2018), a respeito da disciplina de cálculo diferencial e integral I:

> Não é novidade que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I mostra-se como um desafio para os alunos de exatas. Não se pode passar despercebido o nível de dificuldade que os alunos enfrentam ao iniciarem a disciplina, pois muitas destas dificuldades são resultados de falhas trazidas do início de sua vida escolar, isto é, desde o ensino fundamental.

Este trabalho visa estudar aplicações de equações diferenciais, principalmente, Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) nas principais áreas da física com objetivo de mostrar a importância de tais ferramentas matemáticas, além de contribuir para estudos e trabalhos posteriores na área. O interesse por essa área surgiu na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (que foi muito proveitosa, tanto no que diz respeito às técnicas de resolução, como na sua utilização no dia a dia), e no decorrer das disciplinas do curso de Licenciatura em Física, como por exemplo, Mecânica Clássica, Termodinâmica, Eletromagnetismo, Física Moderna, etc.

Portanto, neste trabalho foram abordados alguns tipos de equações diferenciais ordinárias, assim como suas aplicações. O trabalho está dividido em cinco partes. O *primeiro* capítulo, onde fazemos uma introdução geral do conceito de equações diferenciais e suas funcionalidades.

O *segundo* capítulo está dividido em duas partes. A primeira se refere a uma introdução das equações diferenciais ordinárias, trazendo consigo um pouco do contexto histórico, seguindo como referência a abordagem histórica dada no livro "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno" dos autores BOYCE e DIPRIMA (2006), além de outras concepções sobre esse contexto retiradas de outros autores da literatura citados no decorrer do trabalho. Nessa parte, são citados principais nomes e suas valorosas contribuições para essa área, em um formato histórico e cronológico. A segunda dedicada a trazer um contexto geral, claro e sucinto de algumas das principais áreas da Física, sendo elas: Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo. Cada área será abordada em uma seção, com o objetivo de apresentar para o leitor uma abordagem do que significa, estuda, e das principais leis e formulações que cada área possui.

No *terceiro* capítulo, apresentamos alguns dos tipos de equações diferenciais ordinárias, suas características, técnicas de soluções e, principalmente, as que serão utilizadas nas resoluções de problemas no decorrer do trabalho, sendo essas equações diferenciais ordinárias do tipo: Equações Diferenciais Separáveis, Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem - Método dos Fatores Integrantes, Equações de Segunda Ordem - Linear, Homogênea, com Coeficientes Constantes.

O *quarto* capítulo é voltado para o estudo das equações diferenciais nas áreas citadas no capítulo dois. Nesse capítulo, serão abordados três tipos de aplicação de equação diferencial ordinária. No fim de cada seção, faz-se uma abordagem das equações, através de exemplos encontrados na literatura e com aplicação no cotidiano. O *quinto* capítulo será destinado para as considerações finais do trabalho.

2. CONTEXTO HISTÓRICO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E AS ÁREAS DA FÍSICA CLÁSSICA.

2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Os estudos sobre equações diferenciais tiveram início através de dois grandes matemáticos, em meados do século XVII, o físico-matemático britânico Isaac Newton (1643–1662) e o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), os quais conseguiram independentemente, novas maneiras de derivação e integração. As contribuições de Newton e Leibniz, além de serem muito proveitosas, incentivaram também outros matemáticos a estudarem esta área, sendo capazes de solucionar problemas, que até então não tinham solução. Como exemplo, temos os irmãos Bernoulli Jakob (1654 - 1705) e Johhan (1667 - 1748), Daniel Bernoulli (1700 – 1782) filho de Johhan, o alemão Leunard Euler (1707 – 1783), o francês Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), o francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), entre outros que de maneira igualitária aos demais citados, também, foram essenciais para o desenvolvimento de vários novos métodos de soluções das equações diferenciais ordinárias e parciais.

O britânico Sir Isaac Newton era Físico, Matemático, Astrônomo, Alquimista, Filósofo e Teólogo, porém mais conhecido como Físico e Matemático devido a suas vastas contribuições nessas duas áreas, como por exemplo, descobriu diversas leis físicas básicas e criou o método de investigação de problemas físicos através do cálculo. Além disso, ele se tornou professor da Universidade de Cambridge, em 1669, e Diretor da Casa da Moeda de seu país em 1699 (KREYSZIG, 2013).

Newton nasceu na cidade inglesa Woolsthorpe, em 4 de janeiro de 1643. Sobre o ano do nascimento de Newton, Rocha, J. F.(2002) fala que:

> O ano de 1642, duplamente significativo pelo nascimento de Newton e pela morte de Galileu, como que numa passagem de tocha olímpica do conhecimento, constitui-se num verdadeiro marco ou ano zero da ciência moderna. [...] O importante, no entanto, não foram as datas de nascimento, mas o fato de que Newton nasceu em berço esplêndido, ou em ombros de gigantes, como ele próprio diria, pois que pôde utilizar os monumentais trabalhos, não só de Galileu, mas de outros pioneiros da ciência moderna, como Kepler, que morreria doze anos antes, e Descartes, que trabalhava na Holanda.

Newton foi uma criança tímida, personalidade desenvolvida devido à morte do seu pai antes do seu nascimento, e o casamento de sua mãe com um fazendeiro rico. Fato esse que contribuiu bastante em seus estudos. Ele sempre desde criança desenvolveu habilidades e interesses em estudos e mecanismos que o ajudasse tanto em suas pesquisas,quanto em sua vida na fazenda, de tal maneira que ele quem construiu seu próprio laboratório (ROCHA, 2002).

O ápice de suas obras veio, em 1666, quando ele foi obrigado a se isolar em sua fazenda, quando uma grande pandemia, conhecida, como peste bubônica, espalhou-se por toda a Inglaterra, ocasionando assim, o fechamento de seu colégio. Segundo Rocha, J. F. (2002) esse ano é chamado de *annus mirabilis* (ano dos milagres). Foi nesse período que a ciência moderna e a carreira de Newton deram um grande passo, graças ao desenvolvimento do teorema do binômio e o cálculo das fluxões (hoje conhecido como cálculo diferencial). Segundo Boyce e Diprima (2017), "essas descobertas de Newton circulavam privadamente entre seus amigos, devido ele ser muito sensível a críticas, o que levou o mesmo a guardar suas descobertas e só começar a publicá-las anos mais tarde em 1687, em seu livro *Principia*".

Entretanto, na área de equações diferenciais, Newton acabou atuando pouquíssimo, porém o desenvolvimento do cálculo das fluxões e a explanação sobre a Mecânica foram à grande base para o início das aplicações das equações diferenciais.

Por exemplo, a segunda lei de Newton, é uma equação diferencial, da forma $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, ou seja, a variação temporal do momento linear é igual à força resultante atuante em um corpo. Através da abordagem de Newton, de maneira mais significativa, atualmente, pode ser escrita também como sendo, $\vec{F}=m.\vec{a}$, significa que a força resultante ($\vec{F}$) que atua sobre um corpo é exatamente igual ao produto da massa de um corpo (m) e pela aceleração ($\vec{a}$) Contudo, continua sendo uma equação diferencial, já que à aceleração é a variação temporal do vetor velocidade, assim, $\vec{F}=m.\vec{a} = m.(d\vec{v}/dt)$.

Sobre as demais contribuições de Isaac Newton para as equações diferenciais, além do já comentado, Boyce e Diprima (2017) destacam as classificações das equações diferenciais de primeira ordem, de três maneiras: $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$, $dy/dx = f(x,y)$. Nesta última, ele desenvolveu o método para sua resolução, através de séries infinitas.

No cálculo diferencial, quem obteve resultados um pouco depois de Isaac Newton, foi o alemão **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Nascido em Leipzig, no dia 1 de julho de 1646, formado no curso de Direito, porém ele era polímata, tinha apreços por outras áreas, dentre as quais Teologia, Filosofia e, especial, a Matemática, contribuindo de maneira significativa (SILVA, R.; et.al 2014).

Leibniz acreditava que os problemas para serem entendidos e resolvidos deveriam ter um aspecto mais visual. Desse modo, é a ele que devemos a notação matemática de derivada assim como o sinal de integral (BOYCE e DIPRIMA, 2017; SIMÕES, 2014).

Essa dedicação de Leibniz aos estudos matemáticos ocorreu no período entre 1672-1676, onde pode-se destacar as sequências de diferenças, os triângulos característicos, a transmutação e a série π. Além de ser conhecido por seus trabalhos sobre a teoria da elasticidade e probabilidade matemática (ÁVILA, 2006; KREYSZIG, 2013).Entre suas contribuições na área de equações diferenciais, destacam-se o método de separação de variáveis, redução de equações homogêneas a equações separáveis e procedimentos para resolver equações lineares de primeira ordem (ALITOLEF, 2011).

As contribuições de Isaac Newton e Leibniz para o avanço do Cálculo Diferencial serviram como ponto de partida para que outros estudiosos da época também começassem seus estudos nessa área, alguns deles fazem parte da famosa família Bernoulli. A **Família Bernoulli** é conhecida por seus grandes feitos na história da ciência, entre seus membros, podemos destacar os irmãos Bernoulli Jakob e Johhan.

Os irmãos Bernoulli, Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliar o campo de aplicações (BOYCE e DIPRIMA, 2017). Ambos os irmãos eram briguentos, competitivos, normalmente, entre si. Porém, não se sabe ao certo, se a rivalidade os incentivou a descobertas maiores, ou se eles conseguiriam ir mais longe se tivessem continuado a sua colaboração conjunta (ALBRECHT et.al, 2014; BOYCE, 2017)

Jakob, o irmão mais velho e professor na Basiléia ficou conhecido por seus trabalhos sobre a teoria da elasticidade e probabilidade matemática, entre outros. Destaca-se, entre seus feitos, a resolução da hoje famosa “equação de Bernoulli” (ALBRECHT et. al, 2014; KREYSZIG, 2013)

$$y' = p(x).y + q(x).y^n, \tag{2.1}$$

Além da equação (2.1), ou “equação de Bernoulli”, Jakob escreveu equações diferenciais para o movimento do planeta, utilizando os princípios de Newton; além de utilizar a expressão “integral” pela primeira vez em seu sentido atual (MEDEIROS, 2016).

Johann Bernoulli exerceu uma enorme influência no desenvolvimento do cálculo, sucedeu a Jakob como professor na Basiléia, sendo capaz de realizar estudos sobre trajetórias ortogonais da família das curvas e quadraturas de áreas em séries, entre outros. Johann, provavelmente, foi o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica de Newton, com o intuito de modelar matematicamente e encontrar soluções para fenômenos físicos através de uso das equações diferenciais (BOYCE e DIPRIMA, 2017; SIMÕES, 2014; KREYSZIG, 2013).

Um problema resolvido por ambos os irmãos e que gerou muito atrito entre eles foi o problema da *braquistócrona*, também resolvido, por Leibniz, por Newton e pelo Marquês de L’Hôpital (BOYCE e DIPRIMA, 2017).

Segundo Albrecht et.al(2014):

> A curva braquistócrona (trajetória de uma partícula sujeita a um campo gravitacionalconstante sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menorintervalo de tempo), publicado em junho de 1696, na Acta Erudtorium. A solução dabraquistócrona por Johann foi mais elegante que a de Jacob, que apesar de ser confusa e trabalhosa, era mais geral.

Os Bernoulli’s eram conhecidos por seus méritos em vários estudos, em diferentes áreas. Desse modo, os estudos em modelagem não pararam somente em Johann e Jakob, teve também mais um descendente Bernoulli, Daniel filho de Johann.

Daniel ficou conhecido pela famosa *equação de Bernoulli da mecânica dos fluidos* e da *teoria cinética dos gases*; e o primeiro a encontrar os resultados que hoje são conhecidos como *funções de Bessel*, já que seu principal interesse era em equações diferenciais parciais (BOYCEe DIPRIMA, 2017; KREYSZIG, 2013).

Ao falar da família Bernoulli, consequentemente, pode-se falar de um grande amigo deles, o importante matemático suíço **Leonard Paul Euler.** Amigo de Daniel Bernoulli, Euler era filho de um pastor calvinista. Seu pai tinha certa vocação para a Matemática, já tendo estudado Matemática com seu amigo Jakob Bernoulli, conseguiu que seu filho estudasse com Johann Bernoulli (irmão de Jacque Bernoulli), estudando quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada, e deixando assim uma grande contribuição, já que comumente seu nome é visto em estudos de diversas áreas da ciência exata (BASTOS, 2016; GAYO e WILHELM, 2015).

Segundo Boyce e Diprima (2017), Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, suas obras completas enchem mais de setenta volumes grossos. Já para GAYO e WILHELM (2015), falar das obras de Euler é nada menos que falar de uma obra com mais de 850 títulos, entre livros e artigos. Suas obras eram bem variadas, entre elasse poderiam encontrar temas de Cálculo, Álgebra, Geometria além de Física e Astronomia.

As contribuições fornecidas por Euler para a área de equações diferenciais vieram através de sua formulação e desenvolvimento de métodos de soluções para problemas de mecânica. Ele conseguiu aplicar à análise de maneira significativa nesse tipo de estudo. Sobre as contribuições de Euler em equações diferenciais, Boyce e Diprima (2017) destacam:

> Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas em 1734-1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes no mesmo artigo, e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743, estendeu esse último resultado para equações não-homogêneas em 1750-1751. Começando em torno de 1750, Euler, usou frequentemente séries de potências para resolver equações diferenciais. Propôs, também, um procedimento numérico em 1768-1769, além de contribuições importantes em equações diferenciais parciais e forneceu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Outros importantíssimos matemáticos nesse ramo de estudo são os franceses **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) e **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827). Lagrange de origem francesa, embora nascido em Turim (Itália), tornou-se professor de matemática aos 19 anos, em sua cidade natal. Sucedeu Euler em 1766, na Academia de Berlim, e em 1787, foi para a Academia de Paris (BOYCE e DIPRIMA, 2017; KREYSZIG, 2013).Sua obra principal, de grande relevância, versou sobre o cálculo de variações, mecânica celeste, mecânica geral (*Mécanique Analytique*, Paris, 1788), equações diferenciais, teoria da aproximação, álgebra e teoria dos números. (KREYSZIG, 2013).

Segundo Ravindran et. al (2006)

> Lagrange enviou seus resultados a Euler, contendo seu método de máximos e mínimos, que na época trabalhava em Berlim, no qual ficou impressionado

> com as novas ideias de Lagrange. Embora tivesse apenas 19 anos, Lagrange foi nomeado Professor de Matemática na Escola Real de Artilharia de Torino em 1755. Euler propôs o nome de Lagrange para eleição para a Academia de Berlim e ele foi devidamente eleito em 1756. Suas publicações nesta época incluíram resultados sobre o cálculo de variações e probabilidades. Em um trabalho sobre os fundamentos da dinâmica, Lagrange baseou seu desenvolvimento no princípio da menor ação e energia cinética.

Em equações diferencias, segundo Boyce e Diprima (2017), *Lagrange* mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem *n* é uma combinação linear de *n* soluções independentes e desenvolveu o método de variação de parâmetros, além do conhecimento em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Simon Laplace era filho de agricultores e viveu sua infância na Normandia. Mudou-se para Paris, em 1768, quando se tornou professor de matemática, deixando assim sua marca nos meios científicos quando ingressou na Academia de Ciências em 1733 (BOYCE e DIPRIMA 2017; RAMOS, 2014). *Laplace,* um matemático, astrônomo e físico e trabalhou em diversas áreas do conhecimento, porém foi em Mecânica Celeste que obteve maior destaque quando organizou a Astronomia Matemática em seu livro *Traité de mécanique Celeste*, publicado entre 1799 e 1825 (BOYCE e DIPRIMA 2017; SILVA. M., 2014). Sendo considerado um dos matemáticos mais importantes na história da França, como diz Ramos, (2014):

> *Laplace* é considerado como um dos matemáticos mais respeitáveis da França, pela sua grande contribuição com importantes trabalhos em vários ramos das ciências. No conjunto de suas pesquisas se destacam os estudos sobre a análise da estabilidade de grandes fenômenos, como fizeram Arquimedes e Galileu, assim, como doutrinas matemáticas de princípios originais e de grande extensão, como fizeram Descartes, Newton e Leibniz.

Laplace contribuiu bastante na área de física-matemática, por exemplo, a *equação de Laplace* estudada por ele extensamente em conexão com a atração gravitacional, e a *transformada de Laplace,*importantíssima para resoluções de equações diferenciais, (BOYCE e DIPRIMA 2017).

A *Transformada de Laplace* que acabou levando seu nome, porém só reconhecida anos mais tarde, é o método que consiste em transformar uma equação diferencial ordinária em equação algébrica, ou uma equação diferencial parcial em ordinária (BOYCE e DIPRIMA, 2017; TONIDANDEL e ARAÚJO, 2012).

Outros matemáticos também foram essenciais para o desenvolvimento dessa área, principalmente, no século XVIII, já que existiam bons estudos sobre as equações diferenciais ordinárias, tornando-as essenciais para as pesquisas e crescimento da ciência. Dentre eles, Clairaut, D'Alembert, Riccati, Cauchy, Gauss, Bessel, entre outros.

Por exemplo, o francês D'Alembert junto com Euler chegou à conclusão que a solução da equação da onda, deveria ser a sobreposição de duas funções em sentidos opostos com velocidades iguais, porém resolvendo parcialmente o problema (MEDEIROS, 2016; SIMÕES, 2014). Este problema chegou perto de ser resolvido por Lagrange através da forma prevista por Euler, mas não percebeu que com alguns rearranjos desenvolveria a função em uma série de senos, cujos coeficientes são o que chamamos de *coeficientes de Fourier* (MEDEIROS, 2016).

No século XIX, por exemplo, os estudos mudaram um pouco o curso. Boyce e Diprima (2017) relatam que os propósitos eram outros, por exemplo, os de encontrar teorias de existência e unicidade, métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências, e estudar equações diferencias parciais, principalmente, ligadas a área de Física Matemática.

Surgiram, assim, vários métodos, como as funções transcendentais[2]. Esses métodos foram essenciais para a continuação dos estudos como, por exemplo, a contribuição de Jean Fourier, capaz de explicar o problema das equações de ondas, também conhecidas como cordas vibrantes, através das *séries de Fourier*, que tem seu nome em sua homenagem. Simões (2014) afirma que:

> O matemático Lagrange desenvolveu a análise teórica das vibrações de uma corda de comprimento L fixa nas extremidades. Esteve perto de chegar ao resultado de que qualquer forma da corda entre os seus extremos pode ser escrita por uma soma infinita. Mas, foi Jean Fourier quem chegou ao resultado enquanto estudava o problema da condução de calor por um material em que seja mantida uma diferença constante entre duas das suas extremidades.

Com o início do século XX, com o surgimento de alguns computadores, foram desenvolvidos programas computacionais capazes de resolver cada vez mais os

[2] As funções transcendentais por definição são funções que não satisfaz uma equação polinomial cujos coeficientes são eles próprios polinomiais, como as equações de Bessel, Legendre, Fourier e outros.

problemas relacionados às equações diferenciais, que até então, eram limitados à resolução manual. Com isto, a ciência avançou novos fenômenos eram descobertos, assim como novas áreas, por exemplo, Álgebra Linear, Dinâmica dos Fluidos, Mecânica Quântica, entre outras. No século XXI, mesmo sendo um estudo antigo, já que vem desde o século XVII, o estudo das equações diferenciais ainda não está completo, pois existem problemas e fenômenos que ainda não foram resolvidos (BOYCE e DIPRIMA, 2006). Pode-se perceber sua enorme importância, em vários problemas da atualidade, por exemplo, na área de Epidemiologia para estudar a disseminação de certos vírus, como o da COVID-19, que pode ser compreendido através de uma equação diferencial.

2.2. FÍSICA: Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo.

2.2.1. Mecânica Clássica

A palavra *Mecânica* definida como "Ciência que tem por objeto o estudo das forças ou da sua ação; combinação de órgãos próprios para produzir ou para transmitir os movimentos ou mecanismo: a mecânica de um relógio" (Mecânica, 2021) possui origem grega da palavra grega *mechaniké*, no latim *mechanica*, que se resume a movimento.

A Mecânica é o estudo de como os objetos se movem, sendo eles planetas em torno do Sol, pessoas em seu cotidiano, e até um elétron em torno do seu núcleo. O termo Mecânica Clássica é algo muito vago, mas geralmente por ele se entende como os estudos da Mecânica de aspectos macroscópicos fundamentados e estabelecidos até o século XIX. Entre os anos 1905 e 1925, movimentos relativísticos e/ou fenômenos estudados em escalas atômicas começaram a não coincidir com as teorias já existentes, obrigando uma revisão de determinados conceitos que deram origem a chamada Física Moderna (TAYLOR, 2013; ROCHA, J. F, 2002).

Área da física responsável pelo estudo dos corpos em seu estado de repouso, ou de movimento, quando submetidos a uma dada ação de forças,é dividida em três grupos, de acordo com sua funcionalidade e condições de estudar cada caso: a *estática*,que estuda corpos em estado de repouso; *cinemática*, que estuda os movimentos dos corpos sem se preocupar com suas causas; e a *dinâmica*, que estuda o movimento e suas causas (HIBBELER 2005).

Antunes (2018) em seus estudos, diz que:

> A mecânica é uma área da Física que se propõe a descrever os princípios básicos que regem os movimentos dos corpos no espaço enquanto o tempo flui. Dessa forma, para sua completa consistência, deve-se definir precisamente o que se entende por tempo, espaço e objeto. Tais conceitos, evidentemente, extrapolam o escopo da mecânica e influenciam na descrição das demais áreas da Física. Além disso, diferentes noções dessas estruturas levam a distintas realizações da mecânica.

De um contexto histórico, a Mecânica Clássica surgiu na perspectiva de observar, identificar e explicar tais movimentos, em escalas da ordem de grandeza do corpo humano, até o movimento de corpos celestes. Sua origem vem desde quando a medida do tempo foi realizada de uma forma mais precisa e eficaz. Seus primeiros estudos foram iniciados pelos gregos, a mais ou menos dois mil anos atrás, porém, em concepções da atualidade a mecânica atribuída pelos gregos tinha um caráter falho. Assim, a que estudamos atualmente teve início com físico italiano Galileu Galilei (1564 – 16420), com seus estudos geométricos sobre movimentos e com o britânico físico Isaac Newton (TAYLOR, 2013; HIBBELER, 2005).

Com o passar do tempo, a Mecânica foi se desenvolvendo e começou a ser analisada através de várias perspectivas, sendo elas: a visão newtoniana que através da teoria do espaço e tempo absolutos estuda o movimento através das três leis estabelecidas por Isaac Newton. A *Langrangeana* desenvolvida pelo francês Joseph-Louis Lagrange; e a concepção *Hamiltoniana desenvolvida, em 1833, pelo matemático irlandês* William R. Hamilton.

Sobre essas três concepções da Mecânica Clássica, Da silva (2015) diz que:

> A mecânica clássica, em sua formulação newtoniana, lagrangeana ou hamiltoniana, é uma teoria que trata do movimento dos corpos em geral, no domínio de dimensões macroscópicas e velocidades não comparáveis à da luz. Ela dá conta, incrivelmente bem, de movimentos tão diversos quanto o giro de um pião, a oscilação de um pêndulo e a translação de um planeta em torno do Sol - isso para não citar um grande número de sistemas muito mais complexos (e não necessariamente periódicos).

No livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural) ou somente *Principia*, como normalmente é conhecido, Newton deixou explícitos os conceitos de movimento e suas causas, o que teve muito impacto e críticas, assim como toda descoberta científica, porém, já nas primeiras décadas do século XVIII, sua aceitação já era praticamente unânime (CHAIB, 2016; ROCHA, 2002).

Com essas formulações dadas através dos seus conhecimentos do cálculo diferencial e, baseado nos estudos de grandes outros estudiosos, dentre eles, o físico italiano Galileu Galilei, Isaac Newton foi quem mais presenteou a Mecânica Clássica. Newton começou a relacionar os movimentos com o tempo em que eles aconteciam, e através disso, formulou as suas famosas leis da Mecânica: das três leis do movimento e a lei da Gravitação Universal. E por isso, a Mecânica Clássica, é normalmente conhecida como ***Mecânica Newtoniana*** (ROCHA, 2002; HIBBELER, 2005).

Isaac Newton enunciou essas leis em seu livro *Princípia,* no qual considerou que: o espaço deve ser euclidiano, absoluto, que não se contrai; o espaço é homogêneo, implicando uma simetria de translação; espaço é isotrópico, preservando a simetria de rotação; e o tempo absoluto garante uma simetria no próprio tempo na sua uniformidade. Logo o que temos é que tal evento pode ocorrer em qualquer que seja o instante de tempo, desde que as condições iniciais sejam preservadas, de modo que a energia mecânica do sistema se conserve e ao considerar, por exemplo, que o espaço não translade e não gire (ou rotacione), respectivamente, teremos as conservações do momento linear e do momento angular (BARCELOS NETO, 2004; HOSUME, 2012).

Os problemas usuais de movimento podem ser solucionados através das formulações newtonianas, como o famoso problema de um corpo em um dado movimento, desprezando as forças dissipativas, que a partir da segunda lei de Newton, pode ser formulado como segue abaixo:

$$\vec{F} = {}^{d\vec{p}}\!/_{dt} = m\,{}^{d\vec{v}}\!/_{dt}, \qquad (2.2)$$

onde, o vetor $\vec{F}$ indica a força resultante do problema, $\vec{p}$ vetor do momento linear do corpo (ou de uma partícula), t o tempo que tal evento ocorrer, m a massa do corpo (ou de uma partícula), assim desse modo ${}^{d\vec{p}}\!/_{dt}$ e ${}^{d\vec{v}}\!/_{dt}$, respectivamente, indicam a variação temporal do vetor momento linear e a variação temporal do vetor velocidade.

Em situações reais, as forças dissipativas, ou seja, não conservativas, devem ser consideradas, sendo elas: atrito, resistência do ar, entre outras. Logo, o problema passa a ser visto com outro olhar, ou seja, na equação (2.2) é acrescentado outro termo, que indica as forças de resistência do sistema ($\vec{F}_{res}$). Assim, ao reescrever a equação (2.2), tem-se:

$$\vec{F} = {d\vec{p}}/_{dt} + \vec{F}_{res} = m\,{d\vec{v}}/_{dt} + \vec{F}_{res}\,. \quad (2.3)$$

A mecânica newtoniana foi uma das maiores conquistas para a história da ciência, através do sucesso fenomenológico que obteve, ou seja, sua validação para movimentos que ocorrem em um limite de baixas velocidades (quando comparada à velocidade da luz) e de grandes distâncias (comparada ao comprimento de onda de de Broglie) (ANTUNES,2018).

Mesmo descrevendo bem os movimentos de projéteis, planetas (ou corpos parecidos), alguns fenômenos não eram explicados pela mecânica newtoniana, como por exemplo, os fenômenos elétricos e os que atualmente são conhecidos como problemas de Física Moderna, como os fenômenos relativísticos que iam contra a ideia absoluta de espaço e tempo (MORICONE et.al, 2010; TAYLOR, 2013). Além disso, a resolução de problemas por esse método requer muitos atributos, como as considerações das forças de vínculos[3] de um sistema, como por exemplo, a força de tração de um fio inextensível. Sobre essas forças Lima et. al (2018) diz:

> Determinada partícula não possa se mover livremente no espaço, de modo que suas coordenadas não são todas independentes entre si, isto é, há uma equação que as conecta. Restrições como essas, que podem ser de caráter geométrico ou cinemático, ao movimento das partículas são chamadas de vínculos.

Assim, pelo formalismo newtoniano na maioria das vezes, para chegar, por exemplo, às leis de conservação do sistema, as forças de vínculos devem ser consideradas. Como diz HOSUME et. al. (2012):

> Das leis de Newton também se chega às leis de conservação, porém com as imposições: de que apenas forças internas estejam atuando sobre o sistema, no caso da conservação do momento linear; de que as forças internas de interação entre os corpos sejam forças centrais, para a conservação do momento angular; e de que as forças sejam conservativas, para a conservação da energia.

Diante dessas formulações e regras, às vezes complicadas de se aplicar a tal problema, como por exemplo, um corpo se movendo sobre uma superfície curva, ou o caso de um pêndulo duplo. Logo, surge um formalismo, na maioria das vezes, com uma

[3] Forças de características restritivas, ou forças que não realizam trabalho, como por exemplo, a força de tração

resolução mais simples, conhecido como formalismo lagrangiano, ou Mecânica Lagrangiana.

A concepção newtoniana sobre a Mecânica, como descrita anteriormente, requer na maioria das vezes, uma informação mais aguçada dos problemas, onde várias considerações devem ser levadas em conta. Como diz Lemos (p.5) "Em tais situações a formulação newtoniana da dinâmica revela-se inconveniente e antieconômica, pois exige o uso de variáveis redundantes e as forças de vínculo aparecem de forma explícita".

A ***Mecânica Lagrangiana***, equivalente à Mecânica Newtoniana, foi desenvolvida pelo matemático e astrônomo francês *Joseph-Louis de Lagrange*, em 1788,que traz em seus métodos de estudos aparatos mais simples para algumas resoluções de problemas se comparada com a formulação newtoniana, como sua boa adequação para qualquer tipo de coordenadas, e que forças de vínculos não precisam ser atribuídas na resolução do problema (TAYLOR, 2013).

Lagrange se baseou em métodos de conservação através da função lagrangiana $(\mathcal{L})$, ou seja, em sua perspectiva, a função $\mathcal{L}$, dado um sistema dinâmico, as conservações da energia mecânica e do momento linear estão em si relacionadas. Seu formalismo se adéqua de maneira singinificativa nas conexões de simetrias do sistema, nas quais se conservam em constante movimento (Esta frase está com um sentido confuso!) (SYMON, 1996; TAYLOR, 2013). Assim, em termos matemáticos, a formulação de Lagrange é dada como:

$$\mathcal{L}\,(q_i, \dot{q}_i, t) = T\,(q_i, \dot{q}_i, t) - U\,(q_i), \tag{2.4}$$

A equação (2.4) descreve, em um dado sistema, as coordenadas generalizadas de uma partícula, sendo elas, respectivamente, a posição, velocidade e o tempo $(q_i, \dot{q}_i, t)$.A função lagrangeana $(\mathcal{L})$é dada através da diferença da energia cinética (T) e potencial (U).

Através da determinação da função $\mathcal{L}$, em termo das coordenadas generalizadas escolhidas, as equações do movimento que assim, como na formulação de Newton, são determinadas através da equação diferencial, podem ser obtidas de uma forma mais simples, como vista abaixo:

$$\mathrm{F} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2.5}$$

onde i varia de 1 até n, sendo n um valor infinitesimal, onde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_{i\,,} \tag{2.6}$$

sendo p_i o momento linear generalizado e o reescrevendo a equação (2.5), temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0\,. \tag{2.7}$$

E com ela entende-se que, considerando um sistema conservativo, a variação temporal da equação de Lagrange entre dois pontos consecutivos será nula e assim a energia do sistema se conserva. Quando a energia do sistema não se conserva, esse método lagrangiano entra em desvantagem, o porquê disso é pelo motivo do resultado da equação (2.7) não ser mais nulo, como escrito na equação (2.8):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \tag{2.8}$$

onde,

$$Q_i = \sum_{J}^{N} \vec{F_J}^{ext} \frac{\partial \vec{r_J}}{\partial q_i}. \tag{2.9}$$

O que a equação (2.9) nos fornece é o somatório de todo trabalho (Q_i) realizado pelas forças generalizadas ($\vec{F_J}^{ext}$) do sistema que agem sobre a partícula a determinadas distâncias ($\frac{\partial \vec{r_J}}{\partial q_i}$), onde $\vec{r_J}$ é o vetor que representa a posição da partícula e $q_i$as coordenadas n-dimensionais da partícula.

Outra característica desse formalismo é sua invariância para qualquer que seja o tipo de coordenadas, facilitando assim a resolução de problemas como o de uma partícula em um movimento circular. Essa invariância foi demonstrada através do *princípio de Hamilton*, sendo ele matematicamente dado como:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt\,. \tag{2.10}$$

Esse princípio foi proposto pelo matemático irlandês Willian Rowan Hamilton, no século XX, que mais tarde veio formular o que hoje conhecemos como *Mecânica Hamiltoniana*. Tal princípio nos diz que um caminho real percorrido entre dois pontos em dado intervalo de tempo, é tal que a ação da integral (equação 2.10) é estacionária (não se altera com o tempo) ou mínima, o que faz esse princípio ser conhecido como *princípio da mínima ação*. Essas características da Mecânica Lagrangiana, segundo as indagações de Lemos (2007), permitem-nos uma maior descrição das equações do movimento, no qual uma simples função escalar expressa em termos de coordenadas independentes e arbitrárias nos permite a vantagem de não envolver as forças de restrições, ou forças de vínculos.

Sobre essa ausência das forças de vínculo na resolução dos problemas Taylor (2013, p.237) diz que "isso simplifica muito o problema, uma vez que as forças de vínculo são geralmente desconhecidas e essa simplificação surge quase sem custo, já que em geral não desejamos conhecer tais forças". Além dessas vantagens sobre a facilidade na resolução comparada com a newtoniana, a Mecânica Lagrangiana possibilitou, através de estudos de conservação, a descoberta da função hamiltoniana, denotada por $\mathcal{H}$, que veio a ser base dos estudos do irlandês Willian R. Hamilton em seus estudos sobre a Mecânica, conhecida como *Mecânica Hamiltoniana*.

A ***Mecânica Hamiltoniana*** criada a partir da concepção lagrangiana, sendo também equivalente à Mecânica de Newton, foi formulada pelo físico irlandês Willian R. Hamilton em 1833. Ela propõe que em um sistema fechado a soma das energias conservativas, ou seja, a soma da energia cinética (T) com a energia potencial (U), pode ser expressa em termos de uma função conhecida como *função hamiltoniana* ($\mathcal{H}$)(SYMON, 1996; LEMOS, 2007).

Como descrito no formalismo de Lagrange, a função $\mathcal{L}$ pode ser escrita em termos das coordenadas generalizadas, sendo elas: a posição (q), a variação da posição no decorrer do tempo ($\dot{q}$), e o tempo (t). Considerando assim que a função lagrangiana possa ser variante no tempo. Logo tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{L}\,(q_i, \dot{q}_i, t)\,, \tag{2.11}$$

ao usar a regra da cadeia para derivação na equação (2.11), encontramos,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\sum_i (p_i\,\dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{2.13}$$

Considerando que, em alguns casos, $\mathcal{L}$ não dependa de forma explícita do tempo, de modo que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ é nulo, a equação (2.13) assume a forma:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} - \frac{d}{dt}\sum_i (p_i\,\dot{q}_i) = 0. \tag{2.14}$$

Ao interpretar esse resultado temos que a lagrangiana ($\mathcal{L}$) não depende de maneira explícita do tempo. Assim, chegamos a uma função de conservação conhecida como *função de Hamilton* denotada pelo símbolo $\mathcal{H}$ em sua homenagem:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} - \sum_i (p_i \, \dot{q}_i), \tag{2.15}$$

e em uma evolução temporal, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \tag{2.16}$$

onde, i varia de 1 até n

Essa descoberta foi muito importante, assim como qualquer outra lei de conservação. O que a difere da Mecânica Lagrangiana em que um ponto em um espaço com é $2n$ dimensões (espaço de estados[4]) pode gerar $2n$ coordenadas, sendo elas: $q_i, \dot{q}_i$. Na hamiltoniana tem-se apenas um caminho no espaço de estados (espaço de fase[5]), assim é utilizada-se apenas n coordenadas sendo elas: p_i, q_i. Além de sua validade fora da trajetória clássica, ela tem uma suma importância nas áreas da Física Moderna, principalmente, na Mecânica Quântica (TAYLOR, 2013; SYMON, 1996). Assim, a Mecânica Clássica pode ser vista e explicada por esses três formalismos: newtoniano, langrangiano e hamiltoniano.

O formalismo de Newton, baseado no espaço e no tempo ambos absolutos, válidos para sistemas de referenciais inerciais com baixas velocidades (se comparados com a velocidade da luz) e de tamanho macroscópicos, é capaz de resolver problemas tanto de caráter conservativos, quanto não conservativos, desde que todas as forças dos sistemas sejam consideradas, até as forças de vínculos já citadas neste capítulo.

O lagrangiano permite uma visão mais simples diante do problema, baseado nas ideias de conservação dos sistemas, ele é equivalente ao de Newton, porém não necessita da abordagem das forças de vínculos, somente das variáveis generalizadas do sistema. Mas esse sistema é falho quando tem a presença de forças dissipativas, como por exemplo, a de atrito.

E por fim formulação de Hamilton, que é baseada nos estudos de Lagrange, e, por conseguinte, na *função lagrangiana* ($\mathcal{L}$); em Hamilton, temos *função hamiltoniana* ($\mathcal{H}$).Uma abordagem ainda mais simples que a de Lagrange por trabalhar com o estado do sistema denotado por n-coordenadas ($q_i, p_i,$ respectivamente, n-posições generalizadas e n-momentos generalizados), em vez de $2n$-coordenadas ($q_i, \dot{q}_i,$ respectivamente, n-posições generalizadas e n-velocidades generalizados) e com suas aproximações válidas fora do mundo clássico.

[4] Espaço das coordenadas generalizadas $q_i, \dot{q}_i$, respectivamente, posição e velocidade.
[5] Espaço das coordenadas generalizadas, q_i, p_i, respectivamente, posição e momento.

2.2.2. Termodinâmica

A Termodinâmica é considerada, assim como a Mecânica Clássica, uma das áreas clássicas da Física. Desenvolvida antes mesmo que uma compreensão da estrutura interna da matéria fosse obtida, o seu objeto de estudo é a determinação das relações entre as várias propriedades da matéria, sem conhecermos a sua estrutura interna. O objetivo dessa área é o estudo da transferência de energia através da compreensão das relações entre calor, energia e trabalho causadas pelas ações das medidas de volume, pressão e temperatura do sistema (YOUNG, 2008; FEYNMAN, 2008).

Callen (1985) pág.9, sobre a Termodinâmica diz que:

> De fato somos capazes de observar processos macroscópicos que são quase, mas não completamente, independentes do tempo. Com modesta dificuldade podemos observar processos com escalas de tempo da ordem de 10^{-7} s ou menos. Tais processos observáveis são ainda enormemente lentos relativo à escala atômica de 10^{-15} s. É racional então primeiro considerar o caso limite e construir uma teoria de fenômenos independentes do tempo. Tal teoria é a termodinâmica.

De início, a palavra “Termodinâmica” nos dá a entender que estaremos trabalhando com sistemas dinâmicos, porém como todos os sistemas em Termodinâmica contêm um grande número de partículas, ou seja, muitos átomos, ou muitas moléculas, essa definição de sistemas dinâmicos em estudos termodinâmicos não é muito adequada. Outro motivo é devido em um sistema termodinâmico às quantidades são tratadas como propriedades médias de determinado sistema, e assim, um minucioso estudo do movimento de cada partícula do sistema é uma tarefa árdua e redundante (FERMI, 1936; NUSSENZVEIG, 2002).

O termo Termodinâmica tem sua origem nas palavras gregas *thermé* (calor) e *dynamics* (força, ação, potência), o que nos permite entendê-la como sendo o ramo da Física que estuda essas ações (ou potências) providas pelo calor; ou seja, ela lida com fenômenos relacionados aos conceitos de temperatura e calor, consistindo em apenas descrições macroscópicas. Assim, seus conceitos só se aplicam em sistemas com um grande número de partículas envolvidas (NUSSENZVEIG, 2002, ROCHA, J. F; 2002).

Os primeiros estudos e teoria consistente sobre a natureza do calor veio do químico, médico e metalúrgico alemão Georg Ernst Stahl (1660-1743). Ele afirmou que um processo de combustão só era possível devido a um produto conhecido como *flogisto* (um fluido misterioso lançado ao ar quando os corpos entravam em combustão). Mas, foi o químico francês Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794) quem deu uma explicação mais sofisticada para esse problema. Lavoisier mostrou que a combustão era provocada através da reação entre a mistura de um material e oxigênio. Assim, ao produzir um vácuo, dado processo térmico não ocorreria, e assim a ideia do *flogisto* foi abandonada pela ideia de Lavoisier que essa substância era agora o calórico (fluido com propriedades exóticas e invisíveis) (TORIBIO, 2015).

O século XVII foi o ano do início desses estudos, e tinham como objetivo melhorar a eficiência das máquinas térmicas. Começando com a tentativa de criar a primeira bomba de vácuo por Guerike, porém não teve muita repercussão. Mas, foram os dois cientistas, o irlandês Robert Boyle (1627 – 1691) e o inglês Robert Hooke (1635 – 1703), que conseguiram criar uma bomba de ar, conseguindo relacionar as três grandezas: volume, temperatura e pressão, que são à base dos estudos da Termodinâmica, e formulando a famosa *lei de Boyle* (YOUNG, 2008 ROCHA, J. F; 2002).

Os avanços na lei de Boyle sobre os estudos dos gases ideais, enunciada mais tarde por É. Clapeyron (1799 – 1864), em 1834, mas que teve uma forte contribuição de vários outros, principalmente do físico italiano Amedeo Avogrado (1776 – 1856), e dos físicos alemães August Kronig (1856 – 1822) e Rudolf Clausius (1822 – 1888). Avogrado conseguiu relacionar o volume de um gás e o número de moléculas presentes em uma dada amostra. Essa relação é dada através da famosa constante de Avogrado (N_A) e seu valor é, aproximadamente, $6{,}022 \times 10^{23}$ mol^{-1} (sendo *mol* uma das setes unidades básicas do SI). Isso foi um grande marco para a história da Termodinâmica, pois através dessa relação dada por Avogrado, os estudos das moléculas podiam ser realizados através de relações entre fenômenos de grande escala ou propriedades macroscópicas. Kronig, no ano de 1856, derivou a lei dos gases ideais, e Clausius, em 1857, determinou que a temperatura fosse dada pela energia cinética do sistema de moléculas (YOUNG, 2008; TORIBIO, 2015).

August Kronig e Rudolf Clausius conseguiram independentemente chegar a seus resultados, e contribuindo enormemente para essa área; mas foram os físicos, o escocês James C. Maxwell (1831 – 1879) e o austríaco Ludwig Boltzmann (1844 – 1906), que mais contribuíram com essa teoria. Maxwell, em 1856, realizou seus estudos sobre efeitos de transporte em gases e determinou a viscosidade e a transmissão de calor e a lei da distribuição das velocidades das moléculas de um gás contido num recipiente, no qual publicou em 1867. E Boltzmann, em 1868, generalizou a distribuição de velocidades das moléculas de um gás para sustâncias poliatômicas, o que fez com que a famosa distribuição de Maxwell-Boltzmann fosse formulada (BAUER, 2013; TORIBIO, 2015).

Outros estudos apareceram, porém foi o físico francês Sadi Carnot (1796 – 1832) que conseguiu explicar em seu trabalho o processo da máquina a vapor, fazendo com que ficasse conhecido como o pai da Termodinâmica (BAUER; 2013). Carnot, baseado na hipótese do calórico dada por Lavoisier, estudou fortemente as máquinas térmicas (invenção de James Watt que as patenteou em 1769), seus trabalhos proporcionaram uma relação entre trabalho e temperatura. E através desses estudos Willian Thompson (Lord Kelvin) (1824 – 1907) e Rudolf Clausius (1822 – 1888) conseguiram formular a segunda lei da Termodinâmica (enunciada mais adiante). Através das experiências de James Joule (1818 – 1889), em meados de 1840, que a relação entre as áreas da Mecânica e Termodinâmica foi obtida quando conseguiu relacionar o trabalho mecânico e calor, confirmando que o calor é um tipo de energia em trânsito (TORIBIO, 2015).

Assim, os conceitos termodinâmicos são fundamentados com base nas relações entre calor, trabalho e outras formas de energias (como a energia mecânica, térmica e outras). Isso faz com que haja uma ponte com a Mecânica através pela equivalência entre calor e trabalho, no qual esse fator de conversão foi determinado por Joule, por meados do século XIX, principal símbolo histórico para esses tipos de estudos (ROCHA, J, A, L; 2010 *apud* NUSSENZVEIG, 1996).

Em termos de leis fundamentais, a Termodinâmica é regida por quatro, que definem e explicam os conceitos básicos como temperatura e calor, por exemplo, além dos fenômenos macroscópicos, sendo elas, respectivamente, em ordem de descoberta: a primeira lei - *princípio da conservação da energia*, a segunda lei relacionada ao grau de desordem do sistema, a *lei zero – lei do equilíbrio térmico*, a terceira conhecida como lei do *zero absoluto*.

A ***Lei zero – Lei do equilíbrio térmico***, ou como é normalmente conhecida, *Lei zero*. Esse nome foi dado devido sua importância reconhecida após a formulação das outras, e por isso, ela é considerada uma lei básica em relações as demais. Em seu enunciado nos diz que "*se dois corpos separados estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, então os dois primeiros corpos também estão em equilíbrio térmico entre sí".* Surgindo com o intuito de dar sentido às duas leis já descobertas, ela traz sentido e diferenciação aos conceitos de calor e temperatura (YOUNG, 2008; HALLIDAY, 2011).

A **Temperatura** é medida que determina o grau de agitação das moléculas do sistema ou de tal corpo. Já o **calor** é uma forma de energia que flui de um objeto com uma temperatura alta para um objeto de temperatura menor, até que ambos estejam em equilíbrio térmico. É através dela que o uso dos termômetros faz sentido, e que as expressões "calor ou frio" só deveriam ser usados no senso comum (CORREIA, 2017; BAUER, 2013).

A **Primeira Lei da Termodinâmica** ou ***Princípio da conservação da energia,*** como seu próprio nome já diz em dado sistema fechado nenhuma energia (nesse caso, térmica) se perde, sendo ela:

$$\Delta E_{int} = Q - W. \tag{2.17}$$

Em outras palavras, essa lei nos diz que calor (Q) e trabalho (W) podem ser transformados em energia interna (ΔE_{int}), ou vice-versa, de modo que nenhuma energia seja perdida. Um bom exemplo, dessa lei é o esporte halterofilista quando calor e a energia interna são transformados em trabalho no momento do levantamento de peso (BAUER, 2013).

A ***Segunda Lei*** que não tem nome, e segundo Fontana (2017) "O enunciado da segunda lei da termodinâmica é visto em livros didáticos de formas distintas. Em geral é possível encontrar uma formulação atribuída a Kelvin e outra a Clausius".

O enunciado de Clausius diz "*O calor não pode fluir, de maneira espontânea, de um corpo de temperatura menor, para outro corpo de temperatura mais alta*". E o de Kelvin diz que "*É impossível a construção de uma máquina que, operando em um ciclo termodinâmico, converta toda a quantidade de calor recebido em trabalho*". Ambos, dizem que esses processos só ocorrerão com a presença de uma ação externa, fazendo com que essa lei seja um complemento da primeira lei, pois tratam de problemas irreversíveis, ou seja, de energias não conservativas (HALLIDAY, 2011; BAUER, 2013). Outra explicação para essa lei é através do conceito de *entropia*. Segundo Young (2008):

> Podemos também enunciar a segunda lei em termos do conceito de *entropia*, uma grandeza que mede o grau de desordem de um sistema. A ideia de entropia ajuda a entender por que a tinta que se mistura com água não pode jamais ser separada espontaneamente, e qual é a razão pela qual uma grande quantidade de processos aparentemente possíveis nunca ocorre na natureza.

A fórmula matemática para essa lei é dada através dos estudos de Ludwig Boltzmann, atualmente, conhecida como equação de Boltzmann, ela estuda as condições de equilíbrio termodinâmico considerando as influências das colisões das moléculas, o que abriu portas para o que veio a ser a Mecânica Estatística (TORIBIO, 2015). Como segue, matematicamente, escrita abaixo:

$$S = k_b \ln(W), \tag{2.18}$$

sendo, S a entropia do sistema, k_b é conhecida como constante de Bolztamam, com valor aproximado de 1.3807×10^{-23} J/K, e W é o número de microestados.

A última das leis foi formulada pelo físico alemão Walther Nernst (1864-1941), conhecida como ***Lei do zero absoluto ou Terceira Lei da Termodinâmica***, ela indica o ponto zero na escala Kelvin, surgiu com o intuito de determinar tal referência ao ponto que a entropia fosse determinada. Em um dos seus enunciados temos que à medida que temperatura se aproxima do zero absoluto, ocorre o mesmo com a entropia, o que se torna impossível chegar a essa temperatura mínima em um número finito de possibilidades termodinâmicas, o porquê disso é devido às moléculas estarem em constante movimento, e assim, com certo grau de entropia (YOUNG, 2008; HALLIDAY, 2011).

Desse modo, no momento em que essas leis conseguem fazer parte da construção de automóveis, refrigeradores, termômetros, explicam questões sobre a evolução do Universo, entre outras coisas, em si mostram que a Termodinâmica tem seu papel indispensável, não só para os fundamentos da Física, mas para a Química, Biologia e engenharias.

2.2.3. Eletromagnetismo

O Eletromagnetismo é a área da Física que estuda fenômenos elétricos e magnéticos, e através dele ocorreram diversas descobertas e desenvolvimentos, dentre os quais: os dos computadores, receptores de televisão, lâmpadas, e outros que dependem de uma interação eletromagnética. (HALLIDAY, 2012; YOUNG, 2008).

Historicamente, como se tem registrado foi estudado pela primeira vez pelos os gregos, que através de um material conhecido como *âmbar*, eles descobriram que, ao atritá-lo ele adquiria certas propriedades que conseguia atrair objetos. Esses foram os primeiros indícios do que hoje conhecemos como atração elétrica, disso vem o nome *elektron*, termo grego que significa âmbar (HALLIDAY, 2012; MACHADO, 2000). O magnetismo foi observado pela primeira vez próximo à antiga região da Magnésia (atualmente chamada de Manísia, na Turquia), no qual perceberam que existia uma pedra, no qual ao se aproximar objetos metálicos, os mesmos eram atraídos, é o que chamamos de interação magnética (HALLIDAY, 2012; YOUNG, 2009).

Iniciados pelos gregos, campo de pesquisa de vários nomes da ciência, de modo que vamos citar os que mais obtiveram sucesso, já que a história do eletromagnetismo é uma árdua tarefa, como diz Moricone et. al pág. 9 (2010) "O Eletromagnetismo tem uma longa história, e é um trabalho árduo dar o crédito correto a cada um de seus participantes, além de colocar suas contribuições no contexto correto."

No século XVIII, o físico americano Benjamin Franklin (1706 – 1790) formulou que o elétron e os raios das tempestades tinham as mesmas propriedades, e que a carga elétrica era conservada. Já no magnetismo, inicialmente, a maior contribuição veio do físico britânico Willian Gilbert (1544 – 1603), quando publicou em seu livro *De Magnete*, que a atração mútua entre os imãs e os ferros sempre ocupava um espaço em sua volta, isso influenciou a ideia de campo que até o momento não havia sido discutido (ROCHA, J. F, 2002).

Esses estudos desencadearam uma série de outros estudos como o de Alessandro Volta (1745 – 1827), com a invenção da pilha voltaica. Mas isso até o final do século XVIII, esses dois fenômenos eletromagnéticos eram apenas curiosidades laboratoriais, sem qualquer conexão conhecida, assim, eles passaram a ser estudados separadamente (NUSSENZVEIG, 1997).

Em meados de 1820, essa conexão foi observada pela primeira vez pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777 – 1851) com um de seus experimentos notou que uma corrente elétrica em um fio é capaz de mudar a direção da agulha de uma bússola (HALLIDAY, 2012). Essa descoberta foi como um "efeito dominó" que saiu desencadeando uma grande linha de estudo sobre eletricidade e magnetismo, e assim, vários outros nomes aparecem na história desse ramo da Física. Dentre os principais nomes, podemos citar Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806), Carl F. Gauss (1777-1855), Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) e Félix Savart (1791 – 1841); André-Marie Ampère (1775 – 1836), Georg S. Ohm (1789 – 1854), Michael Faraday (1791 – 1867), entre outros, que respectivamente, contribuíram para o eletromagnetismo com os estudos sobre a interação elétrica através do conceito de força, formulando a ideia de fluxo elétrico de um campo elétrico em volta de uma superfície, campo magnético, corrente elétrica, teoria da condução dos circuitos, indução eletromagnética, entre outros. (BAUER, 2012; YOUNG, 2009).

Todos esses estudos foram medidos e experimentados diversas vezes por esses, e outros cientistas que aqui não foram citados, mas o que todos esses estudos têm em comum é o fato deles terem sido unificados por uma única pessoa, o físico matemático britânico **James Clerk Marxwell** (1831 – 1879) (MORICONE, 2010).

Maxwell conseguiu unir todas as ideias, as publicando de forma completa em seu livro, em 1873, *Treatiseon Eletricity and Magnetism* (Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo), que traz em si a unificação de conceitos sobre eletricidade, magnetismo e ótica (ROCHA, J. F, 2002). Sobre essa unificação do eletromagnetismo dada por Maxwell, Feyman p. 28-1 (2008) diz que "Talvez o momento mais dramático no desenvolvimento da física durante o século XIX ocorreu para J. C. Maxwell um dia na década de 1860 quando combinou as leis da eletricidade e magnetismo com as leis do comportamento da luz".

Em sua concepção, Maxwell percebeu que as leis até ali já descobertas estavam incompletas. Assim, os estudos feitos por Faraday sobre indução eletromagnética no qual um campo magnético variável produz campo elétrico foi um dos fatores que instigou a Maxwell a buscar propor teoricamente o inverso. (FEYMAN, 2008; NUSSENZVEIG, 1997).

Ao conhecer os trabalhos sobre corrente elétrica de Ampère, ele propôs teoricamente que a variação temporal do fluxo do campo elétrico produzia campos magnéticos, quando formulou suas leis sobre o eletromagnetismo, culminando, assim na ideia da existência de campos eletromagnéticos, conseguindo unir eletricidade, magnetismo e a óptica em um só campo de estudo. Mas as comprovações desses estudos só vieram de forma experimental, no século XIX, com Heinrich Hertz (1857 – 1894) em seus experimentos de ondas de rádio (MORICONE et. al, 2010; NUSSENZVEIG, 1997).

Segundo BAUER (2012) pág. 320 "o conjunto das quatros equações conhecidas como as equações de Maxwell, descreve bem as interações entre cargas elétricas, correntes, campos elétricos e campos magnéticos, tratando esses dois fenômenos de maneiras separadas e unificadas através do eletromagnetismo". Outro marco importante do eletromagnetismo é força de Lorentz que liga os resultados elétricos e magnéticos diante de uma partícula no espaço, proposta por Hendrik A. Lorentz, e é capaz de descrever fenômenos como o de radiação eletromagnética (ROCHA, J. F, 2002; Feyman, 2008).

A primeira das quatro equações de Maxwell é conhecida como **Lei de Gauss para a eletricidade**, tem sua origem ligada ao matemático alemão Carl F. Gauss (1777-1855). Ela traz o conceito de fluxo elétrico, na qual linhas de campo começam em uma carga positiva e termina em uma carga negativa. A segunda é a **Lei de Gauss para o magnetismo,** também devido a Gauss, de maneira análoga a primeira, porém para o magnetismo. Essa segunda lei de Maxwell trata-se do fluxo do campo magnético, mas precisamente suas linhas, porém diferentemente do campo elétrico, ela propõe que as linhas de campo circulam entre o objeto, ou seja, ela exclui a possibilidade da existência de um inicio e um fim para essas linhas de campo magnético. E devido a isso que existe apenas dipolos magnéticos, e nunca monopólios magnéticos (BAUER, 2012; MACHADO, 2000).

A terceira das quatro leis é a conhecida como **Lei da indução magnética de Faraday**, ela prever que quando o fluxo de um campo magnético varia com o tempo isso induz a presença de um campo do tipo elétrico. A quarta é a conhecida como **Lei de Ampère com a correção de Maxwell**. André M. Ampère (1775 – 1836), físico francês, propôs que uma corrente elétrica produzia um campo magnético. Maxwell adicionou mais um incremento, que consistia que à variação temporal do fluxo do campo elétrico, também criava o mesmo efeito, ou seja, um campo magnético (BAUER, 2012; MACHADO, 2000).

Essas leis são conhecidas como as equações de Maxwell do eletromagnetismo, sendo quatro no total, e escrita em uma forma integral e uma forma diferencial, como segue abaixo, respectivamente, em seu modo integral e diferencial.

$$\oiint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.19}$$

Lei Gauss.

$$\oiint \vec{B}.d\vec{A} = 0, \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \tag{2.20}$$

Lei Gauss para o magnetismo.

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi_{\mathrm{B}}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\vec{B}, \tag{2.21}$$

Lei da indução magnética de Faraday.

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi_{\mathrm{E}} + \mu_0 i_{\mathrm{enc}}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\vec{E} + \mu_0\vec{J}, \tag{2.22}$$

Lei de Ampère com a correção de Maxwell.

A **força de Lorentz** que possui esse nome em homenagem a Hendrik A. Lorentz, que em seus estudos percebeu que como em um dado espaço em que uma carga elétrica liquida (q) se localiza, forças de ação ou repulsão são identificadas, e consequentemente, a presença de um campo elétrico $(\vec{E})$. Com seu movimento, essa carga elétrica liquida produzirá um campo magnético $(\vec{B})$, que é perpendicular a sua direção, e assim, ao seu vetor velocidade $(\vec{v})$. Matematicamente, temos que a força total, conhecida como força eletromagnética, ou *força de Lorentz* dada como:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{2.23}$$

A força de Lorentz $(\vec{F})$ diante dos estudos de ondas eletromagnéticas é um dos exemplos de um dos benefícios providos pelas ideias tidas por Maxwell, além do avanço proporcionado em estudos. Um bom exemplo é na área da Ótica, em estudos sobre a luz, o problema que ocorriam quando ela encontrava tal obstáculo, causando assim o que hoje conhecemos como fenômeno de interferência, que na época não conseguia ser explicado com uso dos conceitos formulados por Newton, na Mecânica Clássica, o de tratar os objetos como corpúsculos, como diz Moricone et. al, (2010) pág. 8:

> Houve uma mudança de paradigma, substituindo a visão microscópica, mecanicista, que foi herdada de Newton, por uma visão campista, na qual as quantidades físicas são descritas por campos que existem em cada ponto do espaço. Note que isso é uma grande mudança da visão newtoniana, na qual a dinâmica das partículas é sempre analisada usando um agente (força) que atua em um ponto. A visão de Newton foi extremamente bem-sucedida na descrição de fenômenos que vão do movimento de um projétil ao movimento de planetas, mas não conseguiu descrever os fenômenos eletromagnéticos.

Desse modo, as equações de Maxwell, juntamente, com a força de Lorentz regem todo o Eletromagnetismo até o final do século XIX, antes do surgimento da chamada Física Moderna, a física que surge no início do século XX com o propósito de resolver e explicar fenômenos que até o presente não conseguiam explicar. (ROCHA, J. F, 2002; BAUER, 2012)

3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O capítulo anterior, voltado para uma abordagem sucinta do desenvolvimento das equações diferenciais e das áreas da Física mostrou de maneira resumida, o quão importante essas equações diferenciais foram e são para todo o desenvolvimento da ciência. Assim, neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos relacionados às equações diferenciais que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma variável dependente, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED) (ZILL e CULLEN, 2001).

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com seu tipo, a ordem, e linearidade

3.1. Classificações: Tipo, Ordem, Linearidade.

3.1.1. Tipo

Uma equação diferencial ela pode depender de uma ou mais variáveis independentes. Quando ela depende apenas de uma variável independente ela é classificada como Equação Diferencial Ordinária (EDO), como por exemplo, em um estudo de crescimento populacional:

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp, \tag{3.1}$$

onde, $p(t)$ é uma variável dependente da tempo (t) que indica a população estudada e r é classificado como a taxa de crescimento ou taxa constante.

Se equação depende de mais de uma variável independente, ela é classificada como equação diferencial parcial, como por exemplo, a Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{3.2}$$

onde, f é uma função que depende das variáveis independentes x e y (respectivamente, coordenadas do plano cartesiano).

Exemplos dessas equações, respectivamente, é a *lei de resfriamento de Newton* (3.3), e a equação de calor (3.4), ambas situadas na área da Física conhecida como Termodinâmica.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{3.3}$$

onde, T (temperatura) é uma variável dependente do tempo (t), k e T_a são constantes que, respectivamente, indicam a constante de proporcionalidade e a temperatura do ambiente.

$$a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}, \tag{3.4}$$

onde, T (temperatura) é uma variável dependente das variáveis independentes x e t (respectivamente, posição e tempo) e a é uma constante conhecida como coeficiente de difusão térmica.

3.1.2. Ordem

A ordem de uma equação diferencial é equivalente a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação diferencial. De um modo geral, uma equação diferencial de ordem n, pode ser escrita na forma:

$$\mathrm{F}\,(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.5}$$

Por exemplo, a equação da lei do decaimento radioativo é uma equação de primeira ordem e a equação de Newton, que se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, são dadas respectivamente, pelas equações (3.6) e (3.7).

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \tag{3.6}$$

onde, N é a quantidade de certo material radioativo presente em determinado instante de tempo (t), λ é uma constante conhecida como taxa de decaimento.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = m.a, \tag{3.7}$$

sendo, x e a variáveis que, respectivamente, representam a posição e a aceleração de um corpo (ou partícula) em determinado instante de tempo (t), e m uma constante que indica a massa do corpo (ou partícula).

3.1.3. Linearidade

Uma equação diferencial é classificada como linear se a função F descrita por (3.5) for também uma função linear das suas variáveis y, y', y'', ... ,$y^{(n)}$. Assim, uma equação diferencial de ordem n é linear se pode ser escrita na forma:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t). \tag{3.8}$$

Caso a equação diferencial não possa ser escrita na forma (3.8) ela é classificada como uma equação não linear, como por exemplo, a equação que estuda as oscilações de pêndulo, no qual, a variável dependente é dada através da função trigonométrica não linear seno, como descrito na equação (3.9).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\, sen\, \theta = 0, \tag{3.9}$$

θ indica o ângulo de oscilação em determinado instante de tempo (t), g é a conhecida como aceleração da gravidade dada em metros por segundo (m/s^2), e L o comprimento do fio dado em metros (m).

Essas equações citadas à cima são importantes para o desenvolvimento de diversas áreas, principalmente, na Física, que pelo pouco já exemplificado pode-se ter essa noção.

3.2. Alguns Métodos de Soluções

Iremos focar em apenas alguns dos métodos de soluções para equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, que é o foco deste trabalho: equação separável, equação linear de primeira ordem – método dos fatores integrantes, e o método de solução das equações lineares de segunda ordem.

3.2.1. Equações Diferenciais Separáveis

Seja uma equação diferencial de primeira ordem, escrita como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3.10}$$

A equação (3.10) pode ser não linear, onde não existe um método universalmente aplicável para sua resolução. Assim, vamos considerar um tipo dessa família de equação, como possa ser resolvido por integração direta, e reescrevê-la na forma dada abaixo:

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.11}$$

Se a função M depende apenas da variável x e a função N dependa apenas da variável y, a equação (3.11) torna-se:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.12}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.13) por dx, obteremos o que chamamos de equação separável, como dado abaixo:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{3.13}$$

E, assim, a solução da equação acima é dada separando as respectivas variáveis, e as integrando, em seus respectivos limites, como dado a seguir:

$$\int_{y_0}^{y} N(y)dy = -\int_{x_0}^{x} M(x)dx. \tag{3.14}$$

3.2.2. Equações diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: Método dos Fatores Integrantes.

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t), \tag{3.15}$$

onde, P e Q são funções dadas dependentes da variável independente t. A solução da equação acima é dada através do método conhecido como fator integrante, em um intervalo *I*, no qual P e Q são funções contínuas.

O método consiste em determinarmos uma função auxiliar denotada por $\mu(t)$. Essa função tem como objetivo tornar a equação diferencial integrável, de modo a facilitar seu método de resolução (SOUSA, D. et.al; 2017). Deste modo, multiplicando a equação (3.17) por $\mu(t)$, tem-se:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)P(t)y = \mu(t)Q(t). \tag{3.16}$$

Agora, suponha que $\mu(t) > 0$ e que:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)P(t) = \mu'(t). \tag{3.17}$$

Integrando ambos os lados da equação (3.17) e logo após aplicando as propriedades da função exponencial, obtém-se uma expressão para o fator integrante:

$$\mu(t) = exp\left(\int P(t)dt\right), \tag{3.18}$$

onde *C* é a constante de integração. Os resultados encontrados em (3.17) e (3.18) fazem com que a equação (3.16), possa ser reescrita como:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu'(t)\, y = Q(t)exp\left(\int P(t)dt\right). \tag{3.19}$$

O lado esquerdo é exatamente o resultado da derivação do produto em relação à variável independente t, das funções $\mu(t)$ e y, já a exponencial do lado direito é dada por (3.18) como sendo $\mu(t)$, então:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t).y) = Q(t)\mu(t). \tag{3.20}$$

Logo, ao integrar, e isolar a função $y(t)$, tem-se:

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\int Q(t)\mu(t) + C. \tag{3.21}$$

Lembrando que $\mu(t) > 0$, como é notório pela equação (3.18) e C é uma constante arbitrária.

3.2.3. Equações de segunda ordem: linear, homogênea, com coeficientes constantes.

Uma equação é classificada de segunda ordem se sua forma for semelhante à equação dada a seguir, por (3.22).

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right). \tag{3.22}$$

E se

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \tag{3.23}$$

dizemos que a equação (3.22) é uma equação linear. Assim, reescrevendo-a em sua forma geral, temos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t). \tag{3.24}$$

Ou, na formulação de Langrange:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{3.25}$$

Se a função $g(t) = 0$, para todo t, a equação diferencial acima é classificada como homogênea, caso contrário, é chamada de não-homogênea. Assim, considerando $g(t) = 0$, e que as funções $p(t)$, $q(t)$ são constantes fornecidas, respectivamente, b e c, temos que a equação (3.25) torna-se:

$$y'' + by' + cy = 0, \tag{3.26}$$

agora sendo chamada de *equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes*.

Para a solução dessa equação iremos considerarcomo sendo a função (3.27), onde r é um parâmetro a ser determinado.

$$y = e^{rt}, \tag{3.27}$$

onde,

$$y' = re^{rt}, \tag{3.28}$$

$$y'' = r^2 e^{rt}. \tag{3.29}$$

Logo, ao substituirmos$y$ e suas derivadas em (3.26), obtêm-se:

$$(r^2 e^{rt}) + (re^{rt})b + c(e^{rt}) = 0, \tag{3.30}$$

$$(r^2 + rb + c)e^{rt} = 0. \tag{3.31}$$

Como a função exponencial tem seu valor diferente de zero, obtém-se a equação algébrica, conhecida como **equação característica:**

$$r^2 + rb + c = 0. \tag{3.32}$$

A equação característica consiste em tratar o problema diferencial de maneira algébrica, ou seja, sendo $y = e^{rt}$, uma das soluções da equação diferencial dada anteriormente, logo o parâmetro r é uma das duas raízes da equação algébrica encontrada. Como os coeficientes são reais, as raízes podem ser reais distintas ou não, ou complexas conjugadas, e suas soluções dependerá dessas características dos resultados das raízes da expressão (BOYCE et.al, 2017; ZILL et.al, 2001).

Assim, sendor_1e r_2 raízes da equação (3.32), então $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ são soluções dessa equação.A forma da solução geral será abordada a seguir, com alguns teoremas.

Teorema 1: Sendo r_1e r_2 raízes da equação característica, tem-se:

(i) Se $r_1 \neq r_2$, a solução geral da equação é da forma:

$$y = Cy_1 + Dy_2 = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}. \tag{3.33}$$

(ii) Se $r_1 = r_2$, a solução geral da equação é da forma:

$$y = Cy_1 + Dty_2 = Ce^{r_1 t} + Dte^{r_1 t}. \tag{3.34}$$

(iii) Se $r_1 e r_2$ forem raízes complexas, da forma $r = \lambda \pm i\mu$, a solução geral da equação é:

$$y = e^{\lambda t}[C\cos(\mu t) + Dsen(\mu t)]. \tag{3.35}$$

De modo que, c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias a serem determinadas.

Teorema 2: Seja a equação homogênea descrita por (3.26) com o segundo termo nulo e com $c = \varphi^2$. Ou seja:

$$y'' + \varphi^2 y = 0. \tag{3.36}$$

Logo a solução geral da equação é:

$$y = C\cos(\varphi t) + Dsen(\varphi t), \tag{3.37}$$

onde, c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias a serem determinadas.

4. APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NAS ÁREAS DA FÍSICA CLÁSSICA.

Como apresentado na abordagem histórica, às equações diferenciais tiveram um papel importante no desenvolvimento das três áreas que compõem a Física Clássica. Neste capítulo será feita uma abordagem mais específica de como as equações diferenciais, principalmente, as do tipo EDO, são inseridas nessas áreas e no cotidiano, como por exemplos: oscilador harmônico na Mecânica Clássica, lei do resfriamento de Newton na Termodinâmica e lei de Kirchorff em circuitos RC no Eletromagnetismo.

4.1. MECÂNICA: MOVIMENTO HARMÔNICO - VIBRAÇÕES

O fenômeno das oscilações está presente de maneira grandiosa no nosso cotidiano, é comum vermos objetos oscilando de maneiras repetitivas de um lado para o outro. Exemplos são fios da rede elétrica através do vento, ponteiro de um relógio, um avião ao passar por uma turbulência, terremotos, um cair de uma moeda, quicar de uma bola, as vibrações sonoras produzidas por um clarinete, as oscilações produzidas pelos pistões no motor de um automóvel, entre outros. Algumas dessas oscilações são consideradas um caos para a humanidade, pois não se pode controlar, mas só se prevenir para que não ocorram desastres estrondosos, como por exemplo: no caso de pontes ou edifícios perturbados por ventos fortes, ou abalos sísmicos. Assim o entendimento e controle das oscilações são uns dos objetivos tanto da Física quanto das áreas afins, geralmente, conhecido como movimento harmônico (HALLIDAY, 2011; YOUNG, 2008).

O movimento harmônico, normalmente, conhecido como movimento repetitivo, tem seu papel fundamental tanto na ciência quanto na vida em si e podem ser divididos como: **movimento harmônico simples** que consiste no exemplo de uma massa presa a um bloco, ou um pêndulo com pequenas oscilações, **movimento harmônico amortecido** quando existe uma presença de uma força para diminuir a oscilação e o **movimento harmônico forçado** que necessita do fornecimento de uma força propulsora[6] para que a oscilação se inicie (BAUER et.al, 2013; HALLIDAY, 2012).

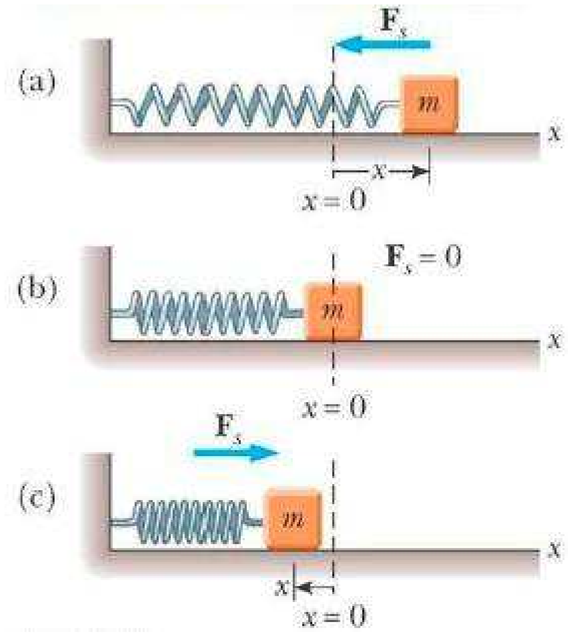
Nesta seção, iremos focar nos dois primeiros tipos: o movimento harmônico simples para um conjunto massa-mola; e o movimento harmônico amortecido.

[6] Uma força propulsora pode ser entendida como uma força adicional com o intuito de proporcionar certo impulso para que o movimento se inicie.

4.1.1. Movimento Harmônico Simples

O movimento harmônico simples é um tipo de movimento repetitivo em sistemas como os de pêndulo e o de massa-mola. A força exercida pela mola é uma força restauradora, que aponta para posição de equilíbrio (HALLIDAY, 2012; YOUNG, 2008), como segue a imagem abaixo:

Figura 1: Representação de um conjunto massa-mola submetido a uma força externa.



Fonte: < https://docplayer.com.br/docs-images/102/155016986/images/1-2.jpg>. Acesso em: 30/01/2021.

Essa força restauradora representada na imagem como **Fs** é proporcional à*constante da mola* (k), e obedece a *lei de Hooke*, dada matematicamente abaixo:

$$\overrightarrow{F_{el}} = -k\vec{d}, \tag{4.1}$$

A variável $\vec{d}$ indica o deslocamento do objeto em relação a posição de equilíbrio, sendo diretamente proporcional à força restauradora, ou seja, quando objetos de características elásticas são esticados ou comprimidos eles oscilam de modo a tenderem a voltar para sua posição de equilíbrio.

Como estamos tratando de forças atuantes em um corpo, em um problema de massa-mola, no qual, um objeto se descola após uma força ser executada sobre ele; para discutir e resolver tal problema deve-se iniciar com o conceito estudado por Newton, quando propôs através da sua segunda lei que a força $(\vec{F})$ é uma grandeza necessária para vencer a inércia do sistema e é diretamente proporcional ao produto da massa (m) do corpo pela sua aceleração ($\vec{a}$), como dado abaixo:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{4.2}$$

Considerando um problema de massa-mola em um sistema unidimensional, de modo que temos a presença da força restauradora da mola, assim pela segunda lei de Newton, temos:

$$ma_x = -kx. \tag{4.3}$$

Que escrito de modo diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{4.4}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{4.5}$$

Ao dividir toda a equação por m, obtém-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4.6}$$

A equação (4.6) tem a fisionomia da *equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes* (equação 3.36) da seção (3.2.3). E sua solução é obtida através do *teorema 2*, dado nesta mesma seção, já que o termo linear é nulo, ou seja, como dado na seção (3.2.3) uma equação do tipo:

$$y'' + \varphi^2 y = 0. \tag{4.7}$$

Tem como sua solução geral a seguinte equação:

$$y = C\cos(\varphi t) + D\,sen(\varphi t). \tag{4.8}$$

Assim, comparando a equação (4.6) com a (3.36), temos que:

$$\varphi^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \tag{4.9}$$

Onde, o resultado da direita possui significado físico, sendo ω_0 a *velocidade angular* e sua unidade é radianos por segundo. E assim, segundo a equação (3.37) a solução geral de (5.6) é da forma:

$$x(t) = C\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + D\,sen\left(\sqrt{k/m}\,t\right), \tag{4.10}$$

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\,sen(\omega_0 t), \tag{4.11}$$

onde, C e D são constantes a serem determinadas.

Esta equação (4.10) descreve o Movimento Harmônico Simples (MHS), ou seja, qualquer movimento que seja dado através da combinação dessas duas funções periódicas é chamado de MHS. Se as constantes C e D forem reais a solução será real, já que as funções seno e cosseno já são (TAYLOR, 2013). Considerando que,

$$A = \sqrt{C^2 + D^2}. \quad (4.12)$$

Ou seja, que C e D são lados de um triangulo retângulo cujo ângulo inferior é dado por (θ), assim, voltando para a equação (4.11), de modo que ao multiplicar e dividir todo lado direito dessa equação, pela constante A, temos que:

$$x(t) = A\left[\frac{C}{A}cos(\omega_0 t) + \frac{D}{A}sen(\omega_0 t)\right]. \quad (4.13)$$

No qual, C e D são respectivamente, cateto adjacente e cateto oposto, logo:

$$\frac{C}{A} = cos\,\theta \;\; e \;\; \frac{D}{A} = sen\,\theta. \quad (4.14)$$

E,

$$x(t) = A\,[cos\,\theta\, cos(\omega_0 t) + sen\,\theta\, sen(\omega_0 t)], \quad (4.15)$$

$$x(t) = A\,cos(\omega_0 t - \theta), \quad (4.16)$$

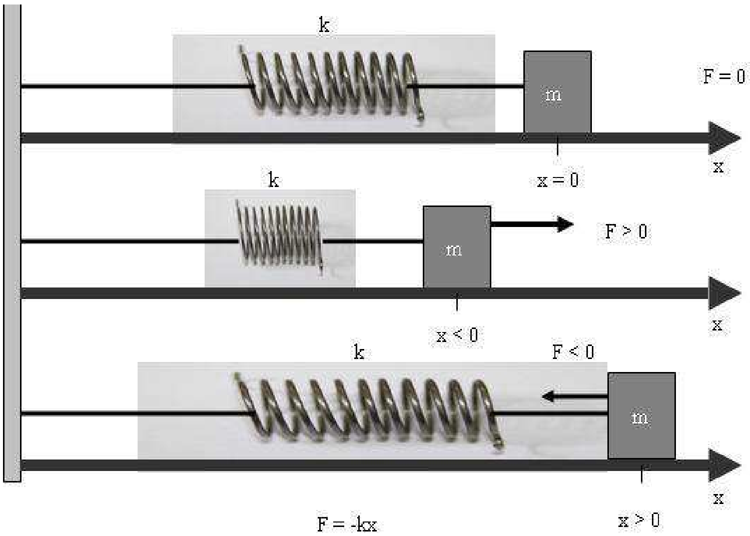
sendo, A a amplitude de oscilação.

Essa nova equação nos permite uma abordagem mais fácil que a equação geral (4.11), pois em vez de possuirmos duas amplitudes uma para cada função seno e cosseno, agora só temos uma para a função cosseno defasada através de um ângulo (θ) (TAYLOR, 2013; BAUER, 2013).

4.1.2. Movimento Harmônico Amortecido

No movimento harmônico simples vimos que molas e pêndulos oscilam de maneira indefinida, o porquê de isso acontecer é pelo fato de não haver uma força de resistência atuando sobre eles, força essa que faz com que eles desacelerem. A esse efeito de desaceleração, ou seja, da diminuição da velocidade é o que denominamos nesses fenômenos oscilatórios como amortecimento (BAUER, 2013), como segue representado na Figura 2:

Figura 2: Tipos de oscilações amortecidas.



Fonte: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTOZkRBQ-Vvb4i1YKBjona952Ws00PJABfKNQ&usqp=CAU>.
Acesso em: 03/03/2021.

Essa força de amortecimento é proporcional a velocidade (v) através de um fator b conhecido como constante de amortecimento, dado matematicamente como:

$$F_\gamma = -bv. \tag{4.17}$$

O sinal negativo indica que a mesma é uma força que vai contra o movimento de oscilação (F_γ). Logo, em um problema parecido com o da seção (4.1.1), um conjunto massa-mola, mas agora na presença de uma força de amortecimento (F_γ), com intuito de limitar o movimento aos poucos. Partindo da segunda lei de Newton, vemos que:

$$ma = F_\gamma + F_{el}, \tag{4.18}$$

$$ma_x = -bv - kx. \tag{4.19}$$

Que escrito de modo diferencial temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx, \tag{4.20}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{4.21}$$

Ao dividir a equação (4.21) por m, tem-se uma equação nas mesmas características da equação (3.26) do capítulo 3, ou seja, ela é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4.22}$$

Utilizando o método da seção (3.2.3),temos que a equação característica da equação (4.22) é:

$$r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0, \tag{4.23}$$

sendo que, $k/_m = \ {\omega_0}^2$, como visto na equação (4.9). Já $b/_m$ também tem significado físico, representado por:

$$\frac{b}{m} = \ 2\xi\omega_0, \tag{4.24}$$

ξ tem a função de medir o grau de amortecimento, comumente conhecido como *taxa de amortecimento,* expresso matematicamente como:

$$\xi = \ \frac{b}{2m\omega_0}. \tag{4.25}$$

Ao reescrever (4.23) em termos desses valores dados em (4.24) e (4.25)

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0. \tag{4.26}$$

E resolvendo a equação algébrica (4.26) do segundo grau, encontraremos os seguintes resultados para as suas raízes:

$$r_1 \ = \omega_0\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \tag{4.27}$$

$$r_2 \ = \omega_0\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right). \tag{4.28}$$

Ao analisar esses resultados através do fator $\sqrt{\xi^2 - 1}$ obtemos três tipos de movimento amortecido, sendo eles: Amortecimento fraco (ou subamortecido), amortecimento forte (superamortecido), e o amortecimento crítico (ou criticamente amortecido) (DA SILVA, 2014; BAUER, 2013).

Amortecimento fraco: Como o próprio nome diz o amortecimento é de forma mais fraca se comparado aos demais. Em termos matemáticos é quando temos valores pequenos para a constante de amortecimento, ou seja, $\xi < 1$, com isso o termo dentro da raiz será negativo fornecendo uma solução complexa, ou seja, com $\sqrt{\xi^2 - 1}$< 0, logo:

$$r_1 = \omega_0\left(-\xi + i\sqrt{\xi^2 - 1}\right), \tag{4.29}$$

$$r_2 = \omega_0\left(-\xi - i\sqrt{\xi^2 - 1}\right). \tag{4.30}$$

Com isso, a solução geral de acordo com o item (iii) do Teorema 1 da seção (3.2.3) do capítulo anterior é da forma:

$$x(t) = e^{-\omega_0 \xi t}\left[C\cos\left(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t\right) + D\,sen\left(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t\right)\right], \tag{4.31}$$

onde o fator $\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ é algo característico do amortecimento. Assim, podemos fazer outras substituições, do tipo:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \tag{4.32}$$

onde, o termo ω_1 caracteriza a velocidade angular desse tipo de amortecimento.

E o produto entre a *velocidade angular* (ω_0) e a *constante de amortecimento* (ξ) é dado como:

$$\omega_\gamma = \omega_0\xi, \tag{4.33}$$

onde, ω_γ indica a frequência de amortecimento.

Assim, a equação (4.31) em termos de ω_1é dada como:

$$x(t) = e^{-\omega_\gamma t}[C\cos(\omega_1 t) + Dsen(\omega_1 t)], \tag{4.34}$$

no qual, C e D são constantes que são determinadas através das condições iniciais do problema.

Esse resultado descreve bem o fenômeno, pois o fato de termos uma solução com funções periódicas atreladas pode ter mais de um período, provocando assim um decaimento mais lento da amplitude, o que faz jus ao nome amortecimento fraco.

Amortecimento forte: Quando a constante de amortecimento extingue a possibilidades de oscilações, e para isso, tem-se que ter valores grandes para a constante de amortecimento, ou seja, $\xi > 1$, o termo dentro da raiz agora será positivo, nos fornecendo agora soluções reais, diferentemente do subamortecido que nos fornecia soluções complexas. Assim com $\sqrt{\xi^2 - 1}$>0, logo:

$$r_1 = \omega_0\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \tag{4.35}$$

$$r_2 = \omega_0\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right). \tag{4.36}$$

A solução geral, também é dada pelo Teorema 1 da seção (3.2.3) do capítulo anterior, porém agora considera-se o item (i) já que as raízes são reais e diferentes. Assim a solução será da forma:

$$x(t) = Ce^{-(\omega_\gamma - \omega_1)t} + De^{-(\omega_\gamma + \omega_1)t}, \tag{4.37}$$

$$x(t) = e^{-\omega_\gamma t}(Ce^{\omega_1 t} + De^{-\omega_1 t}), \tag{4.38}$$

onde C e D são constantes que são determinadas através das condições iniciais do problema.

E como dito, no início, e agora confirmado pela equação (4.38) com a presença apenas de exponenciais reais, não teremos a presença de oscilações, caracterizando esse tipo de oscilação.

Amortecimento Crítico: É o conhecido como a fronteira dos dois tipos de amortecimentos citados anteriormente, ele também não permite oscilações, mas em questão de impactos é o mais acessível para fazer com que o objeto retorne quase que imediatamente para sua posição de equilíbrio, por isso seu uso frequente na indústria automobilística. (BAUER, 2013).

Em termos da constante de amortecimento temos que, neste caso, ela é igual a 1, ou seja, $\xi = 1$. Matematicamente esse resultado implica o fato de termos duas raízes iguais

$$x(t) = e^{-\omega_0 \xi t}. \tag{4.39}$$

Essas soluções serão falhas para encontrar uma solução geral da equação do movimento, ou seja, em um olhar físico a solução não bate com a experiência (TAYLOR,2013). Assim, a solução geral é dada através do item (ii) do Teorema 1, também da seção (3.2.3) do capítulo anterior. A segunda solução difere da primeira através de um parâmetro t associado,

$$x(t) = te^{-\omega_0 \xi t}. \tag{4.40}$$

E assim, a solução geral é:

$$x(t) = Ce^{-\omega_0 \xi t} + tDe^{-\omega_0 \xi t}, \tag{4.41}$$

$$x(t) = e^{-\omega_0 \xi t}(C + tD), \tag{4.42}$$

De acordo com (4.33) temos:

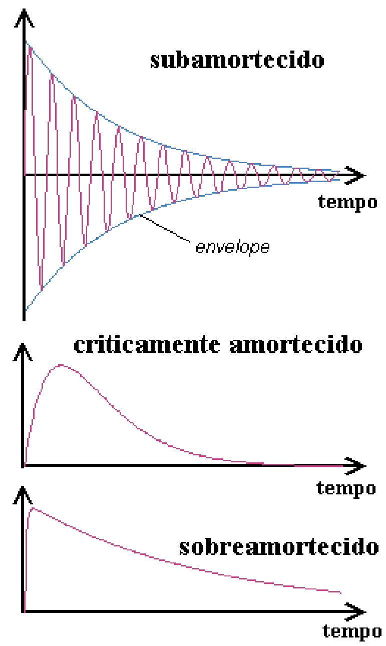
$$x(t) = e^{-\omega_\gamma t}(C + tD), \tag{4.43}$$

onde C e D são constantes a serem determinadas através das condições iniciais do problema.

Ao analisar a equação (4.43), percebe-se que, assim como a equação (4.38), ela também não possui funções que descrevem oscilações, mas caso ocorra com algum impacto, devido sua função exponencial também real, ela voltará imediatamente para sua posição de equilíbrio.

E de maneira visual, resumindo o que se foi visto sobre os três tipos de oscilações, temos seus respectivos gráficos representados através da Figura 3, situada abaixo:

Figura 3: Gráficos dos três tipos de oscilações amortecidas.



Fonte: < https://www.if.ufrj.br/~bertu/fis2/oscila/hosc.gif>.
Acesso em: 05/03/2021.

Esses estudos sobre oscilações proporcionaram diversos avanços em áreas das ciências, principalmente, das exatas, como por exemplo, na energia mecânica na construção de veículos com amortecedores.

4.1.3. Movimento Harmônico – Amortecedores de Veículos

Na engenharia mecânica esse fenômeno de oscilações tem sua enorme importância, já que seu estudo está diretamente ligado ao desempenho dos componentes estruturais dos automóveis, componentes essas que, às vezes, não serem suficientemente capazes de controlarem ou diminuírem tais impactos vibratórios têm-se a aparição de alguns problemas, como por exemplo, mau funcionamento, perturbações e desconforto.

Isso tudo fez com que essas vibrações nas estruturas fossem algo preocupante, e um desafio que fez com que cada vez mais buscassem soluções através de métodos analíticos ou experimentais, ou dos dois, a fim de resolver esse problema (SALGADO, 2012). Desse modo, o movimento harmônico é um dos fenômenos estudados pelas engenharias a fim de diminuir esses problemas, como no caso da Engenharia Mecânica em estudos sobre amortecedores de automóveis. O objetivo é obter uma oscilação que retorne de maneira rápida e significativa, diminuindo assim os danos nos automóveis e melhorando conforto dos passageiros (BAUER, 2013).

Esse tipo de movimento, através do uso de molas ou elementos elásticos que são capazes de diminuir a tensão do impacto vibratório nos passageiros, está presente na sociedade, desde a época em que veículos eram puxados por cavalos, e, portanto, foi adotado no início da história do automóvel (MRAD, 2018 *apud* Milliken e Milliken, 1995).

A primeira aparição de amortecedores, ainda que primitivos, datam entre 1902 e 1906. O intuito de melhorar o conforto dos passageiros fez com que as indústrias automobilísticas, nas últimas décadas, investissem cada vez mais em sistemas de suspensão com o objetivo de isolar cada vez mais as vibrações quando veículos passam em locais que são propícios a esse fenômeno (MRAD, 2018; FERNANDES, 2019).

E para que isso ocorra de maneira significativa à modelagem matemática tem seu papel fundamental nessa tarefa, onde através das equações estudadas nas seções anteriores, é possível determinar um melhor tipo de amortecedor para automóveis, como será mostrado no problema abaixo.

Enunciado 1: O problema proposto é baseado nos estudos de BAUER et al. (2013). Um amortecedor de um automóvel, opera do modo crítico com ω_γ = 72,4 Hz é comprimida a 6,41 cm. No tempo $t = 0{,}05s$ a que distância ela está do ponto de equilíbrio. Quanto tempo leva para ela voltar para sua posição de equilíbrio?

Solução: As condições iniciais são ω_γ = 72,4 Hz, $x(0{,}05s)$ = ?. Considerando que ela foi comprimida até a distância de 6,41 cm, de modo que, ao considerar esse ponto como $x(0) = x_0 =$ 6,41 cm, ou seja, o ponto que ela parou antes de voltar para seu ponto de equilíbrio, e como ela parou sua energia cinética ficou nula, que consequentemente, $v(0) = v_0 = 0$. Assim, com o auxílio da equação (4.43) sobre *oscilação com amortecimento crítico,* tem-se que:

A equação (4.43) nos fornece que:

$$x(t) = e^{-\omega_\gamma t}(C + tD). \tag{5.41}$$

Assim, sendo $x(0) = x_0$. Temos que:

$$x(0) = e^0(C + 0), \tag{4.44}$$

$$x_0 = C. \tag{4.45}$$

Iremos substituir (4.45) em (4.43) e derivando toda a equação em relação a t.

$$x(t) = x_0 e^{-\omega_\gamma t} + tDe^{-\omega_\gamma t}, \tag{4.46}$$

$$\frac{d}{dt}\big(x(t)\big) = \frac{d}{dt}(x_0 e^{-\omega_\gamma t} + tDe^{-\omega_\gamma t}), \tag{4.47}$$

$$v(t) = -x_0\omega_\gamma + De^{-\omega_\gamma t}\big(1 - \omega_\gamma t\big). \tag{4.48}$$

De modo que, $v(0) = v_0$, assim:

$$v(0) = -x_0\omega_\gamma + De^0(1 - 0), \tag{4.49}$$

$$v_0 = -x_0\omega_\gamma + D, \tag{4.50}$$

$$D = v_0 + x_0\omega_\gamma. \tag{4.51}$$

E com isso,

$$x(t) = e^{-\omega_\gamma t}\big[x_0 + t\big(v_0 + x_0\omega_\gamma\big)\big], \tag{4.52}$$

$$x(0{,}05s) = e^{-(72{,}4\,Hz).(0{,}05s)}\big[(6{,}41\text{ cm}) + (0{,}05s)\big(0 + (6{,}41\text{ cm})(72{,}4\,Hz)\big)\big], \tag{4.53}$$

$$x(0{,}05s) \cong 0{,}793cm. \tag{4.54}$$

Esse resultado significa que no instante de tempo de t = $0{,}05s$a mola do amortecedor do automóvel está a uma distância, aproximadamente, de $0{,}793\ cm$ da posição de equilíbrio. Ou seja, essa mola leva em média meio décimo de segundo para retornar.

4.2. TERMODINÂMICA: LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

4.2.1. Lei do Resfriamento de Newton.

Essa Lei do Resfriamento foi publicada anonimamente, em 1701, pelo o físico britânico Isaac Newton publicou-a, em um dos seus artigos intitulado *"Scala Graduum Caloris"* no qual descrevia esse método capaz de medir temperaturas de até 1000°C, algo praticamente impossível para os termômetros da época (MIOTTO et al., 2013).Seu propósito era de encontrar uma equação que pudesse determinar à variação de temperatura de tais objetos (ou corpos), que estão em contato com a temperatura ambiente (T_a), no qual perdem "energia" em tal intervalo de tempo. Essa proposta de Newton relaciona conceitos trazidos em uma das leis fundamentais da Termodinâmica, a famosa *Lei zero*, ou *Lei do equilíbrio térmico*, que trata de transferência de calor entre "corpos" até que atinjam o equilíbrio térmico.

Em seu enunciado ela diz que a corrente térmica estabelecida, ou seja, a quantidade calor é transferida do corpo mais "quente" para o mais "frio" (dQ/dt) em um intervalo sendo proporcional a variação de temperatura ($T - T_a$), onde T é a temperatura do corpo e T_a é a temperatura ambiente (SILVA, R.W; 2003).

Nas palavras de ALITOLEF (2011) *apud* Bronson (1977, p. 49):

> A lei de variação de temperatura de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Seja T a temperatura do corpo e T_a a temperatura do meio ambiente. Então, a taxa de variação da temperatura do corpo é dT/dt, e a lei de Newton relativa à variação de temperatura pode ser formulada como $dT/dt=-k(T-T_a)$ ou como $dT/dt + kT = kT_a$, onde k é uma constante positiva de proporcionalidade.

Essa lei que modela um fenômeno físico de característica termodinâmica nos indica que quando tivermos uma situação onde a temperatura do corpo é maior que a temperatura ambiente configura-se um processo de resfriamento.Quando o inverso acontecer, ou seja, quando a temperatura do corpo é menor do que a temperatura ambiente o processo é de aquecimento. Sua aplicação é possível no cotidiano, em situações, como por exemplo, resfriamento de materiais biológicos, mudanças de temperaturas de peças de aço ou outro material, e problemas criminalistas, entre outros quando o intuito é determinar a variação de temperatura de tais corpos que estão em contato com o ambiente, constantemente, perdendo energia para ele (FAGUNDES et al., 2019; DA SILVA, 2014).Assim, matematicamente, temos:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a). \tag{4.55}$$

Com auxílio do método de solução equações separáveis, descrito na seção (3.2.1), pode-se encontrar uma expressão que determine o valor da temperatura final (*T*), e uma para qualquer instante de tempo (t). Desse modo, ao separar as variáveis obtemos uma igualdade, no qual um lado depende somente da variável *T*, e o outro da variável *t*, como dado abaixo:

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -kdt. \tag{4.56}$$

Após a separação das variáveis, integramos de acordo com a diferencial indicada, isto é,

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{(T - T_a)} = -\int_{t_0}^{t} kdt. \tag{4.57}$$

Os resultados das integrais são:

$$[ln(T - T_a)]\Big|_{T_0}^{T} = (-kt)\Big|_{t_0}^{t}. \tag{4.58}$$

Substituindo os limites, lembrando que T_aé a temperatura ambiente, e se considerada constante, tem-se:

$$ln(T - T_a) \text{ - } ln(T_0 - T_a) = -k(t - t_0), \tag{4.59}$$

$$ln(T - T_a) = ln(T_0 - T_a) - k(t - t_0). \tag{4.60}$$

Aplicando as propriedades da função exponencial, podemos determinar uma equação para temperatura final (*T*), como segue abaixo:

$$T \text{ - } T_a = exp(ln(T_0 - T_a) - k(t - t_0)), \tag{4.61}$$

$$T \text{ - } T_a = (T_0 - T_a)exp(-k(t - t_0)), \tag{4.62}$$

$$T = T_a + (T_0 - T_a)exp(k(t_0 - t)). \tag{4.63}$$

Isolando a variável *t* na expressão final (4.63) dada anteriormente, e ao separar as variáveis, e depois aplicar as propriedades da função logarítmica, obtemos:

$$ln\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right) = k(t_0 - t). \tag{4.64}$$

Reorganizando os termos a fim de encontrar uma equação para o tempo (t) que tais objetos que obedecem à lei do resfriamento levam para, por exemplo, dilatar, temos:

$$t = t_0 - \frac{1}{k}\, ln\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right). \tag{4.65}$$

A equação (4.65) é outra utilidade dessa lei para o caso em que tem-se os valores das temperaturas já definidos, e assim, pode-se determinar o tempo com que esse fenômeno ocorre, ou ocorreu. Isso é possível isolando a variável t na expressão final dada anteriormente.

4.2.2. Processo da Garrafa Térmica.

O recipiente conhecido como *dewar* que levou à invenção das garrafas térmicas atuais, foi inventado por Sir James Dewar (1842-1923), físico-químico escocês, por volta de 1892 e seu foco era manter a temperatura, pelo máximo de tempo possível (FAGUNDES et al., 2019; YOUNG, 2008).

Com a função de manter o isolamento térmico, essas garrafas possuem uma parede dupla de vidro e o ar que fica entre as paredes é retirado, com o intuito de evitar as trocas de calor, protegendo assim o líquido dentro da garrafa como fazem comumente com café, chás, e outros conteúdos que em si são colocados. Porém, como não existe isolamento térmico perfeito, e como o calor flui do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura, em um dado momento a temperatura dentro da garrafa passa a ser a mesma que a do ambiente, como diz na *lei zero* já enunciada anteriormente (YOUNG, 2008). Desse modo, o problema trabalhado será sobre o tempo dessa troca de calor nas garrafas térmicas, ou seja, por quanto tempo tais garrafas podem manter o isolamento térmico do conteúdo.

Enunciado 2: O problema proposto é baseado nos estudos de (FAGUNDES et al., 2019)no qual em um dia com a temperatura ambiente de T_a = 27 °C, tomando constante esse valor. Ao colocar um líquido quente mediu-se dentro da garrafa uma temperatura inicial de T_0= 92 °C, após 12 horas a temperatura caiu para 70 °C. Quanto tempo leva para que o líquido chegue a ter aproximadamente a metade da temperatura inicial?

Solução: As condições iniciais são $T_0(0) = 92°$ C, $T(12) = 70°$ C, $T_a = 27°$ C, T(?) = 46 °C. Assim, com o auxílio da equação de temperatura provida da *lei de resfriamento de Newton,* tem-se que:

$$T(t) = 27 + (92 - 27)exp(-tk), \tag{4.66}$$

$$T(t) = 27 + 65exp(-tk). \tag{4.67}$$

Após o tempo de t = 12h, foi-se medido a temperatura de70°C, ou seja, $T(1)$ = 31,5° C, assim:

$$T(12) = 27 + 65exp(-k.12), \tag{4.68}$$

$$70 = 27 + 65.exp(-12k), \tag{4.69}$$

$$\frac{43}{65} = exp(-12k). \tag{4.70}$$

Ao resolver a expressão acima de modo a determinar o valor da constante *k,* temos:

$$ln\left(\frac{43}{65}\right) = -12k, \tag{4.71}$$

$$k = -\frac{1}{12}ln\left(\frac{43}{65}\right) \cong 3{,}44.10^{-2}. \tag{4.72}$$

Com o valor de k determinado, podemos substituí-lo na equação (4.65) para encontrar o tempo que o problema pede. Logo, temos que:

$$t = 0 - \frac{1}{3{,}44.10^{-2}}\, ln\left(\frac{46-27}{92-27}\right) \cong 35{,}72h. \tag{4.73}$$

Esse resultado representa muito situações atuais, das quais, por exemplo, temos uma garrafa térmica considerável ainda sem uso, e consegue manter a temperatura do líquido até metade da sua temperatura inicial por um período, às vezes, mais de um dia, como dado no problema.

4.2.3. Variação de Temperatura – Problema criminalista.

Segundo BAUER (2013) "as medições de temperatura cobrem uma ampla variedade, desde as maiores temperaturas medidas (2.10^{12} K) observadas em íons pesados relativísticos, até as menores temperaturas (1.10^{-10} K) observadas em sistemas de spins de átomos de ródio".

Um dos métodos mais utilizados para a medição de temperatura de um dado corpo é o uso dos termômetros, uma das maiores invenções humanas baseada nos princípios da *lei zero* da Termodinâmica, que indica a temperatura do corpo após ambos entrarem em equilíbrio térmico, e têm mostrado ser bem eficazes em medidas de temperaturas, principalmente, de corpos humanos.

Ao se tratar da medida da temperatura humana, ela chega a ser aproximadamente 36,5° C, devido aos processos físico-químicos e biológicos do corpo.Porém, quando o corpo para de funcionar, ou seja, vêm a óbito, tais mecanismos param de funcionar, de modo, a fazer com que a temperatura do corpo chegue a diminuir até o ponto de se igualar a temperatura ambiente (DA SILVA, 2014).

Comumente, quando o corpo vem a óbito de maneira acidental é importante que as causas, horário e outros fatores sejam vistos, sendo isso função da perícia. A perícia é a capacidade de reproduzir consistentemente algo já ocorrido com o intuito de compreender quais são os elementos cognitivos e como eles se desenvolveram. Desse modo, é função do perito criminal checar o local, com intuito de buscar informações que possam reconstituir o ato que levou a tal ocorrido, ajudando assim na investigação (COSTA, et. al 2018; DOROW et. al; 2018). Assim nestes problemas da perícia, especialmente, do óbito de alguém que, consequentemente, o corpo perderá calor para o ambiente, de maneira proporcional, até que ambas às temperaturas se estabilizem. A lei do resfriamento proposta por Isaac Newton pode ser utilizada para estimar a hora que o corpo chegou a vir a óbito. Essa aplicação será apresentada no enunciado 3 a seguir:

Enunciado 3: O problema proposto é baseado nos estudos de (DA SILVA, 2014) relacionado a essa aplicação.

Um corpo é encontrado às 22h no estado de óbito, ao passar 30 *min* desse acontecimento à perícia chega ao local, e instantaneamente mediu a temperatura do corpo que estava a 32,5°. A temperatura ambiente considerada constante neste caso foi verificada como sendo T_a = 16,5 °C, de modo que ao passar de 1h depois da chegada da perícia a temperatura do corpo foi vista mais uma vez, e a nova medida foi de 31,5 °C. Assim, ao considerar que a temperatura normal de um ser normal é, aproximadamente, 36,5° qual foi o momento em que o corpo faleceu?

Solução: As condições iniciais são $T_0(0)$ = 32,5°, $T(1)$ = 31,5° C, T_a = 16,5° C, T(?) = 36,5 °C. E com auxílio da equação (4.63) de temperatura determinada através da *lei de resfriamento de Newton,* temos que:

$$T(t) = 16{,}5 + (32{,}5 - 16{,}5)exp(-kt), \tag{4.74}$$

$$T(t) = 16{,}5 + 16.exp(-kt). \tag{4.75}$$

Após o tempo de t = 1h o valor da temperatura foi de $T(1) = 31{,}5°$ C, assim:

$$T(1) = 16{,}5 + 16exp(-k.1), \tag{4.76}$$

$$31{,}5 = 16{,}5 + 16exp(-k), \tag{4.77}$$

$$\frac{15}{16} = exp(-k). \tag{4.78}$$

De maneira, análoga ao exemplo 1, ao resolver a expressão acima o valor da constante k é determinado, logo temos que:

$$ln\left(\frac{15}{16}\right) = -k. \tag{4.79}$$

$$k = -ln\left(\frac{15}{16}\right) \cong 6{,}45.10^{-2}. \tag{4.80}$$

E ao substituí-lo na equação (4.65), temos que:

$$t = t_0 - \frac{1}{k} ln\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right). \tag{4.11}$$

$$t = t_0 - \frac{1}{6{,}45.10^{-2}} ln\left(\frac{36{,}5 - 16{,}5}{32{,}5 - 16{,}5}\right), \tag{4.81}$$

$$t = -\frac{1}{6{,}45.10^{-2}} ln\left(\frac{20}{16}\right), \tag{4.82}$$

$$t = -\frac{1}{6{,}45.10^{-2}} ln\left(\frac{5}{4}\right). \tag{4.83}$$

Logo, a pessoa faleceu em um tempo de:

$$t \cong -3{,}46h. \tag{4.84}$$

A lei proposta por Newton nos permite determinar o tempo de resfriamento de um corpo, e normalmente a medida da grandeza tempo é positiva. Porém, o resultado negativo encontrado na expressão (4.84) indica o tempo decorrido do momento em que o corpo ainda estava em sua temperatura normal, ou seja, o momento em que o ato ocorreu até o corpo ser encontrado. Portanto, é possível estimar a hora em que a pessoa veio a óbito, sendo aproximadamente, 3,46h ≅3*h* e 27 *min* antes do corpo ser encontrado, ou seja, às *18h* e *33 min*, já que o corpo foi encontrado às *22h.*

4.3. Eletromagnetismo: Lei de Kirchhoffdas malhas em Circuitos RC

Os circuitos elétricos são considerados uma das práticas mais importantes da história do Eletromagnetismo, desde os utilizados para a distribuição de energia elétrica em larga escala, até os que compõem um microcomputador (NUSSENZVEIG, 1997).

Um circuito elétrico é uma ligação composta por vários elementos, tais como resistores, geradores, capacitores, dentre outros. Em outras palavras, um circuito é aquela composição de fios e outros elementos que tem como propósito fornecer um caminho fechado para que possa ocorrer a transferência de energia de um local para outro. Essa energia é transferida através do fluxo ordenado de partículas carregadas (elétrons), que fluem através dos circuitos, e a esse fluxo ordenado de elétrons é o que definimos de corrente elétrica (i)(YOUNG, 2009; SILVA JUNIOR, 2019).

Seus três principais elementos de sua composição são um capacitor, um resistor, e um indutor. Seus estudos podem ser classificados de acordo com o tipo de corrente, ou seja, circuito de corrente contínua, circuito de corrente alternada (FEYMAN, 2008; SILVA JUNIOR, 2019). Isso é o que os define e os caracteriza, como no caso do circuito em estudo nesta seção. O circuito simples RC que é composto apenas por uma fonte de tensão, um resistor e um capacitor, e de corrente contínua.

4.3.1. Corrente elétrica

O efeito que o movimento ordenado dos elétrons causa é o que denominamos como corrente elétrica (i), ou seja, o movimento aleatório desses elétrons não produz corrente, mas sim o fluxo de carga líquidas carregadas(dq)de um lugar para o outro, em determinado intervalo de tempo (dt) (BAUER et. al, 2012). Matematicamente, temos que:

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{4.85}$$

A unidade de corrente no sistema internacional (SI) de medidas é “A” que significa Ampères, em homenagem ao físico francês André-Marie Ampère responsável pela descoberta da corrente elétrica, assim:

$$1\,A = \frac{1C}{1s}. \tag{4.86}$$

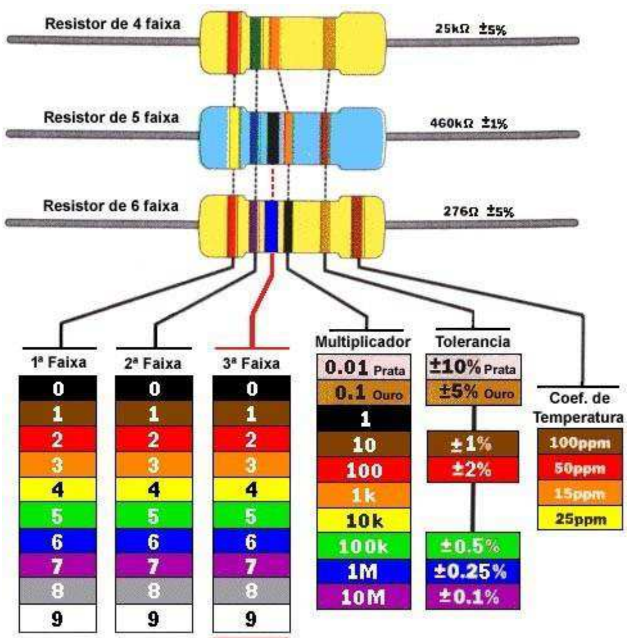
Em sua classificação, a corrente pode ser do tipo contínua ou alternada. Corrente contínua é aquela que não muda seu sentido, ou seja, sempre permanece positiva ou negativa. Já a corrente alternada diferentemente da contínua, ela oscila, ou seja, seu sentido é mudado no decorrer de seu percurso (HALLIDAY et al. 2008; YOUNG, 2009).

4.3.2. Resistores

Às vezes a corrente elétrica encontra alguns obstáculos em seu caminho, a esse tipo de barreiras é o que denominamos de resistência (R). A resistência propriedade principal dos dispositivos conhecidos como resistores que são dispositivos presentes em circuitos. No SI sua unidade é ohm (Ω), em homenagem a Georg Simon Ohm, quem definiu através de estudos com fios condutores o conceito de resistência.

A energia impedida por esses dispositivos são geralmente convertidos em forma de calor, devido ao aquecimento provocado sobre eles através da tentativa da passagem da corrente, levando assim ao efeito Joule (transformação de energia elétrica em energia térmica). Um bom exemplo é o ferro de passar roupa (HALLIDAY, 2012; YOUNG, 2009). Esses tipos de dispositivos (os resistores) são normalmente encontrados no comércio, com seus valores de resistência já dados, e simbolizados através de cores, como visto na Figura 4:

Figura 4: Modelos de resistores.



Fonte: https://http2.mlstatic.com/D_NQ_NP_19157-MLB20166666165_092014-O.jpg. Acesso em: 01/02//2021.

As três cores (ou quatro) primeiras faixas formam o algarismo, as próximas faixas para os de quatro e cinco cores, são respectivamente, os multiplicadores, e a tolerância, no caso do de seis cores, a última é o valor do coeficiente de temperatura. Eles são classificados como resistores ôhmicos e não-ôhmicos. A diferença é que um segue a lei de Ohm e o outro não (BAUER et. al, 2012). Sendo essa lei expressada matematicamente abaixo:

$$R = \frac{V}{i}, \tag{4.87}$$

onde V é a diferença de potencial associada ao circuito, e i é a corrente elétrica. Assim,

$$1\Omega = 1\frac{V}{A}. \tag{4.88}$$

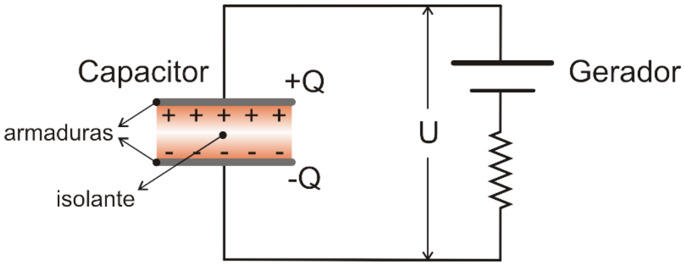
4.3.3. Capacitores

Capacitores são dispositivos utilizados quando o propósito é o armazenamento de energia elétrica. Eles armazenam energia por um determinado instante de tempo até que o circuito tenha sua chave fechada, e assim, a corrente volte a fluir levando energia elétrica de um local para outro (BAUER et. al, 2012; HALLIDAY, 2012; YOUNG, 2009). Essa propriedade de armazenar energia é o que definimos como capacitância (C), que no SI é medido em faraday (F). Matematicamente, expressamos por:

$$C = \frac{q(t)}{V}, \tag{4.89}$$

onde q é a carga elétrica, V diferença de potencial do capacitor, com unidades no SI, respectivamente, coulomb (C) e voltz (V). Sua caracterização visual é dada por duas placas metálicas que são separadas por um material isolante (dielétricos), como mostrado na Figura 5. Essas propriedades geométricas de seus componentes caracterizam a capacitância. Um bom exemplo de capacitores são as pilhas, elas conseguem armazenar energia de modo que possam fornecer energia aos poucos.

Figura 5: Estrutura de um capacitor em um circuito.

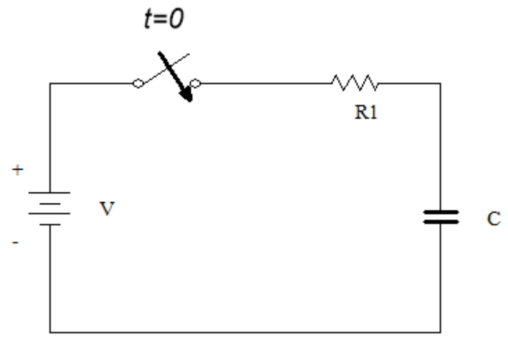


Fonte: <http://3.bp.blogspot.com/-nxKbiBvNiM4/Tnn-5mvCpDI/AAAAAAAAaic/ejgLKujviBw/s1600/capacitor1.PNG>. Acesso em: 01/02/2021

4.3.4. Lei de Kirchhoff das malhas em circuitos RC simples.

Um circuito RC simples, como já dito em partes anteriores é aquele que é composto por uma fonte elétrica, um capacitor e um resistor. Esses tipos de circuitos são muito comuns no dia a dia, mesmo que passe despercebido. Um exemplo é o uso de marca-passos em pessoas com problemas cardíacos (BAUER, 2012; SOUSA, 2017).

Figura 6: Representação de um circuito RC.



Fonte: SOUSA et, al, 2017.

Tomando como referência a Figura 6, situada acima, temos que quando a chave é fechada em um intervalo de tempo (dt), a corrente flui pelo circuito, passando tanto pela resistência como pelo capacitor. A lei de Kirchhoff das malhas, desenvolvida pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff, nos diz que o somatório de todas as diferenças de potenciais de um circuito deve ser igual a zero.

Considerando que, as diferenças de potenciais existentes em um circuito RC (como o representado pela Figura 6) são: a diferença potencial da fonte (V), a diferença potencial do resistor (V_R) e adiferença potencial do capacitor (V_C). Assim, de acordo com A lei de Kirchhoff das malhas, a soma das diferenças de potenciais de um circuito RC pode ser expressa como:

$$V - V_R - V_C = 0. \tag{4.90}$$

Com auxílio das equações (4.87) e (4.89), a equação (4.90) é reescrita como:

$$V - Ri - \frac{q(t)}{C} = 0, \tag{4.91}$$

onde (i) é a corrente do circuito escrita matematicamente pela equação (4.85), assim:

$$V - R\frac{dq}{dt} - \frac{q(t)}{C} = 0. \tag{4.92}$$

Ao isolar o termo V e dividir toda a equação por R, chegamos a:

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q(t)=\frac{V}{R}. \tag{4.93}$$

E, sendo

$$\tau = RC, \tag{4.94}$$

onde τ é dado através do produto entre a resistência e a capacitância é conhecido com *contaste de tempo do capacitor*, e corresponde a 63% do seu valor máximo(SILVA, 2014). Logo,

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{\tau}q(t)=\frac{V}{R}. \tag{4.95}$$

A equação acima é uma equação de primeira ordem, e pode ser resolvida através do método dos fatores integrantes. Assim, como visto no capítulo 3 (de resolução das equações diferenciais), tem-se considerando:

$$P(t)=\frac{1}{\tau}\text{ e } Q(t)=\frac{V}{R}. \tag{4.96}$$

O fator integrante é da forma:

$$\mu(t)=exp\left(\int\frac{1}{\tau}dt\right)= exp\left(\frac{1}{\tau}t\right). \tag{4.97}$$

Multiplicando toda a equação (4.95) pelo resultado final de (4.97) obtemos:

$$exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{dq}{dt}+exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{1}{\tau}q(t)=exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{V}{R}. \tag{4.98}$$

Podemos usar a regra do produto para derivadas para representar o lado esquerdo da equação acima como sendo:

$$\frac{d}{dt}\left(q.exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\right)=exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{dq}{dt}+exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{1}{\tau}q(t). \tag{4.99}$$

Assim, voltando para equação (4.98) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(q.exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\right)=exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{V}{R}. \tag{4.100}$$

E integrando ambos os lados em relação à variável t, obtemos:

$$q.exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)=exp\left(\frac{1}{\tau}t\right)\frac{V}{\tau R}+ C, \tag{4.101}$$

$$q(t)=\frac{V}{R}\tau+ C.exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right), \tag{4.102}$$

onde C é uma constante de integração que pode ser definida através das condições iniciais. Do qual, para um instante $t=0$ temos $q(t)=0$. Assim;

$$0 = \frac{V}{R}\tau + \; C.exp(0), \tag{4.103}$$

$$C = -\frac{V}{R}\,\tau = i\,\tau = q_{máx}. \tag{4.104}$$

$q_{máx}$ é a carga do capacitor.

E,

$$q(t) = \frac{V}{R}\tau - \frac{V}{\tau R}.exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right), \tag{4.105}$$

$$q(t) = \frac{V}{\tau R}\left(1 - exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right), \tag{4.106}$$

Ou,

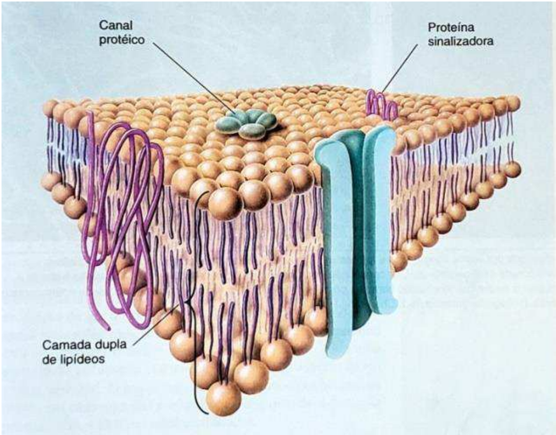
$$q(t) = q_{máx}\left(1 - exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right). \tag{4.107}$$

4.3.5. Circuitos RC – Neurônios.

Um dos grandes avanços para a história da ciência foi à aplicação da eletricidade na área da saúde, como por exemplo, o estudo da neurociência. Através dela que o entendimento do funcionamento do cérebro humano foi capaz de ser realizado, ou seja, no momento em que conseguiram relacionar o cérebro humano com um circuito elétrico. Isso fez com que possamos comparar o estilo do circuito RC com uma das células mais importante do nosso corpo, os neurônios. (GIOLO, 2013; BAUER, 2012).

Os neurônios são células nervosas responsáveis pela transmissão e processamento de sinais do sistema nervoso em todo ser humano e em animais. As membranas (Figura 7) são eletricamente excitáveis, o que faz com que haja uma conservação nos sinais gerados e transmitidos (GIOLO, 2013).

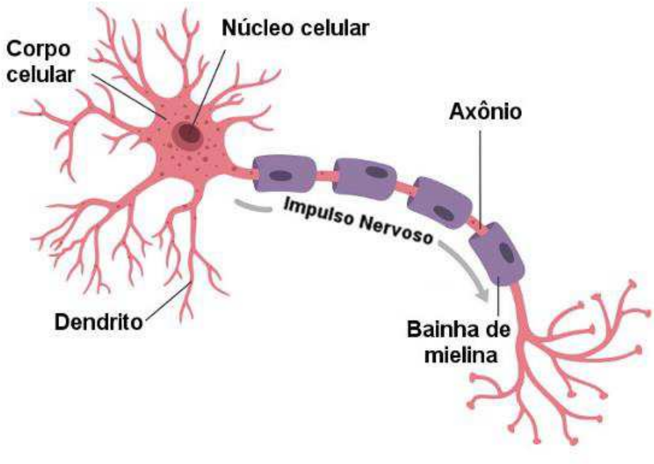
Figura 7: Representação visual da membrana plasmática com sua bicamada lipídica.



Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/b4/c5/0d/b4c50d8e40e141e59208ee192937430c.jpg>. Acesso em: 04/02/2021.

Essas transmissões de informações são dadas entre neurônios. Os sinais são recebidos pelos dendritos e enviados através dos axônios, que pode ser compridos como da espinha dorsal (Figura 8). Isso ocorre devido ao uso de combinação de sinais elétricos e/ou químicos, ou seja, através dos movimentos de íons (por meio da eletroquímica), principalmente os de Na^+, K^+ e Cl^-. Isso permite com que os neurônios conduzam as informações de maneira rápida e precisa a ponto de coordenar as ações que envolvem o funcionamento do corpo humano (GIOLO, 2013; BAUER, 2013).

Figura 8: Modelo dos principais componentes dos neurônios.



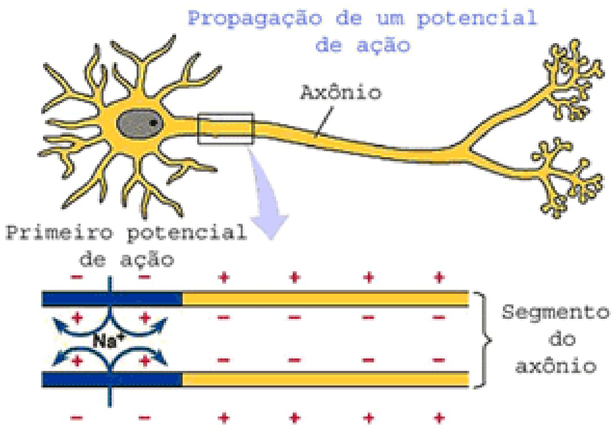
Fonte: <https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/2019/10/1-partes-do-neuronio.jpg> Acesso em: 04/02/2021.

A relação com os circuitos RC vem do fato das membranas dos neurônios serem formadas por uma dupla camada de lipídeos imersa em proteínas. Os lipídios possuem resistividade elevadas que faz com que seja um bom isolante durante soluções altamente eletrolíticas, característica assim de um capacitor. Já as proteínas possuem baixas resistividades da ordem de, aproximadamente, 1cm Ω, formando os canais protéicos por onde os fluxos de íons passam, sendo que cada canal protéico pode ser comparado com um resistor (GUTKIN, 2003). Sobre essa relação entre essa célula com o circuito RC, Giolo (2013) diz:

> Uma vez que a membrana neuronal é formada por duas camadas de lipídeos que separam os meios condutores intra e extracelular por uma fina camada isolante, ela irá atuar como um capacitor; as proteínas que cruzam a membrana de um neurônio atuam como poros, ou canais iônicos, por onde corrente elétrica (íons) pode passar. Cada canal iônico (seletivo a uma dada espécie iônica) pode ser modelado por um resistor (R) colocado em paralelo com o capacitor que representa a membrana.

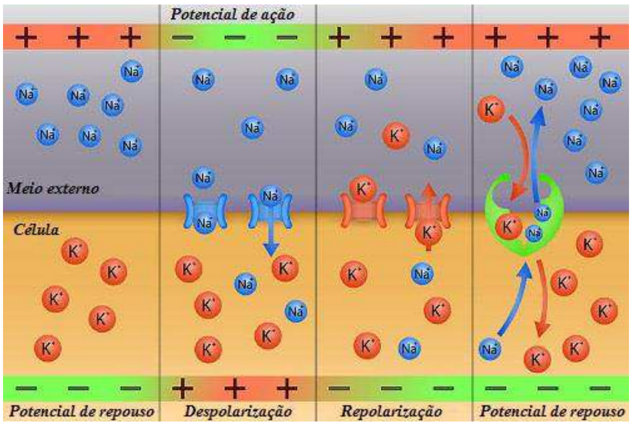
Uma vez que uma corrente (ou estímulo) é injetada na membrana, essa corrente se divide em dois tipos, numa corrente capacitiva que carrega a bicamada lipídica e uma corrente iônica que passa através dos canais protéicos. Ou seja, uma parte dessa corrente carrega as camadas protéicas e a outra flui pelos canais iônicos. Essa corrente (ou estímulo) que flui (figura 9), ocorre algo conhecido como impulso nervoso, ou potencial de ação como é também conhecido; assim, as membranas dos neurônios que antes tinham uma diferença de potencial constante, passam a sofrer variações (como mostra na Figura 10), daí a relação dos canais protéicos com um resistor, já que o potencial passa a variar com a corrente (GUTKIN, 2003).

Figura 9: Modelo do potencial de ação passando pelo axônio.



Fonte: <https://sites.google.com/site/tudoensinomedio/unifei/calendario-1/biologia-3/reinos/fisiologia-animal/sistema-nervoso/celulas-nervosas/potencial-de-acao>. Acesso em: 08/02/2021.

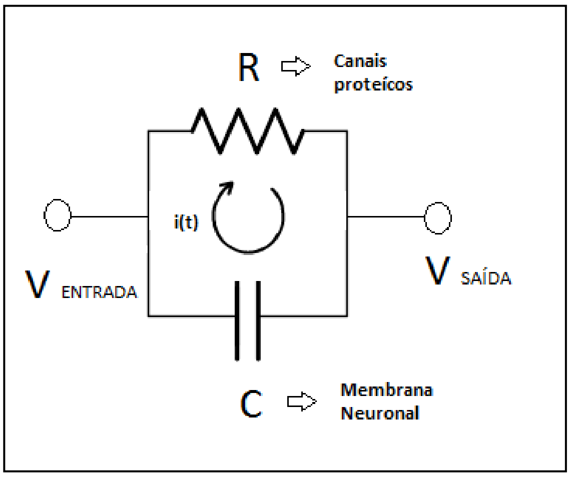
Figura 10: Passo a passo do Impulso nervoso.



Fonte: < https://s4.static.brasilescola.uol.com.br/img/2016/07/impulso-nervoso.jpg>. Acesso em: 03/02/2021.

Segundo Bauer (2013) "um sinal de entrada tem de ser suficientemente intenso para conseguir disparar um neurônio, isto é, fazê-lo enviar um sinal de saída pelo axônio. Logo aproximar essa célula como um circuito RC é algo grosseiro, mas razoável". Dessa maneira, pode-se descrever um neurônio como na figura 11.

Figura 11: Representação de um Neurônio como circuito RC.



Fonte: SOUSA, 2021.

Assim, como o circuito RC pode representar de maneira grosseira o modo que os neurônios passam informações entre si, a lei de Kirchhoff pode ser utilizada para explicar a resposta básica de um neurônio em dado instante de tempo, ou seja, essa dependência temporal reproduzida, quando os neurônios passam pelo o impulso nervoso. Vejamos um exemplo.

Enunciado 4: Segundo BAUER et.al (2013),os neurônios possuem em média uma diferença de potencial de ordem de $\pm$ 50 mV. Quando um potencial externo é ativado (potencial de ação) uma corrente flui através do circuito, ou seja, quando a informação é passada entre os neurônios, parte dela passa pelo resistor (aproximadamente de 10MΩ) e a outra carrega o capacitor (da ordem de 1nF), sendo que a constante de tempo (τ) é a ordem de 10 ms. Quando esse potencial externo é retirado acontece um descarregamento do capacitor. Qual o tempo mínimo para carregar 95% do capacitor?

Solução: Tomando como referência a equação (4.107).

$$q(t) = q_{máx}\left(1 - exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right). \tag{4.107}$$

De modo que, reorganizando para resolver o problema teremos:

$$\frac{q(t)}{q_{máx}} = \left(1 - exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right)\right). \tag{4.108}$$

O termo do lado esquerdo da igualdade da equação (4.108) pode ser reescrito como:

$$\frac{q(t)}{q_{máx}} = f, \tag{4.109}$$

onde f indicará a fração da capacidade de carga do capacitor. Logo, voltando para equação (4.108), obtemos:

$$f = 1 - exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right). \tag{4.110}$$

Aplicando as propriedades de exponenciais, de modo, a encontrar o tempo mínimo, obtemos:

$$t_{min} = -\tau \ln(1 - f). \tag{4.111}$$

E ao substituir os dados do problema, onde τ = 10 ms e f = 95% = 0,95, logo:

$$t_{min} = -10ms \ln(1 - 0{,}95), \tag{4.112}$$

$$t_{min} \cong 30ms. \tag{4.113}$$

Assim, temos que os neurônios levam em média 30 ms (trinta milissegundos) para serem carregados, e depois disso ele descarrega, passando assim a informação para o resto do corpo.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Neste trabalho foi possível abordar as equações diferenciais sob o ponto de vista das aplicações, com particular referência as três grandes áreas da Física, que denomina-se Física Clássica.

Como visto no capítulo 2, que foi dividido em duas partes: a primeira abordando o contexto histórico das equações diferenciais e a segunda parte falando sobre a Física Clássica. A primeira parte, tratou-se do contexto histórico das equações diferenciais, que seguiu a ordem cronológica, baseando-se na décima edição do livro “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno” dos autores BOYCE e DIPRIMA (2006); o porquê dessa escolha foi devido ao renome do livro e a afinidade com o mesmo. A segunda parte referente às áreas da Física Clássica, fizemos uma breve apresentação histórica, com intuito de mostrar a importância das equações diferenciais na Mecânica, em suas três formulações, na Termodinâmica e no Eletromagnetismo, com as equações propostas por Maxwell. Além de explicar conceitos, definições e outras coisas, que seriam importantes para o capítulo de aplicações.

O capítulo 3, referente aos tipos de equações diferenciais, sua caracterização e métodos de solução. As equações citadas foram apenas às utilizadas no trabalho que, como visto são de fáceis resoluções, se comparadas com outras do campo de equações diferenciais. Observou-se que mesmo com a sua simplicidade, elas são muito úteis em problemas clássicos que são base para modelos mais complexos.

O quarto capítulo de aplicações o mais extenso e importante trouxe consigo exemplos das equações diferenciais nas três áreas da Física escolhidas no trabalho, de modo que seus métodos de soluções foram abordados no capítulo 3. Baseadas na literatura, o intuito dessas aplicações foi de, através de modelos matemáticos escolhidos, mostrar sua aplicabilidade no dia a dia. Esse capítulo foi importantíssimo porque abordou problemas de áreas comumente já adaptadas ao uso dessas equações, como no caso da Engenharia Mecânica, no exemplo de amortecedores de molas; no contexto de vibrações da área da Mecânica. Como problemas que, às vezes, passam despercebidos, exemplos na determinação do momento do óbito de um corpo com auxílio da lei de resfriamento de Newton, e a comparação do circuito RC com um neurônio que se adéqua ao uso da EDO da lei de Kirchhorff.

Dessa maneira, como já explicitado no trabalho, o propósito foi mostrar a importância das equações diferenciais nessas áreas da Física, e suas aplicações no dia a dia, uma vez que as mesmas conseguem explicar através da modelagem matemática a maior parte desses fenômenos que regem todo o mundo em si. E, também, de contribuir tanto para motivação do estudo das equações diferenciais, quanto para auxiliar em estudos posteriores.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBRECHT, G. M. L; SCHEEREN, V; GONZALES, M. C. S; OLIVEIRA, C. P; VAZ, F. A. Resgate Histórico Acerca da contribuição da família Bernoulli para a matemática. *in*: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. 2014, Bagé/RS, Brasil. **Anais do XX EREMAT Sul,** 2014. v. 2. p. 1-7.

ALITOLEF, S. D. S. *Algumas Aplicações Das Equações Diferenciais*. 2011. 36*f*. Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática), Universidade Federal De Rondônia, Ji-Paraná, 2011.

ANTUNES, Camila A.; GALHARDI, Vinícius B.; HERNASKI, Carlos A. As leis de Newton e a estrutura Espaço-temporal da Mecânica Clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 3, e3311, 2018.

ÁVILA, G. S. S. *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo: Ed. Edgar Blucher, 2006.

BARCELO NETO, João. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

BAUER, W; WESTFALL, G.D.; DIAS H. *Física para universitários*: **Eletricidade e magnetismo.** Porto Alegre: AMGH, v. 3, 2012.

BAUER, W; WESTFALL, G.D.; DIAS H. *Física para universitários*: **Mecânica.** Porto Alegre: AMGH, v. 1, 2012.

BAUER, W; WESTFALL, G.D.; DIAS H. *Física para universitários*: **Relatividade, oscilações, ondas e calor.** Porto Alegre: AMGH, v. 2, 2013.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) **MANUAL PARA CLASSIFICAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO E SEQUENCIAIS - CINE BRASIL 2018**. [Online]. Brasília: Inep, 2018. Disponível em < https://download.inep.gov.br/educacao_superior/censo_superior/apresentacao/2018/Ma nual_Preliminar_para_a_Classificacao_dos_Cursos_Cine_Brasil_2018.pdf> .Acesso em: 08/03/2021.

CALLEN, H. B. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. 2 ed. Canadá: Jonh Wiley, 1985.

CORREIA, J. J. DEFINIÇÕES DE TEMPERATURA EM FONTES DIDÁTICAS. **Revista RBBA - Revista Binacional Brasil Argentina.** Vitória da Conquista. v.6, n. 1, p. 201-220, junho/2017.

COSTA, Maria de Fátima Carvalho, et al. **O estudo da lei de resfriamento de corpos através das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem**. 2018. 38*f.*Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática), Universidade Federal de campina Grande, 2018.

DA SILVA, Jair Sandro Ferreira. SOBRE O PROBLEMA DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE UM CORPO. **Connection Line-Revista Eletrônica do Univag**, n.5, 2014.

DE CASTRO CHAIB, João Paulo Martins; DA COSTA AGUIAR, Matheus. Força de inércia: aprofundando o debate. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 33, n. 1, p. 142-161, 2016.

DOROW, Patrícia; VARVAKIS, Gregório; TERRA, José Cláudio; NOBRE, Luiz Felipe de Sousa. Categorias evolutivas para radiologistas conquistarem a perícia. **Navus: Revista de Gestão e Tecnologia**, v. 8, n. 4: p. 109-124, 2018.

DOS SANTOS, C. D. O. Equações Diferenciais: Modelagem de problemas.

FAGUNDES, A. W. R; SANTOS, P. M. E; BARBOZA, C. M; DEUS, J. A. Modelagem Matemática Na Lei De Resfriamento De Newton: Experiência Com Garrafas Térmicas. **South American Journal of Basic Education, Technical and Technological.** Rio Branco, UFAC, v. 6, n. 2, p. 21-39, ago/dez 2019.

Fermi, Enrico. **ThermodynamicsBy Enrico Fermi**. Dover Publications, 1936.

FERNANDES, J. C. D. M. **Conforto em veículos de passageiros com amortecimento assimétrico e não linearidade geométrica sob excitação harmônica e estocástica**.

2019. 153*f.* (Doutorado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em engenharia Mecânica na Área de Projetos Mecânicos, Faculdade de Engenharia de Bauru. Bauru, 2019.

FEYNMAN, Richard Philips; LEIGHTON, Robert Benjamin; SANDS, Matthew. **Lições de física de Feynman. T**radução: Adriana Válio Roque da Silva, Kaline Rabelo Coutinho. Porto Alegre : Bookman, 2008.

FONTANA, R. D. B; SANTOS, I. A. Os enunciados da segunda lei da termodinâmica: Uma possível abordagem. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, *(local de publicação)* v. 38, n. 1, p. 1311 – 1318, 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173812110>.

GAYO, J; WILHELM, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, p. 342–355, 2015.

GIOLO, Cristina, 2013. **Circuitos Elétricos: Simulação de uma Membrana Neuronal**. Disponível: https://sites.ifi.unicamp.br/rickson/files/2016/03/CristinaG-Rickson_RF1.pdf. Acesso em: 2 de fev. 2021.

GUTKIN, Boris; PINTO, David; ERMENTROUT, Bard. **Matemática da neurociência**: **de neurónios a circuitos e de circuitos a sistemas**. Parte: http://hdl. handle. net/10316.2/2568, 2004. Acesso em: 2 de fevereiro.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. *Fundamentos de física:* **Eletromagnetismo**. Tradução e revisão de Ronaldo Sérgio Biasi. 9. Ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 3, 2012.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. *Fundamentos de física:* **gravitação, ondas e termodinâmica**. Tradução e revisão de Ronaldo Sérgio Biasi. 8. Ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 2, 2011.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica. Mecânica para Engenharia**. 10 ed; tradução técnica Mário Alberto Tenan. São Paulo: Prentice, 2005.

HOSOUME, Yassuko; OLIVEIRA, Rebeca Vilas Boas Cardoso de. Diferentes concepções da ciência e implicações para seu ensino. **Educar em Revista**, n. 44, p. 111-126, 2012.

KREYSZIG, E. *Matemática Superior para Engenharia.* 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 2013.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica Analítica.** 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

LIMA, Wellisson Pires; OLIVEIRA, P. H. F; BRAGA, J. P. M; RAMOS, I. R. O. Determinação das forças de vínculo em sistemas clássicos holônomos: análise crítica de três métodos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, n. 1, 2019.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**. Ponta Grossa: UEPG, 2000.

MEDEIROS, E. F. **Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível**. 2016. 56*f.* Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016.

MIOTTO, Carina Muniz; CARGNELUTTI, Jocelaine; MACHADO, VinicioMileski. Aplicações das equações diferenciais na modelagem Matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica. **I Semana da Matemática da UTFPR–Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática**. *Toledo*, 2013, 18.

MORICONI, Marco; MORICONI, Luca. **Eletromagnetismo e ótica.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, v. 1, 2010.

MRAD, L. F. **Modelo computacional half-car para estudos de resposta vibracional e do conforto de veículos de passeio considerando o banco e o motorista**. 2018. 192*f* (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em engenharia Mecânica Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2018.

NASCIMENTO, K. S; FONSECA, R. F; NEGREIROS, N. L. G; SILVA, R. A. M; HENRIQUE, R. S; SOUSA, D. F. M. Análise do índice de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da UFCG-CUITÉ. *In*: ANDRADE, D. F. (org.). **Educação no Século XXI Matemática**. 1 ed. Belo Horizonte - MG: Editora Poisson, 2019, v.14, p. 106-111. Disponível em: https://www.poisson.com.br/livros/educacao/volume14. Acesso em: 17 de junho de 2020.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 4 ed. São Paulo: Edgard Blücher, v. 1, 2002.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica 3: Eletromagnetismo**, São Paulo: Edgard Blücher, v. 3, 1997.

NUSSENZVEIG, HerchMoysés.**Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas Calor**. 4 ed. São Paulo: Edgard Blücher, v. 2, 2002.

OLIVEIRA, E. A; IGLIORI S, B, C. ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n.2, p. 2-22, 2013.

PINTO, R. L; LIMA, G. L. Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044**, v. 6, n. 2, 2017.

RAMOS, M. A. R. Legendre, Laplace, Gauss: Conflitos de prioridades de descobertas científicas. **Revista Brasileira de História da Matemática,**v. 14, n. 28, p. 107-11, 2014.

RAVINDRAN, Renuka; PRANESACHAR, C. R.; PATIL, D. P. Joseph Louis Lagrange (1736-1813). **Resonance**, v. 1, p. 3, 2006.

ROCHA, J. F. M. **Origens e evoluções das ideias da física**.Salvador: EDUFBA, 2002.

ROCHA, João Augusto de Lima. Elementos de termodinâmica. In: ***Termodinâmica da fratura*****: uma nova abordagem do problema da fratura nos sólidos** [online]. Salvador: EDUFBA, 2010, p. 37-46. ISBN 978-85-232-1235-3. Available from SciELO Books <http://books.scielo.org>.

SALGADO, J. M. D. S. O. **Análise modal experimental aplicada a um componente estrutural automóvel**. 2012. 154*f.* (Mestrado em Engenharia Mecânica), Escola de Engenharias, Universidade do Minho, 2012.

SILVA JUNIOR, Pedro Pereira da et al. **Circuitos elétricos: uma análise comparativa entre teoria e prática.** 2019. 52*f.* Trabalho de conclusão de Curso - Universidade

Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Angicos. 2019.

SILVA, Dêivid Rodrigo da; PEIXOTO, Paulo. Análise crítica da segunda lei de Newton na forma F_{res} = d**p**/dt com **p**=m**v**e m variável. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 2, e2317, 2016.

SILVA, J. R.; MORAIS, N. D; RUFINO, M. A. S. As idealizações dos cálculos de Newton e Leibniz como organizadores prévios comparativos para a definição de derivada. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**,v.4, n.2, p. 57-71, 2014.

SILVA, M. A. *Modelagem Matemática:* Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação. 2014. 140*f.* Trabalho de conclusão de Curso - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de, São Paulo. 2014.

SILVA, WILTON PEREIRA; PRECKER, J. W; SILVA, CLEIDE M. D. P. S; SILVA, DIOGO D. P. S; SILVA; CLEITON D. P. S. Medida de Calor Específico e Lei de Resfriamento de Newton: Um Refinamento na Análise dos Dados Experimentais. **Revista Brasileira de Ensino de Física.** Campina Grande**.** v. 25, n. 4, dezembro, 2003.

SIMÕES, C. A. E. **Equações diferenciais na física**. 2014. 176*f.* Dissertação de Mestrado (Mestre em Matemática para o Ensino), Universidade de Évora, Évora, 2014.

SOUSA, D. F. M; NEGREIROS NETO, L. G; FONSECA, R. F; SILVA, R. A. M; FRANCO, C. M. R. Contribuições das Equações Diferenciais Ordinárias em Circuitos RC utilizados no cotidiano. *in*: III CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 2018, Campina Grande - PB. **Anais III CONAPESC**, 2018. v. 1.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução: Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Vol. 2, 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SYMON, Keith R. **Mecânica**; tradução: Gilson Brand Batista. Rio de Janeiro: Campos, 1996.

TAYLOR, John R. **Mecânica Clássica**; tradução Waldir Leite Roque. Porto Alegre: Bookman, 2013.

TONIDANDEL, D. A. V; ARAÚJO, A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**,v. 34, n. 2, p. 2601 – 2606, 2012.

TORIBIO, Alan Miguel Velásquez. **História da física**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, Secretaria de Ensino a Distância, 2015.

YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. **Física II: Termodinâmica e Ondas/** Young e Freedman; [colaborador A. Lewis Ford]; tradução Cláudia Santana Martins; revisão técnica Adir Moysés Luiz. 12.ed.– São Paulo: AddisonWesley, 2008.

YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. **Física III: Eletromagnetismo/** Young e Freedman; [colaborador A. Lewis Ford]; tradução Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica Adir Moysés Luiz. – São Paulo: AddisonWesley, 2009.

ZIIL, D. G; CULLEN, M. R., *Equações diferenciais.* 3 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, v. 1, 2007.