UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Silvana de Oliveira Lima

TRANSFORMAÇÕES PLANAS

Cuité-PB

2013

Silvana de Oliveira Lima

TRANSFORMAÇÕES PLANAS

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

L732t Lima, Silvana de Oliveira.

Transformações Planas. / Silvana de Oliveira Lima – Cuité: CES, 2013.

63 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Transformações geométricas. 2. Isometrias. 3. Homotetia. I. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Transformações Planas

Silvana de Oliveira Lima

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 23 de abril de 2013.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)

Luiz Antônio da Silva Medeiros
Prof. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelos momentos de luz que me proporcionou.

Agradeço ao meu filho, pela paciência que teve para comigo.

Agradeço ao meu companheiro pela dedicação e incentivo nos momentos de dificuldade.

Agradeço a minha família, pela força que me passaram.

Agradeço aos meus amigos e colegas de TCC, Jaqueline, Izídio e Luana, pelo auxílio e apoio que sempre tivemos para com outro.

Agradeço ao meu amigo e colega de curso Huan, pela dedicação que teve para comigo nas horas que precisei.

De maneira especial quero agradecer a minha orientadora professora Márcia pela dedicação.

De maneira bem especial quero agradecer a professora Gisélia pelos ensinamentos que me passou e pela paciência e confiança que teve para comigo.

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real"

Lobachevsky

Resumo

Neste trabalho serão apresentados os conceitos e exemplos das principais transformações geométricas do plano cartesiano, assim como sua representação matricial e sua relação com o produto de matrizes. Iniciamos o nosso trabalho com uma revisão de conceitos conhecidos sobre as matrizes e álgebra linear. A revisão é importante para estabelecer as ligações entre a álgebra linear e a Computação Gráfica.

Palavras-chave: Transformações Geométricas. Isometrias. Homotetia.

Abstract

In this work we present the concepts and examples of major changes geometric Cartesian plane, as well as its matrix representation and its compared with the product of matrices. We began our work with a review of concepts known about matrices and linear algebra. The review is important to establish the connections between linear algebra and Computer Graphics.

Keywords: Geometric Transformations. Isometries. Dilation

Sumário

Introdução

O conceito de matriz e determinantes, básicos na álgebra linear, surgiu da necessidade de se resolver sistemas de equações lineares com coeficientes constantes. Leibnitz utilizava o determinante já em 1693, enquanto as matrizes foram pimeiramente utilizadas por Lagrange no final dos anos 1700.

Cramer apresentou sua fórmula em 1750, a que hoje chamamos de Regra de Cramer. Em 1772 Laplace discutiu a solução de sistemas lineares associados ao estudo de órbitas planetárias e apresentou seu método de cálculo usando cofatores e "matrizes menores".

Em 1770, no entanto, o matemático Euler conseguiu caracterizar as transformações ortogonais para $n = 2$ e 3, quando estudava quadrados de números similares aos quadrados mágicos. Devido ao seu raciocínio puramente algébrico, ele também conseguiu generalizar as soluções para qualquer valor de n, não se restringindo somente a 3. Um processo semelhante não poderia ocorrer na geometria, pois, nesse caso, era preciso imaginar um espaço com dimensões maiores que 3.

Partindo dos estudos feitos por Euler, Joseph Louis Lagrange publicou o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudou a propriedade de números que são a soma de dois quadrados. Assim, foi levado a estudar os efeitos das transformações lineares com coeficientes inteiros numa forma quadrática de duas variáveis. A partir desse estudo, ele instituiu que o discriminante da nova forma quadrática é o produto do antigo discriminante pelo quadrado de uma quantidade (determinante da transformação linear).

Johann Carl Friedrich Gauss, por sua vez, também estudou a questão com duas e três variáveis. Ele apresentou uma notação similar a da matriz que caracteriza a transformação linear. Além disso, Gauss estabeleceu a fórmula e uma notação simbólica para a composição de duas transformações lineares e também para o produto, o que marca um passo fundamental em direção ao conceito de matriz.

Apesar da existência de manuscritos chineses muito antigos mostrando a solução de sistemas de três equações em três incógnitas por "eliminação", o método de Gauss só foi apresentado em 1800 e foi usado inicialmente apenas em aplicações e sua importância teórica ignorada. A introdução definitiva de método de Gauss na matemática se deu com a contribuição de Wilhelm Jordan que aplicou o método de Gauss na solução de problemas associados à medição e representação da superfície terrestre. O método é citado em seu livro Textbook of Geodesy, 1888.

Hermann Günter Grassmann publicou em 1844 a primeira versão de "Lineale Ausdehnungslehre". Nesse trabalho discutiu e obteve uma boa parte dos resultados elementares da teoria atual de espaços vetoriais e de álgebra linear, além de ter conseguido algo bem próximo de uma formalização axiomática, mas devido a sua forma obscura de apresentação, seus resultados não influenciaram seus contemporâneos e a maior parte de seus resultados foi redescoberto independentemente de seu trabalho.

Em 1846, Arthur Cayley publicou o tratado "Sur Quelques Résultats de Géometrié de Position". Esse tratado surgiu como um passo decisivo na direção de generalizar os espaços de dimensão maior que três, pois nesse trabalho ele mostrou que se podem obter resultados em geometria tridimensional trabalhando-se com espaços de dimensão maior que três. Esse resultado poderia ter sido obtido por Möbius, mas ele adotou uma postura comum à sua época e descartou essa possibilidade.

Sylvester, em 1848, usou pela primeira vez o termo matriz (uma palavra com origem no latim, significando útero, como sendo a base de onde surgem os números), apresentou a notação moderna para designá-las.

Giuseppe Peano (1858-1952) publicou em 1888 sua própria leitura do "Ausdehnungslehre", com o titulo de "Calcolo Geométrico"no qual escreveu uma definição axiomática do que ele chamou de "sistema linear", que foi considerada a primeira definição axiomática de um espaço vetorial, mas a teoria de espaços vetoriais não foi desenvolvida antes de 1920.

Com o desenvolvimento dos computadores houve um ressurgimento no interesse em matrizes, na computação gráfica, por exemplo, a manipulação de imagens, rotação, redimensionamento, alteração de cores são operações lineares. Por outro lado, evidentemente nem todos os processos da natureza podem ser descritos por meio de sistemas ou equações lineares. No entanto muitos sistemas e aplicações importantes são lineares, o que por si já justificaria seu estudo. Além disto a matemática envolvida na solução de sistemas não lineares é complicada e ainda está sendo desenvolvida na atualidade. Por isto sua solução passa muitas vezes pela solução de um sistema linear que melhor representa o sistema em estudo. A partir das soluções aproximadas existem métodos para se obter soluções mais próximas do sistema real.

Aqui, faremos um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, das transformações geométricas no plano. Apresentamos uma revisão dos conceitos de matrizes e de álgebra linear. Estudamos um tipo especial de função (ou aplicação), onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Apresentamos as principais transformações geométricas do plano, sua representação matricial e sua relação com o produto de matrizes. Como aplicação, estabeleceremos as ligações entre a álgebra linear e a Computação Gráfica.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Matrizes

Definição 1.1. *Uma* **matriz** *$m \times n$ sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz A é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$ situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ chama-se a i-ésima linha ou o i-ésimo vetor linha da matriz A enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ é a j-ésima coluna ou o j-ésimo vetor coluna de m.

Na matriz A, o elemento a_{ij} chama-se o ij-ésimo elemento de A; escreve-se $A = [a_{ij}]$.

O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ será denotado por $M(m \times n)$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Uma matriz A é chamada de matriz **quadrada** se $m = n$. Neste caso, a entrada $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ forma a **diagonal principal**.

Dizemos que uma matriz quadrada A é uma matriz **diagonal** se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Em particular, dizemos que a matriz diagonal A é uma matriz **identidade** se

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases}$$

e será denotado por $I_n = [\delta_{ij}]$, onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

A matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é chamada de matriz **nula** e será denotada $\mathbf{0}$.

Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dizemos que A é igual B, em símbolos A = B, se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ munido com as operações de adição

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}], \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

possui as seguintes propriedades:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

2. Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

3. Para cada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe $-A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + (-A) = \mathbf{0}$, onde $-A = [-a_{ij}]$.

4. $A + B = A + B$, para todas $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

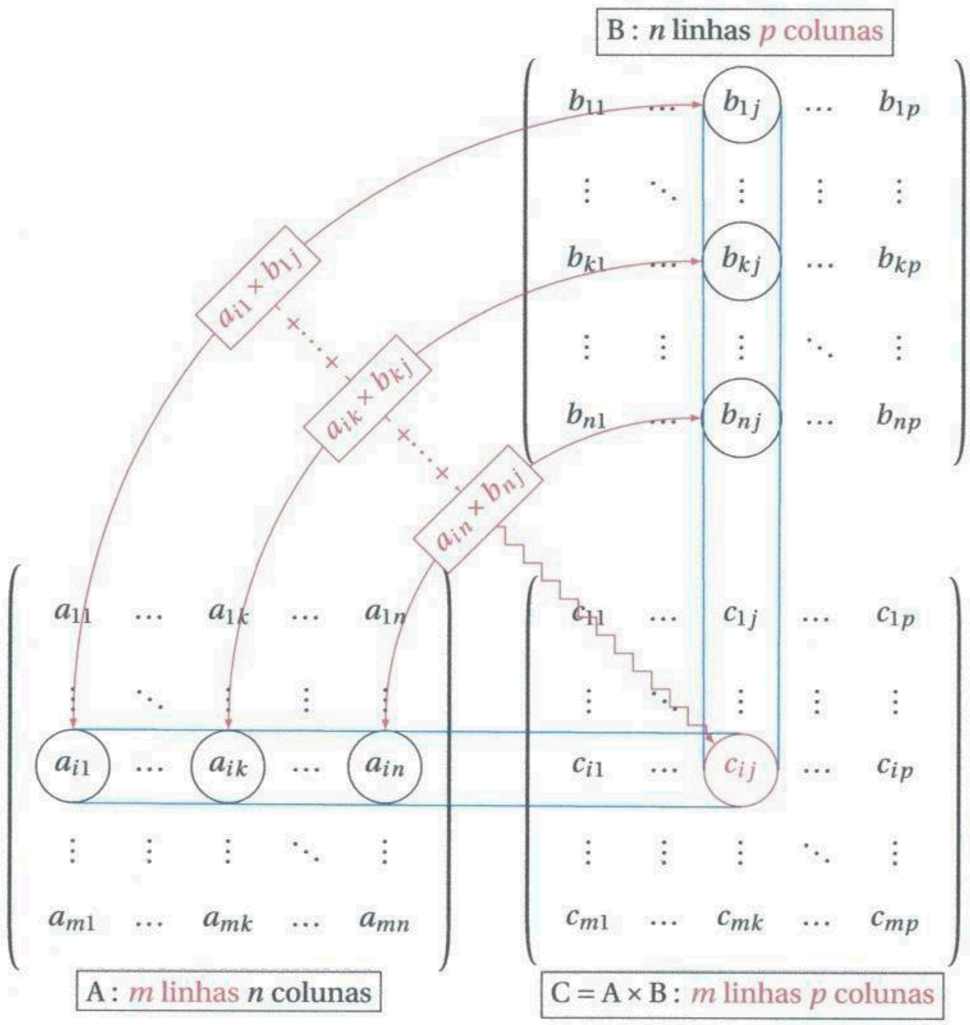
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ para todas $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. e $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. $1 \cdot A = A$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$. O **produto** dessas matrizes é a matriz $AB = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times p}$, cujo ij-ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$



Note que A e B não precisam ter a mesma ordem. Entretanto, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

O produto de matrizes possui as seguintes propriedades;

1. $(AB)C = A(BC)$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2. $(A+B)C = AC + BC$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3. $A(B+C) = AB + AC$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

4. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{0}B = \mathbf{0}$, para todas $A, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Há quatro diferenças fundamentais entre o produto de matrizes e o produto de números.

1. A primeira é que o produto AB não está definido para quaisquer matrizes A e B, pois só faz sentido quando o número de linhas de A é igual ao número de colunas de B.

2. A segunda é que o produto AB não é comutativo. Mesmo que AB e BA existam, não se tem necessariamente AB = BA.

Exemplo 1.1.1. *Consideremos as seguintes matrizes*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 38 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

3. A terceira diferença é que o produto de duas matrizes não nula: de $\mathrm{A} \neq \mathbf{0}$ e $\mathrm{B} \neq \mathbf{0}$ não se infere que $\mathrm{AB} \neq \mathbf{0}$. Pode até ocorrer que $\mathrm{A} \neq \mathbf{0}$ seja tal que $\mathrm{A}^2 = \mathbf{0}$, como no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.2. *Se*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

então $\mathrm{A}^2 = \mathbf{0}$.

4. A quarta diferença entre o produto de matrizes e o produto de números é que todo número a diferente de zero possui o inverso multiplicativo $a^{-1} = 1/a$ pois $aa^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Por outro lado, dada a matriz quadrada A, do tipo $n \times n$, mesmo que $\mathrm{A} \neq \mathbf{0}$, nem sempre existe uma matriz B do tipo $n \times n$, tal que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$. Quando uma tal matriz B existe, a matriz A se diz invertível e B chama-se a **matriz inversa** de A. Escreve-se então $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Observação 1.1.

Se A *é uma matriz* $n \times n$, *então*

$$I_nA = A = AI_n,$$

isto é, a matriz identidade faz, em relação à multiplicação de matrizes, o mesmo papel que o escalar 1 na multiplicação usual de reais.

Teorema 1.1. *(Teorema de Binet) Sejam* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Então*

$$det\,(AB) = det\,A \cdot det\,B.$$

Demonstração. Ver [8] □

Teorema 1.2. *A matriz quadrada* A *é invertível se, e somente se,* $det\,A \neq 0$.

Demonstração. Ver [7] □

Definição 1.2. *Seja* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *A matriz* **transposta** *de* A *é a matriz obtida escrevendo-se as linhas da matriz* A *como colunas, ou seja,*

$$A^t = [a_{ji}], \quad 1 \le i \le m \quad e \quad 1 \le j \le n.$$

A transposta de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$, para todas $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$,, para toda $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $(A^t)^t = A$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
4. $(AB)^t = B^tA^t$, para todas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Observação 1.2.

$$det\,A^t = detA$$

Definição 1.3. *Seja* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Dizemos que* A *é uma* **matriz simétrica** *se* $A^t = A$ *e que* A *é uma* **matriz antisimétrica** *se* $A^t = -A$.

Definição 1.4. *Seja* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Dizemos que* A *é uma matriz* A *é* **matriz ortogonal**

$$AA^t = A^tA = I_n.$$

Exemplo 1.1.3. *A matriz*

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal

De fato:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad e \quad M^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Observe que,

$$MM^t = M^tM = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tendo em vista que

$$MM^t = M^tM = I_2.$$

Portanto a matriz M *é ortogonal.*

Definição 1.5. *Uma matriz quadrada* A *é dita ortogonal se* $A^{-1} = A^t$.

Teorema 1.3.

a) A transposta de uma matriz ortogonal é ortogonal.

b) A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.

c) O produto de matrizes ortogonais é ortogonal.

d) Se A *é ortogonal, então* $det(A) = 1$ *ou* $det(A) = -1$.

Demonstração.

a) Se A é ortogonal, então $A^tA = I$. Podemos reescrever isso como $A^t(A^t)^t = I$, que implica que $(A^t)^{-1} = (A^t)^t$. Assim, A^t é ortogonal.

b) Se A é ortogonal, então $A^{-1} = A^t$. Transpondo ambos lados dessa equação, obtemos

$$(A^{-1})^t = (A^t)^t = A = (A^{-1})^{-1}$$

que implica que A^{-1} é ortogonal.

c) Se A e B são matrizes ortogonais, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$$

Assim, AB é ortogonal.

d) Se A é ortogonal, então $A^tA = I$. Tomando o determinante de ambos lados e usando propriedades de determinantes, obtemos

$$det(A)det(A^t) = det(A)det(A) = 1$$

que implica que $det(A) = 1$ ou $det(A) = -1$.

□

Definição 1.6. *As seguintes operações efetuadas sobre uma matriz* A *são chamadas* **operações elementares** *sobre as linhas:*

a) Permutação de duas linhas de A*;*

b) Multiplicação de uma linha de A *por um escalar não-nulo;*

c) Substituição da i-ésima linha de A *pela linha i-ésima linha mais c vezes a j-ésima linha, $i \neq j$.*

Definição 1.7. *Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz* ***identidade*** I_n *de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma matriz* ***elementar****.*

Exemplo 1.1.4. *A matriz elementar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

resulta de multiplicar a segunda linha de I_2 *por* -3.

Exemplo 1.1.5. *A matriz elementar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta de somar 3 vezes a terceira linha de I_3 *à primeira linha.*

1.2 Espaço Vetorial

Definição 1.8. *Um* **espaço vetorial real** *é um conjunto não-vazio* V, *no qual estão definidas duas operações:* **adição**

$$\begin{aligned} +: \ \mathrm{V}\times\mathrm{V} &\longrightarrow \mathrm{V} \\ (u,v) &\longmapsto u+v \end{aligned}$$

e **multiplicação por um número real (escalar)**,

$$\begin{aligned} \cdot: \ \mathbb{K}\times\mathrm{V} &\longrightarrow \mathrm{V} \\ (\alpha,u) &\longmapsto \alpha\cdot v \end{aligned}$$

tal que os seguintes axiomas valem:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$, *para todos* $u, v, w \in \mathrm{V}$.

2. *Existe um vetor* $\mathbf{0}\in\mathrm{V}$, *chamado* **vetor nulo**, *tal que* $v+\mathbf{0}=\mathbf{0}+v=v$ *para todo* $v\in\mathrm{V}$.

3. *Para cada vetor* $v\in\mathrm{V}$ *existe um vetor* $-v\in\mathrm{V}$, *chamado o* **simétrico** *de* v, *tal que* $-v+v=v+(-v)=\mathbf{0}$.

4. $u+v=v+u$, *para todos* $u, v\in\mathrm{V}$.

5. $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$, *para todos* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *e* $v\in\mathrm{V}$.

6. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$, *para todos* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *e* $v\in\mathrm{V}$.

7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, *para todos* $u, v\in\mathrm{V}$ *e* $\alpha\in\mathbb{R}$.

8. $1\cdot v=v$, *para todo* $v\in\mathrm{V}$.

Observação 1.3. .

1) Os elementos do espaço vetorial V *serão chamados* **vetores**, *independentemente de sua natureza.*

2) Se na definição acima tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ *dos números complexos,* V *seria um* **espaço vetorial complexo**. *Vamos considerar somente espaços vetoriais reais.*

Exemplo 1.2.1. *O conjunto* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);\\ \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Estas são as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Exemplo 1.2.2. *O conjunto* $\mathrm{M}(m \times n)$ *de todas as matrizes* $m \times n$ *com as operações adição e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial.*

Subespaços Vetoriais

Seja V um espaço vetorial. Um **subespaço vetorial** de V é um subconjunto $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ com as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{0} \in \mathrm{W}$;

2. Se $u, v \in \mathrm{W}$ então $u + v \in \mathrm{W}$;

3. Se $v \in \mathrm{W}$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in \mathrm{W}$.

Observação 1.4. *Todo espaço vetorial* V *admite pelo menos dois subespaços: o conjunto* $\{0\}$*, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial* V*. Esses dois são os subespaços* **triviais** *de* V*. Os demais subespaços são denominados subespaços* **próprios** *de* V.

Definição 1.9. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Um vetor* v *em* V *é uma* **combinação linear** *dos vetores* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *em* V *se existirem escalares* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *tais que.*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n.$$

Teorema 1.4. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *vetores fixados em* V*. Então o conjunto*

$$\mathrm{W} = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n : a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de V.

Demonstração.

1. $\mathbf{0} \in \mathrm{W}$, pois $\mathbf{0} = 0v_1 + \cdots + 0v_n \in \mathrm{W}$;

2. Dados $u, v \in \mathrm{W}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $u, v \in \mathrm{W}$ temos que existem $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \quad e \quad v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \in \mathrm{W} \end{aligned}$$

3. Dados $u \in \mathrm{W}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $u \in \mathrm{W}$ temos que existem $a_1, \ldots, a_n$ tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \\ &= (\alpha a_1)v_1 + (\alpha a_2)v_2 + \cdots + (\alpha a_n)v_n \in \mathrm{W} \end{aligned}$$

Portanto, W é subespaço de V.

□

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e A um subconjunto não-vazio de V. Então

$$\mathrm{W} = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \ e \ v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathrm{A}\}$$

é o subespaço de V **gerado por** A, onde A é o conjunto de **geradores** de V e será denotado por

$$\mathrm{W} = [\mathrm{A}].$$

Exemplo 1.2.3. *Sejam* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$ *e* $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, $i = 1, 2, 3$, *vetores em* V. *Assim,* $\mathrm{W} = [e_1, e_2, e_3] = \mathrm{V}$.

De fato, por definição

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, todo vetor v *em* V *pode ser escrito como combinação dos vetores* e_1, e_2, e_3.

Definição 1.10. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $v_1, \cdots, v_n \in$ V. *Dizemos que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são* **linearmente dependentes** *(LD) se existirem escalares* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *não todos iguais a* 0, *tais que*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

Ou, equivalente, a equação vetorial (1.1) admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ *são* **linearmente independentes** *(LI) ou, equivalente, a equação vetorial (1.1) admite apenas a solução nula.*

Mais geralmnete, sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e A um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que A é LI se para quaisquer vetores distintos $v_1, \ldots, v_n$ em A, temos que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

isto é, todo subconjunto finito de A é LI. Caso contrário, A é LD.

Teorema 1.5. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $v_1, \cdots, v_n \in$ V. *O conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos outros.*

Demonstração. Suponhamos que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}.$$

Como os escalares $a_1, \cdots, a_n$ não são todos nulos temos que existem $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$. Logo,

$$v_i = \left(-\frac{a_1}{a_i}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{a_{i-1}}{a_i}\right) v_{i-1} + \left(-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) v_{i+1} + \cdots + \left(-\frac{a_n}{a_i}\right) v_n.$$

Reciprocamente, suponhamos que um destes vetores seja combinação dos outros digamos

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + x_n v_n.$$

Logo, a equação vetorial

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0},$$

admite pelo menos uma solução não-nula, a saber, $(a_1, \cdots, a_{j-1}, -1, a_{j+1}, \cdots + a_n)$. Portanto, o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD. □

Observação 1.5. *Para o caso particular de dois vetores, temos:*

"Dois vetores v_1 e v_2 são LD se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro".

Definição 1.11. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Um conjunto* $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *de vetores de* V *é uma* **base** *de* V *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LI.*

2. $V = [\beta] = [v_1, \cdots, v_n]$.

Exemplo 1.2.4. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$. *O conjunto* $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ *é base finita de* V, *a qual é chamda de* **base canônica** *de* V. *De fato,*

1. β *é LI, pois* $a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$ *implica* $a = b = c = 0$;

2. β *gera* $\mathbb{R}^3$, *pois todo vetor* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *é tal que:*

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Teorema 1.6. *Se* $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial* V, *então todo conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.*

Demonstração. Ver [8] □

Corolário 1.1. *Duas bases quaisquer de um espaço vetorial tem o mesmo número de vetores.*

Demonstração. Ver [8] □

Exemplo 1.2.5.

1) A base canônica de $\mathbb{R}^3$ *tem três vetores. Portanto toda base de* $\mathbb{R}^3$ *terá três vetores.*

2) A base canônica das matrizes $M(2 \times 2)$ *tem quatro vetores. Portanto toda base de* $M(2 \times 2)$ *terá quatro vetores.*

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. A **dimensão** de V é o número de elementos em alguma base de V e será denotada por $dim\, V$. Note, pelo Corolário 1.1, que esta definição não depende da base de V, isto é, está bem definida. Quando $V = \{\mathbf{0}\}$, convencionamos que $dim\, V = 0$.

Exemplo 1.2.6. .

1) $dim\,\mathbb{R}^n = n$.

2) $dim\,\mathrm{M}(m,n) = m \times n$.

Exemplo 1.2.7. *O conjunto* $\mathrm{B} = \{(2,1),(-1,3)\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^2$.

De fato, como $dim\mathbb{R}^2 = 2$, *e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do* $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.7. *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *uma base ordenada de* V. *Então, todo vetor* $v \in \mathrm{V}$ *pode ser escrito de modo único sob a forma:*

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Demonstração. (Existência) Como $v \in \mathrm{V} = [\beta]$ temos que existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

(Unicidade) Suponhamos, que

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Então

$$\mathbf{0} = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n.$$

Como β é LI temos que $a_i - b_i = 0$, $i = 1, \ldots\ldots, n$. Portanto, $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. □

Os escalares $a_1, \ldots, a_n$ são chamados as **coordenadas** do vetor v em relação à base ordenada β e será denotada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\beta = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ duas bases ordenadas de V. Então, pelo Teorema 1.7, todo vetor $u \in \mathrm{V}$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} u & = & x_1 u_1 & + & \cdots & + & x_n u_n \\ u & = & y_1 v_1 & + & \cdots & + & y_n v_n. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Assim,

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad [u]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $v_j \in V$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} v_1 & = & a_{11}u_1 & + & \cdots & + & a_{n1}u_n & = & \sum_{i=1}^n a_{i1}u_i \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & & \\ v_n & = & a_{1n}u_1 & + & \cdots & + & a_{nn}u_n & = & \sum_{i=1}^n a_{in}u_i \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Logo, pela Equação (1.2), temos que

$$\begin{aligned} u &= y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \\ &= \sum_{j=1}^n y_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ij}u_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\Big)u_i. \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade das coordenadas, temos que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n \end{array} \right.$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[I]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[u]_\beta = [I]_\beta^{\beta'}[u]_{\beta'}.$$

A matriz $[I]_\beta^{\beta'}$ é chamada a **matriz de mudança de base** da base β' para a base β.

Espaços Vetoriais Euclidianos

Definição 1.12. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Uma função* $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *é um* **produto interno** *sobre* V *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, *para todos* $u, v, w \in V$.

2. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$, *para todos* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, *para todos* $u, v \in V$.

4. $\langle u.u\rangle \geq 0$ *para todo* $u \in V$ *e* $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$.

Exemplo 1.2.8. *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in V$. *Então*

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

é um produto interno sobre V, *o qual é chamado de produto interno usual (canônico). Note que* $\langle u.v\rangle = X^tY$, *onde*

$$X = [u] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad Y = [v] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Um **espaço euclidiano** é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ munido com um produto interno.

Definição 1.13. *Sejam* V *um espaço euclidiano e* $u, v \in V$. *Dizemos que* u *e* v *de* V *são* **ortogonais** *se* $\langle u, v\rangle = 0$ *e denotamos por* $u \perp v$.

Proposição 1.1. *Seja* V *um espaço euclidiano. Então:*

1. $\mathbf{0} \perp v$ *para todo* $v \in V$.

2. *Se* $u \perp v$, *então* $v \perp u$ *para todos* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. *Se* $u \perp v$, *para todo* $v \in V$, *então* $u = \mathbf{0}$.

4. *Se* $u \perp v$, *então* $\alpha u \perp v$ *para todos* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. *Se* $u \perp w$ *e* $v \perp w$, *então* $(u+v) \perp w$, *para todos* $u, v, w \in V$.

Definição 1.14. *Seja* V *um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que um conjunto de vetores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ *é* **ortogonal** *se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é,* $v_i . v_j = 0$ *para* $i \neq j$.

Teorema 1.8. *Seja* V *um espaço euclidiano. Se* β *é um subconjunto (finito ou infinito) de* V *formado por vetores não-nulos ortogonais aos pares, então* β *é linearmente independente.*

Demonstração. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vetores distintos de β e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \langle \mathbf{0}, v_j \rangle = \langle a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, v_j \rangle \\ &= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_n \langle v_n, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle, \end{aligned}$$

pois, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Como $\langle v_j, v_j > 0$ temos que $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto, β é linearmente independente. □

Corolário 1.2. *Seja* V *um espaço euclidiano com* $dim\, V = n$. *Se* $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *é um conjunto de vetores não-nulos ortogonais aos pares de* V, *então* β *é uma base* **ortogonal** *de* V.

Definição 1.15. *Seja* V *um espaço euclidiano. A* **norma** *ou* **comprimento** *de um vetor* $v \in V$ *é definida como*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Note que esta definição é possível, pois $\langle v, v \rangle \geq 0$, *para todo* $v \in V$.

Observação 1.6.

Seja $v \in V$ *um vetor qualquer. Dizemos que* v *é um* **vetor unitário** *se*

$$||v|| = 1.$$

Se $v \in V$ *é um vetor não-nulo qualquer, então*

$$u = \frac{v}{||v||}$$

é um vetor unitário.

Teorema 1.9. *Seja* V *um espaço vetorial euclidiano. Então*

1. $||v|| \geq 0$, *para todo* $v \in V$.

2. $||v|| = 0$, *se, e somente se,* $v = \mathbf{0}$.

3. $||\alpha v|| = |\alpha|||v||$, *para todo* $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$, *para todo* $u, v \in V$. **(Desigualdade de triangular).**

5. $|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$, **para todos** $u, v \in V$ **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz).**

Demonstração. Ver [8] □

Observemos que se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for um vetor $\mathbb{R}^n$ com produto interno usual, tem-se:

$$||u|| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

É importante observar que a norma depende do produto interno utilizado. Se o produto interno muda, o módulo também se modifica.

Seja V um espaço euclidiano. Para quaisquer $u, v \in V - \{\mathbf{0}\}$, o ângulo entre u e v é definido como o ângulo θ tal que

1. $0 \leq \theta \leq \pi$;

2. $\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}$.

Observação 1.7. *Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,*

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||} \leq 1$$

e assim, o ângulo θ *sempre existe e é único.*

Definição 1.16. *Seja* V *um espaço euclidiano e* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *uma base de* V. *Dizemos que* β *é uma* **base ortonormal** *para* V *se*

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo 1.2.9. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *com produto interno usual. Então*

$$\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

é uma base ortonormal de V.

Capítulo 2

Transformações Lineares

2.1 Transformações Lineares

Estudaremos agora, um tipo especial de função (ou aplicação), onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais.

Definição 2.1. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$. *Uma função* $T : V \to W$ *é uma* **transformação linear** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para todos* $u, v \in V$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$.

Observação 2.1.

1. *Uma transformação linear é uma função que preserva as operações dos espaços vetoriais.*

2. *Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear, então* $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *pois*

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = \mathbf{0}.$$

3. *Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear, então*

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v),\ \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } u, v \in V,$$

pois

$$\begin{aligned} T(au+bv) &= T(au) + T(bv) \\ &= aT(u) + bT(v). \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n),\ \forall a_i \in \mathbb{R} \text{ e } u_i \in V.$$

4. *Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear e* $V = W$*, dizemos que* T *é um operador linear sobre* V.

Exemplo 2.1.1. *(Operador Nulo) Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$.
A função $0 : V \to W$, $0(v) = \mathbf{0}$*, para todo* $v \in V$*, é uma transformação linear, pois*

I) $0(u+v) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = 0(u) + 0(v),\ \forall u, v \in V$;

II) $0(\alpha u) = \mathbf{0} = \alpha 0(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$.

Exemplo 2.1.2. *(Operador Identidade) Seja* V *espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.
A função $I : V \to V$, $I(v) = v$*, para todo* $v \in V$*, é uma operador linear, pois*

I) $I(u+v) = u + v = I(u) + I(v),\ \forall u, v \in V$;

II) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$.

Exemplo 2.1.3. *Seja* $T : V \to V$, $T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, λ *fixado.*
Se $u, v \in V$:

I) $T(u+v) = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = \lambda(\alpha u) = \alpha(\lambda u) = \alpha T(u)$.

Logo, T *é um operador linear em* V*. Esse operador chama-se* **homotetia** *de* V *determinada pelo o escalar* λ.

Observação 2.2. *Operador linear que não preserva comprimento.*

Exemplo 2.1.4. *Sejam* $V = \mathbb{R}^{n\times 1}, W = \mathbb{R}^{m\times 1}$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *uma matriz fixada. A função* $T_A : V \to W$ *definida por*

$$T_A(X) = AX,$$

para todo $X \in V$*, é uma transformação linear, pois*

I) $T_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = T_A(X) + T_A(Y), \forall X, Y \in V$.

II) $T_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha T_A(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $X \in V$.

Observação 2.3. .

Uma matriz $A(m \times n)$ *sempre determina uma transformação linear*

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

onde a imagem $T_A(X) = AX$ *é o produto da matriz* A *pelo o vetor* $X \in \mathbb{R}^n$ *considerado como uma matriz de ordem* $n \times 1$. *Uma transformação linear desse tipo chama-se* **multiplicação por** A.

Alguns dos mais importantes operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ são as rotações e as reflexões.

Exemplo 2.1.5. *(Rotação em torno da origem) Fixemos um ângulo* θ *e consideremos o operador* T *que gira cada vetor* x *de* $\mathbb{R}^2$ *em torno da origem por um ângulo* θ *(Figura 2.1). A*

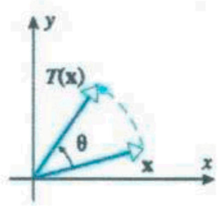


Figura 2.1: Rotação em torno da origem

Figura 2.2 torna evidente que a rotação T *é homogênea, já que resulta a mesma imagem de um vetor u multiplicando u por a primeiro e depois girando ou girando u primeiro e depois multiplicando por a. A Figura 2.3 torna evidente que* T *é uma aplicação aditiva, pois*

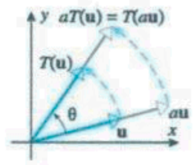


Figura 2.2: Homogeneidade

resulta a mesma imagem somando primeiro u com v e então girando ou primeiro girando os vetores u e v depois somando os vetores girados.

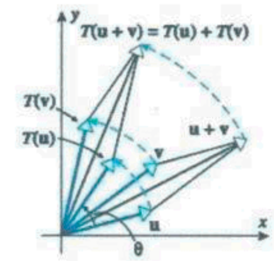


Figura 2.3: Aditividade

As figuras deixam claro que T *é uma transformação linear.*

Exemplo 2.1.6. *Considere*

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto T(x,y) = (y,x) \end{aligned}$$

O operador que reflete cada vetor x numa reta pela origem que faz um ângulo θ *com o eixo x positivo (Figura 2.4).*

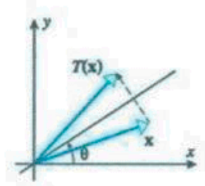


Figura 2.4: Reflexão do vetor x numa reta pela origem

I) Sejam $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *dois quaisquer vetores de* $\mathbb{R}^2$*. Então*

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_2+y_2, x_1+y_1) \\ &= (x_2,x_1)+(y_2,y_1) = T(x_1,x_2)+T(y_1,y_2) = T(x)+T(y). \end{aligned}$$

II) Sejam $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Então*

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T[\alpha(x_1,x_2)] = T(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_2, \alpha x_1) \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_1) = \alpha(x_2,x_1) = \alpha T(x_1,x_2) = \alpha T(x). \end{aligned}$$

Logo, T *é um operador linear em* V.

Para interpretar geometricamente a transformação T *observe a Figura 2.4 que sugere a simetria dos vetores* (x_1, x_2) *e* (x_2, x_1) *relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Sejam* P *e* Q *as extremidades dos vetores* (x_1, x_2) *e* (x_2, x_1) *,respectivamente. O ponto médio do segmento* PQ *tem a forma*

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

pertencendo, portanto, à referida bissetriz. Simultaneamente, PQ *é perpendicular a esta reta,pois sendo*

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathrm{T}(x_1 x_2) - (x_1, x_2) = (x_2 - x_1, x_1 - x_2)$$

e $(1,1)$ *um vetor com a direção daquela bissetriz, tem-se*

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, (1,1)\rangle = \langle (x_2 - x_1, x_1 - x_2), (1,1)\rangle = 0.$$

Assim, R *é uma reflexão.*

As reflexões mais básicas num sistema de coordenadas xy são no eixo x $(\theta = 0)$, no eixo y $(\theta = \pi/2)$ e na reta $y = x$ $(\theta = \pi/4)$.

Exemplo 2.1.7. *(Operador Translação) Seja* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$*. A função* $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *definida por*

$$\mathrm{T}(u) = u + v,$$

onde $u = (x, y)$ *e* $v = (a, b)$*, não é uma transformação linear, a menos que* $a = b = 0$*, pois*

$$\mathrm{T}(0,0) = (a, b) \neq (0,0).$$

Exemplo 2.1.8. *Seja* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$*. A função* $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *definida por* $\mathrm{T}(x, y) = (x, |y|)$ *não é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \mathrm{T}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, |y_1 + y_2|) \\
&\neq (x_1, |y_1|) + (x_2, |y_2|) = \mathrm{T}(x_1, y_1) + \mathrm{T}(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

desde que $|y_1 + y_2| < |y_1| + |y_2|$ *se* $y_1 y_2 < 0$.
Em particular, $\mathrm{T}((2,1) + (3,-1)) = \mathrm{T}(5,0) = (5,0) \neq (5,2) = \mathrm{T}(2,1) + \mathrm{T}(3,-1)$.

Note que $\mathrm{T}(0,0) = (0,0)$. Portanto, $\mathrm{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é condição necessária mas não suficiente para que T seja uma transformação linear.

Teorema 2.1. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$. *Sejam* $u_1, \ldots, u_n$ *uma base de* V *e* $w_1, \ldots, w_m$ *vetores arbitrários em* W. *Então existe uma única transformação linear* $T : V \to W$ *tal que* $T(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. (Existência) Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V temos que cada vetor $u \in$ V pode ser escrito de modo único sob a forma

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Definimos $T : V \to W$ por

$$T(u) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i.$$

1. T está bem definida e

$$T(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, n,$$

pois

$$u_i = 0u_1 + \cdots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \cdots + 0u_n, i = 1, \ldots, n.$$

2. T é uma transformação linear. Dados $v \in V$,

$$v = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n,$$

e $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \sum_{i=1}^{n} y_i w_i = T(u) + T(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(cu) &= T\Big(\sum_{i=1}^{n}(cx_i)u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(cx_i)w_i \\ &= c\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\Big) = cT(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(Unicidade) Seja $S : V \to W$ outra transformação linear tal que

$$S(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, n.$$

Então

$$S(u) = S\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = T(u),$$

para todo $u \in V$. Portanto, $S = T$.

□

Esse Teorema afirma que uma transformação linear de V em W é completamente determinada pelas as imagens de um conjunto de vetores básicos de V e que uma escolha arbitrária dessas imagens define uma transformação linear.

Definição 2.2. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. O* **núcleo** *de* T *é um subconjunto de* V *definido por*

$$N(T) = \{u \in V : T(u) = \mathbf{0}\}.$$

O conjunto dos valores da transformação linear T*, indicado*

$$ImT = \{T(u) : u \in V\}$$

é chamado **imagem** *de* T.

Teorema 2.2. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* ImT *é um subespaço de* W *e* $N(T)$ *é um subespaço de* V.

Demonstração.

1. ImT é um subespaço de W.

   - $ImT \neq \emptyset$, pois $\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \in ImT$.
   - Dados $w_1, w_2 \in ImT$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

     Como $w_1, w_2 \in ImT$ temos que existem $u_1, u_2 \in V$ tais que $w_1 = T(u_1)$ e $w_2 = T(u_2)$.

     Logo,

     $$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in ImT, \quad \text{pois} \quad u_1, u_2 \in V \\ \alpha w_1 &= \alpha T(u_1) = T(\alpha u_1) \in ImT, \quad \text{pois} \quad \alpha u_1 \in V \end{aligned}$$

     Portanto, ImT é um subespaço de W.

2. N(T) é um subespaço de V.

   - $N(T) \neq \emptyset$, pois $\mathbf{0} \in N(T)$.
   - Dados $u_1, u_2 \in ker T$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

     Como $u_1, u_2 \in N(T)$ temos que $T(u_1) = \mathbf{0}$ e $T(u_2) = \mathbf{0}$.

     Logo,

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(u_1) + T(u_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \text{isto é} \quad u_1, u_2 \in N(T) \\ T(\alpha u_1) &= \alpha T(u_1) = \alpha \mathbf{0} \quad \text{isto é} \quad \alpha u_1 \in N(T) \end{aligned}$$

     Portanto, N(T) é um subespaço de V.

□

Observação 2.4. *Se* $Im(T) = W$, T *diz-se que a transformação* T *é* **sobrejetora**, *isto é, para qualquer* $w \in W$ *dado, pode-se achar* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$.

Teorema 2.3. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *é injetora se, e somente se,* $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Demonstração. Suponhamos que $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Dados $u, v \in V$, se $T(u) = T(v)$, então

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = T(u) - T(u) = \mathbf{0}.$$

Logo $u - v \in N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, $u = v$, ou seja T é injetora. Reciprocamente, suponhamos que T é injetora. Dado $u \in N(T)$, temos que $T(u) = \mathbf{0}$. Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ temos que

$$T(u) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \Rightarrow u = \mathbf{0}.$$

Assim, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. □

Teorema 2.4. *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *com* $dimV = n$, *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então*

$$dimV = dimN(T) + dimIm(T).$$

Demonstração. Ver [8] □

Corolário 2.1. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *com* $dimV = dimW$, *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *é injetora se, e somente se,* T *é sobrejetora.*

Demonstração. Suponhamos que T seja injetora. Então, pelo o Teorema 2.3, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Assim,

$$dimW = dimV = dimN(T) + dimImT = dimImT.$$

Como $ImT \subseteq W$ e $dimW = dimImT$ temos que $ImT = W$. Portanto, T é sobrejetora.

Reciprocamente, suponhamos que T seja sobrejetora.

Então $ImT = W$ e $dimW = dimImT$. Assim,

$$dimImT = dimV = dimN(T) + dimImT \Rightarrow dimN(T) = 0.$$

Assim, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ e, pelo Teorema 2.3, T é injetora. □

Assim, numa transformação linear na qual $dimV = dimW$, se T é injetora (ou sobrejetora), então T é também **bijetora**.

Corolário 2.2. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *com* $dimV = dimW$, *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *leva base de* V *em alguma base de* W.

Demonstração. Ver [8] □

Definição 2.3. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *com* $dimV = dimW$, *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Dizemos que* T *é um* **isomorfismo** *se* T *é bijetora. Neste caso, os espaços* V *e* W *são ditos* **isomorfos**.

2.1.1 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$, bases ordenadas de V e W, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

Um vetor $u \in V$ pode ser expresso por:

$$u = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$$

e a imagem $T(v)$ por:

$$T(u) = y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m \tag{2.1}$$

Por outro lado:

$$T(u) = T(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) = x_1 T(u_1) + \ldots + x_n T(u_n) \tag{2.2}$$

Sendo $T(u_1),\ldots,T(u_n)$ vetores de W, eles são combinações lineares dos vetores de β.

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(u_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 \ldots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

Substituindo esses vetores em (2.2), vem:

$$T(u) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m) + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m)$$

ou:

$$T(u) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)w_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m$$

Comparando essa igualdade com (2.1), conclui - se:

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ y_2 &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n). \end{aligned} \tag{2.4}$$

A matriz dos coeficientes deste sistema será chamada a **representação matricial** de T em relação às bases α e β.

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou, simbolicamente:

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha$$

Sendo a matriz $[T]_\beta^\alpha$ denominada matriz de T em relação as bases α e β.

Teorema 2.5. *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *com* $dim V = n$ *e* $dim W = m$. *Sejam* $\alpha = \{u_1,\ldots,u_n\}$, $\beta = \{w_1,\ldots,w_m\}$, *bases ordenadas de* V *e* W, *respectivamente, e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então*

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha,\ \forall u \in V.$$

Determinamos assim, fixadas as bases α de V e β de W, que a cada transformação linear $T: V \to W$ corresponde uma única matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

Em geral, para $T: V \to W$ linear, se $dimV = n$ e $dimW = m$, $\alpha = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ são bases de V e W, respectivamente, teremos que $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz de ordem $m \times n$ onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de α em relação a base β:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ T(v_1)_{\beta}\, T(v_2)_{\beta}\, T(v_n)_{\beta} \end{array}$$

Observação 2.5.

1) *No caso de serem* A *e* B *bases canônicas, representa-se a matriz simplesmente por* $[T]$, *que é chamada* **matriz canônica** *de* T. *Então tem-se* $[T(v)] = [T][v]$.

2) *Dada uma transformação linear* T, *a cada dupla de bases* A *e* B *corresponde uma matriz* $[T]_{B}^{A}$. *Reciprocamente, dadas a matriz e uma dupla de bases* A *e* B, *podemos encontrar a lei que define* T.

3) *É importante não esquecer que estabelecemos uma correspondência entre as matrizes* $m \times n$ *e as transformações lineares de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$. *A cada matriz* A *corresponde uma transformação linear* T_A *(multiplicação por* A*) e a cada transformação linear* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *corresponde uma matriz* $[T]$ *de tamanho* $m \times n$ *(a matriz canônica* T*).*

Teorema 2.6. *Se* $S: U \to V$ *e* $T: V \to W$ *transformações lineares, então* $(T \circ S): U \to W$ *também é uma transformação linear.*

Demonstração. Sejam $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então segue da linearidade de S e de T que

$$\begin{aligned} (T\circ S)(u+v) &= T(S(u+v)) = T(S(u)+S(v)) = T(S(u)) + T(S(v)) = (T\circ S)(u) + (T\circ S)(v) \\ (T\circ S)(\alpha u) &= T(S(\alpha u)) = T(\alpha S(u)) = \alpha(T(S(u)) = \alpha(T\circ S)(u) \end{aligned}$$

Portanto, $(T \circ S): U \to W$ é uma transformação linear. □

Teorema 2.7. *Sejam* $R: U \to V$, $S: U \to V$ *e* $T: V \to W$ *transformações lineares,* α, β *e* γ *bases ordenadas de* U, V *e* W, *respectivamente. Então,*

$$[R+S]_\beta^\alpha = [R]_\beta^\alpha + [S]_\beta^\alpha, \qquad [aR]_\beta^\alpha = a[R]_\beta^\alpha, \forall a \in \mathbb{R} \qquad e \qquad [T \circ S]_\gamma^\alpha = [T]_\gamma^\beta [S]_\beta^\alpha.$$

Demonstração. Dado $u \in U$, pelo o Teorema 2.5, temos que

$$[T \circ S(u)]_\gamma = [T \circ S]_\gamma^\alpha [u]_\alpha \quad e \quad [T(S(u))]_\gamma = [T]_\gamma^\beta [S(u)]_\beta.$$

Como

$$T \circ S(u) = T(S(u)) \quad e \quad [S(u)]_\beta = [S]_\beta^\alpha [u]_\alpha$$

temos que

$$[T \circ S(u)]_\gamma^\alpha [u]_\alpha = [T]_\gamma^\beta [S]_\beta^\alpha [u]_\alpha.$$

Assim, pela a unicidade das coordenadas, temos que

$$[T \circ S]_\gamma^\alpha = [T]_\gamma^\beta [S]_\beta^\alpha.$$

□

Assim, a matriz canônica da composicão de duas transformações lineares é o produto de suas matrizes canônicas na ordem apropriada.

2.2 Operadores Ortogonais

Um operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com a propriedade $||T(u)|| = ||u||$ de preservar comprimentos é denominado um operador ortogonal, ou seja, uma transformação que preserva medidas. Assim, por exemplo, as rotações em torno da origem e as reflexões em retas pela origem em $\mathbb{R}^2$ são operadores ortogonais.

Sejam V um espaço vetorial euclidiano e $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador ortogonal** se

$$TT^t = T^tT = I,$$

isto é, T é invertível com $T^{-1} = T^t$.

Teorema 2.8. *Sejam* V *um espaço vetorial e* $T : V \to V$ *um operador linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. T *é ortogonal.*

2. $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, *para todos* $u, v \in V$.

3. $||T(u)|| = ||u||$, *para todo* $u \in V$.

4. T *leva toda base ortonormal de* V *em alguma base ortonormal de* V.

Demonstração.

($1 \Leftrightarrow 2$) Basta observar que

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^t T(v)\rangle,\ \forall u, v \in V.$$

($2 \Rightarrow 3$) Basta notar que

$$||T(u)||^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = ||u||^2.$$

($3 \Rightarrow 4$) Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de V,

$$\begin{aligned}\langle T(u_i), T(u_j)\rangle &= \frac{1}{4}(||T(u_i) + T(u_j)||^2 - ||T(u_i) - T(u_j)||^2)\\ &= \frac{1}{4}(||u_i + u_j||^2 - ||u_i - u_j||^2) = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, $T(\beta) = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base ortonormal de V.

($4 \Rightarrow 2$) Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de V. Então $T(\beta) = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base ortonormal de V. Dados $u, v \in V$, existem únicos $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad e \quad v = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(u)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle T(u_i), T(u_j)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u_i, u_j\rangle\\ &= \langle u, u\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $T(\beta) = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base ortonormal de V.

□

Observamos que o ângulo entre dois vetores não-nulos x e y em $\mathbb{R}^n$ é dado pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}.$$

Assim, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador ortogonal, então, por preservar o comprimento de vetores e por preservar o produto escalar, segue que

$$\cos\theta = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{||T(u)||||T(v)||} = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}.$$

que implica que um operador ortogonal preserva ângulos. Em particular, um operador ortogonal preserva a ortogonalidade, ou seja, as imagens de dois vetores são ortogonais se, e somente se, os vetores originais são ortogonais.

Teorema 2.9. *Se* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é um operador linear ortogonal, então a matriz canônica de* T *pode ser expressa na forma*

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad ou \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Ou seja, T *é ou uma rotação em torno da origem ou uma reflexão numa reta pela origem.*

Demonstração. Suponhamos que T seja um operador linear de $\mathbb{R}^2$ e que sua matriz canônica seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Essa matriz é ortogonal, de modo que seus vetores- coluna são ortonormais.
Assim, $a^2 + c^2 = 1$, o que significa que o ponto $P(a, c)$ está no círculo unitário (Figura 2.5).

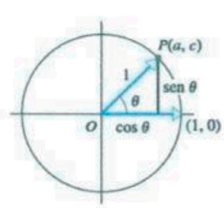


Figura 2.5: Círculo unitário

Tomando θ como o ângulo de $e_1 = (1,0)$ até o vetor $\overrightarrow{OP} = (a, c)$, podemos expressar a e c como

$$a = \cos\theta \quad e \quad c = \operatorname{sen}\theta$$

e podemos reescrever A como

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & d \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

A ortoganalidade de A também implica que o segundo vetor-coluna de A é orgonal ao primeiro e, portanto, o ângulo anti-horário de e_1, até o vetor $\overrightarrow{OQ} = (b, d)$, deve ser $\theta + \pi/2$ ou $\theta - \pi/2$ (Figura 6.2.2b)

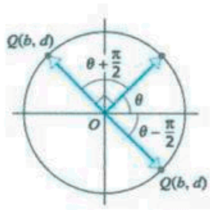


Figura 2.6: Círculo unitário

No primeiro caso temos

$$b = \cos(\theta + \pi/2) = -\operatorname{sen}\theta \quad e \quad d = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = -\cos\theta$$

e no segundo caso temos

$$b = \cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta \quad e \quad d = \operatorname{sen}(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$$

Substituindo essas expressões em (2.6) obtemos as duas formas possíveis de (2.5). □

Se A é uma matriz 2×2, então pelo Teorema 2.9 que o operador linear associado é ou uma rotação em torno da origem ou uma reflexão numa reta pela origem. O determinante de A pode ser usado para distinguir entre os dois casos,

$$det(R_\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

e

$$det(H_{\theta/2}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = -1.$$

Assim, uma matriz ortogonal 2×2 representa uma rotação se $det(A) = 1$ e uma reflexão se $det(A) = -1$.

2.3 Operadores Lineares que não Preservam Comprimento.

Contrações e Dilatações de $\mathbb{R}^2$

Se k é um escalar não-negativo, então o operador linear é dito uma **homotetia de razão** k. Em particular, esse operador é uma **contração** se $0 \leq k < 1$ e uma **dilatação** se $k > 1$. As contrações preservam a direção e sentido dos vetores mas reduzem seus comprimentos na razão de k e as dilatações preservam a direção e sentido dos vetores mas aumentam seus comprimentos na razão de k.

Compressões e Expansões Horizontais e Verticais de $\mathbb{R}^2$

Um operador$\mathrm{T}(x, y) = (kx, y)$ que multiplica a coordenada x de cada ponto do plano xy por uma constante não-negativa k tem o efeito de expandir ou comprimir cada figura do plano na direção x, comprimindo se $0 \leq\leq k < 1$ e expandindo se $k > 1$. Por isso dizemos que T é a compressão (ou expansão) na direção x de razão k. Analogamente, $\mathrm{T}(x, y) = (x, ky)$ é a compressão (ou expansão) na direção y de razão k.

Cisalhamentos

Um operador da forma $\mathrm{T}(x, y) = (x + ky, y)$ translada um ponto (x, y) do plano xy paralelamente ao eixo x por uma quantidade ky que é proporcional à coordenada y do ponto. Esse operador mantém fixos os pontos do eixo x (pois $y = 0$), mas, à medida que nos afastarmos do eixo x, aumentará a distância transladada. Dizemos que esse operador é o **cisalhamento na direção** x **de razão** k. Analogamente, um operador linear da forma $\mathrm{T}(x, y) = (x, y + kx)$ é dito um **cisalhamento na direção** y **de razão** k.

1. Cisalhamento de $\mathbb{R}^2$ na direção x de razão k

$$\mathrm{T}(x, y) = (x + ky, y)$$

A sua maatriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Cisalhamento de $\mathbb{R}^2$ na direção y de razão k

$$\mathrm{T}(x, y) = (x, y + kx)$$

A sua maatriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

Computação Gráfica e Matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D - duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

3.1 As Transformações Geométricas

A palavra transformação usualmente significa mudança. É, portanto, natural pensar que, ao falar em "transformação geométrica", fala-se de mudanças em figuras geométricas.

Principais Transformações no Plano

$$\text{Transformações Geométricas}\begin{cases}\text{Isometria}\begin{cases}\text{Reflexão}\\ \text{Translação}\\ \text{Rotação}\end{cases}\\ \text{Não isometria}\begin{cases}\text{Homotetia}\end{cases}\end{cases}$$

3.2 Isometrias

Quando se aplica uma transformação a uma figura de modo que ela apenas possa ocupar outro lugar no plano, sem alterar sua forma e tamanho original, dizemos que a transformação aplicada é uma **isometria**, pois **iso** quer dizer igual, e **metria** está relacionada a medida.

Dada uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ se T for uma **Isometria**, então a distância entre os pontos P e Q, $d(P,Q)$, será igual à distância entre os pontos T(P) e T(Q), $d((T(P), T(Q))$.

Consideramos a distância entre pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que une estes dois pontos, ou seja

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Uma Isometria é uma transformação geométrica que preserva distância entre pontos e amplitude dos ângulos, isto é, a figura inicial e o seu transformado são congruentes.

Há três tipos básicos de isometrias: as reflexões, as translações e as rotações.

Reflexões

As reflexões podem se dar em relação a um ponto ou a uma reta.

- **A reflexão do ponto** P **com relação a um ponto** A. É um ponto P′ tal que P, A e P′ são colineares e

$$d(P',A) = d(P,A). \tag{3.1}$$

Assim, dadas os pontos $P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $P' = (x', y')$, podemos obter a expressão para esta reflexão, a partir de (3.1).

Da Figura 3.1, podemos escrever:

$$(x', y') = (x_0, y_0) + (x_0 - x, y_0 - y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$$

e portanto, a transformação pode ser escrita como:

$$T((x, y)) = (x', y') = (2x_0 - x, 2y_0 - y) \tag{3.2}$$

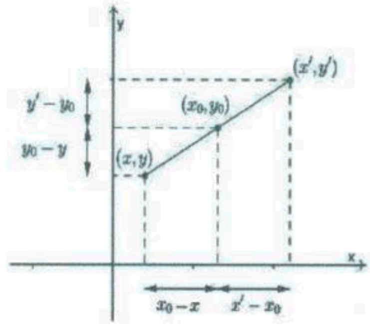


Figura 3.1: Reflexão em relação a um ponto

Exemplo 3.2.1. *A reflexão do ponto* (x, y) *em relação à origem* $(0,0)$ *será dada por:*

$$T((x,y)) = (2\cdot 0 - x, 2\cdot 0 - y) = (-x,-y).$$

- **A reflexão do ponto** P **com relação a uma reta** l, é um ponto P′ tal que o segmento PP′ é perpendicular a l e

$$d(P',l) = d(P,l).$$

Podemos obter a expressão algébrica para esta transformação, tomando as coordenadas de $P = (x_0, y_0)$ e $P' = (x', y')$ e considerando α o ângulo que l faz com o eixo x medido no sentido anti-horário.

Assim, a equação cartesiana da reta l é : $y = (\tan\alpha)x + c$, onde $(0,c) = \left(0, \frac{c}{\cos\alpha}\right)$ é o ponto em que l corta o eixo x. Logo,

$$(-\operatorname{sen}\alpha)x + (\cos\alpha)y = c \tag{3.3}$$

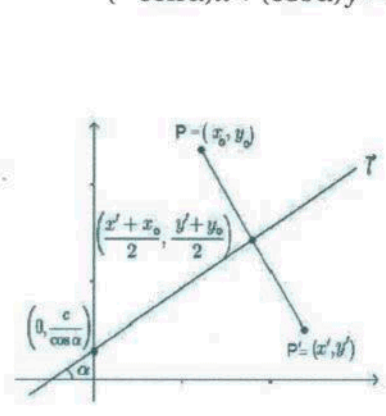


Figura 3.2: Reflexão em relação a uma reta

Por outro lado, a reta que une (x_0, y_0) a (x', y'), que é perpendicular a l, é dada por $y = \tan(90° + \alpha)x + K = (-\cot\alpha)x + K$, onde $K = (\cot\alpha)x_0 + y_0$. Logo,

$$(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)y = x_0\cos\alpha + y_0\operatorname{sen}\alpha. \tag{3.4}$$

Do fato da reta l ser a mediatriz do segmento que une o ponto P ao ponto refletido P$'$, como se vê na Figura 3.2, então, o ponto médio desse segmento,

$$(m, n) = \left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) \tag{3.5}$$

será solução das equações (3.3) e (3.4). Assim,

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} (-\operatorname{sen}\alpha)m & + & (\cos\alpha)n & = & c \\ (\cos\alpha)m & + & (\operatorname{sen}\alpha)n & = & x_0\cos\alpha + y_0\operatorname{sen}\alpha. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Portanto, resolvendo o sistema anterior temos:

$$\begin{aligned} (m, n) &= (x_0\cos^2\alpha + y_0\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - c\operatorname{sen}\alpha, y_0\operatorname{sen}^2\alpha + x_0\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + c\cos\alpha) \\ &= (x_0\cos^2\alpha + y_0\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2} - c\operatorname{sen}\alpha, x_0\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2} + y_0\operatorname{sen}^2\alpha + c\cos\alpha) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comparando as igualdades (3.5) e (3.7), obtemos para (x', y') a seguinte representação algébrica da reflexão:

$$\begin{aligned} (x', y') &= T((x_0, y_0)) = (2m - x_0, 2n - y_0) \\ &= (2x_0\cos^2\alpha + y_0\operatorname{sen}2\alpha - 2c\operatorname{sen}\alpha - x_0, x_0\operatorname{sen}2\alpha + 2y_0\operatorname{sen}^2\alpha + 2c\cos\alpha - y_0) \\ &= (x_0(2\cos^2\alpha - 1) + y_0\operatorname{sen}2\alpha - 2c\operatorname{sen}\alpha, x_0\operatorname{sen}2\alpha + y_0(2\operatorname{sen}^2\alpha - 1) + 2c\cos\alpha) \\ &= (x_0\cos2\alpha + y_0\operatorname{sen}2\alpha - 2c\operatorname{sen}\alpha, x_0\operatorname{sen}2\alpha - y_0\cos2\alpha + 2c\cos\alpha) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Exemplo 3.2.2. *A reflexão do ponto (x, y) em relação ao eixo x em que $\alpha = 0$ e $c = 0$, será dada por:*

$$\begin{aligned} T((x, y)) &= (x\cos2\cdot0 + y\operatorname{sen}2\cdot0 - 2\cdot0\operatorname{sen}0, x\operatorname{sen}2\cdot0 - y\cos2\cdot0 + 2\cdot0\cos0) \\ &= (x, -y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Exemplo 3.2.3. *A reflexão do ponto (x, y) em relação ao eixo y em que $\alpha = \pi/2$ e $c = 0$, será dada por:*

$$\begin{aligned} (x', y') &= T(x, y) \\ &= (x\cos2\cdot(\pi/2) + y\operatorname{sen}2\cdot(\pi/2) - 2\cdot0\operatorname{sen}(\pi/2), x\operatorname{sen}2\cdot(\pi/2) - y\cos2\cdot(\pi/2) + 2\cdot0\cos(\pi/2)) \\ &= (-x, y) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Exemplo 3.2.4. *A reflexão do ponto (x, y) em relação a reta $y = x$ em que $\alpha = \pi/4$ e $c = 0$, será dada por:*

$$\begin{aligned}
(x', y') &= \mathrm{T}(x, y) \\
&= (x\cos 2\cdot(\pi/4) + y\operatorname{sen} 2\cdot(\pi/4) - 2\cdot 0\operatorname{sen}(\pi/4), x\operatorname{sen} 2\cdot(\pi/4) - y\cos 2\cdot(\pi/4) + 2\cdot 0\cos(\pi/4)) \\
&= (y, x) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Translações

Uma translação é uma transformação geométrica que leva cada ponto do plano a um novo ponto segundo uma trajetória representada por um segmento de reta de tamanho fixo e que faz também um ângulo fixo em relação à horizontal. Ou seja, dado um segmento AB, a imagem de um ponto P será o ponto transladado Q = T(P) tal que o segmento PQ terá o mesmo comprimento de AB e mesmo ângulo em relação à horizontal, conforme a Figura 3.3

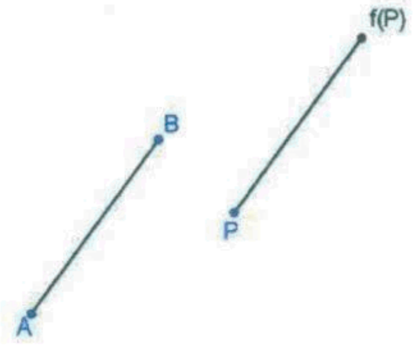


Figura 3.3: Translação do ponto P segundo o segmento AB

Algebricamente, se consideramos o ponto A de coordenadas (x_1, y_1) e o ponto B de coordenadas (x_2, y_2), observamos, conforme a Figura 3.4, que, de acordo com a definição, para que o ponto $Q = (x', y')$ seja a translação do ponto P de coordenadas (x, y) segundo o segmento AB, os triângulos ABC e PQM devem ser congruentes e portanto:

$$m(\mathrm{AC}) = (x_2 - x_1) = m(\mathrm{PM}) = (x' - x)$$

e

$$m(\mathrm{CB}) = (y_2 - y_1) = m(\mathrm{MQ}) = (y' - y),$$

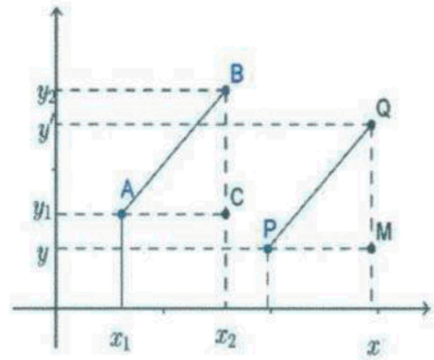


Figura 3.4: Translação do ponto P segundo o segmento AB

o que nos leva à expressão:

$$(x', y') = \mathrm{T}((x, y)) = (x + x_2 - x_1, y + y_2 - y_1) \tag{3.12}$$

Exemplo 3.2.5. *Se o ponto* A *tem coordenadas* $(1,3)$ *e o ponto* B *tem coordenadas* $(2,8)$, *a translação (3.12) segundo o segmento* AB *será dada por:*

$$\mathrm{T}((x, y)) = (2 - 1 + x, 8 - 3 + y) = (1 + x, 5 + y) \tag{3.13}$$

Rotações

Nas rotações, cada ponto P do plano é levado a um novo ponto P′ sobre um arco de circunferência centrado em um centro de rotação C, em um sentido fixo e com um ângulo θ também fixo.

Na Figura 3.5,

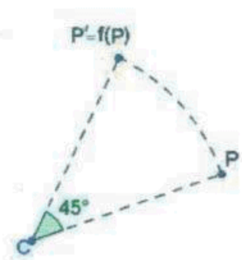


Figura 3.5: Rotação de 45° do ponto P com centro de rotação C

por exemplo, o ponto $\mathrm{P}' = \mathrm{T}(\mathrm{P})$ é a imagem do ponto P pela rotação de 45° no sentido anti-horário com centro de rotação C.

Para determinarmos algebricamente a rotação de um ângulo fixo θ com centro de rotação no ponto C de coordenadas (x_1, y_1) no sentido anti-horário, vamos primeiro considerar o caso mais simples em que a rotação se da em torno da origem O.

- **Rotação em torno da Origem**. Conforme a Figura 3.6, tem-se um ponto P em que o segmento OP faz um ângulo α em relação ao eixo x.

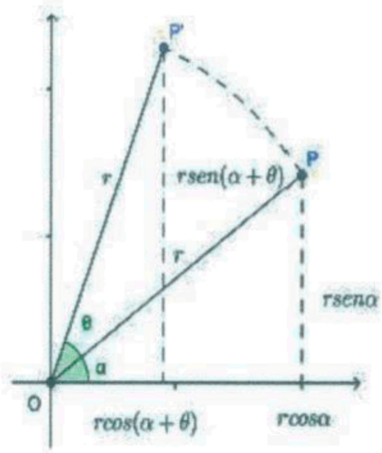


Figura 3.6: Rotação de um ponto P de um ângulo θ em torno da origem

Dessa forma, as coordenadas de P podem ser escritas como $(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ em que r representa a medida do segmento OP. Sendo $P' = (x', y')$ a imagem de P pela rotação de um ângulo θ em relação a O, suas coordenadas serão dadas por:

$$\begin{aligned}
(x', y') &= T((x, y)) = (r\cos(\alpha+\theta), r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)) \\
&= (r(\cos\alpha\cos\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta), r(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha)) \\
&= (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

- **Rotação em torno de um ponto** C. Para o caso em que o centro de rotação é o ponto $C = (x_1, y_1)$, vamos calcular a rotação, como anteriormente, considerando C como a origem e depois faremos uma translação.

  Isto é, considerando as coordenadas de $P = (x - x_1, y - y_1)$ como na Figura 3.7, então a expressão 3.14 toma a forma:

$$(x', y') = ((x - x_1)\cos\theta - (y - y_1)\,\mathrm{sen}\,\theta, (x - x_1)\cos\theta + (y - y_1)\,\mathrm{sen}\,\theta). \qquad (3.15)$$

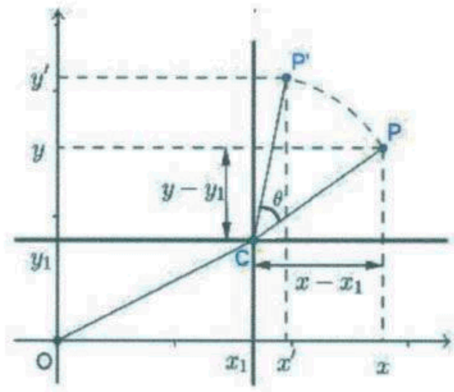


Figura 3.7: Rotação de um ponto P de um ângulo θ com centro de rotação C

Porém, as coordenadas de (x', y') conforme (3.15) consideram C como origem. Para fazer a translação, adicionamos as coordenadas de C em relação à origem O conforme mostra a Figura 3.7, obtendo assim a expressão algébrica que representa a rotação de um ângulo θ com centro de rotação $C = (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned}(x', y') &= T((x, y)) \\ &= (x_1 + (x - x_1)\cos\theta - (y - y_1)\operatorname{sen}\theta, y_1 + (x - x_1)\operatorname{sen}\theta + (y - y_1)\cos\theta). \quad (3.16)\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.6. *Se consideramos como centro de rotação o ponto C de coordenadas $(1, 1)$, a expressão para a rotação do ponto P de coordenadas (x, y) de um ângulo de $90°$ no sentido anti-horário será dada por:*

$$\begin{aligned}T((x, y)) &= (1 + (x - 1)\cos 90° - (y - 1)\operatorname{sen} 90°, 1 + (x - 1)\operatorname{sen} 90° + (y - 1)\cos 90°) \\ &= (1 - y + 1, 1 + x - 1) \\ &= (2 - y, x) \quad (3.17)\end{aligned}$$

3.3 Homotetia

Trata-se de uma transformação que não preserva distâncias, é uma ampliação ou redução da figura original, ou seja, uma semelhança que preserva ou inverte o posicionamento da figura, pois **homo** significa mesmo e **tetia** esta relacionada ao posicionamento.

A transformação que leva um ponto $P = (x, y)$ do plano num ponto $P' = (kx, ky)$ sendo k um número real, é chamada homotetia de razão k e centro na origem. Representaremos algebricamente como

$$\mathrm{T}((x, y)) = (kx, ky) \tag{3.18}$$

Exemplo 3.3.1. *Se tomamos como domínio o conjunto de pontos pertencentes aos lados do triângulo de vértice* $(1,1)$, $(3,1)$ *e* $(2,2)$, *como na Figura 3.8*

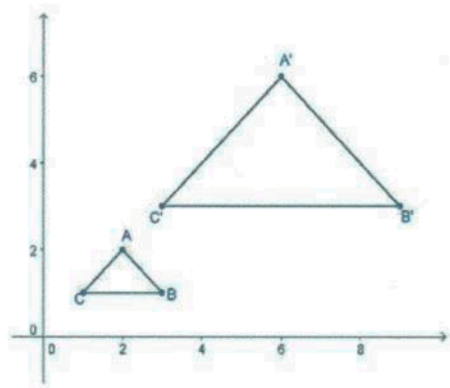


Figura 3.8: O $\triangle A'B'C'$ é a imagem $\triangle ABC$ pela homotetia $\mathrm{T}((x, y)) = (3x, 3y)$.

ao considerarmos a imagem dos pontos deste domínio pela homotetia

$$\mathrm{T}((x, y)) = (3x, 3y),$$

obtemos um conjunto de pontos que formam um triângulo de vértices $\mathrm{T}(1,1) = (3,3)$, $\mathrm{T}(3,1) = (9,3)$ *e* $\mathrm{T}(2,2) = (6,6)$ *que será semelhante ao triângulo do domínio. Pode-se pensar, por exemplo, em atividades que trabalhem com os conceitos de semelhança de triângulos, e que utilizem conceitos de geometria analítica para analisar as distâncias entre os vértices e verificar a razão entre os comprimentos dos lados.*

Observação 3.1. *É interessante notar que esta transformação pode ser utilizada em atividades que envolvam figuras semelhantes.*

- *Se* $|k| < 1$, *as figuras obtidas por essa transformação serão encurtadas em relação à original.*
- *Se* $|k| > 1$, *elas serão aumentadas.*
- *Se* $k = -1$, *a homotetia equivale a uma reflexão em relação à origem.*

A Representação de Transformações Geométricas por Matrizes

As transformações geométricas se apresentam como recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e suas operações. A seguir, representamos os pares ordenados do plano por matrizes coluna e as transformações geométricas do plano, estudadas nas seções anteriores, por matrizes.

Exemplo 3.3.2. *A reflexão dada em (3.2) em relação ao ponto* $P = (x_0, y_0)$ *pode ser representada de forma semelhante pela equação matricial:*

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3.3. *A translação dada em (3.12) por um segmento AB, que se constitui na transformação mais simples de se trabalhar, com a notação matricial pode ser descrita como:*

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Exemplo 3.3.4. *A rotação dada em (3.16) por um segmento AB, que se constitui na transformação mais simples de se trabalhar, com a notação matricial pode ser descrita como:*

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Exemplo 3.3.5. *E a homotetia dada em (3.18) de razão k com centro na origem aparece na forma da equação*

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

3.4 Computação Gráfica

As imagens em uma tela de computador são na verdade formadas por pequenos pontos (pixels) que são elementos de uma matriz. Quando um programa gráfico altera a posição da imagem, gira a imagem ou muda a escala da imagem, na verdade está mudando a posição dos pixels que a formam. Isso tudo é feito por operações de matrizes, e em computação gráfica é o que se chama de transformação geométrica.

Estruturas

Vamos nos ocupar com a representação na tela de imagens gráficas compostas de um número finito de pontos ligados por segmentos de retas.

Os pontos são denominados **vértices**, os segmentos de arestas e um objeto formado de arestas e vértices é uma **estrutura**.

Exemplo 3.4.1. *A Figura 3.9 a mostra a estrutura de uma "casa caída".*

Os objetos com fronteiras curvas podem ser aproximados por estruturas escolhendo pontos bem próximos uns dos outros ao longo das curvas e conectando esses pontos por segmentos de retas.

Para um computador desenhar uma estrutura, precisamos fornecer as coordenadas dos vértices em algum sistema de coordenadas junto com a informação de quais vértices são ligados por arestas.

Exemplo 3.4.2. *A estrutura na Figura 3.9b tem os mesmos vértices da casa, mas parece diferente porque seus vértices estão ligados de maneira diferente.*

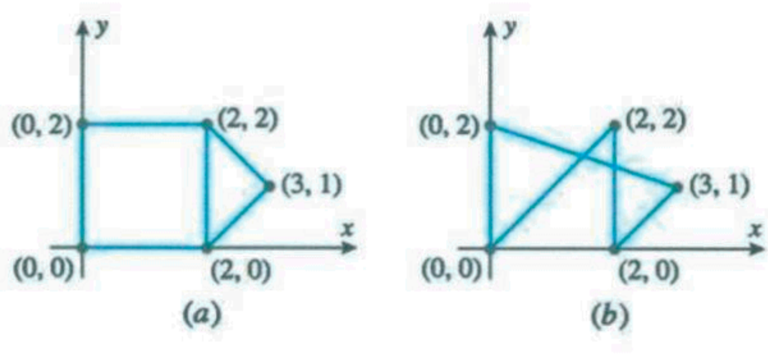


Figura 3.9:

Representação Matricial de Estruturas

Uma maneira conveniente de armazenar a posição dos vértices de uma estrutura é formar a **matriz de vértices** V que tem as coordenadas dos vértices como vetores-coluna.

Exemplo 3.4.3. *Os vértices da estrutura na Figura 3.9 podem ser armazenados como*

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

A ordem na qual os vértices são listados numa matriz de vértices é irrelevante; contudo, uma vez escolhida uma ordem para os n vértices de uma estrutura, a informação de como estes vértices estão conectados pode ser armazenada numa **matriz de conexões** C de tamanho $n \times n$ na qual a entrada da linha i e coluna j é 1 se o vértice da i-ésima coluna de V está conectado ao vértice da j-ésima coluna e é 0 caso esses vértices não estejam ligados. (Concordamos que cada vértice está ligado a si mesmo, de modo que todos os elementos da diagonal são sempre iguais a 1.)

Exemplo 3.4.4. *A informação das conexões para a casa na Figura 3.9a pode ser armazenada como*

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Observação 3.2. *As matrizes de conexões são sempre simétricas. Assim, para uso eficaz do espaço em disco do computador, precisamos armazenar apenas as entradas acima ou abaixo da diagonal principal.*

Transformando Estruturas

Agora consideraremos a transformação de estruturas que resulta aplicando uma transformação linear invertível à sua matriz de vértices. Suponhamos que a matriz de conexões subjacente da estrutura é conhecida e que as ligações dos vértices transformados são descritas pela mesma matriz.

Exemplo 3.4.5. *A casa caída da Figura 3.10a pode ser colocada de pé como na Figura 3.10b pela rotação dos vértices de sua matriz de vértices por* 90° *no sentido anti-horário; a matriz canônica dessa rotação é*

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\mathrm{sen}(90^\circ) \\ \mathrm{sen}(90^\circ) & (90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Podemos efetuar todas as rotações de uma só vez multiplicando a matriz de vértices V *de*

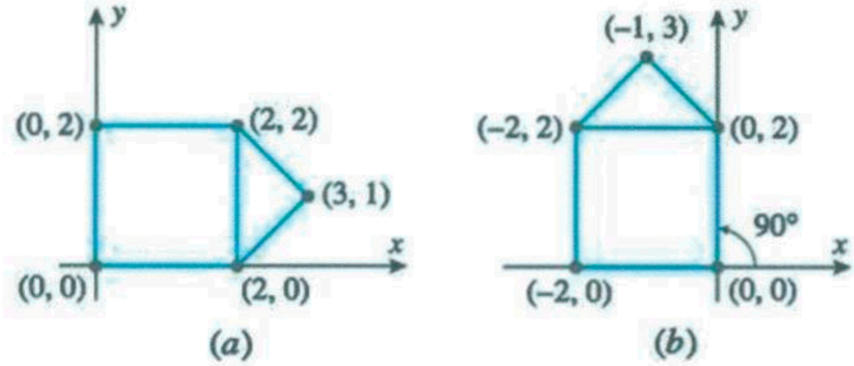


Figura 3.10:

(3.22) à esquerda por R. *Assim, a matriz de vértices* V_1 *da casa de pé é*

$$V_1 = RV = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

o que é consistente com a Figura 3.10b. Analogamente, poderíamos refletir, projetar, comprimir, expandir ou submeter a casa a um cisalhamento com a multiplicação à esquerda de sua matriz de vértices pela matriz da transformação apropriada.

Translação usando coordenadas homogêneas.

Embora a translação seja uma operação importante na computação gráfica, ela apresenta um problema na medida em que não é um operador linear e, portanto, não é um operador matricial. Assim, por exemplo, não existe matriz 2×2 que translade vetores de $\mathbb{R}^2$ pela multiplicação matricial e, analogamente, nenhuma matriz 3×3 que translade vetores em $\mathbb{R}^3$. Felizmente, existe uma maneira de contornar esse problema usando o seguinte teorema relativo a matrizes em blocos.

Teorema 3.1. *Se* x *e* x_0 *são vetores em* $\mathbb{R}^n$ *e se* I_n *é a matriz identidade* $n \times n$ *, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_0 + x \\ \hline 1 \end{array}\right] \tag{3.26}$$

Demonstração. Pela convenção usual de escrever escalares como matrizes 1×1, temos

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_n x + x_0 \\ \hline 0 + 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_0 + x \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

□

Esse teorema diz que modificando x e $x_0 + x$ pela adjunção de um componente adicional igual a 1, existe uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ que transforma o vetor x modificado no vetor $x_0 + x$ modificado pela multiplicação matricial. Uma vez calculado o vetor $x_0 + x$ modificado, podemos ignorar o componente final 1 e obter o vetor transladado $x_0 + x$ em $\mathbb{R}^n$.

A terminologia associada é a seguinte: dado um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, dizemos que o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$ modificado em $\mathbb{R}^{n+1}$ representa o vetor x em **coordenadas homogêneas**.

Exemplo 3.4.6. *O ponto $x = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ é representado por $(x, y, 1)$ em coordenadas homogêneas e o ponto $x = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ é representado por $(x, y, z, 1)$ em coordenadas homogêneas.*

Exemplo 3.4.7. *(Translação por Multiplicação Matricial) A translação do vetor $x = (x, y)$ por $x_0 = (h, k)$ produz o vetor $x + x_0 = (x + h, y + k)$. Usando o Teorema 3.1, podemos efetuar essa conta em coordenadas homogêneas como*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x+h \\ y+k \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

O vetor transladado pode agora ser recuperado ignorando o 1 final.

Exemplo 3.4.8. *(Transladando uma estrutura por Multiplicação Matricial) Use multiplicação matricial para transladar a casa de pé da Figura 3.11a para a posição mostrada na 3.11b.*

Uma matriz de vértices da casa de pé é

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para transladar a casa à posição desejada precisamos transladar cada vetor-coluna de V_1 *por*

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 3.1, essas translações podem ser obtidas em coordenadas homogêneas pela multiplicação

$$\left[\begin{array}{c|c} I_2 & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3.27}$$

Convertendo os vetores-coluna de V_1 *para coordenadas homogêneas, podemos transladar todos os vértices de uma vez com a única multiplicação matricial*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Abandonando as entradas iguais a 1 da terceira linha do produto, obtemos a matriz de vértices V_2 *da casa transladada, a saber,*

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

O que é consistente com a Figura 3.11.

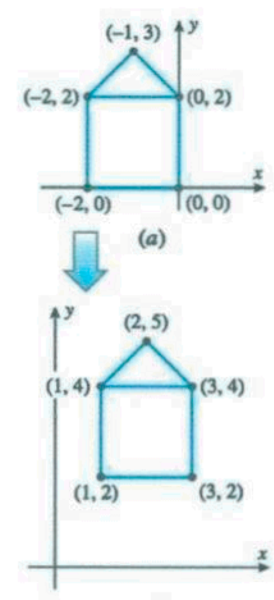


Figura 3.11:

Agora sabemos executar todas as transformações básicas da computação gráfica usando apenas a multiplicação matricial. Contudo, a translação ainda destoa das demais pois usa uma matriz de tamanho diferente; por exemplo, uma rotação em $\mathbb{R}^2$ é executada por uma matriz 2×2, enquanto que uma translação necessita de uma matriz 3×3. Isso constitui um problema, pois torna impossível compor a translação com outras transformações pela multiplicação de matrizes. Uma saída para eliminar essa discrepância de tamanhos é executar todas as transformações básicas em coordenadas homogêneas.

Teorema 3.2. *Se* A *é uma matriz* $n \times n$ *e* x *é um vetor em* $\mathbb{R}^n$ *dado em forma de vetor-coluna, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} Ax \\ \hline 1 \end{array}\right] \tag{3.28}$$

Exemplo 3.4.9. *(Uma Rotação em Coordenadas Homogênea) Aplicando uma rotação em torno da origem por um ângulo de* θ *ao vetor* $x = (x, y)$*, o vetor resultante em forma de coluna é*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Usando o Teorema 3.2, podemos fazer essa conta em coordenadas homogêneas por

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

Isso é consistente com (3.29) quando ignoramos o 1 final.

Exemplo 3.4.10. *A Figura 3.12, que é uma combinação das Figuras 3.10 e 3.11, mostra uma estrutura para uma casa caída que primeiro é girada 90° para a posição vertical e depois transladada para uma nova posição. A rotação foi executada no Exemplo 3.4.5 usando a matriz* R *em (3.24) e a translação foi executada no Exemplo 3.4.7 usando a matriz* T *de tamanho* 3×3 *em (3.27). Para compor essas transformações e executar a composição com uma única multiplicação matricial em coordenadas homogêneas, devemos primeiro expressar a matriz de rotação* R *do Exemplo 3.4.5 por,*

$$R' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como a matriz da translação em coordenadas homogêneas é

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a composição da translação com a rotação pode ser executada em coordenadas homogêneas pela multiplicação da matriz de vértices em coordenadas homogêneas por

$$TR' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isso fornece

$$TR' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que, uma vez ignoradas as entradas 1 no final, é consistente com a Figura 3.12.

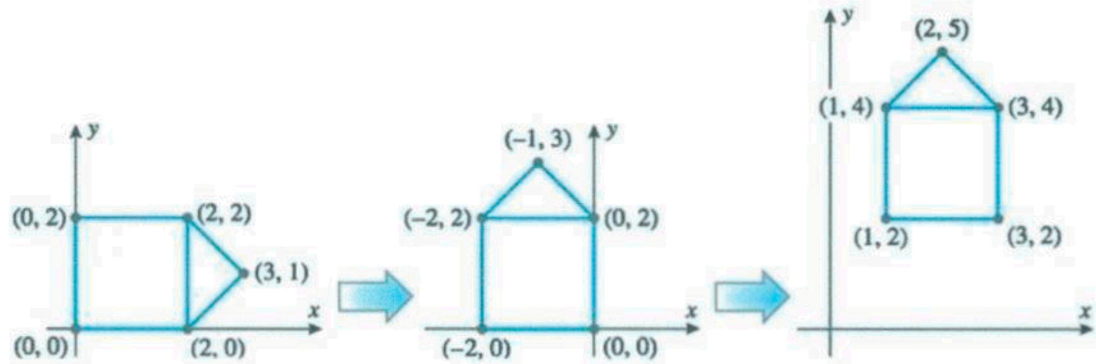


Figura 3.12:

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. *Álgebra linear com aplicações.* 8.ed. Porto Alegre. Bookman, 2001.

[2] ANTON, H. *Álgebra linear contemporânea.* 8.ed. Porto Alegre. Bookman, 2007.

[3] BOYER, C.B. *História da Matemática.* São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

[4] BOLDRINI, J. L. *Álgebra linear.* Harper & Row do Brasil, 1980.

[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.

[6] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra Linear.* 3ª ed João Pessoa: Editora Edgard Blücher Ltda, 1988.

[7] LIMA, E.L. *Álgebra Linear.* 7ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2008.

[8] SILVA, A. A. *Introdução à Álgebra Linear.* João Pessoa: Ed. Universitária/UFPB, 2007.

[9] STEINBRUCH, A. *Álgebra linear.* 2ª ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 1987.

äéâαÜ©âα8éä8éÇ©Çä@Çτ⌐ÿ♣∩}↑♠≤Ptéÿπ

Estruturas

Vamos nos ocupar com a representação na tela de imagens gráficas compostas de um número finito de pontos ligados por segmentos de retas.

Os pontos são denominados **vértices**, os segmentos de arestas e um objeto formado de arestas e vértices é uma **estrutura**.

Exemplo 3.4.1. *A Figura 3.9 a mostra a estrutura de uma "casa caída".*

Os objetos com fronteiras curvas podem ser aproximados por estruturas escolhendo pontos bem próximos uns dos outros ao longo das curvas e conectando esses pontos por segmentos de retas.

Para um computador desenhar uma estrutura, precisamos fornecer as coordenadas dos vértices em algum sistema de coordenadas junto com a informação de quais vértices são ligados por arestas.

Exemplo 3.4.2. *A estrutura na Figura 3.9b tem os mesmos vértices da casa, mas parece diferente porque seus vértices estão ligados de maneira diferente.*

A ordem na qual os vértices são listados numa matriz de vértices é irrelevante; contudo, uma vez escolhida uma ordem para os n vértices de uma estrutura, a informação de como estes vértices estão conectados pode ser armazenada numa **matriz de conexões** C de tamanho $n \times n$ na qual a entrada da linha i e coluna j é 1 se o vértice da i-ésima coluna de V está conectado ao vértice da j-ésima coluna e é 0 caso esses vértices não estejam ligados. (Concordamos que cada vértice está ligado a si mesmo, de modo que todos os elementos da diagonal são sempre iguais a 1.)

Exemplo 3.4.4. *A informação das conexões para a casa na Figura 3.9a pode ser armazenada como*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Observação 3.2. *As matrizes de conexões são sempre simétricas. Assim, para uso eficaz do espaço em disco do computador, precisamos armazenar apenas as entradas acima ou abaixo da diagonal principal.*

Transformando Estruturas

Agora consideraremos a transformação de estruturas que resulta aplicando uma transformação linear invertível à sua matriz de vértices. Suponhamos que a matriz de conexões subjacente da estrutura é conhecida e que as ligações dos vértices transformados são descritas pela mesma matriz.

Exemplo 3.4.5. *A casa caída da Figura 3.10a pode ser colocada de pé como na Figura 3.10b pela rotação dos vértices de sua matriz de vértices por* $90°$ *no sentido anti-horário; a matriz canônica dessa rotação é*

$$R = \begin{bmatrix} \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) \\ \operatorname{sen}(90°) & (90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Podemos efetuar todas as rotações de uma só vez multiplicando a matriz de vértices V *de*

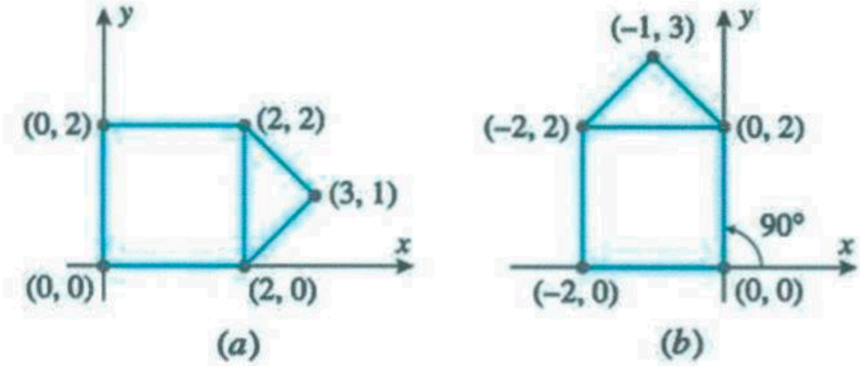


Figura 3.10:

(3.22) à esquerda por R. *Assim, a matriz de vértices* V_1 *da casa de pé é*

$$V_1 = RV = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

o que é consistente com a Figura 3.10b. Analogamente, poderíamos refletir, projetar, comprimir, expandir ou submeter a casa a um cisalhamento com a multiplicação à esquerda de sua matriz de vértices pela matriz da transformação apropriada.

Translação usando coordenadas homogêneas.

Embora a translação seja uma operação importante na computação gráfica, ela apresenta um problema na medida em que não é um operador linear e, portanto, não é um operador matricial. Assim, por exemplo, não existe matriz 2×2 que translade vetores de $\mathbb{R}^2$ pela multiplicação matricial e, analogamente, nenhuma matriz 3×3 que translade vetores em $\mathbb{R}^3$. Felizmente, existe uma maneira de contornar esse problema usando o seguinte teorema relativo a matrizes em blocos.

Teorema 3.1. *Se* x *e* x_0 *são vetores em* $\mathbb{R}^n$ *e se* I_n *é a matriz identidade* $n \times n$ *, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline \mathit{1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_0 + x \\ \hline 1 \end{array}\right] \tag{3.26}$$

Demonstração. Pela convenção usual de escrever escalares como matrizes 1×1, temos

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_n x + x_0 \\ \hline 0+1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_0 + x \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

□

Esse teorema diz que modificando x e $x_0 + x$ pela adjunção de um componente adicional igual a 1, existe uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ que transforma o vetor x modificado no vetor $x_0 + x$ modificado pela multiplicação matricial. Uma vez calculado o vetor $x_0 + x$ modificado, podemos ignorar o componente final 1 e obter o vetor transladado $x_0 + x$ em $\mathbb{R}^n$.

A terminologia associada é a seguinte: dado um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, dizemos que o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$ modificado em $\mathbb{R}^{n+1}$ representa o vetor x em **coordenadas homogêneas**.

Exemplo 3.4.6. *O ponto $x = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ é representado por $(x, y, 1)$ em coordenadas homogêneas e o ponto $x = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ é representado por $(x, y, z, 1)$ em coordenadas homogêneas.*

Exemplo 3.4.7. *(Translação por Multiplicação Matricial) A translação do vetor $x = (x, y)$ por $x_0 = (h, k)$ produz o vetor $x + x_0 = (x + h, y + k)$. Usando o Teorema 3.1, podemos efetuar essa conta em coordenadas homogêneas como*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x+h \\ y+k \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

O vetor transladado pode agora ser recuperado ignorando o 1 final.

Exemplo 3.4.8. *(Transladando uma estrutura por Multiplicação Matricial) Use multiplicação matricial para transladar a casa de pé da Figura 3.11a para a posição mostrada na 3.11b.*

Uma matriz de vértices da casa de pé é

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para transladar a casa à posição desejada precisamos transladar cada vetor-coluna de V_1 por

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 3.1, essas translações podem ser obtidas em coordenadas homogêneas pela multiplicação

$$\left[\begin{array}{c|c} I_2 & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3.27}$$

Convertendo os vetores-coluna de V_1 *para coordenadas homogêneas, podemos transladar todos os vértices de uma vez com a única multiplicação matricial*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Abandonando as entradas iguais a 1 da terceira linha do produto, obtemos a matriz de vértices V_2 *da casa transladada, a saber,*

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

O que é consistente com a Figura 3.11.

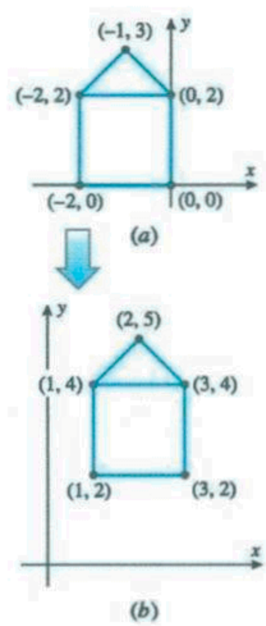


Figura 3.11:

Agora sabemos executar todas as transformações básicas da computação gráfica usando apenas a multiplicação matricial. Contudo, a translação ainda destoa das demais pois usa uma matriz de tamanho diferente; por exemplo, uma rotação em $\mathbb{R}^2$ é executada por uma matriz 2×2, enquanto que uma translação necessita de uma matriz 3×3. Isso constitui um problema, pois torna impossível compor a translação com outras transformações pela multiplicação de matrizes. Uma saída para eliminar essa discrepância de tamanhos é executar todas as transformações básicas em coordenadas homogêneas.

Teorema 3.2. *Se* A *é uma matriz $n \times n$ e x é um vetor em $\mathbb{R}^n$ dado em forma de vetor-coluna, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} Ax \\ \hline 1 \end{array}\right] \tag{3.28}$$

Exemplo 3.4.9. *(Uma Rotação em Coordenadas Homogênea) Aplicando uma rotação em torno da origem por um ângulo de θ ao vetor $x = (x, y)$, o vetor resultante em forma de coluna é*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Usando o Teorema 3.2, podemos fazer essa conta em coordenadas homogêneas por

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

Isso é consistente com (3.29) quando ignoramos o 1 final.

Exemplo 3.4.10. *A Figura 3.12, que é uma combinação das Figuras 3.10 e 3.11, mostra uma estrutura para uma casa caída que primeiro é girada 90° para a posição vertical e depois transladada para uma nova posição. A rotação foi executada no Exemplo 3.4.5 usando a matriz* R *em (3.24) e a translação foi executada no Exemplo 3.4.7 usando a matriz* T *de tamanho 3×3 em (3.27). Para compor essas transformações e executar a composição com uma única multiplicação matricial em coordenadas homogêneas, devemos primeiro expressar a matriz de rotação* R *do Exemplo 3.4.5 por,*

$$\mathrm{R}' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como a matriz da translação em coordenadas homogêneas é

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & x_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a composição da translação com a rotação pode ser executada em coordenadas homogêneas pela multiplicação da matriz de vértices em coordenadas homogêneas por

$$TR' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isso fornece

$$TR' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que, uma vez ignoradas as entradas 1 no final, é consistente com a Figura 3.12.

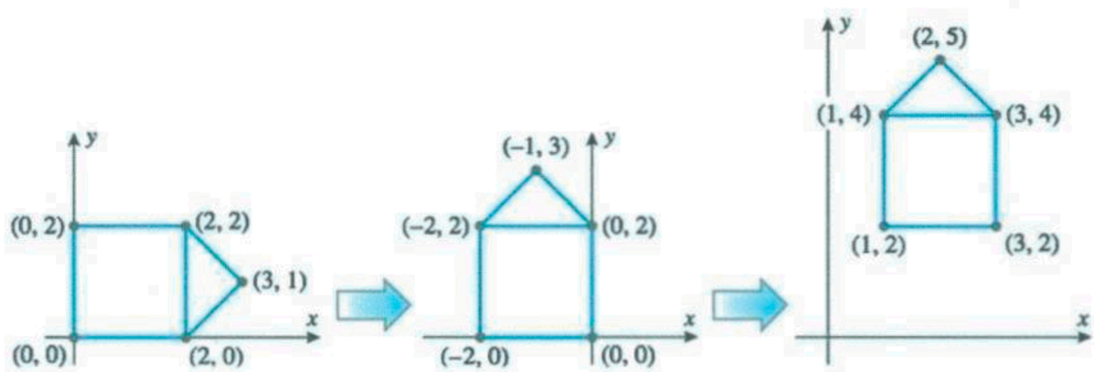


Figura 3.12:

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. *Álgebra linear com aplicações.* 8.ed. Porto Alegre. Bookman, 2001.

[2] ANTON, H. *Álgebra linear contemporânea.* 8.ed. Porto Alegre. Bookman, 2007.

[3] BOYER, C.B. *História da Matemática.* São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

[4] BOLDRINI, J. L. *Álgebra linear.* Harper & Row do Brasil, 1980.

[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.

[6] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra Linear.* 3ª ed João Pessoa: Editora Edgard Blücher Ltda, 1988.

[7] LIMA, E.L. *Álgebra Linear.* 7ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2008.

[8] SILVA, A. A. *Introdução à Álgebra Linear.* João Pessoa: Ed. Universitária/UFPB, 2007.

[9] STEINBRUCH, A. *Álgebra linear.* 2ª ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 1987.