UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Estevão Luis Paiva da Silva

Cuité-PB

2014

Estevão Luis Paiva da Silva

Estratégias Utilizadas por Alunos do 3° Ano do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Partilha.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida

Cuité-PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586e Silva, Estevão Luis Paiva da.

Estratégias utilizadas por alunos do 3º ano do ensino médio na resolução de problemas de partilha. / Estevão Luis Paiva da Silva – Cuité: CES, 2014.

47 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.

1. Problemas de partilha. 2. Resolução de problemas. 3. Problemas matemáticos - estratégias. I. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Estevão Luis Paiva da Silva

Estratégias Utilizadas por Alunos do 3° Ano do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Partilha

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 04 de abril de 2014.

Banca Examinadora

Prof. Jadilson Ramos de Almeida
(Orientador)

Prof. Aluízio Freire da Silva Junior

Prof^{a}. Glageane da Sila Souza

Aos meus pais.....

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus, criador do céus e da terra, pelas benções, saúde e força derramadas sobre minha vida durante todo o período de estudos. Aos meus pais, que em tudo me ajudaram e contribuiram para a finalização do curso. Aos amigos de graduação que fui encontrando a cada período, em vários momentos, estiveram presentes nos estudos em cada periodo letivo, aos meus professores que contribuiram significativamente durante todo o curso, transmitindo conhecimentos científicos e profissionais destinados a minha area de atuação. Ao meu professor orientador Jadilson Ramos de Almeida, que desde o inicio do trabalho, me acompanhou e me instruiu, sempre com compromisso e dedicação, meu muito obrigado. Quero registrar um abraço especial aos amigos, Clebson Huan e Antonio Evandro que desde o primeiro período de graduação não mediram esforços para juntos estarmos concluindo o curso. Toda honra e toda glória seja dada à Deus.

" A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo."

Pitágoras.

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo investigar as estratégias utilizadas por alunos do 3° ano do ensino médio na resolução de problemas de partilha. Nossa referência foi a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), que também investigaram as estratégias utilizadas por alunos do 6° ano do ensino fundamental. O instrumento utilizado para coleta dos dados foi um teste no qual continha sete questões, com problemas de partilha, sendo uma questão para iniciar o teste, duas tipo fonte, duas tipo composição e dois, tipo poço, segundo o encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999).

Utilizamos como categorias de análises as construídas por Câmara e Oliveira (2010), em relação a classificação das estratégias na resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. Por fim, realizamos a análise dos dados coletados, constatando o desempenho e estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do 3° ano do ensino médio e comparando os resultados com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). Os resultados obtidos mostraram que os sujeitos apresentam mais dificuldade na resolução dos problemas de partilha com encadeamento tipo poço da mesma forma que no estudo de Câmara e Oliveira (2010). Os resultados mostraram também que os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução, independente do ano de escolarização.

Palavras-chave: Problemas de Partilha. Resolução de Problemas. Estratégias.

Abstract

This research aims to investigate the strategies used by students of the 3rd year of high school in solving problems of sharing. Our reference was the research of Camara and Oliveira (2010), who also investigated the strategies used by students in the 6th grade of elementary school. The instrument used for data collection was a test that contained seven questions, with problems of sharing, being a question to start the test, two type font, two type composition and two pit type, according to the chain defined by Marchand and Bednarz (1999).

Use as the analytical categories constructed by Camara and Oliveira (2010), for classification of strategies in solving algebraic problems sharing structure type. Finally, we analyze the collected data, verifying performance and basic strategies used by the subjects of the 3rd year of high school and comparing the results with the research of Camara and Oliveira (2010). The results showed that subjects have more difficulty in solving the problems pit type, as in the study Camara and Oliveira (2010). The results also showed that students use the same resolution strategies, regardless of the year of enrollment.

Keywords: Problems of Sharing . Troubleshooting. Strategies.

Sumário

Introdução **9**

1 Referencial Teórico **13**

1.1 Álgebra: Uma breve observação histórica. 13

1.2 Caracterizando problema de estrutura algébrica. 15

1.3 Problema de Partilha. 17

1.4 Estratégias utilizadas na resolução de problemas de partilha. 20

2 Metodologia **24**

2.1 Proposta e método para o desenvolvimento da pesquisa. 24

3 Análise e discussão dos dados. **26**

3.1 Estratégias de Base. 27

3.2 Análise por estratégia de base 29

3.3 Análise comparativa dos resultados. 32

4 Considerações Finais. **36**

Referências Bibliográficas **38**

Anexo **39**

Introdução

Ao longo dos anos, a matemática vem sendo tratada por alunos dos vários níveis de ensino como a disciplina mais difícil de estudar e compreender, Almeida (2006, p.1) expressa essas dificuldades como algo que pode ocorrer não pelo nível de complexidade ou pelo fato de não ter afinidade com a disciplina, mas por fatores cognitivos, psicológicos e pedagógicos envolvendo um conjunto de conceitos e trabalhos.

Sabemos que há várias pesquisas a respeito do medo que os educandos interiorizam a respeito da matemática, todavia, é inegável que ela é uma disciplina importante para o desenvolvimento educacional do aluno, como também, para inclusão do mesmo em uma sociedade que exige cada dia mais pessoas qualificadas no mercado de trabalho. Diante desse panorama que a matemática se encontra, precisamos interiorizar a ideia de que a formação do professor desde a sua graduação em licenciatura em matemática precisa ser solidificada em experiências reais em sala de aula. Segundo Almeida,

> O professor precisa vivenciar a licenciatura desde o início da graduação com projetos que envolvam trabalhos com alunos de escolas públicas e particulares. Por meio da experiência e de projetos nessa área, torna-se mais harmoniosa a passagem do professor pela sala de aula, uma vez que este já conviveu com alunos de diversas realidades e o auxilia a pensar em maneiras de lidar com a criatividade e o raciocínio dos alunos. (ALMEIDA, 2006, p.10)

Existem outros aspectos os quais estudiosos da educação matemática apontam para a possível causa desse problema, por exemplo, Lochhead e Mestre (1995, p. 145) comentam que, "a fonte dos erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica", ou seja, os alunos conseguem compreender o problema e interpretar o texto escrito na linguagem natural, porém, não conseguem traduzi-lo, por assim dizer, para a linguagem algébrica acarretando no erro.

Ensinar matemática, não é uma tarefa fácil quando o professor deseja alcançar sucesso e um significante resultado no aprendizado do aluno. O ensino da álgebra, em particular, tem apontado com base em dados de provas em larga escala como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) um baixo rendimento dos alunos em matemática. Quando atentamos a álgebra,

> [...] essas mesmas avaliações mostram, desde a década de noventa, que as dificuldades dos estudantes, neste campo de conhecimento matemático, são ainda maiores, tendo em vista que o índice de acerto nos itens referentes à álgebra fica, muitas vezes, em torno de 40 em muitas das regiões brasileiras. (BRASIL, 1998 apud ALMEIDA, 2011, p.12).

Logo, percebemos que as dificuldades em relação a álgebra não são pertinentes ao ensino atual, mas, que esse problema enfrentado por alunos se estende a alguns anos. Fato corriqueiro nas aulas de matemática é o ensinar por meio da reprodução e memorização de procedimentos algébricos, segundo Costa (2010, p.13) "[...] pensa-se que quanto mais o sujeito conhecer os procedimentos algébricos melhor compreenderá como se resolve equações. O que não é verdade, como garantem os resultados de pesquisa em larga escala.", talvez esse método tenha implicações nos baixos índices de aproveitamento dos alunos nas provas de matemática, uma vez que, os discentes são condicionados a memorização e consequentemente todo conhecimento será esquecido sem levar ao verdadeiro aprendizado, mas o fato é que, as metodologias de ensino empregadas nas aulas de matemática influenciam no aprendizado do aluno.

Resolver problemas algébricos é sempre um desafio para alunos em todas as etapas de ensino, e por vezes é visto como uma tarefa desestimulante que pouco lhe acrescenta conhecimento, segundo Lochhead e Mestre (1995, p.144) "pesquisas recentes indicam que muitos alunos parecem ter dificuldades enormes para resolver certos tipos de problemas algébricos bastante simples [...]" e esse fato se estende do ensino fundamental ao superior.

Problemas algébricos não é tão imediato como efetuar uma operação aritmética, e talvez esse fato tem gerado um obstáculo para os alunos na resolução de problemas algébricos. Entretanto, em nossa pesquisa, não buscamos encontrar uma resposta plausível para os problemas que os alunos encontram no ensino de matemática, em especial para o ensino de problemas algébricos, mas sim, almejamos analisar as estratégias de resolução de problemas de estrutura algébrica.

Estudiosos, como por exemplo, Almeida (2011), Câmara e Oliveira (2010) e Santos Junior (2013), que seguiram essa linha de pesquisa se propuseram a investigar os problemas algébricos desde a sua abordagem nos livros didáticos ao método/estratégia de resolução utilizada pelos alunos do ensino fundamental.

Almeida (2011) analisou dez livros didáticos utilizados no 7° ano do ensino fundamental, cuja analise se deteve aos capítulos dos livros que propunham o ensino das equações polinomiais do 1° grau com uma incógnita, dando ênfase em sua pesquisa em aprofundar sua análise nos problemas relacionados com equações algébricas, deste modo, o pesquisador classificou os problemas encontrados nos livros didáticos, dentre os quais se encontravam os chamados *problemas de partilha*.

Os pesquisadores Câmara e Oliveira (2010) trabalharam em uma proposta de pesquisa diferente de Almeida (2011), os autores se proporam a investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6° ano do ensino fundamental diante de alguns problemas de partilha, classificando os erros e acerto e discutem a respeito dos resultados relacionados às estratégias de resolução de problemas de partilha.

Em linhas gerais, os pesquisadores perceberam certa dificuldade na resolução por parte dos alunos em alguns problemas, como relatam dizendo que,"Os resultados mostram que certas estruturas de problemas são mais difíceis para os alunos que outras, e que o tipo de operação associada às relações entre as incógnitas também influencia o sucesso dos alunos."(CÂMARA; OLIVEIRA, 2010, p.1). Essa pesquisa se torna relevante para nós, pois os objetivos almejados nela vão de encontro a nossa proposta de estudo nesse trabalho.

Outro autor, Santos Junior (2013) de maneira geral propôs uma analise a respeito das estratégias utilizadas na resolução de problemas de estruturas algébricas, bem como, a quantificação dos dados coletados referentes ao percentual de erros e acertos em cada problema de partilha[1] e com o resultado de sua pesquisa verificou

[1] "Nesse tipo de problema, tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida

certa dificuldade dos alunos do 7°, 8° e 9° ano do ensino fundamental em determinados tipos de problemas de partilha variando de acordo com o encadeamento do problema e ano de escolaridade. Porém, de maneira geral, segundo Santos Junior (2013. p. 102) "em relação à performance, ficou constatado que, de modo geral, com o avanço de escolarização, os sujeitos melhoram o desempenho na resolução de problemas de partilha [...]", podemos entender esse dado obtido como algo, um tanto quanto natural, pois o aluno com o passar dos anos começa a acumular experiência e conhecimento que em determinadas situações podem ser utilizados como um recurso para resolver problemas matemáticos.

Os resultados obtidos por Santos Junior (2013) evidencia assim, a necessidade de atentarmos para as práticas de ensino-aprendizado empregadas nesse tipo de problema, ou mesmo, se tais atividades com problemas matemáticos estão sendo desenvolvidos em sala de aula e com objetivos necessários para cada ano de escolaridade, uma vez que, tais resultados obtidos não são totalmente satisfatórios.

Assim, investigar as estratégias de resolução dos alunos diante de problemas de estruturas algébricas com equações polinomiais do 1° grau também é um objeto de nosso estudo, entretanto, diferentemente de Almeida (2011) que se dedicou a análise dos problemas empregados nos livros didáticos, Câmara e Oliveira (2010) que se detiveram ao estudo das resoluções de alunos do 6° ano do ensino fundamental e Santos Junior (2013) que se propôs ao estudo das estratégias utilizadas para resolução de problemas de partilha dos alunos do 7°, 8° e 9° ano do ensino fundamental, especificamente, iremos adentrar em outra etapa da vida escolar dos alunos, a qual finaliza todo o processo do ensino básico, ou seja, 3° ano do ensino médio.

É comum pensarmos que alunos em séries mais avançadas tendem a ter mais facilidade de resolver problemas matemáticos, todavia, segundo Lochhead e Mestre (1995), as dificuldades para resolução de problemas de estrutura algébricas, não são inerentes a alunos que estão iniciando seus estudos em álgebra, mas também, alunos de níveis de escolaridade mais avançados e até mesmo de nacionalidades diferentes.

em outras partes desiguais e desconhecidas". (ALMEIDA , 2011, p. 39)

> Parece, portanto, que o ensino nos Estados Unidos, em Israel e em Fiji – e, acreditamos, em quase toda parte – não oferece aos alunos oportunidades de aprender a interpretar sequências de símbolos matemáticos. Os alunos não aprendem a ler e a escrever em matemática! Essa omissão não só limita seu desempenho na resolução de problemas, como também os coloca em séria desvantagem quando se trata de aprender a manipulação simbólica das regras da álgebra. Sem a capacidade de interpretar expressões, os alunos não dispõem de mecanismos para verificar se um dado procedimento é correto. Assim, muitas vezes eles têm de recorrer a lembranças dos procedimentos automatizados para resolver problemas. (LOCHHEAD; MESTRE, apud ALMEIDA, 2011, p.12).

Deste modo, nosso estudo torna-se relevante para observamos se os alunos nos anos finais do ensino médio utilizam ou não, estratégias de resolução que teoricamente seriam mais propícios para os educandos que ainda não tem certa maturidade em matemática, como os que estão iniciando o ensino de álgebra. Por outro lado, nossa pesquisa propicia também um confronto com outros trabalhos que discutem a temática dos problemas algébricos, porém, inseridos na esfera do ensino fundamental II, diferentemente da referida pesquisa, na qual buscamos conhecer as estratégias dos alunos no último ano do ensino médio.

Capítulo 1

Referencial Teórico

1.1 Álgebra: Uma breve observação histórica.

A origem da álgebra é remota, segundo Eves (2004),

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa forma geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cubicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). (EVES, 2004, p.61-62)

É evidente que neste período a álgebra não dispunha dos símbolos nem da linguagem atual, entretanto, podemos perceber que os babilônicos tinham certas habilidades de resolver as equações mesmo sem o auxilio da álgebra moderna, cujos matemáticos desenvolveram um sistema aritmética avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Segundo Eves (2004, p.67), "a matemática Egípcia nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Com esse sistema eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e equações indeterminadas.". Os Babilônicos detinham um grau muito avançado de conhecimento, segundo Boyer (1996, p.23) " a redução babilônica de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmica. Essa facilidade, junto com a ideia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônicos em matemática.".

Segundo Baumgart (1992), a palavra álgebra significa "uma variante latina da palavra árabe al-jabr", diferentemente de algumas palavras, como, por exemplo, "aritmética" que deriva do grego arithmos (número). Almeida (2011) comenta que, esta palavra, al-jabr, é encontrada no título do livro, Al-jabr wa-al-Muqabilah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Al Khowarizmi.

O estudo da álgebra, assim como os conceitos da matemática em geral, se desenvolveu por meio dos estudos de vários matemáticos e civilizações como os Babilônicos, Egípcios, Árabes, Gregos e outras civilizações, como também, por matemáticos, Al-Khwarizmi, Fraçois Viète, Diofante de Alexandria, Rene Descartes, entre outros, os quais contribuíram em suas respectivas épocas de vida enfrentando as facilidades e dificuldades contemporâneas.

A álgebra evoluiu e se expandiu por várias areas do conhecimento, e hoje ela estuda desde situações mais simples e cotidianas até situações mais abstratas e complexas inerentes a própria matemática, como o estudo de grupos, anéis e corpos.

Os três periodos históricos mais significativas com respeito a álgebra demarcaram as três fases do seu desenvolvimento as quais ficaram conhecidas como a álgebra retórica ou verbal, álgebra sincopada e álgebra simbólica. Essas fases segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), são caracterizadas como segue::

- Álgebra retórica ou verbal: "corresponderia a fase em que não se fazia uso de símbolos nem abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente.".

- Álgebra sincopada: "teria surgido com Diofanto de Alexandria (século III), pois foi ele quem pela primeira vez, introduziu um símbolo para a incógnita – a letra "sigma" do alfabeto grego – e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações.".

- Álgebra simbólica: "corresponderia ao momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras." (p.79-80).

Deste modo, podemos ter uma noção de como se deu o processo o qual levou a álgebra a chegar a estrutura vista nos dias atuais. Este fato não ocorreu por meio de um só matemático, mas sim, por um processo envolvendo muitos, assim, destacamos aqui alguns matemáticos que deram contribuições importantes para que a linguagem algébrica tomasse a forma atual. François Viète (1540 -1603), matemático Francês, segundo os autores "foi o principal responsável pela introdução de novos símbolos na álgebra. Além de utilizar os sinais germânicos " $+$ e $-$ ", introduziu as vogais para representar quantidades constantes e as consoantes para quantidades incógnitas" (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p.80).

Outro matemático que contribuiu significativamente para simbolização da álgebra foi René Descartes (1596-1650), segundo estudos, foi ele o responsável pela passagem para uma álgebra completamente simbólica. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.80), "Descartes consolidaria o uso da linguagem simbólica com a publicação, em 1637 de sua obra La Géométrie. Neste, Descartes utiliza as últimas letras do alfabeto $(x, y, z, ...)$ como incógnitas (e implicitamente como variáveis) e as primeiras $(a, b, c, d, ...)$ como quantidades fixas.".

Sabemos que, não foram apenas esses matemáticos que contribuíram para a simbolização da álgebra, mas outros grandes contribuíram, a medida que, surgia a necessidade de uma nova notação para esclarecer melhor o problema trabalhado ou mesmo para resolver questões de seus estudos.

Vimos que o avanço da representação algébrica se deu por períodos, sendo dividida em momentos que não se utilizava símbolos, no caso do período da álgebra retorica ou verbal, fase em que foi inserido alguns símbolos, fase sincopada, e a fase totalmente simbólica, como vista e utilizada nos dias atuais.

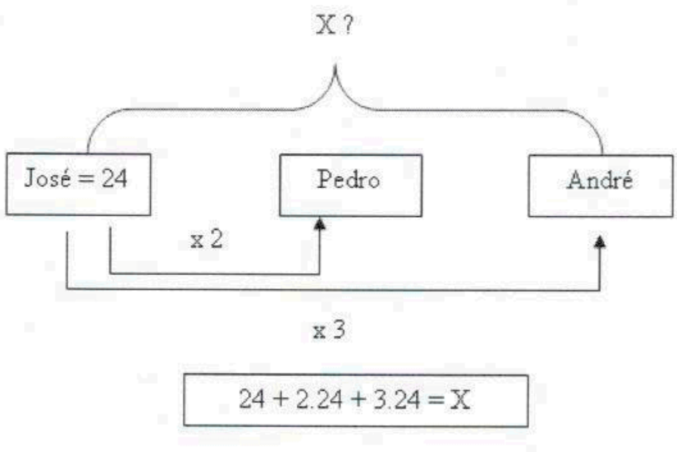
1.2 Caracterizando problema de estrutura algébrica.

Nossa proposta de pesquisa está pautada nas estratégias utilizadas por estudantes do 3º ano do ensino médio na resolução de problemas de estrutura algébrica, mais precisamente, os problemas de partilha. Desse modo, se faz necessário caracterizarmos tais problemas de acordo com pesquisadores da área. De acordo com Da Rocha Falcão

(1992)[1] os problemas de estrutura algébrica são aqueles pelos quais os procedimentos aritméticos, tornam-se cansativos, enfadonhos ou insuficientes. Segundo Gama (2003), problemas algébricos são aqueles em que há relações entre os elementos do enunciado. Seguindo a mesma linha de raciocínio de Gama (2003), Marchand e Bednarz (1999) se referem a um problema de estrutura algébrica quando temos a necessidade de estabelecer relações entre as informações do enunciado do problema para converter em uma equação. Em nossa pesquisa adotamos como definição de problemas de estrutura algébrica a caracterização dada por Marchand e Bednarz (1999).

Deste modo, para as autoras supracitadas a diferenciação entre um problema de estrutura algébrica e problema aritmético é que, em um problema aritmético o aluno parte de valores conhecidos com a finalidade de determinar valores desconhecidos, como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. *José tem 24 figurinhas, Pedro tem o dobro de figurinhas de José e André tem o triplo de figurinhas de José. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?*



Neste problema o aluno chega ao resultado a partir de uma quantidade conhecida, expressa na questão pela quantidade de figurinhas de José, e em seguida ele faz a relação com os outros elementos do problema.

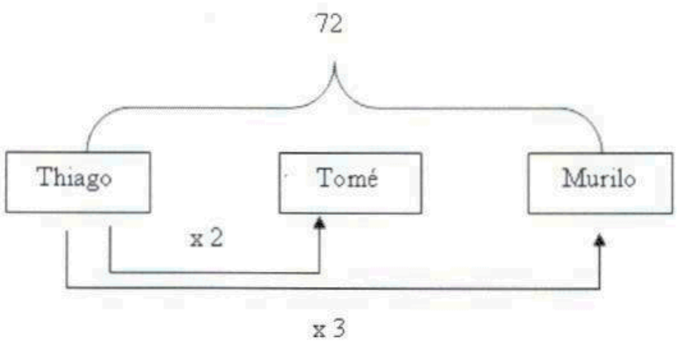
Quando nos referimos a um problema de estrutura algébrica, de acordo com Câmara (2010, apud ALMEIDA, 2011, p.34), "em um problema de estrutura algébrica, o estudante é levado a partir de relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético". Nesse sentido, o aluno parte de

[1]Da Rocha Falcão (1992) não usa o termo "problemas de estrutura algébrica"

um valor total conhecido afim de encontrar valores desconhecidos por meio de relações existentes no problema. Podemos compreender o que o autor descreve na citação acima acerca de um problema de estrutura algébrica no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2. *Thiago, Tomé e Murilo, possuem 72 bolinhas de gude e resolveram dividir de modo que, Tomé receba o dobro de Thiago e Murilo o triplo de Thiago. Quantas bolinhas de gude devem receber cada um?*

Vejamos a representação desse problema



$$\boxed{X + 2X + 3X = 72}$$

Deste modo, em uma situação com essa característica, o estudante não pode partir de um valor conhecido, mas, sim, deve ou deveria estabelecer relações entre os elementos do problema, tendo como objetivo encontrar uma equação equivalente ao enunciado.

Marchand e Bednarz (1999), por meio de uma pesquisa realizada no Canadá, a qual teve por objetivo analisar os problemas de estrutura algébrica nos livros didáticos de matemática canadenses, identificaram e classificaram os problemas de estrutura algébrica em três tipos, a saber: *problemas de transformação*, *problemas de taxa* e *problemas de partilha.* Em nossa pesquisa daremos ênfase ao estudos dos problemas de partilha.

1.3 Problema de Partilha.

Os problemas de partilha de acordo com Almeida (2011), "caracteriza-se por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecida, ou seja, nesse tipo de problema, tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em outras partes desiguais e desconhecidas" (p.39).

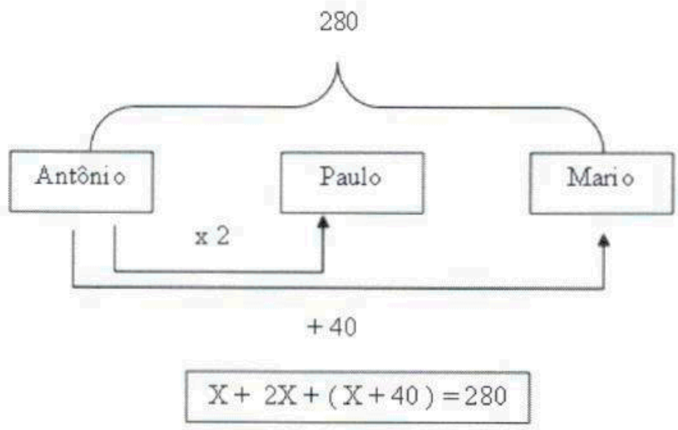
Segundo Câmara e Oliveira (2010), nos problema de partilha,

> aparecem relações entre os dados (incógnitas) e uma quantidade total (conhecida), que é expressa em função de suas diferentes partes (desconhecidas). Entre essas partes são estabelecidas relações de comparação, levando a uma composição dessas relações. (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010,p.3).

Podemos observar o exemplo de um problema desse tipo no exemplo a seguir:

Exemplo 1.3. . *Antônio, Paulo e Mario saíram de casa com o objetivo de comprar equipamentos esportivos. No caminho perceberam que juntos tinham* $R\$280,00$. *Mario observou que Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio e o próprio Mario tinha* $R\$40,00$ *a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?*

Este problema pode ser representado pelo seguinte esquema.



Note que no problema de partilha há uma quantidade total conhecida, que no exemplo supracitado é expressa por, "juntos têm, $R\$280,00$". A partir dessa quantidade o aluno terá que estabelecer relações entre as informações do enunciado para a construção de uma equação.

De acordo com Marchand e Bednarz (1999) os problemas de partilha podem ser classificados levando em consideração o "*número de relações*", a "*natureza das relações*" e o "*encadeamento das relações*" .

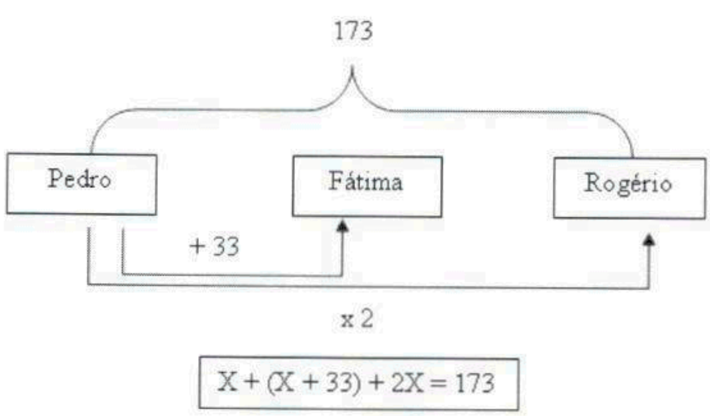
No **exemplo 3** temos um problema de partilha com duas relações, no qual a sentença, "*Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio*", expressa a primeira relação e "*Mario tinha R\$40,00 a mais que Antônio*" a segunda relação. Quando nos referimos a natureza das relações desse tipo de problema, fazemos menção as operações envolvidas nele, que pode ser de natureza aditiva " *adição/subtração* " ou de natureza multiplicativa " *multiplicação/divisão* ", no exemplo anterior, temos na expressão "*Paulo tinha o dobro*" uma relação de natureza multiplicativa. Por outro lado, na expressão "*Mario tinha R\$40,00 a mais*" temos uma relação de natureza aditiva.

Quanto ao encadeamento das relações os problemas de partilha, segundo as autoras, podem ser do tipo fonte, composição e poço.

De acordo com Câmara e Oliveira (2010),"no problema tipo fonte as relações envolvidas são geradas a partir de uma mesma grandeza."(p.4). No problema a seguir, temos um exemplo de um problema de partilha de encadeamento do tipo fonte.

Exemplo 1.4. *Pedro, Fátima e Rogério colecionam álbuns de figurinhas a muitos anos. Conversando em um determinado dia, viram que, juntos possuíam 173 álbuns de figurinhas. Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro e Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro. Quantos álbuns de figurinhas têm cada um?*

Deste problema, temos o seguinte esquema que pode nos ajudar a compreender melhor esse tipo de situação.

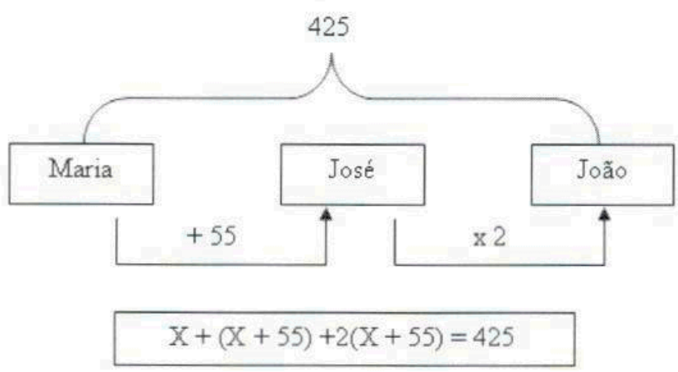


O esquema acima ilustra a situação de um problema de partilha tipo fonte, onde as relações são geradas pela mesma grandeza. A fonte fixa do problema é a quantidade de figurinhas de Pedro, a qual pode ser representada por "X". No problema acima, dizer que "*Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro*" é representar essa expressão por "$X + 33$" e dizer que "*Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro*" é a representação expressa por "2X".

De acordo com Câmara e Oliveira (2010, p.4) um problema tipo composição se caracteriza quando, neste tipo de problema, as relações são estabelecidas em sequência. Vejamos agora um exemplo de um problema de partilha cujo encadeamento é do tipo composição.

Exemplo 1.5. *Maria, José e João colheram 425 unidades de laranjas e querem repartir entre si. José quer receber 55 laranjas a mais que Maria e João por sua vez, quer receber o dobro de José. Com quantas laranjas cada um irá ficar?*

Podemos observar o seguinte esquema do problema acima.



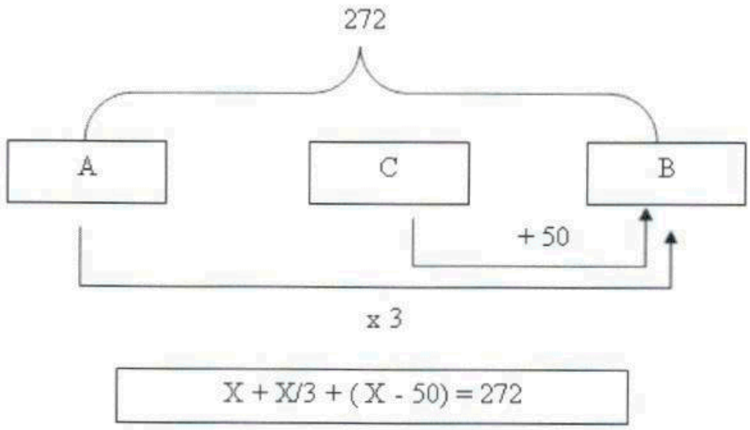
Notemos que, nesse problema, a relação acontece em sequência, sendo que, tomamos como quantidade fixa Maria, representada no esquema acima por "X". As demais relações do problema seguem em sequência, dizer que "*José quer receber 55 laranjas a mais que Maria*" é representar essa situação por "$X + 55$" e dizer que "*João por sua vez, quer receber o dobro de José*", e representar essa situação por "$2(X + 55)$".

Um dos problemas de partilha, segundo pesquisas, mais geram dificuldades para os alunos resolverem é o problema tipo poço, que segundo Câmara e Oliveira (2010) "na relação tipo poço se caracteriza esse problema quando todas as relações convergem para um dos dados do problema."(p.4). Finalmente, apresentaremos um exemplo de um problema de partilha cujo encadeamento é desse tipo.

Exemplo 1.6. *Fernando teve que adquirir 272 espécies de peixes para colocar em três aquários* ***A****,* ***B*** *e* ***C****. Ele colocou os peixes nos aquários da seguinte forma: O aquário*

***B** tem o triplo do **A** e 50 peixes a mais que o aquário **C**. Quantos peixes têm em cada aquário?*

Com base no problema acima, temos o seguinte esquema:



Percebemos que nesse problema as relações convergem para Marcelo. Entretanto, para fazer a conversão da linguagem natural do problema para uma representação algébrica, o aluno terá que perceber a necessidade de tomar a operação inversa expressa no enunciado e ainda descobrir que o aquário **B** é uma fonte fixa do problema representado por "X" e daí estabelecer as demais relações do problema. A expressão do problema "O aquário **B** tem o triplo do **A**" está se referindo a quantidade de peixes que o aquário B receberá em relação ao aquário **A**, deste modo, o aluno, deveria representar a sentença tomando a operação inversa, ou seja, representando−a por "$\frac{X}{3}$". Na expressão "50 peixes a mais que o aquário C" o aluno terá que estabelecer a operação inversa, representando-a por "$(X - 50)$", tendo no final uma representação algébrica do enunciado do problema.

1.4 Estratégias utilizadas na resolução de problemas de partilha.

Neste trabalho, nossas referências de estratégias de resolução de problemas de partilha estarão baseadas nas estratégias identificadas na pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2010), cujo objetivo da pesquisa dos autores foi a de investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6° ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Os resultados apresentados por eles serão relevantes para nossa pesquisa, uma vez que, faremos uma comparação com os resultados obtidos em nossa pesquisa com relação as estratégias de resolução dos problemas de partilha, com os resultados da pesquisa dos autores, salientando que, ambas foram realizadas em esferas de ensino diferentes, ou seja, a dos autores supracitados no ensino fundamental e esta, no 3º ano do ensino médio.

Câmara e Oliveira (2010) estudaram os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental, de acordo com eles, foram identificados cinco tipos. Os autores fazem uma análise explicando cada tipo de estratégia. De acordo com eles as estratégias de resolução dos problemas de partilha foram classificadas do seguinte modo:

- Atribuir valores (AV): os alunos "atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas."(p.6). Neste caso os autores mencionam que por vezes os alunos se preocupam em verificar se o resultado encontrado, por meio dessa estratégia, está de acordo com o que o problema propôs, outros nem se quer verificam.

- Dividir por três (D3): dada a quantidade total expressa no problema os alunos interpretam a partilha como se a mesma fosse dividida em partes iguais, tomam essa quantidade do problema e a dividem pelo total de incógnitas, de modo que, geralmente, a primeira incógnita se torna a fonte do problema e por meio dela se faz a relação para a obtenção das outras incógnitas. Neste caso, Câmara e Oliveira (2010) destacam que esse tipo de estratégia é mais adotada em problemas tipo composição.

- Estratégia algébrica (AL): de acordo com os autores, a estratégia de resolução algébrica se estabelece quando o "sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas."(p.7).

- Quantidade total como fonte (TF): no que diz respeito a essa estratégia, os autores afirmam que "consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas"(p.8). Quando o aluno se apropria desse tipo de estratégia de resolução, o mesmo assume o total como o valor de uma das incógnitas e estabelece as outras relações com as incógnitas restantes do problema.

- Efetuar um cálculo qualquer (CQ): Este tipo de estratégia identificada pelos autores se expressa quando os alunos não conseguem associar os dados com o enunciado do problema e acabam efetuando um calculo aleatório para conseguirem encontrar uma solução.

Destas estratégias, os autores expressam o percentual utilizado pelos alunos nos problemas de partilha. A tabela a seguir, retirada da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), cuja pesquisa teve por objetivo investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6° ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha, expressa o percentual referente as estratégias de base utilizadas pelos alunos da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010).

Tabela 1. Percentual da utilização das estratégias de base.

Atribuir valores (AV)	40%
Dividir por 3 (D3)	34%
Algébrica (AL)	9%
Considerar o total como fonte (TF)	8%
Cálculo qualquer (CQ)	6%
Não identificada (NI)	3%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2010.

Como podemos perceber na tabela acima as estratégias mais utilizadas pelos alunos do 6° ano do ensino fundamental, de acordo com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2001) foi Atribuir Valores (AV) e Dividir por 3 (D3). De acordo com os autores, os alunos procuram mais esse tipo de estratégia no momento da resolução sendo influenciados pela estrutura do problema. Pouca porcentagem dos alunos utiliza, segundo a tabela acima, a estratégia algébrica (AL) apesar dos problemas possibilitarem uma representação algébrica, explica-se esse dado, talvez, pelo fato dos alunos do 6° ano ainda não terem aprofundado seus conhecimentos algébricos, mas ainda sim, alguns conseguem raciocinar nesse sentido.

No estudo de Câmara e Oliveira (2010), podemos perceber que o grau de dificuldade encontrado pelos alunos na resolução dos problemas de partilha varia de acordo com o encadeamento da relação.

Notamos claramente quando os autores expressam em termos quantitativos os resultados obtidos, destacando a dificuldade maior dos alunos em relação aos problemas tipo poço. Vejas a tabela expressa por eles.

Tabela 2. Rendimento por encadeamento de relações.

	Fonte	Composição	Poço
Acertos	44%	33%	23%
Erros	41%	43%	39%
Não resposta	15%	24%	38%

Fonte: Câmara e Oliveira 2010.

Segundo eles "no problema tipo poço apenas 23% dos sujeitos obteve sucesso, contra 33% para problemas do tipo composição e 44% para problemas do tipo fonte." (p.5). Ou seja, há uma dificuldade considerável em relação a resolução do problema tipo poço, devido a representação inversa que o problema requer.

Além disso, os autores relacionam os dados obtidos com as estratégias utilizadas pelos alunos de acordo com o encadeamento da relação, como nos explica,

> podemos observar que a escolha da estratégia de base AV cresce em função da complexidade das relações, atingindo o percentual de 44% em problemas do tipo poço. Já a escolha da estratégia D3 mostra pouca variação em relação ao encadeamento das relações. Por outro lado, o recurso à estratégia algébrica (AL), contrariamente à estratégia AV, decresce em função da dificuldade do problema, sendo mais adotada em problemas do tipo fonte.(CÂMARA; OLIVEIRA, 2010, p.6)

De acordo com a tabela abaixo apresentada pelos autores poderemos nos referenciar no que diz respeito a frequência de estratégias utilizadas pelos alunos de acordo com cada encadeamento.

Tabela 3. Rendimento por encadeamento de relações.

	Fonte	Composição	Poço
Atribuir valores (AV)	37%	40%	44%
Dividir por 3 (D3)	32%	33%	36%
Algébrica (AL)	12%	9%	6%
Considerar o total como fonte (TF)	11%	6%	7%
Cálculo qualquer (CQ)	5%	9%	6%
Não identificada (NI)	3%	3%	2%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2010.

Destacamos na tabela apresentada pelos autores, que os alunos utilizam a estratégia de atribuir valores com maior frequência nos problemas tipo poço, e o uso dessa estratégia cresce de acordo com o grau de dificuldade do encadeamento. Em relação a estratégia Dividir por 3(D3) pouco se altera os dados com relação ao encadeamento. Podemos perceber também a dificuldade de representar o problema, pois apenas 6% dos alunos conseguem representar o problema algebricamente quando o mesmo apresenta encadeamento tipo poço.

Capítulo 2

Metodologia

2.1 Proposta e método para o desenvolvimento da pesquisa.

Neste capítulo apresentaremos qual a metodologia empregada para o desenvolvimento da pesquisa, bem como, a ferramenta de coleta de dados.

Propomos neste trabalho, analisar as estratégias utilizadas por alunos do 3º ano do ensino médio na resolução de problemas de partilha, como também, verificar a influência do tipo de encadeamento do problema de partilha no rendimento dos alunos do 3º ano. Escolhemos o 3º ano do ensino médio por se tratar da ultima série do ensino básico, e, por também ser objetivo dessa pesquisa comparar o rendimento e as estratégias desses alunos com as utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Nesta pesquisa, verificaremos a influência dos problemas de partilha de acordo com seu encadeamento e por fim faremos um comparativo do rendimento e estratégias dos alunos do 3º ano do ensino médio com estudo realizado com alunos do 6º ano do ensino fundamental. A pesquisa com alunos 6º ano, foi desenvolvida por Câmara e Oliveira (2010), essa pesquisa nos dará base teórica em relação as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de partilha, como também, nos dará resultados, os quais iremos comparar com os obtidos nesta pesquisa.

Para tanto, adotamos como instrumento de coleta dos dados um teste contendo sete problemas de partilha os quais foram aplicados a duas turmas do 3º ano do ensino médio de uma escola do município de Cuité – PB. Os problemas foram aplicados em dois horários de 50 minutos cada, em ambas as turmas. Aplicamos o teste a um total de 50 alunos. Os testes com os sete problemas propostos estão em anexo.

Os alunos responderam sete questões envolvendo problemas de partilha distribuídos de maneira aleatória, sendo: um problema de partilha com apenas uma relação, dois problemas de partilha com encadeamento tipo fonte e com duas relações, dois problemas de partilha com encadeamento tipo composição e com duas relações, e , dois problemas de partilha com encadeamento tipo poço e com duas relações. As questões foram dispostas aleatoriamente, com exceção do problema com uma relação, o qual encabeçou o teste. Na análise, os problemas com uma relação não foram incluídos nos dados obtidos da pesquisa, pelo fato deles servirem apenas de caráter introdutório A análise dos dados foi feita a partir do rendimento (acerto, erro e não resposta) e das estratégias utilizadas pelos alunos.

Capítulo 3

Análise e discussão dos dados.

Neste capítulo, faremos a discussão a respeito dos resultados obtidos em nossa pesquisa, comparando-os com os resultados expressos na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010).

Iniciaremos discutindo a respeito da quantidade de erro, acerto e questões não respondidas em sua totalidade de problemas propostos aos alunos envolvidos na pesquisa. O resultado se mostrou dentro das expectativas em relação a quantidade de acertos, entretanto, essa quantidade sobressaiu apenas 2% a mais que a quantidade de erros e questões em branco somadas, como nos mostra a tabela abaixo.

Tabela 4. Rendimento dos alunos.

Acertos	51%
Erros	35%
Não Resposta	14%

Todavia, por se tratar de alunos no último ano do ensino médio, esperava-se um percentual maior, pois, apenas 51% dos problemas foram respondidos corretamente pelos alunos. Em relação ao percentual de questões sem respostas, observa-se uma quantidade considerável (14%), tendo em vista que nestes casos, os alunos se quer esboçaram tentativas de resolução, apontando para uma possível dificuldade em relação a resolução de problemas de estrutura algébrica. Ainda por serem alunos do 3° ano do ensino médio, não é de tanto espanto os resultados devido, por exemplo, ao que aponta Lochhead e Mestre (1995) que as dificuldades para resolução de problemas de estrutura algébricas, não são inerentes a alunos que estão iniciando seus estudos em álgebra, mas também, alunos de níveis de escolaridade mais avançados, sendo assim, notamos que nossa pesquisa vão de encontro a observação de Lochhead e Mestre (1995), pois mesmo os alunos do 3° ano do ensino médio, já com certa maturidade em álgebra, tiveram dificuldades em resolver os problemas de estrutura algébrica.

Câmara e Oliveira (2010) trazem em sua pesquisa a quantidade de erros, acertos e não resposta observando o rendimento por encadeamento de relações. Fizemos a mesma análise e os resultados não ficaram distantes em relação às conclusões da pesquisa desses autores. Podemos constatar esses resultados pela tabela 5, que expressa o resultado de nossa pesquisa no que diz respeito ao rendimento por encadeamento de relações.

Tabela 5. Rendimento por encadeamento de relações.

	Fonte	Composição	Poço
Acertos	62%	56%	36%
Erros	27%	30%	48%
Não resposta	11%	14%	16%

Observamos nesta tabela que os alunos tem maior facilidade ao resolverem os problemas tipo fonte, pois 62% foram resolvidos corretamente. Atentamos também para o fato do percentual de erros com relação aos problemas tipo poço, pois 48% dos problemas foram resolvidos de maneira errada pelos alunos. Neste tipo de problema, o percentual de erros se sobressai com relação aos outros tipos, como foi observado também na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), esse fato pode ser entendido no sentido de exigir do aluno a interpretação inversa das operações das relações do problema. Deste modo, para fazer a conversão da linguagem natural do problema para uma representação algébrica, o aluno terá que perceber a necessidade de tomar a operação expressa no enunciado de maneira inversa e ainda descobrir a fonte fixa do problema representado por "X" e daí estabelecer as demais relações do problema e formar a equação que represente a situação em questão, como vimos no **exemplo 6**. Percebemos também pela tabela uma maior dificuldade dos alunos em resolver problemas de acordo com o encadeamento da relação, pois notamos que a quantidade de acertos decresce dos problemas tipo fonte, composição e poço, e a quantidade de erros cresce em comparação aos mesmos tipos de problemas.

3.1 Estratégias de Base.

Câmara e Oliveira (2010) identificaram em sua pesquisa cinco estratégias de base utilizadas pelos alunos do 6° ano do ensino fundamental para resolução dos problemas de partilha. Da mesma forma, em nossa pesquisa, procuramos identificar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas de partilha por alunos do 3° ano do ensino médio, trazendo os resultados obtidos em tabelas.

Percebemos que os resultados obtidos em nosso estudo convergem no mesmo sentido da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). A tabela 6 apresentada a seguir, nos mostra o percentual de estratégias de base utilizada pelos alunos do 3° ano do ensino médio. Lembramos que, neste caso, não consideramos os problemas que os alunos deixaram sem resposta.

Tabela 6. Estratégias de base utilizada pelos alunos

Atribuir valores (AV)	55%
Dividir por 3 (D3)	14%
Algébrica (AL)	15%
Considerar o total como fonte (TF)	1%
Cálculo qualquer (CQ)	10%
Não identificada (NI)	5%

Notamos por essa tabela que a estratégia de base mais usada pelos alunos na resolução dos problemas é a estratégia Atribuir Valores (AV) com 55%. Em relação às estratégias Dividir por 3 (D3) e algébrica (AL), 14% e 15% dos problemas são resolvidos, respectivamente, pelos alunos por meio dessas estratégias. Por se tratar de alunos no final do ensino médio, subentende-se que os mesmos teriam mais facilidade em resolver os problemas de partilha se apropriando da estratégia algébrica, considerando que, os alunos já tomam conhecimento desse campo matemático já no inicio dos anos finais do ensino fundamental, quando começam a trabalhar conceitos de equações polinomiais do primeiro e segundo grau. Entretanto, vemos que há uma controvérsia em relação a essa hipótese previamente estabelecida, tendo em vista os dados obtidos na pesquisa revelam que apenas 15% dos alunos utilizaram a estratégia algébrica. Quando nos referimos a estratégia de efetuar um Calculo Qualquer, notamos no estudo que alguns alunos não conseguiram se apropriar do raciocínio envolvido no problema, se apropriando de cálculos aleatórios, assim, 10% dos problemas resolvidos foram pela estratégia de efetuar um cálculo qualquer.

Também analisamos a escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações. Esses resultados expressam certa influência do tipo de encadeamento na escolha das estratégias utilizadas pelos alunos. Destacamos também que, os problemas que não foram respondidos pelos alunos, não foram incluídos no percentual expresso na tabela. Podemos compreender claramente as relações entre as estratégias de base em função dos encadeamentos das relações na tabela 7 a seguir.

Tabela 7. Estratégia de base em função do encadeamento das relações dos problemas de partilha.

	Fonte	Composição	Poço
Atribuir valores (AV)	50%	57%	61%
Dividir por 3 (D3)	17%	14%	14%
Algébrica (AL)	18%	12%	6%
Considerar o total como fonte (TF)	1%	-	-
Cálculo qualquer (CQ)	8%	14%	7%
Não identificada (NI)	6%	3%	6%

Nesta tabela percebemos que, na estratégia de base AV o percentual de problemas resolvidos cresce, tendo em vista a relação de encadeamento, saindo de 50% nos problemas tipo fonte, 57% tipo composição e alcançando maior índice nos problemas tipo poço, com 61%. Entendemos esses dados pelo fato da dificuldade que cada encadeamento proporciona ao aluno mediante a resolução, constatando que os problemas tipo poço são os mais propícios a estratégia de atribuir valores. Em relação a estratégia D3 a pouca variação do percentual em relação ao encadeamento, tendo até o mesmo percentual nos encadeamentos tipo composição e poço. Percebemos também que o percentual de problemas resolvidos pelos alunos utilizando a estratégia AL decresce significativamente de acordo com o encadeamento, sendo mais adotada nos problemas tipo fonte.

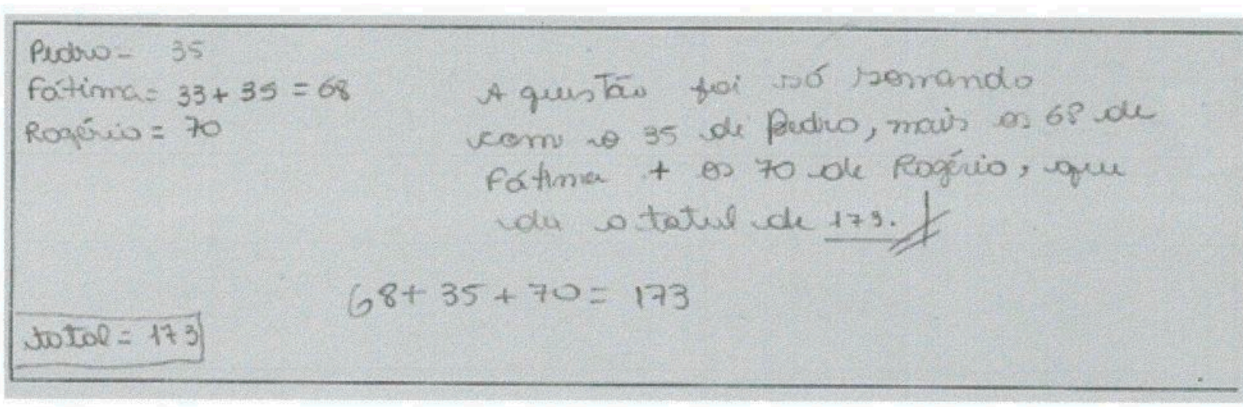
3.2 Análise por estratégia de base

Faremos agora uma análise por estratégia de base, em que apresentaremos alguns extratos dos problemas resolvidos pelos alunos, mostrando as estratégias de base utilizadas pelos mesmos.

Na estratégia Atribuir Valores notamos que os alunos supõem determinado valor a uma das incógnitas do problema e em seguida atribuem valores fazendo a relação estabelecida no problema até encontrar o valor total das três incógnitas dadas no problema. Vejamos o extrato a seguir.

Pedro, Fátima e Rogério colecionam álbuns de figurinhas a muitos anos. Conversando em um determinado dia, viram que, juntos possuíam 173 álbuns de figurinhas. Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro e Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro. Quantos álbuns de figurinhas têm cada um?

Figura 1. Extrato de resolução.


Pedro - 35
Fátima = 33 + 35 = 68
Rogério = 70

A questão foi só somando com o 35 de Pedro, mais os 68 de Fátima + os 70 de Rogério, que da o total de 173.

68 + 35 + 70 = 173

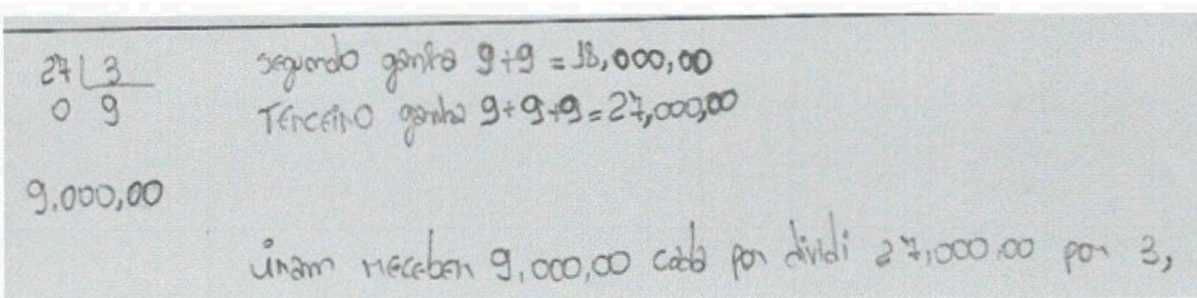
total = 173

O aluno explica nesse problema que a questão pode ser resolvida a partir dos 35 álbuns de figurinhas de "*Pedro*", daí o aluno começa a atribuir valores aos demais sujeitos usando a relação proposta no problema, até obter uma soma total dos valores para cada sujeito do problema de modo que satisfaça a quantidade total dada. Câmara e Oliveira (2010) destacam em sua pesquisa que, em alguns casos, os alunos se quer verificam a coerência dos valores encontrados e constatamos o mesmo em nossa pesquisa. Notamos também que os alunos não conseguem atribuir valores corretos as incógnitas na primeira tentativa, fazendo assim vários testes antes de obterem o resultado desejado e em alguns casos deixam de resolver a questão. Esta estratégia foi utilizada pelos alunos em 54% dos problemas, constatando o índice mais alto entre todas a estratégias, da mesma forma na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), chegando a 40%.

Na estratégia Dividir por 3 os alunos se apropriam da quantidade total do problema e fazem uma divisão pelo número de incógnitas como se a partilha fosse em partes iguais, como nos mostra o extrato abaixo.

No Havaí é realizado um campeonato de surf em ondas gigantes. A organização do evento divide R$ 27.000,00 como premio para os três primeiros colocados distribuindo a quantia em ordem crescente do terceiro para o primeiro colocado. Sabe-se que o segundo ganha o dobro do terceiro e o primeiro o triplo do segundo. Qual a quantia do premio que o 1º, 2º e o 3º colocado irá receber?

Figura 2. Extrato de resolução.


27 | 3
0 9

segundo ganha 9+9 = 18,000,00
Terceiro ganha 9+9+9 = 27,000,00

9.000,00

iram receber 9.000,00 cada por dividi 27.000,00 por 3,

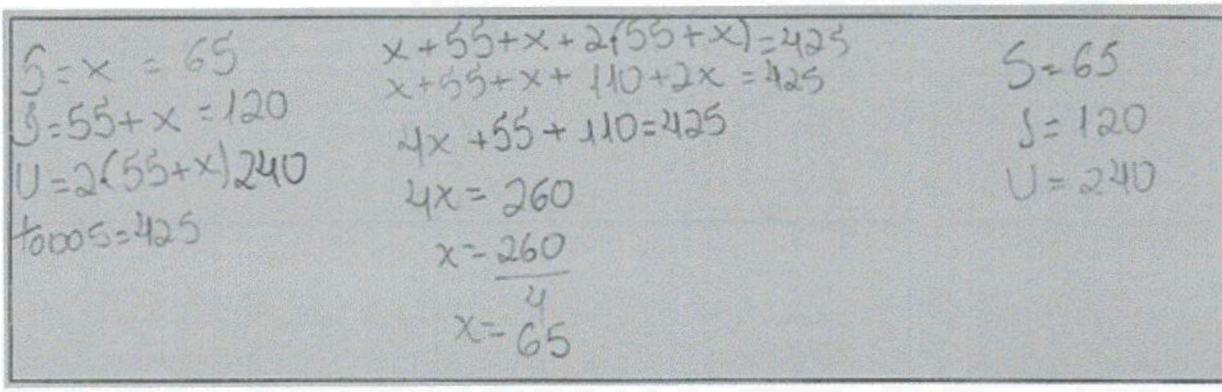
Observamos que o aluno utiliza o valor da divisão por três como resposta para uma das incógnitas do problema, em seguida estabelece a relação proposta, sem ao menos se importar com a coerência do resultado. Essa estratégia foi utilizada em 14% dos problemas em nossa pesquisa e na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) 34%.

A estratégia algébrica que subentendíamos que os alunos se apropriassem com mais frequência devido o grau de conhecimento já adquirido por eles, apenas 15% dos problemas foram resolvidos por meio dessa estratégia.

Podemos verificar essa estratégia no extrato a seguir.

Samanta, Irajá e Ubiratan colheram 425 unidades de laranjas e querem repartir entre si. Como Samanta quase não trabalhou na colheita, Irajá quer receber 55 laranjas a mais que Samanta e Ubiratan por sua vez, quer receber o dobro de Irajá por ter sido o que mais trabalhou. Com quantas laranjas cada um irá ficar?

Figura 3. Extrato de resolução.

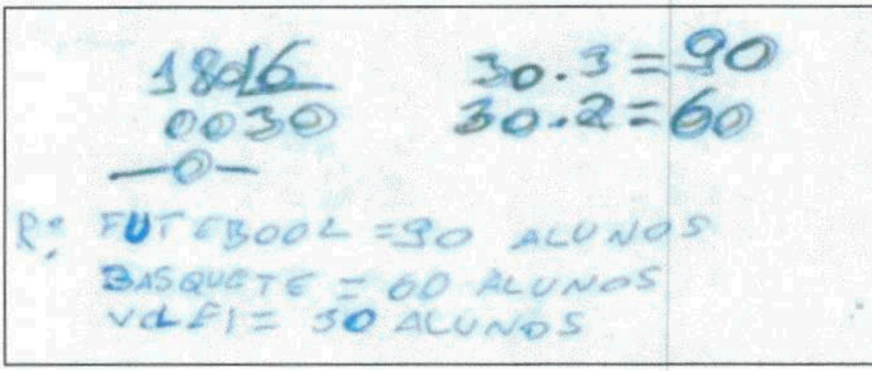


Notamos que neste caso o aluno representa o problema em linguagem algébrica, utilizando símbolos, como a letra X, para representar as incógnitas, de maneira a levar em consideração o enunciado do problema corretamente. Após determinar um valor da incógnita, aplica as outras relações e encontra os valores restantes.

Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), apesar dos alunos utilizarem essa estratégia, eles ainda não conseguem representar o problema em uma linguagem algébrica, ou seja, por meio de símbolos algébricos, como a letra X para representar uma incógnita. Vejamos o extrato a seguir, da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) que trás o exemplo de um aluno do 6º ano utilizando a estratégia algébrica para resolver um problema de partilha.

Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

Figura 4. Extrato de resolução.



Fonte: Câmara e Oliveira, 2010.

Câmara e Oliveira (2010, p.8) "explicam nesse problema, tipo fonte, as relações são identificadas pelo sujeito, mesmo que ele não as represente, como sendo V, 3V e 2V. Em seguida ele equaciona, mentalmente, $V+3V+2V = 180$, daí a divisão de 180 por 6."

3.3 Análise comparativa dos resultados.

A tabela 8 faz um comparativo com os resultados obtidos nesta pesquisa e na de Câmara e Oliveira (2010), levando em consideração o rendimento por encadeamento das relações dos problemas de partilha. Do lado direito da tabela os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo da tabela, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa.

Tabela 8. Comparativo do rendimento por encadeamento de relações.

	Fonte		Composição		Poço	
Acertos	**62%**	44%	**56%**	33%	**36%**	23%
Erros	**27%**	41%	**30%**	43%	**48%**	39%
Não resposta	**11%**	15%	**14%**	24%	**16%**	38%

Nesta comparação notamos que os resultados caminham no mesmo sentido. Os problemas tipo poço se tornam mais difíceis de serem resolvidas para ambas as séries de estudo, da mesma forma como os problemas tipo fonte se mostraram mais fáceis de serem resolvidos pelos alunos. O erro em cada tipo de problema cresce e decresce no mesmo sentido em ambas as pesquisas, tomando como referência a relação de encadeamento. Esta comparação nos mostra também que os alunos no final do ciclo do ensino básico ainda detêm certas dificuldades em interpretar problemas, uma vez que, os resultados mostram o alto índice de erro.

Vejamos a tabela 9 a seguir que nos mostra um comparativo entre os dados obtidos nessa pesquisa e os resultados de Câmara e Oliveira (2010) em relação as estratégias de base utilizada pelos alunos.

Tabela 9. Comparativo das estratégias de base.

Atribuir valores (AV)	**55%**	40%
Dividir por 3 (D3)	**14%**	34%
Algébrica (AL)	**15%**	9%
Considerar o total como fonte (TF)	**1%**	8%
Cálculo qualquer (CQ)	**10%**	6%
Não identificada (NI)	**5%**	3%

Da mesma forma que na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), tanto os alunos do 6° ano do ensino fundamental como os do 3° ano do ensino médio utilizam com mais frequência a estratégia Atribuir Valores. Observamos um fator interessante nesses dados referente à utilização das estratégias Dividir por 3 e Algébrica, na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) os alunos pouco utilizam a estratégia (AL) 9%, enquanto que nesta pesquisa se constatou que 15% dos problemas foram resolvidos com essa estratégia, a (AL). Vemos também que na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), os alunos do 6° ano utilizaram mais significativamente a estratégia (D3) e esse dado diminui em relação a pesquisa feita com os alunos do 3° ano do ensino médio.

Também fizemos um comparativo com os dados de Câmara e Oliveira (2010) e observamos semelhança entre a escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações dos alunos do ensino médio. Do lado direito da tabela os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo da tabela, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa. Podemos verificar isso na tabela 10 a seguir.

Tabela 10. Comparativo da escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações.

	Fonte		Composição		Poço	
Atribuir valores (AV)	**50%**	37%	**57%**	40%	**61%**	44%
Dividir por 3 (D3)	**17%**	32%	**14%**	33%	**14%**	36%
Algébrica (AL)	**18%**	12%	**12%**	9%	**11%**	6%
Considerar o total como fonte (TF)	**1%**	11%	-	6%	-	7%
Cálculo qualquer (CQ)	**8%**	5%	**14%**	9%	**8%**	6%
Não identificada (NI)	**6%**	3%	**3%**	3%	**6%**	2%

Do lado direito da tabela os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo da tabela, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa. Nela, percebemos que, na estratégia de base AV o percentual de problemas resolvidos cresce tendo em vista a relação de encadeamento, saindo de 50% nos problemas tipo fonte, 57% tipo composição e alcançando maior índice nos problemas tipo poço, com 61%. Esses dados expressam certa dificuldade que cada encadeamento proporciona ao aluno na resolução, constatando que os problemas tipo poço são os mais propícios a estratégia de atribuir valores, devido o maior grau de dificuldade que o problema impõe aos alunos. Em relação a estratégia D3 a pouca variação entre os tipos de encadeamentos, tendo até o mesmo percentual nos encadeamentos tipo composição e poço. Percebemos pelos dados na tabela, que o percentual de problemas resolvidos pelos alunos utilizando a estratégia AL decresce significativamente de acordo com o encadeamento.

Da mesma forma que em nossa pesquisa, no estudo de Câmara e Oliveira (2010) a estratégia AV é mais utilizada nos problemas tipo fonte, com 37% e a um crescimento em relação ao percentual de problemas resolvidos pelos alunos por essa estratégia em cada encadeamento, passando para 40% no tipo composição e 44% no tipo poço constatando um raciocínio semelhante dos alunos das diferentes pesquisas, ainda que, em etapas de ensino diferentes.

O mesmo ocorre para o percentual da estratégia D3, a qual em ambas as pesquisas o percentual de problemas resolvidos por essa estratégia permanece praticamente o mesmo em relação ao tipo de encadeamento.

Olhando para a estratégia AL, percebemos que o percentual de problemas resolvidos decresce de acordo com o encadeamento, ocorrendo o mesmo na pesquisa de

Câmara e Oliveira (2010).

Observando o encadeamento tipo fonte e poço em ambas as pesquisas percebemos que os percentuais se mantem equilibrados em relação a estratégia CQ, no encadeamento tipo composição há uma diferença em relação aos três tipos de encadeamento.

Deste modo podemos compreender que os alunos do ensino médio ainda resolvem problemas de estrutura algébrica carregando estratégias de resolução dos alunos do ensino fundamental.

Capítulo 4

Considerações Finais.

Neste trabalho apresentamos as estratégia de resolução de problemas de partilha de alunos do 3° ano do ensino médio, com o objetivo de verificar a influência do tipo de encadeamento do problema de partilha e comparar rendimento e estratégias dos alunos do 3° ano do ensino médio com estudo realizado com alunos do 6° ano do ensino fundamental na pesquisa desenvolvida por Câmara e Oliveira (2010).

Os resultados do estudo mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo "poço", 48% dos problemas foram resolvidos de maneira errada pelos alunos e apresentam maior facilidade nos problemas tipo "fonte", em que 62% foram resolvidos corretamente. Já em problemas tipo "composição", os resultados nos mostram que esse tipo de problema não gerou tanta dificuldade para os alunos do 3° ano em relação ao grau de dificuldade de resolução, pois 56% foram resolvidos corretamente pelos alunos. Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) 44% dos problemas tipo "poço" foram respondidos de maneira errada pelos alunos, 33% de erro em relação ao tipo composição e 23% nos tipo fonte. Logo, percebemos que os nossos dados convergem no mesmo sentido da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), em relação aos erros e acertos nos problemas tipo poço e fonte, porém, esperávamos que os alunos do 3° ano tivessem maior facilidade em se apropriar dos problemas tipo poço.

Quando nos referimos aos dados observados em relação as estratégias de resolução de problemas de partilha, percebemos no estudo que o uso de raciocínios aritméticos tem prevalecido ainda no último ano do ensino médio, em que se busca partir de valores para as incógnitas, como percebemos na análise feita sobre a estratégia de resolução de Atribuir Valores, 55% dos problemas foram resolvidos pelos alunos por meio dessa estratégia que atribui um determinado valor a uma das incógnitas do problema e em seguida, determinar os outros valores, aplicando as relações entre as incógnitas. Na presente pesquisa observamos que os alunos do 3° ano do ensino médio utilizaram, em maioria, essa estratégia. Da mesma forma se observa na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), em que 40% dos problemas foram resolvidos por essa estratégia, sendo também a maioria.

Percebemos, em nosso estudo, que somente 15% dos problemas foram resolvidos pelos alunos do 3° ano mobilizando a estratégia algébrica e na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) um índice ainda menor, 9%. em que os alunos iniciam o problema estabelecendo relações entre as incógnitas. Observamos esse fato também na pesquisa dos autores, porém, nossa pesquisa focou alunos do 3° ano do ensino médio que já possuem conhecimentos algébricos mais avançados que alunos do 6° ano fundamental, isso parece indicar que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem predominado na formação do pensamento matemático dos alunos.

Questionamos a respeito de como alunos do ensino superior responderiam esse tipo problema, será que ainda com estratégias aritméticas ou com um grau de representação algébrica dentro das expectativas que giram em torno do ensino superior? Uma vez que nos limitamos ao final do ensino médio e seria interessante avançar para o ensino superior.

Outra possível reflexão e questionamento seriam a respeito da dificuldade dos alunos de raciocinarem algebricamente, o que seria possível de ser trabalhado nas aulas de matemática para melhor desenvolver nos alunos o pensamentos algébrico?

Portanto, finalizamos este trabalho com a certeza que nossa pesquisa não respondeu todas as questões relacionadas a nossa proposta de estudo. Nesse sentido, deixamos alguns questionamentos, que, talvez, possam ser respondidas em pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Trabalho de conclusão de curso de Matemática - Universidade Católica de Brasília, Brasília, DF, 2006.

[2] ALMEIDA, J. R..**Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita**: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, PE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, 2011.

[3] BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo. Atual. 1992.

[4] BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

[5] CÂMARA, M., OLIVEIRA, I. C.. Estratégias utilizadas por alunos de 6° ano na resolução de problemas de estrutura algébrica IN: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica**. Salvador , BA, 2010. p. 1-11.

[6] COSTA, W. R. **Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. PE. Educação, Recife, PE, 2010.

[7] DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. Et al. **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1992.

[8] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.

[9] FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar...a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. vol. 4, n.1., p.78-90, março. 1993.

[10] GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, NCE, IM/UFRJ, Rio de Janeiro. 2003.

[11] LOCHHEAD, J., MESTRE, J. P.. Das palavras a álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, ALBERT P. (orgs). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

[12] MARCHAND, P., BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In **Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

[13] SANTOS JUNIOR, Cícero Pinheiro dos. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. Dissertação (Mestrado)– Universidade Federal de Pernambuco, PE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, 2013.

Anexo

Teste 1

1. Deseja-se cortar uma tira de couro de 120 cm de comprimento em duas partes tais que o comprimento de uma seja o triplo da outra. Quanto mede a parte maior?

2. No Havaí é realizado um campeonato de surf em ondas gigantes. A organização do evento divide R$ 27.000,00 como premio para os três primeiros colocados distribuindo a quantia em ordem crescente do terceiro para o primeiro colocado. Sabe-se que o segundo ganha o dobro do terceiro e o primeiro o triplo do segundo. Qual a quantia do premio que o 1°, 2° e o 3° colocado irá receber?

3. Em uma tarde de domingo, Geraldo, Dorival e Murilo foram ao sítio dos avôs de Dorival e levaram bolinhas de gude para jogar. Eles possuem 132 bolinhas de gude e resolveram dividir de modo que Dorival receba 12 bolinhas a mais de Geraldo e Murilo15 bolinhas a menos que Geraldo. Quantas bolinhas de gude devem receber cada um?

4. Bia ganhou uma competição no programa "A arca da felicidade" do famoso apresentador Juju Literato. Ele recebeu como premio 341 moedas de chocolate. Chegando a sua casa, pensando que iria comer tudo sozinha, recebeu a visita de suas primas

Renata e Jaqueline. Assim, dividiu as moedas de chocolate de modo que Renata ficou com 23 moedas a mais que Bia e Jaqueline 34 a mais que Renata. Com quantas moedas de chocolate cada uma ficou?

5. Isabel, Alice e Liliane foram desafiadas por seu professor de matemática a dividir entre elas R$ 133,00 em um exercício na sala de aula. Seu professor impôs as condições que Alice receba o dobro de Isabel e o quádruplo de Liliane. Quanto recebeu cada uma?

6. No feriado do dia 7 de setembro os três amigos Claudio, André e Caio resolveram passar a tarde inteira pescando em um rio. A pescaria dos três foi muito proveitosa, pois muitos peixes foram pescados. No final da tarde decidiram dividir entre eles os 120 peixes que conseguiram pegar juntos e repartiram do seguinte modo: André ficou como dobro de peixes de Claudio e Caio com o triplo de Claudio. Com quantos peixes ficou cada um?

7. Fernando pretende abrir um aquário para visitação pública. Para tanto, teve que adquirir 272 espécies de peixes para colocar em três aquários. Fernando pretende dividir os peixes nos aquários A, B e C. Ele colocou os peixes nos aquários da seguinte forma: O aquário B tem o triplo do A e 50 peixes a mais que o aquário C. Quantos peixes têm em cada aquário?

Teste 2

1. Deseja-se cortar uma tira de couro de 120cm de comprimento em duas partes tais que o comprimento de uma seja o triplo da outra. Quanto mede a parte maior?

2. Antônio, Paulo e Mario saíram de casa com o objetivo de comprar equipamentos esportivos para iniciar seus treinamentos na escolinha de futebol do professor José. No caminho perceberam que juntos tinham R$ 280,00. Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio e Mario tinha R$ 40,00 a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?

3. O senhor Mohamed possui uma grande propriedade nos Emirados Árabes com 125 camelos. Como é de idade avançada e sentindo que está perto de bater as botas, resolveu escrever no seu testamento a divisão dos seus camelos para seus três filhos. No seu testamento estava escrito a forma de como iria repartir, o qual dizia: "O meu filho do meio receberá o dobro do caçula e o mais velho 25 camelos a mais que o filho do meio". Quantos camelos receberá cada filho?

4. Um fazendeiro quer separar 170 galinhas nos galinheiros A, B e C. Ele percebeu que deveria colocar uma determinada quantidade de galinha em cada galinheiro para que não enchesse demais. E assim o fez, ficando os galinheiros do seguinte modo: O galinheiro B tem 25 galinhas a mais que o A e 15 galinhas a mais que o C. Quantas galinhas têm em cada galinheiro?

5. Pedro, Fátima e Rogério colecionam álbuns de figurinhas a muitos anos. Conversando em um determinado dia, viram que, juntos possuíam 173 álbuns de figurinhas. Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro e Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro. Quantos álbuns de figurinhas têm cada um?

6. Luis Augusto fechou sua locadora de DVD que atualmente possui 840 filmes. Sem saber o que fazer com tanto filmes, perguntou a seus três amigos Marcelo, Lucas e Romário se eles queriam os filmes. Seus amigos ficaram animados com a proposta e

aceitaram ganhar os filmes. Luis Augusto dividiu para seus amigos da seguinte forma: Marcelo recebeu 180 filmes a mais que Lucas e o dobro de Romário. Quantos filmes receberam cada um?

7. Samanta, Irajá e Ubiratan colheram 425 unidades de laranjas e querem repartir entre si. Irajá quer receber 55 laranjas a mais que Samanta e Ubiratan por sua vez, quer receber o dobro de Irajá por ter sido o que mais trabalhou. Com quantas laranjas cada um irá ficar?