



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Silvana Oliveira Silva Santos

DIFUSÃO TRANSIENTE NUMA ESFERA:

Uma Aplicação de Séries de Fourier.

Cuité-PB

2015

Silvana Oliveira Silva Santos

DIFUSÃO TRANSIENTE NUMA ESFERA:

Uma Aplicação de Séries De Fourier.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Aluizio Freire da Silva Junior

Cuité-PB

2015



Biblioteca Setorial do CES.

Julho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237d Santos, Silvana Oliveira Silva.

Difusão transiente numa esfera: uma aplicação de Séries de Fourier. / Silvana Oliveira Silva Santos. – Cuité: CES, 2015.

81 fl.

Monografia (Curso de Graduação em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2015.

Orientador: Aluizio Freire da Silva Junior.

1. Séries de Fourier. 2. Difusão. 3. Transferência de massa. I. Título.

CDU 517.95



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Silvana Oliveira Silva Santos

**DIFUSÃO TRANSIENTE NUMA ESFERA:
uma aplicação de séries de Fourier**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de março de 2015.

Banca Examinadora

Aluizio Freire da S. Júnior
Prof. Aluizio Freire da Silva Júnior
(Orientador)

Édna Cordeiro de Souza
Prof.^a Édna Cordeiro de Souza

Maria de Jesus Rodrigues da Silva
Prof.^a Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Aos meus pais Bastinho e Maria Do Carmo, aos meus irmãos Carliano, Cassiano e Claudiano e em especial ao meu esposo José Cícero e ao meu querido filho André Luís, os quais foram fundamentais na concretização deste sonho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS por ter me ajudado a contornar todos os obstáculos que surgiram durante todo o curso, sem ele eu jamais teria conseguido.

Ao meu esposo José Cícero que sempre esteve ao meu lado me apoiando, me incentivando e me ajudando a vencer as dificuldades.

Ao meu filho André Luís que mesmo pequeno nunca foi empecilho para meus estudos, ao contrário muito me impulsionou, pois me renovava as forças para dá continuidade e nunca desistir.

Aos meus pais que sempre me incentivaram a buscar esta conquista e fizeram grande esforço para concretização deste sonho.

Ao meu irmão Carliano que foi peça fundamental, sem ele eu não teria conseguido chegar ao fim.

Ao meu professor orientador Aluizio Freire por ter me orientado tão bem, sempre com muito compromisso e responsabilidade.

Aos componentes da banca, Aluizio Freire, Maria de Jesus e Edna Cordeiro, por se disporem a examinar este trabalho bem como dar sugestões para seu aprimoramento.

A todos os professores com os quais estudei por terem contribuído para minha formação, em especial: Aluizio Freire, Márcia Cristina, Gisélia Vasconcelos, Maria de Jesus, Célia Maria, Glageane Sousa, Renato Ignácio, Lauro Xavier, entre outros.

Ao coordenador do PIBID/Matemática Alexandre Alves, pela confiança depositada em mim enquanto bolsista desse belo programa, no qual eu tanto aprendi quanto cresci enquanto estudante.

Aos meus amigos e colegas de curso e do PIBID pelas experiências trocadas e por estarem sempre ao meu lado me ajudando no que foi possível, em especial: Jucileide Almeida, Joelson Santos, Francilene Almeida, Gerivaldo Bezerra, João Crispin, Edvenilson Dantas, Fabíola da cruz, Francisco Santos, Maciel Araújo, entre outros.

A Escola José Luiz Neto pelo apoio enquanto escola parceira do PIBID e durante os estágios e em especial a professora supervisora Suênia Rodrigues por tudo quanto me ensinou enquanto profissional.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação acadêmica.

“O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria; revelam prudência todos os que o praticam. O seu louvor permanece para sempre.”

Salmos 111:10

Resumo

Este trabalho tem como objetivo obter soluções analíticas para a equação de difusão usando Séries de Fourier. Para isto, inicialmente foi feita uma revisão sobre sequências numéricas e sobre séries numéricas e de funções. Em seguida, apresentamos as Séries de Fourier e alguns resultados importantes relacionados a estas, os quais usamos posteriormente para encontrar as soluções analíticas para equação de difusão. As referidas soluções foram obtidas para as geometrias de uma parede infinita e de uma esfera. Finalmente apresentamos uma aplicação da solução analítica, para a geometria de uma esfera, para a descrição da transferência de massa presente num processo de desidratação osmótica. Através deste trabalho constatou-se a importância das Séries de Fourier para obtenção de soluções analíticas de EDPs e da importância da equação de difusão para descrição do processo de transferência de massa.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Difusão. Transferência de Massa.

Abstract

This study aims to obtain analytical solutions for the diffusion equation using Fourier series. For this, was initially carried out a review of numerical sequences and of numerical and function series. Then the Fourier series were presented, and some important findings related to these, which were subsequently used to find analytical solutions to the diffusion equation. These solutions were obtained for the geometry of an infinite wall and a sphere. Finally we present an application of the analytical solution found to the geometry of a sphere, for the description of the mass transfer in osmotic dehydration process. Through this work it was possible to highlight the importance of the Fourier series to obtain analytical solutions of PDEs and the importance of the diffusion equation for the description of mass transfer process.

Keywords: Fourier series . Mass Transfer . Diffusion.

Sumário

Introdução	10
1 Sequências Numéricas	12
1.1 Classificação: Limitação e Monotonia	13
1.2 Limites de uma Sequência de Números Reais	15
2 Séries Numéricas e de Funções	22
2.1 Séries Numéricas	22
2.2 Séries de Termos Positivos	27
2.3 Séries Alternadas	29
2.4 O Teste da Razão	31
2.5 Sequências e Séries de Funções	35
2.6 O Critério M de Weierstrass para Convergência Uniforme	37
2.7 Propriedades de Séries e Sequências Uniformemente Convergentes.	38
3 Séries de Fourier	42
3.1 Séries Trigonométricas	42
3.2 Séries de Fourier	43
3.3 Mudança de Período	49
3.4 O Teorema de Unicidade	50
3.5 Exemplos	52
4 Aplicações	60
4.1 Difusão Transiente Numa Parede infinita	60
4.2 Difusão Transiente Numa Esfera	67

	9
4.2.1 Transferência de Massa Numa Esfera	74
Conclusão	80
Referências Bibliográficas	81

Introdução

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) foi um importante matemático e físico de origem francesa. Ele ficou orfão muito jovem, pois a sua mãe faleceu quando ele tinha nove anos de idade e o seu pai no ano seguinte. Foi internado na escola militar de Auxerre, um colégio beneditino, onde inicialmente mostrou ter talento para a literatura, mas aos treze anos começou a interessar-se pela matemática. Aos catorze anos já tinha lido os seis volumes do Curso de Matemática de Étienne Bézout e em 1783 recebeu o primeiro prêmio pelo seu estudo da Mecânica Geral de Charles Bossut.

Em 1787, aos 19 anos decidiu seguir carreira religiosa, porém não perdeu a paixão pela matemática, inclusive continuou mantendo contato com um de seus professores de Paris. Dois anos depois resolveu abandonar a carreira religiosa e visitou Paris onde apresentou um artigo à Academia Real de Ciências Francesas sobre suas pesquisas para solução de equações numéricas. Em 1790 tornou-se professor de matemática na escola militar de Auxerre, a mesma na qual havia estudado.

Em 1794 foi nomeado para estudar na École Normale de Paris, uma instituição fundada pela república com o objetivo de ensinar a professores. Nesta escola Fourier demonstrou ser um dos alunos mais brilhantes, onde teve como professores Lagrange, Pierre Simon Laplace e Gaspard Monge, os maiores físicos-matemáticos da época. Em 1822 escreveu um trabalho intitulado por "theorie analytique de la chaleur", este foi um verdadeiro marco da física matemática.

Através do seu estudo sobre a propagação de calor em corpos sólidos analisou a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, dando origem a um tipo especial de séries trigonométricas denominadas Séries de Fourier. Tais Séries são modelos matemáticos utilizados para desenvolver estudos relacionados a processos físicos.

Segundo Fourier, qualquer função periódica, por mais complexa que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente. Além disso, tais séries de funções podem ser infinitas, de tal forma que a convergência destas séries dependem apenas da diferenciabilidade da função f a qual é contínua por partes.

As Séries de Fourier apresentam vastas aplicações em diversas áreas da ciência como, por exemplo, na física e química quântica, acústica, oceanografia, processamento de sinais, engenharia, dentre outras. Estas séries podem desempenhar um importante papel na busca de compreender os diversos fenômenos que ocorrem no mundo. Neste trabalho, tais Séries foram usadas com o objetivo de obter soluções analíticas para a equação de difusão para os problemas de transferência de massa numa parede infinita e numa esfera.

No capítulo 1, procuramos revisar alguns resultados importantes relacionados à sequências numéricas que ajudarão o leitor a entender o capítulo 2.

No capítulo 2, fizemos uma revisão sobre séries numéricas e de funções com o objetivo de usar alguns resultados para introduzir as Séries de Fourier no capítulo seguinte.

No capítulo 3, apresentamos inicialmente as séries trigonométricas de forma geral e em seguida apresentamos um caso particular especial, que são as Séries de Fourier.

No capítulo 4, usamos as Séries de Fourier para encontrar as equações de difusão para os problemas de transferência de massa numa parede infinita e numa esfera e em seguida aplicamos a solução analítica encontrada para esfera para descrever a transferência de massa existente no processo de desidratação osmótica de acerola.

Capítulo 1

Sequências Numéricas

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre alguns resultados importantes relacionados à sequências numéricas, os quais ajudarão o leitor a entender o capítulo 2.

Representamos por \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos, isto é,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Esse conjunto é chamado conjunto dos **números naturais**. O subconjunto de \mathbb{N} constituído dos números pares será representado por \mathbb{N}_P e o subconjunto dos números ímpares, por \mathbb{N}_I . Em símbolos, escrevemos:

$$\mathbb{N}_P = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$\mathbb{N}_I = \{2n - 1; n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $f(n)$.*

O valor da sequência f no número natural n é denominado n -ésimo termo ou termo geral da sequência f e é representado genericamente por a_n, b_n, x_n , etc. Para simplificar, faremos referência ao termo geral a_n como a sequência f tal que $f(n) = a_n$. Uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral a_n ou explicitando-se seus primeiros termos (a_1, a_2, \dots) .

Definição 1.2. *Dada uma sequência $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, as restrições de f a subconjuntos infinitos de \mathbb{N} serão denominadas **subseqüências** de f .*

Representando a sequência f pelo seu termo geral $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que as subseqüências de f , ou de $\{a_n\}$, são aquelas seqüências $\{a_k\}$, com $k \in \mathbb{N}'$, sendo \mathbb{N}' um subconjunto infinito do conjunto dos números naturais. Naturalmente, toda seqüência é uma subseqüência dela própria. Dentre as subseqüências de uma dada seqüência a_n destacamos duas particularmente importantes: a **subseqüência par** $\{a_{2n}\}$ e a **subseqüência ímpar** $\{a_{2n-1}\}$.

Exemplo 1.1. *As subseqüências par e ímpar da seqüência $a_n = (-1)^n$ são as subseqüências constantes a_{2n} e a_{2n-1} , respectivamente.*

1.1 Classificação: Limitação e Monotonia

Definição 1.3. *Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita limitada superiormente quando existir um número real M , denominado cota superior da seqüência, que atende a seguinte condição:*

$$a_n \leq M, \forall n.$$

Definição 1.4. *Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita limitada inferiormente quando existir um número real m , denominado cota inferior da seqüência, que atende a seguinte condição:*

$$m \leq a_n, \forall n.$$

Definição 1.5. *Quando uma seqüência for limitada superiormente e inferiormente, diremos que ela é limitada.*

Observação 1.1. *Note que uma seqüência é limitada se existem M e m tais que $m \leq a_n \leq M, \forall n$.*

É claro que se M for uma cota superior de uma dada seqüência $\{a_n\}$, então qualquer número real maior do que M também será cota superior da seqüência $\{a_n\}$. A

menor dessas cotas superiores é denominada **supremo** da sequência $\{a_n\}$ e denotada por $\sup\{a_n\}$. Analogamente, uma sequência $\{a_n\}$ limitada inferiormente possui uma infinidade de cotas inferiores, sendo a maior delas denominada **ínfimo** da sequência e denotada por $\inf\{a_n\}$. É bom deixarmos claro que toda sequência limitada superiormente tem supremo finito e toda sequência limitada inferiormente tem ínfimo finito. Além disso, para cada $\epsilon > 0$, o número real $\alpha = \sup\{a_n\} - \epsilon$, por ser menor do que o supremo da sequência $\{a_n\}$, não pode ser cota superior e, por essa razão, algum termo da sequência, digamos a_{n_1} , é tal que

$$\alpha = \sup\{a_n\} - \epsilon < a_{n_1}$$

Para o ínfimo ocorre um fato análogo. Sendo $\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon$ um número real maior do que o ínfimo da sequência $\{a_n\}$, algum termo da sequência, digamos a_{n_2} , é tal que:

$$\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon > a_{n_2}.$$

Exemplo 1.2. A sequência de termo geral $a_n = n$ é limitada inferiormente, mas não superiormente. Temos que $\inf\{a_n\} = 1$.

Exemplo 1.3. A sequência de termo geral $a_n = 1 - n^2$ é limitada superiormente, mas não inferiormente. Nesse caso temos que $\sup\{a_n\} = 0$.

Exemplo 1.4. A sequência de termo geral $a_n = (-1)^n$ é limitada, sendo $\sup\{a_n\} = 1$ e $\inf\{a_n\} = -1$.

Exemplo 1.5. A sequência de termo geral $a_n = (-1)^n n$ não é limitada nem superiormente nem inferiormente.

Definição 1.6. Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **monótona crescente** quando $a_n < a_{n+1}, \forall n$, isto é,

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

Definição 1.7. Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **monótona decrescente** quando $a_{n+1} < a_n, \forall n$, isto é,

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

Definição 1.8. Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **monótona não decrescente** quando $a_n \leq a_{n+1}, \forall n$, isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

Definição 1.9. Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **monótona não crescente** quando $a_{n+1} \leq a_n, \forall n$, isto é,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

Como consequência dessas definições, deduzimos que toda sequência monótona crescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, enquanto uma sequência monótona decrescente é limitada superiormente também pelo seu primeiro termo. A única sequência monótona simultaneamente não crescente e não decrescente é a sequência constante.

Exemplo 1.6. As sequências $a_n = n$ e $b_n = \ln(n)$ são crescentes, enquanto $c_n = -n^3$ e $d_n = \frac{1}{n}$ são decrescentes.

1.2 Limites de uma Sequência de Números Reais

Definição 1.10. Dizemos que um número real l é **limite de uma sequência**, ou que a sequência $\{a_n\}$ **converge para l** , quando a seguinte condição for atendida:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - l| < \epsilon, \forall n \geq n_0. \quad (1.1)$$

Sobre a definição 1.10 são necessários os seguintes comentários:

- (a) O número natural n_0 da definição de limite em geral depende do número ϵ dado;
- (b) Sendo a desigualdade $|a_n - l| < \epsilon$ equivalente a $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$, ou ainda que $a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$, a sentença (1.1) estabelece que fora do intervalo aberto $(l - \epsilon, l + \epsilon)$

existe no máximo uma quantidade finita de termos da sequência ou, em outras palavras, que todos os termos da sequência a partir do termo de ordem n_0 estão dentro do intervalo aberto $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$;

(c) A convergência e o valor do limite de uma sequência não são alterados quando se modifica uma quantidade finita de termos. Aqui modificar significa acrescentar, omitir ou simplesmente mudar o valor, por essa razão, dizemos que a convergência de uma sequência é determinada pelo comportamento de sua calda.

(d) Finalmente, observamos que uma sequência convergente não pode ter dois limites. De fato, se

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ e } \ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n),$$

então dado um número real positivo ϵ , existem, de acordo com a definição 1.10, dois números naturais n_1 e n_2 tais que $|a_n - \ell_1| < \epsilon, \forall n \geq n_1$ e $|a_n - \ell_2| < \epsilon, \forall n \geq n_2$. Para que essas desigualdades ocorram simultaneamente, é suficiente considerarmos um índice que seja maior ou igual a n_1 e n_2 , ao mesmo tempo. Se n_3 é um tal índice, temos:

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_{n_3} - \ell_1| + |a_{n_3} - \ell_2| < 2\epsilon$$

e essa desigualdade só é possível para qualquer ϵ positivo quando $\ell_1 = \ell_2$, resultando na unicidade do limite.

Teorema 1.1. *Toda sequência convergente é necessariamente limitada.*

Demonstração. Seja $\{a_n\}$ uma sequência convergente com limite ℓ . Assim pela definição (1.10), fazendo $\epsilon = 1$, existe um índice n_0 a partir do qual se tem $|a_n - \ell| < 1$. Usando a desigualdade triangular podemos assegurar que:

$$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|, \forall n \geq n_0. \quad (1.2)$$

Os únicos termos da sequência que, possivelmente, não atendem à condição anterior são: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0-1}$. Considerando o número real c como o maior entre os números $1 + |\ell|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|$, teremos:

$$|a_n| \leq c, \forall n. \quad (1.3)$$



Observação 1.2. Uma maneira de utilizar o teorema 1.1 para verificar que uma dada sequência não converge é mostrar que ela não é limitada. As sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ cujo os termos gerais são $a_n = n$ e $b_n = -n$ respectivamente não são limitadas, sendo portanto, divergentes. É oportuno observar que a recíproca não é verdadeira, isto é, existem sequências que são ao mesmo tempo limitadas e divergentes. Por exemplo a sequência dada por $a_n = (-1)^n$ é limitada e divergente, ou seja, existe uma grande diferença entre ser limitada e ter limite.

Teorema 1.2. Se $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, então a sequência $a_n = f(n), n > a$, é convergente e seu limite é igual a ℓ . Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, então a sequência a_n é divergente.

Demonstração. Da definição de limite no infinito para funções reais definidas em intervalos, segue que para cada $\epsilon > 0$ existe um número real $k > 0$, tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $\forall x \geq k$. Passando para a linguagem de sequência escolhemos um índice $n_0 \geq k$ e teremos $|f(n) - \ell| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. ■

Este teorema garante a relação entre o comportamento da função e a sua sequência correspondente.

Teorema 1.3. (Propriedades do Limite) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes com limite ℓ e r , respectivamente. Então:

- (a) a sequência $\{a_n \pm b_n\}$ converge para $\ell \pm r$;
- (b) a sequência $\{ca_n\}$ converge para $c.\ell$, onde c é uma constante.
- (c) a sequência $\{|a_n|\}$ converge para $|\ell|$;
- (d) a sequência $\{a_n.b_n\}$ converge para $\ell.r$;
- (e) a sequência $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge para $\frac{\ell}{r}$, quando $r \neq 0$ e $b_n \neq 0, \forall n$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado, pela de definição de limite, existem índices n_1 e n_2 tais que:

$$|a_n - \ell| < \epsilon, \forall n \geq n_1 \quad (1.4)$$

$$|b_n - r| < \epsilon, \forall n \geq n_2 \quad (1.5)$$

e considerando um índice n_0 maior do que n_1 e n_2 , de modo que (1.4) e (1.5) ocorram simultaneamente, temos para $n \geq n_0$ que :

(a) $|a_n \pm b_n - (\ell \pm r)| \leq |a_n - \ell| + |b_n - r| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon;$

(b) $|ca_n - c\ell| = |c||a_n - \ell| < |c|\epsilon;$

(c) $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < \epsilon;$

(d) $|a_n b_n - \ell r| = |a_n b_n - b_n \ell + b_n \ell - \ell r| \leq |b_n||a_n - \ell| + |\ell||b_n - r| \leq (c + |\ell|)\epsilon$, onde c é uma constante positiva que limita a sequência $\{b_n\}$. A existência da constante c é assegurada pelo teorema 1.1.

(e) Seja c um número positivo tal que $\frac{1}{|b_n|} \leq c, \forall n \geq n_0$. Temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\ell}{r} \right| &= \left| \frac{(a_n r - b_n \ell - \ell r + \ell r)}{r b_n} \right| \\ &\leq \frac{1}{|b_n|} \left(|a_n - \ell| + \frac{|\ell|}{|r|} |b_n - r| \right) \\ &< c \left(1 + \frac{|\ell|}{|r|} \right) \epsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.4. *Se uma sequência $\{a_n\}$ converge para zero e $\{b_n\}$ é uma sequência limitada, então a sequência produto $\{a_n b_n\}$ converge para zero.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como a sequência $\{a_n\}$ converge para zero, a este ϵ corresponde um índice n_0 tal que $|a_n| < \epsilon$, sempre que $n \geq n_0$. Ora, sendo $\{b_n\}$ uma sequência limitada, existe uma constante positiva c tal que $|b_n| \leq c$. Seja qual for o índice n , e certamente para qualquer $n \geq n_0$ teremos:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| < c\epsilon.$$

■

Teorema 1.5. *Toda sequência que é ao mesmo tempo limitada e monótona é convergente.*

Demonstração. Seja $\{a_n\}$ uma sequência decrescente limitada e seja $\ell = \inf\{a_n\}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que $\ell + \epsilon > a_{n_0}$, e sendo a sequência $\{a_n\}$ decrescente, temos:

$$a_n \leq a_{n_0} < \ell + \epsilon, \forall n \geq n_0. \quad (1.6)$$

Por outro lado, como ℓ é o ínfimo da sequência $\{a_n\}$, então $\ell \leq a_n, \forall n$, de modo que:

$$\ell - \epsilon < \ell \leq a_n, \forall n. \quad (1.7)$$

combinando (1.6) com (1.7), obtemos

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon, \forall n \geq n_0$$

e isto equivale a:

$$|a_n - \ell| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

com isto provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

A demonstração para sequência crescente limitada é análoga. ■

Acabamos de provar que uma sequência decrescente limitada inferiormente converge para seu ínfimo. De modo análogo, prova-se que uma sequência crescente limitada superiormente é convergente e o limite é o seu supremo.

Teorema 1.6. (sanduíche) *Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ três sequências que satisfazem a seguinte condição: $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$, então a sequência $\{b_n\}$ é convergente e seu limite é igual a ℓ .*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe um índice n_0 a partir do qual se tem:

$$-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon \quad (1.8)$$

e

$$-\epsilon < c_n - \ell < \epsilon. \quad (1.9)$$

Notando que $a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell$ e usando as desigualdades (1.8) e (1.9), obtemos:

$$-\epsilon < b_n - \ell < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Ou de modo equivalente, $|b_n - \ell| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. ■

Enunciaremos o seguinte teorema, o qual nos ajudará a entender a convergência de uma sequência, porém ocultaremos sua demonstração, devido a mesma fugir de nossos objetivos. O leitor interessado pode consultar [6].

Teorema 1.7. *Uma sequência a_n converge para l se, e somente se, suas subsequências convergem para l .*

Teorema 1.8. (teste da razão para sequência) *Se uma sequência $\{a_n\}$ de termos positivos satisfaz à condição $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$, então ela converge para zero.*

Demonstração. Consideremos um número real r tal que $\ell < r < 1$, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, a partir de uma certa ordem n_0 (este índice n_0 corresponde à escolha de $\epsilon = r - \ell$ na definição 1.10). Como $r < 1$, temos para $n \geq n_0$ que $0 < a_{n+1} < a_n r < a_n$ e, portanto, a sequência $\{a_n\}$ se torna decrescente a partir da ordem n_0 .

Assim,

$$0 < a_n \leq a_{n_0}, \forall n \geq n_0. \quad (1.10)$$

E esta relação (1.10) assegura a limitação da sequência $\{a_n\}$, colocando-a nas condições do teorema 1.5, sendo, por conseguinte convergente. Para provar que $\{a_n\}$ converge para zero, suponhamos por absurdo que seu limite é um número $s \neq 0$. Como a sequência $\{a_{n+1}\}$ também converge para s , por ser uma subsequência de $\{a_n\}$, resulta que:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)} \\ &= \frac{s}{s} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Contradizendo a hipótese de $\ell < 1$.



Capítulo 2

Séries Numéricas e de Funções

2.1 Séries Numéricas

Neste capítulo faremos uma revisão sobre séries numéricas e de funções com o objetivo de usar alguns resultados para introduzir as Séries de Fourier no capítulo 3.

Definição 2.1. Chamamos de **série** a soma infinita dos termos de uma sequência de números reais $\{a_n\}$ e representamos simbolicamente por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definição 2.2. Chamamos de **sequência de somas parciais**, a sequência $\{S_n\}$ definida por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n.$$

O termo geral S_n desta sequência é denominado **n-ésima soma parcial da série**.

Definição 2.3. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** quando a sequência $\{S_n\}$ de suas somas parciais for convergente. Neste caso, a soma da série é o limite da sequência $\{S_n\}$, isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Quando não converge, a série é denominada **divergente**.

Exemplo 2.1. *A seguir apresentaremos alguns exemplos importantes de séries.*

(a) **Série Geométrica:** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$

Na série Geométrica, a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ é dada por

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \dots + \alpha r^{n-1}, \quad (2.1)$$

onde r é a razão da série e α o seu coeficiente com $r \neq 0$ e $\alpha \neq 0$. Para $r = 1$ temos de (2.1) que $S_n = \alpha n$ é divergente e, nesse caso, a série geométrica diverge. Quando $r = -1$, a sequência $\{S_n\}$ é tal que $S_{2n} = 0$ e $S_{2n-1} = \alpha, \forall n$. Assim pelo teorema 1.7 temos que $\{S_n\}$ é uma sequência divergente e, nesse caso, a série também diverge. Admitindo $|r| \neq 1$ e multiplicando (2.1) por r , obtemos:

$$rS_n = \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \alpha r^4 + \dots + \alpha r^n \quad (2.2)$$

Subtraindo (2.1) de (2.2) e isolando S_n no primeiro membro, resulta:

$$S_n = \alpha \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right) \quad (2.3)$$

Quando $-1 < r < 1$, o $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $0 < |r| < 1$, temos que $\ln |r|$ está definido, é diferente de zero e, além disso:

$$|r^n - 0| = |r^n| < \epsilon \Leftrightarrow n \ln |r| < \ln \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |r|}$$

e tomando o limite em (2.3), com $n \rightarrow \infty$, deduzimos que, nesse caso, a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ converge para $\frac{\alpha}{1-r}$, sendo este o valor da soma da série. Se $|r| > 1$, usando novamente (2.3), verificamos que a sequência $\{S_n\}$ diverge e, por conseguinte, a série correspondente também diverge. Resumindo, podemos afirmar que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$ converge para $\frac{\alpha}{1-r}$ quando $|r| < 1$, e diverge quando $|r| \geq 1$.

(b) **Série Harmônica:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Denotando por $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais dessa série, temos que:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &= n \left(\frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se a sequência $\{S_n\}$ fosse convergente, então a subsequência $\{S_{2n}\}$ também seria e teria o mesmo limite que $\{S_n\}$ e, dessa forma, teríamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_{2n} - S_n\} = 0$.

Isto não é possível, pois a desigualdade anterior nos assegura que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_{2n} - S_n\} \geq \frac{1}{2}$, caso o limite existisse. Com isso concluímos que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e sua soma é $+\infty$.

(c) **Série de Encaixe:** $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$

O nome série de Encaixe é devido à natureza de seus termos:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

e sua sequência de somas parciais $\{S_n\}$ é da forma:

$$\begin{aligned} S_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se a sequência $\{b_n\}$ convergir para um número l , então, segue de (2.4) que a sequência $\{S_n\}$ converge para $b_1 - l$, sendo este o valor da soma da série. É evidente que se a sequência $\{b_n\}$ divergir, o mesmo ocorrerá com as somas parciais $\{S_n\}$.

Assim, a série de encaixe $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ é convergente se, e somente se, a sequência $\{b_n\}$ o for e, nesse caso, a soma da série é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Teorema 2.1. (Teste do n-ésimo termo) Uma condição necessária para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente é que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demonstração. Denotando por $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais da série, temos que $a_n = S_n - S_{n-1}$ e, considerando que a série é convergente, temos que a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ converge para um certo número l , o mesmo ocorrendo com a subsequência $\{S_{n-1}\}$. então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1}) \\ &= l - l \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.2. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diferem apenas em uma quantidade finita de termos, então ambas são convergentes ou ambas são divergentes.

Demonstração. Suponhamos que existe um índice n_0 a partir do qual $a_n = b_n$ e considere que $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ são as seqüências de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Então para $n > n_0$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + \dots + a_n \quad (2.5)$$

$$R_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n_0} + \dots + b_n \quad (2.6)$$

e como $a_n = b_n$ para $n > n_0$, temos de (2.5) e (2.6) que

$$S_n = R_n + [(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{n_0} - b_{n_0})] \quad (2.7)$$

Observando a relação (2.7), e tendo em vista que a expressão entre colchetes é constante, isto é, não depende do índice n , deduzimos que as seqüências $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ são ambas convergentes ou ambas divergentes. ■

Teorema 2.3. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas e seja α um número real.

(a) Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ também convergem, e valem as relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $\alpha \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ também é divergente.

Demonstração. Sejam S_n , R_n , U_n e V_n as seqüências de somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, respectivamente. Temos que $U_n = S_n + R_n$ e $V_n = \alpha S_n$. Se as seqüências $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ forem convergentes, então pelo teorema 1.3 temos que as seqüências $\{U_n\}$ e $\{V_n\}$ também serão convergentes e, além disso:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + R_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Isto prova a parte (a). Para provar a parte (b), suponhamos por absurdo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ seja convergente. Assim a seqüência $\{U_n\}$ também será convergente, o que implica que a seqüência $\{R_n\}$ também converge. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge o que é uma contradição, logo $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge. Provemos a parte (c). Temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $\alpha \neq 0$. Suponhamos por absurdo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ seja convergente, então a seqüência $\{V_n\}$ é convergente, o mesmo ocorrendo com a seqüência $\{S_n\}$, porque $S_n = \frac{1}{\alpha} V_n$. Mais uma vez chegamos à uma contradição, já que, neste caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é suposta divergente. ■

2.2 Séries de Termos Positivos

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde cada termo a_n é maior do que zero é denominada **série de termos positivos**.

Definição 2.4. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dominada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ quando $a_n \leq b_n, \forall n$. Nesse caso $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é a série dominada e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é a série dominante.

Para séries de termos positivos, os seguintes fatos são óbvios:

- (a) a sequência de somas parciais é monótona crescente;
- (b) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dominada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, as respectivas sequências de somas parciais $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ satisfazem a relação $S_n \leq R_n, \forall n$.

Esses fatos, juntamente com o teorema 1.5, estabelecem o seguinte critério de convergência, conhecido como teste da comparação.

Teorema 2.4. (Teste da comparação) sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos.

- (a) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n, \forall n$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.
- (b) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n \leq b_n, \forall n$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também diverge.

Demonstração. Sejam $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as sequências de somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Como $\{R_n\}$ é uma sequência convergente, ela é limitada. Sendo

$$0 \leq S_n \leq R_n, \forall n,$$

então $\{S_n\}$ além de monótona é também limitada e, portanto, convergente. Logo, a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Note que a letra (b) é a contrapositiva de (a). ■

Enunciaremos o seguinte resultado, para o qual ocultaremos a demonstração. O leitor interessado pode consultar a referência [6].

Teorema 2.5. (Teste da Comparação no Limite) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos e seja $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- (a) Se $l > 0$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

(b) Se $l = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

(c) Se $l = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é divergente.

Teorema 2.6. O valor da soma de uma série de termos positivos convergente não é alterado por um reagrupamento de seus termos.

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos com soma S e seja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a série obtida por reagrupamento. Se $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ denotam, respectivamente, as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, então a sequência $\{S_n\}$ converge para S e para cada n temos $R_n \leq S$. Ora, a sequência $\{R_n\}$ é monótona e limitada por S , logo convergente. Se R é o seu limite, então $R \leq S$ e, podemos olhar a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como obtida de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ por reagrupamento, da mesma forma a sequência $\{R_n\}$ converge para R e para cada n , temos $S_n \leq R$. A sequência $\{S_n\}$ é monótona e limitada por R , logo também é convergente. Por outro lado se S é o seu limite, então $S \leq R$ e, podemos olhar a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ como obtido de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por reagrupamento e desta forma $S \leq R$. com isso concluímos que $S = R$. ■

2.3 Séries Alternadas

Definição 2.5. Uma série cujos os termos são alternadamente positivos e negativos é denominada **Série Alternada**.

Teorema 2.7. (Critério de Leibniz) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos com as seguintes propriedades:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(b) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, isto é, $\{a_n\}$ é monótona não crescente. Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente e, se $\{S_n\}$ representa sua sequência de somas parciais, a soma S da série atende à relação:

$$S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}, \forall n.$$

Demonstração. A sequência de termo geral $b_n = (-1)^n a_n$ converge para zero e além disso, satisfaz as seguintes condições: $b_{2n-1} < 0$, $b_{2n} > 0$, $b_{2n} + b_{2n+1} \geq 0$ e $b_{2n-1} + b_{2n} \leq 0$, $\forall n$. Logo,

$$S_{2n} = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2n-1} + b_{2n})$$

é monótona decrescente e reagrupando seus termos, obtemos:

$$S_{2n} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5) + \cdots + (b_{2n-2} + b_{2n-1}) + b_{2n} \geq 1$$

de onde concluímos que $\{S_{2n}\}$ é limitada inferiormente. Assim, $\{S_{2n}\}$ é decrescente e limitada inferiormente, sendo portanto convergente (veja o teorema 1.5). Raciocinando analogamente, concluímos que a sequência $\{S_{2n-1}\}$ é monótona crescente e limitada superiormente e, portanto, convergente. Como $\{b_{2n}\}$ converge para zero, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - b_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$$

e pelo teorema 1.7, concluímos a convergência da sequência $\{S_{2n}\}$ e por conseguinte da série. Se S representa o valor da soma da série, então as subsequências $\{S_{2n}\}$ e $\{S_{2n-1}\}$ convergem para S , e como vimos na demonstração do teorema 1.5, $S = \inf\{S_{2n}\}$, já que $\{S_{2n}\}$ é decrescente, e $S = \sup\{S_{2n-1}\}$, já que $\{S_{2n-1}\}$ é crescente. Deste modo

$$S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}, \forall n,$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 2.2. Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Temos que $a_n = \frac{1}{n}$ é uma sequência decrescente e tem limite zero. Pelo critério de Leibniz deduzimos que a série é convergente. O mesmo ocorre com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n5^n}$.

Estimativa do Erro

Em muitas situações práticas, mesmo tendo certeza da convergência da série alternada, as vezes é bastante difícil calcular o valor exato de sua soma e, dependendo do caso, um valor aproximado da soma da série pode ser utilizado com sucesso, desde que se estime o erro cometido.

2.4 O Teste da Razão

Como vimos no exemplo 4, a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, enquanto a série obtida desta, considerando cada termo em valor absoluto, é a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente. A operação inversa preserva a convergência, isto é, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente. Para comprovar este fato, primeiro usamos a relação:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \forall n \quad (2.8)$$

e o teste da comparação para concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente, em seguida usamos a relação $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, combinada com o teorema 2.3(a), e concluímos a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Além disso, denotando por $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as sequências de somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, respectivamente, segue da desigualdade triangular para números reais que:

$$\begin{aligned} |S_n| &= |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \\ &= R_n \end{aligned}$$

e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$. Assim,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Definição 2.6. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é denominada absolutamente convergente quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.

Definição 2.7. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

Teorema 2.8. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente com a soma S e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é obtida de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por um reagrupamento, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente e tem soma S .

Demonstração. Temos que

$$0 \leq \sum_{j=1}^n |b_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \forall n$$

de onde segue que as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ formam uma sequência monótona

crescente e limitada, sendo portanto convergente. Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, e resta-nos provar que ela tem soma S . Denotemos por $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, e consideremos $\epsilon > 0$ dado.

A convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ garante a existência de um índice n tal que

$$|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall p \geq 1.$$

Se m é um índice suficientemente grande, então a soma parcial R_m contém todos os termos a_j , $1 \leq j \leq n$, e certamente outros, e dessa forma podemos escrever:

$$R_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_s}$$

onde $k_1, k_2, k_3, \dots, k_s$ são inteiros maiores do que n . Se $n + p_0$ é o maior dos números k_1, k_2, \dots, k_s , então:

$$\begin{aligned} |R_m - S_n| &\leq |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \cdots + |a_{k_s}| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p_0}| \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

e, usando essa desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} |R_m - S| &= |R_m - S_n + S_n - S| \\ &\leq |R_m - S_n| + |S_n - S| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= 2 \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned} \tag{2.9}$$

■

O seguinte resultado sobre o produto de Cauchy para séries absolutamente convergentes será apresentado sem demonstração. O leitor interessado pode consultar [6].

Teorema 2.9. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries absolutamente convergentes então:

(a) a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente; e

(b) o produto de Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Teorema 2.10. (Teste da razão) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série onde cada termo a_n é diferente de zero.*

(a) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$, então a série converge absolutamente.*

(b) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l > 1$, ou $l = \infty$, então a série diverge.*

Demonstração. Supondo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$, escolhamos um número real r tal que $l < r < 1$ e na definição 1.10 de limite de sequência consideramos $\epsilon = r - l$. Existe um índice n_0 a partir do qual é válida a relação :

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - l \right| < r - l$$

ou, de modo equivalente:

$$-r + l < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - l < r - l, \forall n \geq n_0. \quad (2.10)$$

Segue de (2.10) que $|a_{n+1}| < r|a_n|, \forall n \geq n_0$, e nessa desigualdade, fazendo sucessivamente $n = n_0, (n_0 + 1), (n_0 + 2), (n_0 + 3), \dots$, obtemos :

$$|a_{n_0+k}| < r^k |a_{n_0}|, \forall k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.11)$$

de fato, pois

$$\begin{aligned} & r|a_{n_0+k-1}| \\ & r^2|a_{n_0+k-2}| \\ & \vdots \\ & r^k|a_{n_0+k-k}| = r^k|a_{n_0}| \end{aligned}$$

Como $0 < r < 1$, então a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge, e de (2.11) mais o teste

da comparação, deduzimos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ também converge. Para concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, é só aplicar o teorema 2.2, e isto prova a parte (a). Para provar a parte (b), admitimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l > 1$ e consideramos agora r tal que $1 < r < l$. Novamente da definição de limite de seqüência tomamos $\epsilon = l - r$, fixamos um índice n_0 a partir do qual se tem:

$$1 < r = l - \epsilon < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < l + \epsilon, \forall n \geq n_0 \quad (2.12)$$

e daí obtemos $0 < |a_{n_0}| \leq |a_n|, \forall n \geq n_0$. Portanto, a seqüência $\{a_n\}$, caso seja convergente, possui limite diferente de zero. De fato, $0 < |a_n|$ daí $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) \neq 0$. Do teste do n -ésimo termo deduzimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ■

Teorema 2.11. (Teste da Raiz) Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, seja $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- (a) Se $l < 1$, então a série converge absolutamente.
 (b) Se $l > 1$ ou $l = \infty$, então a série diverge.

Demonstração. Análoga à anterior. ■

2.5 Sequências e Séries de Funções

Definição 2.8. Se a cada inteiro positivo n for associada uma função $f_n(x)$, diz-se que as funções $f_n(x)$ formam uma **seqüência de funções**.

Em geral, vamos supor que as funções sejam todas definidas sobre um mesmo intervalo (eventualmente infinito) do eixo x .

Para cada x do intervalo, a seqüência $f_n(x)$ pode convergir ou divergir. Dada uma seqüência, a questão de interesse mais imediato é a determinação dos valores de x para os quais ela converge. Por exemplo, a seqüência $f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$ converge se $-2 < x \leq 2$ e diverge nos demais casos.

Definição 2.9. Chamamos de **séries de funções** as séries cujos os termos são funções.

Isto é:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

A convergência da série é, por definição, equivalente à convergência da sequência das somas parciais. Se $S_n(x)$ converge para $S(x)$ para determinados valores de x , então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

para esse conjunto de valores de x .

Definição 2.10. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **convergirá uniformemente** para $S(x)$, para um conjunto E de valores de x , se, para cada $\epsilon > 0$ dado, for possível determinar um N tal que

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

para $n \geq N$ e para todo x de E .

A definição de convergência uniforme foi dada acima em termos de séries; ela também pode ser dada para sequências.

Definição 2.11. Uma sequência $f_n(x)$ **convergirá uniformemente** para $f(x)$, para um conjunto E de valores de x , se, para cada $\epsilon > 0$, for possível determinar um N tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ e todo x em E .

Assim, a convergência uniforme da série $\sum u_n(x)$ equivale à convergência uniforme da sequência de suas somas parciais $S_n(x)$.

2.6 O Critério M de Weierstrass para Convergência Uniforme

Para demonstrar o critério M de Weierstrass precisaremos do seguinte resultado que ocultaremos a demonstração. O leitor interessado pode consultar [4].

Teorema 2.12. *Se $|a_n| \leq b_n$ para $n \geq n_1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergir, então*

$$|R_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_m = t_n$$

para $n \geq n_1$. A sequência t_n é monótona decrescente e convergente para 0.

Teorema 2.13. (Critério M de Weierstrass para convergência uniforme) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções definidas todas para um conjunto E de valores de x .*

Se existir uma série de constantes convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tal que

$$|U_n(x)| \leq M_n, \text{ para todo } x \text{ de } E,$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergirá absolutamente para cada x de E e será uniformemente convergente em E .

Demonstração. Para cada x fixo de E , cada termo da série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ é inferior ou igual ao termo geral M_n da série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Logo, pelo critério de comparação (teorema 2.4) a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ é convergente, e pela definição 2.6 a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é absolutamente convergente. Resta-nos provar que a série é uniformemente convergente em E .

Temos que $R_n = S - S_n(x)$ é o resto da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ após n termos daí, como no teorema 2.12,

$$|R_n(x)| = |U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \dots|$$

$$\begin{aligned} &\leq |U_{n+1}(x)| + |U_{n+2}(x)| + \cdots \\ &\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

Em outras palavras, se T_n indica o resto da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ após n termos, então

$$T_n = M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots,$$

logo

$$|R_n(x)| \leq T_n$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é uma série de constantes, então para cada $\epsilon > 0$ dado, é possível determinar um N tal que $T_n < \epsilon$ para $n \geq N$. Para esse mesmo N temos

$$|R_n(x)| \leq T_n < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Como N não depende de x , mas somente de E , segue-se que a convergência é uniforme.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ além de convergir absolutamente para cada x de E , também será uniformemente convergente em E . ■

2.7 Propriedades de Séries e Sequências Uniformemente Convergentes.

Teorema 2.14. *A soma de uma série uniformemente convergente de funções é contínua; em outras palavras, se cada $u_n(x)$ é contínua em $a \leq x \leq b$, então $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é contínua, contanto que a série convirja uniformemente em $a \leq x \leq b$.*

Demonstração. Dados x_0 , com $a \leq x_0 \leq b$, e $\epsilon > 0$, procuramos um δ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

quando

$$|x - x_0| < \delta,$$

e estando x no intervalo dado. Escolhemos N suficientemente grande para que

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\epsilon, \quad a \leq x \leq b, \quad n \geq N, \quad (2.13)$$

onde $S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$. Isso pode ser feito, pois a série é uniformemente convergente. A função $S_n(x)$, sendo a soma de um número finito de funções contínuas, é contínua. Portanto podemos escolher um δ tal que

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon \quad \text{para } |x - x_0| < \delta \quad (2.14)$$

Por (2.13), temos

$$|S_N(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\epsilon, \quad |S_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon \quad (2.15)$$

Logo, usando (2.14) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - S_N(x) + S_N(x) - S_N(x_0) + S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon \\ &= \frac{3}{3}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \text{para } |x - x_0| < \delta$$

Logo a soma $f(x)$ é contínua. ■

Observação 2.1. *Sozinha, a propriedade de convergência para uma série de funções contínuas não garante a continuidade da soma.*

Teorema 2.15. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ são uniformemente convergentes em $a \leq x \leq b$ e se $h(x)$ é contínua em $a \leq x \leq b$, então as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) + v_n(x)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - v_n(x)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} [h(x)u_n(x)]$$

São uniformemente convergentes em $a \leq x \leq b$.

Demonstração. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ as somas de $\sum u_n(x)$ e $\sum v_n(x)$, respectivamente. Sejam $S_n(x)$ e $Q_n(x)$ as somas parciais correspondentes. A n -ésima soma parcial de $\sum (u_n + v_n)$ é $S_n + Q_n$. Dado um $\epsilon > 0$, escolhemos um N de tal modo que

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon, \quad |Q_n(x) - g(x)| < \frac{1}{2}\epsilon,$$

para $n \geq N$ e $a \leq x \leq b$. Então

$$\begin{aligned} |\{S_n(x) + Q_n(x)\} - \{f(x) + g(x)\}| &= |S_n(x) + Q_n(x) - f(x) - g(x)| \\ &= |S_n(x) - f(x) + Q_n(x) - g(x)| \\ &\leq |S_n(x) - f(x)| + |Q_n(x) - g(x)| \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \frac{2}{2}\epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum (u_n + v_n)$ converge uniformemente para $f(x) + g(x)$. Analogamente se mostra a convergência da diferença.

Mostremos agora a convergência uniforme da série $\sum_{n=1}^{\infty} h(x)u_n(x)$. Como $h(x)$ é contínua em $a \leq x \leq b$, ela é necessariamente limitada: $|h(x)| \leq M$ para $a \leq x \leq b$. Onde, fixado um N como na demonstração anterior, temos

$$\begin{aligned} |S_n(x) - f(x)| &= |h(x)S_n(x) - h(x)f(x)| \\ &= |h(x)||S_n(x) - f(x)| \\ &< M \frac{1}{2} \epsilon \\ &< M \epsilon \end{aligned}$$

para $n \geq N$. Isso mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} h(x)u_n(x)$ converge uniformemente para $h(x)f(x)$. Observa-se que, na realidade, só precisamos que $h(x)$ seja limitada. ■

Capítulo 3

Séries de Fourier

Neste capítulo encontraremos inicialmente as séries trigonométricas de forma geral e em seguida um caso particular especial, as Séries de Fourier.

3.1 Séries Trigonométricas

Definição 3.1. *Uma série trigonométrica é uma série da forma*

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn} x + \cdots, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são constantes.

Cada termo em (3.1) tem a propriedade de repetir-se em intervalos de 2π :

$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \cdots, \\ \cos[n(x + 2\pi)] &= \cos(nx + 2n\pi) = \cos nx, \cdots, \end{aligned}$$

Segue-se que, se (3.1) converge para todo x , então sua soma $f(x)$ também deve repetir-se em intervalos de 2π e deste modo podemos dizer que f tem período 2π , ou seja,

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x. \quad (3.2)$$

De modo geral uma função $f(x)$ tal que

$$f(x+p) = f(x), (p \neq 0) \quad (3.3)$$

é dita **periódica** com período p para todo x . Deve-se notar que $\cos x$, tem, além do período 2π , período π e de maneira genérica, $\cos x$ e $\sin x$ tem período $\frac{2\pi}{n}$. No entanto 2π é o único desses períodos que é compartilhado por todos os termos da série.

Se $f(x)$ tem período p , então a substituição:

$$x = \frac{pt}{2\pi} \quad (3.4)$$

transforma $f(x)$ numa função de t que tem período 2π , pois quando t aumenta de $2\pi x$ aumenta de p .

3.2 Séries de Fourier

Suponhamos agora que uma função periódica $f(x)$ seja a soma de uma série trigonométrica (3.1), isto é, que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.5)$$

Existe uma relação entre os coeficientes a_n e b_n e a função $f(x)$. Para conhecermos tal relação, multiplicamos $f(x)$ por $\cos mx$ e integramos de $-\pi$ a π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \right] dx.$$

Se for válida a integração termo a termo, acharemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

As integrais do segundo membro são facilmente calculáveis com ajuda das identidades para $\cos x \cos y$ e $\sin x \cos y$. Acha-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n = m \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0.$$

Portanto, se $m = 0$, todos os termos do segundo membro de (3.6) serão 0, exceto o primeiro, e achamos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \quad (3.8)$$

Para qualquer inteiro m , só o termo em a_m é diferente de 0. Logo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Multiplicando $f(x)$ por $\sin mx$ e procedendo do mesmo modo, achamos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

Das três últimas fórmulas concluímos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Essa é a regra fundamental para os coeficientes numa Série de Fourier.

Definição 3.2. Definimos uma série de Fourier como sendo uma série trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots, \quad (3.12)$$

em que os coeficientes a_n e b_n são calculados a partir de uma função $f(x)$ por (3.11). A série é então chamada a **Série de Fourier de $f(x)$** . Com relação a $f(x)$ supomos apenas que as integrais em (3.11) existem; para isso basta que $f(x)$ seja contínua a menos de um número finito de saltos entre $-\pi$ e π .

Para demonstrar o próximo teorema precisaremos do seguinte resultado que ocultaremos a demonstração, devido a mesma fugir de nossos objetivos. Caso o leitor tenha algum interesse por tal demonstração, a mesma se encontra na referência [4].

Teorema 3.1. Uma série de funções contínuas uniformemente convergente é integrável termo a termo; isto é, se cada $u_n(x)$ é contínua em $a \leq x \leq b$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \cdots + \int_a^b u_n(x) dx + \cdots$$

Teorema 3.2. Toda série trigonométrica uniformemente convergente é uma série de Fourier. Mais precisamente, se a série (3.12) converge uniformemente a $f(x)$ para todo x , então $f(x)$ é contínua para todo x , $f(x)$ tem período 2π , e a série (3.12) é a Série de Fourier de $f(x)$.

Demonstração. Como a série converge uniformemente para todo x , sua soma $f(x)$ é contínua para todo x (teorema 2.14). A série permanece uniformemente convergente se todos os seus termos são multiplicados por $\cos mx$ ou por $\sin mx$ (teorema 2.15). Portanto a integração termo a termo da equação (3.6) é justificada (teorema 3.1). Portanto, a série (3.12) é a série de Fourier de f . ■

Corolário 3.1. Se duas Séries trigonométricas convergem uniformemente para todo x e tem a mesma soma para todo x :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

então as séries são idênticas: $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n$, $b_n = b'_n$ para $n = 1, 2, \dots$. Em particular, se uma série trigonométrica converge uniformemente a 0 para todo x , então todos os coeficientes são 0.

Demonstração. Denotemos por $f(x)$ a soma de ambas as séries. Então, pelo teorema 3.1,

$$a_n = a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e, analogamente, $b_n = b'_n$ para todo n . Se $f(x) \equiv 0$, então todos os coeficientes são 0.

Definição 3.3. Chamamos uma função f , definida para $a \leq x \leq b$, de **contínua por partes** nesse intervalo, se o intervalo pode ser subdividido em um número finito de subintervalos dentro dos quais f é contínua e tem limites finitos nas extremidades do subintervalo.

Note que a função f da definição 3.3 coincide, no interior do i -ésimo intervalo, com a função f_i que é contínua no intervalo fechado.

Definição 3.4. Se as funções f_i tem derivadas primeiras contínuas, dizemos que a função f , contínua por partes, é **lisa por partes**. Se, além disso, as funções f_i tem derivadas segundas contínuas, dizemos que f é **muito lisa por partes**.

Enunciaremos a seguir o Teorema Fundamental (resultado este que utilizaremos em demonstrações posteriores) para o qual ocultaremos a demonstração, que se encontra na referência [4].

Teorema 3.3. (Teorema Fundamental): Seja $f(x)$ uma função muito lisa por partes no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Então a série de Fourier de $f(x)$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

converge a $f(x)$ em todo ponto interior em que $f(x)$ seja contínua, a

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \right]$$

em todo ponto de descontinuidade interior ao intervalo, e a

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) \right]$$

em $x = \pm\pi$. A convergência é uniforme em todo intervalo fechado que contenha descontinuidades.

Seja $f(x)$ definida em $(-\pi, \pi)$ e suponhamos

$$f(-x) = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (3.13)$$

Então f é chamada uma **função par** de x (no intervalo dado). Se, de outro lado,

$$f(-x) = -f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (3.14)$$

então f é chamada uma **função ímpar** de x . Observamos que o produto de duas funções pares ou de duas funções ímpares é par, enquanto que o produto de uma função ímpar e uma função par é ímpar. Além disso,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ ímpar} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ par} \end{cases} \quad (3.15)$$

Consideremos agora f uma função par no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Se f é par, então $f(x)\cos nx$ também é par (produto de duas funções pares), enquanto que $f(x)\sen nx$ é ímpar (produto de uma função par com uma função ímpar). Logo, por (3.14),

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Analogamente, se f é ímpar,

$$a_n = 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \quad (3.16)$$

Temos assim as expansões (para uma função lisa por partes):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx) \quad (f \text{ par}), \quad (3.17)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx) \quad (f \text{ ímpar}), \quad (3.18)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx$$

Note que (3.17) só usa os valores de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = \pi$. Logo para toda função $f(x)$ dada somente nesse intervalo, podemos formar a série (3.17). Esta é chamada a série de Fourier de cossenos para $f(x)$. Segue do Teorema Fundamental que a série será convergente para $f(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$ e, fora desse intervalo, converge para a função periódica.

Da mesma forma, (3.18) define a série de Fourier de senos para uma função $f(x)$ definida apenas entre 0 e π . Essa série representa uma função periódica ímpar que coincide com $f(x)$ para $0 < x < \pi$.

3.3 Mudança de Período

Se $f(x)$ tem período p ,

$$f(x + p) = f(x) \quad (p \neq 0)$$

então a substituição

$$x = \frac{p}{2\pi}t$$

transforma $f(x)$ numa função $g(t)$:

$$g(t) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right),$$

e $g(t)$ tem período 2π pois,

$$g(t + 2\pi) = f\left[\frac{p}{2\pi}(t + 2\pi)\right] = f\left(\frac{pt}{2\pi} + p\right) = f\left(\frac{pt}{2\pi}\right) = g(t)$$

A mudança de x para t é apenas uma mudança de escala. Como g tem período 2π , temos a seguinte Série de Fourier de g (suposta muito lisa por partes):

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

onde, por exemplo,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt \quad e \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt$$

Se agora t for substituído por $\left(\frac{2\pi}{p}\right)x$, encontramos uma Série de Fourier para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) \right] \quad (3.19)$$

Os coeficientes a_n e b_n podem ser expressos diretamente em termos de $f(x)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) dx, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $p = 2L$

A Série de Fourier de cossenos também pode ser usada aqui. Tem-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{p} x \right), 0 \leq x \leq L, \quad (3.21)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) dx, \quad (3.22)$$

Analogamente, $f(x)$ tem uma Série de Fourier de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(n \frac{2\pi}{p} x \right), 0 \leq x \leq L, \quad (3.23)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(n \frac{2\pi}{p} x \right) dx \quad (3.24)$$

3.4 O Teorema de Unicidade

Se duas funções $f(x)$ e $f_1(x)$ tem o mesmo conjunto de coeficientes de Fourier, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sen nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sen nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$
(3.25)

Elas são necessariamente idênticas, ou seja, uma função é univocamente determinada por seus coeficientes de Fourier.

Teorema 3.4. (Teorema da Unicidade). *Sejam $f(x)$ e $f_1(x)$ funções contínuas por partes no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ e satisfazendo a (3.25), de modo que as duas funções tenham os mesmos coeficientes de Fourier. Então $f(x) = f_1(x)$, exceto talvez nos pontos de descontinuidade.*

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) - f_1(x)$. Então $h(x)$ é contínua por partes e, por (3.25), segue imediatamente que todos os coeficientes de Fourier de $h(x)$ são 0. Mostramos então que $h(x) = 0$ exceto talvez nos pontos de descontinuidade.

Suponhamos $h(x) \neq 0$ num ponto de continuidade x_0 , por exemplo, $h(x_0) = 2c > 0$. Então, pela continuidade, $h(x) > c$ para $|x - x_0| < \delta$ e δ suficientemente pequeno.

Agora obteremos uma contradição mostrando que existe um "polinômio trigonométrico"

$$p(x) = p_0 + p_1 \cos x + p_2 \sen x + \dots + p_{2k-1} \cos kx + p_{2k} \sen kx$$

que representa uma "pulsção" em x_0 de amplitude arbitrariamente grande e largura arbitrariamente pequena. Se tal pulsção puder ser construída, obteremos uma contradição. Temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)p(x) dx = p_0 \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx + p_1 \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos x dx + \dots$$

Por outro lado, a maior parte da integral $\int h(x)p(x) dx$ está concentrada no intervalo em que ocorre a pulsção; onde, $h(x)$ é positiva e $p(x)$ é positiva e grande. Portanto a integral é positiva e não pode ser 0. Para tornar mais preciso, tomamos

$$p(x) = [\psi(x)]^N,$$

onde $\psi(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta$ e N é um inteiro positivo conveniente.

Como as funções $\sin^n x$ e $\cos^n x$ podem ser expressas como polinômios trigonométricos, a função $p(x)$ é um polinômio trigonométrico. Seja

$$k = \psi\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos\delta.$$

Então $k > 1$ e $p \geq k^N$ para $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$. Como ψ é positiva (maior que 1) para $\frac{\delta}{2} \leq |x - x_0| < \delta$, p é positiva aí. Por outro lado, $|\psi(x)| < 1$ para $-\pi \leq x < x_0 - \delta$ e para $x_0 + \delta < x \leq \pi$, de modo que $|p| < 1$. Agora, sendo a função $h(x)$ contínua por partes, ela é limitada por uma constante M para $-\pi \leq x \leq \pi$, isto é $|h(x)| \leq M$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. Resulta, das propriedades de $p(x)$ mencionadas, que $p(x)h(x) > -M$ para $-\pi \leq x \leq x_0 - \frac{\delta}{2}$ e para $x_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq \pi$, enquanto $p(x)h(x) \geq ck^N$ para $x_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)p(x)dx &= \int_{-\pi}^{x_0 - (\frac{1}{2})\delta} p(x)h(x)dx + \int_{x_0 + (\frac{1}{2})\delta}^{\pi} p(x)h(x)dx \\ &+ \int_{x_0 - (\frac{1}{2})\delta}^{x_0 + (\frac{1}{2})\delta} p(x)h(x)dx > -M(2\pi - \delta) + ck^N\delta \end{aligned}$$

Como $k^N \rightarrow +\infty$ quando $N \rightarrow \infty$, o segundo membro da desigualdade é certamente positivo quando N é suficientemente grande. Portanto o primeiro membro é positivo para uma escolha adequada de N . Isso contradiz o fato que o primeiro membro é 0. logo $h(x) = f(x) - f_1(x) = 0$ onde $f(x)$ e $f_1(x)$ sejam contínuas. E portanto $f(x) = f_1(x)$.

3.5 Exemplos

Nesta seção mostraremos alguns exemplos da expansão das Séries de Fourier para algumas funções.

Consideraremos as duas funções seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ onde } f(x+2) = f(x),$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \text{ onde } f(x+4) = f(x)$$

Primeiramente encontraremos a Série de Fourier para a função dada e em seguida esboçaremos o gráfico desta função. Na sequência esboçaremos os gráficos da expansão da Série de Fourier considerando um termo, dez termos, trinta termos e cinquenta termos. Finalmente faremos uma avaliação do valor adequado para n .

Soluções

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ onde } f(x+2) = f(x),$$

Neste caso temos que $L = 1$.

Para encontrarmos os valores dos coeficientes a_n e b_n basta substituírmos o valor de L nas suas respectivas fórmulas,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ para } n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ para } n > 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos(0) dx = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

portanto

$$a_0 = 1,$$

para $n > 0$, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 (x+1) \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_{-1}^0 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resolvendo as integrais indefinidas separadamente encontramos:

$$\int x \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} [n\pi x \operatorname{sen}(n\pi x) - \cos(n\pi x)] + c \quad (3.28)$$

e

$$\int \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) + c. \quad (3.29)$$

Aplicando (3.28) e (3.29) em (3.27) obtemos

$$a_n = \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - \cos(-n\pi)] + \frac{1}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1] + 0 = 0,$$

assim,

$$a_n = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{1} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 x \operatorname{sen}(n\pi x) + \int_{-1}^0 \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Resolvendo as integrais indefinidas encontramos:

$$\int x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} [-n\pi x \cos(n\pi x) + \operatorname{sen}(n\pi x)] + c \quad (3.31)$$

e

$$\int \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} + c. \quad (3.32)$$

Aplicando (3.31) e (3.32) em (3.30), encontramos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n^2 \pi^2} [-n\pi \cos(-n\pi)] - \frac{1}{n\pi} + \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n^2 \pi^2} [-n\pi \cos(n\pi)] \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= -\frac{1}{n\pi} (1 + \cos(n\pi)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

portanto,

$$b_{2n-1} = 0 \text{ e } b_{2n} = -\frac{2}{2n\pi} = -\frac{1}{n\pi}, \quad n \geq 1$$

como,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \quad (3.34)$$

obtemos,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(2n\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}(2\pi x) - \frac{1}{2\pi} \text{sen}(4\pi x) - \dots$$

O gráfico da figura 3.1, feito através do programa mathematica versão 9.0, representa a função $f(x)$ e os das figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 representam a mesma função $f(x)$ juntamente com os gráficos da expansão da Série de Fourier, considerando-se respectivamente os seguintes valores para n : $n = 1$, $n = 10$, $n = 30$ e $n = 50$, onde n é o número de termos da Série de Fourier.

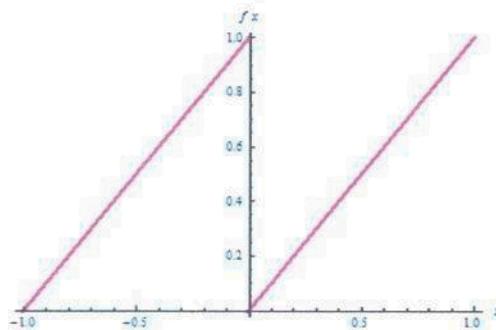


Figura 3.1: Gráfico da função $f(x)$ no intervalo $-1 \leq x < 1$.

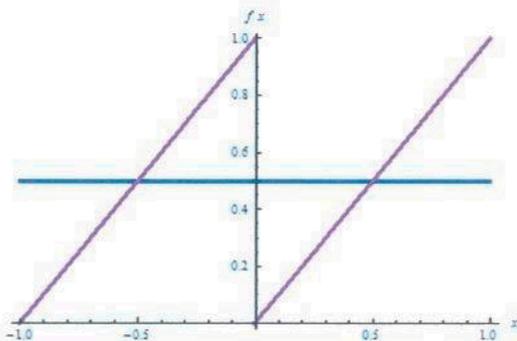


Figura 3.2: Expansão da Série de Fourier para $n = 1$.

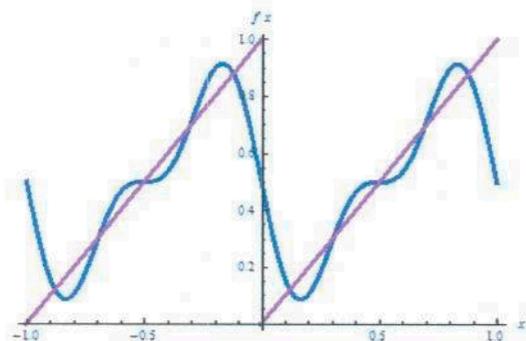


Figura 3.3: Expansão da Série de Fourier para $n = 10$.

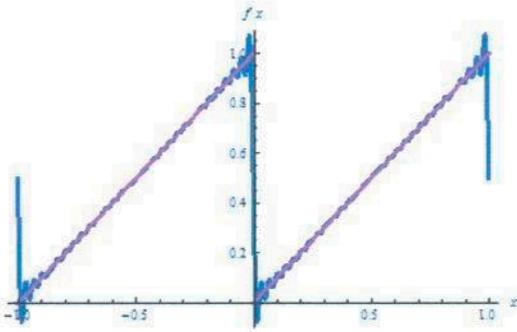


Figura 3.4: Expansão da Série de Fourier para $n = 30$.

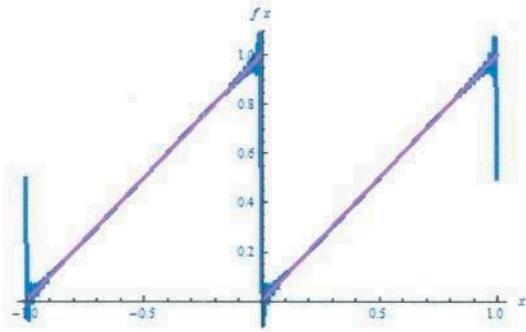


Figura 3.5: Expansão da Série de Fourier para $n = 50$.

Encontraremos agora as soluções para a função $g(x)$. Como os cálculos são análogos aos do exemplo anterior resolveremos de forma mais direta.

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \text{ onde } f(x+4) = f(x)$$

Solução

Neste caso, temos $L = 2$, o que nos dar

$$a_0 = 0 \text{ e } a_n = 0 \text{ para } n > 0.$$

Por outro lado, temos

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \text{ e portanto } b_{2n} = 0 \text{ e } b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, \quad n \geq 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) + \frac{4}{3\pi} \text{sen} \left(\frac{3\pi x}{2} \right) + \frac{4}{5\pi} \text{sen} \left(\frac{5\pi x}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Representamos através da figura 3.6 o gráfico da função $g(x)$, além disso representamos também, através das figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10, a mesma função $g(x)$ juntamente com os gráficos das expansões das Séries de Fourier para um, dez, trinta e cinquenta termos.

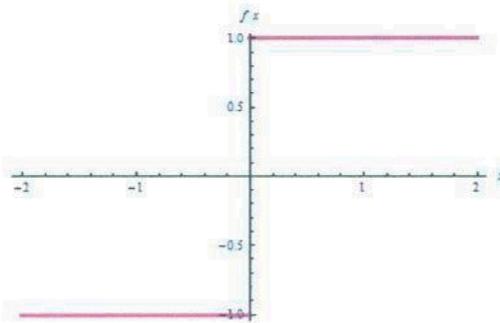


Figura 3.6: Gráfico da função $g(x)$ no intervalo $-2 \leq x < 2$.

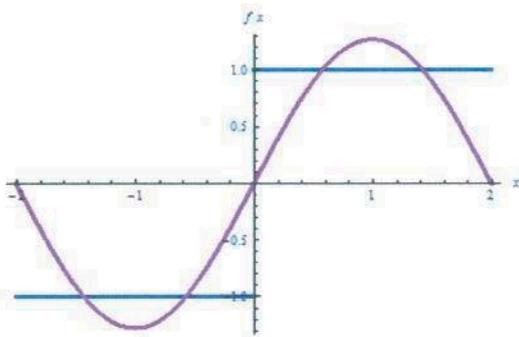


Figura 3.7: Expansão da Série de Fourier para $n = 1$.

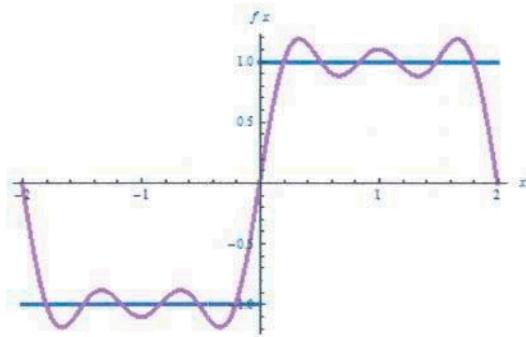


Figura 3.8: Expansão da Série de Fourier para $n = 10$.

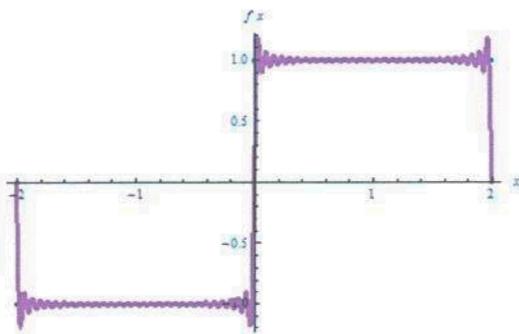


Figura 3.9: Expansão da Série de Fourier para $n = 30$.

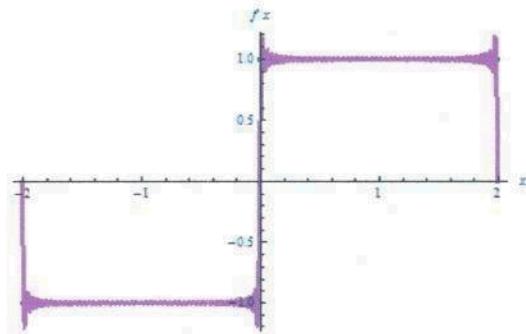


Figura 3.10: Expansão da Série de Fourier para $n = 50$.

Notemos que, assim como aconteceu no exemplo anterior, quanto maior for o número de termos da Série de Fourier, mais esta série converge para a função $g(x)$. Do

mesmo modo podemos notar também que a partir de trinta termos a diferença entre os gráficos também é insignificante, logo um valor adequado para n seria trinta termos.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo encontraremos as soluções da equação de difusão para os problemas de transferência de massa numa parede infinita e numa esfera e aplicaremos a solução analítica numa esfera para estudar a perda de água de acerolas num processo de desidratação osmótica.

4.1 Difusão Transiente Numa Parede infinita

A variável Φ da equação de difusão (4.1) é a grandeza de interesse, a qual, dependendo do problema estudado, pode representar entre outras grandezas, temperatura e teor de umidade. Neste caso o t representa o tempo e o x representa a posição.

Consideraremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

condições inicial e de contorno:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_i \text{ em } 0 < x < L \\ t > 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L \end{cases}$$

Solução

Por uma condição física, após um determinado tempo, a grandeza de interesse na placa tende a um valor de equilíbrio $V(x)$ independente do tempo e das condições

iniciais. Como $V(x)$ tem que satisfazer a equação 4.1, então:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (4.2)$$

Mas, V depende apenas de x , logo

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Dessa forma,

$$\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial V}{\partial x} dx = C \Rightarrow V(x) = Cx + D.$$

Aplicando as condições de contorno, obtemos:

$$V(0) = \Phi_0 \Rightarrow C \cdot 0 + D = \Phi_0 \Rightarrow D = \Phi_0;$$

$$V(L) = \Phi_0 \Rightarrow C \cdot L + D = \Phi_0 \Rightarrow CL + \Phi_0 = \Phi_0 \Rightarrow C = \frac{\Phi_0 - \Phi_0}{L} \Rightarrow C = 0.$$

Assim,

$$V(x) = Cx + D \Rightarrow V(x) = 0 + \Phi_0 \Rightarrow V(x) = \Phi_0.$$

Voltando ao problema inicial, vamos escrever $\Phi(x, t)$ como uma soma de uma parcela estacionária, $V(x)$, e uma transiente, $W(x, t)$ ou seja,

$$\Phi(x, t) = V(x) + W(x, t).$$

Substituindo na equação 4.2, encontramos:

$$\alpha \frac{\partial^2 [V(x) + W(x, t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial [V(x) + W(x, t)]}{\partial t}$$

que equivale a

$$\alpha \frac{\partial^2 [\Phi_0 + W(x, t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial [\Phi_0 + W(x, t)]}{\partial t}$$

de onde segue que

$$\alpha \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial t}$$

Das condições de contorno $\Phi(0, t) = \Phi_0$ e $\Phi(L, t) = \Phi_0$, encontramos:

- $\Phi(0, t) = V(0) + W(0, t) = \Phi_0 \Rightarrow \Phi_0 + W(0, t) = \Phi_0 \Rightarrow W(0, t) = 0$
- $\Phi(L, t) = V(L) + W(L, t) = \Phi_0 \Rightarrow \Phi_0 + W(L, t) = \Phi_0 \Rightarrow W(L, t) = 0$

Da condição inicial $\Phi(x, 0) = \Phi_i$, obtemos:

- $\Phi(x, 0) = V(x) + W(x, 0) = \Phi_i \Rightarrow \Phi_0 + W(x, 0) = \Phi_i \Rightarrow W(x, 0) = \Phi_i - \Phi_0.$

Dessa forma a parcela transiente satisfaz o problema:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \\ W(x, 0) = \Phi_i - \Phi_0 \\ W(0, t) = 0, \quad W(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando as variáveis, temos:

$$W(x, t) = X(x) \cdot \Phi(t)$$

Substituindo na equação 4.2, encontramos:

$$\alpha \cdot X''(x) \cdot \Phi(t) = X(x) \cdot \Phi'(t),$$

resultando em

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \sigma$$

dessa forma,

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0 & (I) \\ \Phi'(t) - \alpha\sigma\Phi(t) = 0 & (II) \end{cases}$$

Usando as condições de contorno temos

$$W(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)\Phi(t) = 0,$$

$$W(L, t) = 0 \Rightarrow X(L)\Phi(t) = 0.$$

Como não tem sentido $\Phi(t) = 0$ para todo t , as igualdades acima resultam em:

$$X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0.$$

A equação (I) pode, juntamente com essas condições, gerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0 \\ X(0) = 0; \quad X(L) = 0 \end{cases}$$

A equação característica é $\lambda^2 - \sigma = 0$. Vamos analisar agora os seguintes casos:

I) $\sigma > 0$

$$\lambda^2 - \sigma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\sigma}.$$

Assim,

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\sigma}x} + C_2 e^{\sqrt{\sigma}x}.$$

Como,

$$X(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$\begin{aligned}
X(L) = 0 &\Rightarrow C_1 e^{-\sqrt{\sigma}L} + C_2 e^{\sqrt{\sigma}L} = 0 \\
&\Rightarrow -C_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} + C_2 e^{\sqrt{\sigma}L} = 0 \\
&\Rightarrow C_2(-e^{-\sqrt{\sigma}L} + e^{\sqrt{\sigma}L}) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Segue que $C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Dessa forma, teríamos $X(x) = 0$, o que não nos interessa.

II) $\sigma = 0$

Neste caso, a equação $X''(x) - \sigma X(x) = 0$, se reduziria a $X''(x) = 0$. Logo,

$$X'(x) = C \Rightarrow X(x) = Cx + D.$$

Daí,

$$X(0) = 0 \Rightarrow C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0,$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C \cdot L + D = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Resultando em $X(x) = 0$, mais uma vez.

III) $\sigma < 0$

Neste caso, $\lambda^2 - \sigma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\sigma}$ Gerando a seguinte solução:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\sigma}x) + C_2 \sen(\sqrt{\sigma}x),$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sen(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(\sqrt{\sigma}L) + C_2 \sen(\sqrt{\sigma}L) = 0 \Rightarrow C_2 \sen(\sqrt{\sigma}L) = 0.$$

Temos então que $C_2 \neq 0$, pois, caso contrário, $X(x) = 0$, resultando em $W(x, t) = 0$.

Logo,

$$\text{sen}(\sqrt{\sigma}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\sigma}L = n\pi \Rightarrow \sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto,

$$X(x) = C_2 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Vamos agora resolver a equação (II) considerando $\sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

Uma solução particular da equação $\Phi'(t) - \alpha\sigma\Phi(t) = 0$ é dada por $\Phi(t) = e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$.

Assim, para cada n , temos:

$$W_n(x, t) = X(x) \cdot \Phi(t)$$

$$W_n(x, t) = C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Usando o teorema da superposição, temos que combinações lineares de soluções, são soluções do problema de valor de contorno. Admitindo esse fato para uma soma infinita (série), temos:

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Da condição inicial, temos $W(x, 0) = \Phi_i - \Phi_0$. Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \Phi_i - \Phi_0,$$

que é a Série de Fourier das somas de $\Phi_i - \Phi_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (\Phi_i - \Phi_0) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 2 \left(\frac{\Phi_i - \Phi_0}{L} \right) \int_0^L \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= -2 \left(\frac{\Phi_i - \Phi_0}{L} \right) \cdot \frac{L}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^L = -2 \left(\frac{\Phi_i - \Phi_0}{n\pi} \right) [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{\Phi_i - \Phi_0}{n\pi} \right) \cdot [1 - \cos(n\pi)]$$

Se n for par, então $\cos(n\pi) = 1$. Logo, $C_n = 0$;

Se n for ímpar, então $\cos(n\pi) = -1$. Logo, $C_n = \frac{4(\Phi_i - \Phi_0)}{n\pi}$; Desta forma,

$$C_{2n} = 0$$

e

$$C_{2n-1} = \frac{4(\Phi_i - \Phi_0)}{(2n-1)\pi}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim,

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\Phi_i - \Phi_0)}{(2n-1)\pi} \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Como a solução do problema é da forma:

$$\Phi(x, t) = V(x) + W(x, t),$$

temos,

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\Phi_i - \Phi_0)}{(2n-1)\pi} \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t},$$

que equivale a:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{4(\Phi_i - \Phi_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t}.$$

4.2 Difusão Transiente Numa Esfera

Agora consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

Condições inicial e de contorno:

$$\begin{cases} \Phi(r, 0) = \Phi_i \\ \Phi(R, t) = \Phi_0 \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \Phi(0, t) \neq \infty \end{cases}$$

Onde R é o raio da esfera e r é a distância do ponto ao centro da esfera, conforme mostra a figura 4.1.

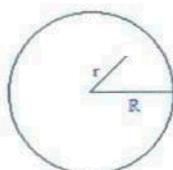


Figura 4.1: Esfera

Solução

Desenvolvendo a equação 4.4 pelo cálculo da derivada do lado direito, tem-se:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[2r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cdot r^2 \right].$$

Logo,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}. \quad (4.5)$$

Observando que $\frac{\partial}{\partial t}[r \cdot \Phi(r, t)] = r \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(r, t)]$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} [r \cdot \Phi(r, t)] &= \frac{1}{r} r \frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} [r \cdot \Phi(r, t)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Vamos calcular agora $\frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)]$:

$$\frac{\partial}{\partial r} [r \cdot \Phi(r, t)] = \Phi(r, t) + \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\Phi(r, t) + \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} r \right] = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} r \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)] &= \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} r + \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)] &= 2 \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)] &= \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6), na equação (4.4), obtemos

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} [r \cdot \Phi(r, t)] = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)].$$

Por fim,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [r \cdot \Phi(r, t)] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)]$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} [r \cdot \Phi(r, t)] = \alpha \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r, t)]. \quad (4.8)$$

Fazendo $V(r, t) = r \cdot \Phi(r, t)$, na equação (4.8), segue

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}. \quad (4.9)$$

Vamos resolver (4.9) por separação de variáveis. Escrevendo,

$$V(r, t) = X(r) \cdot \Phi(t).$$

Segue que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = X(r) \cdot \Phi'(t) \quad e \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = X''(r) \cdot \Phi(t).$$

Substituindo em (4.8), encontramos

$$X(r) \cdot \Phi'(t) = \alpha X''(r) \cdot \Phi(t) \Rightarrow \frac{X''(r)}{X(r)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \sigma. \quad (4.10)$$

De onde segue que:

$$\begin{cases} X''(r) - \sigma X(r) = 0 & (III) \\ \Phi'(t) - \alpha \sigma \Phi(t) = 0 & (IV) \end{cases}$$

i) Se $\sigma < 0$, a equação característica de (III) é dada por:

$$\lambda^2 - \sigma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\sigma};$$

assim

$$X(r) = C \cdot \text{sen}(\sqrt{\sigma}r) + D \cdot \text{cos}(\sqrt{\sigma}r)$$

Agora, uma solução particular da equação (IV) é

$$\Phi(t) = e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t}.$$

Portanto,

$$V(r, t) = e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t} [C \cdot \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) + D \cdot \text{cos}(\sqrt{\sigma r})].$$

Mas, $V(r, t) = r \cdot \Phi(r, t)$, logo:

$$\Phi(r, t) = e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t} \left[\frac{C}{r} \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) + \frac{D}{r} \text{cos}(\sqrt{\sigma r}) \right]$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, t) &= \Phi(0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t} \left(\frac{C}{r} \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) + \frac{D}{r} \text{cos}(\sqrt{\sigma r}) \right) \right] \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, t) &= e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t} \left[\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C}{r} \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D}{r} \text{cos}(\sqrt{\sigma r}) \right]. \end{aligned}$$

Observando que,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C}{r} \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C \cdot \sqrt{\sigma} \text{cos} \sqrt{\sigma r}}{1} = C \sqrt{\sigma}.$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{D}{r} \text{cos}(\sqrt{\sigma r}) = \infty, \text{ se } D \neq 0.$$

Assim, devemos ter $D = 0$. Consequentemente,

$$\Phi(r, t) = \frac{C}{r} \cdot \text{sen}(\sqrt{\sigma r}) \cdot e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t}.$$

admitindo, inicialmente que $\Phi(R, t) = 0$, temos:

$$\Phi(R, t) = \frac{C}{R} \cdot \text{sen}(\sqrt{\sigma R}) e^{-\alpha \cdot \sigma \cdot t} = 0$$

Se $C = 0$, teríamos $\Phi(r, t) = 0$, logo vamos supor $C \neq 0$. Dessa forma,

$$\text{sen}(\sqrt{\sigma}R) = 0 \Rightarrow \sqrt{\sigma}R = n\pi \Rightarrow \sigma = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{R^2}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto,

$$\Phi(r, t) = \frac{C}{r} \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{R^2} t}$$

Sendo assim, de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, a solução geral é:

$$r \cdot \Phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} t} \quad (4.11)$$

Usando a condição inicial $\Phi(r, 0) = \Phi_i$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) = r \cdot \Phi_i;$$

Logo, o somatório do lado esquerdo é a Série de Fourier de senos de $r\Phi_i$, e portanto,

$$C_n = \frac{2}{R} \int_0^R r \cdot \Phi_i \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr = \frac{2\Phi_i}{R} \int_0^R r \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr$$

Vamos resolver a integral separadamente. Fazendo

$$\begin{cases} u = r & \Rightarrow du = dr \\ dv = \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr & \Rightarrow v = \frac{-R}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) \end{cases}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \int r \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr &= \frac{-rR}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) + \frac{R}{n\pi} \int \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr \\ &= \frac{-rR}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) + \frac{R^2}{n^2 \cdot \pi^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^R r \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) dr = \left[\frac{-rR}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) + \frac{R^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) \right]_0^R = \frac{-R^2}{n\pi} \cos(n\pi)$$

Sendo assim,

$$C_n = \frac{2\Phi_i}{R} \left[\frac{-R^2}{n\pi} \cos(n\pi) \right] = \frac{-2\Phi_i R}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{-2\Phi_i R}{n\pi} \cdot (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou ainda,

$$C_n = \frac{2\Phi_i R}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, de (4.11), segue

$$r \cdot \Phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Phi_i R}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} t},$$

que é equivalente a:

$$\frac{\Phi(r, t)}{\Phi_i} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2R}{n\pi r} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} t}. \quad (4.12)$$

Se $\Phi_0 \neq 0$, fazendo $\theta(r, t) = \Phi(r, t) - \Phi_0$, temos

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} \quad e \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} \quad (4.13)$$

Além disso,

$$\theta(R, t) = \Phi(R, t) - \Phi_0 = \Phi_0 - \Phi_0 = 0$$

$$\theta(r, 0) = \Phi(r, 0) - \Phi_0 = \Phi_i - \Phi_0 = \theta_i$$

$$\theta(0, t) = \Phi(0, t) - \Phi_0 \neq \infty \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

Considerando a equação (4.13) para $\theta(r, t)$, com as condições (4.14) tem-se um problema análogo ao anterior, trocando-se $\Phi(r, t)$ por $\theta(r, t)$. Assim,

$$\frac{\theta(r, t)}{\theta_i} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2R}{n\pi r} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} t},$$

de onde segue que

$$\frac{\Phi(r, t) - \Phi_0}{\Phi_i - \Phi_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2R}{n\pi r} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} t}$$

ii) Se $\sigma = 0$, teríamos:

$$X'' = 0 \Rightarrow X = ar + b \text{ e } \Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(t) = c.$$

Assim,

$$V(r, t) = c.(ar + b) \Rightarrow \Phi(r, t) = \frac{C}{r}(ar + b) = ac + \frac{bc}{r}$$

Sendo $\Phi(r, t)$ contínua (condição física), temos $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, t) = \Phi(0, t) \neq \infty$, devemos ter $b = 0$. Logo, $\Phi(r, t) = ac$. Admitindo $\Phi_0 = 0$, teríamos

$$\Phi(r, t) = 0 \Rightarrow ac = 0$$

Mas $\Phi(r, t) = 0$ não interessa.

iii) Se $\sigma > 0$, teríamos $X'' - \sigma X = 0$, cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \sigma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\sigma}$$

$$X(r) = Ce^{\sqrt{\sigma}r} + De^{-\sqrt{\sigma}r}$$

Além disso, de $\Phi'(t) - \alpha\sigma = 0$, teríamos a solução particular $\Phi(t) = e^{-\alpha\sigma t}$.

Dessa forma,

$$V(r, t) = e^{-\alpha\sigma t} [Ce^{\sqrt{\sigma}r} + De^{-\sqrt{\sigma}r}] \quad e \quad \Phi(r, t) = e^{-\alpha\sigma t} \left[\frac{C}{r} e^{\sqrt{\sigma}r} + \frac{D}{r} e^{-\sqrt{\sigma}r} \right]$$

Sendo assim,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-\alpha\sigma t} \left[\frac{C}{r} e^{\sqrt{\sigma}r} + \frac{D}{r} e^{-\sqrt{\sigma}r} \right] = \infty$$

O que contraria a hipótese do problema de que $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, t) = \Phi(0, t) \neq \infty$. Portanto, a solução do problema é a que encontramos para $\sigma < 0$, a saber:

$$\frac{\Phi(r, t) - \Phi_0}{\Phi_i - \Phi_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2R}{n\pi r} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi r}{R} \right) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} r}$$

4.2.1 Transferência de Massa Numa Esfera

Uma vez encontrada a solução que modela o problema de difusão numa esfera, faremos agora um estudo de transferência de massa num processo de desidratação osmótica de acerola. No entanto, são necessárias algumas definições as quais apresentaremos a seguir.

Definição 4.1. *Difusão é um fenômeno de transporte de matéria ou energia que ocorre pela existência de um gradiente da grandeza de interesse.*

Definição 4.2. *Transferência de massa é a massa em trânsito como o resultado de uma diferença de concentração de uma espécie química em uma mistura.*

Definição 4.3. *Difusividade é o parâmetro α das soluções analíticas obtidas, o qual, num problema de transferência de massa, indica a velocidade que esta massa é transportada.*

Proporção	1 : 4	1 : 10	1 : 15
Difusividade	$5.6088.10^{-7}$	6336.10^{-7}	59652.10^{-7}

Tabela 4.1: Dados de difusividade

Na tabela 4.1, são apresentados os valores de difusividade de água, para simular um processo de transferência de massa nas proporções 1 : 4, 1 : 10 e 1 : 15.

Estes dados foram obtidos de um processo de desidratação descrito no artigo “Application of inverse methods in the osmotic dehydration of acerola” (SILVA et al., 2010). No referido artigo foram realizados experimentos de desidratação osmótica de acerolas em soluções binárias (água e sacarose) nas proporções supracitadas.

Nas figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 serão apresentadas as cinéticas de perda de água para os raios $r = 0.0013$, $r = 0.005$, $r = 0.008$ e $r = 0.01$, considerando a proporção 1:4.

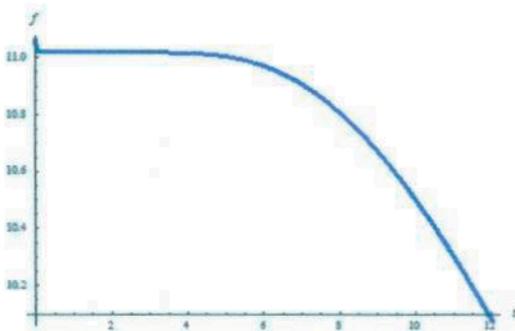


Figura 4.2: Cinética da perda de água na proporção 1 : 4 considerando o $r = 0,0013$.

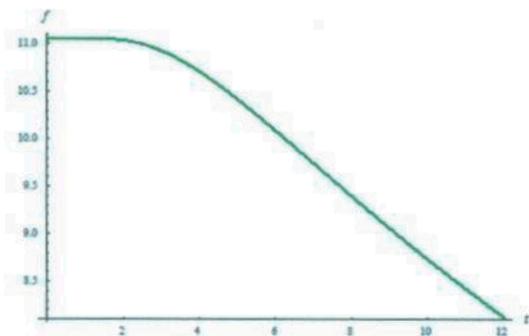


Figura 4.3: Cinética da perda de água na proporção 1 : 4 considerando o $r = 0,005$.

No gráfico 4.2 o raio considerado foi de aproximadamente 0,0013. A camada correspondente a este raio é mais interna, deste modo a difusão até aproximadamente 3.5 horas ainda não iniciou. Por outro lado no gráfico de número 4.3 é possível notar que a camada correspondente ao $r = 0,005$ começa a perder água, isto é devido ao fato que esta camada é mais externa em relação a anterior.

No gráfico 4.4 devido a camada correspondente ao $r = 0.008$ ser ainda mais externa, esta começa a perder água mais rapidamente que a anterior. Percebemos que no gráfico 4.5 foi considerado um $r = 0.01$, o mesmo da acerola, logo a camada estudada é justamente a da fronteira. Notemos que neste caso, o gráfico permanece constante porque entra em equilíbrio imediatamente com o meio. Isto é devido ao fato que o problema de valor inicial resolvido na seção 4.2, admite uma condição de contorno do primeiro tipo.

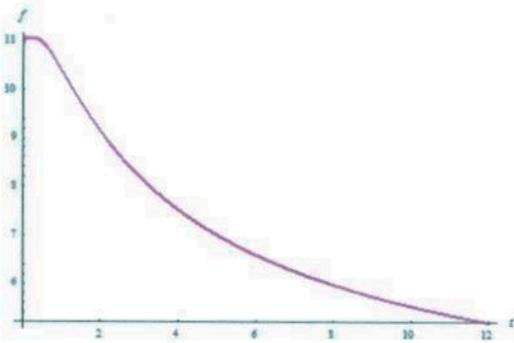


Figura 4.4: Cinética da perda de água na proporção 1 : 4 considerando o $r = 0,008$.

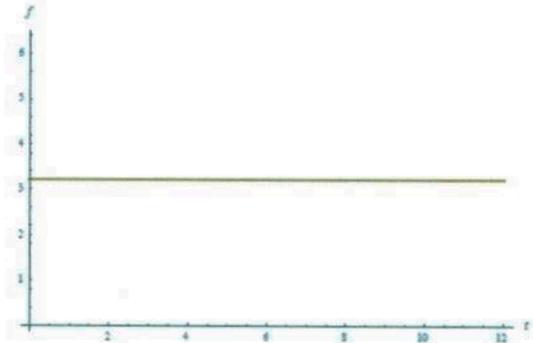


Figura 4.5: Cinética da perda de água na proporção 1 : 4 considerando o $r = 0,01$.

A figura 4.6 mostra todas as situações referentes aos quatro raios em um só gráfico, onde podemos notar a diferença da perda de água nas quatro camadas correspondentes. Percebemos então que quanto maior é o raio considerado, ou seja, quanto mais próxima a camada estiver do exterior da acerola, maior facilidade esta camada terá de perder água.

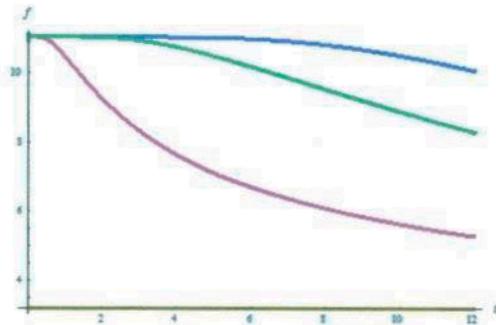


Figura 4.6: Superposição dos gráficos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.

Nos gráficos 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 representamos as cinéticas da perda de água

na proporção 1:10. Na figura 4.7 percebemos que o gráfico referente à proporção 1 : 10 e ao $r = 0,0013$ permanece estável até quase 4 horas, a partir de então inicia-se a difusão causando a perda de água na camada correspondente. Já no gráfico representado na figura 4.8 percebemos que a camada correspondente ao $r = 0,005$ começa a perder água mais rapidamente que a camada anterior iniciando a perda de água em aproximadamente 2 horas. No gráfico da figura 4.9 vemos que a camada correspondente ao $r = 0,008$ começa a perder água em menos de meia hora e finalmente notamos no gráfico da figura 4.10, cujo $r = 0,01$ corresponde a camada de fronteira, que o gráfico permanece constante durante todo o processo, uma vez que o mesmo entra em equilíbrio imediatamente com o meio.

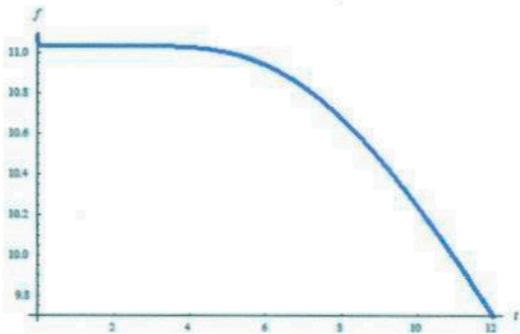


Figura 4.7: proporção 1 : 10 e $r = 0,0013$.

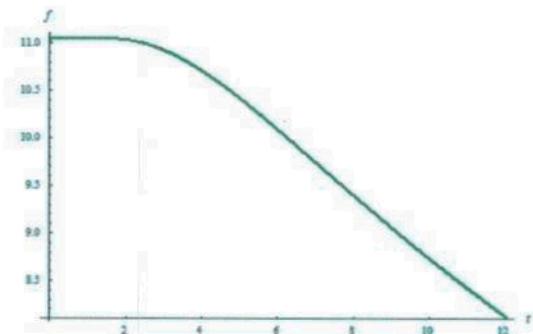


Figura 4.8: proporção 1 : 10 e $r = 0,005$.

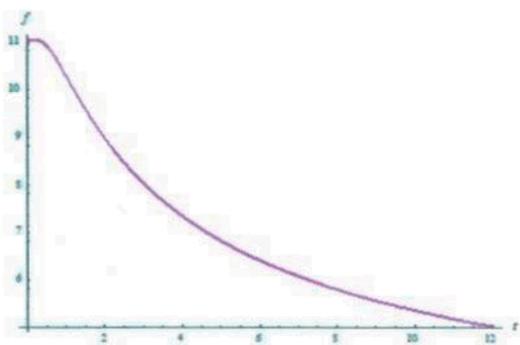


Figura 4.9: proporção 1 : 10 e $r = 0,008$.

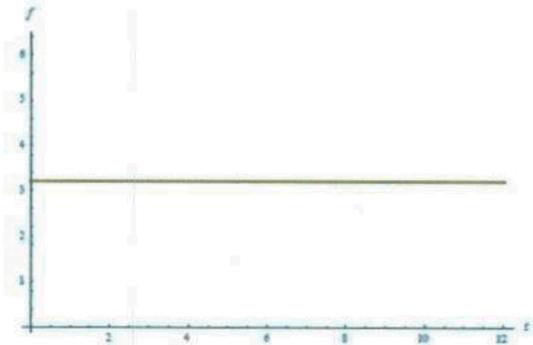


Figura 4.10: proporção 1 : 10 e $r = 0,01$.

O gráfico representado na figura 4.11 nos mostra a superposição dos gráficos de proporção 1 : 10 nos quatro diferentes raios.

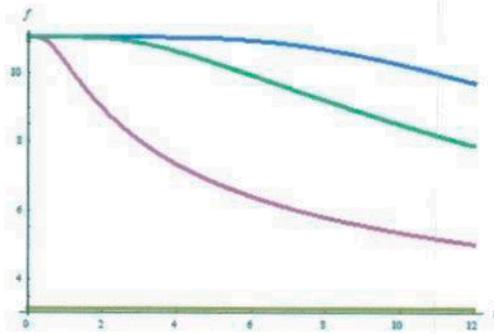


Figura 4.11: Superposição dos gráficos 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

Nele podemos visualizar melhor as diferenças entre os gráficos, onde percebemos que assim como aconteceu nos gráficos de proporção 1 : 4 também sucede aqui, pois é perceptível que quanto maior é o raio considerado, maior a perda de água, já que o tamanho do raio está relacionado com a posição da camada da acerola.

As figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 nos mostra os gráficos de raios $r = 0,0013$, $r = 0,005$, $r = 0,008$ e $r = 0,01$ respectivamente, na proporção 1 : 15, onde podemos perceber gradativamente que a perda de água está totalmente relacionada com o tamanho do raio, visto que para o $r = 0,0013$ a camada correspondente só inicia a transferência de massa em aproximadamente 4 horas, diminuindo este tempo a medida que aumentamos o tamanho do raio.

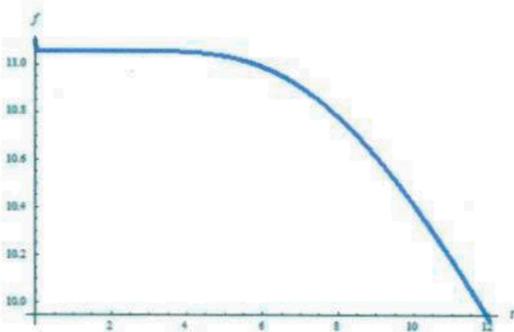


Figura 4.12: Cinética da perda de água na proporção 1 : 15 considerando o $r = 0,0013$.

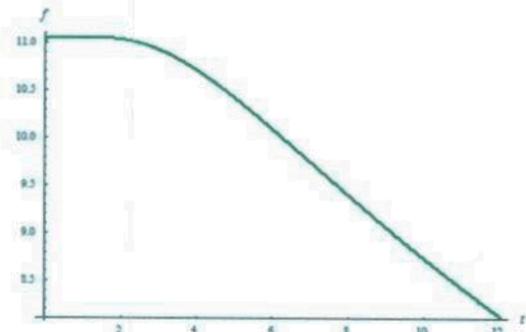


Figura 4.13: Cinética da perda de água na proporção 1 : 15 considerando o $r = 0,005$.

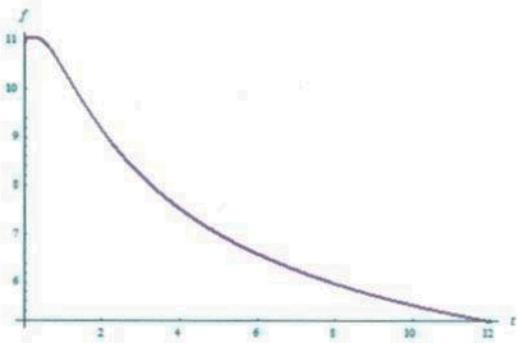


Figura 4.14: Cinética da perda de água na proporção 1 : 15 considerando o $r = 0,008$.

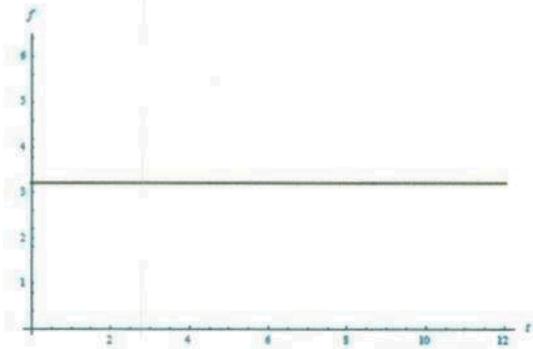


Figura 4.15: Cinética da perda de água na proporção 1 : 15 considerando o $r = 0,01$.

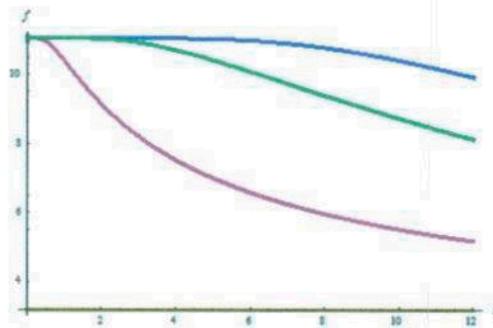


Figura 4.16: Superposição dos gráficos 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14.

O gráfico 4.16 nos mostra a superposição dos gráficos 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15. Nela podemos observar claramente os instantes em que cada camada inicia a perda de água. Notemos que nesta proporção cada camada inicia a perda de água mais rápido do que nas camadas correspondentes nas proporções anteriores.

Percebemos nos gráficos das figuras 4.2, 4.7 e 4.12, os quais apresentam um mesmo raio em três diferentes proporções, que a proporção está influenciando na perda de água, pois na proporção 1 : 10 o produto perdeu mais água que na proporção 1 : 4 e perdeu menos água que na proporção 1 : 15.

Conclusão

Neste trabalho foi possível constatar a importância que as Séries de Fourier desempenham no estudo de processos físicos bem como a sua utilidade na área da matemática. Aprendemos que a princípio Fourier usou a matemática apenas para conseguir provar alguns resultados físicos, mas hoje as Séries de Fourier tem um importante papel nesta área. Existe atualmente uma área de matemática pura chamada Análise de Fourier, a qual é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas.

Finalmente foi visto a importância das Séries de Fourier para obtenção de soluções analíticas de EDPs e a importância da equação de difusão para descrição do processo de transferência de massa.

Referências Bibliográficas

- [1] CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. Oxford. Clarendon Press Blücher Ltda, 1975.
- [2] INCROPERA, F. P.; DE WITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [3] KAPLAN, W. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, 1970.
- [4] KAPLAN, W. *Advanced Calculus. vol. 2* Addison-Wesley, 1970.
- [5] LUIKOV, A. V. *Analytical heat diffusion theory*. Academic Press, Inc. Ltd: London, 1968, 685 p.
- [6] MATOS, M. *Séries e equações diferenciais*. São Paulo: Prentice Hall, 2001.
- [7] SILVA, M. A. C.; CORRÊA, J. G.; SILVA, Z. E. *Application of inverse methods in the osmotic dehydration of acerola*. International Journal of Food Science and Technology, 45, 2477-2484. 2010.
- [8] VIRGÍLIO, P. *Eneida*. Tradução de Manoel Odorico Mendes. Disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>
(Acessado em 01/08/2013.)