UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Jebson David Henriques de Lima Costa

A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Cuité-PB

2014

Jebson David Henriques de Lima Costa

A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos
Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB
2014

UFCG / BIBLIOTECA

Biblioteca Setorial do CES.

Julho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

C837e Costa, Jebson David Henriques de Lima.

A evolução histórica da resolução das equações algébricas. / Jebson David Henriques de Lima Costa. – Cuité: CES, 2014.

54 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Álgebra. 2. Equações algébricas. 3. Soluções por radicais. I. Título.

CDU 512

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Jebson David Henriques de Lima Costa

A Evolução Histórica da Resolução das Equações Algébricas

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

Banca Examinadora

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Coorientadora)

Marcelo Carvalho Ferreira
Prof. Marcelo Carvalho Ferreira

UFCG / BIBLIOTECA

Aos meus pais, *in memorian.*

UFCG / BIBLIOTECA

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele. Aos meus pais (in memoriam), Josivaldo de Araújo Costa e Josefa Henriques de Lima Costa, pelo incentivo recebido durante toda minha vida escolar, aos meus irmãos Joebson, Joebia, Joebio, Joênia, aos meus avós Severino e Maria, a minha namorada Valeska Souza e a todos da minha família que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Aos meus colegas, pelas experiências compartilhadas. Em especial, aos amigos Antonio Evandro, Clebson Huan, Estevão Paiva entre outros com quem dividi minhas angústias, inseguranças, mas acima de tudo, muito aprendi. A Neilton pela sua nobre gentileza.

Às professoras Márcia Cristina e Gisélia Vasconcelos pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta monografia.

Agradeço a gentileza do professor Marcelo Carvalho Ferreira por aceitar o convite para participar da banca e por suas observações que muito contribuíram para o resultado final.

Ao professor e coordenador do curso, pelo convívio, apoio, compreensão e amizade. Ao técnico administrativo Mackson pela sua colaboração durante o curso. Ao professor Jorge Alves pelo incentivo na iniciação científica e aos professores do Curso, pelos conhecimentos compartilhados.

E a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para que a realização deste trabalho fosse possível.

UFCG / BIBLIOTECA

" A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo."

Pitágoras.

UFCG / BIBLIOTECA

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns métodos usados para resoluções das equações algébricas por meio de radicais, como a regra da falsa posição usada pelos egípcios e o completamento de quadrados usado pelos Hindus para encontrar soluções das equações do segundo grau. O método descoberto independentemente por Scipione Del Ferro e Nicolo de Fontana (Tartaglia) consistia em transformar toda equação do terceiro grau a uma forma chamada reduzida e dar uma solução por radicais. O matemático Ferrari encontrou uma fórmula geral para equações do quarto grau. Ele reagrupou os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Sendo isso possível, seriam extraídas as raízes quadradas, caindo em equações do segundo grau, e o problema estaria resolvido. A primeira prova convincente da impossibilidade de resolução da equação quíntica foi estabelecida, no início do século XIX, pelo matemático norueguês N. H. Abel. O trabalho de Abel foi completado pelo gênio francês E. Galois.

Palavras-chave: Álgebra. Equações Algébricas. Soluções por radicais.

UFCG / BIBLIOTECA

Abstract

This work shows some methods used to solve algebraic equations by radicals, like false position method used by Egyptians and completing the square method used by Hindus to find solutions for quadratic equations. The method discovered independently by Scipione Del Ferro and Nicolo de Fontana (Tartaglia) consisted of transform all cubic functions in one reduced form and give solutions by radicals. The mathematician Ferrari found a general formula for Quartic equations. He regrouped the terms so that way both sides of the equation have perfect quadratic equations. After that, finds the radix for both sides resulting in quadratic equations and then the question was solve. The first convincing evidence of the impossibility to solve quintic functions was established in the beginning of XIX century by the Norwegian mathematician N. H. Abel. Abel?s work was completed by the French genius E. Galois.

Keywords: Algebra. Algebraic Equations. Solutions by radicals.

UFCG / BIBLIOTECA

Sumário

Introdução **9**

1 Números Complexos e Relações de Girard **11**

1.1 Forma Polar de um Número Complexo 11

1.2 Relações de Girard 15

2 Aspectos Históricos **17**

2.1 Equações Quadráticas 17

2.2 Equações Cúbicas 32

2.3 Equações Quárticas 35

2.4 As Soluções das Equações de Grau $n \geq 5$ 36

3 Equação algébrica **41**

3.1 Equação algébrica 41

3.2 A Equação do 2° Grau 42

3.3 A Equação do 3° Grau 42

3.4 A Equação do 4° Grau 49

Conclusão **52**

Referências Bibliográficas **53**

UFCG / BIBLIOTECA

Introdução

A equação quadrática, apesar de já manuseada no Antigo Egito cerca de 1700 anos A. C., somente no século XII foi posta na forma como hoje conhecemos, graças à contribuição de Baskhara (matemático hindu) que a escrevera em versos.

As equações do terceiro e quarto graus tiveram suas fórmulas estabelecidas no século XVI pela escola italiana representada por S. del Ferro, N. Tartaglia, G. Cardano e L. Ferrari, entre outros. Deve-se a del Ferro a resolução da equação cúbica (ele manteve o seu método em segredo), mais tarde também resolvida independentemente por N. Tartaglia. Tudo isso se deu até 1545, ano em que G. Cardano a publicou, com as devidas referências a del Ferro e Tartaglia, em seu livro "Ars Magna", juntamente com a fórmula da equação quártica, esta última estabelecida "a seu pedido"por seu discípulo L. Ferrari.

No final do século XVIII, o matemático italiano P. Ruffini deu uma prova (com algumas lacunas em sua argumentação) da impossibilidade de se resolver por radicais a equação do 5° grau. A primeira prova convincente da impossibilidade de resolução da equação quíntica foi estabelecida, no início do século XIX, pelo matemático norueguês N. H. Abel.

O trabalho de Abel foi completado pelo gênio francês E. Galois, que caracterizou as equações $f(x) = 0$, com grau arbitrário n, que são solúveis por radicais, por meio de uma propriedade de certo grupo G de permutações de suas raízes, atualmente denominado o grupo de Galois de f. Pode-se dizer que exatamente aí nasce a teoria dos grupos. A partir desse resultado, conclui-se que a equação geral de grau $n \geq 5$ não pode ser resolvida por radicais.

Neste trabalho apresentamos os métodos clássicos para resolver as equações algébricas com grau $2 \leq n \leq 4$, em que se procura determinar expressões para as raízes

UFCG / BIBLIOTECA

de um dado polinômio $f(x)$ com grau n, em função de seus coeficientes, envolvendo somente as operações algébricas fundamentais e mais a extração de raízes quadradas, cúbicas, etc. O interesse principal está em demonstrar a fórmula da equação do segundo grau por meio geométricos e algébricos, enquanto que a equação do terceiro de quarto grau será demonstrada algebricamente. Em seguida, faz-se um breve comentário sobre a impossibilidade das soluções das equações acima do quarto grau por meio de radicais.

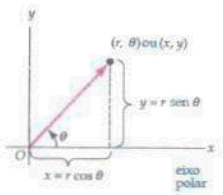
UFCG / BIBLIOTECA

Capítulo 1

Números Complexos e Relações de Girard

1.1 Forma Polar de um Número Complexo

Suponhamos como indicado na Figura que um sistema de coordenadas polares



seja suposto ao plano complexo, de modo que o eixo polar coincida com o eixo x positivo e o polo O, com a origem.

Então x, y, r e θ se relacionam por

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\,\text{sen}\ \theta \end{cases}$$

Estas equações nos permitem expressar um número complexo não nulo $z = x + iy$ como

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\ \theta), \tag{1.1}$$

Observação 1.1. *O módulo de z é dado por:*

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\ \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\ \theta)} = \sqrt{r^2} = r \end{aligned}$$

UFCG / BIBLIOTECA

O ângulo θ é o **argumento** do complexo z, e a representação (1.1) é a **forma polar** (ou **trigonométrica**) de z.

Denotemos o complexo $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ por $cis\ \theta$. Assim, sendo θ é o argumento de $z \in \mathbb{C}$, segue de (1.1) que $z = r\ cis\theta$.

Proposição 1.1. *Se $z = r\ cis\theta$ é um complexo não nulo e $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$z^n = r^n\ cis(n\theta). \tag{1.2}$$

Demonstração. Veja [2] □

A fórmula (1.2) é conhecida com a **primeira fórmula de de Moivre**.

Proposição 1.2. *Seja $z = r\ cis\theta$ um complexo não nulo e n um inteiro positivo qualquer, então há exatamente n valores distintos para a raiz $n-$ésima de z. Ademais, tais valores são dados por*

$$\sqrt[n]{r} \cdot cis\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big); \quad 0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Veja [2] □

A fórmula (1.3) é conhecida como a **segunda fórmula de de Moivre**.

Como caso particular das raízes complexas, dizemos que um número complexo ω é uma **raiz da unidade** se existir um natural n tal que $\omega^n = 1$. Nesse caso, ω é denominado uma **raiz $n-$ésima da unidade**.

Como $1 = cis\ 0$, a segunda fórmula de de Moivre nos diz que há precisamente n raízes $n-$ésimas da unidade, e que estas são dadas por

$$\omega^k = cis\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) \quad 0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Denotando $\omega = cis\ \frac{2\pi}{n}$, segue imediatamente de (1.4) e da primeira fórmula de de Moivre que as raízes $n-$ésimas da unidade são os números complexos

$$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Observação 1.2. *A fórmula*

$$\sqrt[n]{r}\cdot cis\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big)$$

pode ser escrita como:

$$\Big(\sqrt[n]{r}\cdot cis\frac{\theta}{n}\Big)\cdot cis\frac{2k\pi}{n}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{r}\cdot cis\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big) = \sqrt[n]{r}\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big]\\
=\ &\sqrt[n]{r}\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)-\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\mathrm{sen}\,\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\cos\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\mathrm{sen}\,\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big]\\
=\ &\sqrt[n]{r}\Big[\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)+\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\Big)\cdot i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big]\\
=\ &\sqrt[n]{r}\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\Big)\cdot\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big)\\
=\ &\Big(\sqrt[n]{r}\cdot cis\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\Big)\cdot cis\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Note-se que atribuindo a k os valores de $\{0,1,\ldots,n-1\}$ obtemos, a partir de $cis\frac{2k\pi}{n}$, todas as raízes $n-$ésimas da unidade. O que foi feito anteriormente permite então ver que, as raízes de índice n dadas pela fórmula

$$\sqrt[n]{r}\cdot cis\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big),\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

podem também ser obtidas multiplicando uma dessas raízes que seja conhecida, pelas raízes $n-$ésimas da unidade.

Exemplo 1.1. *As raízes cúbicas da unidade, são dadas por* 1, ω, ω^2.

De fato,

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0+i\,\mathrm{sen}\,0\\
\omega &= \cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\omega^2 &= \cos\frac{4\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Exemplo 1.2. *As raízes cúbicas de 27 são 3,* $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *e* $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

De fato,

Uma das raízes é 3. As raízes cúbicas da unidade são $1, \omega, \omega^2$, onde

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

As raízes são, portanto,

$$\begin{aligned} z_0 &= 3\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0, \\ z_1 &= 3\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\Big) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= 3\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\Big) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Observação 1.3. *Sabemos se z é uma das raízes cúbicas complexas de $\gamma \in \mathbb{C}$, então as três raízes cúbicas de γ são z, wz e $\bar{w}z$, onde $w = e^{i(2\pi/3)} = \cos 2\pi/3 + isen2\pi/3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ é uma raiz cúbica da unidade.*

Teorema 1.1. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.*

Demonstração. Veja [2] □

Teorema 1.2. *(Teorema da decomposição) Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$, dada por:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Então, $p(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1° grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

em que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $p(x)$.

Demonstração. Veja [8] □

UFCG / BIBLIOTECA

1.2 Relações de Girard

Considere a função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, n \geq 1,$$

e $r_1, r_2, \cdots, r_n$ suas raízes.

Considerando o teorema da decomposição podemos representar

$$f(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n).$$

Empregando a propriedade distributiva e ordenando o polinômio, temos:

$$f(x) = a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \cdot x^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots)x^{n-2} + \cdots.$$

Se igualarmos os coeficientes deste último polinômio, como os coeficientes iniciais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, obtemos n relações entre as raízes e os coeficientes de f, tais relações são denominadas **Relações de Girard**, e são as seguintes:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_n & = & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \cdots + r_n r_{n-1} & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \cdots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n & = & -\frac{2_{n-3}}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n & = & (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_1} \end{cases}$$

Exemplo 1.3. *Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Pelo o teorema da decomposição, temos:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

E daí, vem:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &\equiv (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1 r_2) \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &\equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \end{aligned}$$

Da identidade de polinômios, segue:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 & = & -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 & = & \frac{c}{a} \end{cases}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Exemplo 1.4. *Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Pelo o teorema da decomposição, temos:*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 = a(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_2)$$

E daí, vem:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1r_2r_3$$

de onde:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

UFCG BIBLIOTECA

Capítulo 2

Aspectos Históricos

Neste capítulo, apresentaremos aspectos históricos relacionados as equações algébricas desde algumas civilizações antigas até o século XVIII. As referências utilizadas foram [3], [4], [6] e [13].

2.1 Equações Quadráticas

A Matemática das civilizações anteriores à civilização Grega era de índole prática prática e estava relacionado com a sua alimentação e a dos seus animais, com a fabricação e o armazenamento da mesma.

Parte do material deixado por algumas dessas civilizações foram destruídos por catástrofes naturais, ou por guerras, ou por vândalos ou até mesmo pela ação do tempo. Por exemplo, os Chineses e os Indianos utilizavam casca de árvore ou o bambu para fazer suas anotações, os Egípcios utilizavam o papiro que dependendo da região duravam por muito tempo e os Babilônios utilizavam placas de barro mole que depois eram colocadas ao sol para endurecer tornando-se assim mais resistentes.

Convém, no entanto, salientar que o conhecimento atual sobre estes povos depende dos documentos destas civilizações que sobreviveram até os dias atuais, que foram descobertos e cujo texto foi decifrado.

São manuscritos, datados de antes da era cristã, escritos por matemáticos daquela época e que apresentavam vários problemas e suas soluções. A partir deles vamos constatar que algumas dessas civilizações já estudavam e apresentavam métodos para resolução de equações do segundo grau.

Os povos da Mesopotâmia três mil e trezentos anos atrás já conheciam uma solução da equação quadrática. Posteriormente egípcios, gregos, hindus e árabes desenvolveram soluções geométricas da equação de segundo grau.

Em todas essas civilizações as soluções eram apresentadas como uma receita escrita em prosa ou verso ou explicadas em casos particulares, relacionados com problemas contextualizados (verossímeis ou não) e muitas vezes utilizando-se de ideias geométricas para resolvê-los.

Egípcios

A maior parte do conhecimento que se possui atualmente sobre a matemática do Egito chegou até os dias atuais através de alguns raros papiros que, de algum modo, resistiram ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio. Esse conhecimento está registrado no Papiro de Rhind (escrito por volta de 1650 a.C), que apresentava 85 problemas, no Papiro de Moscou (escrito por volta de 1850 a.C.), que apresentava 25 problemas, no Papiro de Berlim(escrito por volta de 1800 a.C) e no Papiro de Kahun (escrito por volta de 1800 a.C), este último apresentava em um de seus fragmentos o cálculo de uma raiz quadrada.

Os conhecimentos apresentados nos papiros eram de ordem prática e os elementos principais das questões eram cálculos.

Nos papiros de Kahun e de Berlim aparecem alguns problemas que se reduzem a equações quadráticas simples ou, mais especificamente, a um sistema de 2 equações a 2 incógnitas, em que uma das equações é linear e a outra é quadrática.

Vejamos um desses problemas: "*a área de um quadrado é 100 e tal quadrado é igual a soma de dois quadrados menores, em que o lado de um é igual a* $\frac{3}{4}$ *do lado do outro.*"

O método usado para resolver este tipo de problemas é o da falsa posição: neste caso são atribuídos valores numéricos específicos ás incógnitas que, embora reconhecidos como falsos, satisfazem a equação linear do problema. Substituindo esses valores na outra equação e fazendo os respectivos cálculos pode-se facilmente encontrar a solução; uma vez que se trata de uma equação quadrática, em vez de se multiplicar os valores supostos inicialmente pelo quociente entre o termo independente da equação quadrática

UFCG / BIBLIOTECA

e o valor que se obteve, multiplica-se pela raiz quadrada desse quociente.

Solução usando a simbologia atual.

Sejam x e y lados de dois quadrados que satisfazem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & ① \\ 4x = 3y & ② \end{cases}$$

A equação ② é satisfeita por $x = 3$ e $y = 4$. Ao substituir estes valores na equação quadrática obtém-se, $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Em seguida, calcula-se a raiz quadrada do valor obtido e do termo independente da equação quadrática:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{e} \quad \sqrt{100} = 10.$$

Para terminar, calcula-se o quociente entre estes dois valores $\frac{10}{5} = 2$. Para obter as soluções finais, basta multiplicar por 2 os valores supostos inicialmente, isto é

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 3 = 6 \\ y = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$$

Os Egípcios utilizavam a regra da falsa posição para resolver equações do primeiro grau. Porém, com este método não constituíram nenhum conhecimento substancial a respeito de soluções ou aplicações. Não formalizaram nenhum processo que se voltasse para o cálculo das raízes da equação de segundo grau.

Babilônios

Os povos da Babilônia, aproximadamente 1700 a.C., apresentavam os registros matemáticos em pedras de argila mole que depois eram cozidos ao sol. Por isso, existem mais documentos que comprovam que o povo babilônico estudou e desenvolveu um procedimento algébrico para resolver uma equação do segundo grau.

Um desses principais documentos é o tablete YBC 7289 no qual é apresentada uma boa aproximação da raiz quadrada de 2, que é a solução positiva da equação do segundo grau $x^2 = 2$. Para isso eles utilizavam uma tabela de quadrados pela qual era possível fazer o quadramento da raiz procurada.

UFCG BIBLIOTECA

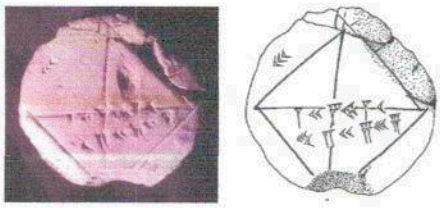


Figura 2.1: Tablete YBC 7289

No tempo dos Babilônios as equações quadráticas foram divididas em três tipos: $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$ havendo exemplos de problemas de qualquer um dos tipos.

Vamos aqui apresentar o método para o caso geral, portanto sem particularizar os parâmetros q e p mas, claro, que nessa época isso não se fazia ainda.

$$\begin{cases} x + y &= p \\ xy &= q \end{cases}$$

Hoje passaríamos diretamente deste sistema para a equação $x^2 + q = px$, utilizando as relações entre os coeficientes da equação e suas raízes. Os babilônios procediam sistematicamente como segue:

1. Tomar metade de p:
$$\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2}$$

2. Elevar ambos os membros ao quadrado:
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

3. Subtrair q do resultado obtido:
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

4. Tomar a raiz quadrada do resultado obtido:
$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x-y}{2}$$

5. Somar a metade de p ao resultado:
$$\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x$$

UFCG BIBLIOTECA

Assim, obtemos facilmente que

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Os modelos indicados para as equações quadráticas eram necessários, porque os babilônios não podiam e não conheciam os números negativos.

Gregos

Os antigos gregos aprenderam bastante com os conhecimentos das civilizações anteriores, mais particularmente com a civilização Babilônica; mas a predisposição que mostravam ter para aprender não só lhes permitiu assimilar conhecimentos científicos das outras civilizações, como também expandi-los e melhorá-los.

Nesse sentido, vários gregos alcançaram uma posição de destaque Euclides, Pitágoras, Thales de Mileto, Diofanto de Alexandria, entre outros.

A obra "*Os Elementos*"de Euclides, considerada como uma obra magnífica por muitos, é composta por 13 livros, onde ele apresentou várias demonstrações da resolução de uma equação utilizando construções geométricas.

O livro II dos Elementos apresenta a proposição 11: "*Dividir um segmento de reta dado de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado sobre a outra parte*".

Seja $\overline{AB} = a$ e $\overline{XB} = x$ o objetivo é encontrar um ponto X neste segmento de modo que $(\overline{AB}) \cdot (\overline{AX}) = (\overline{XB})^2$. Note-se que a determinação deste ponto corresponde a resolver uma equação quadrática. De fato, fazendo $\overline{AB} = a$ e sendo $\overline{XB} = x$, resulta

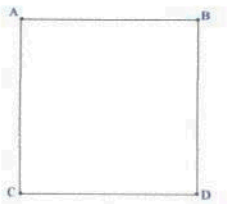
$$(\overline{AB}) \cdot (\overline{AX}) = (\overline{XB})^2 \Leftrightarrow a \cdot (a - x) = x^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + ax.$$

Com isso Euclides mostra em seu livro a resolução geométrica da equação de 2° grau do tipo $a^2 = x^2 + ax$.

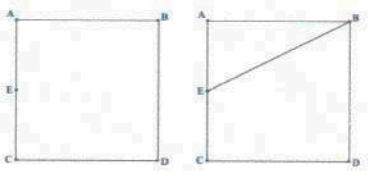
Apresentemos o método de Euclides. Seja AB o segmento de reta dado:

BIBLIOTECA IFCS

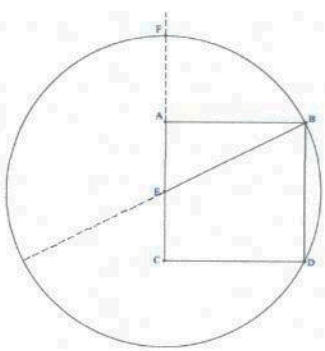
Começamos por desenhar o quadrado $ABDC$:



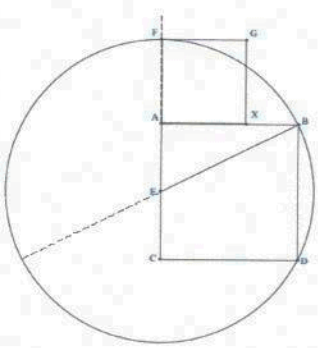
Em seguida marcamos o ponto médio E do segmento AC, que uniremos com B:



Seguidamente, marcamos o ponto F na reta AC de modo que $\overline{EF} = \overline{EB}$:



Em seguida desenha-se o quadrado $AFGH$:



O ponto X divide o segmento AB do modo pretendido, portanto, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{AX}}.$$

Outro matemático grego que merece destaque é Diofanto de Alexandria que é autor da obra composta por 13 livros chamada *Arithmetica*. Nessa obra, Diofanto apresenta vários problemas envolvendo equações de vários graus, principalmente do 1° e 2° graus.

Hindus

O povo hindu teve um papel primordial para a solução que mais se assemelha a atual. Com a introdução de números negativos e a utilização do zero como elementos de cálculo, eles deram um grande passo em relação aos campos numéricos.

Brahmagupta (598-665) matemático e astrônomo realizou um estudo mais completo sobre equações algébricas. Segundo Pitombeira [14] o procedimento de resolução apresentado por ele é correspondente à fórmula que utilizamos atualmente.

Segundo Nobre [13], a solução dada por Brahmagupta á equação $ax^2 + bx = d$, utilizando uma simbologia atual, foi:

1. A soma multiplicada pelo coeficiente do quadrado, você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita;

$$a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

2. Em seguida toma a raiz quadrada;

$$\sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

3. A metade do coeficiente da incógnita é subtraída;

$$\sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

4. E finalmente divide pelo coeficiente do quadrado;

$$\frac{\sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Efetuando algumas operações na equação obtida acima, temos que:

$$x = \frac{\sqrt{4ad + b^2} - b}{2a}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Segundo Pitombeira [14], já nessa época, havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação de segundo grau pode ser 0, 1 e 2. Brahmagupta afirma que o quadrado de negativo e de positivo é positivo e de zero é zero.

Surge também na Índia Bhaskara II (1114-1193), matemático e astrônomo, historicamente conhecido, pois obteve grandes feitos no que diz respeito à resolução da equação de 2° grau. Sua principal obra foi dividida em 4 partes, dedicadas a matemática e a astronomia. São elas: "Lilavati"(A bela) sobre aritmética, "Bijaganita"sobre álgebra, "Goladhyaya"sobre o globo celeste e "Grahaganita"sobre a matemática dos planetas. Bhaskara II resolveu equações do tipo $ax^2 + bx = c$, utilizando o método de "completar quadrados". Um fato curioso é que a Fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele mas pelo matemático Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara II, fato reconhecido pelo próprio Bhaskara. Seja a equação: $ax^2 + bx = c$

1. Multiplicando ambos os membros por $4a$, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac.$$

2. Adicionando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 + 4ac.$$

3. Extraindo a raiz quadrada, temos que:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}.$$

Obtendo uma equação do primeiro grau cuja solução era conhecida.

Árabes

Durante o século VIII, com o fortalecimento do império islâmico, a civilização árabe passou a se interessar por várias áreas das ciências entre elas a matemática. Os califas Al-Mansur (754 - 775), Harum Al-Rachid (786 - 809) e Al-Mamum (813 -

UFCG BIBLIOTECA

833) são considerados patronos da cultura abássida, durante os seus reinados muitos dos escritos deixados por civilizações mais antigas foram traduzidos. Além disso, Al-Mansur fundou uma biblioteca cujo acervo continha vários manuscritos de civilizações anteriores. Já Al-Mamum fundou em Bagdá uma academia chamada de "Casa da Sabedoria".

Os árabes conseguiram traduzir as obras mais importantes deixadas por Euclides, Arquimedes, Apolônio, Herão, Ptolomeu e Diofanto. Com isso, os árabes obtiveram um maior conhecimento da matemática grega e puderam avançar em várias outras áreas entre elas a trigonometria e as equações algébricas.

O matemático árabe de maior importância foi Mohamed-ibn-Musa Al-Khowarizmi (780-850 d.C), que foi membro da Casa da Sabedoria, entre 813 e 833 e escreveu o livro "*Al-Jabr Wa'l-Muqabalah*", traduzida como Ciências das Equações, onde "al-jabr"significa operação de somar um número a uma expressão algébrica a ambos os membros de uma equação para eliminar os termos negativos e "Muqabalah"significa operação de subtrair números ou expressões numéricas a ambos os membros de uma equação afim de mudar um termo para o outro. O principal objetivo dessas operações era eliminar termos negativos de um dos membros da equação, pois os números negativos ainda eram de difícil aceitação.

Foi a partir da operação al-jabr que, no século XIV, surgiu a palavra Álgebra. As palavras algoritmo e algarismo têm sua origem a partir do nome Al-Khowarizmi.

Al-Khowarizmi apresenta em sua obra regras para resolução de equações do primeiro e do segundo grau, ele dividiu essas equações em seis tipos:

1. Quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$.
2. Quadrados iguais a números: $ax^2 = c$.
3. Raízes iguais a números: $bx = c$.
4. Quadrados mais raízes iguais a números: $ax^2 + bx = c$.
5. Quadrados mais números iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$.
6. Raízes mais números iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

UFC BIBLIOTECA

Essa divisão se deve ao fato de que todos os coeficientes deveriam ser positivos. Al-Khowarizmi possuía uma regra para cada tipo de equação que eram demonstradas por resultados obtidos no livro *Os Elementos de Euclides.*

Quanto à resolução de quadrados mais raízes iguais a um número, o quarto caso citado, Al-Khowarizmi utilizou em sua obra o seguinte exemplo: "Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?"

Escrevendo na forma algébrica atual, têm-se: $x^2 + 10x = 39$.

A regra de resolução descrita por Al-Khowarizmi foi:

"Tome a metade do número de raízes, que é igual a cinco. Isto multiplicado por ele mesmo; obtendo vinte e cinco deste produto. Adicione a trinta e nove; obtendo sessenta e quatro. Extraindo-se a raiz quadrada obtendo o produto oito e subtraia disto a metade do número de raízes. O resultado é três. Esta é a raíz do quadrado procurado; Logo o quadrado é nove."

Vejamos a solução na forma numérica:

$$\frac{10}{2} = 5 \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow 25 + 39 = 64 \Rightarrow \sqrt{64} = 8 \Rightarrow 8 - \frac{10}{2} = 8 - 5 = 3.$$

Encontrando o número 3 como solução da equação.

Escrevendo na forma algébrica, temos:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Al-khowarizmi apresenta dois métodos geométricos de resolução de equações do segundo grau. No seu tratado, não faz uso de notações simbólicas e as suas equações são escritas no estilo retórico, isto é, sem o emprego de símbolos. Como exemplo de aplicação do 1° método de Al-khowarizmi consideremos a equação:

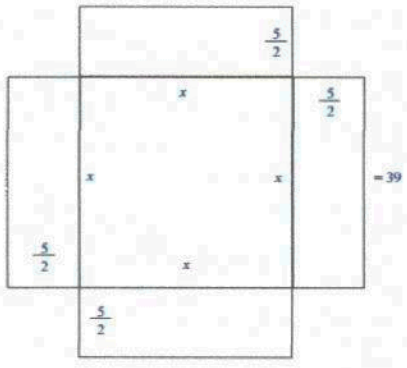
$$x^2 + 10x = 39.$$

Primeiramente, a equação é escrita na forma

$$x^2 + 4 \times \frac{5}{2} \times x = 39.$$

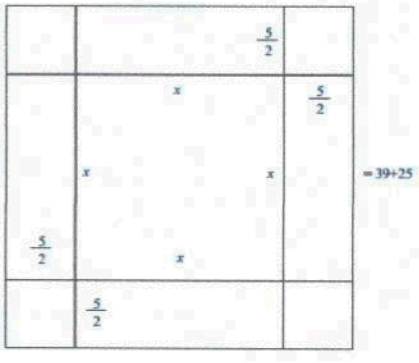
que geometricamente pode ser representada para figura abaixo.

UFC BIBLIOTECA



O completamento do quadrado é realizado, resultando na equação equivalente

$$x^2 + 4 \times \frac{5}{2} \times x + 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$$



Algebricamente

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

porém geometricamente,

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$$

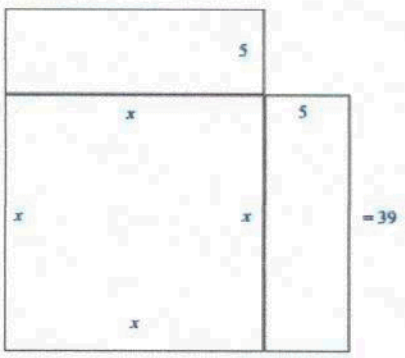
daí, Al-khwarizmi deduz que $x+5 = \sqrt{64} = 8$. Chega-se então à solução $x = 8-5 = 3$.

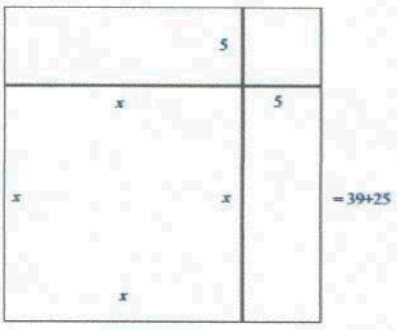
Para Al-Khwarizmi, quantidades negativas não tinham sentido. No seu método, a solução $x = -8 - 5 = -13$ não aparece. Podemos no entanto, usar o método geométrico de Al-Khwarizmi como um guia para completar quadrados e, no final, esquecê-lo, deduzindo também eventuais soluções negativas da equação.

No 2° método de Al-Khwarizmi, mais simples, a equação é escrita na forma

$$x^2 + 5x + 5x = 39$$

Completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 5, portanto de área 25, obtém-se $x^2+5x+5+5^2 = 39+5^2$, logo $(x+5)^2 = 39+25 = 64$, então $x+5 = 8$, ou seja $x = 3$.





Europeus

Na Europa Medieval, a Matemática começa a desenvolver-se entre os séculos XII e início do XIII. O matemático mais importante desta época foi Leonardo Fibonacci de Pisa (1170-1250), que também possuía conhecimentos das línguas árabe e grega. Sua obra mais famosa foi "*Líber Abbaci*", um marco no desenvolvimento da Matemática. Nesta obra Fibonacci introduz o sistema de numeração hindu-arábico. Seu trabalho baseou-se em equações do hindu Al-Khowarizmi e do grego Euclides.

Na idade média surgem manuscritos matemáticos sobre resolução de equações quadráticas, originados de traduções de obras árabes, mas Fibonacci inovou e tornou seus estudos mais abrangentes.

Na época do Renascimento um matemático europeu de destaque foi o francês François Viéte (1540-1603), que além de matemático também teve uma carreira bem sucedida como advogado e conselheiro real. Em 1591 publicou a obra "*In Artem Analyticem Isogoge*", que foi muito importante para a Álgebra. Foi responsável pela introdução de símbolos na matemática, usando letras para representar números. Por isso ficou conhecido como o "Pai da Álgebra".

Outro matemático de destaque deste período foi René Descartes (1596-1650), que em sua obra o "*Discours de la méthode*", desenvolveu um método geométrico para a obtenção da solução positiva, pois não considerava raiz negativa de uma equação,

UFCG / BIBLIOTECA

aperfeiçoando assim a Álgebra de Viéte.

Segundo Amaral [1], um exemplo de equação de segundo grau, conforme o método de Viéte, que consistia em considerar duas novas variáveis: u e v (incógnitas auxiliares) é dado por:

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Substituindo na equação $x = u + v$, temos:

$$a(u+v)^2+b(u+v)+c = 0 \Leftrightarrow a(u^2+2uc+v^2)+bu+bv+c = 0 \Leftrightarrow au^2+2auv+av^2+bu+bv+c = 0.$$

Reescrevendo essa igualdade como uma equação em v, temos

$$av^2 + 2auv + bv + au^2 + bu + c = 0 \Leftrightarrow av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Anulando o coeficiente de v, temos $2au + b = 0 \Rightarrow u = -\frac{b}{2a}$.

Substituindo na equação, obteve

$$\begin{aligned} av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \\ \Leftrightarrow av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad av^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$ temos $v = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Assim

$$x = u + v \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula de Bhaskara.

Existe ainda outra forma de se fazer a resolução geométrica da equação do segundo grau. Numa abordagem histórica Fragoso [7] discrimina os casos $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = bx - c^2$ e $x^2 = c^2 - bx$ (sempre com b e c positivos), estudados e demostrados pelo francês René Descartes no apêndice "*La Géométrie*" da obra "*Discours de la Méthode*". Descartes desenvolveu um método que tem por objetivo:

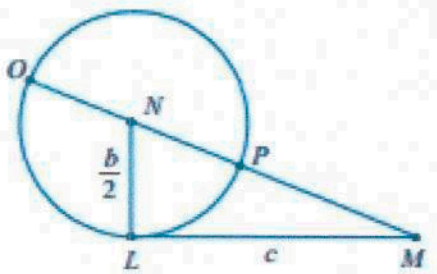
1. Por processos algébricos libertar a geometria de diagrama;
2. Dar significado às operações da Álgebra por meio de interpretações geométricas.

Vejamos com mais detalhes o método de Descartes, considerando o casos $x^2 = bx + c^2$.

UFCG / BIBLIOTECA

Traça-se um segmento LM, de comprimento c, em L levanta-se um segmento NL igual a $b/2$ e perpendicular a LM. Com centro em N, construímos um círculo de raio $b/2$ e traçamos a reta M e N que corta o círculo em O e P. Então a raiz procurada é a medida do segmento OM.

Temos que $\overline{OM} = x$, é a solução da equação e $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$.



Com efeito, no triângulo retângulo, MLN, se $OM = x$, tem-se:

$$(x - b/2)^2 = (b/2)^2 + c^2$$

e daí: $x^2 - bx = c^2$.

A outra solução da equação não é apresentada, uma vez que é negativa.

Faremos o cálculo não demonstrado, apenas citado por Descartes, notemos que $\overline{OM}$ é realmente a solução. Considerando o triângulo MLN, retângulo em L por construção e pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{NL})^2 + (\overline{LM})^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 \Rightarrow \overline{NM} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$$

Sabemos também que $\overline{ON} = \overline{NL}$, então $\overline{ON} = \frac{b}{2}$ e que $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$), assim, temos:

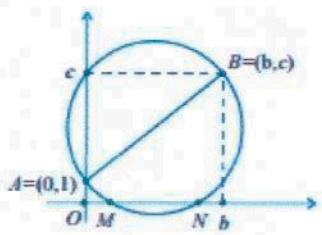
$$\overline{OM} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} \Leftrightarrow x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$$

- Descartes só considerava a raiz positiva, ou seja, $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ para primeira a equação e $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ para a segunda equação.

Sobre resoluções gráficas da equação do segundo grau, comentado por Fragoso [7], temos ainda o método John Leslie, que em sua obra *Elements of Geometry*, apresenta o seguinte procedimento.

UFCG / BIBLIOTECA

Seja uma equação do segundo grau representada da seguinte forma $x^2 - bx + c = 0$ (considere b e c positivos), em um plano cartesiano marque os seguintes pontos: $A(0,1)$ e $B(b,c)$. Trace o círculo de diâmetro AB. As abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x, se cortar, são as raízes da equação do segundo grau dada.



Como $d_{AB} = 2R \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + (c-1)^2} = 2R$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = b^2 + (c+1)^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$$

As coordenadas do centro são dadas como sendo o ponto médio do diâmetro, logo $C = \left(\frac{b}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$ e desta forma, então a equação do círculo traçado é

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$$

Fazendo $y = 0$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 &= -\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{-c^2 - 2c - 1 + b^2 + c^2 - 2c + 1}{4} \\
\Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4c}{4} \Leftrightarrow x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} \\
\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2} &\pm \frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}
\end{aligned}$$

Que são as raízes da equação dada inicialmente, ou seja, $x^2 - bx + c = 0$.

UFCG / BIBLIOTECA

2.2 Equações Cúbicas

No século XVI surgiu na Europa um novo interesse pelo estudo da Matemática, mais especialmente na Itália. Na época, por volta de 1510, Scipione Del Ferro, um matemático italiano, encontrou uma fórmula para resolver as equações do 3° grau do tipo $x^3+px+q=0$, mas morreu antes de publicar sua descoberta. Seu aluno, Antonio Maria Fior, que conhecia o método tentou se apropriar do mérito de seu mestre.

Em uma competição pública, Fior desafiou Niccolò de Brescia (1499-1557), conhecido por Tartaglia (devido à sua gagueira), onde cada um destinava ao seu adversário 30 problemas, com 40 ou 50 dias de prazo para solucioná-los, o vencedor seria aquele que resolvesse o maior número de problemas. Pensando em surpreender Tartaglia, achando-o incapaz de solucionar os problemas propostos, Fior propôs desafios que se resumiam em solucionar a equações da forma $y^3+py+q=0$, porém faltando poucos dias para a disputa, Tartaglia achou um método geral para todos os tipos de equações cúbicas.

Na Itália, Gerolamo Cardano (1501-1576), um intelectual extraordinário e polivalente, mas a cujo caráter muitas ressalvas se faziam, cogitava a essa altura publicar um livro de álgebra, aproveitando algumas idéias suas sobre o assunto. Influente e insinuante como era, conseguiu atrair Tartaglia para uma entrevista na qual, prometendo segredo e acenando algumas possíveis recompensas, acabou obtendo o método de solução deste.

Para desespero de Tartaglia, quando o livro de Cardano saiu em 1545 com título de *Ars Magna*, um marco na história da matemática, nele figurava a solução de $x^3+px+q=0$, o que gerou uma polêmica de mais de um ano entre os dois. Para os contemporâneos de Cardano este livro significava uma ruptura no campo da matemática, exibindo e publicando pela primeira vez os princípios para a resolução das equações cúbicas e também as equações quárticas, dando as raízes como expressões formadas por radicais, de forma similar ao método que era usado, para as equações do segundo grau. Cardano não reivindica para si estas duas novidades e apresenta os nomes dos seus descobridores: Scipione del Ferro e Tartaglia para as cúbicas e Ludovico Ferrari (1522-1565) para as quárticas.

No *Ars Magna*, Cardano analisou todo caso distinto da equação cúbica completa,

UFCG / BIBLIOTECA

transformando cada equação em uma sem o termo de segundo grau, dando um exemplo numérico em cada caso, e provando geometricamente a validade das soluções. O método Cardano-Tartaglia de resolução de equações do 3° grau aplica-se a equações do 3° grau que podem ser escritas na forma $x^3 + px + q = 0$. Acontece que todas as equações do 3° grau podem ser reduzidas a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$.

Simbolicamente podemos escrever a Fórmula de Cardano, como:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Todos imaginaram que as equações do terceiro estavam vencidas, mas a ilusão durou pouco. Logo começaram a surgir raízes quadradas de números negativos, o chamado caso irredutível, e, além disso, essa fórmula só dava uma raiz como solução. Mas como poderia? Uma vez que a equação do segundo grau dava duas raízes, a equação do terceiro grau teria que apresentar três raízes. Iniciou-se uma busca que culminou na história dos números complexos, que é outro assunto.

Estudando os casos em que p e, ou q são negativos, chega-se às raízes quadradas de números negativos. Assim, Cardano descobriu uma nova espécie de números que chamou de "*numeri ficti*"(que no século XVII ficaram conhecidos como números imaginários, por René Descartes).

Um exemplo interessante da aplicação dá fórmula de Cardano é para a equação

$$x^3 = 8x + 3$$

que obtemos, segundo a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{27 + \sqrt{-5415}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{27 - \sqrt{-5415}}{18}}.$$

No entanto Cardano sabia que $x = 3$.

Entretanto, um outro algebrista italiano chamado Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573) publicou um livro chamado *L'Algebra* em que descreve as idéias de Cardano de forma didática. É precisamente neste livro onde aparece pela primeira vez a necessidade explícita de introduzir os "números imaginários"e também uma primeira apresentação do assunto. Ao aplicar a fórmula de Cardano no exemplo dado por $x^3 = 15x + 4$, Bombelli obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

UFCG / BIBLIOTECA

onde de antemão podemos perceber diretamente que $x = 4$ é uma solução desta equação. Bombelli decidiu trabalhar como se as "raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números". Então, para obter o resultado $x = 4$, parte do raciocínio segundo o qual os números $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ sejam do tipo $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, ou seja

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$$

e

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}.$$

Daí,

$$x = (a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b}) = a^2+b \tag{2.1}$$

elevando ao cubo os números abaixo, obtemos:

$$(a+\sqrt{-b})^3 = (a^3-3ab)+(3a^2-b)\sqrt{-b} \tag{2.2}$$

e

$$(a+\sqrt{b})^3 = (a^3+3ab)+(3a^2+b)\sqrt{b} \tag{2.3}$$

Substituindo em (2.1) e em (2.2), temos:

$$\begin{array}{rcl} \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right) & = & \sqrt[3]{4+121} = 5 \\ \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)^3 & = & 2+11\sqrt{-1} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b &= 5 \\ a^3-3ab &= 2 \\ 3a^2-b &= 11 \end{cases}$$

Daí tira-se que $a = 2$ e $b = 1$. Logo, $x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$. Percebendo claramente a importância deste achado, o próprio Bombelli diz:

"Era um pensamento louco, segundo o julgamento de muitos, e por muito tempo eu também fui da mesma opinião. Tudo parecia apoiar-se mais em sofismas do que na verdade".

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para se operar com $\sqrt{-1}$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= -1,\\ (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= 1,\\ (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) &= -1\\ (\pm 1)(\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1},\\ (\pm 1)(-\sqrt{-1}) &= \mp\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, estavam lançadas as bases para o futuro desenvolvimento da Teoria dos números complexos. Bombelli foi o último grande algebrista italiano da renascença.

Hoje, podemos pensar em equações cúbicas como sendo essencialmente todas do mesmo tipo e podendo todas serem resolvidas por um mesmo método. (BOYER, 2002, p. 194).

2.3 Equações Quárticas

Ludovico Ferrari (1522-1560), nascido em Bolonha, era de família muito humilde e aos 15 anos de idade foi trabalhar como servo na residência de Cardano, o qual percebendo sua notável inteligência, o promoveu a seu secretário.

Em 1540 o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, propôs o seguinte problema a Cardano:

"Dividir 10 em três partes numa proporção contínua de forma que o produto das duas primeiras seja 6."

Em uma linguagem atual o problema consiste descobrir os valores das incógnitas x, y e z do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z &= 10\\ \frac{y}{x} &= \frac{x}{z}\\ xy &= 6\end{cases}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Observando que $y = \frac{6}{x}$ e $z = \frac{x^3}{6}$, logo a questão transforma- se em resolver a equação de 4° grau:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Depois de várias tentativas sem sucesso, Cardano passou o desafio a Ferrari que acabou encontrando uma fórmula geral para as equações do quarto grau. Este processo também foi publicado por Cardano, como continuação da solução obtida por Tartaglia das equações do terceiro grau, em sua obra Ars Magna.

Dada a equação geral de quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ e substituindo x por $y - b/4a$, tem-se como resultado a equação reduzida, sem o termo de terceiro grau,

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Foi esse tipo de equação que Ferrari resolveu (que pela substituição acima significa solução para a equação de quarto grau completa). Ele buscou reescrever a equação, usando as operações permitidas pelos axiomas de Euclides, de modo a obter quadrados perfeitos e assim reduzir o problema a resolução de uma equação do 2° grau que era possível usando a fórmula de Bhaskara. Este método permite a exibição das quatro raízes da equação, assim como a fórmula de Bhaskara permite a exibição das duas raízes da equação do 2° grau.

2.4 As Soluções das Equações de Grau $n \geq 5$

As equações de 2° e 3° graus são resolúveis por radicais. A quártica pode ser reduzida a uma cúbica, cuja solução é conhecida. Será possível, por meios de radicais, resolver equações de grau maior que quatro?

Queremos encontrar uma fórmula que expresse as raízes de uma equação de 5° grau em função de seus coeficientes, como é feita com a quártica e a cúbica. Esta fórmula deve envolver somente operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, juntamente com a extração de raizes, pois tudo isso tinha sido utilizado para a solução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas.

Euler, em 1750, tentou reduzir a equação de 5° a uma quártica, para poder resolvê-la, mas Euler falhou em sua tentativa.

UFCG / BIBLIOTECA

O matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) em seu trabalho "Reflexões sob a solução de equações algébricas"publicado em 1770-1771, analisa minuciosamente as soluções por radicais das equações de 2°, 3° e 4° graus conhecidas até sua época e conclui que o sucesso destas raízes se baseia em propriedades que não se encaixam em equações de graus iguais ou superiores a 5.

Apesar de afirmar sobre a impossibilidade de resolver, por radicais, as equações de graus superiores a quatro, Lagrange não conseguiu provar a impossibilidade de resolvê-los, e em suas memórias, disse: "O problema de resolver equações por radicais cujo grau é maior do que o quarto é um desses problemas que não foram resolvidos, mesmo que nada prove a impossibilidade de resolvê-los".

A primeira tentativa de provar que uma equação de 5° grau não pode ser resolvida por meios algébricos é devida ao italiano Paolo Ruffini.

Ruffini, em 1803, 1805 e 1813 procurou mostrar, embora de modo insuficiente, que as raízes das equações de grau maior ou igual a cinco, não podem ser expressas por meio de radicais em termos de seus coeficientes.

De Del Ferro (solução das raízes cúbicas) até Lagrange passaram mais de dois séculos e meio sem que ninguém desconfiasse da impossibilidade de solução por radicais de equações com graus iguais ou superiores a 5, isto é, ninguém até aquele momento acreditava na impossibilidade de expressar as raízes das equações de grau ≥ 5 em termos dos seus coeficientes.

A primeira prova válida, de que uma equação geral de 5° grau não é solúvel por radicais, foi dada após a morte de Lagrange, num impressionante pequeno artigo, escrito por Abel em 1824.

Imaginemos agora a surpresa sentida por todos os matemáticos quando 11 anos após o trabalho de Lagrange, em 1824, veio a tona o trabalho de um jovem gênio de 22 anos nascido na Noruega, Nieils Henrik Abel (1802-1828), pensou ter encontrado as raízes por radicais das equações de quinto grau, mas logo se corrigiu em um famoso artigo de 1824.

Neste artigo Abel afirma e demonstra a impossibilidade de solucionar equações de quinto grau por meio de radicais. Este trabalho lhe rendeu uma bolsa de estudos que permitiu viajar para Alemanha, Itália e a França, durante este período escreveu vários artigos em áreas diversas da matemática.

UFCG / BIBLIOTECA

Abel também mostrou que algumas equações de 5° grau eram solúveis por radicais e que algumas equações como, $x^5 - 1 = 0$ são resolvidas facilmente, tendo $x = 1$ como uma raiz e as outras quatro raízes podem ser encontradas por extração de raiz quadrada. Abel levanta a questão "Quais equações de grau maior que quatro podem ser resolvidas por radicais?".

Abel teve uma vida de pobreza e sofria dos pulmões, nunca conseguiu o cargo de professor numa universidade, e infelizmente uma tardia carta, dois dias depois de sua trágica morte, em Froland, Noruega, veio o convite para trabalhar na Universidade de Berlim.

Abel morreu em 1829, aos 26 anos de idade, sem resolver o problema por ele levantado.

Quando questionado sobre o segredo para avançar tão rapidamente para os primeiros escalões da matemática, Abel respondeu: "Estudando os mestres e não seus discípulos".

No campo das equações com grau igual a 5, então não existia nenhuma expressão algébrica envolvendo os coeficientes que fosse a solução da equação correspondente. Porém existem equações especiais de qualquer grau, que podem ser resolvidas por radicais, e muitas delas são importantes para solucionar problemas concretos. Por fim, após a descoberta de Abel, a situação é a seguinte: Mesmo não tendo uma solução geral para as equações de grau > 4 ou $= 5$, existe um número limitado de equações de grau maior do que quatro que podem ser resolvidas por radicais.

A questão é: quais equações são essas? Quais as características devem ter uma equação para ser solucionada por radicais?

A resposta a essa pergunta seria dada pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1833), em cuja obra aparece delineado pela primeira vez o conceito de grupo, inclusive com esse nome.

Galois foi um jovem rebelde, de vida curta e morte trágica, Évariste Galois, brigava constantemente com seus professores. Por ter morrido aos 22 anos em um duelo, e por ter passado os dois últimos anos de sua vida em volta das confusões da revolução de 1830, sendo encarcerado por ameaçar publicamente a vida do rei Luís Felipe, não conseguiu dedicar muito tempo à Matemática.

Galois dominou os principais textos de Matemática da sua época, esudou ar-

tigos de Legendre, Jacobi e Abel. Com apenas dezessete anos obteve resultados de extrema importância, mas os dois textos enviados a Academie Sciences foram extraviados, aumentando sua frustração. Em 1830 foi publicado um artigo de sua autoria sobre equações, com resultados visivelmente baseados em uma teoria geral.

Após o cárcere, se envolveu em uma briga por uma mulher, o que custou a sua vida. Apesar do curto tempo que teve, Galois fez descobertas avançadas para sua época em muitos ramos da matemática, em particular deu a resposta para as perguntas que estavam pendentes na teoria das equações algébricas escritas em um pequeno manuscrito titulado: "Memória sob as condições de resolver as equações por radicais", que fora escrito em trinta e uma páginas, de maneira pouco legível, às pressas na noite antes do duelo em que foi morto.

Suas memórias e seus manuscritos foram publicados após sua morte no Jornal de Mathématique por Joseph Liouville (1809-1882) e uma avaliação completa de suas realizações só aconteceu em 1870 graças a Camille Jordan (1849 - 1925) que as expôs em seu livro "*Traité de Substitutions*". Mais tarde outros autores as usaram brilhantemente na Geometria.

Resumidamente, a idéia de Galois para responder a essa pergunta foi associar a cada equação um grupo formado por permutações de suas raízes e condicionar a resolubilidade por radicais a uma propriedade desse grupo. E, como para toda equação de grau ≤ 4 o grupo de permutações que lhe é associado goza dessa propriedade e para > 4 sempre há equações cujo grupo não se sujeita a essa propriedade, a questão da resolubilidade por radicais estava por fim esclarecida. E essa condição necessária e suficiente para saber quando uma equação seja resolúvel por radicais ficou conhecida como "grupo de Galois".

Mas embora não existam fórmulas resolutivas de equações algébricas de grau maior que 4, existem os **métodos numéricos** - como, por exemplo: o método de Newton-Raphson (1690) - que permitem descobrir essas raízes, utilizando aliados cada vez mais indispensáveis, que são as calculadoras programáveis e os computadores.

UFCG / BIBLIOTECA

Em vista disto, os matemáticos desde muito tempo dedicaram-se a trabalhar na seguintes direções:

- o problema de saber à respeito das soluções, somente trabalhando com seus coeficientes,
- o problema da existência de raízes (soluções).
- o cálculo aproximado das raízes ou soluções de uma equação.

A solução para o primeiro item foi discutido acima. Para o segundo item temos o conhecido "Teorema fundamental da Álgebra"e o terceiro item é onde usamos os métodos numéricos para solucionar.

UFCG / BIBLIOTECA

Capítulo 3

Equação algébrica

Neste capítulo faremos um estudo sobre equações algébricas. Estudaremos em especial algumas destas equações com o objetivo de discutirmos a obtenção de suas raízes. As referências para os estudos realizados foram [4], [9], [10], [11] e [12].

3.1 Equação algébrica

Chamaremos **equação algébrica** de grau $n \geq 2$ à uma igualdade

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{3.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$. Procura-se determinar o número x, a "incógnita", de modo que a igualdade seja satisfeita. Como consequência do teorema fundamental da álgebra, sabemos que o polinômio $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{R}[t]$, de grau n, fatora-se como

$$f(t) = a_n(t - z_1) \ldots (t - z_n) \tag{3.2}$$

onde $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$(=corpo dos números complexos) não necesariamente distintos, univocamente determinados. Nesse sentido, dizemos que toda equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes complexas, podendo haver repetições, i. e. contando suas multiplicidades. As **raízes**, **coeficientes**, **grau**,etc.da equação(3.1)são, por definição, as raízes, coeficientes, grau, etc. do polinômio f.

Para encontrar as raízes de $f(x) = 0$, podemos dividir todos os coeficientes de f por $a_n \neq 0$, e assim supor, sem perda de generalidade, que $a_n = 1$.

UFCG / BIBLIOTECA

3.2 A Equação do 2° Grau

Para $n = 2$, temos a **equação quadrática**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Dividem-se por a os termos da equação:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Adiciona-se a cada membro $\frac{b^2}{4a^2}$ de modo a formar o quadrado de um binômio:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)^{1/2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado o **discriminante**.

Define-se para $r < 0$: $\sqrt{r} = i\sqrt{-r}$, onde i é a unidade imaginária no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Obtém-se, assim, a conhecida **fórmula de Baskhara**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3.3 A Equação do 3° Grau

Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Ora,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

O que se pretende é fazer uma mudança de variável de modo que nessa nova variável se obtenha uma equação sem termo do segundo grau.

Fazendo então $x = y + m$, obtemos:

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= (y+m)^3 + \frac{b}{a}(y+m)^2 + \frac{c}{a}(y+m) + \frac{d}{a} \\ &= y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3 + \frac{b}{a}\left(y^2 + 2ym + m^2\right) + \frac{c}{a}y + \frac{c}{a}m + \frac{d}{a} \\ &= y^3 + \left(3m + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3m^2 + \frac{2b}{a}m + \frac{c}{a}\right)y + \left(m^3 + \frac{b}{a}m^2 + \frac{c}{a}m + \frac{d}{a}\right). \end{aligned}$$

O nosso objetivo é obrigar que não exista termo do segundo grau portanto $3m + \frac{b}{a} = 0$, donde,

$$m = -\frac{b}{3a}$$

e a mudança de variável que se deve fazer é $x = y - \frac{b}{3a}$. Temos então, na nova equação, o coeficiente de y^2 como sendo zero.

Para determinar o novo coeficiente de y temos de substituir m pelo valor encontrado e vem

$$3m^2 + \frac{2b}{a}m + \frac{c}{a} = 3\Big(-\frac{b}{3a}\Big)^2 + \frac{2b}{a}\Big(-\frac{b}{3a}\Big) + \frac{c}{a} = \frac{1}{3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 - \frac{2}{3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 + \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 + \frac{c}{a}.$$

Quanto ao termo independente temos

$$\begin{aligned} m^3 + \frac{b}{a}m^2 + \frac{c}{a}m + \frac{d}{a} &= \Big(-\frac{b}{3a}\Big)^3 + \frac{b}{a}\Big(-\frac{b}{3a}\Big)^2 + \frac{c}{a}\Big(-\frac{b}{3a}\Big)^2 + \frac{d}{a} \\ &= -\frac{1}{27}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 + \frac{1}{9}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{bc}{a^2}\Big) + \frac{d}{a} \\ &= \frac{2}{27}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{bc}{a^2}\Big) + \frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Vimos então que qualquer equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser escrita na forma $y^3 + py + q = 0$ sendo $p = -\frac{1}{3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 + \frac{c}{a}$ e $q = \frac{2}{27}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{bc}{a^2}\Big) + \frac{d}{a}$.

Agora, basta resolver a equação reduzida

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3.3}$$

cujas raízes y_i fornecem as três raízes $y_i - b/3a$ da equação original completa.

Para resolver (3.3), usa-se um artifício de cálculo: $y = u + v$, com $u \neq 0$ e $v \neq 0$, a determinar. Note-se que podemos supor $y \neq 0$, isto é, $q \neq 0$; caso contrário recaímos em uma equação quadrática.

Sendo $y = u + v$ elevando ao ambos os membros ao cubo, temos :

$$\begin{aligned} y^3 &= (u+v)^3 \\ y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \end{aligned}$$

Donde,

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0 \tag{3.4}$$

Comparando (3.3) e (3.4), temos

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}$$

Se pudermos resolver o sistema de equações em u e v obtém-se uma raiz $y = u + v$, da equação (3.3).

Descobrir apenas uma solução é um primeiro passo para descobrir as outras.

Ora, $3uv = -p \Leftrightarrow v = -\frac{p}{3u}$ e substituindo em

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 = -q &\Leftrightarrow u^3 + \Big(-\frac{p}{3u}\Big)^3 = -q \Leftrightarrow u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q \\ &\Leftrightarrow 27(u^3)^2 - p^3 = -27qu^3 \Leftrightarrow 27(u^3)^2 + 27qu^3 - p^3 = 0. \end{aligned}$$

Usando a fórmula vista para resolução de equações do 2° grau,

$$u^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{27^2q^2 + 4 \times 27p^3}}{2 \times 27} = \frac{-27q}{2 \times 27} \pm \sqrt{\frac{27^2q^2 + 4 \times 27p^3}{4 \times 27^2}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Como vimos basta, por enquanto, obter uma solução portanto considera-se

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Para determinar v podemos substituir u em qualquer uma das equações atrás onde u e v estavam relacionados. Usando $u^3 + v^3 = -q$ vem

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + v^3 = -q \Leftrightarrow v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Está então encontrada uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$ que é

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Exemplo 3.1. *Considere a equação* $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

Altere a variável para $x = y + m$*:*

$$(y + m)^3 - 6(y + m)^2 + 6(y + m) - 5 = 0.$$

Ou seja,

$$y^3 + (-6 + 3m)y^2 + (3m^2 - 12m + 6)y + (m^3 - 6m^2 + 6m - 5) = 0.$$

Calcule m *de modo a anular o termo de* $2°$ *grau:*

$$-6 + 3m = 0 \Rightarrow m = 2.$$

UFCG / BIBLIOTECA

Substitui-se m, obtendo-se

$$y^3 + (-6 + 3(2))y^2 + (3(2)^2 - 12(2) + 6)y + ((2)^3 - 6(2)^2 + 6(2) - 5) = 0.$$

Ou:

$$y^3 - 6y - 9 = 0.$$

Agora a equação esta na forma que pode ser resolvida pela fórmula de Tartaglia, logo:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Como $x = y + m$, temos $x = 3 + 2 = 5$.

Por simples verificação, constata-se que 5, realmente, é solução da equação:

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0.$$

Determinação das outras raízes

A equação inicial $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tinha coeficientes reais e o modo como obtemos p e q originava também reais, no entanto, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ pode ser negativo e termos então $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ um imaginário.

Num caso geral, em que os coeficientes podem ser complexos, consideramos que

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

representa qualquer raiz cúbica de

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e vamos determinar as outras.

Fazendo uso da observação (1.2) e o exemplo (1.1) podemos agora listar todas as soluções da equação $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. São elas

UFCG / BIBLIOTECA

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
u_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) \\
u_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)
\end{aligned}
$$

Ao fazer $u = u_1$ obtemos $v = v_1$ já obtido anteriormente.

Considerando $u = u_2$ temos

$$u_2^3 = \Big(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\Big) \times \Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3$$

e como $u_2^3 + v_2^3 = -q$ vem

$$v_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

e novamente teríamos três soluções possíveis para v_2.

Acontece que originando u_1 três valores para v_1, u_2 três valores para v_2 e u_3 três valores para v_3 iríamos repetir soluções quando somássemos para obter a solução de y . Assim ficam definidas três soluções:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
y_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) \\
y_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \times \Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)
\end{aligned}
$$

Logo, as raízes de(3.3)são dadas por

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
y_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
y_1 &= \overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}
\end{aligned}
$$

UFCG BIBLIOTECA

onde os radicais $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$ e $\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$ são escolhidos sob a condição $uv=-p/3$.

Portanto, as raízes y de (3.3) se expressam pela chamada fórmula de Cardano:

$$y=\omega^k\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\overline{\omega}^k\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}},\ k=0,1,2.$$

Exemplo 3.2. $x^3-x+1=0$. *Temos* $p=-1$ *e* $q=1$. *Portanto, temos*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-1/2+\sqrt{1/4-1/27}}+\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{-1/4-1/27}}\\
&= \sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}\\
x_2 &= w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\bar{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}\\
x_1 &= \bar{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}
\end{aligned}$$

onde $w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *e os dois radicais podem ser tomados como os radicais cúbicos reais, pois*

$$(\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}})(\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}})=\frac{1}{3}=-\frac{p}{3}.$$

Exemplo 3.3. *A equação* $x^3-3x+2=0$ *tem como raízes*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-1}=-2\\
x_2 &= w\sqrt[3]{-1}+\bar{w}\sqrt[3]{-1}=1\\
x_1 &= \bar{w}\sqrt[3]{-1}+w\sqrt[3]{-1}=1.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4. *Um engenheiro projetou duas caixas d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de paralelepípedo reto retângulo, com* $6m^2$ *de área de base. O volume da caixa em forma de paralelepípedo reto-retângulo deve ter* $4m^3$ *a menos que o volume da caixa cúbica. Qual deve ser a medida, da aresta da caixa cúbica?*

Indicando por x *a medida dessa aresta, temos:*

Faz-se: A área da base do paralelepípedo igual a $ab=6$ *e volume igual a* $V=abx\Rightarrow V=6x$. *O volume do cubo é igual a* $V=x^3$. *Assim o valor de* x *é a raiz da equação* $x^3=4=6x$, *ou seja,* $x^3-6x+4=0$, *que é uma equação de grau 3 e é resolvida pela Fórmula de Cardano:*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

UFCG / BIBLIOTECA

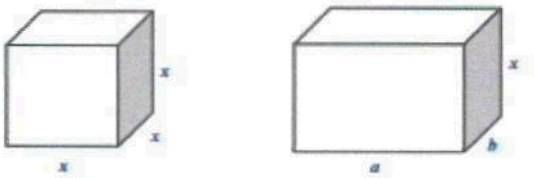


Figura 3.1: As caixas d'água.

em que p é o coeficiente de x e q é o termo independente ($q = 4$).

Aplicando essa fórmula, obtemos

$$x = \sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}.$$

Iremos utilizar o "método"feito pelo matemático italiano Rafael Bombelli. Isto é,

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}\right)\left(\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}\right) &= \sqrt[3]{4+4} = 2 \\ \left(\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}\right)^3 &= -2-\sqrt{-1} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} a^2+b &= 2 \\ a^3-3ab &= -2 \\ 3a^2-b &= 2 \end{cases}$$

Daí, tira-se que $a = b = 1$. Logo, $x = 1+\sqrt{-1}+1-\sqrt{-1} = 2$. Dividindo x^3-6x+4 por $x-2$, para descobrir as outras duas raízes, obtemos x^2+2x-2 (que é um polinômio de grau 2), logo as duas raízes restantes são a da equação $x^2+2x-2 = 0$, isto é,

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$$

Ora, essas raízes não fazem sentido para o problema. E, portanto, a aresta da caixa cúbica deve medir $2m$.

Definição 3.1. *O discriminante da equação(3.3)é definido por*

$$\delta = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x^2-x^3)^2,$$

onde $x_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1,2,3)$ são as raízes da equação

Proposição 3.1. *O discriminante da equação x^2+px+q é dado, em termos dos seus coeficientes, por*

$$\delta = -4p^3-27q^2.$$

Demonstração. Ver [4] □

3.4 A Equação do 4° Grau

Uma solução para equações do quarto grau, consiste em reduzir o grau da equação para três e então aplicar a fórmula encontrada por Tartaglia. Nesse processo será utilizado as Relações de Girard.

Suponhamos então que temos a equação

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0 \quad \text{com} \quad a \neq 0$$

À semelhança do que foi feito para a equação cúbica, faz-se a substituição $y = x + h$:

$$a(x+h)^4 + b(y+h)^3 + c(x+h)^2 + d(x+h) + e = 0$$

Ordenando pelas potências decrescentes de x fica:

$$\begin{aligned} & ax^4 + (b + 4ah)x^3 + \left(c + 3bh + 6ah^2\right)x^2 \\ + & \left(d + 2ch + 4ah^3 + 3bh^2\right)x + ah^4 + bh^3 + ch^2 + dh + e = 0 \end{aligned}$$

Se dividirmos por a e anularmos o termo em x^3, para o que devemos fazer

$$h = -\frac{b}{4a}$$

obtemos a equação reduzida

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

sendo os seus coeficientes dados por

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}$$

$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$$

e

$$r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}$$

Assim basta considerar a equação do quarto grau reduzida

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{3.5}$$

UFCG / BIBLIOTECA

Como no caso da equação cúbica, façamos $x = u + v + z$, com $u \neq 0$, $v \neq 0$, $z \neq 0$. Temos,

$$\begin{aligned} x^2 - (u^2 + v^2 + z^2) &= 2(uv + uz + vz) \\ \left[x^2 - (u^2 + v^2 + z^2)\right]^2 &= 4(uv + uz + vz)^2 \Leftrightarrow \\ x^4 - 2(u^2 + v^2 + z^2)x^2 + (u^2 + v^2 + z^2)^2 &= 4\left[u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 + 2(u^2vz + uv^2z + uvz^2)\right] \\ &= 4(u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2) + 8uvz(u + v + z) \end{aligned}$$

Logo,

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + z^2)x^2 - 8(uvz)x + [(u^2 + v^2 + z^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2)] = 0.$$

Assim, se (u, v, z) é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + z^2 &= -p/2 \\ uvz &= -q/8 \\ u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 &= (p^2 - 4r)/16, \end{cases}$$

então $x = u + v + z$ é uma raiz de (3.5). É mais fácil resolver o sistema seguinte

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + z^2 &= -p/2 \\ u^2v^2z^2 &= q^2/64 \\ u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 &= (p^2 - 4r)/16, \end{cases}$$

em u^2, v^2, z^2. De fato, temos u^2, v^2 e z^2 são as raízes da cúbica

$$y^3 + (p/2)y^2 + [(p^2 - 4r)/16]y - q^2/64 = 0.$$

chamada a cúbica resolvente de (3.5).

Encontramos então números complexos $u^2 = \alpha$, $v^2 = \beta$, $z^2 = \gamma$.

Escolhendo duas raízes quadradas $u = \sqrt{\alpha}$ e $v = \sqrt{\beta}$, determinamos $z = -q/8uv$.

Como $\gamma = z^2 = q^2/64u^2v^2 = (-q/8uv)^2$, temos que $z = -q/8uv$ é uma das raízes quadradas de γ.

Assim,

$$x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

é uma raiz de (3.5). Temos então as quatro raízes de $(\sqrt{\alpha})$, dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma} \\ x_2 &= \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma} \\ x_3 &= -\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma} \\ x_4 &= -\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma} \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. *Na equação* $x^4+8x+4=0$, *temos* $p=0$, $q=8$ *e* $r=4$. *Logo, a cúbica resolvente é* $y^3-(16/16)y-64/64 = y^3-y-1=0$, *com* $\delta=-4(-1)3-27\cdot(-1)2=-23<0$.

Logo, $u^2=\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}$ *(radicais reais)*

$$\begin{aligned} v^2 &= w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\bar{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}} \\ z^2 &= \bar{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}} \end{aligned}$$

onde $w=-1/2+i\sqrt{3}/2$.

UFCG / BIBLIOTECA

Conclusão

Neste trabalho apresentamos alguns métodos de resolução de equações algébricas desenvolvidas ao longo dos tempos.

A fórmula da equação de segundo grau foi mais fácil de ser deduzidas, pois vários povos já trabalhavam com essas equações. Para as equações de grau três e quatro, apenas nos séculos XVI e XVII, foram deduzidas as fórmulas por radicais para resolvê-las.

Tentando resolver equações de grau três e quatro, os matemáticos acabavam caindo em outro problema, apareciam raízes de números negativos, que se achava impossível, até que Bombelli criou o conjunto dos números complexos.

Finalmente, o matemático norueguês Niels Henrik Abel provou, em 1821, a impossibilidade de se obter uma fórmula que expressava as raízes de uma equação do quinto grau por meio de radicais.

Ainda assim uma questão permanecia: já que as equações de grau ≥ 5 não são, de modo geral, resolúveis por radicais, mas alguns tipos o são, o que caracteriza matematicamente estas últimas? A resposta a essa pergunta seria dada pelo matemático francês Evariste Galois.

Para a solução prática das equações o resultado deste trabalho foi o seguinte: uma fórmula geral para a solução das equações não existe e nos casos particulares em que existe, devido às operações bastante complicadas que se tem a fazer o método é pouco usado.

UFCG / BIBLIOTECA

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, J. T. *Método de Viète para resolução de equação do segundo grau.* Revista do Professor de Matemática, n° 13, 1988, p. 18-20.

[2] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações.* 3ª ed. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 2002.

[4] BASTOS, G. G. *Resolução de Equações Algébricas por Radicais.* Editora UFC.

[5] DANTE, L. R. *Matemática: Conceito e Aplicações.* volume único. São Paulo: Ática, 2010.

[6] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.

[7] FRAGOSO, W. C. *Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° grau.* Revista do Professor de Matemática, n°43, 2000, p. 20-25.

[8] GELSON, I... [et al] *Matemática* volume único. São Paulo: Atual, 2007.

[9] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio.* volume 3, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 1991

[11] LIMA, E. L. *A Equação do Terceiro Grau.* Matemática Universitária, nº 5, 1987, p. 9-23.

[12] MOREIRA, C. G. T. A. *Uma Solução das Equações do 3° e do 4° graus.* Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 23-25

[13] NOBRE, S. *Equações algébricas: uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de 2° grau.* In: Silva C. C. (Org.) Estudo de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[14] PITOMBEIRA, J. B. *Revisitando uma velha conhecida* 2004.

SITES:

[15] FERREIRA, J. W. *História das equações algébricas por meio de radicais*, 2007. Disponível em
http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/WellingtonJoseFerreira.pdf
(Acessado em 03/03/2014.)

[16] OHSE, M. L. *A Matemática Oriental (Árabes, Hindus e Chineses)*, 2006.
Disponível em
http://www.tutomania.com.br/artigo/a-matematica-oriental-arabes-hindus-e-chineses
(Acessado em 03/03/2014.)