



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Absorção e espalhamento de um buraco negro com
um monopolo global na gravidade $f(R)$**

Stefane Judith de Souza Ferreira

CAMPINA GRANDE

- Junho de 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Absorção e espalhamento de um buraco negro com
um monopolo global na gravidade $f(R)$**

Stefane Judith de Souza Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Anacleto.

CAMPINA GRANDE

- Junho de 2017 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

F383a

Ferreira, Stefane Judith de Souza.

Absorção e espalhamento de um buraco negro com monopolo global na gravidade $f(R)$ / Stefane Judith de Souza Ferreira.– Campina Grande, 2017.

48 f. il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto".

Referências.

1. Seção de Choque de Espalhamento. 2. Absorção. 3. Buraco Negro com Monopolo Global. I. Anacleto, Marcos Antônio. II. Título.

CDU 524.882(043)

ABSORÇÃO E ESPALHAMENTO DE UM BURACO NEGRO COM
UM MONOPOLO GLOBAL NA GRAVIDADE $f(R)$

STEFANE JUDITH DE SOUZA FERREIRA

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto

Orientador

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Examinador Interno

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva

Examinador Externo

O coração do homem propõe o seu caminho, mas
o Senhor lhe dirige os passos.

Provérbios 16:9

Agradecimentos

À Deus Todo Poderoso, que me abençoou em todos os momentos da minha vida.
À minha mãe pelo incentivo contínuo aos meus estudos e pela grande amizade que possuímos. Ao meu esposo pelo apoio, paciência e atenção.
Agradeço ao Professor Marcos Antônio Anacleto, pela sua paciência e dedicação na orientação deste trabalho.
Agradeço aos meus amigos Hebertt Leandro e Naiara Barros que me ajudaram durante todo o mestrado. À CAPES pelo suporte financeiro, e aos professores da Unidade Acadêmica de Física.

Resumo

Apresentamos os resultados do cálculo da seção de choque diferencial de espalhamento e a seção de choque de absorção para o buraco negro com monopolo global na gravidade $f(R)$. Aplicamos a abordagem de ondas parciais e mostramos que no limite de baixa frequência em pequenos ângulos, a contribuição para o termo dominante que apresenta na seção de choque de espalhamento e absorção é modificada pela presença do monopolo global e da modificação da gravidade. Em tal limite, a seção de choque de absorção é proporcional à área do horizonte de eventos.

Palavras-chave: seção de choque de espalhamento, absorção, buraco negro com monopolo global

Abstract

We present the results of the calculation of the differential scattering cross section and absorption cross section for the black hole with a global monopole in $f(R)$ gravity. We apply the partial wave approach and show that in low-frequency limit and at small angles, the contribution to the dominant term in the scattering/absorption cross section is modified by the presence of the global monopole and the gravity modification. In such limit, the absorption cross section shows to be proportional to the area of the event horizon.

Keywords: scattering cross section, absorption, black hole with a global monopole

Sumário

1	Introdução	1
2	Equações de Campo de Einstein	3
2.1	Conceitos Básicos em Mecânica Relativística	3
2.1.1	Intervalos no espaço-tempo	3
2.1.2	Espaço de Minkowski	6
2.2	Elementos de Geometria Riemanniana	9
2.2.1	Principais propriedades do Cálculo Tensorial	9
2.2.2	Símbolos de Christoffel	12
2.2.3	Tensor Métrico	13
2.2.4	Tensor de Riemann	14
2.3	Equações de Einstein	17
3	Introdução aos Buracos Negros	19
3.1	Tipo de Buracos Negros	20
3.1.1	Buracos Negros Estelares	20
3.1.2	Buracos Negros Supermassivos	21
3.1.3	Buracos Negros de Massa Intermediária	21
3.1.4	Buracos Negros Primordiais	21
3.2	Efeitos Gravitacionais	21
3.2.1	Velocidade de Escape	21
3.2.2	O Horizonte de Eventos	22
3.2.3	O Raio da Maré	22
3.2.4	Distorção do espaço	23
3.3	Soluções de Buracos Negros	23

3.3.1	Buraco Negro de Schwarzschild	23
3.3.2	Buraco Negro de Reissner-Nordstrom	24
3.3.3	Buracos Negros de Kerr e de Kerr-Newman	24
3.4	A termodinâmica dos Buracos Negros	25
3.4.1	Temperatura e Entropia do Buraco Negro	27
4	Processos de Espalhamento	29
4.1	Teoria do espalhamento clássico	29
4.2	Teoria do espalhamento quântico	30
4.3	Análise de ondas parciais	32
4.4	Mudança de fase	34
4.5	Seção de choque diferencial de espalhamento	36
4.5.1	Para o caso de Schwarzschild	36
4.5.2	Para o caso de Reissner-Nordstrom	38
5	Buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$	40
5.1	O monopolo global na gravidade de Einstein	40
5.2	O monopolo global na gravidade $f(R)$	43
6	Conclusões	46
	Referências Bibliográficas	47

Capítulo 1

Introdução

Buracos negros são objetos fascinantes com o campo gravitacional tão forte que nem a luz consegue escapar da sua superfície. Do ponto de vista formal, os buracos negros são soluções exatas das equações de Einstein que são representados pela massa (M), carga elétrica (Q) e momento angular (J) [8, 25], que se comportam como sistemas termodinâmicos porque possuem temperatura e entropia.

Os monopólos globais são defeitos topológicos que surgem em teorias de gauge devido à quebra simétrica espontânea da simetria global original $O(3)$ para $U(1)$ [12, 27, 2]. É um tipo de defeito que poderia ser formado durante as transições de fase na evolução do Universo primitivo. A teoria da gravidade $f(R)$ introduz a possibilidade de explicar o problema da inflação acelerada sem a necessidade de considerar a matéria escura ou energia escura.

O objetivo deste trabalho é calcular a seção de choque de espalhamento de um buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$. O estudo para compreender o processo de absorção e espalhamento na vizinhança de buracos negros é uma das questões mais importantes na física teórica e também na experimental. Podemos examinar a formação, estabilidade e emissão de ondas gravitacionais do buraco negro através da interação com campos.

Desde 1970, muitos trabalhos têm mostrado que no limite de comprimento de onda longo ($GM\omega \ll 1$) [15, 17], a seção de choque diferencial de espalhamento $d\sigma/d\Omega$ para pequenos ângulos apresenta o seguinte resultado: $d\sigma/d\Omega \approx 16G^2M^2/\theta^4$, onde G é a constante gravitacional e M é a massa do buraco negro. Além disso, o cálculo para obter a seção de choque de absorção de baixa energia tem sido extensivamente estudado na literatura [23, 26]. As-

sim, neste caso, a seção de choque de absorção no limite de comprimento de onda longo de um campo escalar neutro sem massa é igual a área do horizonte, $\sigma = 4\pi r_h^2 = 16\pi G^2 M^2$, onde r_h é o raio do horizonte de eventos [22].

O artigo que se encontra no arXiv: 1701.08147 originou esta dissertação que tem como o objetivo de calcular a seção de choque de espalhamento e absorção para uma onda plana monocromática de campo escalar neutro sem massa que colidem com buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$, que existem quatro parâmetros: a massa M do buraco negro, a frequência ω do campo, o parâmetro monopolar η e ψ_0 associado às correções da gravidade $f(R)$. Assim, temos três parâmetros adimensionais: $GM\omega$, $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$ e $a = \omega/\psi_0$. Em nossas análises, consideraremos apenas o regime de comprimento de onda longo, no qual $GM\omega \ll 1$. Adotamos as unidades naturais $\hbar = c = k_B = 1$.

O presente texto está dividido da seguinte maneira: No Capítulo 2 apresentamos uma breve descrição da geometria diferencial e das Equações de Campo de Einstein. No Capítulo 3 apresentaremos uma introdução dos buracos negros, e soluções importantes das Equações de Einstein como por exemplo: a solução de Schwarzschild. Além disso, apresentaremos o cálculo da temperatura e a entropia de alguns buracos negros. No Capítulo 4 mostraremos definições sobre a teoria do espalhamento clássico e quântico, usaremos a técnica da análise de ondas parciais que apresenta solução para a parte radial da equação de Schrodinger com um potencial esfericamente simétrico. Além disso, apresentaremos o cálculo da seção de choque diferencial de espalhamento para o buraco negro de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom. No Capítulo 5 apresentaremos nossos resultados, iremos calcular a seção de choque de espalhamento e de absorção de um buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$. Finalmente, no Capítulo 6 apresentaremos nossas conclusões.

Capítulo 2

Equações de Campo de Einstein

Albert Einstein publicou as teorias da relatividade especial e geral em 1905 e 1916. Estas teorias causaram mudanças das noções de espaço e de tempo, que eram tratados de forma independentes, e passam a ser uma única entidade designada como espaço-tempo. Uma contribuição da teoria da relatividade geral foi relacionar a geometria do espaço-tempo com a matéria (ou energia), isto é, a matéria determinará a geometria do espaço-tempo [5] e o conceito de força gravitacional é substituído pelo de curvatura. No presente capítulo, daremos uma breve descrição dos conceitos básicos da Mecânica Relativística, da Geometria Riemanniana e das Equações de Campo de Einstein.

2.1 Conceitos Básicos em Mecânica Relativística

Nesta seção desenvolveremos os principais conceitos da Mecânica Relativística que serão empregados na teoria dos campos de gravitação consistentes com a Relatividade de Einstein, daremos maior ênfase nos conceitos oriundos de interpretações geométricas, como intervalos no espaço-tempo e espaço de Minkowski.

2.1.1 Intervalos no espaço-tempo

A teoria da relatividade especial introduziu muitas mudanças significativas em nossa compreensão da natureza; entretanto, Einstein baseou essa teoria em apenas dois postulados.

O primeiro postulado de Einstein, chamado de princípio da relatividade, afirma que: as leis da física são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial. Por conseguinte as

leis de Newton e do eletromagnetismo são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial.

Durante o século XIX, muitos físicos acreditavam que a luz se deslocasse através de um meio hipotético chamado éter. Se isso fosse verdade, a velocidade da luz em relação a observadores diferentes dependeria da velocidade relativa entre os observadores e, portanto, teria diversos valores para direções diferentes. A experiência de Michelson-Morley buscou medir o movimento da Terra em relação ao éter, e o conceito de éter foi abandonado. Embora Einstein possa não ter tido conhecimento desse resultado negativo, tal resultado confirma o segundo postulado que afirma que a velocidade da luz no vácuo é sempre a mesma em qualquer sistema de referência inercial, e não depende da velocidade da fonte. Para descrever um fenômeno físico, tanto na Mecânica Newtoniana quanto na Relativística, necessita de um sistema de referência. Consideremos dois referenciais a seguir; O um referencial inercial e O' um outro referencial inercial que se move em relação a O com velocidade constante v . Vamos relacionar as coordenadas O e O' . Para qualquer valor de velocidade, menor que a velocidade da luz, deveremos empregar as transformações de Lorentz [13]

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (2.1)$$

onde γ é o fator de Lorentz,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Formalmente, o limite não relativístico da transformação de Lorentz obtém-se fazendo $c \rightarrow \infty$ nas equações (2.1) anteriores reduzindo-as na transformação de Galileu

$$x' = (x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t, \quad (2.3)$$

Vamos agora, inferir que as coordenadas (x_1, y_1, z_1) no tempo t_1 definem um evento, suponha que seja a emissão de um sinal luminoso que se propaga com velocidade c , no referencial inercial O , e que as coordenadas (x_2, y_2, z_2) em um tempo t_2 definam um segundo evento neste mesmo referencial, caracterizado pela chegada do sinal luminoso no ponto (x_2, y_2, t_2) . Com base nesses dois eventos podemos dizer que o sinal de luz, que se propaga com velocidade c , terá percorrido uma distância d_{12} , que pode ser escrita como

$$d_{12} = c(t_2 - t_1), \quad (2.4)$$

esta mesma distância pode ser obtida com base na expressão matemática usada para medir a distância entre dois pontos em espaços euclidianos que é dada por

$$d_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Com base nas expressões (2.4) e (2.5) podemos escrever a seguinte relação

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = c(t_2 - t_1), \quad (2.6)$$

ou ainda, efetuando algumas manipulações matemáticas, podemos chegar à

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2.7)$$

Em O' , (x'_1, y'_1, z'_1) e t'_1 serão as coordenadas do primeiro evento, e (x'_2, y'_2, z'_2) e t'_2 às do segundo evento, verifica-se que a velocidade do sinal também será c em (O') . Levando em conta este resultado, podemos escrever a seguinte relação, semelhante a (2.7), observados no referencial O'

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \quad (2.8)$$

Embora as coordenadas espaciais e temporais em (2.7) e (2.8) sejam relativas, isto é, dependam do observador, existe uma grandeza associada a estas coordenadas espaço-temporais, dos dois eventos, que é invariante. Um invariante é uma quantidade caracterizada pelo fato de ter o mesmo valor em qualquer referencial. A grandeza invariante, que pode ser encontrada a partir da aplicação das transformações de Lorentz, $s_{12} = s'_{12}$, pode ser identificada em O

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2, \quad (2.9)$$

ou em O'

$$s'^2_{12} = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2. \quad (2.10)$$

Podemos ainda reescrever a equação (2.7) em termos das variações das coordenadas envolvidas, ou seja, da seguinte forma

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c \Delta t)^2. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) pode ter qualquer valor > 0 , < 0 ou $= 0$. A interpretação física do sinal de s^2 , que é o mesmo em qualquer referencial inercial, está relacionada com a simultaneidade entre eventos.

2.1.2 Espaço de Minkowski

O matemático Hermann Minkowski (que havia sido professor de Albert Einstein em Zurich) [20], combinando a eletrodinâmica de Faraday-Maxwell com o princípio da relatividade restrita descobriu que a geometria do espaço-tempo é Pseudo-Euclideana (ou de Minkowski). Ele observou que introduzindo formalmente uma coordenada imaginária $\tau = ict$ em lugar da coordenada temporal, a equação (2.11) torna-se mais simétrica, assumindo a seguinte forma

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta \tau)^2, \quad (2.12)$$

a expressão anterior pode ser facilmente interpretada, fazendo as seguintes substituições

$$\Delta x = \Delta x_1, \quad \Delta y = \Delta x_2, \quad \Delta z = \Delta x_3 \quad e \quad \Delta \tau = \Delta x_0. \quad (2.13)$$

Substituindo as relações acima na equação (2.12), temos

$$s^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_0)^2. \quad (2.14)$$

A expressão (2.14) pode ser facilmente interpretada, como o quadrado da distância entre dois pontos em um espaço representativo quadridimensional de coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_0) . No espaço de Minkowski os eventos serão representados geometricamente por pontos, o intervalo entre os eventos será a distância entre esses pontos. Tais pontos serão chamados pontos de universo, e a cada partícula corresponderá uma certa linha (linha de universo) nesse espaço representativo. Os pontos da linha de Universo definem as coordenadas da partícula a cada instante. Assim, por exemplo, uma partícula em movimento uniforme terá evidentemente por linha de universo uma reta.

O intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente próximos, com coordenadas (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, respectivamente, é definido por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_0)^2 \\ &= -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vamos introduzir o conceito de vetores no espaço-tempo. Um vetor no espaço de Minkowski é definido como um quadrivetor. Um quadrivetor é uma quantidade de quatro componentes que se transforma numa rotação de eixos da mesma forma que as coordenadas $X = (x_1, x_2, x_3, x_0) \equiv (x, y, z, ct)$ do espaço-tempo.

Podemos então definir um quadrivetor como sendo

$$\vec{A}^\mu = (A^0, A^i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

onde, suas componentes se transformarão, em uma mudança de coordenadas, de acordo com

$$A^{\bar{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} A^\beta, \quad (2.17)$$

os números $\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ constituem os elementos da matriz das transformações de Lorentz.

Podemos introduzir um conjunto de quadrivetores de base de um referencial no espaço-tempo, como sendo

$$e_0 = (1, 0, 0, 0) \quad e_1 = (0, 1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 0, 1). \quad (2.18)$$

Em geral, podemos escrever um quadrivetor como uma quantidade do tipo

$$A = \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha e_\alpha, \quad (2.19)$$

onde, a coordenada x_0 é um número imaginário puro.

Vamos introduzir o produto interno entre dois quadrivetores. O produto interno ou escalar de dois quadrivetores A^μ e A^ν é definido por

$$A_\mu B^\mu = A \cdot B = -A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3, \quad (2.20)$$

onde, se $A = B$, temos que

$$A_\mu A^\mu = A \cdot A = A^2 = -(A_0)^2 + (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2 \quad (2.21)$$

Um quadrivetor importante para a Relatividade, é o quadrivetor velocidade que denotaremos por U , esta quantidade representa a quadri-velocidade de uma partícula. A quadri-velocidade U de uma partícula é um quadrivetor de componentes U^α que está na direção da reta tangente da linha de mundo de uma partícula, como mostra a figura ().

A ideia mais imediata para construir a quadri-velocidade U^α , seria considerar a quantidade $\frac{dx^\alpha}{dt}$, mas este objeto não é um quadrivetor porque dt não é um invariante. Devemos, portanto, substituir dt por um intervalo de tempo que seja um escalar. O intervalo de tempo próprio $d\tau$ é definido como o intervalo de tempo medido no sistema de referência em que a partícula encontra-se instantaneamente em repouso. Esse intervalo de tempo é

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (2.22)$$

onde,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.23)$$

A quadri-velocidade U^α será o quadrivetor definido por

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (2.24)$$

cujas componentes são

$$U^\alpha = (\gamma c, \gamma v), \quad (2.25)$$

onde, $v = \frac{dr}{dt}$ é a velocidade tridimensional da partícula.

Uma consequência imediata desta definição é que o quadrado de U^α é sempre uma constante independente do estado de movimento da partícula, e para um referencial onde a partícula encontra-se em repouso, devemos ter

$$U^\alpha U_\alpha = c^2. \quad (2.26)$$

Fazendo $(dx_0)^2 = (icdt)^2$ na expressão (2.15), temos

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2. \quad (2.27)$$

A forma quadrática acima define a maneira de fazer medidas, ou métrica, em um espaço quadridimensional.

Utilizando esse quadrivetor (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) , podemos interpretar a expressão (2.27) como sendo o módulo ao quadrado de ds , ou seja

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = \vec{ds}^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.28)$$

Os termos $\eta_{\alpha\beta}$ são funções das coordenadas de forma que $\eta_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$, e $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$ e $\eta_{33} = 1$. Estas funções dão origem a uma matriz N , chamada de matriz métrica do espaço de Minkowski dada por:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\det(N) = -1. \quad (2.29)$$

2.2 Elementos de Geometria Riemanniana

Na Relatividade Geral é necessário trabalhar com a ideia de superfícies que não necessitam de um espaço ambiente para a construção de sua definição, isto corresponde que o universo não precisa ter um espaço ambiente para existir.

A generalização matemática que constitui a teoria das superfícies é chamada de Variedade. Uma variedade M , corresponde a ideia intuitiva que temos da continuidade do espaço-tempo. Uma Variedade é um espaço formado pelo conjunto de N variáveis reais x^1, \dots, x^N , onde cada conjunto de N valores possíveis dessas variáveis é um ponto. As variáveis são denominadas coordenadas, e a totalidade dos pontos, correspondentes a todos os valores possíveis das coordenadas, é denominado um espaço N -dimensional ou Variedade de dimensão N , ou ainda Hiperespaços.

Variedade Riemanniana é uma Variedade de dimensão $N = 4$, que é o caso geral conhecido por causa de sua aplicação na teoria da Relatividade na qual o espaço é 4-dimensional.

Nesta seção desenvolveremos as principais técnicas geométricas dos espaços curvilíneos ou mais precisamente de Riemann, necessárias para estabelecer uma relação entre a principal propriedade dos espaços curvos, chamada curvatura, e a gravitação.

2.2.1 Principais propriedades do Cálculo Tensorial

A teoria dos Campos de gravitação consistentes com a relatividade Restrita de Einstein exige que o espaço-tempo seja curvilíneo, ou de maneira geral, seja uma Variedade Riemanniana.

A teoria da Relatividade Geral exige ainda que suas equações sejam escritas de forma covariante, ou seja, as leis da Relatividade Geral devem possuir a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas.

Vetores e Tensores

Se tomarmos dois sistemas de coordenadas S e S' , de maneira totalmente arbitrária, onde, suas coordenadas são respectivamente x^1, x^2, \dots, x^N e x'^1, x'^2, \dots, x'^N , podemos dizer que a relação entre S e S' é dada por relações do tipo

$$x'^i = F^i(x^j), \tag{2.30}$$

onde $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, N$ e F^i é uma função unívoca, contínua com derivadas contínuas.

Diferenciando a relação anterior podemos chegar à

$$dx'^i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.31)$$

Vamos adotar a convenção da soma de Einstein, pela qual quando um índice é repetido duas vezes num mesmo termo de uma equação, entende-se que há uma somatória em todos os valores desses índice.

Empregando esta notação, a (2.31) assumirá a forma

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.32)$$

Introduzindo o símbolo δ_j^i denominado delta de Kronecker que será definido como

$$\begin{aligned} \delta_j^i &= 1, & \text{se } i &= j \\ \delta_j^i &= 0, & \text{se } i &\neq j. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A relação (2.31) define como se transformam as componentes do vetor deslocamento dx^i entre dois pontos infinitamente próximos. Dizemos então que todo conjunto de N quantidades V^i que se transforme de modo similar, é denominado conjunto de componentes de um vetor contravariante, e a lei dessa transformação será dada por

$$V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j. \quad (2.34)$$

Da mesma forma que vetores são quantidades de N componentes, podemos definir quantidades mais gerais que possuem N^2 quantidades.

Todo conjunto $T^{\mu\nu}$ de N^2 quantidades que se transformem de acordo com a relação

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\lambda\sigma}, \quad (2.35)$$

é denominado conjunto de componentes de um tensor contravariante de segunda ordem (2, 0), o número 2 representa a ordem de contravariância.

Todo conjunto de quantidades V^i que se transforme de acordo com a lei de transformação

$$V'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} V_i, \quad (2.36)$$

é denominado conjunto de componentes de um vetor covariante.

Para distinguir entre contravariância e covariância, adota-se a convenção de representar

os índices superiores como sinal de contravariância, e índices inferiores como sinal de covariância.

Da mesma forma que definimos tensores contravariantes de segunda ordem, podemos definir quantidades covariantes de N^2 componentes, ditas tensores covariantes de segunda ordem, ou seja tensores do tipo $(0, 2)$, onde o número 2 representa o grau de covariância. Define-se um tensor do tipo $(0, 2)$, como sendo um conjunto de quantidades $T_{\mu\nu}$ que se transforme de acordo com a lei de transformação

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T_{\lambda\sigma}. \quad (2.37)$$

Podemos definir outro tipo de quantidade tensorial, chamada tensor misto, que se transforma de acordo com a lei

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} T^{\lambda}_{\sigma}. \quad (2.38)$$

Dizemos que o tensor T'^{μ}_{ν} é um conjunto de componentes de um tensor ¹ misto de 2º ordem, um tensor do tipo $(1, 1)$ (uma vez covariante e outra vez contravariante).

Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s :

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}. \quad (2.39)$$

Operações algébricas com tensores

Dois tensores da mesma ordem e tipo podem ser somados ou subtraídos, formando um novo tensor da mesma ordem e tipo. Por tipo entende-se um certo número de índices contravariantes e outro certo número de índices covariantes. Assim, dados dois tensores $A^{\mu}_{\nu\sigma}$ e $B^{\mu}_{\nu\sigma}$, podemos escrever

$$C^{\mu}_{\nu\sigma} = A^{\mu}_{\nu\sigma} + B^{\mu}_{\nu\sigma}. \quad (2.40)$$

Simetria é uma propriedade tensorial, então um tensor covariante do tipo 2 é simétrico se $X_{\mu\nu} = X_{\nu\mu}$ e anti-simétrico $X_{\mu\nu} = -X_{\nu\mu}$. A notação usada para denotar um tensor simétrico

$$X_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}), \quad (2.41)$$

e anti-simétrico

$$X_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}). \quad (2.42)$$

¹Tensores são entidades geométricas que generalizam a noção de escalares, vetores e matrizes. Define-se T'^{μ}_{ν} como sendo as componentes do tensor T .

2.2.2 Símbolos de Christoffel

Vamos considerar um vetor contravariante X^a no ponto Q , com coordenadas $x^a + \delta x^a$. Então, pelo teorema de Taylor até a primeira ordem, temos

$$X^\mu(x + \delta x) = X^\mu(x) + \delta X^\mu(x), \quad (2.43)$$

onde

$$\delta X^\mu(x) = \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu. \quad (2.44)$$

Vamos construir uma diferença de vetores

$$X^\mu(x) + \delta X^\mu(x) - [X^\mu(x) + \bar{\delta} X^\mu(x)] = \delta X^\mu(x) - \bar{\delta} X^\mu(x). \quad (2.45)$$

Vamos definir que $\bar{\delta} X^\mu(x)$ é linear em X^μ e δx^μ , que significa que existe fatores multiplicativos $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ em que

$$\bar{\delta} X^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu X^\nu(x) \delta x^\sigma, \quad (2.46)$$

o sinal de menos é introduzido para concordar com a convenção.

Definindo a derivada covariante de X^μ , que pode ser escrita em uma das notações

$$\nabla_\sigma X^\mu \quad \text{ou} \quad X^\mu_{;\sigma}, \quad (2.47)$$

temos que

$$\nabla_\sigma X^\mu = \lim_{\delta x^\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\sigma} (X^\mu(x + \delta x) - [X^\mu(x) + \bar{\delta} X^\mu(x)]). \quad (2.48)$$

Usando (2.43), (2.44) e (2.46), encontramos

$$\nabla_\sigma X^\mu = \partial_\sigma X^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu X^\nu. \quad (2.49)$$

Se o termo $\nabla_\sigma X^\mu$ for um tensor do tipo $(1, 1)$, então o termo $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ deve se transformar de acordo com

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\xi\eta}^\lambda - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\xi}, \quad (2.50)$$

ou

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\xi\eta}^\lambda + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\sigma}. \quad (2.51)$$

Os números Γ'_s são coeficientes, números reais, chamados de símbolos de Christoffel ou conexão da métrica.

Definindo a derivada covariante de um escalar ϕ

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi. \quad (2.52)$$

A expressão para o caso geral de tensor é

$$\nabla_{\sigma} T_{\nu \dots}^{\mu \dots} = \partial_{\sigma} T_{\nu \dots}^{\mu \dots} + \Gamma_{\lambda \sigma}^{\mu} T_{\nu \dots}^{\lambda \dots} + \dots - \Gamma_{\nu \sigma}^{\lambda} T_{\lambda \dots}^{\mu \dots}. \quad (2.53)$$

Segue-se das leis de transformação que a soma de duas conexões não é uma conexão ou um tensor. No entanto, a diferença de duas conexões é um tensor de valência ² (1,2), porque o termo não homogêneo cancela na transformação. Pela mesma razão, a parte anti-simétrica $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$, ou seja,

$$T_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \quad (2.54)$$

é um tensor chamado de tensor de torção. Se o tensor de torção desaparecer, então a conexão é simétrica, isto é,

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}. \quad (2.55)$$

2.2.3 Tensor Métrico

Mostramos na seção (2.1) que em Geometria Euclidiana é a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é um invariante que deve ser escrito como

$$ds^2 = dx^i dx^i = \textit{invariante}, \quad (2.56)$$

onde, ($i = 0, 1, 2, 3$). No entanto, em coordenadas curvilíneas, ds^2 , que é denominado quadrado do elemento de linha ds , deve ser escrito por uma expressão do tipo

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.57)$$

²Um tensor misto de tipo ou valência (M, N) é um tensor o qual tem índices contravariantes M e índices covariantes N .

Tendo em vista que g_{ij} é simétrico, e da definição de inverso de uma matriz, podemos escrever a seguinte relação

$$\begin{aligned}
g'_{ij}g'^{jk} &= \delta_i^k \\
&= \left[\frac{\partial x^y}{\partial x'^i} \frac{\partial x^w}{\partial x'^j} \right] g_{yw} \left[\frac{\partial x'^j}{\partial x^s} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} \right] g^{st} \\
&= \frac{\partial x^y}{\partial x'^i} \frac{\partial x^w}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} g_{yw} g^{st} \\
&= \frac{\partial x^y}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} \left(\frac{\partial x^w}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} \right) g_{yw} g^{st} \\
&= \frac{\partial x^y}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} \delta_s^w g_{yw} g^{st} \\
&= \frac{\partial x^y}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} g_{ys} g^{st} \\
&= \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i} g_{ys} g^{sy} \\
&= \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i} g_{ys} (g_{sy})^{-1} \\
&= \delta_i^k.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

O determinante da métrica é denotado por

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{2.59}$$

Portanto, podemos considerar que os tensores métricos são operadores abaixadores ou levantadores de índices. Podemos relacionar as componentes dos tensores contravariante e covariantes da seguinte maneira

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \tag{2.60}$$

ou

$$V_\nu = g_{\mu\nu} V^\mu. \tag{2.61}$$

2.2.4 Tensor de Riemann

A diferencial covariante que difere da diferenciação parcial, não é em geral comutativa. Para qualquer tensor, definimos seu comutador

$$\nabla_\sigma \nabla_\lambda T_{\nu\dots}^{\mu\dots} - \nabla_\lambda \nabla_\sigma T_{\nu\dots}^{\mu\dots}. \tag{2.62}$$

Vamos calcular o comutador para um vetor X^μ . Usando as equações (2.49) e (2.53), encontramos

$$\nabla_\lambda \nabla_\sigma X^\mu = \partial_\lambda (\partial_\sigma X^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu X^\nu) + \Gamma_{\xi\lambda}^\mu (\partial_\sigma X^\xi + \Gamma_{\nu\sigma}^\xi X^\nu) - \Gamma_{\sigma\lambda}^\xi (\partial_\xi X^\mu + \Gamma_{\nu\xi}^\mu X^\nu),$$

a expressão é similar para $\nabla_\sigma \nabla_\lambda X^\mu$

$$\nabla_\sigma \nabla_\lambda X^\mu = \partial_\sigma (\partial_\lambda X^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu) + \Gamma_{\xi\sigma}^\mu (\partial_\lambda X^\xi + \Gamma_{\nu\lambda}^\xi X^\nu) - \Gamma_{\lambda\sigma}^\xi (\partial_\xi X^\mu + \Gamma_{\nu\xi}^\mu X^\nu).$$

Subtraindo as duas últimas equações e assumindo que $\partial_\lambda \partial_\sigma X^\mu = \partial_\sigma \partial_\lambda X^\mu$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma \nabla_\lambda X^\mu - \nabla_\lambda \nabla_\sigma X^\mu &= (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu) X^\nu + (\Gamma_{\nu\lambda}^\xi \Gamma_{\xi\sigma}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\xi \Gamma_{\xi\lambda}^\mu) X^\nu \quad (2.63) \\ &+ (\Gamma_{\sigma\lambda}^\xi - \Gamma_{\lambda\sigma}^\xi) [\partial^\xi X^\mu + \Gamma_{\nu\xi}^\mu X^\nu] \\ &= R_{\nu\sigma\lambda}^\mu X^\nu + (\Gamma_{\sigma\lambda}^\xi - \Gamma_{\lambda\sigma}^\xi) \nabla_\xi X^\mu, \end{aligned}$$

em que

$$R_{\nu\sigma\lambda}^\mu = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\xi \Gamma_{\xi\sigma}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\xi \Gamma_{\xi\lambda}^\mu. \quad (2.64)$$

Portanto, como estamos interessados em conexões livres de torção, o último termo da (2.63) desaparece e usando

$$X_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}), \quad (2.65)$$

temos

$$\nabla_{[\sigma} \nabla_{\lambda]} X^\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\sigma\lambda}^\mu X^\nu. \quad (2.66)$$

Uma vez que o lado esquerdo da equação (2.66) é um tensor, logo $R_{\nu\sigma\lambda}^\mu$ é um tensor do tipo (1, 3), chamado tensor de Riemann.

Propriedades do Tensor de Curvatura

Segue imediatamente de (2.64), que o tensor curvatura é anti-simétrico em relação aos índices σ e λ , ou seja

$$R_{\nu\sigma\lambda}^\mu = -R_{\nu\lambda\sigma}^\mu. \quad (2.67)$$

Além do mais, devido a simetria do tensor métrico e dos símbolos de Christoffel, verifica-se a seguinte identidade

$$R_{\nu\sigma\lambda}^\mu + R_{\lambda\nu\sigma}^\mu + R_{\sigma\lambda\nu}^\mu = 0. \quad (2.68)$$

Vamos utilizar o tensor curvatura sob a forma covariante, ou seja, fazendo a operação abaixamento de índice por meio de $g^{\mu\xi}$, podemos chegar à

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = g^{\mu\xi} R_{\nu\sigma\lambda}^\xi. \quad (2.69)$$

Temos as seguintes propriedades

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = -R_{\nu\mu\sigma\lambda}, \quad (2.70)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (2.71)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\sigma\lambda\mu\nu}, \quad (2.72)$$

que nos permite escrever uma identidade semelhante a (2.68);

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} + R_{\mu\lambda\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0. \quad (2.73)$$

Além das identidades algébricas, pode-se mostrar que o tensor de curvatura satisfaz um conjunto de identidades diferenciais chamadas de identidades de Bianchi:

$$\nabla_{\mu} R_{\lambda\xi\nu\sigma} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\xi\sigma\mu} \equiv 0. \quad (2.74)$$

Podemos usar o tensor de curvatura para definir outros importantes tensores. O tensor de Ricci é obtido por meio de uma contração do tensor curvatura de Riemann. A contração do tensor curvatura terá como objetivo, encontrar um tensor de segunda ordem, e simétrico. Acontece que, uma contração no tensor de Riemann só pode ser efetuada de um modo: Devemos contrair o tensor $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$ por meio do tensor métrico, de forma que a contração não resulte no escalar zero, pois, se tomarmos a contração sobre o par de índices μ e ν ou σ e λ , teremos como resultado o escalar zero em virtude da anti-simetria desses índices. Dessa forma, definiremos o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ como

$$R_{\nu\lambda} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad (2.75)$$

que é um tensor simétrico, ou seja,

$$R_{\nu\lambda} = R_{\lambda\nu}, \quad (2.76)$$

e pode ainda, ser contraído por meio de $g^{\nu\lambda}$ para formar o invariante, ou escalar de Ricci, dado por

$$R = g^{\nu\lambda} R_{\nu\lambda}, \quad (2.77)$$

chamado curvatura escalar do espaço.

Estes dois tensores podem ser usados para definir o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.78)$$

que também é simétrico. Da equação (2.74) o tensor de Einstein satisfaz

$$\nabla_{\nu} G_{\mu}^{\nu} \equiv 0. \quad (2.79)$$

2.3 Equações de Einstein

A distribuição de matéria é dada através do tensor $T^{\mu\nu}$, denominado tensor momento-energia, que possui algumas propriedades geométricas, entre elas, a total simetria aos índices μ e ν

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (2.80)$$

O tensor momento-energia exprime a conservação da energia, pois o seu divergente ou sua derivada covariante é nula

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.81)$$

A relação buscada para relacionar a métrica do espaço-tempo e a gravitação, deverá satisfazer estas propriedades. Como o divergente do tensor momento-energia é nulo e o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ possui essa propriedade de divergência nula, podemos relacionar os tensores por meio de uma constante de proporcionalidade

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}, \quad (2.82)$$

ou

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}. \quad (2.83)$$

O campo gravitacional deve ser proporcional ao tensor $T^{\mu\nu}$, porque quanto maior a quantidade de matéria e energia mais intenso será o campo, e mais curvo será o espaço-tempo. O tensor curvatura também é proporcional ao tensor de Einstein. Substituindo a equação

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \quad (2.84)$$

na (2.83), temos

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

A constante k é denominada constante gravitacional, carrega consigo tudo o que não sabemos sobre os campos de gravitação.

Vamos introduzir um novo tensor $E^{\mu\nu}$ que também possui a propriedade geométrica

$$\nabla_{\nu} E^{\mu\nu} = 0. \quad (2.86)$$

Este tensor tem a forma

$$E^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (2.87)$$

em que Λ é uma constante denominada Constante Cosmológica, e introduzida por Einstein nas equações de campo. Substituindo a equação

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - kT^{\mu\nu}, \quad (2.88)$$

na (2.87), obtemos a expressão original para a equação de campo de Einstein

$$E^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}. \quad (2.89)$$

onde a constante $k = 8\pi G/c^4$. A equação de Campo de Einstein pode ser escrita como

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (2.90)$$

A expressão (2.90), constitui um conjunto de equações tensoriais conhecidas como equações de campo de Einstein, e são empregadas no estudo dos campos de gravitação consistente com a Relatividade Restrita.

Pode-se observar que a equação (2.90) relaciona a curvatura do espaço-tempo com a matéria.

Capítulo 3

Introdução aos Buracos Negros

A ideia de um corpo maciço do qual nada pode escapar foi formada primeiro pelo geólogo John Michell em uma carta escrita para Henry Cavendish em 1783 para a Royal Society. Em 1796, o matemático Pierre-Simon Laplace promoveu a ideia na primeira e segunda edição do livro *Exposition du Systeme du Monde*.

Em 1915 Albert Einstein na sua Teoria da Gravitação mostrou que o campo gravitacional pode influenciar a trajetória de um raio luminoso, como o provocado pelo campo gravitacional do Sol. A comprovação desta hipótese deu fama mundial a Einstein e contou com a contribuição de brasileiros quando, em 1919, fotografias tiradas em um eclipse solar visível com nitidez na cidade cearense de Sobral, teriam comprovado as ideias do cientista alemão.

Meses após Einstein apresentar a sua Teoria da Gravitação o físico alemão Karl Schwarzschild obteve a primeira solução exata dessas equações de campo no vácuo que descreve o espaço-tempo curvo. Esta solução descreve um buraco negro caracterizado apenas pela sua massa. Em 1918 o matemático Hans Reissner e o físico Gunnar Nordstrom obteve a solução para um buraco negro carregado e sem rotação. Em 1963 Roy Kerr encontrou a solução para um buraco negro em rotação e sem carga elétrica. Dois anos depois Ezra Newman obteve a solução para um buraco negro em rotação e eletricamente carregado. Em 1939, o norte-americano Robert Oppenheimer usou a teoria da relatividade geral para descrever o que aconteceria com a luz em um campo gravitacional intenso o suficiente para provocar seu desvio. Se não houvesse corpo celeste algum a luz seguiria sua trajetória normalmente. Quando passasse perto de uma estrela de densidade comparável com a do Sol, seria pouco desviada. Ao passar por uma estrela bem mais densa que o Sol, a luz seria

encurvada em direção à estrela. Quando a densidade da estrela fosse grande suficiente, a trajetória da luz seria tão perturbada em direção à estrela que ela não conseguiria mais escapar deste campo gravitacional, ficando desta forma aprisionada.

Durante muito tempo esses objetos colapsantes receberam o nome de estrelas congeladas e de estrelas escuras. Em 1969 o físico norte-americano John Wheeler criou o termo buraco negro.

3.1 Tipo de Buracos Negros

Podemos classificar os buracos negros de acordo com sua massa:

3.1.1 Buracos Negros Estelares

A energia liberada pelo Sol e outras estrelas ocorre pelo processo chamado fusão nuclear, que consiste na fusão de átomos menores (como os de hidrogênio) em átomos maiores (como os de hélio). Quando o nível de hidrogênio diminui além de um limite mínimo, começa a haver um desequilíbrio entre as reações da fusão nuclear e a força gravitacional. Então a massa da estrela tende a se colapsar devido à atração gravitacional. Na situação em que uma estrela tem a massa entre 0,8 e 10 vezes a massa do Sol, o combustível diminui até um ponto crítico e a estrela se expandirá na forma de uma super gigante ejetando grande parte da sua massa em uma nebulosa planetária, o que restará é conhecido como Anã Branca. Este será o fim de nosso Sol.

Estrelas cuja massa inicial é maior do que 10 massas solares ao alcançarem os estágios finais de sua evolução passam por processos bastante violentos. Quando elas esgotam sua energia nuclear passam por uma explosão que ejeta as camadas mais externas da estrela, formando uma supernova. Quando isso acontece essas estrelas gigantes lançam toda a sua matéria no espaço interestelar e podem ser completamente destruídas ou deixar uma estrela residual.

Se esta estrela residual tiver a massa superior a 1,4 massas solares a região central da estrela se contrai com a gravidade, fazendo que os elétrons sejam empurrados para os núcleos dos átomos e se combinem com prótons formando nêutrons, que produz uma estrela compacta que é chamada de Estrelas de Nêutrons, que são corpos celestes supermassivos, ultracompactos e com gravidade extremamente alta.

Se a estrela residual deixada para trás após a explosão de uma estrela gigante tem massa maior do que 3 massas solares sua matéria não consegue evitar o contínuo colapso gravitacional. A estrela residual entrará em colapso até formar uma singularidade no espaço-tempo a que damos o nome do Buraco Negro Estelar.

3.1.2 Buracos Negros Supermassivos

Encontrados no centro de galáxias, têm massas que variam de milhões a bilhões de massas solares. Esses buracos negros podem ter sido originados do colapso gravitacional de imensas nuvens de gás ou de aglomerados de milhões de estrelas no centro das galáxias, que se formaram quando o universo era mais jovem e bem mais denso.

3.1.3 Buracos Negros de Massa Intermediária

Existe comprovação observacional da existência de buracos negros estelares, que teriam massa de até algumas dezenas da massa do Sol, e de supermassivos, com massa maior do que 1 milhão de vezes a massa do Sol, há pouca evidência observacional de BNs com massa entre estes dois extremos, ou seja, da ordem de milhares de vezes a massa do Sol. Há alguns estudos que apontam para estes BNs como estando presentes no núcleo de aglomerados globulares de estrelas.

3.1.4 Buracos Negros Primordiais

Preditos teoricamente, esses buracos negros podem ter sido formado nos primórdios do universo quando, devido a um ambiente favorável com pressões e temperaturas extremamente altas, flutuações na densidade da matéria teriam dado origem a regiões de densidades extremas, onde esses buracos negros poderiam ter se formado.

3.2 Efeitos Gravitacionais

3.2.1 Velocidade de Escape

A velocidade de escape é a velocidade que um corpo material precisa para escapar da ação do campo gravitacional de um objeto. A velocidade que um objeto material

precisa atingir para conseguir escapar do campo gravitacional de um corpo com massa M e raio R é dada por:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (3.1)$$

A velocidade de escape é dada em metros por segundo e G é a constante gravitacional que tem o valor $6,67 \times 10^{-11} m^3/s^2 \cdot Kg$.

A teoria da Relatividade Restrita, formulada por Einstein em 1905, afirma que nenhum corpo material pode ter uma velocidade maior do que a velocidade da luz, logo essa pode ser considerada a maior velocidade de escape possível. Então podemos escrever a equação anterior como

$$c = V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (3.2)$$

O raio de um corpo com massa M será

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.3)$$

Quando um objeto celeste com uma dada massa M atinge o valor de R dado pela equação anterior ele se transforma em um buraco negro. O buraco negro é uma região no espaço-tempo que o campo gravitacional é tão forte que impede até mesmo da luz escapar da sua superfície.

3.2.2 O Horizonte de Eventos

O raio de Schwarzschild caracteriza uma região limite, que é o horizonte de eventos, a partir da qual nada consegue escapar. Todo corpo que for comprimido a um raio menor do que o do seu horizonte de eventos vai colapsar a um ponto no qual a densidade é infinita (singularidade).

3.2.3 O Raio da Maré

O raio da maré, também chamado de raio de Roche, é a distância limite para um corpo se aproximar do buraco negro sem ser destruído. Quando um corpo fluido está além do limite de Roche, este corpo mantém sua estrutura por sua gravidade interna e orbita ao redor do buraco negro. Mais próximo do limite de Roche o fluido é deformado pela ação das forças da maré. Dentro do limite de Roche a gravidade do fluido não é suficiente

para manter sua forma e o corpo é rompido pela ação da força da maré. O raio limite de aproximação do corpo em relação ao buraco negro dado por:

$$R_M = R_{Sch} \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_E}} \quad (3.4)$$

Onde R_M é o raio da maré, ρ_E é a densidade do corpo que se aproxima, R_{Sch} é o raio de Schwarzschild e ρ_M é a densidade do buraco negro.

3.2.4 Distorção do espaço

Nas proximidades de um campo gravitacional forte, o espaço-tempo sofre uma deformação que provoca um aumento da distância radial a massa central, à medida que nos aproximamos da mesma. O efeito fica mais evidente nas proximidades de objetos com campo gravitacional forte, como é o caso de estrelas compactas (anãs brancas, estrelas de nêutrons), buracos negros ou galáxias massivas.

3.3 Soluções de Buracos Negros

3.3.1 Buraco Negro de Schwarzschild

Karl Schwarzschild em 1916, encontrou a solução para a teoria da relatividade que representa o buraco negro como tendo uma forma esférica no vácuo. Ele demonstrou que, se a massa de uma estrela estiver concentrada em uma região suficientemente pequena, ela gerará um campo gravitacional tão grande na superfície da estrela que nem mesmo a luz conseguirá escapar dele. Esta solução descreve um buraco negro sem carga e sem rotação caracterizado apenas pela sua massa. É descrita pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = (1 - 2MG/r)dt^2 - (1 - 2MG/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.5)$$

onde G corresponde a constante de gravitação universal, M é entendida como a massa do objeto. A constante

$$r_s = 2GM \quad (3.6)$$

é o raio de Schwarzschild e desempenha importante função na solução de Schwarzschild.

Buraco Negro de Schwarzschild com presença do monopolo global

Transições de fase no Universo primitivo, podem ter dado origem a diversos tipos de defeitos topológicos, dentre os quais pode-se citar os monopolos globais, a corda cósmica e as paredes de domínio. No caso do monopolo global é formado devido a uma quebra espontânea de simetria global de gauge e a maior parte da sua energia está concentrada em uma pequena região, próxima ao núcleo. Uma configuração correspondente ao monopolo global foi proposta por Barriola e Vilenkin [1]. Este modelo se constitui de um iso-tripletto de campo escalar ϕ^a , cuja simetria global $O(3)$ é espontaneamente quebrada para $U(1)$. A solução de Schwarzschild na presença do monopolo global é

$$ds^2 = \left(1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.7)$$

onde G é a constante de Newton e η é o parâmetro monopolar.

3.3.2 Buraco Negro de Reissner-Nordstrom

Este modelo de buraco negro foi obtido pelo matemático Hans Reissner e pelo físico Gunnar Nordstrom em 1918. Este buraco negro carregado e sem rotação pode ser descritos pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.8)$$

no qual

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (3.9)$$

sendo M e Q a massa e a carga do buraco negro. A distância de cada horizonte é determinado por $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$, sendo r_+ para o horizonte externo e o negativo r_- para o horizonte de Cauchy.

3.3.3 Buracos Negros de Kerr e de Kerr-Newman

Um buraco negro em rotação é uma solução das equações de Einstein. A solução de um buraco negro em rotação e sem carga elétrica, foi obtida por Roy Kerr em 1963 e é chamada de métrica de Kerr. O elemento de linha é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{2GMr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aGMr \sin^2\theta}{\Sigma}dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ & + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.11)$$

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2, \quad (3.12)$$

em que M é a massa do objeto massivo rotatório, o parâmetro que descreve a rapidez relativa da rotação está relacionado ao momento angular J pela relação $a = J/M$.

Em 1965, Ezra Newman encontrou a solução para um buraco negro no qual está em rotação e eletricamente carregado. Esta solução é chamada de métrica de Kerr-Newman.

O elemento de linha é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta^2 - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ & + \frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.14)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 + P^2 - 2Mr. \quad (3.15)$$

O campo de Kerr-Newman é caracterizado por três parâmetros: massa, momento angular e carga.

3.4 A termodinâmica dos Buracos Negros

Na década de 70, a existência do buraco negro na teoria clássica de gravitação violava a Segunda Lei da Termodinâmica. Imagine que um buraco negro engole um corpo quente que possui uma certa quantidade de entropia. Então o observador fora do buraco negro percebe que a entropia total do mundo acessível a sua observação diminui. Esse desaparecimento da entropia poderia ser evitado se atribuíssemos a entropia do corpo ingerido à região interior do buraco negro. De fato, como nem a própria luz pode escapar de um buraco negro, nada podemos saber do que se passa dentro dele, a não ser suposições teóricas. Então qualquer tentativa de um observador externo em determinar a quantidade de entropia absorvida pelo buraco negro está condenado à falha. Como não estamos a favor de renunciar a Segunda Lei da Termodinâmica porque um buraco negro se formou em algum lugar do Universo, temos que concluir que qualquer buraco negro por si só possui uma certa quantidade de entropia e que um corpo quente caindo nele não apenas

transfere sua massa, momento angular e carga elétrica para o buraco negro, mas também sua entropia S .

Em 1972, um físico chamado Jacob Bekenstein propôs a ideia de que o horizonte de eventos seria uma medida da Entropia de um buraco negro e que o buraco negro deveria emitir radiação, algo impossível já que tudo que entra não sai.

Em 1973, Bekenstein e Smarr mostraram a analogia entre as leis da mecânica dos buracos negros e as relações usuais das leis da termodinâmica. Neste mesmo ano Carter, Bardeen e Hawking generalizaram os resultados obtidos por Bekenstein e Smarr e formularam as leis da termodinâmica dos buracos negros:

Lei Zero: A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.

Primeira Lei: $dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$, onde faz-se a comparação com o princípio da termodinâmica $dE = TdS - pdV$, sendo $\Omega_H dJ$ e $\Phi_H dQ$ os termos de trabalho.

Segunda Lei: $\delta A \geq 0$ para todo processo físico, o que pode ser comparado com o segundo princípio da termodinâmica que estabelece $\delta S \geq 0$ para todo processo físico.

Terceira Lei: A gravidade superficial κ não pode chegar a zero por nenhum processo físico. Compara-se com o terceiro princípio da termodinâmica segundo o qual $T \rightarrow 0$ não pode ocorrer via nenhum processo físico.

Em 1974 Stephen Hawking mostra que um buraco negro emite energia na forma de ondas eletromagnéticas. Essa energia é conhecida como radiação Hawking. Enquanto o buraco negro emite essa radiação sua massa vai diminuindo. Isso implica na redução da área do horizonte de eventos. Porém, quando se faz analogia da mecânica do buraco negro com as leis da termodinâmica, impomos que a entropia do sistema é diretamente proporcional a área do horizonte de eventos. Isso implica em uma quebra imediata da segunda lei da termodinâmica, que diz que a variação da entropia de um sistema nunca deve ser menor que zero.

Este impasse na formulação de uma teoria termodinâmica para buracos negros foi resolvido também por Hawking quando ele notou que a entropia do buraco negro diminui com sua evaporação mas a entropia do universo externo ao horizonte de eventos aumenta com a radiação que chega até ele, e esse acréscimo é maior que a variação da entropia do buraco

negro. Assim, a segunda lei da termodinâmica é reformulada tomando

$$S = S_{BN} + S_{ext}, \quad (3.16)$$

onde S_{BN} é a entropia do buraco negro e S_{ext} é a entropia do universo exterior ao buraco negro. Com isso, a variação da entropia será sempre maior que zero, respeitando a segunda lei da termodinâmica.

3.4.1 Temperatura e Entropia do Buraco Negro

Para um observador distante a temperatura de um buraco negro [24] é

$$T = \frac{1}{4\pi r_h}, \quad (3.17)$$

em que r é o raio do buraco negro. A temperatura do buraco negro de Schwarzschild é

$$T = \frac{1}{8\pi MG}. \quad (3.18)$$

Para encontrar a entropia iremos usar a primeira lei da termodinâmica

$$dE = TdS, \quad (3.19)$$

onde E é a energia do buraco negro. Substituindo a temperatura da equação (3.18) na (3.19), temos

$$dM = \frac{1}{8\pi MG} dS. \quad (3.20)$$

Integrando a (3.20), obtemos a entropia do buraco negro de Schwarzschild

$$\begin{aligned} \int dS &= 8\pi G \int M dM \\ S &= 4\pi GM^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A famosa entropia de Bekenstein-Hawking é

$$S_{BH} = \frac{Area}{4G}. \quad (3.22)$$

A área do buraco negro de Schwarzschild é $16\pi M^2 G^2$, substituindo nesta última equação obtemos a equação (3.21).

Vamos calcular a temperatura e a entropia para o buraco negro de Reissner-Nordstrom. O raio para este buraco negro é

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (3.23)$$

subtraindo r_+ com r_- , temos

$$r_+ - r_- = 2\sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.24)$$

Portanto, podemos encontrar a temperatura

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (3.25)$$

A área deste buraco negro é $4\pi r_+^2 = 4\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2$. Então, obtemos a entropia para o buraco negro de Reissner- Nordstrom

$$S = \frac{4\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{4G} = \frac{\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{G}. \quad (3.26)$$

A temperatura do buraco negro de Kerr é dada por

$$T = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - a^2})^2}, \quad (3.27)$$

e a entropia para este buraco negro com rotação é

$$S = \frac{\pi(M + \sqrt{M^2 - a^2})^2}{G}. \quad (3.28)$$

A temperatura e a entropia para o buraco negro de Kerr-Newman é dado por

$$T = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2}, \quad (3.29)$$

$$S = \frac{\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2}{G}. \quad (3.30)$$

Capítulo 4

Processos de Espalhamento

Para calcularmos a seção de choque de espalhamento precisamos encontrar a solução para a equação de Schrödinger usando a técnica da análise de ondas parciais [10] para obtemos a amplitude de espalhamento $f(\theta)$. Na última seção obteremos soluções para a parte radial da equação de Klein-Gordon sujeita às métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom, com isso encontraremos a seção de choque diferencial de espalhamento para ambas as métricas.

4.1 Teoria do espalhamento clássico

Vamos considerar uma partícula com dimensões atômicas que pode interagir, ou seja, trocar energia e momento com outras partículas do sistema. Ao incidir em um centro de espalhamento, região onde há partículas capazes de interagir com a partícula incidente, por exemplo um próton disparado com um núcleo pesado. A energia inicial da partícula ao se aproximar das vizinhanças do centro de espalhamento é E , existe um parâmetro de impacto b que é proporcional ao ângulo de espalhamento, veja figura 4.1 O objetivo da teoria de espalhamento clássico é calcular o ângulo de espalhamento com base no parâmetro de impacto dado. Normalmente, é claro, quanto menor o parâmetro de impacto, maior o ângulo de espalhamento.

O espalhamento é descrito por uma quantidade chamada seção de choque diferencial de espalhamento. A seção de choque diferencial, $D(\theta)$, para espalhamento num dado ângulo sólido $d\Omega$ num ângulo particular θ , é definido por

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (4.1)$$

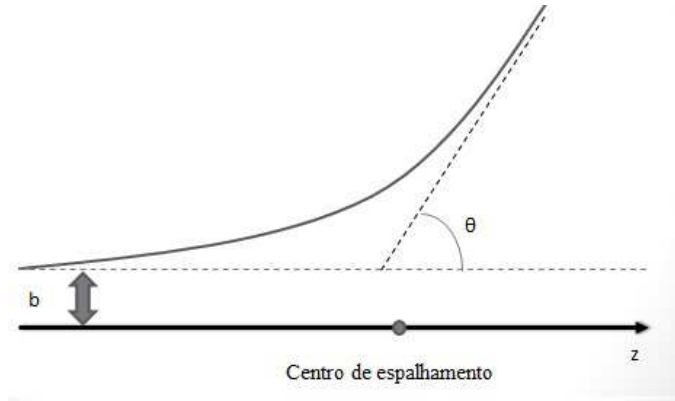


Figura 4.1: Problema clássico de espalhamento

Fonte: Griffiths

Em geral, as partículas incidentes dentro de um trajeto de área transversal infinitesimal $d\sigma$ se espalharão em um ângulo sólido infinitesimal correspondente $d\Omega$. Em termos do parâmetro de impacto e do ângulo azimutal ϕ , $d\sigma = b db d\phi$ e $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, assim

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (4.2)$$

onde $db/d\theta$ é negativo, pois partimos da premissa de que a lei da força é de tal forma que o valor da deflexão angular diminui com o aumento do parâmetro de impacto.

A seção de choque total é a integral de $D(\theta)$ sobre todos os ângulos sólidos:

$$\sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega, \quad (4.3)$$

no processo de espalhamento clássico a área total do feixe incidente é espalhada pelo alvo.

4.2 Teoria do espalhamento quântico

Nesse caso levaremos em consideração o comportamento quântico da partícula incidente que se move na direção z e encontra um potencial de espalhamento produzindo uma onda esférica de saída. Isto é, buscamos soluções para a equação de Schrödinger na forma geral

$$\psi(r, \theta) \approx A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad (4.4)$$

em que o termo e^{ikz} representa a onda incidente, $\frac{e^{ikr}}{r}$ representa a onda espalhada (que carregam um fator de $1/r$, pois essa porção de $|\psi|^2$ deve seguir $1/r^2$ para conservar a probabilidade) e $f(\theta)$ é a amplitude de espalhamento.

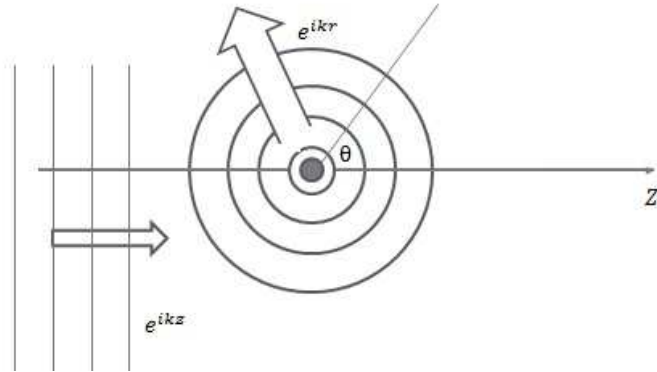


Figura 4.2: Problema quântico de espalhamento

Fonte: Griffiths

O número de onda k está relacionado à energia das partículas incidentes:

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (4.5)$$

A amplitude do espalhamento $f(\theta)$ estabelece a probabilidade de espalhamento em uma determinada direção θ , e está relacionada à seção de choque diferencial. A probabilidade da partícula incidente que se move com velocidade v passe através da área infinitesimal $d\sigma$ em um intervalo de tempo dt é:

$$dP = |\psi_{incidente}|^2 dV = |A|^2 (vdt)d\sigma, \quad (4.6)$$

e a probabilidade da partícula se espalhar no ângulo sólido correspondente $d\Omega$:

$$dP = |\psi_{espalhamento}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f(\theta)|^2}{r^2} (vdt)r^2 d\Omega. \quad (4.7)$$

Igualando as equações (4.6) e (4.7), temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (4.8)$$

É fácil notar que: na equação (4.8) a seção de choque diferencial é igual ao quadrado absoluto da amplitude de espalhamento.

Para determinar amplitude de espalhamento $f(\theta)$ precisamos resolver a equação de Schrödinger. Para esse fim podemos usar duas técnicas e encontrar esta amplitude: por ondas parciais ou aproximação de Bohr. Nesta dissertação usaremos apenas por ondas parciais.

4.3 Análise de ondas parciais

A equação de Schrödinger para um potencial esfericamente simétrico $V(r)$ admite soluções separáveis: uma solução para a parte radial e a outra para parte angular, de tal forma que a solução pode ser escrita como um produto de duas funções uma que depende só de r e a outra dependendo apenas de θ e ϕ

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi,) \quad (4.9)$$

onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ é um harmônico esférico e a solução é

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \quad (4.10)$$

onde $P_l(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre.

Precisamos encontrar a solução para a parte radial

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR}{dr}) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E]R = l(l+1)R, \quad (4.11)$$

fazendo a mudança de variável

$$u(r) = rR(r), \quad (4.12)$$

temos

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + [V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}]u = Eu, \quad (4.13)$$

onde $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$ é o termo centrífugo e o potencial efetivo é

$$V_{eff} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (4.14)$$

Precisamos resolver esta equação e para isso vamos considerar algumas distinções.

Na região da zona de radiação (Figura 4.3) o r é muito amplo e o potencial V vai a zero e a contribuição do termo centrífugo é descartável, de modo que a equação (4.13) se torna

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -k^2u, \quad (4.15)$$

onde $k^2 = 2mE/\hbar^2$. A solução geral é

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}, \quad (4.16)$$

o primeiro termo representa uma onda esférica de saída, e o segundo, uma onda de entrada; para a onda espalhada queremos $D = 0$. Então temos que a solução para a parte radial é proporcional a

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.17)$$

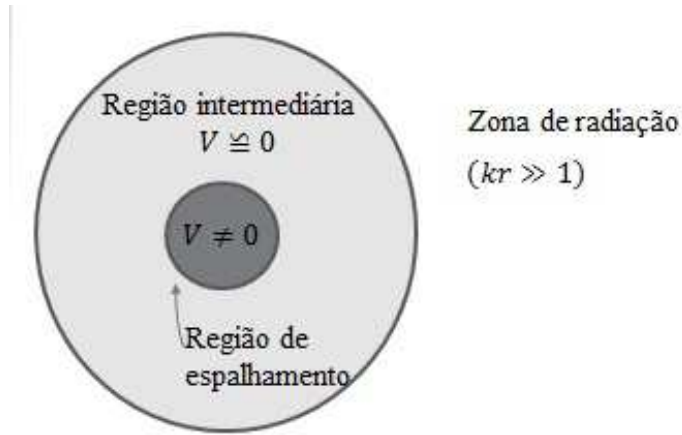


Figura 4.3: Espalhamento por um potencial localizado.

Fonte: Griffiths

Na região intermediária o potencial V é igual a zero, mas o termo centrífugo é diferente de zero, a equação radial vem a ser

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = -k^2u, \quad (4.18)$$

e a solução geral é uma combinação linear das funções de Bessel j_l (que se parece um pouco a uma função seno) e de Neumann n_l (que é um tipo de função cosseno):

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr), \quad (4.19)$$

onde

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^l \frac{\text{sen}x}{x} \quad e \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^l \frac{\text{cos}x}{x}. \quad (4.20)$$

Precisamos das combinações lineares na forma das exponenciais como nas funções esféricas de Hankel:

$$h_l^{(1)} \equiv j_l(x) + in_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x} (-i)^{l+1} e^{ix} \quad (4.21)$$

$$h_l^{(2)} \equiv j_l(x) - in_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x} (i)^{l+1} e^{-ix}. \quad (4.22)$$

A função de Hankel de primeiro tipo $h_l^{(1)}(kr)$ funciona como e^{ikr}/r , enquanto $h_l^{(2)}(kr)$ funciona como e^{-ikr}/r ; para ondas de saída, então precisamos de funções esféricas de Hankel do primeiro tipo

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr). \quad (4.23)$$

A função de onda fora da região de espalhamento em que $V = 0$ é

$$\psi(r, \theta, \phi) = A[e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi)]. \quad (4.24)$$

O primeiro termo é uma onda plana incidente, e o somatório representa a onda espalhada. Como estamos considerando que o potencial seja esfericamente simétrico, a função de onda não pode depender de ϕ . Então precisamos fazer $m = 0$ na equação (4.10), que se torna

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta), \quad (4.25)$$

em que P_l é o l -ésimo polinômio de Legendre. Fazendo o coeficiente $C_{l,m}$ igual a:

$$C_{l,0} = i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l, \quad (4.26)$$

e substituindo as equações (4.25), (4.26) e a função de Hankel primeiro tipo $(-i)^{l+1} e^{ikr}/kr$ na (4.24), temos

$$\psi(r, \theta) = A[e^{ikz} + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l^0(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r}]. \quad (4.27)$$

Comparando esta equação com a (4.4), logo a amplitude de espalhamento é igual a

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l^0(\cos \theta). \quad (4.28)$$

A seção de choque diferencial é

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = f^*(\theta) f(\theta) = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta), \quad (4.29)$$

e a seção de choque total é

$$\sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2. \quad (4.30)$$

4.4 Mudança de fase

Vamos considerar o problema de espalhamento unidimensional com um potencial localizado $V(x)$ limitado à direita por uma parede infinita. A onda incidente da esquerda,

$$\psi_i(x) = A e^{ikx} (x < -a), \quad (4.31)$$

é inteiramente refletida

$$\psi_r(x) = B e^{-ikx} (x < -a). \quad (4.32)$$

A amplitude da onda refletida deve ser a mesma da onda incidente, por conservação da probabilidade. Se não houver nenhum potencial (somente a parede em $x = 0$), então

$B = -A$, pois a função de onda total (incidente somada à refletida) deve desaparecer na origem:

$$\psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0). \quad (4.33)$$

Se o potencial não é zero, a função de onda (para $x < -a$) toma a seguinte forma:

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0). \quad (4.34)$$

Toda a teoria de espalhamento se reduz ao problema do cálculo da mudança de fase δ (δ significa a mudança de fase de um sentido, a onda incidente mudou de fase ao entrar e, novamente, ao sair; e portanto, o total será 2δ), para um potencial especificado.

Voltemos ao caso tridimensional. A onda plana incidente (Ae^{ikz}) não traz momento angular na direção z (a fórmula de Rayleigh não contém termos com $m \neq 0$), mas inclui todos os valores do momento angular total ($l = 0, 1, 2, \dots$), então a onda plana pode ser representada pela fórmula Rayleigh

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (4.35)$$

Como o momento angular é conservado (por um potencial esfericamente simétrico), as ondas parciais se espalham independentemente sem mudança na amplitude, somente na fase. Se não houver nenhum potencial, então $\psi_0 = Ae^{ikz}$, e a l -ésima onda parcial é

$$\psi_0^{(l)} = Ai^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0). \quad (4.36)$$

Somando a equação (4.21) com a (4.22), temos que

$$j_l(x) = \frac{1}{2} [h_l^{(1)} + h_l^{(2)}] = \frac{1}{2x} [(-i)^{l+1} e^{ix} + (i)^{l+1} e^{-ix}], \quad (4.37)$$

substituindo esta última equação na (4.36), temos

$$\psi_0^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0). \quad (4.38)$$

O segundo termo entre colchetes representa uma onda esférica de entrada. O primeiro termo é a onda de saída; ele escolhe uma mudança de fase δ_l :

$$\psi^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0). \quad (4.39)$$

Na seção 4.3, a teoria foi expressa em termos de amplitudes de ondas parciais a_l ; aqui ela é formulada em termos de mudanças de fase δ_l . Fazendo uma ligação entre as duas,

e de fato, comparando a forma assintótica (r grande) da equação (4.27) com a expressão genérica em termos de δ_l da equação (4.39), encontramos

$$a_l = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_l} - 1), \quad (4.40)$$

então a amplitude de espalhamento é

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos \theta). \quad (4.41)$$

A equação (4.41) é menos convergente, o que torna muito difícil executar a soma das séries diretamente. Isto é devido ao fato de que um número infinito de polinômios de Legendre são necessários para obter divergências $\theta = 0$. Em [29], foi encontrado pelos autores uma maneira de contornar esse problema. Foi proposto por eles uma série reduzida que é menos divergente em $\theta = 0$, isto é

$$(1 - \cos \theta)^m f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^m P_l \cos \theta, \quad (4.42)$$

e por isso é esperado que as séries reduzidas possam convergir mais rapidamente. Portanto, para determinar a seção de choque diferencial de espalhamento, usaremos a seguinte equações [29, 3].

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l(\cos \theta)}{1 - \cos \theta} \right|^2, \quad (4.43)$$

onde ω é a frequência.

4.5 Seção de choque diferencial de espalhamento

Vamos calcular a seção de choque diferencial de espalhamento para as métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom.

4.5.1 Para o caso de Schwarzschild

Buracos Negros sem carga e sem rotação caracterizados apenas pela sua massa, ou buracos negros de Schwarzschild, são descritos pelo elemento de linha:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - A(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.44)$$

onde

$$A(r) = 1 - \frac{2MG}{r}. \quad (4.45)$$

Precisamos encontrar soluções para a equação da onda de Klein-Gordon:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0. \quad (4.46)$$

Aplicando o método de separação de variáveis

$$\Phi = \frac{R_{\omega l}(r)}{r}Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (4.47)$$

em que $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. A função radial $R_{\omega l}(r)$ obedece à seguinte equação

$$A(r)\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dR_{\omega l}(r)}{dr}\right] + [\omega^2 - V_{eff}]R_{\omega l}(r) = 0, \quad (4.48)$$

em que

$$V_{eff} = \frac{A(r)}{r}\frac{dA(r)}{dr} + \frac{A(r)l(l+1)}{r^2} = 0. \quad (4.49)$$

Fazendo $\psi(r) = A^{1/2}(r)R(r)$, a equação (4.48) pode ser escrita como

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + U(r)\psi(r) = 0, \quad (4.50)$$

onde

$$U(r) = \frac{[A'(r)]^2}{4A^2(r)} - \frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{\omega^2}{A^2(r)} - \frac{V_{eff}}{A^2(r)}, \quad (4.51)$$

e

$$A'(r) = \frac{dA(r)}{dr} = \frac{2MG}{r^2}, \quad A''(r) = \frac{d^2A(r)}{dr^2} = -\frac{4MG}{r^3}. \quad (4.52)$$

Realizando séries de potência em $1/r$ na equação (4.50)

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + [\omega^2 + \nu(r) + u(r)]\psi(r) = 0, \quad (4.53)$$

agora temos

$$\nu(r) = \frac{4MG\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2}, \quad (4.54)$$

e

$$u(r) = \frac{-2GM[(l^2 + l) + 1] + 16G^3M^3\omega^2 + 2GM}{r^3} + \frac{16G^4M^4\omega^2 - 4G^2M^2[(l^2 + l) + 1] + 5G^2M^2}{r^4} + \dots, \quad (4.55)$$

com

$$\ell^2 = G^2M^2\omega^2 - \frac{(l^2 + l)}{12}. \quad (4.56)$$

A mudança de fase pode ser obtida

$$\delta_l \approx \frac{1}{2}(l - \ell) = \frac{1}{2}\left(l - \sqrt{\frac{-(l^2 + l)}{12} + G^2M^2\omega^2}\right). \quad (4.57)$$

No limite $l \rightarrow 0$ obtemos

$$\delta_l = \frac{-GM\omega}{2}. \quad (4.58)$$

Portanto, para determinar a seção de choque diferencial de espalhamento precisamos usar a equação (4.43). Considerando valores para l ($l = 0, 1$), temos

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{16G^2M^2}{\theta^4}. \quad (4.59)$$

Este mesmo resultado foi obtido pelos métodos do espalhamento eletromagnético [21] e do espalhamento coulombiano [17] para pequenos ângulos.

4.5.2 Para o caso de Reissner-Nordstrom

Buracos Negros de Reissner-Nordstrom são carregados e sem rotação. O elemento de linha é

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.60)$$

em

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (4.61)$$

Vamos encontrar soluções para equação da onda de Klein-Gordon (4.46), temos

$$\frac{r^2}{f(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} [r^2 f(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r}] - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}] - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0, \quad (4.62)$$

aplicando o método de separação de variáveis (4.47), a função radial $R_{\omega r}(r)$ obedece à seguinte equação

$$f(r) \frac{d}{dr} [f(r) \frac{dR}{dr}] + [\omega^2 - V_{eff}] R_{\omega l} = 0, \quad (4.63)$$

em que

$$V_{eff} = \frac{f(r)}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{f(r)l(l+1)}{r^2}. \quad (4.64)$$

Fazendo $\psi(r) = A^{1/2}(r)R(r)$, a equação (4.63) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + U(r)\psi(r) = 0, \quad (4.65)$$

onde

$$U(r) = \frac{[f'(r)]^2}{4f^2(r)} - \frac{f''(r)}{2f(r)} + \frac{\omega^2}{f^2(r)} - \frac{V_{eff}}{f^2(r)}, \quad (4.66)$$

e

$$f'(r) = \frac{df(r)}{dr} = \frac{2MG}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}, \quad f''(r) = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} = -\frac{4MG}{r^3} + \frac{6Q^2}{r^4}. \quad (4.67)$$

Realizando séries de potência em $(1/r)$ na equação (4.65)

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + [\omega^2 + \nu(r) + u(r)] = 0, \quad (4.68)$$

temos

$$\nu(r) = \frac{4MG\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2}, \quad (4.69)$$

e

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{-12MGQ^2\omega^2 + 16M^3G^3\omega^2 - 2MG(l^2 + l)}{r^3} \\ &+ \frac{Q^2[(l^2 + l) - 1] - M^2G^2[4(l^2 + l) + 1] + 3Q^4\omega^2 - 24M^2G^2Q^2\omega^2 + 16M^4G^4\omega^2}{r^4} \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (4.70)$$

com

$$\ell^2 = (M^2G^2 - \frac{Q^2}{6})\omega^2 - \frac{(l^2 + l)}{12}. \quad (4.71)$$

Portanto, a mudança de fase é

$$\delta_l \approx \frac{1}{2}(l - \sqrt{(M^2G^2 - \frac{Q^2}{6})\omega^2 - \frac{(l^2 + l)}{12}}). \quad (4.72)$$

No limite $l \rightarrow 0$, temos

$$\delta_l = -\frac{1}{2}\omega\sqrt{M^2G^2 - \frac{Q^2}{6}}. \quad (4.73)$$

Usando a equação (4.43) e considerando os valores para $l(l = 0, 1)$, obtemos a seção de choque diferencial de espalhamento

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{16G^2M^2(1 - Q^2/6G^2M^2)}{\theta^4}. \quad (4.74)$$

Na referência [17] foi calculada a seção de choque diferencial de espalhamento para o buraco negro de Reissner-Nordstrom usando o método das geodésicas nulas.

Capítulo 5

Buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$

Neste capítulo, consideramos a solução de um buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$ e aplicamos a abordagem de onda parcial para calcular a seção de choque de absorção e espalhamento para uma onda plana monocromática de campo escalar neutro sem massa que colidem com este buraco negro. Nesta colisão existem quatro parâmetros: a massa M do buraco negro, a frequência ω do campo, o parâmetro monopolar η e ψ_0 associado às correções da gravidade $f(R)$.

5.1 O monopolo global na gravidade de Einstein

Nesta seção, vamos determinar a seção de choque diferencial de espalhamento para um buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$ pelo método de onda parcial de baixa frequência. Inicialmente, consideraremos um elemento de linha esférica simétrica de um buraco negro com um monopolo global dado por

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

onde

$$A(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}, \quad (5.2)$$

em que G é a constante de Newton, η é o parâmetro monopolo da ordem $10^{16} GeV$ e assim $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$ [1, 27]. O raio do horizonte de eventos é obtido por $A(r) = 0$, isto é

$$r_\eta = \frac{2GM}{(1 - 8\pi G\eta^2)} = \frac{r_s}{(1 - 8\pi G\eta^2)}, \quad (5.3)$$

onde $r_s = 2GM$ é o horizonte de evento do buraco negro de Schwarzschild. A temperatura de Hawking do buraco negro é

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - 8\pi G\eta^2}{r_s} \right). \quad (5.4)$$

Para $\eta = 0$ a temperatura de Hawking do buraco negro Schwarzschild é recuperada.

Ao lidar com campo escalar não massivo, precisamos encontrar soluções para a equação de onda de Klein-Gordon:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0. \quad (5.5)$$

Temos

$$\frac{1}{A(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[A(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (5.6)$$

Fazendo uma separação de variáveis na equação acima, obtemos

$$\Phi_{\omega lm}(r, t) = \frac{R_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (5.7)$$

em que ω é a frequência e $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são harmônicos esféricos. Sendo assim, a única função a ser determinada é a função radial $R_{\omega l}(r)$ que pode ser escrita como

$$A(r) \frac{d}{dr} \left(A(r) \frac{dR_{\omega l}(r)}{dr} \right) + [\omega^2 - V_{eff}] R_{\omega l}(r) = 0, \quad (5.8)$$

onde

$$V_{eff} = \frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{A(r)l(l+1)}{r^2}, \quad (5.9)$$

é o potencial efetivo. Considerando uma nova função radial, $\psi(r) = A^{1/2}(r)R(r)$, obtemos

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + U(r)\psi(r) = 0, \quad (5.10)$$

onde

$$U(r) = \frac{[A(r)]^2}{4A^2(r)} - \frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{\omega^2}{A^2(r)} - \frac{V_{eff}}{A^2(r)}, \quad (5.11)$$

e

$$A'(r) = \frac{dA(r)}{dr} = \frac{2GM}{r^2}, \quad A''(r) = \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = -\frac{4GM}{r^3}. \quad (5.12)$$

Realizando séries de potência em $1/r$ na equação (5.10)

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + [\tilde{\omega} + \nu(r) + u(r)]\psi(r) = 0, \quad (5.13)$$

onde agora temos

$$\nu(r) = \frac{4GM\omega^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)^3 r} - \frac{(l^2 + l)}{(1 - 8\pi G\eta^2)r^2} + \frac{12G^2 M^2 \omega^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)^4 r^2}, \quad (5.14)$$

com $\tilde{\omega} = \omega/(1 - 8\pi G\eta^2)$ e fazendo

$$\ell^2 = -\frac{(l^2 + l)}{12(1 - 8\pi G\eta^2)} + \frac{G^2 M^2 \tilde{\omega}^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)^2}, \quad (5.15)$$

logo a equação (5.14) pode ser reescrita como

$$\nu(r) = \frac{4GM\tilde{\omega}^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)r} + \frac{12\ell^2}{r^2}, \quad (5.16)$$

e temos

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{32G^3 M^3 \tilde{\omega}^3 - 2(l^2 + l)GM\tilde{\omega}(1 - 8\pi G\eta^2) - 16\pi G\eta^2 GM\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}(1 - 8\pi G\eta^2)^3 r^3} \\ &+ \frac{1}{\tilde{\omega}^2(1 - 8\pi G\eta^2)^4 r^4} [80G^4 M^4 \tilde{\omega}^4 + G^2 M^2 \omega^2 - 4(l^2 + l)G^2 M^2 \omega^2 (1 - 8\pi G\eta^2) \\ &- (1 - 8\pi G\eta^2)[8 - 5(1 - 8\pi G\eta^2)]G^2 M^2 \tilde{\omega}^2] + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Observe que quando $r \rightarrow \infty$ o potencial $V(r) = \nu(r) + u(r) \rightarrow 0$ e o comportamento assintótico é satisfeito. Portanto, para determinar a seção de choque diferencial de espalhamento, usaremos a equação (4.43).

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)(e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right|^2. \quad (5.18)$$

Precisamos calcular a defasagem δ_l que pode ser obtido aplicando a seguinte fórmula de aproximação

$$\delta_l \approx \frac{1}{2}(l - \ell) = \frac{1}{2}\left(l - \sqrt{-\frac{(l^2 + l)}{12(1 - 8\pi G\eta^2)} + \frac{G^2 M^2 \tilde{\omega}^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)^2}}\right), \quad (5.19)$$

no limite $l \rightarrow 0$ obtemos

$$\delta_l = -\frac{GM\tilde{\omega}}{2(1 - 8\pi G\eta^2)} + \mathcal{O}(l) = -\frac{GM\omega}{2(1 - 8\pi G\eta^2)^2} + \mathcal{O}(l). \quad (5.20)$$

Note-se que no limite $l \rightarrow 0$ os desvios de fase tendem a um valor não nulo, o que naturalmente leva a um resultado correto para a seção de choque diferencial no limite de pequenos ângulos. Considerar poucos valores de $l(l+1)$ é suficiente para obter o resultado satisfatoriamente. Assim, a seção de choque diferencial de espalhamento é, neste caso, dada por

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} = \frac{16G^2 M^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)^4 \theta^4} + \dots = \frac{16G^2 M^2}{\theta^4} [1 + 32\pi G\eta^2 + \mathcal{O}(G\eta^2)^2] + \dots \quad (5.21)$$

O termo dominante é modificado pelo parâmetro do monopolo η . Assim, verificamos que a seção de choque diferencial de espalhamento aumenta pelo efeito do monopolo. Se $\eta = 0$

obtemos o mesmo resultado do buraco negro de Schwarzschild.

Vamos calcular a seção de choque da absorção para o buraco negro com um monopolo global em baixa frequência, que pode ser obtida através da expressão

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - |e^{2i\delta_l}|^2). \quad (5.22)$$

Para a mudança de fase δ_l da equação (5.20), obtemos o limite $\omega \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}^2} \sum_{l=0}^3 (2l+1)(1 - |e^{2i\delta_l}|^2), \\ &= \frac{16\pi G^2 M^2}{(1 - 8\pi G\eta^2)} = \frac{A_{Sch}}{(1 - 8\pi G\eta^2)^2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde $A_{Sch} = 4\pi r_s^2$ é a área do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. Então, para alguns valores de l ($l = 0, 1, 2, 3$) o resultado é obtido com sucesso. Nosso resultado está de acordo com o obtido em [11], os autores mostraram que o efeito do parâmetro η torna a absorção do buraco negro mais forte.

5.2 O monopolo global na gravidade $f(R)$

Vamos calcular a seção de choque diferencial de espalhamento para o buraco negro com o monopolo global na gravidade $f(R)$. O elemento de linha é dado por

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.24)$$

onde

$$A(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_0 r. \quad (5.25)$$

O termo $\psi_0 r$ corresponde a extensão padrão da relatividade geral. Quando $A(r) = 0$ na equação (5.25) obtemos os horizontes de eventos

$$r_- = \frac{1 - 8\pi G\eta^2 - \sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2)^2 - 8GM\psi_0}}{2\psi_0}, \quad (5.26)$$

e

$$r_+ = \frac{1 - 8\pi G\eta^2 + \sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2)^2 - 8GM\psi_0}}{2\psi_0}. \quad (5.27)$$

Somando r_- e r_+ encontramos uma relação entre os horizontes de eventos

$$r_+ + r_- = \frac{1}{\psi_0}(1 - 8\pi G\eta^2). \quad (5.28)$$

Note que o horizonte r_+ existe apenas se ψ_0 for diferente de zero. Considerando que ψ_0 é pequeno e expandindo o termo da raiz quadrada na equação (5.26) obtemos

$$r_\eta = \frac{2GM}{1 - 8\pi G\eta^2} + \dots = \frac{r_s}{1 - 8\pi G\eta^2} + \dots, \quad (5.29)$$

é o mesmo resultado obtido na equação (5.3) e quando $\eta = 0$ temos $r_\eta = r_s$, o horizonte de evento do buraco negro de Schwarzschild.

Para equação (5.27) vamos considerar ψ_0 muito pequeno, encontramos

$$\begin{aligned} r_{\psi_0} &= \frac{1}{\psi_0}(1 - 8\pi G\eta^2) - \frac{2GM}{(1 - 8\pi G\eta^2)} + \dots, \\ &= \frac{1}{\psi_0}(1 - 8\pi G\eta^2) - r_\eta + \dots, \end{aligned} \quad (5.30)$$

temos

$$r_\psi + r_\eta = \frac{1}{\psi_0}(1 - 8\pi G\eta^2). \quad (5.31)$$

A temperatura de Hawking associada ao buraco negro da equação (5.24) é

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - 8\pi G\eta^2}{r_h} - 2\psi_0 \right) = \frac{1}{4\pi} (1 - 8\pi G\eta^2) \frac{r_+ - r_-}{r_-(r_+ + r_-)}. \quad (5.32)$$

Seguindo os mesmos passos aplicados na seção (5.1), a equação (5.10) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \left[\frac{(l^2 + 1/4)}{r^2} + U(r) \right] \psi(r) = 0, \quad (5.33)$$

onde

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{a(1 - 8\pi G\eta^2)/2 + a(l^2 + l + 1) + 2(1 - 8\pi G\eta^2)a^3}{\omega r^3} \\ &+ \frac{1}{\omega^2 r^4} [-4GM\omega(a^3 + a) + (3 - 48\pi G\eta^2)a^4 \\ &+ \frac{3a^2}{4} - 8\pi G\eta^2 a^2 + a^2 l(l + 1)(1 - 8\pi G\eta^2) + 2a^2(1 - 8\pi G\eta^2)] + \dots, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde definimos $\ell^2 \equiv a^2$ e $a \equiv \omega/\psi_0$. Analisando o coeficiente de $1/r^2$ da equação (5.33), apenas o primeiro termo contém a frequência ω e o segundo termo é um fator numérico. O potencial $V(r) = (l^2 + 1/4)/r^2 + U(r)$ obedece ao limite assintótico $V(r) \rightarrow 0$ com $r \rightarrow \infty$.

Usando a mesma aproximação que na formula (5.19) a mudança de fase no limite $l \rightarrow 0$, temos

$$\delta_l = -\frac{\omega}{2\psi_0} + \mathcal{O}(l) = -\frac{\bar{\omega}(r_\psi + r_\eta)}{4} + \mathcal{O}(l), \quad (5.35)$$

onde $\bar{\omega} = \omega/2(1 - 8\pi G\eta^2)$. No limite de baixa frequência e no ângulo pequeno θ , a seção de choque diferencial de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\theta} &= \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^1 (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right|^2, \\ &= \frac{4(r_{\psi_0} + r_\eta)^2}{\theta^4} + \dots\end{aligned}\quad (5.36)$$

No limite ψ_0 temos $r_{\psi_0} \gg r_\eta$ e a seção de choque diferencial de espalhamento se torna

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} \approx \frac{4r_\psi^2}{\theta^4} + \dots = \frac{4(1 - 8\pi G\eta^2)^2}{\psi_0^2 \theta^4} + \dots \quad (5.37)$$

Vemos que a presença do parâmetro ψ_0 modifica o termo dominante.

Agora vamos determinar a seção de choque de absorção para um buraco negro com monopolo global na gravidade $f(R)$ no limite de baixa frequência. A mudança de fase δ_l é a da equação (5.35) e aplicando no limite $\omega \rightarrow 0$ encontramos

$$\begin{aligned}\sigma_{abs}^{bf} &= \frac{\pi}{\bar{\omega}^2} \sum_{l=0}^3 (2l+1)(1 - |e^{2i\delta_l}|^2), \\ &= 4\pi(r_{\psi_0} + r_\eta)^2.\end{aligned}\quad (5.38)$$

No limite ψ_0 temos $r_{\psi_0} \gg r_\eta$ e a seção de choque de absorção se torna

$$\sigma_{abs}^{bf} \approx \frac{4\pi(1 - 8\pi G\eta^2)^2}{\psi_0^2} = 4\pi r_{\psi_0}^2 = A_{\psi_0}, \quad (5.39)$$

que é dominado pelo efeito da gravidade $f(R)$. Nosso resultado mostra ser similar ao [16] para o espaço puro de Sitter. O buraco negro com monopolo global na gravidade $f(R)$ absorve mais para o horizonte externo. Finalmente, para $r_{\psi_0} = 0$ e $\eta = 0$ da equação (5.38) obtemos o resultado para o caso do buraco negro de Schwarzschild $\sigma_{abs}^{lf} = 4\pi r_s^2 = A_{Sch}$.

Capítulo 6

Conclusões

Em resumo, nesta dissertação, calculamos a seção de choque de absorção e espalhamento de um buraco negro com um monopolo global de gravidade $f(R)$ no limite de baixa frequência em pequenos ângulos ($\theta \approx 0$). Para determinar a mudança de fase implementamos a fórmula de aproximação $\delta_l \approx (l - \ell)$, e usando a técnica de onda parcial encontramos a seção de choque de espalhamento que apresenta um termo compreendido no limite de ângulos pequenos $1/\theta^4$. Este termo é modificado pela presença dos parâmetros η e ψ_0 diferentemente do caso do buraco negro de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom que não tem dependência desses parâmetros apenas da massa. Considerando o caso de um buraco negro com um monopolo global na gravidade $f(R)$, descobrimos que a contribuição deste termo da seção de choque diferencial de espalhamento é essencialmente devido ao efeito da gravidade $f(R)$. A seção de choque de absorção, no limite em que ψ_0 , é proporcional à área do horizonte externo $r_{\psi_0} \sim 1/\psi_0$, que implica que $r_{\psi_0} \gg r_\eta$. O parâmetro ψ_0 , que está relacionado com a correção da gravidade $f(R)$, é inversamente proporcional a seção de choque de absorção, isso significa que um buraco negro com o monopolo global na gravidade $f(R)$ absorve mais para horizonte externo.

Referências Bibliográficas

- [1] BARRIOLA M. and VILENKIN A., Phys. Lett. 63, 341, 1989.
- [2] CARAMES T.R.P., MELLO E.R.B., GUIMARAES M.E.X., Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 03, 446 (2011).
- [3] COTAESCU I.I., CRUCEAN C. and SPOREA C.A. Eur. Phys. J.C. 76, no. 3, 102 (2016) doi:10.1140/epjc/s10052-016-3936-9 [arXiv:1409.7201[gr-qc]].
- [4] CRISPINO L.C.B., DOLAN S.R. and OLIVEIRA E.S., Phys. Rev. D 79, 064022 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.064022 [arXiv:0904.0999[gr-qc]].
- [5] d'INVERNO R.A. Introducing Einstein's Relativity. 1º edição, 1992.
- [6] DOLAN S.R., Phys. Rev. D 77, 044004 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.044004 [arXiv:0710.4252[gr-qc]].
- [7] DORAN C.J.L. and LASENBY A.N., Phys. Rev. D 66, 024006, (2002).
- [8] FROLOV A.V., KRISTJANSSON K.R., THORLACIUS L. et al, Phys. Rev. D 72, 021501, (2005), [hep-th/0504073].
- [9] GIBBONS COMMUN G.W. Math. Phys. 44, 245 (1975).
- [10] GRIFFITHS D.J. Mecânica Quântica. 2º edição, 2004.
- [11] HAI H., YONG-JIU W. and JU-HUA C., Chin. Phys. B 22, no. 7, 070401 (2013).
- [12] KIBBLE T.W.B., J. Phys. A 9, 1387 (1976).
- [13] LEMOS, N.A. Mecânica Analítica, 1º edição, 2004.
- [14] LOGI W.K. and KOVÁCS S.J., Phys. Rev. D 16, 237, (1977).

- [15] MATZNER R.A. and RYAN M.P., Phys. Rev. D 16, 1636 (1977).
- [16] MYUNG Y.S., Mod. Phys. Lett. A 18, 617 (2003) doi:10.1142/S0217732303009678 [hep-th/0201176].
- [17] OLIVEIRA E.S., Espalhamento e absorção de campos bosônicos por buracos negros estáticos e análogos. 2009. 88 f. Tese (Doutorado em Física), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [18] PAGE D.N., Phys. Rev. D 13, 198 (1976).
- [19] PETERS P.C., Phys. Rev. D 13, 775 (1976).
- [20] PIRES, A.S.T. Evolução das Ideias da Física. 1º edição, 2008.
- [21] SÁNCHEZ N.G., J. Math. Phys. 17, 688, (1976); SÁNCHEZ N.G., Phys. Rev. D 16, 937 (1977); SÁNCHEZ N.G., Phys. Rev. D 18, 1030 (1978); SÁNCHEZ N.G., Phys. Rev. D 18, 1798 (1978).
- [22] STAROBINSKY A.A. and CHURILOV S.M., Zh.Eksp. Teor. Fiz. 65, 3 (1973).
- [23] STAROBINSKY A.A. and CHURILOV S.M., Sov. Phys.-JETP 38, 1 (1974).
- [24] SUSSKIND L. and LINDESAY J. An introduction to black holes, information, and the string theory revolution, 1º edição, 2005.
- [25] TOWNSEND. P.K., Black holes: Lectures notes, (University of Cambridge, Cambridge, 1997) [gr-qc/9707012]; PADMANABHAN T., Phys. Rep. 406, 49 (2005), [gr-qc/0311036].
- [26] UNRUH W.G., Phys. Rev. D 14, 3251 (1976).
- [27] VILENKIN A., Phys. Rep. 121, 263 (1985).
- [28] WESTERVELT P.J., Phys. Rev. D 3, 2319, (1971).
- [29] YENNIE D.R., RAVENHALL D.G. and WILSON R.N. Phys. Rev. 95, 500 (1954).