



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Extensão Derivativa do Modelo de Chern-Simons e
Correções Quânticas à Temperatura Finita**

Ozório Bezerra Holanda Neto

CAMPINA GRANDE

- Julho 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Extensão Derivativa do Modelo de Chern-Simons e
Correções Quânticas à Temperatura Finita**

Ozório Bezerra Holanda Neto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos.

CAMPINA GRANDE

- Julho 2015 -

EXTENSÃO DERIVATIVA DO MODELO DE CHERN-SIMONS E
CORREÇÕES QUÂNTICAS À TEMPERATURA FINITA

OZÓRIO BEZERRA HOLANDA NETO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Examinador

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Examinador

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
Examinador

É realmente impossível dizer qualquer coisa com
precisão absoluta, a não ser aquela coisa que é
tão abstraída do mundo real, para não
representar qualquer coisa real.

Richard P. Feynman

Agradecimentos

À toda a minha família, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio. Em especial minha mãe Janete, e também Raimunda (avó), Adelson (pai) e Yasmin (irmã). À minha namorada (Simony) pelos bons momentos, e compreensão nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

À todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos amigos do departamento pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 5.1 | O comportamento das funções térmicas $f(a)$ e $g(a)$ | 42 |
|-----|--|----|

Lista de Abreviaturas e Siglas

CS - *Chern-Simons*

MCS - *Maxwell-Chern-Simons*

CSE - *Chern-Simons Estendido em Altas Ordens Derivativas*

MCSE - *Maxwell-Chern-Simons Estendido em Altas Ordens Derivativas*

QED - *Quantum Eletrodynamics*

CSET - *Chern-Simons Estendido em Altas Ordens Derivativas em Temperatura Finita*

MCSET - *Maxwell-Chern-Simons Estendido em Altas Ordens Derivativas em Temperatura Finita*

Resumo

Nesta dissertação estudamos os aspectos clássicos e quânticos da extensão derivativa do modelo de Chern-Simons Abelian na eletrodinâmica em $(2+1)$ dimensões. No contexto clássico, descrevemos suas principais propriedades, tais como a invariância de calibre e a estrutura do propagador associado quando este modelo é adicionado à teoria de Maxwell. A principal característica desse modelo é a de que ele nos fornece um par de excitações (uma não massiva e outra massiva) para o modo de propagação das ondas eletromagnéticas. No contexto quântico, estudamos a possibilidade de induzir esse termo na ação efetiva da eletrodinâmica quântica via correções radiativas de determinante fermiônico em um laço. Neste caso, analisamos sua ocorrência em temperatura zero e finita. O resultado oriundo da temperatura finita tem como propriedade gerar novas excitações para os modos de propagação das ondas eletromagnéticas dependentes da temperatura.

Palavras-chave: Chern-Simons, Eletrodinâmica Quântica, Teoria de Campos à Temperatura Finita.

Abstract

In this work we studied the classical and quantum aspects of derivative extension of the Chern-Simons Abelian model in electrodynamics in $(2 + 1)$ dimensions. In classical context, we describe their main properties such as gauge invariance and the structure of the associated propagator when this template is added to Maxwell's theory. The main feature of this model is that it provides us a pair of excitation (one not massive and another massive) for the propagation mode of the electromagnetic waves. In the quantum context, we studied the possibility of inducing this term in the effective action of quantum electrodynamics via radiative corrections of fermionic determinant in loop. In this case, we analyze its occurrence at zero and finite temperature. The result arising from the finite temperature has the property to generate new excitement for the modes of propagation of electromagnetic waves dependent of temperature.

Keywords: Chern-Simons, Quantum Electrodynamics, Quantum Field Theory at Finite Temperature.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Campos de Calibre | 4 |
| 2.1 | Eletrodinâmica de Maxwell em 2+1 dimensões | 4 |
| 2.1.1 | O propagador de Maxwell em 2+1 dimensões | 7 |
| 2.1.2 | O 3-Potencial de Maxwell para uma carga singular pontual | 9 |
| 2.2 | Modelo clássico de Maxwell-Chern-Simons | 11 |
| 2.2.1 | O propagador de Maxwell-Chern-Simons | 13 |
| 2.2.2 | O 3-Potencial de Maxwell-Chern-Simons para uma carga singular pontual | 16 |
| 3 | Extensão Derivativa do modelo Maxwell-Chern-Simons | 18 |
| 3.1 | Modelo de Maxwell-Chern-Simons Estendido | 19 |
| 3.1.1 | O propagador de Maxwell-Chern-Simons estendido | 21 |
| 3.1.2 | O 3-Potencial de Maxwell-Chern-Simons Estendido para uma carga singular pontual | 24 |
| 4 | A Eletrodinâmica Quântica em (2+1) Dimensões e as Induções Radia- tivas | 25 |
| 4.1 | Simetrias Discretas \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} | 25 |
| 4.2 | A Indução da Ação Efetiva de Chern-Simons | 28 |
| 4.2.1 | Cálculo do tensor de auto-energia | 31 |
| 4.3 | Indução da Ação Efetiva de Chern-Simons em Altas Ordens Derivativas . . | 33 |
| 4.3.1 | Cálculo do tensor de auto-energia | 34 |
| 5 | Os Efeitos da Temperatura Finita sobre a Ação efetiva de Chern-Simons | |

| | |
|---|-----------|
| em Altas Ordens Derivativas | 39 |
| 5.1 A Ação Efetiva Induzida em Temperatura Finita | 39 |
| 5.2 Modelo Efetivo Térmico | 43 |
| 5.2.1 O propagador térmico | 44 |
| 6 Conclusões e perspectivas futuras | 47 |
| A Propriedade das matrizes de Dirac em (2+1)d | 49 |
| B Integração gaussiana em variáveis de Grassmann | 51 |
| C Prova da igualdade $\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q$ | 53 |
| Referências Bibliográficas | 54 |

Capítulo 1

Introdução

A teoria de campos usual é descrita através de Lagrangianas, que por sua vez, são funções dos campos e de suas primeiras derivadas. Tais sistemas são denominados sistemas de primeira ordem. Desde Isaac Newton até os dias atuais, este tipo de procedimento tem sido sucessivamente usado para explicar inúmeros fenômenos físicos. Contudo, a concepção de teorias de altas ordens derivativas da componente temporal dos campos torna-se essencial para se abordar alguns processos, como o procedimento de renormalização de teorias campos divergentes [1, 2, 3]. Estes modelos são conhecidos como termos de altas ordens derivativas. Termos de altas ordens derivativas funcionam como correções de algumas teorias de primeira ordem e desempenham um importante papel durante o processo de quantização. Dessa forma, teorias que incluem tais termos são atraentes por apresentarem notória consistência em sua descrição. Conceitos de teorias de altas ordens derivativas aparecem frequentemente em alguns seguimentos da física, tais como, teorias de campos [4, 5, 6, 7], teorias de cordas [8], gravitação [2, 12, 13, 14, 15, 16] e na cosmologia [17, 18, 19]. Além disso, a adição de termos de altas ordens derivativas, possibilita regularizar o comportamento ultravioleta de certas teorias [1, 4]. Por exemplo, a existência desses termos derivativos pode fazer com que teorias de gravidade modificada sejam renormalizáveis [2, 3]. Outros campos da física teórica, tais como a correspondência AdS/CFT, indicam a importância de se considerar teorias de altas ordens derivativas [19, 20, 21]. Devido a essas importantes aplicações, uma análise sistemática de teorias de altas ordens derivativas, torna-se necessária também em outros contextos.

Este trabalho aborda alguns aspectos deste mecanismo em teorias de calibre em $(2+1)$ dimensões. Uma característica peculiar das teorias de calibre em $(2+1)$ dimensões

do espaço-tempo é a que as partículas associadas aos campos de calibre, podem ser massivas de tal forma que a simetria de calibre seja mantida. Como exemplo, temos a conhecida eletrodinâmica topologicamente massiva [22, 23, 24, 25] ou a gravidade topologicamente massiva [26]. Nestes casos, a massa não nula aparece em razão de possíveis termos topológicos que quebram a simetria de paridade na ação. Nossos estudos, restringem-se a rever estas propriedades pela extensão derivativa da teoria eletromagnética topologicamente massiva proposta por Deser e Jackiw [27]. Neste estudo, os autores consideram que as extensões derivativas do termo de Chern-Simons topológico massivo podem surgir como correções perturbativas da ação efetiva, gerando uma contribuição única, de terceira ordem na derivada, restituindo uma nova contribuição descrita em termos do tensor intensidade de campo eletromagnético. Este novo termo pode nos oferecer uma nova teoria eletromagnética com invariância de calibre mais ampla do que a do termo de Chern-Simons topológico de primeira ordem, que é invariante de calibre apenas na ação. Essa nova contribuição, será o objeto central de nossas discussões, principalmente porque ela abre a possibilidade de discutir a sua indução como teoria efetiva via correções radiativas da eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões.

O objetivo principal desta dissertação é o de investigar o estabelecimento do termo de Chern-Simons derivativo como uma ação efetiva induzida via correções quânticas. Esse estudo será desenvolvido pelo método de expansão derivativa de determinante de férmions, o qual mantém o campo de calibre como campo de fundo. Nossos cálculos são direcionados aos regimes de temperatura zero e finita. O resultado oriundo do regime de temperatura finita, abre a possibilidade de se construir uma teoria de calibre termal capaz de vincular as excitações dos modos de propagação das ondas eletromagnéticas ao parâmetro da temperatura. Encaramos essa característica como um dos principais resultados apresentados pelo presente trabalho.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, é feita uma revisão das principais propriedades de algumas teorias de calibre, tais como a de Maxwell e a de Maxwell-Chern-Simons em $(2+1)$ dimensões, onde é discutida a invariância de calibre e de Lorentz, as equações de movimento e equações da onda que descrevem os modos de propagação das ondas eletromagnéticas para ambas teorias. Em seguida, são calculados os propagadores e o 3-potencial de uma carga singular.

No Capítulo 3, considera-se o modelo estendido de Maxwell-Chern-Simons, que é

um modelo teórico de campos em altas ordens derivativas, onde as simetrias de calibre e de Lorentz são trabalhadas. É feito um mapeamento entre o modelo estendido de Maxwell-Chern-Simons e o de Maxwell-Chern-Simons através das equações de movimento, equações de onda e os propagadores de ambos.

No Capítulo 4, a eletrodinâmica quântica é introduzida e se discutem suas simetrias discretas fazendo um paralelo com o termo de Chern-Simons. Posteriormente, verifica-se a possibilidade de induzir radiativamente o termo de Chern-Simons e o associado estendido como ações efetivas ao nível de um laço, através dos cálculos de determinante fermiônico. Para isso, é utilizado o método de expansão derivativa e da técnica de resolução das integrais covariantes do momento no espaço de Minkowski.

No Capítulo 5, o procedimento de indução do termo de Chern-Simons estendido é realizado com os efeitos da temperatura finita. Para tanto, é aplicado o formalismo das frequências de Matsubara para férmions. Tem-se então uma teoria de calibre termal, cujas características principais são analisadas, tais como, suas equações de movimento e o propagador térmico.

Finalmente no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Ao longo da dissertação é adotado o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$).

Capítulo 2

Campos de Calibre

Na física, uma teoria de calibre¹ (gauge), é uma teoria de campos na qual a lagrangiana é invariante sob grupos de transformações de simetrias globais ou locais. Muitas teorias são descritas por lagrangianas que são invariantes sob determinados grupos de transformações de simetria. Quando tais grupos são invariantes sob uma transformação em cada ponto do espaço, esses grupos descrevem uma simetria global. Por outro lado, em uma teoria de calibre local, a exigência de que as transformações sejam globais é deixada de lado, e a Lagrangiana possui uma simetria meramente local. Isso pode ser visto como uma generalização do princípio de equivalência da Relatividade Geral, onde em cada ponto do espaço-tempo é permitida uma escolha de um referencial local. Nesse capítulo, faremos uma breve revisão das principais características da teoria de calibre eletromagnética em (2+1) dimensões e do termo de Chern-Simons adicionado a teoria.

2.1 Eletrodinâmica de Maxwell em 2+1 dimensões

A dinâmica do campo eletromagnético é descrita pela lagrangiana relativística [28]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_{\mu}A^{\mu}, \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo é o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ em 2+1 dimensões, definido da seguinte forma [29]:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & -B \\ E_y & B & 0 \end{pmatrix},$$

¹O termo calibre, refere-se aos graus de liberdade do campos na Lagrangiana.

e o segundo termo é o 3-potencial acoplado a um termo de corrente, que se conserva de acordo com $\partial_\mu j^\mu = 0$. Note que a lagrangiana acima, é invariante sobre transformações de calibre e de Lorentz, assim, aplicando a transformação de calibre $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ sobre a lagrangiana (2.1), temos²:

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - j_\mu \delta A^\mu. \quad (2.2)$$

Como $\delta F_{\mu\nu} = \delta F^{\mu\nu} = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -j_\mu \partial^\mu \Lambda = -\partial^\mu (j_\mu \Lambda) + \Lambda \partial^\mu j_\mu \\ \delta \mathcal{L} &= -\partial^\mu (j_\mu \Lambda), \end{aligned} \quad (2.3)$$

o qual é um termo de derivação total e que pode ser negligenciado nas condições de fronteira da ação. Conclui-se assim que, a conservação da corrente é uma condição necessária para a invariância de calibre da teoria³.

Seguindo um estudo mais detalhado da teoria, podemos verificar a covariância de Lorentz, isso implica que uma teoria física tem que ser a mesma em qualquer referencial inercial. Definindo a transformação de Lorentz [30] como

$$\begin{aligned} A^{\alpha'} &= \Lambda_{\beta'}^{\alpha'} A^\beta; & A_{\alpha'} &= \Lambda_{\alpha'}^{\beta} A_\beta, \\ \Lambda_{\beta'}^{\alpha'} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}; & \Lambda_{\alpha'}^{\beta} &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}, \end{aligned}$$

onde $\Lambda_{\beta'}^{\alpha'}$ é o tensor de Lorentz⁴, dada uma lagrangiana

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu'} F^{\mu\nu'} - j_{\mu'} A^{\mu'}, \quad (2.4)$$

aplicamos as transformações de Lorentz, e obtemos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu'} F^{\mu\nu'} &= \Lambda_{\mu'}^{\alpha} F_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu'}^{\beta} \Lambda_{\theta'}^{\mu'} F^{\theta\sigma} \Lambda_{\sigma'}^{\nu'} \\ F_{\mu\nu'} F^{\mu\nu'} &= F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

²Algumas notações: Foi introduzido o potencial vetor $A^\mu = (\Phi, \vec{A}) = (\Phi, \vec{A})$ e a corrente $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (\rho, \vec{j})$. Também são definidas as derivadas covariante $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla)$ e $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla)$, onde $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$. O tensor métrico é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. Os índices com letras gregas variam da forma $(\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2)$ e os índices latinos $(i, l, m, n, \dots = 1, 2)$, os quais obedecem a métrica euclidiana $\mathbb{R}^2 = \delta^{ij} = \text{diag}(1, 1)$.

³Em teoria quântica de campos, a construção de teorias invariantes de gauges representam teorias renormalizáveis, portanto este é um conceito muito importante na construção de teorias.

⁴Com as coordenadas espaço-temporais dadas por $x^\beta = (x^0, x^1, x^2) = (t, x, y)$ e $x_\beta = (x_0, x_1, x_2) = (t, -x, -y)$.

e,

$$\begin{aligned} j_{\mu'} A^{\mu'} &= \Lambda_{\mu'}^{\alpha} j_{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\mu'} A_{\beta} \\ j_{\mu'} A^{\mu'} &= j_{\alpha} A^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Logo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - j_{\alpha} A^{\alpha}. \quad (2.7)$$

Aqui vemos que é conservada a mesma forma funcional da Lagrangiana adotada no referencial linha. O que mostra que toda a teoria que vamos obter da Lagrangiana é invariante sobre transformações de Lorentz, além de ser invariante de calibre na ação.

Agora, para obter as equações de movimento utilizamos a equação de Euler-Lagrange [29] sobre (2.1):

$$\partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\beta}} = 0, \quad (2.8)$$

de onde obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\beta}} &= -j_{\mu} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial A_{\beta}} = -j^{\beta} \\ \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} &= -\frac{1}{4} \partial_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} - \frac{\partial(\partial_{\nu} A_{\mu})}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} \right) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \left(\frac{\partial(\partial^{\mu} A^{\nu})}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} - \frac{\partial(\partial^{\nu} A^{\mu})}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} \right) \right] \\ \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} A_{\beta})} &= -\partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} \\ \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} &= j^{\beta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação (2.9) em conjunto com a seguinte identidade de Bianchi [31],

$$\epsilon^{\mu\sigma\rho} \partial_{\mu} F_{\sigma\rho} = 0 \quad (2.10)$$

formulam as equações de Maxwell,

$$\partial_l E^l = \rho \quad (2.11)$$

$$\epsilon^{lm} \partial_l B = -j^m - \partial_0 E^m \quad (2.12)$$

$$\epsilon^{lm} \partial_l E_m = -\partial_0 B. \quad (2.13)$$

Através de manipulações algébricas e usando o calibre de Lorenz $\partial_{\alpha} A^{\alpha} = 0$ nas equações de Maxwell (2.9), podemos deduzir a equação da onda dos campos eletromagnéticos em função do 3-potencial vetor:

$$\square A^{\beta} = j^{\beta}. \quad (2.14)$$

Utilizando o campo magnético e o campo elétrico em função do 3-potencial vetor, temos:

$$B = -\epsilon^{mn}\partial_m A_n, \quad (2.15)$$

$$E^l = -\partial_t A^l - \partial^l \Phi. \quad (2.16)$$

Agora, aplicando o operador d'Alembertiano pela esquerda nas equações (2.15) e (2.16), obtemos:

$$\square B = -\epsilon^{mn}\partial_m j_n, \quad (2.17)$$

$$\square E^l = -\partial^l \rho - \partial_0 j^l. \quad (2.18)$$

Note que na ausência de fontes ($\rho = \vec{j} = 0$), obtemos as equações de onda dos campos na forma homogênea:

$$\square B = 0, \quad \square E^l = 0, \quad \square A^\beta = 0. \quad (2.19)$$

A solução das equações (2.19) é do tipo onda plana,

$$B(t, x^n) = B_0 e^{i(k_n x^n - \omega t)}, \quad (2.20)$$

$$E^l(t, x^n) = E_0 e^{i(k_n x^n - \omega t)}, \quad (2.21)$$

onde denominamos o vetor propagação $k_l = (k_1, k_2) = (k_x, k_y)$. Então, aplicando esta solução nas equações de Maxwell sem fontes, obtemos os seguintes resultados:

$$k_l E^l = 0, \quad (2.22)$$

$$\epsilon^{lm} k_l B = \omega E^m, \quad (2.23)$$

$$\epsilon^{lm} k_l E_m = \omega B. \quad (2.24)$$

A solução (2.22) indica que o campo \vec{E} é perpendicular à direção do vetor propagação \vec{k} . Portanto, a partir da determinação da direção de propagação podemos relacionar os módulos dos campos elétrico e magnético através das expressões (2.23) e (2.24).

2.1.1 O propagador de Maxwell em 2+1 dimensões

A equação de movimento (2.9) é geralmente resolvida por uma função de Green associada ao tensor eletromagnético,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= j^\beta \\ (\square \eta^{\beta\sigma} - \partial_\alpha \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma}) A_\sigma &= j^\beta \\ (\square \eta_{\beta\sigma} - \partial_\beta \partial_\sigma) A^\sigma &= j_\beta \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde,

$$\mathcal{O}_{\beta\sigma}(x-x')G^{\sigma\gamma}(x-x') = \delta_\beta^\gamma \delta^{(2)}(x-x'), \quad \text{onde} \quad \mathcal{O}_{\beta\sigma} \equiv (\square\eta_{\beta\sigma} - \partial_\beta\partial_\sigma). \quad (2.26)$$

O operador $\mathcal{O}_{\beta\sigma}(x-x')$ atuando na função de Green $G^{\sigma\gamma}(x-x')$ é singular, ou seja, não possui um inverso $\mathcal{O}_{\beta\sigma}^{-1}$ ⁵. Para contornar essa singularidade, é incluído um termo extra na Lagrangiana (2.1), $-\frac{\zeta}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$, para fazer o operador inversível, tal que:

$$\mathcal{O}(x)'_{\beta\sigma}G^{\sigma\gamma}(x-x') = \delta_\beta^\gamma \delta^{(2)}(x-x'), \quad \text{onde} \quad \mathcal{O}'_{\beta\sigma} \equiv (\square\eta_{\beta\sigma} - (1-\zeta)\partial_\beta\partial_\sigma). \quad (2.27)$$

Assim, usando a transformada inversa de Fourier de (2.27), temos:

$$G^{\sigma\gamma}(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} G^{\sigma\gamma}(p) \quad (2.28)$$

$$\delta_\beta^\gamma \delta^{(2)}(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \delta_\beta^\gamma e^{ip(x-x')}. \quad (2.29)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x)'_{\beta\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} G^{\sigma\gamma}(p) &= \delta_\beta^\gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} (-p^2\eta_{\beta\sigma} + (1-\zeta)p_\beta p_\sigma) G^{\sigma\gamma}(p) &= \delta_\beta^\gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para a igualdade (2.30) ser válida, os integrandos devem ser iguais

$$(-p^2\eta_{\beta\sigma} + (1-\zeta)p_\beta p_\sigma)G^{\sigma\gamma}(p) = \delta_\beta^\gamma, \quad (2.31)$$

E para a solução do propagador (2.31), consideramos o *ansatz*⁶ geral

$$G^{\sigma\gamma}(p) = A\eta^{\sigma\gamma} + Bp^\sigma p^\gamma, \quad (2.32)$$

então,

$$\begin{aligned} (-p^2\eta_{\beta\sigma} + (1-\zeta)p_\beta p_\sigma)(A\eta^{\sigma\gamma} + Bp^\sigma p^\gamma) &= \delta_\beta^\gamma \\ -Ap^2\eta_{\beta\sigma}\eta^{\sigma\gamma} - Bp^2p^\sigma p^\gamma\eta_{\beta\sigma} + A(1-\zeta)p_\beta p_\sigma\eta^{\sigma\gamma} + B(1-\zeta)p_\beta p_\sigma p^\sigma p^\gamma &= \delta_\beta^\gamma \\ -Ap^2\delta_\beta^\gamma - Bp^2p^\beta p^\gamma + A(1-\zeta)p^\beta p^\gamma + Bp^2(1-\zeta)p^\beta p^\gamma &= \delta_\beta^\gamma. \end{aligned} \quad (2.33)$$

⁵O operador tem que possuir um inverso para que não possua autovalores nulos, e seja possível a transição do espaço das posições para o espaço dos momentos através de uma inversa da transformada de Fourier.

⁶É uma suposição inicial que se verifica depois por seus resultados.

Deste modo, podemos reagrupar (2.33) através de um sistema de duas equações e duas incógnitas, de acordo com os tensores correspondentes nos dois lados da equação,

$$\begin{cases} -Ap^2\delta_\beta^\gamma = \delta_\beta^\gamma \\ [-B\zeta p^2 + A(1 - \zeta)]p_\beta p^\gamma = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Usando a propriedade $\delta_\beta^\gamma = 1$ para $\gamma = \beta$, simplificamos o sistema para a forma

$$\begin{cases} -Ap^2 = 1 \\ -B\zeta p^2 + A(1 - \zeta) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

cuja solução é

$$A = -\frac{1}{p^2} \quad (2.36)$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{p^4}. \quad (2.37)$$

De acordo com a equação (2.32), finalmente obtemos o seguinte propagador:

$$G^{\sigma\gamma}(p) = \frac{-p^2\eta^{\sigma\gamma} + p^\sigma p^\gamma}{p^4} - \frac{1}{\zeta} \frac{p^\sigma p^\gamma}{p^4}, \quad (2.38)$$

onde o parâmetro constante ζ na equação (2.38), está associado a dois valores: $\zeta \rightarrow 1$ (propagador do fóton usual ou calibre de Feynman) e $\zeta \rightarrow \infty$ (calibre de Landau ou propagador para fótons transversais). Usando o calibre de Feynman, temos:

$$G^{\sigma\gamma}(p) = \frac{-\eta^{\sigma\gamma}}{p^2}, \quad (2.39)$$

o qual descreve uma única excitação: $p_0 = \pm |\vec{p}|$.

2.1.2 O 3-Potencial de Maxwell para uma carga singular pontual

É bem conhecido que cargas aceleradas emitem radiação eletromagnética. Para o caso de cargas pontuais em movimento, o 3-potencial é escrito da seguinte forma:

$$A^\mu(x) = \int d^3x' G^{\mu\nu}(x, x') j_\nu(x'). \quad (2.40)$$

Como a corrente é conservada no 3-potencial de Lienard-Wiechert, usaremos o calibre de Feynman em (2.38), tal que, a inversa da transformada de Fourier é:

$$G^{\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G^{\mu\nu}(p) e^{ip(x-x')}. \quad (2.41)$$

Uma vez que o propagador do fóton usual $\frac{-\eta^{\mu\nu}}{p^2}$ é singular, para contornar as singularidades, consideramos p_0 como uma variável complexa e tratamos ele como uma integral de contorno no plano complexo p_0 ,

$$G^{\mu\nu}(x, x') = \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{e^{ip_0\tau}}{p_0^2 - p^2}. \quad (2.42)$$

Através do método dos resíduos e da integral de Cauchy [32], temos:

$$G^{\mu\nu}(x, x') = -\eta^{\mu\nu} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \frac{\sin(p\tau)}{p}. \quad (2.43)$$

Integrando em coordenadas polares,

$$G^{\mu\nu}(x, x') = -\eta^{\mu\nu} \int \frac{pdpd\theta}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \frac{\sin(p\tau)}{p} \quad (2.44)$$

$$G^{\mu\nu}(x, x') = -\eta^{\mu\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)} \sin(p\tau) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\pi)} e^{-ip|\vec{r}|\cos\theta}, \quad (2.45)$$

e utilizando a integral de Bessel [33]:

$$J_0(p|\vec{r}|) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\pi)} e^{-ip|\vec{r}|\cos\theta}, \quad (2.46)$$

a função de Green (2.45) toma a seguinte forma,

$$G^{\mu\nu}(x, x') = -\eta^{\mu\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)} \sin(p\tau) J_0(p|\vec{r}|), \quad (2.47)$$

onde essa pode ser retardada ou avançada. A solução retardada é obtida introduzindo uma função Heaviside $\Theta(\tau)$ e a avançada $\Theta(-\tau)$. De modo que, a solução geral para a função de Green é:

$$G_{\pm}^{\mu\nu}(x, x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)\eta^{\mu\nu}}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \sin(p\tau) J_0(p|\vec{r}|). \quad (2.48)$$

na qual G_+ é a solução retardada e G_- é a solução avançada. A integração (2.48) é definida da seguinte forma⁷:

$$G_{\pm}^{\mu\nu}(x - x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)\eta^{\mu\nu}}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}. \quad (2.49)$$

Note que, em 2+1 dimensões a função de Green fornece um valor em termos da função de Heaviside, em vez de uma função de Dirac como na teoria convencional de 3+1 dimensões. A solução de Green (2.49) nos fornece um resultado para o caso em que $\sqrt{\tau^2 - r^2} \geq 0$,

⁷Onde $x^0 - x'^0 = \tau$ e $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{r}$.

sendo esta uma solução do tipo tempo e tipo luz, e $G_{ret}^{\mu\nu}(x, x') = 0$ para o caso em que $(\tau^2 - r^2) < 0$, quando a solução é do tipo espaço. Para a demonstração do 3-potencial, temos que a distribuição de corrente fornecida por uma carga pontual movendo-se na linha de mundo $z(\tau)$ é dada por:

$$j_\nu(x') = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{z}_\nu(\tau) \delta^{2+1}(x' - z(\tau)). \quad (2.50)$$

Substituindo (2.49) e (2.50) em (2.40) obtemos a forma geral do 3-potencial,

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= q \int d\tau \int d^3x' \frac{\Theta(\tau) \eta^{\mu\nu}}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \dot{z}_\nu(\tau) \delta^{2+1}(x' - z(\tau)) \\ A^\mu(x) &= \frac{q}{2\pi} \int d\tau \Theta(x^0 - z^0(\tau)) \frac{\Theta[(x - z(\tau))^2]}{\sqrt{(x - z(\tau))^2}} \dot{z}^\mu(\tau). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Note que o termo $\frac{\Theta[(x-z(\tau))^2]}{\sqrt{(x-z(\tau))^2}}$ da integral (2.51) é largamente não-trivial com sérias divergências [34]. Concluímos que, essas divergências resultam na falta de um 3-potencial tipo Liénard-Wiechert, que por sua vez, implica na falha do princípio de Huygens.⁸

2.2 Modelo clássico de Maxwell-Chern-Simons

Fazendo o uso da eletrodinâmica de Maxwell em 2+1 dimensões, podemos estender esta teoria introduzindo um novo termo (denominado termo de Chern-Simons) na Lagrangiana da teoria. O resultado é a surpreendente nova forma de geração de massa através do campo de calibre Chern-Simons. Desta forma, a Lagrangiana é escrita como,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa} A_\mu \partial_\nu A_\kappa, \quad (2.52)$$

onde $\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu A_\kappa \equiv \bar{j}^\mu$ é a corrente de matéria [31], a qual está acoplada ao campo eletromagnético promovendo a dinâmica de campos massivos no modelo. Isto é visto, explicitamente, da seguinte forma [35]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \bar{j}_\mu A^\mu, \quad (2.53)$$

onde este termo é invariante de calibre:

$$\begin{aligned} \bar{j}^\mu &= \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu A_\kappa \\ \delta \bar{j}^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

⁸O princípio de Huygens diz que cada ponto de uma frente de onda comporta-se como fonte puntiforme, gerando ondas secundárias, que num meio homogêneo são esféricas e se propagam com a mesma velocidade.

Assim, podemos ver claramente que, a teoria muda por termos de derivação total se assumimos que a corrente de carga e a corrente de matéria ($\partial_\mu \bar{j}^\mu = 0$) são conservadas, tal que:

$$\delta\mathcal{L} = -\partial^\mu(j_\mu\Lambda) + \frac{m}{2}\partial_\mu(\Lambda\epsilon^{\mu\nu\kappa}\partial_\nu A_\kappa), \quad (2.55)$$

a qual podemos negligenciar nas condições de fronteiras da ação de Maxwell-Chern-Simons correspondente, $S_{MCS} = \int d^3x\mathcal{L}_{MCS}$, ou seja, essa teoria é invariante de calibre.

Note que o termo de Chern-Simons também é um invariante de Lorentz, conforme podemos verificar:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\kappa'} A_{\mu'}\partial_{\nu'} A_{\kappa'} &= \Lambda_{\alpha'}^{\mu'}\Lambda_{\beta'}^{\nu'}\Lambda_{\gamma'}^{\kappa'}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{\mu'}^{\sigma}A_{\sigma}\Lambda_{\nu'}^{\theta}A_{\theta}\Lambda_{\kappa'}^{\zeta}A_{\zeta} \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa'} A_{\mu'}\partial_{\nu'} A_{\kappa'} &= \epsilon^{\sigma\theta\zeta}A_{\sigma}\partial_{\theta}A_{\zeta}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Isto é refletido também nas equações de Euler-Lagrange da lagrangiana,

$$\partial_\kappa F^{\kappa\nu} + m\epsilon^{\nu\kappa\mu}\partial_\kappa A_\mu = j^\nu, \quad (2.57)$$

serem invariantes de calibre e de Lorentz. Então, explicitando (2.57) em função dos campos (E^l, B) , chegamos nas equações:

$$\partial_i E^i = \rho + mB \quad (2.58)$$

$$m\epsilon^{il}E_i - \partial_t E^l = j^l + \epsilon^{il}\partial_i B \quad (2.59)$$

$$\epsilon^{il}\partial_i E_l = -\partial_t B. \quad (2.60)$$

Manipulando a equação (2.57) e utilizando o gauge de Lorenz, obtemos a equação da onda para o 3-potencial,

$$\square A^\nu = -m\epsilon^{\nu\kappa\mu}\partial_\kappa A_\mu + j^\nu, \quad (2.61)$$

e através de (2.15), (2.16) e (2.61), temos

$$(\square + m^2)B = -\epsilon_{il}\partial^i j^l - m\rho \quad (2.62)$$

$$(\square + m^2)E^l = -m\epsilon^{il}j_i - \partial_t j^l - \partial^l \rho. \quad (2.63)$$

Voltando a equação (2.61), podemos defini-la na forma dos potenciais (Φ, A^l) , em função da densidade de carga e corrente (ρ, j^l) :

$$\square(\square + m^2)\Phi = -m\epsilon_{il}\partial^i j^l + \square\rho, \quad (2.64)$$

$$\square(\square + m^2)A^l = m\epsilon^{il}\partial_t j_i + m\epsilon^{il}\partial_i \rho + \square j^l. \quad (2.65)$$

As equações estacionárias (independente do tempo), são representadas da seguinte forma:

$$(\partial_t^2 - m^2)B = \epsilon_{il}\partial^i j^l + m\rho \quad (2.66)$$

$$(\partial_t^2 - m^2)E^l = m\epsilon^{il}j_i + \partial^l\rho \quad (2.67)$$

$$\partial_t^2(\partial_t^2 - m^2)\Phi = -m\epsilon_{il}\partial^i j^l - \partial_t^2\rho \quad (2.68)$$

$$\partial_t^2(\partial_t^2 - m^2)A^l = m\epsilon^{il}\partial_i\rho - \partial_t^2 j^l. \quad (2.69)$$

O campo de CS acoplado ao campo de Maxwell representa uma correção quântica devido à interação dos dois, o que gera novos termos nas equações clássicas, que por sua vez representam novos resultados físicos. Portanto, o modelo apresenta um fluxo do campo elétrico proporcional ao campo magnético (B) e a densidade de carga (ρ), diferente da teoria de Maxwell (2+1) dimensões que é unicamente proporcional a densidade de carga. Isso significa que, nesta teoria uma densidade de carga estática pode gerar um campo magnético. Outro fato curioso é que, somente as equações não-homogêneas são modificadas, o que se deve ao fato do termo de Chern-Simons ser uma corrente de matéria que modifica somente as equações de corrente. As equações da onda dos campos elétrico e magnético são do tipo Klein-Gordon, onde o campo magnético possui uma nova dependência da densidade de carga em comparação com a Eletrodinâmica usual. Na teoria de Maxwell as equações da onda do potencial são de segunda ordem, já aqui são equações de quarta ordem. Em tal formalismo, a equação estática do campo elétrico e campo magnético apresenta dependência na densidade de carga e corrente. Isso ocorre pois o termo de Chern-Simons modifica o 3-potencial (A^ν), e estabelece um vínculo entre o campo magnético e a densidade de carga.

2.2.1 O propagador de Maxwell-Chern-Simons

Vamos agora construir a função de Green da teoria de MCS. Seguimos os mesmos caminhos da teoria de Maxwell pura, adicionando o calibre de fixação $\frac{\zeta}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$, com o mesmo propósito de inverter o operador da teoria. Desta forma, através de (2.57) temos:

$$\begin{aligned} \square A^\nu - (1 - \zeta)\partial_\alpha\partial^\nu A^\alpha + m\epsilon^{\nu\mu\kappa}\partial_\mu A_\kappa &= j^\nu \\ (\square\eta^{\kappa\nu} - (1 - \zeta)\partial_\alpha\partial^\nu\eta^{\kappa\alpha} + m\epsilon^{\nu\mu\kappa}\partial_\mu)A_\kappa &= j^\nu \\ (\square\eta_{\kappa\nu} - (1 - \zeta)\partial_\kappa\partial_\nu + m\epsilon_{\kappa\nu\mu}\partial^\mu)A^\kappa &= j_\nu. \end{aligned} \quad (2.70)$$

A função de Green que é solução da equação anterior, é descrita da seguinte forma:

$$\mathcal{O}_{\kappa\nu}(x-x')G^{\nu\gamma}(x-x') = \delta_{\kappa}^{\gamma}\delta^{(2)}(x-x') \quad (2.71)$$

$$(2.72)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\kappa\nu} \equiv (\square\eta_{\kappa\nu} - (1-\zeta)\partial_{\kappa}\partial_{\nu} + m\epsilon_{\kappa\nu\mu}\partial^{\mu}). \quad (2.73)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na função de Green $G^{\nu\gamma}(x-x')$, e fazendo $\partial^{\mu} \rightarrow ip^{\mu}$ no operador $\mathcal{O}_{\kappa\nu}(x-x')$, obtemos a sua representação no espaço dos momentos como sendo:

$$(-\eta_{\kappa\nu}p^2 + (1-\zeta)p_{\kappa}p_{\nu} + im\epsilon_{\kappa\nu\mu}p^{\mu})G^{\nu\gamma}(p) = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \quad (2.74)$$

Para a resolução de (2.74), consideramos o *ansatz* geral,

$$G^{\nu\gamma}(p) = A\eta^{\nu\gamma} + Bp^{\nu}p^{\gamma} + C\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha}. \quad (2.75)$$

Substituindo (2.75) em (2.74), temos:

$$\begin{aligned} & -Ap^2\eta_{\kappa\nu}\eta^{\nu\gamma} - Bp^2\eta_{\kappa\nu}p^{\nu}p^{\gamma} - Cp^2\eta_{\kappa\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} + A(1-\zeta)\eta^{\nu\gamma}p_{\kappa}p_{\nu} + \\ & B(1-\zeta)p_{\kappa}p_{\nu}p^{\nu}p^{\gamma} + (1-\zeta)Cp_{\kappa}p_{\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} + imA\epsilon_{\kappa\nu\mu}p^{\mu}\eta^{\nu\gamma} + \\ & imBp^{\nu}p^{\gamma}\epsilon_{\kappa\nu\mu}p^{\mu} + imC\epsilon_{\kappa\nu\mu}p^{\mu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Neste ponto, usamos a propriedade $\epsilon_{\kappa\nu\mu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha} = \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\kappa}^{\alpha} - \delta_{\kappa}^{\gamma}\delta_{\mu}^{\alpha}$ no último termo do lado esquerdo de (2.76), temos:

$$-Ap^2\delta_{\kappa}^{\gamma} - imCp^2\delta_{\kappa}^{\gamma} - Bp^2p_{\kappa}p^{\gamma} + A(1-\zeta)p_{\kappa}p_{\gamma} + \quad (2.77)$$

$$B(1-\zeta)p^2p_{\kappa}p^{\gamma} + imCp_{\kappa}p^{\gamma} + imA\eta_{\kappa\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} - Cp^2\eta_{\kappa\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} + \quad (2.78)$$

$$(1-\zeta)Cp_{\kappa}p_{\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} + imBp_{\kappa}p_{\nu}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_{\alpha} = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \quad (2.79)$$

Agrupando os termos de tensores iguais, obtemos um sistema da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} (-Ap^2 - imCp^2)\delta_{\kappa}^{\gamma} = \delta_{\kappa}^{\gamma} \\ (-B\zeta p^2 + A(1-\zeta) + imC)p_{\kappa}p^{\gamma} = 0 \\ (-Cp^2 + imA)\eta_{\kappa\nu}\epsilon^{\kappa\nu\mu}p_{\mu} = 0, \end{array} \right. \quad (2.80)$$

cuja solução é:

$$A = \frac{-1}{(p^2 - m^2)} \quad (2.81)$$

$$B = \frac{1}{p^2(p^2 - m^2)} - \frac{1}{\zeta p^2} \quad (2.82)$$

$$C = \frac{-im}{p^2(p^2 - m^2)}. \quad (2.83)$$

Uma vez determinados os coeficientes do *ansatz*, chegamos na solução do propagador de MCS em (2+1) dimensões:

$$G^{\nu\gamma}(p) = -\frac{\eta^{\nu\gamma}}{(p^2 - m^2)} - \frac{p^\nu p^\gamma}{\zeta p^4} + \frac{+p^\nu p^\gamma}{p^2(p^2 - m^2)} - \frac{im\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_\alpha}{p^2(p^2 - m^2)}, \quad (2.84)$$

Note também que, para $\zeta \rightarrow \infty$ temos o calibre de Landau e para $\zeta \rightarrow \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)$ denominamos “calibre de Feynman massivo”. Utilizando o “calibre de Feynman massivo” em (2.84), temos o propagador da seguinte forma:

$$G^{\nu\gamma}(p) = -\frac{\eta^{\nu\gamma} + imp^{-2}\epsilon^{\nu\gamma\alpha}p_\alpha}{(p^2 - m^2)}, \quad (2.85)$$

onde é evidente a existência de excitações massivas com auto-energias $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Como feito anteriormente, obtemos a transformada inversa de Fourier, dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G^{\nu\gamma}(x - x') &= \eta^{\nu\gamma} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{1}{p^2 - m^2} + \\ &\frac{m}{m^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-x')} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - m^2} \right] i\epsilon^{\nu\gamma\alpha} p_\alpha, \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde,

$$G^{2+1}(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{1}{p^2} \quad (2.87)$$

$$G^m(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (2.88)$$

assim,

$$G^{\nu\gamma}(x - x') = \eta^{\nu\gamma} G^m(x - x') + \frac{m}{m^2} (G^{2+1}(x - x') - G^m(x - x')) i\epsilon^{\nu\gamma\alpha} p_\alpha, \quad (2.89)$$

onde $G^{2+1}(x - x')$ é o propagador do fóton usual, calculado em (2.49). Então, nesta seção calculamos o propagador massivo $G^m(x - x')$ para $m > 0$:

$$G^m(x - x') = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{\tau}} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{e^{ip_0\tau}}{(p_0^2 - p^2 - m^2)}. \quad (2.90)$$

Podemos ver que o propagador 2.90 possui um integrando singular. De maneira análoga, vamos considerar p_0 um número complexo e usar o método dos resíduos para resolver a integração. Deste modo, a integração fica da seguinte forma:

$$G_{\pm}^m(x - x') = -\Theta(\pm\tau) \int_0^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ipr \cos\theta} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \sin(\tau\sqrt{p^2 + m^2}). \quad (2.91)$$

Usando a integral de Bessel, já definida anteriormente, obtemos:

$$G_{\pm}^m(x - x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)}{2\pi} \int_0^{\infty} dp J_0(pr) \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \sin(\tau\sqrt{p^2 + m^2}), \quad (2.92)$$

onde a função de Green massiva é dada por [37]:

$$G_{\pm}^m(x - x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2}). \quad (2.93)$$

Note que, se fizermos $m \rightarrow 0$ o propagador $G^m(x - x')$ torna-se $G^{(2+1)}(x - x')$, e analogamente ao propagador da teoria de Maxwell, a função Heaviside $\Theta(\tau^2 - r^2)$ possui soluções que violam o princípio de Huygens.

2.2.2 O 3-Potencial de Maxwell-Chern-Simons para uma carga singular pontual

Similarmente à teoria de Maxwell, o 3-potencial de uma carga singular no modelo MCS é dado pelo propagador do modelo (2.89) substituído na equação geral (2.40):

$$A^\nu(x) = \int d^3x' \left[\eta^{\nu\gamma} G^m(x - x') + \frac{m}{m^2} \left(G^{2+1}(x - x') \right. \right. \quad (2.94)$$

$$\left. \left. - G^m(x - x') \right) i\epsilon^{\nu\gamma\alpha} p_\alpha \right] j_\gamma(x'). \quad (2.95)$$

Então, as substituirmos nesta expressão os valores dos propagadores $G^m(x - x')$ e $G^{2+1}(x - x')$, obtemos:

$$A^\nu(x) = - \int d^3x' \frac{\Theta(\tau)}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \left[\cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2}) j^\nu(x') \right. \\ \left. + \frac{m}{m^2} \left(1 - \cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2}) \right) \epsilon^{\nu\gamma\alpha} \partial(x')_\alpha j_\gamma(x') \right]. \quad (2.96)$$

Portanto, usando a equação da 3-corrente (3.53) e a função delta de Dirac, temos a solução:

$$A^\nu(x) = -\frac{q}{2\pi} \int d\tau \Theta(x^0 - z^0) \Theta[(x - z)^2] \left[\frac{\cos(m\sqrt{(x - z)^2})}{\sqrt{(x - z)^2}} \dot{z}^\nu \right. \\ \left. + \frac{m}{m^2} \left(\frac{1 - \cos(m\sqrt{(x - z)^2})}{\sqrt{(x - z)^2}} \right) \epsilon^{\nu\gamma\alpha} \partial(z)_\alpha \dot{z}_\gamma \right]. \quad (2.97)$$

Aplicando agora, a derivada covariante $\partial(z)_\alpha$ em (2.97), a integração fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A^\nu(x) &= -\frac{q}{2\pi} \int d\tau \Theta(x^0 - z^0) \Theta[(x - z)^2] \left[\frac{\cos(m\sqrt{(x - z)^2})}{\sqrt{(x - z)^2}} \dot{z}^\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{m^2} \left(\frac{1 - \cos(m\sqrt{(x - z)^2})}{\sqrt{(x - z)^2}} \right) \epsilon^{\nu\gamma\alpha} \ddot{z}_\gamma \dot{z}_\alpha \right]. \tag{2.98}
\end{aligned}$$

Através deste resultado é possível notar que, se fizermos o modelo com a massa tendendo a zero, recuperamos a solução obtida na seção anterior. Além disto, o modelo apresenta um novo termo que depende da aceleração da carga (termo de radiação).

Capítulo 3

Extensão Derivativa do modelo Maxwell-Chern-Simons

A idéia de elaborar uma possível extensão derivativa do termo de Chern-Simons foi proposta por Jackiw e Deser [27]. A razão disto, vem da possibilidade se construir uma teoria eletromagnética análoga ao termo de Chern-Simons gravitacional, descrito por combinações de três derivadas parciais.

O procedimento natural para obter possíveis extensões derivativas para o campo eletromagnético é o de se considerar o modelo de Maxwell-Chern-Simons e reescrevê-lo como uma série perturbativa em ∂/m :

$$S_{ES} = S_{CS} + S_{MAX} + S_{CSE} + O(m^{-2}) \quad (3.1)$$

onde S_{CS} é a ação de Chern-Simons, S_{MAX} é a ação de Maxwell e S_{CSE} é a extensão derivativa da ação de Chern-Simons dada por,

$$\mathcal{S}_{ECS} = (2m)^{-1} \kappa \int d^3x \varepsilon^{\alpha\beta\rho} A_\alpha \partial_\beta \square A_\rho, \quad (3.2)$$

onde m é a massa da teoria e $\kappa \propto 1/|m|$ é uma fator constante que pode ser determinado via correções radiativas. Resolvendo sucessivas integrações por partes na expressão anterior, devemos encontrar:

$$\mathcal{S}_{ECS} = -(2m)^{-1} \kappa \int d^3x \varepsilon^{\alpha\beta\rho} \tilde{A}_\alpha \partial_\beta \tilde{A}_\rho \quad \text{com} \quad \tilde{A}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

a qual depende localmente da intensidade de campo eletromagnético e não dos potenciais como apresenta o termo de Chern-Simons. Neste capítulo, faremos um estudo sobre as principais características da eletrodinâmica na presença da extensão derivativa introduzida aqui.

3.1 Modelo de Maxwell-Chern-Simons Estendido

A teoria de Maxwell-Chern-Simons estendida (MCSE) em altas ordens derivativas é representada pela seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu\Box A_\kappa - j_\mu A^\mu, \quad (3.4)$$

onde m é a massa do fóton, que ao contrário de MCS, aparece invertida por causa da regularização da dimensão da teoria. Ao contrário do modelo MCS, MCSE não é largamente invariante de calibre. Desta forma, temos:

$$\delta\tilde{A}_\mu = 0 \quad (3.5)$$

$$\delta\mathcal{L} = -\partial^\mu(j_\mu\Lambda). \quad (3.6)$$

e invariante de Lorentz, conforme o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\kappa'}A_{\mu'}\partial_{\nu'}\partial_{\rho'}\partial^{\rho'}A_{\kappa'} &= \frac{1}{2m}\Lambda_{\alpha'}^{\mu'}\Lambda_{\beta'}^{\nu'}\Lambda_{\gamma'}^{\kappa'}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{\mu'}^\sigma A_\sigma\Lambda_{\nu'}^\theta\partial_\theta\Lambda_{\rho'}^\tau\partial_\tau\Lambda_{\zeta'}^{\rho'}\partial^\zeta\Lambda_{\kappa'}^\lambda A_\lambda \\ &= \frac{1}{2m}\delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\theta\delta_\gamma^\lambda\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_\zeta^\tau A_\sigma\partial_\theta\partial_\tau\partial^\zeta A_\lambda \\ &= \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\theta\gamma}A_\sigma\partial_\theta\Box A_\gamma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Neste ponto, o objetivo é obter o termo de MCSE através de correções radiativas. Portanto, vale a pena fazer um estudo detalhado deste modelo. Utilizando as equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana (3.4):

$$\partial_\alpha\partial_\sigma\partial_\theta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\sigma\partial_\theta A_\beta)} + \partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0, \quad (3.8)$$

temos,

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{1}{m}\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\nu\Box A_\kappa = j^\beta, \quad (3.9)$$

que produz as duas equações não homogêneas:

$$\partial_l E^l = \rho + \frac{\Box}{m}B \quad (3.10)$$

$$\epsilon^{lm}\partial_l B = -j^m - \partial_t E^m + \frac{\epsilon^{lm}}{m}\Box E_l. \quad (3.11)$$

E, a equação não homogênea é obtida novamente da identidade de Bianchi ($\epsilon^{\mu\nu\kappa}\partial_\mu\partial_\nu A_\kappa = 0$), e expressada da seguinte forma:

$$\epsilon^{lm}\partial_l E_m = -\partial_t B. \quad (3.12)$$

Utilizando a liberdade de calibre da eletrodinâmica de Maxwell,

$$B = -\epsilon^{mn}\partial_m A_n \quad (3.13)$$

$$E^l = -\partial_t A^l - \partial^l \Phi, \quad (3.14)$$

e (3.9) no calibre de Lorentz, podemos ainda obter as equações de onda para o campo elétrico e magnético:

$$\left(\square + \frac{\square^2}{m^2}\right) B = -\frac{\square\rho}{m} - \epsilon^{lm}\partial_l j_m \quad (3.15)$$

$$\left(\square + \frac{\square^2}{m^2}\right) E^m = -\frac{\epsilon^{lm}}{m}\square j_l - \partial^m \rho - \partial_t j^m. \quad (3.16)$$

Então, depois de algumas manipulações algébricas, obtemos as equações da onda dos potenciais escalar e vetor:

$$\square\left(\square + \frac{\square^2}{m^2}\right)\Phi = -\frac{\epsilon^{lm}}{m}\partial_l\square j_m + \square\rho \quad (3.17)$$

$$\square\left(\square + \frac{\square^2}{m^2}\right)A^m = \frac{\epsilon^{lm}}{m}\partial_t\square j_l + \frac{\epsilon^{lm}}{m}\partial_l\square\rho + \square j^m. \quad (3.18)$$

Considerando o regime estático das equações da onda anteriores, conseguimos equações de quarta ordem:

$$\left(\partial_l^2 - \frac{\partial_l^4}{m^2}\right)B = -\frac{\partial_l^2\rho}{m} + \epsilon^{lm}\partial_l j_m \quad (3.19)$$

$$\left(\partial_l^2 - \frac{\partial_l^4}{m^2}\right)E^l = -\frac{\epsilon^{lm}\partial_m^2 j_l}{m} + \partial_l\rho \quad (3.20)$$

$$\partial_l^2\left(\partial_l^2 - \frac{\partial_l^4}{m^2}\right)\Phi = \frac{\epsilon^{mn}\partial_m\partial_l^2 j_n}{m} - \partial_l^2\rho \quad (3.21)$$

$$\partial_l^2\left(\partial_l^2 - \frac{\partial_l^4}{m^2}\right)A^l = -\frac{\epsilon^{ml}\partial_m\partial_l^2\rho}{m} - \partial_l^2 j^l. \quad (3.22)$$

Desta forma, o modelo de MCSE apresenta algumas diferenças em comparação à MCS: a divergência do campo elétrico agora apresenta uma variação do campo magnético no espaço e no tempo; a circulação do campo magnético provoca além do termo de corrente de deslocamento de Maxwell, uma dependência espacial e temporal de segunda ordem no campo elétrico; a equação de onda para o campo magnético demonstra uma variação de segunda ordem da densidade de carga no espaço e no tempo, ao contrário de MCS em que a densidade de carga é constante; a equação de onda para o campo elétrico mostra uma variação de segunda ordem na derivada da densidade de corrente, que é proporcional à variação do campo elétrico. Note também que o modelo MCSE pode ser formalmente obtido a partir do modelo MCS através da substituição $m \rightarrow \frac{\square}{m}$. É fácil perceber que, essa modificação traduz todos os novos resultados de MCSE em relação à MCS [27].

3.1.1 O propagador de Maxwell-Chern-Simons estendido

O propagador da teoria é obtido através de uma função de Green, a qual está associada a solução da equação de movimento (3.9) no calibre de Lorentz. Devemos inserir na Lagrangiana de MCSE, um termo de fixação de calibre que é importante para eliminar a singularidade do operador. Portanto, temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu\Box A_\kappa - j_\mu A^\mu + \frac{\zeta}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (3.23)$$

Através das equações de Euler-Lagrange (3.8) de (3.23), temos que:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{1}{m}\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\nu\Box A_\kappa + \zeta\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha = j^\beta. \quad (3.24)$$

Explicitando o tensor eletromagnético em função do 3-potencial ($F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$), temos:

$$\begin{aligned} \Box A^\beta - (1 - \zeta)\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{m}\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\nu\Box A_\kappa &= j^\beta \\ (\Box\eta_{\kappa\beta} - (1 - \zeta)\partial_\kappa\partial_\beta + \frac{1}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}\partial^\nu\Box)A^\kappa &= j_\beta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Note que existe uma função de Green que é solução da equação acima, que é descrita da seguinte forma:

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta}(x - x')G^{\beta\gamma}(x - x') = \delta_\kappa^\gamma\delta^{(2)}(x - x') \quad (3.26)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta} \equiv (\Box\eta_{\kappa\beta} - (1 - \zeta)\partial_\kappa\partial_\beta + \frac{1}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}\partial^\nu\Box). \quad (3.27)$$

E, calculando as transformadas inversas de Fourier da equação (3.26):

$$G^{\beta\gamma}(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} G^{\beta\gamma}(p) \quad (3.28)$$

$$\delta_\kappa^\gamma\delta^{(2)}(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \delta_\kappa^\gamma e^{ip(x-x')}, \quad (3.29)$$

obtemos,

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta}(x - x') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} G^{\beta\gamma}(p) = \delta_\kappa^\gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} (-p^2\eta_{\kappa\beta} + (1 - \zeta)p_\kappa p_\beta - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^\nu) \times \\ G^{\beta\gamma}(p) = \delta_\kappa^\gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Devido a igualdade dos integrandos, a equação no espaço dos momentos é dada da seguinte forma:

$$(-p^2\eta_{\kappa\beta} + (1 - \zeta)p_{\kappa}p_{\beta} - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu})G^{\beta\gamma}(p) = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \quad (3.32)$$

Usando agora, o *ansatz* geral:

$$G^{\beta\gamma}(p) = A\eta^{\beta\gamma} + Bp^{\beta}p^{\gamma} + C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} \quad (3.33)$$

e, substituindo-o na equação (3.32), segue-se que:

$$\begin{aligned} & (-p^2\eta_{\kappa\beta} + (1 - \zeta)p_{\kappa}p_{\beta} - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu})(A\eta^{\beta\gamma} + Bp^{\beta}p^{\gamma} + C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha}) = \delta_{\kappa}^{\gamma} \\ & -p^2\eta_{\kappa\beta}A\eta^{\beta\gamma} - p^2\eta_{\kappa\beta}Bp^{\beta}p^{\gamma} - p^2\eta_{\kappa\beta}C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} + (1 - \zeta)p_{\kappa}p_{\beta}A\eta^{\beta\gamma} + \\ & (1 - \zeta)p_{\kappa}p_{\beta}Bp^{\beta}p^{\gamma} + (1 - \zeta)p_{\kappa}p_{\beta}C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu}A\eta^{\beta\gamma} \\ & - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu}Bp^{\beta}p^{\gamma} - \frac{ip^2}{m}\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu}C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Note que o último termo do lado esquerdo da equação (3.34) é modificado através da identidade

$$\epsilon_{\kappa\beta\nu}\epsilon^{\beta\gamma\alpha} = \delta_{\nu}^{\gamma}\delta_{\kappa}^{\alpha} - \delta_{\kappa}^{\gamma}\delta_{\nu}^{\alpha}. \quad (3.35)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & -p^2A\delta_{\kappa}^{\gamma} + \frac{ip^4}{m}C\delta_{\kappa}^{\gamma} - p^2Bp_{\kappa}p^{\gamma} + (1 - \zeta)Ap_{\kappa}p^{\gamma} + (1 - \zeta)p^2Bp_{\kappa}p^{\gamma} - \frac{ip^2}{m}Cp_{\kappa}p^{\gamma} - \\ & \frac{ip^2}{m}A\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu}\eta^{\beta\gamma} - p^2C\eta_{\kappa\beta}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} + (1 - \zeta)Cp_{\kappa}p_{\beta}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} - \frac{ip^2}{m}B\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^{\nu}p^{\beta}p^{\gamma} = \delta_{\kappa}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Através da organização dos termos da expressão acima, em um sistema de 3 equações de acordo com a forma do tensor:

$$\begin{cases} \left(-Ap^2 + \frac{ip^4}{m}C\right)\delta_{\kappa}^{\gamma} = \delta_{\kappa}^{\gamma} \\ \left[-p^2B + (1 - \zeta)A + (1 - \zeta)p^2B - \frac{ip^2}{m}C\right]p_{\kappa}p^{\gamma} = 0 \\ -\left(\frac{ip^2}{m}A + p^2C\right)\eta_{\kappa\beta}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

conseguimos a seguinte solução:

$$A = -\frac{1}{\left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)} \quad (3.38)$$

$$B = -\frac{1}{\zeta p^4} + \frac{1}{p^2\left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)} \quad (3.39)$$

$$C = \frac{i}{m\left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)}. \quad (3.40)$$

Logo, substituindo os coeficientes A, B e C no *ansatz* geral (3.33), encontramos o seguinte propagador:

$$G^{\beta\gamma}(p) = -\frac{\eta^{\beta\gamma}}{\left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)} - \frac{p^\beta p^\gamma}{\zeta p^4} + \frac{p^\beta p^\gamma}{p^2 \left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)} + \frac{i\epsilon^{\beta\gamma\alpha} p_\alpha}{m \left(p^2 - \frac{p^4}{m^2}\right)} \quad (3.41)$$

Usando agora, $m \rightarrow -\frac{p^2}{m}$ no “calibre de Feynman massivo”, obtemos $\zeta \rightarrow \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)$. Então, usando o calibre modificado em (3.41), o propagador do fóton usual do modelo é:

$$G^{\beta\gamma}(p) = \frac{\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha}{p^2/m^2(p^2 - m^2)} \quad (3.42)$$

Desta vez, o denominador descreve duas excitações,

$$\frac{1}{p^2/m^2(p^2 - m^2)} = \frac{A}{p^2/m^2} + \frac{B}{p^2 - m^2} \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{p^2/m^2(p^2 - m^2)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (3.44)$$

uma sem massa e outra massiva, com auto-energias $E = \pm |\vec{p}|$ e $E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ [27].

O limite $m \rightarrow \infty$ reproduz o propagador de Maxwell usual $-\eta^{\beta\gamma}/p^2$.

Obtendo o propagador (3.42) no espaço das posições:

$$G^{\beta\gamma}(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} G^{\beta\gamma}(p) \quad (3.45)$$

$$G^{\beta\gamma}(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \left(\frac{\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha}{p^2/m^2(p^2 - m^2)} \right), \quad (3.46)$$

e representado-o em função das excitações (3.44), temos que:

$$\begin{aligned} G^{\beta\gamma}(x - x') &= (\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha) \left(- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \frac{1}{p^2} + \right. \\ &\quad \left. \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \frac{1}{p^2 - m^2} \right) \\ G^{\beta\gamma}(x - x') &= (\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha) (G^m(x - x') - G^{(2+1)}(x - x')). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Note que as soluções de $G^m(x - x')$ e $G^{(2+1)}(x - x')$ foram calculadas no capítulo anterior em (2.49) e (2.93), e o resultado é:

$$G_{\pm}^{(2+1)}(x - x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \quad (3.48)$$

$$G_{\pm}^m(x - x') = -\frac{\Theta(\pm\tau)}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2}). \quad (3.49)$$

3.1.2 O 3-Potencial de Maxwell-Chern-Simons Estendido para uma carga singular pontual

Posto que já calculamos o 3-potencial para a teoria de Maxwell e MCS, utilizamos (2.40):

$$A^\beta(x) = \int d^3x' G^{\beta\gamma}(x-x') j_\gamma(x') \quad (3.50)$$

e podemos substituir os valores para o propagador no espaço das posições (3.47), para obter:

$$A^\beta(x) = \int d^3x' (\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha) (G^m(x-x') - G^{(2+1)}(x-x')) j_\nu(x'). \quad (3.51)$$

e através do uso das soluções (3.48) e (3.49) na equação anterior, chegamos à seguinte solução:

$$A^\beta(x) = \int d^3x' (\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha) \frac{\Theta(\tau)}{2\pi} \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \times (1 - \cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2})) j_\nu(x'). \quad (3.52)$$

Sabendo que a 3-corrente é:

$$j_\gamma(x') = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{z}_\gamma(\tau) \delta^{2+1}(x' - z(\tau)), \quad (3.53)$$

temos,

$$A^\beta(x) = \frac{q}{2\pi} \int d^3x' (\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha) \Theta(\tau) \frac{\Theta(\tau^2 - r^2)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \times (1 - \cos(m\sqrt{\tau^2 - r^2})) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{z}_\gamma(\tau) \delta^{2+1}(x' - z(\tau)). \quad (3.54)$$

E pela aplicação da quantidade $\int d^3x' \delta^{2+1}(x' - z(\tau))$ na equação anterior e sabendo que $(\tau^2 - r^2) = (x - x')$, a integral do 3-potencial, torna-se:

$$A^\beta(x) = \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\dot{z}^\beta + m^{-1}\epsilon^{\beta\gamma\alpha} \ddot{z}_\gamma \dot{z}_\alpha) \Theta((x^0 - z^0(\tau))) \frac{\Theta[(x - z(\tau))^2]}{\sqrt{(x - z(\tau))^2}} \times [1 - \cos(m\sqrt{(x - z(\tau))^2})]. \quad (3.55)$$

Note que, o 3-potencial possui sérias divergências, o que impossibilita uma solução analítica da integral, assim como aconteceu para o modelo de MCS. O termo tipo radiação aparece novamente, o que se deve à excitação massiva do propagador. Por fim, se tendermos $m \rightarrow \infty$, recuperamos a solução do 3-potencial de Maxwell.

Capítulo 4

A Eletrodinâmica Quântica em (2+1) Dimensões e as Induções Radiativas

Neste capítulo, pretendemos investigar a possibilidade de induzir radiativamente o termo de Chern-Simons estendido em altas ordens derivativas. Isso ocorre devido o termo de Chern-Simons usual emergir de forma natural como uma ação efetiva de correções radiativas da QED em (2+1) dimensões. Neste caso, usaremos o método de expansão derivativa de determinantes fermiônicos.

4.1 Simetrias Discretas \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T}

As simetrias discretas em 2+1 dimensões agem de forma diferente. Esta análise é feita através da teoria da $QED_{(2+1)d}$ e o modelo de Chern-Simons. Para fazer o estudo das simetrias do campo fermiônico em 2+1 dimensões, é preciso reduzir as dimensões das matrizes gama de Dirac ¹, e conseqüentemente o espinor ψ possuirá 2 componentes [31]. Logo, a transformação de paridade no plano tem que ser redefinida, uma vez que nossa noção usual em 3 dimensões espaciais é uma reflexão que leva $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$. Portanto, no plano, tal transformação é equivalente a uma rotação em apenas um dos eixos ²(não

¹Para mais informações sobre estas matrizes consultar o Apêndice A.

²Estas transformações de Lorentz tem $\det(\Lambda) = +1$, em vez de $\det(\Lambda) = -1$.

importa qual eixo escolho). Assim, as coordenadas sobre paridade são:

$$(x_0, x_1, x_2) \rightarrow (x_0, -x_1, x_2), \quad (4.1)$$

e conseqüentemente,

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2) \rightarrow (\partial_0, -\partial_1, \partial_2). \quad (4.2)$$

Note que o operador paridade \mathcal{P} é unitário, $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathbf{1}$, tal que, os espinores e as componentes dos campos de calibre se transformam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^{-1} &\rightarrow \bar{\psi}(x_0, -x_1, x_2)\gamma^1 \\ \mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} &\rightarrow \gamma^1\psi(x_0, -x_1, x_2) \\ \mathcal{P}(A_0(x), A_1(x), A_2(x))\mathcal{P}^{-1} &\rightarrow (A_0(x_0, -x_1, x_2), -A_1(x_0, -x_1, x_2), \\ &A_2(x_0, x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Explicitando a transformação na Lagrangiana da QED e CS, e se utilizando das relações de anti-comutação apresentadas anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{L}_\psi\mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P}\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi\mathcal{P}^{-1} \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} + m)\psi \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{L}_{CS}\mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P}\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta\mathcal{P}^{-1} \\ &= -\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

de onde vemos que o termo massivo da QED e o modelo de CS quebram a paridade. Da mesma forma, podemos definir a transformação de inversão temporal \mathcal{T} . A transformação de inversão temporal é um processo discreto, que inverte a coordenada temporal e fixa as coordenadas espaciais,

$$(x_0, x_1, x_2) \rightarrow (-x_0, x_1, x_2), \quad (4.6)$$

e,

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2) \rightarrow (-\partial_0, \partial_1, \partial_2). \quad (4.7)$$

Visto que o operador inversão temporal é anti-unitário, $\{\mathcal{T}, i\} = 0$, ao aplicar a transformação \mathcal{T} , os espinores e campos de calibre ficam como

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} &\rightarrow \bar{\psi}(-x_0, x_1, x_2)\gamma^2 \\
\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} &\rightarrow \gamma^2\psi(x_0, -x_1, x_2) \\
\mathcal{T}(A_0(x), A_1(x), A_2(x))\mathcal{T}^{-1} &\rightarrow (A_0(-x_0, x_1, x_2), -A_1(-x_0, x_1, x_2), - \\
&A_2(-x_0, x_1, x_2)),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\mathcal{L}_\psi\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi\mathcal{T}^{-1} \\
&= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} + m)\psi
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\mathcal{L}_{CS}\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta\mathcal{T}^{-1} \\
&= -\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde as matrizes gamas obedecem a seguinte relação: $\mathcal{T}\gamma^\mu\mathcal{T}^{-1} = \gamma^{\mu*} = (\gamma^0, -\gamma^1, \gamma^2)$. Novamente, os termos massivos em ambas Lagrangianas quebram a paridade individualmente. Por outro lado, levando em conta a simetria \mathcal{PT} , ambas são conservadas.

A conjugação de carga \mathcal{C} é uma transformação discreta que não atua nas coordenadas espaço-temporais. Sendo o operador \mathcal{C} que atua na transformação, podemos escrever os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} &\rightarrow i\bar{\psi}(x)\gamma^2 \\
\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} &\rightarrow i\gamma^2\psi(x) \\
\mathcal{C}(A_0(x), A_1(x), A_2(x))\mathcal{C}^{-1} &\rightarrow (-A_0(x), -A_1(x), -A_2(x)) \\
\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} &\rightarrow -\gamma^{\mu T} \rightarrow (\gamma^0, \gamma^1, -\gamma^2) \\
\mathcal{C}q\mathcal{C}^{-1} &\rightarrow -q.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\mathcal{L}_\psi\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi\mathcal{C}^{-1} \\
&= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi
\end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{L}_{CS}\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta\mathcal{C}^{-1} \\ &= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\partial_\alpha A_\beta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Claramente vemos que, ambas as Lagrangianas, \mathcal{L}_ψ e \mathcal{L}_{CS} , são invariantes por conjugação de carga. Logo, serão invariantes por simetria CPT. Podemos concluir então que, o termo de massa do campo fermiônico e o modelo de CS estão relacionados entre si. Uma consequência disso é a indução do termo de CS via correções radiativas a partir da teoria fermiônica massiva.

4.2 A Indução da Ação Efetiva de Chern-Simons

A Eletrodinâmica Quântica é uma teoria de interação entre o campo eletromagnético (mediado pelo fóton) e um campo fermiônico massivo (partículas de spin semi-inteiro). Neste capítulo mostraremos que é possível obter um termo de Chern-Simons via correção radiativa de um campo fermiônico minimamente acoplado a um 3-potencial. A Lagrangiana de interação é dada por:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi. \quad (4.14)$$

Utilizando agora, a ação efetiva, já definida para um laço [38]:

$$\begin{aligned} e^{iS_{ef}(A)} &= \rho \int D\bar{\psi}D\psi e^{iS} \\ e^{iS_{ef}(A)} &= \rho \int D\bar{\psi}D\psi e^{i\int d^3x\bar{\psi}(i\cancel{\partial}-q\cancel{A}-m)\psi}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde ρ é uma constante de normalização. Temos que,

$$\int D\bar{\psi} = \prod_{i=1}^n d\bar{\psi}_i, \quad \int D\psi = \prod_{i=1}^n d\psi_i \quad \text{e} \quad i \int d^3x = - \sum_{i=1}^n, \quad (4.16)$$

onde $c_{ii} = i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m$ representa os elementos de uma matriz C diagonalizada. neste caso, podemos utilizar as propriedades de variáveis de Grassmann³ na integral (4.15), de

³Para mais informações consultar Apêndice B.

modo que,

$$\begin{aligned}
e^{iS_{ef}(A)} &= \rho \prod_{i=1}^n \int d\bar{\psi}_i \int d\psi_i e^{-\sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i c_{ii} \psi_i} \\
&= \rho \prod_{i=1}^n \int d\bar{\psi}_i \int d\psi_i (1 - \bar{\psi}_i c_{ii} \psi_i) \\
&= \rho \underbrace{\prod_{i=1}^n \int d\bar{\psi}_i \int d\psi_i}_{=0} + \rho \prod_{i=1}^n c_{ii} \underbrace{\int d\bar{\psi}_i \int d\psi_i \bar{\psi}_i \psi_i}_{=1} \\
&= \rho \prod_{i=1}^n c_{ii} = \rho \det C.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

E mostrar que a integração no campo fermiônico é:

$$e^{iS_{ef}(A)} = \rho \det(i\rlap{/}\partial - q\rlap{/}A - m). \tag{4.18}$$

Aplicando agora a função Logarítmica em ambos os lados da equação anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\ln(e^{iS_{ef}(A)}) &= \ln(\rho \det(i\rlap{/}\partial - q\rlap{/}A - m)) \\
iS_{ef}(A) \underbrace{\ln(e)}_{=1} &= \underbrace{\ln(\rho)}_{constante} + \ln(\det(\underbrace{i\rlap{/}\partial}_{\rlap{/}p} - q\rlap{/}A - m)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Desprezando o termo constante e usando o fato de que $\ln \det Q = \text{Tr} \ln(Q)$ ⁴, temos:

$$S_{ef}(A) = -i \text{Tr} \ln(\rlap{/}p - q\rlap{/}A - m), \tag{4.20}$$

onde o símbolo Tr é o traço sobre as matrizes de Dirac. Utilizando o produto do logaritmo, a solução fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{ef}(A) &= -i \text{Tr} \ln[(\rlap{/}p - m)(1 - \frac{q\rlap{/}A}{(\rlap{/}p - m)})] \\
&= -i \text{Tr} \ln(\rlap{/}p - m) - i \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{q\rlap{/}A}{(\rlap{/}p - m)} \right) \\
&= -i \text{Tr} \ln(\rlap{/}p - m) - i \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{q\rlap{/}A}{(\rlap{/}p - m)} \right) \\
&= \underbrace{-i \text{Tr} \ln(\rlap{/}p - m)}_{\equiv S_{ef}^0(A)} + i \text{Tr} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (-iqS_{f(p)}\rlap{/}A)^n}_{\equiv S_{ef}^n(A)}, \\
&= S_{ef}^0(A) + S_{ef}^n(A)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

⁴Para mais informações sobre esta propriedade consultar Apêndice C.

onde,

$$S_f(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)}, \quad (4.22)$$

é o propagador fermiônico associado a teoria.

Uma vez que o termo $S_{ef}^0(A)$ é independente do campo de calibre, e sabendo que o termo de CS é uma forma bilinear ⁵ em A_μ , vamos restringir nossa atenção para esse termo quadrático de A_μ na ação efetiva. O termo da expansão que vai contribuir para a indução do termo é:

$$S_{ef}^{n=2}(A) = \frac{-iq^2}{2} \text{Tr}(S_f(p) \not{A} S_f(p) \not{A}). \quad (4.23)$$

Então, para mover $S_f(p)$ em (4.23) para a esquerda devemos usar a relação chave do método de expansão derivativa [39]:

$$A(x)S_f(p) = (S_f(p - i\not{\partial})A(x)) \quad (4.24)$$

de modo que,

$$S_{ef}^{n=2}(A) = \frac{-iq^2}{2} \text{Tr}(S_f(p) \gamma^\alpha (S_f(p - i\not{\partial}) A_\alpha) \not{A}) \quad (4.25)$$

onde,

$$S_f(p - i\not{\partial}) = \frac{i}{(\not{p} - i\not{\partial} - m)}. \quad (4.26)$$

Agora, expandindo o termo $S_f(p - i\not{\partial})$ em ordens derivativas [40], [41], temos:

$$\begin{aligned} S_f(p - i\not{\partial}) &= \frac{i}{(\not{p} - m)} - \frac{1}{(\not{p} - m)} \not{\partial} \frac{1}{(\not{p} - m)} + \\ &\quad \frac{1}{(\not{p} - m)} \not{\partial} \frac{1}{(\not{p} - m)} \not{\partial} \frac{1}{(\not{p} - m)} \not{\partial} \frac{1}{(\not{p} - m)} + \mathcal{O}(\not{\partial}^{n \geq 4}) \\ S_f(p - i\not{\partial}) &= S_f(p) + S_f(p) \not{\partial} S(p) + S_f(p) \not{\partial} S_f(p) \not{\partial} S(p) + \\ &\quad S_f(p) \not{\partial} S_f(p) \not{\partial} S_f(p) \not{\partial} S(p) + \mathcal{O}(\not{\partial}^{n \geq 4}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aqui, vamos considerar apenas o termo de primeira ordem na ação efetiva do termo de CS usual, de modo que:

$$S_{ef}^{n=2}(A) = \frac{-iq^2}{2} \text{Tr} (S_f(p) \gamma^\alpha (S_f(p) \not{\partial} S(p) A_\alpha) \not{A}). \quad (4.28)$$

⁵Uma forma bilinear é o produto interno de dois tensores que podem ser representados por uma combinação linear.

Considerando X um operador que depende das matrizes de Dirac, seu traço total é definido da forma usual [42]:

$$\text{Tr}X = \text{tr} \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle, \quad (4.29)$$

onde tr indica o traço sobre as matrizes de Dirac. Assim, as relações de fechamento ou completeza nos espaços da posição e momento são dadas por

$$\int d^3x |x\rangle \langle x|, \quad (4.30)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |p\rangle \langle p|. \quad (4.31)$$

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}X &= \text{tr} \sum_{a'} \int d^3x \langle a' | X | x \rangle \langle x | a' \rangle \\ &= \text{tr} \sum_{a'} \int d^3x \langle a' | X | x \rangle \delta_{xa'} \\ &= \text{tr} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle x | p \rangle \langle p | X | x \rangle \\ &= \text{tr} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} X \langle x | p \rangle \langle p | x \rangle \\ &= \text{tr} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} X, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $\langle x | p \rangle = e^{ipx}$ e $\langle p | x \rangle = e^{-ipx}$. Assim, a partir de (4.32), a ação efetiva torna-se:

$$\begin{aligned} S_{ef}^{n=2}(A) &= \frac{-iq^2}{2} \text{tr} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (S_f(p)\gamma^\alpha S_f(p)\not{\partial}S_f(p)A_\alpha A) \\ &= \frac{-iq^2}{2} \int d^3x \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \underbrace{(S_f(p)\gamma^\alpha S_f(p)\gamma^\mu S_f(p)\gamma^\beta)}_{I^{\alpha\mu\beta}} (\partial_\mu A_\alpha) A_\beta \\ &= \frac{-iq^2}{2} \int d^3x I^{\alpha\mu\beta} (\partial_\mu A_\alpha) A_\beta. \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.2.1 Cálculo do tensor de auto-energia

O tensor de auto-energia $I^{\alpha\mu\beta}$ é escrito como

$$I^{\alpha\mu\beta} = \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (S_f(p)\gamma^\alpha S_f(p)\gamma^\mu S_f(p)\gamma^\beta), \quad (4.34)$$

no qual,

$$S_f(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)(\not{p} + m)} = \frac{i(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)}. \quad (4.35)$$

Agora, substituimos $S_f(p)$ na integral do momento (4.34), obtemos:

$$I^{\alpha\mu\beta} = -i\text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta}{(p^2 - m^2)^3}. \quad (4.36)$$

Manipulando o numerador da integral, temos:

$$\begin{aligned} A &= (\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta = (\not{p}\gamma^\alpha\not{p} + m\not{p}\gamma^\alpha + m\gamma^\alpha\not{p} + \\ &\quad m^2\gamma^\alpha)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta \\ &= [(\{\not{p}, \gamma^\alpha\} - \gamma^\alpha\not{p})\not{p} + \\ &\quad m\{\not{p}, \gamma^\alpha\} + m^2\gamma^\alpha]\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Utilizando a propriedade de álgebra de Clifford: $\{\not{p}, \gamma^\alpha\} = 2p^\alpha$, o numerador toma a forma:

$$\begin{aligned} A &= [2p^\alpha\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta - \gamma^\alpha(p^2 - m^2)]\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\beta \\ &= \underbrace{2p^\alpha\not{p}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\beta}_{=0} + 2mp^\alpha\not{p}\gamma^\mu\gamma^\beta + 2mp^\alpha\gamma^\mu\not{p}\gamma^\beta + \underbrace{2m^2p^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta}_{=0} - \\ &\quad \underbrace{\gamma^\alpha(p^2 - m^2)\gamma^\mu\not{p}\gamma^\beta}_{=0} - m(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta \\ &= 2mp^\alpha\{\not{p}, \gamma^\mu\}\gamma^\beta - m(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta \\ &= 4mp^\alpha p^\mu\gamma^\beta - m(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Os termos de potência ímpar do momento são zero, uma vez que a integral definida de uma função ímpar em um intervalo simétrico é nula. Além disso, os termos que sobrevivem no numerador A, contribuem para o aparecimento do tensor Levi-Civita, oriundo da propriedade $\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta) = 2i\epsilon^{\alpha\mu\beta}$ em 2+1 dimensões, que é um fator crucial para a indução do termo de CS.

Neste ponto, devemos substituir (4.38) em (4.36), e encontramos,

$$I^{\alpha\mu\beta} = -i\text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4mp^\alpha p^\mu\gamma^\beta - m(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta}{(p^2 - m^2)^3}. \quad (4.39)$$

Através do uso das seguinte identidade do traço das matrizes gamas: $\text{tr}(\gamma^\beta) = 0$ e $\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta) = 2i\epsilon^{\alpha\mu\beta}$, a integral anterior se reduz a

$$I^{\alpha\mu\beta} = -2m\epsilon^{\alpha\mu\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}. \quad (4.40)$$

Essa integral faz parte do grupo integrais de Feynman regularizadoras da dimensão no espaço de Minkowski, a qual podemos calcular da seguinte forma:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - 3/2)}{(4\pi)^{3/2} \Gamma(n)} \frac{1}{(m^2)^{n-3/2}} \quad (4.41)$$

$$\xrightarrow{n=2} \frac{i}{8\pi} \frac{1}{m}. \quad (4.42)$$

Então,

$$I^{\alpha\mu\beta} = -2m\epsilon^{\alpha\mu\beta} \frac{i}{8\pi} \frac{1}{|m|}. \quad (4.43)$$

Portanto, utilizando o resultado anterior, a ação de Chern-Simons induzida (4.33) torna-se:

$$S_{CS} = \frac{q^2}{8\pi} \frac{m}{|m|} \int d^3 x \epsilon^{\alpha\mu\beta} A_\alpha \partial_\mu A_\beta. \quad (4.44)$$

Esse resultado é o termo de Chern-Simons comutativo e bilinear no campo de calibre, o qual indica a interação de férmions com um campo de calibre. Esse termo possui ainda quebra de paridade (\mathcal{P}) e inversão temporal (\mathcal{T}), assim como o termo de massa da QED. Podemos concluir daí a relação do termo de CS e a QED massiva, o de que se encontram no mesmo grupo de simetrias discretas.

4.3 Indução da Ação Efetiva de Chern-Simons em Altas Ordens Derivativas

Nesta seção iremos induzir o termo de Chern-Simons do mesmo campo fermiônico massivo abordado anteriormente na equação (4.14), só que agora em altas ordens derivativas. Podemos começar a partir da ação efetiva bilinear no campo calibre, deduzida na seção anterior:

$$S_{ef}^{n=2}(A) = \frac{-iq^2}{2} \text{Tr} (S_f(p) \gamma^\alpha (S_f(p - i\cancel{\partial}) A_\alpha) \cancel{A}), \quad (4.45)$$

e considerar a expansão

$$\begin{aligned} S_f(p - i\cancel{\partial}) &= S_f(p) + S_f(p) \cancel{\partial} S(p) + S_f(p) \cancel{\partial} S_f(p) \cancel{\partial} S(p) + \\ &S_f(p) \cancel{\partial} S_f(p) \cancel{\partial} S_f(p) \cancel{\partial} S(p) + \mathcal{O}(\cancel{\partial}^{n \geq 4}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

As potências derivativas do termo de CS precisam ser ímpares (se a paridade é violada, o tensor de levi-civita surge) e das extensões de ordem mais baixa, o termo mais útil é $S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S(p)$ devido à comparações com a gravitação topológica massiva em terceira ordem derivativa. Assim, temos:

$$S_{ef}^{n=2}(A) = \frac{-iq^2}{2} \text{Tr} (S_f(p)\gamma^\alpha(S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S(p))A). \quad (4.47)$$

Utilizando a propriedade de traço

$$\text{Tr}X = \text{tr} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} X, \quad (4.48)$$

a ação efetiva fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_{ef}^{n=2}(A) &= \frac{-iq^2}{2} \int d^3x \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} S_f(p)\gamma^\alpha(S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S_f(p)\not{\partial}S(p))A \\ &= \frac{-iq^2}{2} \int d^3x \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \underbrace{(S_f(p)\gamma^\alpha S_f(p)\gamma^\mu S_f(p)\gamma^\nu S_f(p)\gamma^\lambda S_f(p)\gamma^\beta)}_{I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta}} (\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \\ &= \frac{-iq^2}{2} \int d^3x I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta} (\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda A_\alpha) A_\beta. \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.3.1 Cálculo do tensor de auto-energia

Partindo da integral definida

$$I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta} = \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (S_f(p)\gamma^\alpha S_f(p)\gamma^\mu S_f(p)\gamma^\nu S_f(p)\gamma^\lambda S_f(p)\gamma^\beta), \quad (4.50)$$

e usando o propagador de férmions associado a teoria,

$$S_f(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)}, \quad (4.51)$$

a integral do momento fica da seguinte forma

$$I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta} = i \text{tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta}{(p^2 - m^2)^5}. \quad (4.52)$$

Definindo agora os termos A, B e C como:

$$A \equiv (\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu, \quad (4.53)$$

$$B \equiv (\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda, \quad (4.54)$$

$$C \equiv (\not{p} + m)\gamma^\beta, \quad (4.55)$$

tal que:

$$\begin{aligned}
A &= (\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu \\
&= \not{p}\gamma^\alpha\not{p}\gamma^\mu + m\not{p}\gamma^\alpha\gamma^\mu + m\gamma^\alpha\not{p}\gamma^\mu + m^2\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= (\{\not{p}, \gamma^\alpha\} - \gamma^\alpha\not{p})\not{p}\gamma^\mu + m\{\not{p}, \gamma^\alpha\}\gamma^\mu + m^2\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= (2p^\alpha - \gamma^\alpha\not{p})\not{p}\gamma^\mu + 2mp^\alpha\gamma^\mu + m^2\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= 2p^\alpha\not{p}\gamma^\mu - \gamma^\alpha\not{p}\not{p}\gamma^\mu + 2mp^\alpha\gamma^\mu + m^2\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= 2p^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu - (p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

E,

$$\begin{aligned}
B &= (\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda \\
&= 2p^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda - (p^2 - m^2)\gamma^\nu\gamma^\lambda.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Obtemos que $A \cdot B \cdot C$ será:

$$\begin{aligned}
A \cdot B \cdot C &= [2p^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\mu - (p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu] \cdot \\
&\quad [2p^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta - (p^2 - m^2)\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta] \\
&= 4p^\alpha p^\nu(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta + \\
&\quad 2p^\alpha(p^2 - m^2)(\not{p} + m)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta - \\
&\quad 2p^\nu(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta + \\
&\quad (p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Como vemos, o termo $A \cdot B \cdot C$ está subdividido em 4 termos algébricos, os quais podemos definir como:

$$A \cdot B \cdot C = a + b + c + d, \tag{4.59}$$

sendo,

$$a \equiv 4p^\alpha p^\nu(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta \tag{4.60}$$

$$b \equiv 2p^\alpha(p^2 - m^2)(\not{p} + m)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta \tag{4.61}$$

$$c \equiv 2p^\nu(p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta \tag{4.62}$$

$$d \equiv (p^2 - m^2)\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta. \tag{4.63}$$

Podemos ainda simplificar a , tal que:

$$\begin{aligned}
a &= 4p^\alpha p^\nu \underbrace{(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta}_{=} \\
&= 4p^\alpha p^\nu [2p^\nu(\not{p} + m)\gamma^\lambda - (p^2 - m^2)\gamma^\nu\gamma^\lambda](\not{p} + m)\gamma^\lambda \\
&= 8p^\alpha p^\nu p^\mu \underbrace{(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta}_{=} - 4p^\alpha p^\nu (p^2 - m^2)\gamma^\nu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta \\
&= 16p^\alpha p^\nu p^\mu p^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta - 8p^\alpha p^\nu p^\mu (p^2 - m^2)\gamma^\lambda\gamma^\beta - \\
&\quad 4p^\alpha p^\nu (p^2 - m^2)\gamma^\mu\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Levando em conta o $\text{tr}(\gamma^\beta = 0)$ e eliminando os termos ímpares em p , temos:

$$a = -4m(p^2 - m^2)p^\alpha p^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\beta. \tag{4.65}$$

Para b , obtemos:

$$\begin{aligned}
b &= 2p^\alpha (p^2 - m^2)(\not{p} + m)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda (\not{p} + m)\gamma^\beta \\
&= \underbrace{2p^2 p^\alpha \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\beta}_{=0} + 2mp^2 p^\alpha \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta + \\
&\quad 2mp^2 p^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\beta + \underbrace{2m^2 p^2 p^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta}_{=0} - \\
&\quad \underbrace{2m^2 p^\alpha \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\beta}_{=0} - 2m^3 p^\alpha \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta - \\
&\quad 2m^3 p^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\beta - \underbrace{2m^4 p^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta}_{=0} \\
&= 2m(p^2 - m^2)p^\alpha \underbrace{(\not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\beta)}_{2p^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta} \\
&= 4m(p^2 - m^2)p^\alpha p^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

onde os termos ímpares em p são nulos. Usando o fato de que funções ímpares em intervalos simétricos são nulas e usando as propriedades algébricas das matrizes gama, obtemos:

$$\begin{aligned}
c &= 2p^\nu (p^2 - m^2)\gamma^\alpha \gamma^\mu \underbrace{(\not{p} + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta}_{=} \\
&= -2p^\nu (p^2 - m^2)\gamma^\alpha \gamma^\mu (2p^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\beta - (p^2 - m^2)\gamma^\lambda\gamma^\beta) \\
&= -4m(p^2 - m^2)p^\nu p^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

e,

$$\begin{aligned}
d &= (p^2 - m^2)\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda (\not{p} + m)\gamma^\beta \\
&= m(p^2 - m^2)^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Então, substituindo (4.65),(4.66),(4.67) e (4.68) em (4.59), temos:

$$\begin{aligned}
A \cdot B \cdot C &= -4m(p^2 - m^2)p^\alpha p^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\beta + 4m(p^2 - m^2)p^\alpha p^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta - \\
&\quad 4m(p^2 - m^2)p^\nu p^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta + m(p^2 - m^2)^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta \\
&= -4m(p^2 - m^2)p^\mu p^\nu \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta + m(p^2 - m^2)^2 \eta^{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\alpha \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos são iguais, e por isso se anulam.

Neste ponto, devemos usar a propriedade $\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\alpha) = 2i\epsilon^{\nu\lambda\mu}$ e $\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta) = 2i\epsilon^{\alpha\lambda\beta}$, e fazendo a mudança de índices mudos $\alpha \leftrightarrow \nu$ e $\beta \leftrightarrow \lambda$, chegamos ao seguinte resultado:

$$A \cdot B \cdot C = -8im(p^2 - m^2)p^\mu p^\nu \epsilon^{\alpha\lambda\beta} + 2im(p^2 - m^2)^2 \eta^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \quad (4.70)$$

Inserindo (4.70) na integral de momento (4.52), obtemos:

$$I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta} = -2m\epsilon^{\alpha\lambda\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(p^2 - m^2)\eta^{\mu\nu} - 4p^{\mu\nu}}{(p^2 - m^2)^4}. \quad (4.71)$$

Essa integral é resolvida novamente pelas integrais de regularização dimensional de Feynman no espaço de Minkowski em 2+1 dimensões:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^n i \Gamma(n - 3/2)}{(4\pi)^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(m^2)^{n-3/2}} \\
&\xrightarrow{n=3} \frac{-i}{8\pi} \frac{1}{4m^2 |m|} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i \eta^{\mu\nu} \Gamma(n - 5/2)}{(4\pi)^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(m^2)^{n-5/2}} \\
&\xrightarrow{n=4} \frac{-i}{8\pi} \frac{\eta^{\mu\nu}}{24m^2 |m|}. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (4.71):

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\mu\nu\lambda\beta} &= -2m\epsilon^{\alpha\lambda\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{-i}{8\pi} \frac{1}{4m^2 |m|} + \frac{i}{8\pi} \frac{\eta^{\mu\nu}}{24m^2 |m|} \right] \\
&= \frac{i}{8\pi} \frac{1}{6m |m|} \eta^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\beta}. \quad (4.74)
\end{aligned}$$

Portanto, usando a ação efetiva (4.49), o termo induzido de CSE é:

$$\begin{aligned}
S_{CSE}^{(2+1)d} &= (2m)^{-1} \frac{q^2}{48\pi |m|} \int d^3x \eta^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\beta} (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \\
&= (2m)^{-1} \frac{q^2}{48\pi |m|} \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} (\square \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \\
&= (2m)^{-1} \kappa \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} A_\alpha \partial_\lambda \square A_\beta, \quad (4.75)
\end{aligned}$$

onde

$$\kappa \equiv \frac{q^2}{48\pi |m|}, \quad (4.76)$$

é uma constante numérica adimensional independente do método de regularização utilizado e m é a massa do modelo. Note que, se usarmos uma integração por partes na expressão acima, encontramos:

$$\begin{aligned} S_{CSE}^{(2+1)d} &= -(2m)^{-1}\kappa \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \partial_\mu A_\alpha \partial^\mu \partial_\lambda A_\beta \\ S_{CSE}^{(2+1)d} &= -(2m)^{-1}\kappa \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \tilde{A}_\alpha \partial_\lambda \tilde{A}_\beta, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.78)$$

depende localmente do tensor eletromagnético e não do potencial, e desse modo não é largamente invariante de calibre.

Portanto, concluímos que a adição de duas ordens derivativas induz o termo de Chern-Simons em um espaço tridimensional. Isso se deve ao fato de que o termo só é induzido em paridade e inversão temporal ímpar, pois desta forma obedecem ao grupo de simetria discreta do termo massivo da $QED_{(2+1)d}$ [31]. É importante salientar que, a indução do termo de Chern-Simons obedece o teorema de Coleman-Hill [43], que diz que somente a correção radiativa de um laço é capaz de induzir termos de massa topológica em (2+1) dimensões, caso contrário não obedece o teorema. As violações de paridade deste modelo têm consequências diretas em modelos de matéria condensada, tais como: interação de vórtices e partículas em supercondutores, anomalias em cristais, efeito Hall Quântico Fracionário, supercondutividade em altas temperaturas. Além disso, o termo de Chern-Simons acoplado ao campo de Maxwell gera massa para os campos de calibre, sendo essa uma característica similar ao campo de Higgs, só que para sistemas de matéria condensada [44].

Capítulo 5

Os Efeitos da Temperatura Finita sobre a Ação efetiva de Chern-Simons em Altas Ordens Derivativas

Neste capítulo iremos investigar quais os efeitos da temperatura finita sobre o processo de indução radiativa da ação efetiva de Chern-Simons em altas ordens derivativas. Neste sentido, admitiremos que o sistema está em contato com um reservatório térmico. Ao fim desse processo, usamos a ação efetiva resultante para construir uma nova teoria térmica que abra a possibilidade de analisar as excitações dos campos de calibre neste regime.

5.1 A Ação Efetiva Induzida em Temperatura Finita

Para induzir o termo de CSET, devemos usar o formalismo imaginário. Neste formalismo, nós mudamos do espaço de Minkowski para o Euclidiano através da rotação de Wick¹: $x_\mu \rightarrow ix_\mu$, $p_\mu \rightarrow ip_\mu$, $\int d^3x \rightarrow i \int d^3x$ e $\int d^3p \rightarrow i \int d^3p$. Através desta

¹É uma rotação por um ângulo de $\pi/2$ na coordenada temporal da métrica de Minkowski [28].

transformação, a ação Euclidiana² é:

$$S_{ef}^{Euc}(A) = imq^2 \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2) \delta^{\mu\nu} - 4p^\mu p^\nu}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^4}. \quad (5.1)$$

Aqui, vamos assumir que o sistema está em equilíbrio térmico, com $T = 1/\beta$. Neste caso, podemos utilizar o formalismo de Matsubara³ para férmions, o qual consiste em tender $p_0 \rightarrow \omega_n = (n+1/2)2/\pi$ e substituir a integração da componente temporal do momento por uma soma discreta $(1/2\pi) \int dp_0 \rightarrow 1/\beta \sum_n$ [46]. Além disso, implementamos a translação das coordenadas do momento $p^\mu \rightarrow \vec{p}^\mu + p_0 \delta^{0\mu}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu &= (\vec{p}^\mu + p_0 \delta_{0\mu})(\vec{p}^\nu + p_0 \delta^{0\nu}) \\ &= \vec{p}^\mu \vec{p}^\nu + p_0^2 \delta^{0\mu} \delta^{0\nu} + \underbrace{\vec{p}^\nu p_0 \delta^{0\mu} + \vec{p}^\mu p_0 \delta^{0\nu}}_{=0}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde os termos \vec{p}^μ e \vec{p}^ν são potências ímpares na integração, e por isso são nulos.

Considerando agora, a covariância sobre as rotações espaciais

$$\vec{p}^\mu \vec{p}^\nu \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{2} (\delta^{\mu\nu} - \delta^{0\mu} \delta^{0\nu}). \quad (5.3)$$

Substituindo esse resultado na equação (5.2), concluímos que:

$$p^\mu p^\nu = \frac{\vec{p}^2}{2} (\delta^{\mu\nu} - \delta^{0\mu} \delta^{0\nu}) + p_0^2 \delta^{0\mu} \delta^{0\nu}. \quad (5.4)$$

Note que ao aplicarmos todas as informações anteriores na ação efetiva Euclidiana (5.1), os efeitos térmicos do modelo obedecem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} S_{ef}^{Euc}(A) &= imq^2 \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \times \\ &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{p}^2 + M_n^2) \delta^{\mu\nu} - 2\vec{p}^2 (\delta_{\mu\nu} - \delta_{0\mu} \delta_{0\nu}) - 4p_0^2 \delta_{0\mu} \delta_{0\nu}}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^4} \\ &= imq^2 \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \times \\ &\int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{[(\vec{p}^2 + M_n^2) - 2\vec{p}^2] \delta^{\mu\nu} + (2\vec{p}^2 - 4p_0^2) \delta_{0\mu} \delta_{0\nu}}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^4} \\ &= \frac{imq^2}{\beta} \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \left\{ (\partial^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^3} - \frac{2\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^4} \right] + \right. \\ &\left. 4(\partial_0^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\frac{\vec{p}^2/2 - M_n^2 + m^2}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

²A métrica de Minkowski, $\eta^{\mu\nu}$, torna-se a métrica Euclidiana $\delta^{\mu\nu}$ após a rotação de Wick.

³É a discretização da coordenada temporal do momento p_0 . Isso acontece por causa da função de partição que exige que os campos sejam periódicos no tempo, e os valores permitidos são denominados frequências de Matsubara [45].

onde

$$M_n^2 \equiv p_0^2 + m^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{4\pi^2}{\beta^2} + m^2. \quad (5.6)$$

Note que, a ação efetiva Euclidiana possui integrações no espaço dos momentos \vec{p} . Estas podem ser calculadas utilizando as integrais de regularização dimensional em duas dimensões no espaço Euclidiano. Desta forma, temos

$$\int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma(l-1)}{\Gamma(l)(M_n^2)^{l-1}} \quad (5.7)$$

$$\xrightarrow{l=3} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(M_n^2)^2} \quad (5.8)$$

$$\xrightarrow{l=4} \frac{1}{12\pi} \frac{1}{(M_n^2)^3} \quad (5.9)$$

e,

$$\int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + M_n^2)^l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma(l-2)}{\Gamma(l)(M_n^2)^{l-2}} \quad (5.10)$$

$$\xrightarrow{l=4} \frac{1}{24\pi} \frac{1}{(M_n^2)^2}. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.8), (5.9) e (5.11) em (5.5), obtemos que:

$$\begin{aligned} S_{ef}^{Euc}(A) &= \frac{imq^2}{\beta} \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \left\{ (\partial^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{8\pi} \frac{1}{(M_n^2)^2} - \frac{1}{12\pi} \frac{1}{(M_n^2)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. 4(\partial_0^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{48\pi} \frac{1}{(M_n^2)^2} - \frac{1}{12\pi} \frac{M_n^2}{(M_n^2)^3} + \frac{1}{12\pi} \frac{m^2}{(M_n^2)^3} \right] \right\} \\ &= \frac{iq^2}{16\pi^2} \frac{a^3}{m|m|} \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} \left\{ \frac{1}{3} (\partial^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})^2 + a^2\right]^2} - 2(\partial_0^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})^2 + a^2\right]^2} - \frac{4}{3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\left[(n + \frac{1}{2})^2 + a^2\right]^3} \right] \right\}, \quad (5.12) \end{aligned}$$

onde $a = m\beta/2\pi$. De onde obtemos os seguintes resultados para as somas sobre as frequências de Matsubara

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})^2 + a^2\right]^2} = \frac{\pi}{2a^3} [\tanh(\pi a) - \pi \operatorname{asech}^2(\pi a)] \quad (5.13)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\left[(n + \frac{1}{2})^2 + a^2\right]^3} = \frac{\pi}{8a^3} \{3 \tanh(\pi a) - [3 + 2\pi a \tanh(\pi a)] \pi \operatorname{asech}^2(\pi a)\} \quad (5.14)$$

Neste ponto, substituímos (5.13) e (5.14) em (5.12), encontramos a ação de Chern-Simons estendido em temperatura finita:

$$S_{CSET}(A) = \frac{iq^2}{16\pi} \frac{1}{6m |m|} \int d^3x \epsilon^{\alpha\lambda\beta} [(\partial^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta f(a) - (\partial_0^2 \partial_\lambda A_\alpha) A_\beta g(a)], \quad (5.15)$$

na qual as quantidades $f(a)$ e $g(a)$ são funções térmicas escritas respectivamente como:

$$f(a) = \tanh(\pi a) - \pi a \operatorname{sech}^2(\pi a) \quad (5.16)$$

$$g(a) = 4(\pi a)^2 \tanh(\pi a) \operatorname{sech}^2(\pi a), \quad (5.17)$$

Estas representam, nessa ordem, a parte covariante e não covariante da ação térmica de CS. A análise assintótica dessas funções é dada da seguinte forma,

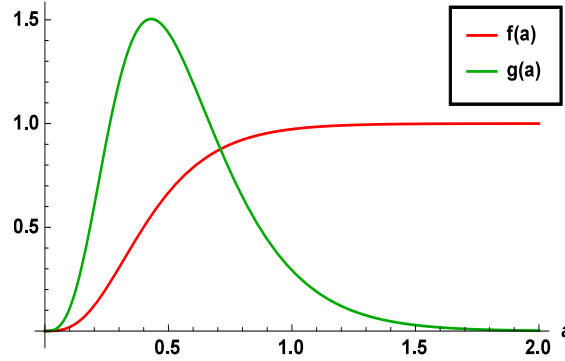


Figura 5.1: O comportamento das funções térmicas $f(a)$ e $g(a)$.

Analisando as curvas e sabendo que $a \propto 1/T$, temos:

$$f(a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad f(a \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad (T \rightarrow 0); \quad (5.18)$$

$$g(a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad g(a \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow 0). \quad (5.19)$$

Claramente vemos que, só possuímos contribuição da parte não-covariante, $g(a)$, em temperatura intermediárias, em temperaturas infinitas e zero a função desaparece. Para a parte covariante, $f(a)$, não temos contribuição à temperaturas infinitas, temos contribuições somente em fases intermediárias e em temperatura zero, onde a ação se comporta de acordo com o resultado obtido na seção anterior.

5.2 Modelo Efetivo Térmico

Nesta seção, faremos o estudo da dinâmica do termo de CSET em conjunto com o campo de Maxwell. Assim, a Lagrangiana deste modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{f(a)}{2m}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu\Box A_\kappa + \frac{g(a)}{2m}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu\partial_0^2A_\kappa - j_\mu A^\mu, \quad (5.20)$$

onde o terceiro termo da Lagrangiana é a parte não-covariante da ação induzida de CSET, que surge devido à efeitos térmicos do campo.

Sabemos também que este modelo é invariante de calibre e por transformações de Lorentz. Logo, através da equação de Euler-Lagrange e da identidade de Bianchi, já vista anteriormente, temos:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{f(a)}{m}\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\nu\Box A_\kappa + \frac{g(a)}{m}\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\nu\partial_0^2A_\kappa = j^\beta, \quad (5.21)$$

onde

$$\epsilon^{\beta\nu\kappa}\partial_\beta F_{\nu\kappa} = 0. \quad (5.22)$$

Além disso, podemos explicitar os tensores e escrever três equações bidimensionais:

$$\partial_l E^l = \rho + \frac{f(a)}{m}\Box B + \frac{g(a)}{m}\partial_0^2 B \quad (5.23)$$

$$\epsilon^{lm}\partial_l B = -j^m - \partial_0 E^m + \frac{f(a)}{m}\epsilon^{lm}\Box E_l + \frac{g(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_0^2 E_l \quad (5.24)$$

$$\epsilon^{lm}\partial_l E_m = -\partial_0 B \quad (5.25)$$

As equações da onda dos campos elétrico e magnético e os potenciais vetor e escalar são obtidos através de (5.21) no calibre de Lorenz e da liberdade de calibre da eletrodinâmica de Maxwell. Assim, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\left(\Box + \frac{f(a)}{m^2}\Box^2 + \frac{g(a)}{m^2}\partial_0^2\right) B = -\frac{f(a)}{m}\Box\rho - \frac{g(a)}{m}\partial_0^2\rho - \epsilon^{lm}\partial_l j_m \quad (5.26)$$

$$\left(\Box + \frac{f(a)}{m^2}\Box^2 + \frac{g(a)}{m^2}\partial_0^2\right) E^m = -\frac{f(a)}{m}\epsilon^{lm}\Box j_l - \frac{g(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_0^2 j_l - \partial^m\rho - \partial_0 j^m \quad (5.27)$$

$$\Box\left(\Box + \frac{f(a)}{m^2}\Box^2 + \frac{g(a)}{m^2}\partial_0^2\right)\Phi = -\frac{f(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_l\Box j_m - \frac{g(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_l\partial_0^2 j_m + \Box\rho \quad (5.28)$$

$$\Box\left(\Box + \frac{f(a)}{m^2}\Box^2 + \frac{g(a)}{m^2}\partial_0^2\right)A^m = \frac{f(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_0\Box j_l + \frac{g(a)}{m}\epsilon^{lm}\partial_l\partial_0^2\rho + \Box j^m. \quad (5.29)$$

Portanto, observamos que a divergência do campo elétrico (5.23) e a circulação do campo magnético (5.24) em temperatura finita, geram uma variação temporal de segunda ordem

no campo elétrico e no campo magnético, que decrescem até zero em $T = 0$. As equações da onda do campo elétrico (5.27) e potencial estático (5.28) possuem novas distribuições de corrente que variam com o tempo, e o campo magnético e 2-potencial vetor possuem novas densidades de cargas atuando como fonte. É fácil ver que, todas essas novas modificações que surgem em temperatura finita do modelo de MCSE são obtidas simplesmente fazendo $\square/m \rightarrow f(a)\square/m + g(a)\partial_0^2/m$.

5.2.1 O propagador térmico

Neste ponto, vamos construir o propagador térmico do modelo de MCSET, a fim de ganhar informações sobre a interação entre os campos de calibre e a implicação do termo de CSET na geração de massa dessa dinâmica. Assim, através de (5.21), encontramos o seguinte operador de Euler:

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta}A^\kappa = j_\beta, \quad (5.30)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta} = \square\eta_{\kappa\beta} - (1 - \zeta)\partial_\kappa\partial_\beta + \frac{f(a)}{m}\epsilon_{\beta\nu\kappa}\partial^\nu\square + \frac{f(a)}{m}\epsilon_{\beta\nu\kappa}\partial^\nu\partial_0^2, \quad (5.31)$$

no qual foi introduzido um gauge de fixação $\frac{\zeta}{2}(\partial_\alpha A^\alpha)^2$ para garantir sua regularidade, ou seja, para fazer o operador inversível. A equação diferencial (5.30), transforma-se da seguinte forma:

$$\mathcal{O}_{\kappa\beta}(x - x')G^{\beta\gamma}(x - x') = \delta_\kappa^\gamma\delta^{(2)}(x - x'). \quad (5.32)$$

Utilizando $\partial_\kappa \rightarrow ip_\kappa$, obtemos a equação anterior no espaço dos momentos:

$$[-p^2\eta_{\kappa\beta} + (1 - \zeta)p_\kappa p_\beta - \frac{i}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))\epsilon_{\kappa\beta\nu}\partial^\nu]G^{\beta\gamma}(p) = \delta_\kappa^\gamma. \quad (5.33)$$

Então, aplicando o ansatz

$$G^{\beta\gamma}(p) = A\eta^{\beta\gamma} + Bp^\beta p^\gamma + C\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha, \quad (5.34)$$

na equação (5.33) e realizando alguns cálculos algébricos, obtemos:

$$\begin{aligned} & -p^2 A\delta_\kappa^\gamma + \frac{ip^2}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))C\delta_\kappa^\gamma - p^2 Bp_\kappa p^\gamma + (1 - \zeta)Ap_\kappa p^\gamma + (1 - \zeta)p^2 Bp_\kappa p^\gamma - \\ & \frac{i}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))Cp_\kappa p^\gamma - \frac{i}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))A\eta_{\kappa\beta}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha - p^2 C\eta_{\kappa\beta}\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha + \\ & (1 - \zeta)Cp_\kappa p_\beta\epsilon^{\beta\gamma\alpha}p_\alpha - \frac{ip^2}{m}B\epsilon_{\kappa\beta\nu}p^\nu p^\beta p^\gamma = \delta_\kappa^\gamma. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Podemos determinar os coeficientes A, B e C através do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(-Ap^2 + \frac{ip^2}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))C \right) \delta_\kappa^\gamma = \delta_\kappa^\gamma \\ \left[-p^2 B + (1 - \zeta)A + (1 - \zeta)p^2 B - \frac{i}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))C \right] p_\kappa p^\gamma = 0 \\ - \left(\frac{i}{m}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))A + p^2 C \right) \eta_{\kappa\beta} \epsilon^{\beta\gamma\alpha} p_\alpha = 0, \end{cases} \quad (5.36)$$

onde o sistema resolvido oferece a seguinte solução:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)} \\ B &= -\frac{1}{\zeta p^4} + \frac{1}{p^2 \left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)} \\ C &= \frac{i(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))}{m \left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Logo, substituindo (5.37) em (5.34), encontramos o seguinte propagador:

$$\begin{aligned} G^{\beta\gamma}(p) = & -\frac{\eta^{\beta\gamma}}{\left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)} - \frac{p^\beta p^\gamma}{\zeta p^4} + \frac{p^\beta p^\gamma}{p^2 \left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)} + \\ & \frac{im^{-1}p^{-2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))\epsilon^{\beta\gamma\alpha} p_\alpha}{\left(p^2 - \frac{1}{m^2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2\right)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

E no seguinte calibre,

$$\zeta \rightarrow \left(1 - \frac{(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))^2}{m} \right), \quad (5.39)$$

os termos centrais do propagador se anulam, e este fica da seguinte forma:

$$G^{\beta\gamma}(p) = \frac{\eta^{\beta\gamma} - im^{-1}p^{-2}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))\epsilon^{\beta\gamma\alpha} p_\alpha}{\left(p^2 - [m^{-1}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))]^2\right)}. \quad (5.40)$$

Note que o denominador na expressão anterior pode ser reescrito como,

$$\frac{1}{\left(p^2 - [m^{-1}(p^2 f(a) + p_0^2 g(a))]^2\right)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 \left[1 - \left(\frac{mp}{p^2 f(a) + p_0^2 g(a)} \right)^2 \right]}, \quad (5.41)$$

de maneira que, analogamente ao modelo MCSE, é possível descrever dois grupos de excitações do campo de calibre. Um grupo, independente da massa:

$$E_\pm = \pm |\vec{p}|, \quad (5.42)$$

e outro grupo, que além de ser massivo, depende explicitamente das funções térmicas:

$$E_\pm = \pm \frac{\sqrt{\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2(h(a))^2}}}{h(a)}, \quad (5.43)$$

onde $h(a) = f(a) + h(a)$ e as quantidades λ_1 e λ_2 são descritas, respetivamente, na forma:

$$\lambda_1 = f(a)h(a)|\vec{p}|^2 + \frac{m^2}{2} \quad (5.44)$$

$$\lambda_2 = |\vec{p}|^2(|\vec{p}|^2 + m^2). \quad (5.45)$$

Note que, no limite em que a temperatura tende a zero ($T \rightarrow 0$), as excitações são restauradas. Por outro lado, quando consideramos o limite $m \rightarrow 0$, as excitações permanecem dependentes das funções térmicas. Este efeito não é observado quando $|\vec{p}| \rightarrow 0$, e assim, podemos concluir que o efeitos térmico e dinâmico estão intimamente correlacionados.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas futuras

No presente trabalho de dissertação, estudamos algumas características da extensão derivativa do modelo de Chern-Simons eletromagnético. Apresentamos um estudo detalhado das propriedades fundamentais desse modelo, quando associado à eletrodinâmica de Maxwell. Contudo, nosso foco principal foi o de investigar a possibilidade de tal termo ser induzido quanticamente ao nível de um laço na QED em $(2+1)$ dimensões do espaço-tempo. Mostramos que tal processo é possível nos regimes de temperatura zero e finita.

No último regime de temperatura finita, encontramos duas contribuições: uma covariante e outra não covariante de comportamentos diferentes. Nestes casos, temos que a parte covariante é restaurada quando a temperatura tende a zero, e a contribuição não covariante tem valores máximos somente em temperaturas intermediárias. Por outro lado, ambas as contribuições tendem a zero quando a temperatura é infinita. O fato é que a covariância do sistema é fortemente quebrada pela contribuição não covariante em alguns regimes intermediários de altas temperaturas. Este efeito representa situações de teorias onde tanto a componente temporal e a espacial do momento possuem comportamentos diferentes entre si, tais como o que acontece na gravidade de Hořava-Lifshitz [47]. Destacamos também, que a ação efetiva oriunda das correções quânticas à temperatura finita, abre a possibilidade de se construir uma teoria de calibre termal a qual vincula as suas respectivas excitações à determinadas funções dependentes da temperatura. Assim, podemos concluir que a excitação de fótons livre é independente de temperatura e a excitação massiva têm forte dependência das funções térmicas $f(a)$ e $g(a)$. Esta investigação também representa um importante resultado do trabalho.

E por fim, relatamos que algumas investigações relacionadas ao presente trabalho, podem ser aplicadas perfeitamente na gravitação, neste caso, via elaboração de um novo modelo de Chern-Simons Gravitacional em altas ordens derivativas. Isto pode ser também direcionado a teorias que violam a simetria de Lorentz via operadores derivativos, tais como o modelo de Myers-Pospelov [48, 49].

Apêndice A

Propriedade das matrizes de Dirac em (2+1)d

As matrizes gama de Dirac em (2 + 1) dimensões são:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde, σ^1, σ^2 e σ^3 são as matrizes de Pauli. As matrizes gama satisfazem a seguinte relação de anti-comutação: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, com $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

A notação tr indica os traços sobre as matrizes de Dirac e I é matriz identidade 2×2 . Desta forma, obedecem as úteis relações de traço:

$$\{\not{p}, \gamma^\nu\} = 2p^\nu\tag{A.2}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\tag{A.3}$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 3I\tag{A.4}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu\tag{A.5}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 2\eta^{\mu\nu} + \gamma^\nu \gamma^\rho\tag{A.6}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\alpha - \gamma^\alpha (2\eta^{\nu\rho} + \gamma^\nu \gamma^\rho)\tag{A.7}$$

$$\text{tr}(I) = 2\tag{A.8}$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = 0 \tag{A.9}$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) = 2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \tag{A.10}$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) = 2(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\rho\nu}\eta^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}) \tag{A.11}$$

Apêndice B

Integração gaussiana em variáveis de Grassmann

Para avaliar integrais de caminhos de Feynman envolvendo férmions, precisamos de um análogo que resolva o operador de Dirac, e por sua vez respeite a estatística de Fermi-Dirac. Variáveis que obedecem essa propriedade são denominadas *variáveis de Grassmann*. O resultado da integração em variáveis de Grassmann são dadas pelo determinante do operador de Dirac. Este apêndice tem como motivação provar esta relação, e esclarecer algumas propriedades dessas variáveis anticomutantes.

Definindo ξ e χ como variáveis de Grassmann e c uma variável complexa, estas obedecem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \{\xi, \chi\} = 0, \quad \{\xi^*, \chi\} = 0, \quad \{\xi^*, \chi^*\} = 0, \quad [\xi, c] = 0, \quad \int d\xi = 0, \quad \int d\xi \xi = 1, \\ \int d\xi \int d\chi (\chi\xi) = 1. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Como primeira aplicação, podemos calcular a integral gaussiana simples:

$$\begin{aligned} \int d\xi^* \int d\xi e^{-\xi^* c \xi} &= \int d\xi^* \int d\xi \left(1 - \xi^* c \xi + \underbrace{\frac{1}{2}(\xi^* c \xi)^2}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{3}(\xi^* c \xi)^3}_{=0} \right) \\ &= \int d\xi^* \int d\xi (1 - \xi^* c \xi) \\ &= \int d\xi^* \int d\xi (1 + c \xi \xi^*) = c, \end{aligned} \tag{B.2}$$

onde a série é finita por que os termos $\xi^2 = 0$.

Vamos realizar uma integração introduzindo um fator $\xi\xi^*$:

$$\int d\xi^* \int d\xi \xi\xi^* e^{-\xi^*c\xi} = \int d\xi^* \int d\xi (\xi\xi^* + \underbrace{c\xi\xi^*\xi\xi^*}_{=0}) = 1. \quad (\text{B.3})$$

Desta feita, precisamos integrar em n-variáveis de Grassmann, sendo $D\xi = \prod_{i=1}^n d\xi_i$, $D\xi^* = \prod_{i=1}^n d\xi_i^*$ e $C_{ii} = \prod_{i=1}^n c_{ii}$ uma matriz diagonalizada, segue então que

$$\int D\xi^* \int D\xi e^{-\xi^*C_{ii}\xi} = \int D\xi^* \int D\xi (1 - \xi^*C_{ii}\xi) \quad (\text{B.4})$$

$$= \underbrace{\int D\xi^* \int D\xi}_{=0} + C_{ii} \underbrace{\int D\xi^* \int D\xi (\xi^*\xi)}_{=1} \quad (\text{B.5})$$

$$= C_{ii} = \prod_{i=1}^n c_{ii} = \det C \quad (\text{B.6})$$

Desta forma, concluímos que o determinante do expoente da função exponencial em variáveis de Grassmann é a solução.

Apêndice C

Prova da igualdade $\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q$

Seja uma matriz diagonal definida

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

e $Q = e^P$, então aplicando função logarítmica em ambos os lados, temos:

$$P = \ln Q \quad (\text{C.2})$$

Assim, Q também é diagonal:

$$Q = \begin{pmatrix} e^{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Finalmente, podemos ver que:

$$\begin{aligned} \ln \det Q &= \ln \prod_i^n q_i \\ &= \ln e^{\sum_i^n p_i} = \sum_i^n p_i \\ &= \text{Tr} \ln Q \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Referências Bibliográficas

- [1] THIRING, W., **Regularization as a consequence of higher order equations.** Phys. Rev. 77, 570, (1950).
- [2] STELLE. K., **Renormalization of higher-derivative quantum gravity.** Phys. Rev. D 16, 953, (1977).
- [3] FRADKIN E.S., TSEYTLIN A.A., **Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity.** Nucl. Phys. B 201, 469, (1982).
- [4] PAIS A., UHLENBECK G.E., **On field theories with nonlocalized action.** Phys. Rev. 79, 145, (1950).
- [5] REYES C.M., **Testing symmetries in effective models of higher derivative field theories.** Phys. Rev. D 80, 105008, (2009).
- [6] PISARSKI R.D., **Field theory of paths with a curvature-dependent term.** Phys. Rev. D 34, 670, (1986).
- [7] PODOLSKY B., **A generalised electrodynamics: part I Non-Quantum.** Phys. Rev. 62, 68, (1942); **A generalised electrodynamics: part II Quantum.** Phys. Rev. 65, 228, (1944).
- [8] ELIEZER D.A., WOODARD R.P., **The problem of nonlocality in string theory.** Nucl. Phys.B 325, 389, (1989).
- [9] MYERS R. C., **Higher-derivative gravity, surface terms, and string theory.** Phys. Rev. D36, 392, (1987).
- [10] HATEFI E., **Higher derivative corrections to Wess-Zumino and tachyonic actions in type II super string theory.** Phys. Rev. D36, 392, (1987); Phys. Rev. D 86, 046003, (2012).

- [11] KATMADAS S., MINASIAN R., **N = 2 higher-derivative couplings from strings**. JHEP. 1402, 093, (2014).
- [12] BERGSHOEFF E.A., HOHM O., **Massive Gravity in Three Dimensions**. Phys. Rev. Lett. 102, 201301, (2009).
- [13] BERGSHOEFF E.A., HOHM O., TOWNSEND P.K.. **More on massive 3D gravity**. Phys. Rev. D 79, 124042, 2009.
- [14] GULLU I., TEKIN B., **Massive higher derivative gravity in D dimensional anti de Sitter spacetimes**. Phys. Rev. D 80, 064033, (2009).
- [15] GULLU I., SISMAN T.C., TEKIN B., **Canonical structure of higher derivative gravity in 3D**. Phys. Rev. D 81, 104017, (2010).
- [16] NEUPANE I.P., **Consistency of higher derivative gravity in the brane background**. JHEP 09, 040, (2000).
- [17] HAWKING S.W, LUTTREL J.C., **Higher derivatives in quantum cosmology**. Nucl. Phys. B 247, 250, (1984).
- [18] MAZITELLI F.D., **Higher derivatives and renormalization in quantum cosmology**. Phys. Rev. D 45, 2814, (1992).
- [19] NOJIRI S., ODINTSOV S.D., **Brane-world cosmology in higher derivative gravity or warped compactification in the next-to-leading order of AdS/CFT correspondence**, JHEP 07, 049, (2000).
- [20] NOJIRI S., ODINTSOV S.D., **Strong coupling limit of N=2 SCFT free energy and higher derivative AdS/CFT correspondence**. Phys. Lett. B 471, 155, (1999).
- [21] FUKUMA M., MATSUURA S., SAKAI T., **Higher-Derivative Gravity and the AdS/CFT Correspondence**. Prog. Theor. Phys. 105, 1017, (2001), [arXiv:hep-th/0103187].
- [22] SIEGEL W., **Unextended Superfields In Extended Supersymmetry**. Nucl. Phys. B 156, 135, (1979).

- [23] SCHONFELD J.F., **A Mass Term For Three-Dimensional Gauge Fields**. Nucl. Phys. B 185, 157, (1981).
- [24] DESER S., JACKIW R., TEMPLETON S., **Three-Dimensional Massive Gauge Theories**. Phys. Rev. Lett. 48, 975, (1982).
- [25] GATES S.J., GRISARU M.T., ROCEK M., SIEGEL W., **Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry**. Front. Phys. 58, 1, (1983), [arXiv:hep-th/0108200].
- [26] DESER S., JACKIW R., TEMPLETON S., **Topologically massive gauge theories**. Annals Phys. 281, 409, (2000).
- [27] DESER S., JACKIW R., **Higher derivative Chern-Simons extensions**. Phys. Rev. B 451, 73, (1999).
- [28] GREINER, W., REINHARDT, J., **Field Quantization**. Springer Science & Business Media, 440 p., (1996).
- [29] JACKSON, J. D., **Classical Electrodynamics**. New York: John Wiley & Sons, Inc., vol. 3, 791 p., (1999).
- [30] MCMAHON, D., **Relativity Demystified**. McGraw-Hill , 344 p., (2006).
- [31] COMTET, A., JOLICOUER, T., OUVRY, S., DAVID, F., **Topological aspects of low dimensional systems**. Springer Berlin Heidelberg, 911 p., (1999).
- [32] ABLOWITZ, M. J., FOKAS, A. S., **Complex Variables**. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 647 p., (2003).
- [33] BOWMAN, F., **Introduction to Bessel functions**. Dover Publications Inc. , 135 p., (1958).
- [34] MOURA-MELO W. A., HELAYËL-NETO J. A., **Remarks on Dirac-like monopoles, Maxwell and Maxwell-Chern-Simons electrodynamics in $D=2+1$ dimensions**. Phys. Rev. D 63, 065013, (2001).
- [35] BOYANOVSKY D., BLANKENBECLER R., YAHALOM R., **Physical origin of topological mass in $2+ 1$ dimensions**. Nuclear Physics B 270, 483-505 p., (1986).

- [36] RAHMANI A., MUNIZ R.A., MARTIN I., **Anyons in Integer Quantum Hall Magnets**. Phys. Rev. X 3, 031008, (2013).
- [37] WATSON G., **A treatise on the theory of Bessel functions**. Cambridge, (1944).
- [38] GOMES M., **Teoria Quântica dos Campos**. EDUSP, São Paulo, 458 p., (2002).
- [39] AITCHISON I.J.R., FRASER C.M., **Derivative expansions of fermion determinants: Anomaly-induced vertices, Goldstone-Wilczek currents, and Skyrme terms**. Phys. Rev. D 31, 2605, (1985).
- [40] MARIZ T., NASCIMENTO J.R., PASSOS E., **Remarks on Lorentz and CPT Violation in Field Theory**. Brazilian Journal of Physics 36, 4A, (2006).
- [41] FRASER C.M., **Calculation of Higher Derivative Terms in the One-Loop Effective Lagrangian**. Z. Phys. C 28, 101, (1985).
- [42] SAKURAI J.J., **Modern Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 491 p., (1994).
- [43] COLEMAN S., HILL B., **No more corrections to the topological mass term in QED3** . Phys. Lett.B 159, 184, (1985).
- [44] REDLICH, A.N., **Gauge Noninvariance and Parity Nonconservation of Three-Dimensional Fermions** . Phys. Rev. Lett. 52, 18, (1984).
- [45] NIETO A., **Evaluating sums over the Matsubara frequencies**. Computer Physics Communications 92, 1, (1995).
- [46] DOLAN L., JACKIW R., **Symmetry behavior at finite temperature**. Phys. Rev. D 9, 3320, (1974).
- [47] HOŘAVA P., **Quantum gravity at a Lifshitz point**. Phys. Rev. D 79, 084008, (2009).
- [48] MYERS, R. C. and POSPELOV, M., **Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory**, Phys. Rev. Lett. 90, 211601 (2003).
- [49] REYES, C. M., **Causality and stability for Lorentz-CPT violating electrodynamics with dimension-5 operators**, Rev. D 82, 125036 (2010)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Novos métodos analíticos em defeitos topológicos

Douglas Alves Ferreira

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Novos métodos analíticos em defeitos topológicos

Douglas Alves Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

NOVOS MÉTODOS ANALÍTICOS EM DEFEITOS TOPOLÓGICOS

DOUGLAS ALVES FERREIRA

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Orientador

Prof. Dr. Laércio Losano
Examinador Externo

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Examinador Interno

*“Em tudo somos atribulados, mas não angustiados;
Perplexos, mas não desanimados; Perseguidos, mas
não desamparados; Abatidos, mas não destruídos.”*

II Coríntios 4:8-9

Agradecimentos

A DEUS, por tudo que ele tem feito na minha vida, me dando saúde, coragem e perseverança para realizar todos os meus objetivos.

Ao Prof. João Rafael pela paciência e competência com a qual conduziu este trabalho.

Aos Professores Laércio Losano e Eduardo Marcos pelos comentários e pelas sugestões feitas a este trabalho.

Aos meus familiares, pela compreensão e pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Aos meus colegas de pós-graduação, aos professores e aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física (UAF) pelos bons momentos que tivemos durante minha permanência na UAF.

A CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Resumo | ix |
| Abstract | x |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Tópicos em Teoria Clássica de Campos | 3 |
| 2.1 Modelos de um campo | 4 |
| 2.1.1 Soluções BPS | 5 |
| 2.1.2 Defeito do tipo <i>kink</i> | 7 |
| 2.1.3 Defeito do tipo <i>lump</i> | 9 |
| 2.1.4 Estabilidade linear | 11 |
| 2.2 Modelos de dois campos | 12 |
| 2.2.1 Soluções BPS | 12 |
| 2.2.2 Modelo BNRT | 13 |
| 2.2.3 Método das órbitas tentativas | 14 |
| 3 Defeitos Deformados | 17 |
| 3.1 Método de deformação | 17 |
| 3.2 Estados BPS do modelo deformado | 18 |
| 3.3 Aplicação do método | 19 |
| 4 Método de Extensão de Modelos | 22 |
| 4.1 Método de extensão de modelos para dois campos escalares | 22 |
| 4.1.1 Um exemplo conhecido | 24 |
| 4.2 Método de extensão para três campos escalares reais | 26 |
| 4.3 Novo método | 26 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.4 | Exemplos | 31 |
| 4.4.1 | Exemplo 1 | 31 |
| 4.4.2 | Exemplo 2 | 35 |
| 4.4.3 | Exemplo 3 | 37 |
| 5 | Defeitos Topológicos em Quebra de Simetria de Lorentz | 41 |
| 5.1 | Quebra de simetria de Lorentz | 42 |
| 5.2 | Modelo generalizado com quebra de simetria de Lorentz | 43 |
| 5.3 | Novo Método | 45 |
| 5.4 | Novas órbitas e potenciais | 46 |
| 6 | Conclusões e Perspectivas | 55 |
| | Referências Bibliográficas | 58 |

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento de um campo escalar real, defeitos topológicos e não-topológicos. Para tanto, utilizamos o método proposto por Bogomol'nyi-Prasad e Sommerfield, o qual permite encontrar as soluções das equações de movimento de uma teoria clássica de campos, por meio de equações diferenciais de primeira ordem provenientes da minimização da energia. Estas soluções são chamadas de soluções BPS. Revisamos também a aplicabilidade do método BPS para modelos envolvendo dois campos escalares reais. Além disso, estudamos em detalhes os chamados métodos de deformação e de extensão de modelos. O método de extensão de modelos que até então era aplicado em teorias descritas por dois campos escalares, neste trabalho é ampliado para descrever modelos de três campos escalares com soluções analíticas. Outro ponto fundamental desse trabalho foi construir um novo procedimento, baseado nos métodos de deformação e de extensão, para gerar uma série de novos modelos analíticos. Este procedimento nos permitiu generalizar um sistema de dois campos escalares que envolve termos quebra de simetria de Lorentz.

Palavras-chave: Campos escalares - Defeitos topológicos - Método de extensão de modelos - Modelos de três campos escalares - Quebra de simetria de Lorentz.

Abstract

In this work we study the behavior of a real scalar field, topological defects and non-topological. Therefore, we use the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield method, which allows us to find the solutions for the equations of motion of a classical field theory, by using first order differential equations related which the minimal energy of the system. These solutions are called BPS solutions. Here we also review the applicability of the BPS method in a two scalar field theory. Moreover, we discuss in details the deformation and the extension methods. The extension method which was applied to construct two scalar fields models up to now, is improved to generate new three scalar fields models with analytical solutions. Another key point of this work is the construction a new procedure based on the deformation and the extension methods, in order to generate new analytical models. Such a procedure allowed us to generalize a two scalar fields system involving Lorentz symmetry breaking terms.

Keywords: Scalar fields - Topological defects - Extension method - Three scalar fields models - Lorentz symmetry breaking terms.

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas físicos modelados por campos escalares reais é muito importante em vários ramos da física. Isto se deve, principalmente, ao fato dos campos apresentarem o fenômeno da quebra espontânea de simetria que é de extrema importância na compreensão de fenômenos ligados a física de partículas e a matéria condensada, por exemplo.

Em geral, modelos envolvendo dois campos escalares são mais interessantes do que os modelos de um único campo, isto se deve ao fato desses modelos serem mais sofisticados e de grande interesse para a ciência não-linear. Todavia, uma das dificuldades de se trabalhar com este tipo de modelo diz respeito a integrabilidade das equações de movimento.

Para resolver este problema podemos recorrer ao método das orbitas tentativas proposto por R. Rajaraman [1] em 1979. Outro procedimento bastante interessante foi proposto Bazeia et al. em [2], para investigar estes tipos de modelo. Com esse método também é possível obter uma vasta quantidade de novos modelos com soluções analíticas e de grande interesse físico.

O objetivo deste trabalho é ampliar o método de extensão de modelos [2], que até então descreve modelos de dois campos, para modelos de três campos escalares reais com soluções analíticas. Além disso, desenvolvemos o novo procedimento, baseado no método de extensão e deformação [3], que nos permite gerar uma série de novos modelos de dois campos com soluções analíticas. Através desse procedimento, foi possível generalizar um trabalho no qual o sistema descrito envolve quebra de simetria de Lorentz.

Para melhor compreensão deste trabalho ele será estruturado da seguinte maneira:

No capítulo 2, faremos uma revisão na qual tratamos de encontrar as equações de movimento para um campo escalar real bem como suas soluções, usando para tanto o chamado método BPS [4] e [5]. Mostraremos também que a partir de um potencial $\lambda\phi^4$ podemos obter soluções do tipo *kink* e *lump*, na qual analisaremos suas respectivas estabilidades sob a influência de pequenas perturbações. Além disso, discorreremos sobre modelos envolvendo dois campos escalares onde buscamos, mais uma vez, por soluções BPS. Analisaremos ainda um exemplo desse tipo de modelo conhecido na literatura como BNRT [6], no qual é possível verificar a dificuldade de se trabalhar com estes modelos quando há termos de acoplamento entre campos. Existe alguns métodos para contornar este problema, aqui, mostraremos o método das orbitas tentativas.

No capítulo 3, revisaremos o método de deformação, no qual soluções de novas teorias podem ser obtidas através das soluções de teorias já conhecidas. Dentro desta perspectiva será investigado os estados BPS de um modelo deformado e em seguida aplicaremos o método a um defeito tipo *kink*.

No capítulo 4, apresentamos o método de extensão de modelos. Este método nos permitir construir modelos de dois campos escalares a partir de um modelo mais simples representado por um único campo escalar. Feito isso, estenderemos o método para três campos escalares e o ilustraremos por meio de três exemplos.

No capítulo 5, estudamos defeitos topológicos em quebra de simetria de Lorentz através de um modelo generalizado proposto por Dutra e Correa [7] em que se utiliza uma densidade lagrangiana com termos que carregam informações sobre a quebra de simetria de Lorentz. Na sequência desenvolvemos um novo método baseado nos métodos de deformação e extensão. Este método nos permitirá, generalizar ainda mais o trabalho de Dutra e Correa [7] uma vez que por meio deste, podemos gerar uma série de novos modelos.

Por fim apresentamos as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Tópicos em Teoria Clássica de Campos

Em teoria de campos, defeito topológico é uma solução de uma equação diferencial não linear com energia não nula. Fisicamente podemos defini-lo como uma região de transição entre fases distintas de um sistema, ou seja, é uma região onde o sistema muda suas características e/ou propriedades [8]. Neste trabalho focaremos nossas atenções em defeitos unidimensionais, que podem ser topológicos e não topológicos, esses defeitos são conhecidos na literatura como *kinks* e *lumps*, respectivamente. A caracterização de defeitos topológicos e não topológicos se deve a existência ou não do que chamaremos de carga topológica.

No capítulo que segue, vamos apresentar alguns conceitos fundamentais de teoria clássica de campos, para modelos de um e dois campos escalares reais. Além disso, utilizando o método BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield), mostraremos que as soluções das equações de Eüler-Lagrange podem ser satisfeitas através de soluções de equações de primeira ordem.

2.1 Modelos de um campo

A densidade lagrangiana associada a dinâmica de um campo escalar real ϕ é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que especifica a teoria e ϕ , a princípio, é um campo em 3+1 dimensões espaciais.

Já ação do sistema é descrita por

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x. \quad (2.2)$$

Aqui, iremos considerar teorias de campos relativísticas que obedecem a métrica de Minkowsky, ou seja, $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, para sistemas quadri-dimensionais. Ao considerarmos modelos em 1+1 dimensões, constatamos que $\phi = \phi(x, t)$, e que a minimização da ação¹ relativa a variações deste campo resulta em

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.3)$$

No caso de configuração estática $\phi = \phi(x)$, a equação acima torna-se

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.4)$$

A fim de reduzir a ordem desta equação, vamos multiplicar ambos os lados, por $\frac{d\phi}{dx}$, logo

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.5)$$

o que resulta em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{dV}{dx}, \quad (2.6)$$

consequentemente, ao integrarmos equação acima obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V + C}. \quad (2.7)$$

¹ver apêndice A

Na próxima secção veremos que a constante de integração C deve ser zero para que a energia total da solução seja finita. Antes disso, é interessante definirmos o tensor energia momento ($T^{\mu\nu}$), que para o sistema descrito em (2.1) tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right). \quad (2.8)$$

A componente T^{00} do tensor energia momento representa a densidade de energia ϵ da configuração, cuja forma explícita é

$$T^{00} = \epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.9)$$

Deste modo, para configurações de campos estáticos a densidade de energia se torna

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.10)$$

Agora, para encontrarmos a energia total E do sistema basta integrarmos a densidade de energia sobre todo o espaço

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.11)$$

2.1.1 Soluções BPS

O método BPS foi desenvolvido independentemente por Bogomol'nyi em 1976 e por Prasad e Somerfield em 1975 [4], [5]. Seu objetivo é encontrar soluções de agora em diante denominadas soluções BPS para as equações de movimento em segunda ordem, a partir de equações de primeira ordem que surgem da minimização da energia. Além disso, o método permite que encontremos a energia mínima, não nula, do sistema, conhecida como energia BPS (E_{BPS}). O primeiro passo para encontrarmos a energia BPS do sistema é completando um quadrado perfeito em (2.11)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.12)$$

Como o primeiro termo dessa integral não pode ser negativo, a energia BPS será dada por

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx, \quad (2.13)$$

com a condição

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.14)$$

Note que se usarmos (2.7) para escrever $V(\phi)$ em (2.11), encontramos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{C}{2} \right] dx = -C(\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.15)$$

Desta forma para que nossa energia total seja finita devemos tomar $C = 0$ e portanto (2.7) é idêntica a (2.14). Podemos ainda definir um potencial positivo definido da seguinte maneira

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.16)$$

onde W_ϕ é derivada da função $W(\phi)$ conhecida como superpotencial em relação a ϕ . Logo, nossa equação vista em (2.14) se torna

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.17)$$

E a energia BPS do sistema passa a ser

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (2.18)$$

A partir dos resultados anteriores, podemos concluir que energia mínima do sistema (E_{BPS}) não depende das características locais da solução, mas dos seus limites assintóticos, ou seja, da forma como os campos se comportam nos extremos.

Como previamente mencionado, outra quantidade física importante consiste na carga topológica. Para descrevermos tal quantidade faremos uso do denominado pseudo tensor de Levi-Civita. Em (1,1) dimensões, as componentes do tensor anti-simétrico $\epsilon^{\mu\nu}$ são dadas por $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$ e $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. A topologia aparece no sistema devido a presença de uma corrente conservada que para o caso (1,1) dimensões pode ser escrita como

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.19)$$

Como essa corrente é conservada devemos ter

$$\partial_\mu J_T^\mu = 0. \quad (2.20)$$

Isto implica na existência de uma carga topológica Q_T que pode ser obtida integrando a componente zero da corrente topológica em todo o espaço, ou seja,

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \phi(\infty) - \phi(-\infty). \quad (2.21)$$

Podemos observar que, assim como a energia BPS, a carga topológica só depende das propriedades assintóticas do campo ϕ . Além disso, ela caracteriza dois tipos de soluções, as com carga diferentes de zero, chamadas de topológicas, e as com carga nula conhecidas como não-topológicas. Os *kinks* e os *lumps*, são exemplos de soluções topológicas e não-topológicas, respectivamente.

2.1.2 Defeito do tipo *kink*

Em teoria de campos unidimensionais, um exemplo de defeito do tipo *kink* consiste na solução relativa ao potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(a^2 - \phi^2)^2, \quad (2.22)$$

cuja forma explicita encontra-se na Figura 2.1 onde λ e a são parâmetros adimensionais. Este potencial, conhecido como ϕ^4 , é não negativo e possui seus mínimos globais em $\phi = \pm a$.

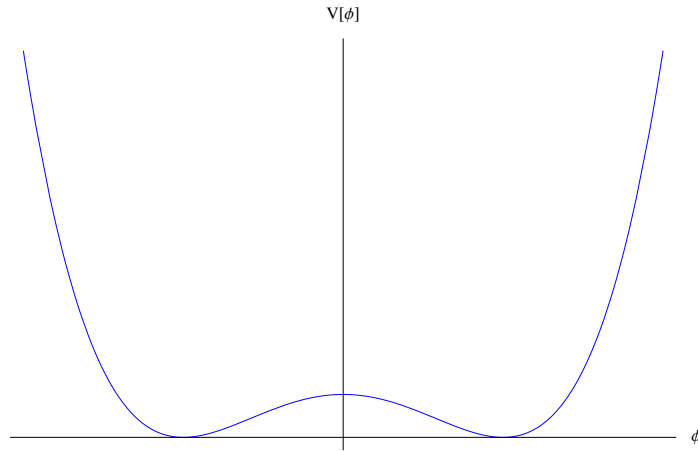


Figura 2.1: Gráfico do potencial ϕ^4 , para $\lambda = a = 1$, $V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2$.

Vamos agora substituir o potencial acima em (2.16) com $\lambda = a = 1$, dessa maneira, obtemos

$$W_\phi = \pm(1 - \phi^2), \quad (2.23)$$

com este resultado em mãos podemos reescrever (2.17) na forma

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.24)$$

No intuito de obtermos a solução da equação acima, vamos integra-la, ou seja,

$$\int \frac{d\phi}{(1-\phi^2)} = \pm \int dx, \quad (2.25)$$

o que resulta em

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.26)$$

A solução positiva é conhecida como *kink* e a negativa como *anti-kink*, suas formas podem ser vistas na Figura 2.2 . Além disso, estas soluções são ditas topológicas (carga topológica não nula), uma vez que $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$.

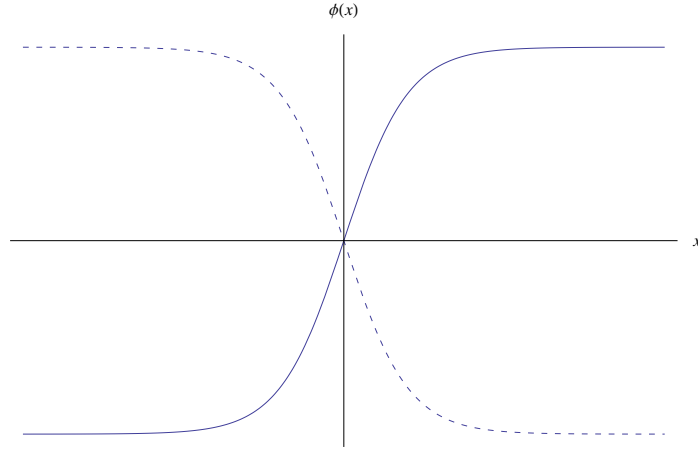


Figura 2.2: Soluções tipo *kink* (linha sólida) e *anti-kink* (linha pontilhada)

Podemos ainda encontrar a densidade de energia do sistema (Figura 2.3), para tanto basta substituímos (2.16) em (2.10) e na sequência tomarmos a derivada de ϕ em relação a x , logo

$$\epsilon = \text{sech}^4(x). \quad (2.27)$$

Já a energia total deste defeito pode ser obtida integrando a equação (2.23), escolhendo $\lambda = -1$ e $a = 1$, e em seguida substituindo na equação (2.18), ou seja,

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]| = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad (2.28)$$

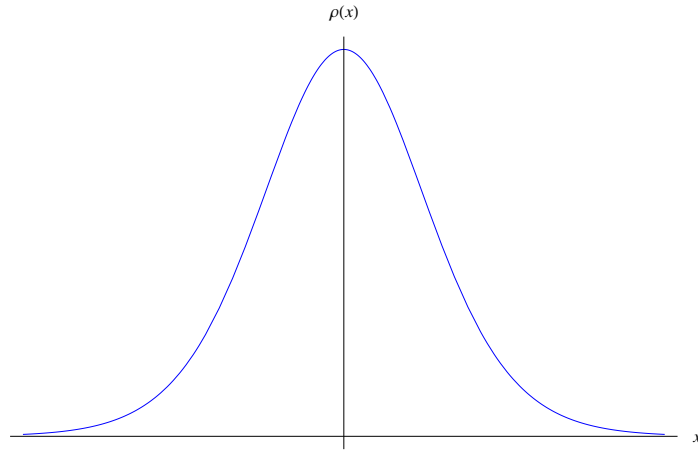


Figura 2.3: Densidade de energia de uma solução tipo *kink*.

2.1.3 Defeito do tipo *lump*

O potencial associado a defeito do tipo *lump*, conhecido como ϕ^4 invertido, é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.29)$$

Este potencial não possui mínimos globais como pode ser visto na (figura 2.4).

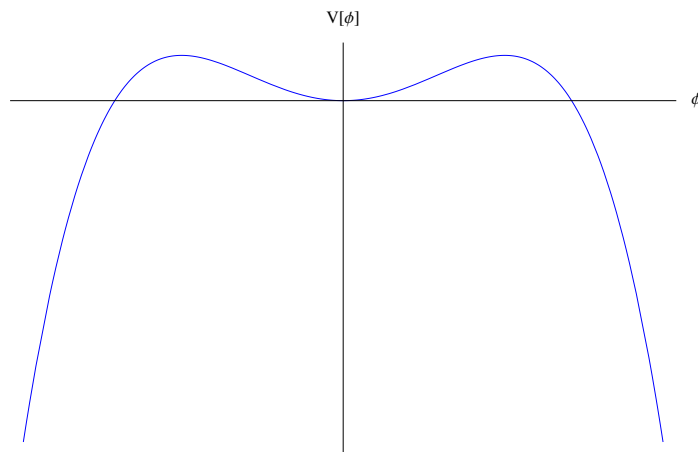


Figura 2.4: Gráfico do potencial ϕ^4 invertido.

A partir de (2.29) podemos reescrever (2.16) como sendo

$$W_\phi = \pm\phi\sqrt{1 - \phi^2}. \quad (2.30)$$

Agora, vamos substituir este resultado em (2.17) e em seguida integra-lo para obter

$$\phi = \pm\text{sech}(x). \quad (2.31)$$

Estas soluções (figura 2.5) tem carga topológica nula já que $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$, ou seja, estas soluções são não-topológicas.

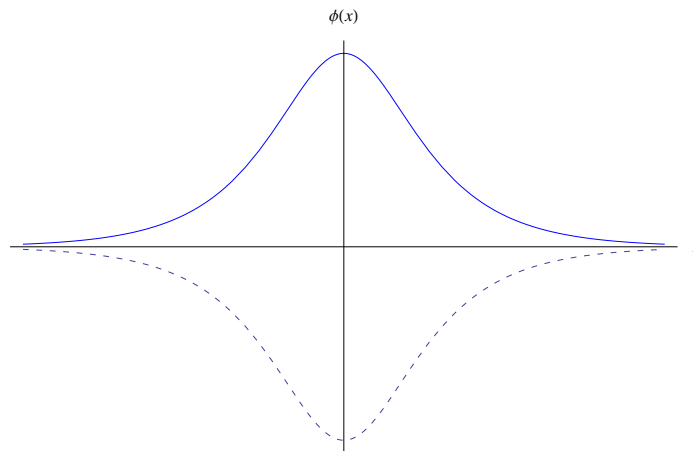


Figura 2.5: Soluções tipo *lump* (linha sólida) e *anti-lump* (linha tracejada).

E a densidade de energia dada por (2.10) passa a ser

$$\epsilon = \operatorname{sech}^2(x)\operatorname{tanh}^2(x). \quad (2.32)$$

A densidade de energia da solução tipo *lump* está ilustrada na (figura 2.6). Podemos notar que a densidade de energia do *lump*, na origem, é zero enquanto que a do *kink* é centrada na origem.

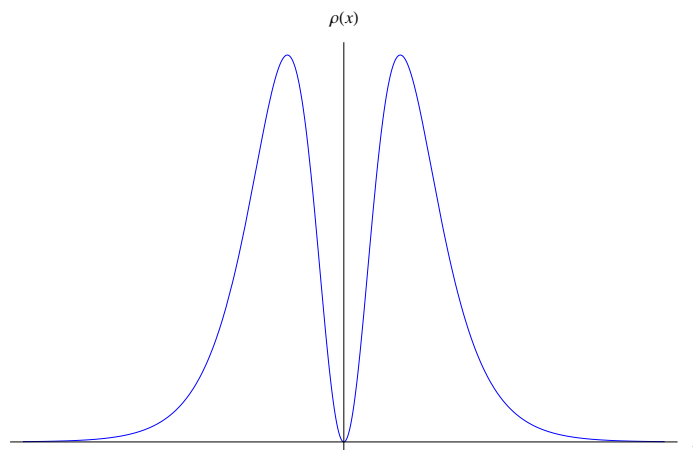


Figura 2.6: Densidade de energia de um defeito tipo *lump*.

No caso de defeitos do tipo *lumps*, a energia BPS deve ser escrita como

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty)] + W[\phi(-\infty)]| \quad (2.33)$$

Isto ocorre devido a definição do potencial como positivo definido. Assim, integrando (2.30) e substituindo na equação acima, obtemos

$$E_{BPS} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (2.34)$$

2.1.4 Estabilidade linear

Nesta secção, estudaremos a estabilidade das soluções das equações de movimento através da chamada estabilidade linear ou clássica. Inicialmente, vamos considerar que a equação (2.3) suporte uma solução estática acrescida de uma pequena perturbação $\eta(x, t)$ na forma

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t). \quad (2.35)$$

Note que a pequena perturbação é dependente do tempo, uma vez que a ideia é acompanhar sua evolução temporal para verificar se a solução é estável ou não.

Substituindo (2.35) em (2.3), temos que

$$\frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = 0, \quad (2.36)$$

para o caso de configuração estática (2.36) se torna

$$-\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.37)$$

Se expandirmos $\frac{dV}{d\phi}$ em série de Taylor considerando apenas termos de primeira ordem de η , obtemos

$$\frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.38)$$

Substituindo este resultado em (2.37), encontramos

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.39)$$

Temos ainda, que para o caso estático a equação de movimento (2.3) pode ser escrita como

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.40)$$

Utilizando este resultado, (2.39) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.41)$$

Para resolver esta equação diferencial podemos usar o método de separação de variáveis. Então, através do *Ansatz*

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.42)$$

Podemos reescrever (2.41) como sendo

$$-\frac{d^2 \eta_n}{dx^2} + U(x) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n, \quad (2.43)$$

com $U(x) = \frac{d^2 V}{d\phi^2} |_{\phi=\phi_s}$.

A equação (2.43) é do tipo Schroedinger com $-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$ sendo um operador, ω_n^2 os autovalores e η_n os auto-vetores.

A partir disso, percebemos que para encontrar uma solução linearmente estável devemos ter $\omega_n^2 \geq 0$, caso contrário haverá um argumento imaginário no cosseno em (2.42) que violaria a suposição de pequena perturbação.

Não é difícil mostrar [9] que, soluções do tipo *kink* são estáveis por estabilidade linear (o menor autovalor encontrado é zero) enquanto soluções tipo *lump* são instáveis (o menor autovalor encontrado é menor que zero).

2.2 Modelos de dois campos

2.2.1 Soluções BPS

De maneira semelhante ao que fizemos para um único campo, iremos aplicar o método BPS para dois campos escalares reais acoplados (ϕ, χ) . Para um sistema desse tipo a densidade lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi) \quad (2.44)$$

cujas equações de movimento, para configurações estáticas, são dadas por

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}; \quad \frac{d^2 \chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (2.45)$$

onde $V = V(\phi, \chi)$. Além disso, a densidade de energia correspondente a este sistema é

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \quad (2.46)$$

Conseqüentemente, podemos escrever a energia total do sistema como sendo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx \quad (2.47)$$

Se assumirmos que esse potencial $V(\phi, \chi)$ é positivo definido e o escrevermos na forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(W_\phi)^2 + \frac{1}{2}(W_\chi)^2 \quad (2.48)$$

Podemos substituir (2.48) em (2.47) para obter

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right] dx \quad (2.49)$$

Utilizando agora o método BPS, a equação (2.49) passa a ser

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] dx \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] dx \quad (2.50)$$

Vê-se que a condição que minimiza a energia do sistema é

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi. \quad (2.51)$$

E com isso nossa energia total será dada por

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right) dx \quad (2.52)$$

ou ainda,

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]| \quad (2.53)$$

2.2.2 Modelo BNRT

Vamos agora, buscar soluções topológicas a partir de um modelo conhecido na literatura como BNRT [6]. O superpotencial correspondente a este modelo é escrito como

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 \quad (2.54)$$

com r sendo uma constante real. Para encontrarmos o potencial advindo deste modelo basta tomarmos as derivadas de (2.54) com relação a ϕ e χ e substituí-las em (2.48), logo

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + r(\phi^2 - 1)\chi^2 + 2r^2\chi^2\phi^2 + \frac{1}{2}r^2\chi^4 \quad (2.55)$$

Além disso, as equações (2.51) podem ser reescritas como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (2.56)$$

Essas equações não lineares possuem soluções topológicas não-triviais que são obtidas conectando dois estados de vácuos diferentes. Cada par de vácuo conetado por essas soluções constitui um setor topológico.

Veja que para essa teoria $V(\phi, \chi) = 0$ se $\chi = 0 \rightarrow \phi = \pm 1$ e se $\phi = 0 \rightarrow \chi = \pm 1/\sqrt{r}$, ou seja, os mínimos do potencial são $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/\sqrt{r})$.

Além disso, podemos obter a energia BPS de cada setor topológico através da equação (2.53), em resumo temos:

Caso 1: $(\pm 1, 0) \rightarrow E_{BPS} = \frac{4}{3}$, Um setor topológico;

Caso 2: $(0, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = 0$, Um setor não-topológico;

Caso 3: $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = \frac{2}{3}$, Quatro setores topológicos.

2.2.3 Método das órbitas tentativas

O método das órbitas tentativas foi desenvolvido por Rajaraman [1] com o objetivo de resolver as equações de movimento quando há termos de acoplamento entre dois campos escalares. Porém, o método possui algumas limitações que estão diretamente relacionadas ao fato das soluções relativas as equações de movimento das teorias analisadas em [1] serem, em geral, compostas por equações diferenciais de segunda ordem. Este problema foi contornado por [10] onde o método foi adaptado à investigação de estados BPS, o qual reproduziremos a seguir.

Para utilizar o método das órbitas tentativas devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Selecionamos um setor BPS. Isto é feito supondo que os pares de mínimos (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_f, χ_f) são tais que $W(\phi_i, \chi_i) \neq W(\phi_f, \chi_f)$, tratando-se de um setor BPS.

2º passo: Escolhemos uma órbita $F(\phi, \chi)$ que envolva os campos ϕ e χ que satisfaça,

$$F(\phi, \chi) = 0. \quad (2.57)$$

Uma outra característica importante a respeito desta órbita, é que ela deve recuperar os mínimos globais do potencial $V(\phi, \chi)$.

3º passo: Verificamos se a órbita satisfaz as equações diferenciais de primeira ordem.

4º passo: Utilizamos a órbita para desacoplar as equações de primeira ordem e em seguida a integramos para obter suas respectivas soluções.

Para se ter uma ideia mais palpável da aplicabilidade do método, permita-nos considerá-lo aos casos 1 e 3 do modelo BNRT, que correspondem aos setores topológicos do modelo.

Caso 1: Neste caso, vamos escolher a órbita $F(\phi, \chi) = \chi = 0$, a partir disso, (2.56) se torna

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2), \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = 0, \quad (2.58)$$

cujas soluções são dadas por

$$\phi = \tanh(x), \quad \chi = 0. \quad (2.59)$$

Vamos agora utilizar outra órbita dada por

$$F(\phi, \chi) = \phi^2 + a\chi^2 - 1 = 0. \quad (2.60)$$

Veja que a órbita escolhida satisfaz os mínimos globais do potencial. Vamos, então, derivar $F(\phi, \chi)$ com relação a x , o que resulta em

$$\frac{dF}{dx} = 2\phi \frac{d\phi}{dx} + 2a\chi \frac{d\chi}{dx} = 0. \quad (2.61)$$

Substituindo a equação (2.56) no resultado acima, encontramos

$$1 - \phi^2 - r\chi^2 - 2ar\chi^2 = 0. \quad (2.62)$$

Observe que a equação (2.60) pode ser escrita como

$$1 - \phi^2 = a\chi^2, \quad (2.63)$$

dessa forma, a equação (2.62) se torna

$$a = (1/r - 2)^{-1}. \quad (2.64)$$

Substituindo agora as equações (2.60) e (2.64) em

$$\frac{d\phi}{dx} = 1 - \phi^2 - r\chi^2, \quad (2.65)$$

encontramos,

$$\frac{d\phi}{dx} = 2r(1 - \phi^2). \quad (2.66)$$

Portanto, a solução ϕ é obtida integrando a equação acima, cujo resultado é

$$\phi = \tanh(2rx), \quad (2.67)$$

e a solução de χ pode ser obtida substituindo ϕ na órbita dada por (2.63),

$$\chi = \pm\sqrt{1/r - 2} \operatorname{sech}(2rx). \quad (2.68)$$

Caso 3

Para este caso, vamos escolher a seguinte órbita

$$F(\phi, \chi) = \phi + a\chi^2 - 1 = 0, \quad (2.69)$$

cujos os mínimos são $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/r)$.

Observe que para $\phi = 0$ a equação (2.69) se torna $\chi = 1/\sqrt{a}$ o que implica em $a = r$.

Agora derivando (2.69) em relação à x , temos

$$\frac{d\phi}{dx} + 2r\chi \frac{d\chi}{dx} = 0. \quad (2.70)$$

Usando (2.56) e (2.69) na equação acima, mostra-se que $r = 1/4$. Esta órbita descreve somente as órbitas laterais do modelo,

$$W = \phi - \frac{\phi^3}{3} - \frac{1}{4}\phi\chi^2. \quad (2.71)$$

Substituindo (2.69) em (2.56) e integrando, obtemos

$$\phi = \frac{1}{2}[1 + \tanh(x/2)], \quad \chi = \pm\sqrt{2}[1 - \tanh(x/2)]^{-1/2}. \quad (2.72)$$

Capítulo 3

Defeitos Deformados

No capítulo anterior discutimos sobre defeitos topológicos enfatizando algumas de suas principais propriedades. Agora iremos investigar o método de deformação de defeitos, proposto por Bazeia et al. [3]. Este método consiste em modificar o potencial de uma dada teoria conhecida, através de uma função deformadora, para obter um novo modelo cujas propriedades podem ser exploradas a partir da teoria inicialmente proposta. O método é descrito como segue.

3.1 Método de deformação

Sabemos que a densidade lagrangiana para o campo escalar real ϕ pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.1)$$

ao trabalharmos com soluções estáticas, ou seja, com $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento relativa a tal modelo é

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (3.2)$$

cujas soluções são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (3.3)$$

Vamos então considerar um outro modelo, descrito por um campo χ , com densidade lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \tilde{V}(\chi), \quad (3.4)$$

temos que, para a solução estática, $\chi = \chi(x)$, a equação de movimento é escrita como

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \frac{d\tilde{V}}{d\chi}, \quad (3.5)$$

a qual é satisfeita por soluções da correspondente equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(\chi)}. \quad (3.6)$$

Considerando ϕ como uma função de χ , ou seja, $\phi = f(\chi)$ tornam-se válidas as relações

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} \Rightarrow \frac{d\chi}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{d\chi}} \frac{d\phi}{dx}, \quad (3.7)$$

portanto, elevando a segunda equação de (3.7) ao quadrado, obtemos

$$\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{f_\chi^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2, \quad (3.8)$$

onde $f_\chi = df/d\chi$. Substituindo as equações (3.3) e (3.6) na equação (3.8) encontramos

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{V[\phi = f(\chi)]}{f_\chi^2}. \quad (3.9)$$

A função $f(\chi)$ é chamada função deformadora. A equação (3.9) nos dá a conexão entre os potenciais do modelo deformado e não deformado. As soluções do novo modelo podem ser obtidas pela inversa da função deformadora, isto é, por

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (3.10)$$

3.2 Estados BPS do modelo deformado

Iremos agora estabelecer a relação entre os estados BPS nos dois modelos. Considerando que $\tilde{V}(x)$ é positivo definido e usando a equação (2.16), podemos escrever a equação (3.9) como sendo

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{W_\phi(\phi = f(\chi))}{f_\chi} \right)^2, \quad (3.11)$$

ou

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2}(\tilde{W}_\chi(\chi))^2. \quad (3.12)$$

Comparando estas duas ultimas equações, obtemos:

$$\tilde{W}_\chi(\chi) = \frac{W_\phi(\phi = f(\chi))}{f_\chi}, \quad (3.13)$$

o que nos permite escrever as equações de primeira ordem na forma

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \frac{W_\phi(\phi = f(\chi))}{f_\chi}, \quad (3.14)$$

em que

$$W_\phi(\phi = f(\chi)) = \left. \frac{dW}{d\phi} \right|_{\phi=f(\chi)}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, a energia para o defeito deformado depende diretamente do tipo de deformação introduzida, utilizando a equação (3.10) podemos mostrar que para estados BPS temos que

$$\tilde{E}_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (3.16)$$

A densidade de energia no modelo deformado pode então ser escrita como:

$$\tilde{\epsilon}(x) = \left(\frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \left(\frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \epsilon(x). \quad (3.17)$$

3.3 Aplicação do método

A fim de ilustrar o método, nesta seção iremos aplica-lo a uma solução tipo *kink* cujo potencial pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (3.18)$$

Considerando a função deformadora $f(\chi) = \sinh(\chi)$ e utilizando (3.18), verificamos que a equação (3.9) torna-se

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \text{senh}^2(\chi))^2 \text{sech}^2(\chi). \quad (3.19)$$

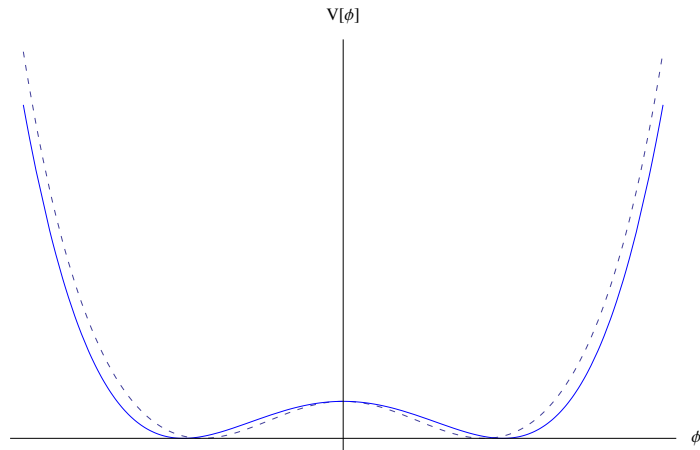


Figura 3.1: O gráfico mostra o potencial deformado (linha pontilhada) e o não-deformado (linha sólida).

A Figura 3.1 representa os potenciais das duas teorias.

Já as soluções estáticas são dadas por

$$\chi(x) = \pm \operatorname{arcsenh}(\tanh(x)), \quad (3.20)$$

estas soluções também são do tipo *kink*. O comportamento das duas soluções podem ser vistos na Figura 3.2. Observe que podemos seguir o mesmo procedimento usando outras funções deformadoras para gerar novas soluções estáveis do tipo *kink*. Isso significa que podemos obter uma rica e extensa gama de soluções com potenciais de interesse físico.

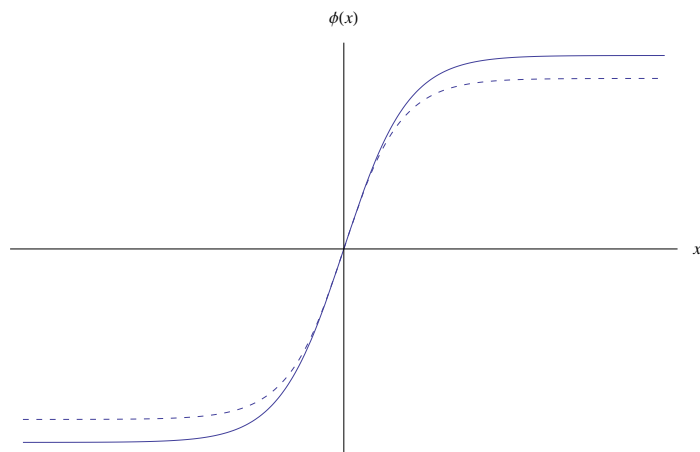


Figura 3.2: Comparação entre as duas soluções: *kink* deformado (linha pontilhada) e *kink* não-deformado (linha sólida).

A densidade de energia pode ser facilmente obtida a partir de (3.17) (veja Figura 3.3).

$$\tilde{\epsilon}(x) = \frac{\operatorname{sech}^4(x)}{(1 + \tanh^2(x))}. \quad (3.21)$$

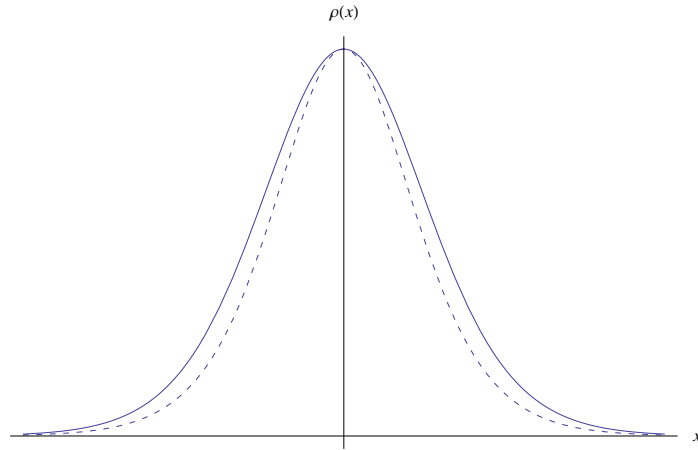


Figura 3.3: O gráfico mostra a densidade de energia do modelo deformado (linha pontilhada) e do não-deformado (linha sólida).

Capítulo 4

Método de Extensão de Modelos

Vimos no capítulo 2, que o método das órbitas tentativas é utilizado em modelos de dois campos escalares, para resolver as equações de movimento quando há termos de acoplamento entre os campos. Esse método apesar de possuir algumas limitações mostra-se bastante eficiente quando utilizado para analisar estados BPS. Na secção que segue, mostraremos um outro procedimento [2] que nos permite investigar esses tipos de modelo. O procedimento fundamenta-se no método de deformação para construir modelos de dois campos escalares a partir de um modelo mais simples, descrito por um único campo escalar.

4.1 Método de extensão de modelos para dois campos escalares

Inicialmente vamos tomar a derivada de $\phi = f(\chi)$ com relação à variável “x”, ou seja,

$$\phi' = \frac{df}{d\chi} \chi', \quad (4.1)$$

onde $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$ e $\chi' = \frac{d\chi}{dx}$. Agora, podemos relacionar as equações (3.13) e (4.1) de tal forma a obter

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{\phi'(\chi)}{\chi'(\chi)} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\chi)}{W_\chi(\chi)}. \quad (4.2)$$

A ideia do método consistem em utilizar a função de deformação para reescrever (4.2) na forma

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (4.3)$$

onde trata-se de uma relação entre as equações diferenciais de primeira ordem de modelo de dois campos efetivo, a partir da qual podemos calcular a chamada equação de órbita. Primeiramente devemos observar que as equações diferenciais de primeira ordem para o campo ϕ podem ser escritas de três maneiras diferentes mas equivalentes, dadas por

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad \phi' = W_\phi(\chi), \quad \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (4.4)$$

observe que na segunda equação usamos a função de deformação em $\phi \rightarrow f(\chi)$ em todos os termos de W_ϕ de modo que obtemos um $W_\phi(\chi)$, já na terceira equação, nós substituímos $\phi \rightarrow f(\chi)$ em $W_\phi(\phi)$ de forma parcial, tornando W_ϕ uma função dos campos ϕ e χ . Este último passo é realizado de forma que $W_\phi(\phi, \chi)$ não seja simplesmente uma combinação de $W_\phi(\phi)$ com $W_\phi(\chi)$, isto é caso $W_\phi(\phi)$ contenha um termo ϕ^3 , por exemplo, ele será reescrito como $\phi^3 = \phi \times \phi^2$ que por sua vez, pode ser expresso segundo $\phi \times f^2(\chi)$ ou $\phi^2 \times f(\chi)$, resultando em diferentes acoplamentos entre os campos escalares. Podemos proceder de maneira análoga para o campo χ de forma a obtermos

$$\chi' = W_\chi(\chi), \quad \chi' = W_\chi(\phi), \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi), \quad (4.5)$$

Vamos agora, definir os seguintes parâmetros a_i , b_i e c_i , onde $i = 1, 2, 3$ e com os vínculos $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ e $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Tais constantes são relacionadas com as equações (4.4) e (4.5), de forma a trocarmos $W_\phi \rightarrow a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi)$ e $W_\chi \rightarrow b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)$. Através deste último procedimento podemos escrever:

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi)}{b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)}, \quad (4.6)$$

onde g é uma função de contra-peso e $g(\chi) = g(\phi) = g(\phi, \chi)$. Esta função é arbitrária e construída via deformação assim como W_ϕ e W_χ .

A forma específica de “ g ” é obtida através de um segundo vínculo que o modelo efetivo de dois campos deve obedecer, dado por

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (4.7)$$

Substituindo W_ϕ e W_χ em (4.7) e tomando suas respectivas derivadas, encontramos

$$b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi). \quad (4.8)$$

4.1.1 Um exemplo conhecido

Este exemplo consiste no acoplamento do modelo ϕ^4 com um modelo χ^4 invertido. Inicialmente consideramos um modelo descrito pelo campo escalar ϕ , cuja solução topológica obedece a equação:

$$\phi' = W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad (4.9)$$

e sua forma é dada por

$$\phi(x) = \tanh(ax), \quad (4.10)$$

onde “ a ” é um parâmetro real e dimensional. Considere agora a função de deformação

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}. \quad (4.11)$$

aqui, “ b ” é outro parâmetro real que controla a função de deformação. A equação de primeira ordem correspondente a esta deformação é escrita como

$$\chi' = W_\chi = -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad (4.12)$$

cuja solução é

$$\chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \quad (4.13)$$

Vamos agora, escrever as equações de primeira ordem de três formas diferentes mas equivalentes, ou seja, como

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= a(1 - \phi^2), \\ W_\phi(\chi) &= \frac{a}{b^2}\chi^2, \\ W_\phi(\phi, \chi) &= \frac{a}{b}\chi\sqrt{1 - \phi^2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e

$$\begin{aligned}
W_\chi(\chi) &= -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \\
W_\chi(\phi) &= -ab\phi\sqrt{1 - \phi^2}, \\
W_\chi(\phi, \chi) &= -ab\chi\phi.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

A fim de evitar raízes no nosso potencial polinomial vamos tomar $a_2 = b_1 = b_3 = 0$ o que implica em $a_1 + a_3 = 0$ e $b_2 = 1$. Logo, a equação (4.8) passa a ser

$$W_{\chi\phi}(\phi, \chi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi) \tag{4.16}$$

Tomando $c_2 = 0$ (que implica em $c_1 + c_3 = 0$) no intuito de obter $g(\chi)$, temos

$$g_\chi(\chi) = \frac{1}{c_1} W_{\chi\phi}(\phi, \chi) - a_1 W_{\phi\chi}(\chi) \tag{4.17}$$

Agora, basta substituírmos as derivadas correspondentes dos superpotenciais na equação anterior, resultando em

$$g(\chi) = -\frac{1}{2} \frac{a}{c_1} \left(1 + 2\frac{a_1}{b^2}\right) \chi^2, \tag{4.18}$$

a qual pode ser reescrita da seguinte maneira

$$g(\phi) = -\frac{1}{2} \frac{ab^2}{c_1} \left(1 + 2\frac{a_1}{b^2}\right) (1 - \phi^2), \tag{4.19}$$

via função de deformação. Deste modo, substituindo todos estes resultados nas formas de W_ϕ e W_χ vistas na equação (4.8), temos

$$W_\phi = -\frac{a}{2} \chi^2 + a \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) (1 - \phi^2), \tag{4.20}$$

e

$$W_\chi = -a\chi\phi. \tag{4.21}$$

Para calcularmos a forma final do superpotencial efetivo basta realizarmos integrações simples em relação aos campos ϕ e χ o que resulta em

$$W(\phi, \chi) = a \left(1 + \frac{1}{2}b^2\right) \left(\phi - \frac{1}{3}\phi^3\right) - \frac{1}{2}a\phi\chi^2. \tag{4.22}$$

Observe que um dos pares de soluções deste modelo obedecem os modelos de um campo que utilizamos como ponto de partida, ou seja,

$$\phi(x) = \tanh(ax), \quad \chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \tag{4.23}$$

Um caso particularmente interessante ocorre quando

$$a = 2r \quad e \quad b = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \quad (4.24)$$

com $r \in (0, 1/2)$, nos levando à

$$W_r(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.25)$$

tratando-se do modelo BNRT visto no capítulo 2, e cuja a órbita é dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \tanh(2rx); \\ \chi(x) &= \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \operatorname{sech}(2rx). \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2 Método de extensão para três campos escalares reais

Modelos descritos por três campos escalares reais vem sendo estudados nos últimos anos por diversos pesquisadores, porém ainda são poucos os trabalhos encontrados na literatura que apresentam modelos analíticos. Podemos citar que Imani e Imani [11] aplicaram o método de deformação e Bazeia et al. [12] investigaram a presença de paredes de domínio nestes tipos de modelos. Em outro contexto, a ideia de um hexagonal de defeitos ser colocado dentro de um defeito topológico foi investigada por Bazeia et al. em [13] via um modelo de três campos escalares reais. Nesta secção, expandiremos o método de extensão de modelos com a finalidade de obtermos novos modelos analíticos compostos por três campos escalares reais.

4.3 Novo método

Inicialmente vamos escrever a equação (4.3) como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi, \rho)}{W_\chi(\phi, \chi, \rho)}. \quad (4.27)$$

Usando as funções de deformação podemos reescrever as equações de primeira ordem em ϕ , de sete maneiras diferentes mas equivalentes, ou seja

$$\begin{aligned} \phi' &= W_\phi(\phi), & \phi' &= W_\phi(\chi), & \phi' &= W_\phi(\phi, \chi), & \phi' &= W_\phi(\rho), \\ \phi' &= W_\phi(\phi, \rho), & \phi' &= W_\phi(\chi, \rho), & \phi' &= W_\phi(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.28)$$

O mesmo mecanismo pode ser usado para o campo χ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \chi' &= W_\chi(\chi), & \chi' &= W_\chi(\phi), & \chi' &= W_\chi(\phi, \chi), & \chi' &= W_\chi(\rho), \\ \chi' &= W_\chi(\chi, \rho), & \chi' &= W_\chi(\phi, \rho), & \chi' &= W_\chi(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Deste modo, definimos os seguintes parâmetros a_{ij} , b_j , c_{ij} , onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ com os vínculos $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 1$, $c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{17} = 0$ e $c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_{25} + c_{26} + c_{27} = 0$. Estas constantes podem ser relacionadas com as equações (4.28) e (4.29) de forma que trocamos $W_\phi \rightarrow a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\rho) + a_{15}W_\phi(\phi, \rho) + a_{16}W_\phi(\chi, \rho) + a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \rho)$ e $W_\chi \rightarrow b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\rho) + b_5W_\chi(\phi, \rho) + b_6W_\chi(\chi, \rho) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \rho)$, isto nos leva a escrever

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\chi} &= \left(a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\rho) + a_{15}W_\phi(\phi, \rho) + a_{16}W_\phi(\chi, \rho) \right. \\ &+ a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \rho) + c_{11}g(\chi) + c_{12}(\phi, \chi) + c_{13}g(\phi) + c_{14}g(\rho) + c_{15}g(\phi, \rho) + c_{16}g(\chi, \rho) \\ &+ c_{17}g(\phi, \chi, \rho) \left. \right) \times \left(b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\rho) + b_5W_\chi(\phi, \rho) \right. \\ &+ b_6W_\chi(\chi, \rho) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \rho) + c_{21}\tilde{f}(\chi) + c_{22}\tilde{f}(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}(\phi) + c_{24}\tilde{f}(\rho) + c_{25}\tilde{f}(\phi, \rho) \\ &+ c_{26}\tilde{f}(\chi, \rho) + c_{27}\tilde{f}(\phi, \chi, \rho) \left. \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A equação anterior apresenta \tilde{f} e g como funções de contra peso. Como pode ser visto na equação (4.30) estas funções também podem assumir sete formas diferentes através das funções deformadoras.

O mesmo procedimento pode ser aplicado as equações

$$\frac{d\rho}{d\chi} = \frac{W_\rho(\phi, \chi, \rho)}{W_\chi(\phi, \chi, \rho)}, \quad (4.31)$$

e

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{W_\phi(\phi, \chi, \rho)}{W_\rho(\phi, \chi, \rho)}. \quad (4.32)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\chi} &= \left(a_{21}W_\rho(\chi) + a_{22}W_\rho(\rho, \chi) + a_{23}W_\rho(\rho) + a_{24}W_\rho(\phi) + a_{25}W_\rho(\phi, \rho) + a_{26}W_\rho(\phi, \chi) \right. \\ &+ a_{27}W_\rho(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}(\chi) + c_{32}\tilde{g}(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}(\phi) + c_{34}\tilde{g}(\rho) + c_{35}\tilde{g}(\phi, \rho) + c_{36}\tilde{g}(\chi, \rho) \\ &+ c_{37}\tilde{g}(\phi, \chi, \rho) \left. \right) \times \left(b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\rho) + b_5W_\chi(\phi, \rho) \right. \\ &+ b_6W_\chi(\chi, \rho) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \rho) + c_{21}\tilde{f}(\chi) + c_{22}\tilde{f}(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}(\phi) + c_{24}\tilde{f}(\rho) + c_{25}\tilde{f}(\phi, \rho) \\ &+ c_{26}\tilde{f}(\chi, \rho) + c_{27}\tilde{f}(\phi, \chi, \rho) \left. \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

com \tilde{g} sendo mais uma função de contra peso. Além disso, a equação (4.33) obedece os vínculos $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} = 1$ e $c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{34} + c_{35} + c_{36} + c_{37} = 0$.

Outrossim, determinamos que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\rho} = & \left(a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\rho) + a_{15}W_\phi(\phi, \rho) + a_{16}W_\phi(\chi, \rho) \right. \\ & + a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \rho) + c_{11}g(\chi) + c_{12}(\phi, \chi) + c_{13}g(\phi) + c_{14}g(\rho) + c_{15}g(\phi, \rho) + c_{16}g(\chi, \rho) \\ & \left. + c_{17}g(\phi, \chi, \rho) \right) \times \left(a_{21}W_\rho(\chi) + a_{22}W_\rho(\rho, \chi) + a_{23}W_\rho(\rho) + a_{24}W_\rho(\phi) + a_{25}W_\rho(\phi, \rho) \right. \\ & + a_{26}W_\rho(\phi, \chi) + a_{27}W_\rho(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}(\chi) + c_{32}\tilde{g}(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}(\phi) + c_{34}\tilde{g}(\rho) + c_{35}\tilde{g}(\phi, \rho) \\ & \left. + c_{36}\tilde{g}(\chi, \rho) + c_{37}\tilde{g}(\phi, \chi, \rho) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Agora, para descobrirmos a forma de g ou \tilde{f} na equação (4.30), precisamos de um segundo vínculo, o qual surge devido ao fato do superpotencial obedecer a propriedade,

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (4.35)$$

Substituindo W_ϕ e W_χ a partir da equação (4.30) e tomando suas respectivas derivadas, encontramos

$$\begin{aligned} a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{11}g_\chi(\chi) + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) \\ + c_{16}g_\chi(\chi, \rho) + c_{17}g_\chi(\phi, \chi, \rho) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \rho) \\ + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{22}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_\phi(\phi) + c_{25}\tilde{f}_\phi(\phi, \rho) + c_{27}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Analogamente para obter a função \tilde{g} ou \tilde{f} na equação (4.33) devemos recorrer ao vínculo,

$$W_{\rho\chi} = W_{\chi\rho}, \quad (4.37)$$

o que nos leva a,

$$\begin{aligned} a_{21}W_{\rho\chi}(\chi) + a_{22}W_{\rho\chi}(\rho, \chi) + a_{26}W_{\rho\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{32}\tilde{g}_\chi(\phi, \chi) \\ + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \rho) + c_{37}\tilde{g}_\chi(\phi, \chi, \rho) = b_4W_{\chi\rho}(\rho) + b_5W_{\chi\rho}(\phi, \rho) + b_6W_{\chi\rho}(\chi, \rho) \\ + b_7W_{\chi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{24}\tilde{f}_\rho(\rho) + c_{25}\tilde{f}_\rho(\phi, \rho) + c_{26}\tilde{f}_\rho(\chi, \rho) + c_{27}\tilde{f}_\rho(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Por fim, para encontrarmos a função g ou \tilde{g} na equação (4.34), devemos utilizar o vínculo,

$$W_{\phi\rho} = W_{\rho\phi}, \quad (4.39)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
& a_{14}W_{\phi\rho}(\rho) + a_{15}W_{\phi\rho}(\phi, \rho) + a_{16}W_{\phi\rho}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{14}g_\rho(\rho) + c_{15}g_\rho(\phi, \rho) \\
& + c_{16}g_\rho(\chi, \rho) + c_{17}g_\rho(\phi, \chi, \rho) = a_{24}W_{\rho\phi}(\phi) + a_{25}W_{\rho\phi}(\phi, \rho) + a_{26}W_{\rho\phi}(\phi, \chi) \\
& + a_{27}W_{\rho\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{32}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho) + c_{37}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \rho). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Como pode ser visto na equações (4.36), (4.38) e (4.40) temos diversas possibilidades de encontrar as funções de contra peso e conseqüentemente proceder para encontrar o modelo efetivo. A seguir iremos elucidar algumas dessas possibilidades.

A primeira possibilidade consiste em encontrar a função g na equação (4.36), para tanto vamos tomar $c_{22} = c_{23} = c_{25} = c_{27} = 0$, resultando em

$$\begin{aligned}
& a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{11}g_\chi(\chi) \\
& + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) + c_{16}g_\chi(\chi, \rho) + c_{17}g_\chi(\phi, \chi, \rho) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3W_{\chi\phi}(\phi) \\
& + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \rho) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \rho). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Deste modo a equação (4.38) se torna

$$\begin{aligned}
& a_{21}W_{\rho\chi}(\chi) + a_{22}W_{\rho\chi}(\rho, \chi) + a_{26}W_{\rho\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{32}\tilde{g}_\chi(\phi, \chi) \\
& + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \rho) + c_{37}\tilde{g}_\chi(\phi, \chi, \rho) = b_4W_{\chi\rho}(\rho) + b_5W_{\chi\rho}(\phi, \rho) + b_6W_{\chi\rho}(\chi, \rho) \\
& + b_7W_{\chi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{24}\tilde{f}_\rho(\rho) + c_{26}\tilde{f}_\rho(\chi, \rho). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

No vínculo acima, devemos encontrar \tilde{f} , portanto devemos tomar $c_{31} = c_{32} = c_{36} = c_{37} = 0$, então

$$\begin{aligned}
& a_{21}W_{\rho\chi}(\chi) + a_{22}W_{\rho\chi}(\rho, \chi) + a_{26}W_{\rho\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\chi}(\phi, \chi, \rho) = b_4W_{\chi\rho}(\rho) + b_5W_{\chi\rho}(\phi, \rho) \\
& + b_6W_{\chi\rho}(\chi, \rho) + b_7W_{\chi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{24}\tilde{f}_\rho(\rho) + c_{26}\tilde{f}_\rho(\chi, \rho), \tag{4.43}
\end{aligned}$$

conseqüentemente a equação (4.40) passa a ser

$$\begin{aligned}
& a_{14}W_{\phi\rho}(\rho) + a_{15}W_{\phi\rho}(\phi, \rho) + a_{16}W_{\phi\rho}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{14}g_\rho(\rho) + c_{15}g_\rho(\phi, \rho) \\
& + c_{16}g_\rho(\chi, \rho) + c_{17}g_\rho(\phi, \chi, \rho) = a_{24}W_{\rho\phi}(\phi) + a_{25}W_{\rho\phi}(\phi, \rho) + a_{26}W_{\rho\phi}(\phi, \chi) \\
& + a_{27}W_{\rho\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho). \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Como devemos encontrar \tilde{g} neste vínculo, temos que $c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{17} = 0$, logo

$$\begin{aligned}
& a_{14}W_{\phi\rho}(\rho) + a_{15}W_{\phi\rho}(\phi, \rho) + a_{16}W_{\phi\rho}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\rho}(\phi, \chi, \rho) = a_{24}W_{\rho\phi}(\phi) + a_{25}W_{\rho\phi}(\phi, \rho) \\
& + a_{26}W_{\rho\phi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho), \tag{4.45}
\end{aligned}$$

por conseguinte a equação (4.41), nos dá

$$\begin{aligned} & a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{11}g_\chi(\chi) + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) \\ & = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \rho) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \rho) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Assim, as equações (4.43), (4.45) e (4.46) nos permitem encontrar, respectivamente, as funções de contra peso \tilde{f} , \tilde{g} e g .

A segunda possibilidade baseia-se em encontrar a função \tilde{f} em (4.36), ao invés de g , deste modo, devemos tomar $c_{11} + c_{12} + c_{16} + c_{17} = 0$ na referida equação, o que resulta em

$$\begin{aligned} & a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \rho) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) \\ & + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \rho) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{22}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_\phi(\phi) \\ & + c_{25}\tilde{f}_\phi(\phi, \rho) + c_{27}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dessa maneira a equação (4.40) se torna

$$\begin{aligned} & a_{14}W_{\phi\rho}(\rho) + a_{15}W_{\phi\rho}(\phi, \rho) + a_{16}W_{\phi\rho}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{14}g_\rho(\rho) + c_{15}g_\rho(\phi, \rho) \\ & = a_{24}W_{\rho\phi}(\phi) + a_{25}W_{\rho\phi}(\phi, \rho) + a_{26}W_{\rho\phi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{32}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi) \\ & + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho) + c_{37}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \rho), \end{aligned} \quad (4.48)$$

para obtermos a função g , devemos tomar $c_{32} = c_{33} = c_{35} = c_{37} = 0$, resultando em

$$\begin{aligned} & a_{14}W_{\phi\rho}(\rho) + a_{15}W_{\phi\rho}(\phi, \rho) + a_{16}W_{\phi\rho}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{14}g_\rho(\rho) + c_{15}g_\rho(\phi, \rho) \\ & = a_{24}W_{\rho\phi}(\phi) + a_{25}W_{\rho\phi}(\phi, \rho) + a_{26}W_{\rho\phi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\phi}(\phi, \chi, \rho), \end{aligned} \quad (4.49)$$

por conseguinte, a equação (4.38) passa a ser

$$\begin{aligned} & a_{21}W_{\rho\chi}(\chi) + a_{22}W_{\rho\chi}(\rho, \chi) + a_{26}W_{\rho\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \rho) \\ & = b_4W_{\chi\rho}(\rho) + b_5W_{\chi\rho}(\phi, \rho) + b_6W_{\chi\rho}(\chi, \rho) + b_7W_{\chi\rho}(\phi, \chi, \rho) + c_{24}\tilde{f}_\rho(\rho) + c_{25}\tilde{f}_\rho(\phi, \rho) \\ & + c_{26}\tilde{f}_\rho(\chi, \rho) + c_{27}\tilde{f}_\rho(\phi, \chi, \rho), \end{aligned} \quad (4.50)$$

neste caso, para encontrarmos a função \tilde{g} devemos tomar $c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{27} = 0$, logo

$$\begin{aligned} & a_{21}W_{\rho\chi}(\chi) + a_{22}W_{\rho\chi}(\rho, \chi) + a_{26}W_{\rho\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\rho\chi}(\phi, \chi, \rho) + c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \rho) \\ & = b_4W_{\chi\rho}(\rho) + b_5W_{\chi\rho}(\phi, \rho) + b_6W_{\chi\rho}(\chi, \rho) + b_7W_{\chi\rho}(\phi, \chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Portanto, a equação (4.47) passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \rho) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \rho) &= b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) \\ + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \rho) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \rho) + c_{22}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_\phi(\phi) &. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Vemos que nesta possibilidade as funções de contra peso podem ser obtidas a partir das equações (4.49), (4.51) e (4.52).

4.4 Exemplos

Nesta secção, iremos ilustrar a aplicabilidade desse método utilizando para tanto três exemplos. Suas investigações são descritas como segue.

4.4.1 Exemplo 1

Este primeiro exemplo consiste no acoplamento entre um modelo ϕ^4 e dois modelos χ^4 e ρ^4 invertidos. As equações de primeira ordem correspondentes a estes modelos são dadas por

$$W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad W_\chi = -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad W_\rho = -a\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}, \quad (4.53)$$

cujas respectivas soluções, são escritas como

$$\phi = \tanh(ax), \quad \chi = b \operatorname{sech}(ax), \quad \rho = b \operatorname{sech}(ax), \quad (4.54)$$

onde “ a ” é um parâmetro real.

Vamos agora considerar as funções deformadoras e suas inversas como sendo

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \Rightarrow \chi = b\sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.55)$$

$$\phi = f(\rho) = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}} \Rightarrow \rho = b\sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.56)$$

$$\chi = f(\rho) = \rho \Rightarrow \rho = \chi. \quad (4.57)$$

Feito isso, utilizaremos as funções de deformação e suas inversas para reescrever W_ϕ , W_χ e W_ρ de sete maneiras diferentes mas equivalentes, o que nos dá

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= a(1 - \phi^2), & W_\phi(\chi) &= \frac{a\chi^2}{b^2}, & W_\phi(\phi, \chi) &= a \left(1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \right), \\ W_\phi(\rho) &= \frac{a\rho^2}{b^2}, & W_\phi(\phi, \rho) &= a \left(1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}} \right), & & (4.58) \\ W_\phi(\chi, \rho) &= a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}} \right), & W_\phi(\phi, \chi, \rho) &= a \left(1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\chi\rho}{b^2}} \right). \end{aligned}$$

Bem como,

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, & W_\chi(\phi) &= -ab\phi \sqrt{1 - \phi^2}, & W_\chi(\phi, \chi) &= -a\chi\phi, \\ W_\chi(\rho) &= -a\rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}, & W_\chi(\chi, \rho) &= -a\rho \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, & & (4.59) \\ W_\chi(\phi, \rho) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}, & W_\chi(\phi, \chi, \rho) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\chi\rho}{b^2}}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_\rho(\rho) &= -a\rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}, & W_\rho(\phi) &= -ab\phi \sqrt{1 - \phi^2}, & W_\rho(\phi, \rho) &= -a\rho\phi, \\ W_\rho(\chi) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, & W_\rho(\chi, \rho) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}, & & (4.60) \\ W_\rho(\phi, \chi) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, & W_\rho(\phi, \chi, \rho) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\rho\chi}{b^2}}. \end{aligned}$$

1° possibilidade

A fim de evitar raízes em nossos potenciais polinomiais, inicialmente vamos tomar $a_{12} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$, e $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{27} = 0$. Isto implica em $a_{11} + a_{13} + a_{14} = 1$, $b_2 = 1$ e $a_{25} = 1$. Deste modo a equação (4.46) pode ser reescrita como

$$a_{11} \frac{2a\chi}{b^2} + c_{11}g_\chi(\chi) + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) = -a\chi. \quad (4.61)$$

Para encontrarmos $g(\chi)$ vamos escolher $c_{12} = 0$ na equação acima e integra-la em relação a χ , o que resulta em

$$g(\chi) = -\frac{a\chi^2}{c_{11}} \left(\frac{1}{2} + \frac{a_{11}}{b^2} \right). \quad (4.62)$$

Além disso, temos que $c_{11} = -c_{13}$, e ao utilizarmos a função de deformação (4.55) a equação (4.62) passa a ser

$$g(\phi) = -\frac{a(1-\phi^2)}{c_{11}} \left(\frac{b^2}{2} + a_{11} \right). \quad (4.63)$$

Então, substituindo todos estes ingredientes no W_ϕ visto na equação (4.30), obtemos

$$W_\phi = -\frac{1}{2}a[-2 + \rho^2 + 2\phi^2 + 2\phi^2 + 2b^2(-1 + \phi^2) + \chi^2]. \quad (4.64)$$

Por outro lado, se substituirmos os novos vínculos na equação (4.43), podemos verificar que $\tilde{f}(\rho) = 0$. E assim, W_χ presente na equação (4.30), será dado por

$$W_\chi = -a\chi\phi. \quad (4.65)$$

Agora, considerando as diferentes formas de W_ϕ e W_ρ assim como os novos vínculos na equação (4.45), podemos reescreve-la da seguinte maneira

$$a_{14} \frac{2a\rho}{b^2} = -a\rho + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho), \quad (4.66)$$

para $c_{33} = 0$, temos que

$$c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho) = a_{14} \frac{2a\rho}{b^2} + a\rho. \quad (4.67)$$

Neste caso vamos considerar $a_{14} = -b^2/2$, com o intuito de tornar nula a função \tilde{g} pois queremos evitar raízes quadradas em nosso potencial polinomial. Então, substituindo todos esses ingredientes na forma do W_ρ visto na equação (4.33), obtemos

$$W_\rho = -a\phi\rho. \quad (4.68)$$

Finalmente, integrando as equações (4.64), (4.65) e (4.68) podemos obter o superpotencial do modelo que, neste caso, pode ser escrito na forma

$$W(\phi, \chi, \rho) = (1 + b^2)a \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - \frac{a}{2}\phi(\chi^2 + \rho^2). \quad (4.69)$$

Um caso particularmente interessante ocorre quando

$$a = 2r, \quad e \quad b = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \quad (4.70)$$

com $r \in (0, 1/2)$, nos levando a

$$W(\phi, \chi, \rho) = \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - r\phi(\chi^2 + \rho^2), \quad (4.71)$$

e cujas soluções analíticas são

$$\phi = \tanh(2rx), \quad \chi = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \operatorname{sech}(2rx), \quad \rho = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \operatorname{sech}(2rx). \quad (4.72)$$

Este é um modelo efetivo para três campos escalares que já foi estudado na literatura científica, para mais detalhes ver [11] e [12]. Uma característica importante a ser ressaltada é que esta é a primeira vez que tal modelo é construído via modelos de um campo escalar.

2° possibilidade

Vamos agora tomar $a_{12} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{27} = 0$ no intuito de evitar raízes quadradas em nosso potencial polinomial. Isto implica diretamente em $a_{11} + a_{13} + a_{14} = 1$, $b_2 = 1$ e $a_{25} = 1$. A partir desses novos vínculos podemos reescrever a equação (4.52) como sendo

$$a_{11} \frac{2a\chi}{b^2} = -a\chi + c_{22} \tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23} \tilde{f}_\phi(\phi). \quad (4.73)$$

Para $c_{23} = 0$, temos que

$$c_{22} \tilde{f}_\phi(\phi, \chi) = a\chi + a_{11} \frac{2a\chi}{b^2}. \quad (4.74)$$

Vamos agora escolher $a_{11} = -b^2/2$ para que não tenhamos raízes em nosso potencial polinomial. Isto implica que a função de contra peso \tilde{f} seja nula. Deste modo, o W_χ visto em (4.30) passa a ser escrito como

$$W_\chi = -a\chi\phi. \quad (4.75)$$

Da mesma forma a função \tilde{g} também será nula para que evitemos raízes quadradas em nosso potencial. Assim, a partir da equação (4.31) podemos escrever W_ρ na forma

$$W_\rho = -a\phi\rho. \quad (4.76)$$

Finalmente tomando os vínculos na equação(4.49), temos

$$a_{14} \frac{2\rho a}{b^2} + c_{14} g_\rho(\rho) + c_{15} g_\rho(\phi, \rho) = -a_{25} a \rho, \quad (4.77)$$

escolhendo $c_{15} = 0$ e integrando com relação a ρ , chegamos a

$$g(\rho) = \frac{a\rho^2}{2b^2 c_{14}} (a_{25} b^2 + 2a_{14}). \quad (4.78)$$

Vamos agora tomar $c_{11} = c_{12} = c_{16} = c_{17} = 0$ o que implica em $c_{14} = -c_{13}$. Feito isso, vamos usar a função de deformação (4.56) para obtermos

$$g(\phi) = \frac{a(1 - \phi^2)}{2c_{14}} (b^2 + 2a_{14}), \quad (4.79)$$

logo, o W_ϕ que pode ser visto na equação (4.30) passa a ser

$$W_\phi = -\frac{1}{2}a[-2 + \chi^2 + 2\phi^2 + 2b^2(-1 + \phi^2) + \rho^2]. \quad (4.80)$$

Deste modo, o superpotencial do modelo é dado por

$$W(\phi, \chi, \rho) = (1 + b^2)a \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - \frac{a}{2}\phi(\chi^2 + \rho^2). \quad (4.81)$$

Observe que se escolhermos

$$a = 2r, \quad e \quad b = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1}, \quad (4.82)$$

chegamos a

$$W(\phi, \chi, \rho) = \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - r\phi(\chi^2 + \rho^2), \quad (4.83)$$

que é o mesmo resultado obtido na equação (4.71). Com base neste exemplo fica claro que ambas as possibilidades nos levam a um mesmo modelo. Por este motivo nos próximos exemplos elucidaremos apenas o modelo efetivo advindo da primeira possibilidade.

4.4.2 Exemplo 2

Neste exemplo combinamos os modelos ϕ^4 , ρ^4 invertido e χ^6 , nos quais todos admitem soluções tipo *kink*. Essas soluções são escritas como

$$\phi = \tanh(ax), \quad \chi = b \operatorname{sech}(ax), \quad \rho = \tanh(ax). \quad (4.84)$$

As equações de primeira ordem correspondentes a este modelo são dadas por

$$W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad W_\chi = -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad W_\rho = -a(1 - \rho^2). \quad (4.85)$$

Para este caso, podemos escrever as deformações e suas inversas da seguinte maneira:

$$\phi = \rho \Rightarrow \rho = \phi, \quad (4.86)$$

$$\phi = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \Rightarrow \chi = b\sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.87)$$

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \Rightarrow \chi = b\sqrt{1 - \rho^2}. \quad (4.88)$$

Agora vamos escrever W_ϕ de sete maneiras diferentes mas equivalentes, ou seja

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= a(1 - \phi^2), & W_\phi(\chi) &= \frac{a\chi^2}{b^2}, & W_\phi(\phi, \chi) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \phi^2}, & W_\phi(\rho) &= a(1 - \rho^2) \\ W_\phi(\phi, \rho) &= a(1 - \rho\phi), & W_\phi(\chi, \rho) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \rho^2}, & W_\phi(\phi, \chi, \rho) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \rho\phi}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Analogamente podemos verificar que W_χ e W_ρ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, & W_\chi(\phi) &= -ab\phi\sqrt{1 - \phi^2}, & W_\chi(\phi, \chi) &= -a\chi\phi, \\ W_\chi(\rho) &= -ab\rho\sqrt{1 - \rho^2}, & W_\chi(\chi, \rho) &= -a\rho\chi, & W_\chi(\phi, \rho) &= -ab\phi\sqrt{1 - \rho^2}, \\ W_\chi(\phi, \chi, \rho) &= -ab\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}\sqrt{1 - \rho\phi}; \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} W_\rho(\rho) &= a(1 - \rho^2), & W_\rho(\phi) &= a(1 - \phi^2), & W_\rho(\phi, \rho) &= a(1 - \rho\phi), \\ W_\rho(\chi) &= \frac{a\chi^2}{b^2}, & W_\rho(\chi, \rho) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \rho^2}, & W_\rho(\phi, \chi) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \phi^2}, \\ W_\rho(\phi, \chi, \rho) &= \frac{a\chi}{b}\sqrt{1 - \rho\phi}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Vamos inicialmente tomar $a_{12} = a_{16} = a_{17} = b_3 = b_4 = b_5 = b_7 = a_{21} = a_{22} = a_{26} = a_{27} = 0$ a fim de evitar raízes no nossos potenciais polinomiais. Além disso vamos escolher $c_{12} = c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{17} = 0$, dessa forma os vínculos se tornam $a_{11} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 1$, $b_1 + b_2 + b_6 = 1$, $a_{23} + a_{24} + a_{25} = 1$ e $c_{11} = -c_{13}$. Conseqüentemente, a equação (4.46) nos leva a

$$c_{11}g_\chi(\chi) = -b_2a\chi - a_{11}\frac{2a\chi}{b^2}, \quad (4.92)$$

integrando o resultado anterior em relação a χ , temos que

$$g(\chi) = -\frac{a\chi^2}{2b^2c_{11}}(b_2b^2 + 2a_{11}). \quad (4.93)$$

A equação anterior pode ser reescrita via função de deformação (4.93), como

$$g(\phi) = -\frac{a(1 - \phi^2)}{2c_{11}}(b_2b^2 + 2a_{11}). \quad (4.94)$$

Logo, a partir desses resultados determinamos que

$$W_\phi = -\frac{1}{2}a[-2 + 2a_{14}\rho^2 + 2a_{15}\rho\phi - 2(-1 + a_{14} + a_{15})\phi^2 + b^2(-1 + \phi^2) + \chi^2]. \quad (4.95)$$

Agora, para encontrarmos W_χ é importante notar que a única forma de evitar raízes em nosso potencial polinomial é considerando $b_2 = b_6 = 0$ o que implica em $\tilde{f} = 0$. Conseqüentemente, W_χ será simplesmente

$$W_\chi = -a\phi\chi. \quad (4.96)$$

Por outro lado, utilizando as diferentes formas de W_ϕ e W_ρ bem como os vínculos, em (4.45) podemos reescreve-la na forma

$$-2a_{14}a\rho - a_{15}a\rho = -2a_{24}a\rho + -a_{25}a\rho + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \rho). \quad (4.97)$$

Escolhendo $c_{33} = 0$ e integrando com relação a ϕ , obtemos

$$\tilde{g}(\phi, \rho) = \frac{1}{c_{35}} \left(-2a_{14}a\rho\phi - a_{15}a\frac{\phi^2}{2} + a_{24}\phi^2 + a_{25}a\rho\phi \right), \quad (4.98)$$

e usando a função deformadora (4.92) encontramos

$$\tilde{g}(\rho) = \frac{1}{c_{35}} \left(-2a_{14}a\rho^2 - a_{15}a\frac{\rho^2}{2} + a_{24}\rho^2 + a_{25}a\rho^2 \right). \quad (4.99)$$

Logo, tomando $c_{31} = c_{32} = c_{36} = c_{37} = 0$, temos que $c_{35} = -c_{34}$ e assim W_ρ pode ser escrito como

$$W_\rho = \frac{1}{2}a \left[2 + (-2 + 4a_{14} + a_{15})\rho^2 - 4a_{14}\rho\phi - a_{15}\phi^2 \right]. \quad (4.100)$$

Usando as equações (4.95), (4.96) e (4.100) podemos extrair o super potencial do modelo, que neste caso é escrito na forma

$$W(\phi, \chi, \rho) = \frac{1}{6}a \left[(-2 + 4a_{14} + a_{15})\rho^3 - 6a_{14}\rho^2\phi + \rho(6 - 3a_{15}\phi^2) + \phi(6 + 2(-1 + a_{14} + a_{15})\phi^2 - b^2(-3 + \phi^2) - 3\chi^2) \right]. \quad (4.101)$$

O superpotencial anterior corresponde a um novo modelo efetivo analítico composto por três campos escalares, o qual resulta em uma infinidade de potenciais associados a diferentes valores das constantes a , b , a_{14} e a_{15} .

4.4.3 Exemplo 3

Este exemplo foi construído combinando três modelos idênticos (ϕ^6, χ^6, ρ^6) , cujas equações de primeira ordem são dadas por

$$W_\phi = -\frac{a\phi}{2}(2 - \phi^2), \quad W_\chi = -\frac{a\chi}{2}(2 - \chi^2), \quad W_\rho = -\frac{a\rho}{2}(2 - \rho^2), \quad (4.102)$$

com as respectivas soluções analíticas:

$$\phi = \sqrt{1 - \tanh(ax)}, \quad \chi = \sqrt{1 - \tanh(ax)}, \quad \rho = \sqrt{1 - \tanh(ax)}. \quad (4.103)$$

Podemos ainda considerar as funções deformadoras escritas na forma:

$$\phi = \chi, \quad \phi = \rho, \quad \chi = \rho. \quad (4.104)$$

O passo seguinte consiste em reescrever cada uma dessas equações diferenciais de sete maneiras diferentes e equivalentes. Deste modo, usando as deformações e suas inversas, temos

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \phi^2), & W_\phi(\chi) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \chi^2), & W_\phi(\phi, \chi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi^2), \\ W_\phi(\rho) &= -\frac{a\rho}{2}(2 - \rho^2), & W_\phi(\phi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \rho^2), & & \\ W_\phi(\chi, \rho) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \rho^2), & W_\phi(\phi, \chi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi\rho), & & \end{aligned} \quad (4.105)$$

bem como,

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \chi^2), & W_\chi(\phi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \phi^2), & W_\chi(\phi, \chi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi^2), \\ W_\chi(\rho) &= -\frac{a\rho}{2}(2 - \rho^2), & W_\chi(\phi, \rho) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \rho^2), & & \\ W_\chi(\phi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \rho^2), & W_\chi(\phi, \chi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi\rho), & & \end{aligned} \quad (4.106)$$

e,

$$\begin{aligned} W_\rho(\rho) &= -\frac{a\rho}{2}(2 - \rho^2), & W_\rho(\phi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \phi^2), & W_\rho(\phi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \rho^2), \\ W_\rho(\chi) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \chi^2), & W_\rho(\chi, \rho) &= -\frac{a\chi}{2}(2 - \rho^2), & & \\ W_\rho(\phi, \chi) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi^2), & W_\rho(\phi, \chi, \rho) &= -\frac{a\phi}{2}(2 - \chi\rho). & & \end{aligned} \quad (4.107)$$

Vamos agora, substituir as diferentes formas de W_ϕ e W_χ na equação (4.46) e em seguida tomar suas respectivas derivadas, isso nos leva a

$$\begin{aligned} &-\frac{a_{11}a}{2}(2 - 3\chi^2) + a_{12}a\phi\chi - \frac{a_{16}a}{2}(2 - \rho^2) + \frac{a_{17}a\phi\rho}{2} + c_{11}g_\chi(\chi) + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) \\ &= -\frac{b_2a}{2}(2 - \chi^2) - \frac{b_3a}{2}(2 - 3\phi^2) - \frac{b_5a}{2}(2 - \rho^2) - \frac{b_7a}{2}(2 - \chi\rho). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Considerando $c_{12} = 0$ e em seguida integrando com relação a χ , temos que

$$\begin{aligned} c_{11}g(\chi) = & -\frac{b_2a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{b_3a}{2}(2\chi - 3\chi^3) - \frac{b_5a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{b_7a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) \\ & + \frac{a_{11}a}{2}(2\chi - \chi^3) - \frac{a_{12}a\chi^3}{3} + \frac{a_{16}a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{a_{17}a\chi^3}{6}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

e via função de deformação, obtemos

$$\begin{aligned} c_{11}g(\phi) = & -\frac{b_2a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) - \frac{b_3a}{2}(2\phi - \phi^3) - \frac{b_5a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) - \frac{b_7a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) \\ & + \frac{a_{11}a}{2}(2\phi - \phi^3) - \frac{a_{12}a\phi^3}{3} + \frac{a_{16}a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) - \frac{a_{17}a\phi^3}{6}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Assim, podemos escrever W_ϕ como sendo

$$\begin{aligned} W_\phi = & -\frac{a_{11}a\chi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{a_{12}a\phi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{a_{13}a\phi}{2}(2 - \phi^2) - \frac{a_{14}a\rho}{2}(2 - \rho^2) \\ & - \frac{a_{15}a\phi}{2}(2 - \rho^2) - \frac{a_{16}a\chi}{2}(2 - \rho^2) - \frac{a_{17}a\phi}{2}(2 - \chi\rho) - \frac{b_2a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{b_3a}{2}(2\chi - 3\chi^3) \\ & - \frac{b_5a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{b_7a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) + \frac{a_{11}a}{2}(2\chi - \chi^3) - \frac{a_{12}a\chi^3}{3} + \frac{a_{16}a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{a_{17}a\chi^3}{6} \\ & + \frac{b_2a}{2}(2\phi + \frac{\phi^3}{3}) + \frac{b_3a}{2}(2\phi - 3\phi^3) + \frac{b_5a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{b_7a}{2}(2\phi + \frac{\phi^3}{3}) - \frac{a_{11}a}{2}(2\phi - \phi^3) \\ & + \frac{a_{12}a\phi^3}{3} - \frac{a_{16}a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{a_{17}a\phi^3}{6}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Além disso, a partir das diferentes formas de W_χ e W_ρ a equação (4.43) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{a_{21}a}{2}(2 - 3\chi^2) - \frac{a_{22}a}{2}(2 - \rho^2) + a_{26}a\phi\chi + \frac{a_{27}a\phi\rho}{2} = & -\frac{b_4a}{2}(2 - 3\rho^2) + b_5a\phi\rho + b_6a\chi\rho \\ & + \frac{b_7a\phi\chi}{2} + c_{24}\tilde{f}_\rho(\rho) + c_{26}\tilde{f}_\rho(\chi, \rho). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Tomando $c_{26} = 0$ e integrando com respeito a ρ , encontramos

$$\begin{aligned} +c_{24}\tilde{f}(\rho) = & -\frac{a_{21}a}{2}(2\rho - \rho^3) - \frac{a_{22}a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}) + \frac{a_{26}a\rho^3}{3} + \frac{a_{27}a\rho^3}{6} + \frac{b_4a}{2}(2\rho - \rho^3) \\ & - \frac{b_5a\rho^3}{3} - \frac{b_6a\rho^3}{3} - \frac{b_7a\rho^3}{6}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

e usando a função de deformação podemos reescreve-la na forma

$$\begin{aligned} c_{24}\tilde{f}(\chi) = & -\frac{a_{21}a}{2}(2\chi - \chi^3) - \frac{a_{22}a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) + \frac{a_{26}a\chi^3}{3} + \frac{a_{27}a\chi^3}{6} + \frac{b_4a}{2}(2\chi - \chi^3) \\ & - \frac{b_5a\chi^3}{3} - \frac{b_6a\chi^3}{3} - \frac{b_7a\chi^3}{6} \end{aligned} \quad (4.114)$$

Assim, W_χ passa a ser escrito como

$$\begin{aligned}
W_\chi = & -\frac{b_1 a \chi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{b_2 a \phi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{b_3 a \phi}{2}(2 - \phi^2) - \frac{b_4 a \rho}{2}(2 - \rho^2) - \frac{b_5 a \phi}{2}(2 - \rho^2) \\
& - \frac{b_6 a \chi}{2}(2 - \rho^2) - \frac{b_7 a \phi}{2}(2 - \chi \rho) - \frac{a_{21} a}{2}(2\rho - \rho^3) - \frac{a_{22} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}) + \frac{a_{27} a \rho^3}{6} \\
& + \frac{b_4 a}{2}(2\rho - \rho^3) - \frac{b_5 a \rho^3}{3} - \frac{b_6 a \rho^3}{3} - \frac{b_7 a \rho^3}{6} + \frac{a_{26} a \rho^3}{3} + \frac{a_{21} a}{2}(2\chi - \chi^3) + \frac{a_{22} a}{2}(2\chi - \frac{\chi^3}{3}) \\
& - \frac{a_{26} a \chi^3}{3} + \frac{a_{27} a \chi^3}{6} - \frac{b_4 a}{2}(2\chi - \chi^3) + \frac{b_5 a \chi^3}{3} + \frac{b_6 a \chi^3}{3} + \frac{b_7 a \chi^3}{6}. \tag{4.115}
\end{aligned}$$

Além disso, a partir das diferentes formas de W_ϕ , W_χ e W_ρ e considerando $c_{35} = 0$, podemos reescrever a equação (4.45) na forma

$$\begin{aligned}
c_{33} \tilde{g}(\phi) = & -\frac{a_{14} a}{2}(2\phi - \phi^3) + \frac{a_{15} a \phi^3}{3} + \frac{a_{16} a \phi^3}{3} + \frac{a_{17} a \phi^3}{6} + \frac{a_{24} a}{2}(2\phi - \phi^3) \\
& + \frac{a_{25} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{a_{26} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{a_{27} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}), \tag{4.116}
\end{aligned}$$

e usando a função de deformação encontramos

$$\begin{aligned}
c_{33} \tilde{g}(\rho) = & -\frac{a_{14} a}{2}(2\rho - \rho^3) + \frac{a_{15} a \rho^3}{3} + \frac{a_{16} a \rho^3}{3} + \frac{a_{17} a \rho^3}{6} + \frac{a_{24} a}{2}(2\rho - \rho^3) \\
& + \frac{a_{25} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}) + \frac{a_{26} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}) + \frac{a_{27} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}). \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Finalmente, determinamos que a forma final de W_ρ é escrita como

$$\begin{aligned}
W_\rho = & -\frac{a_{21} a \chi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{a_{22} a \chi}{2}(2 - \rho^2) - \frac{a_{23} a \rho}{2}(2 - \rho^2) - \frac{a_{24} a \phi}{2}(2 - \phi^2) \\
& - \frac{a_{25} a \phi}{2}(2 - \rho^2) - \frac{a_{26} a \phi}{2}(2 - \chi^2) - \frac{a_{27} a \phi}{2}(2 - \chi \rho) - \frac{a_{14} a}{2}(2\phi - \phi^3) + \frac{a_{15} a \phi^3}{3} \\
& + \frac{a_{16} a \phi^3}{3} + \frac{a_{17} a \phi^3}{6} + \frac{a_{24} a}{2}(2\phi - \phi^3) + \frac{a_{25} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{a_{26} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) \\
& + \frac{a_{27} a}{2}(2\phi - \frac{\phi^3}{3}) + \frac{a_{14} a}{2}(2\rho - \rho^3) - \frac{a_{15} a \rho^3}{3} - \frac{a_{16} a \rho^3}{3} - \frac{a_{17} a \rho^3}{6} - \frac{a_{24} a}{2}(2\rho - \rho^3) \\
& - \frac{a_{26} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}) - \frac{a_{27} a}{2}(2\rho - \frac{\rho^3}{3}). \tag{4.118}
\end{aligned}$$

As equações (4.111), (4.115) e (4.118) nos permitem determinar a forma de $W(\phi, \chi, \rho)$, sendo que este corresponde a mais um novo potencial analítico composto por três campos escalares. Uma característica que deve ser salientada é que a forma funcional dos modelos de um campo que utilizamos como ponto de partida neste exemplo, nos permitiu utilizar o método de extensão para modelos de três campos escalares em sua total amplitude.

Capítulo 5

Defeitos Topológicos em Quebra de Simetria de Lorentz

Nos últimos dez anos, pesquisas que envolvem defeitos topológicos e quebra de simetria de Lorentz tem sido tema central de diversas investigações científicas, como podemos apontar em ([14], [15], [16] e [7]). Em um trabalho recente Dutra et al. [14], introduziram alguns modelos não-lineares no espaço-tempo bidimensional de dois campos escalares interagindo em cenários que violam a simetrias de Lorentz e CPT. Este trabalho generalizou o modelo proposto por Bazeia e colaboradores [15], onde os autores introduziram defeitos estáticos analíticos como soluções de modelos bidimensionais com quebra de simetria de Lorentz. Em ambos os trabalhos mencionados, a quebra de simetria é induzida por um tensor com coeficientes fixos que arbitrariamente acoplam os dois campos. Além de recuperar o modelo e as soluções apresentadas em [15], o trabalho [7] apresenta uma classe de defeitos viajantes em sistemas com quebra de simetria de Lorentz e CPT. Além disso, a partir deste modelo, foi obtido um conjunto completo de soluções exatas. Estas soluções apresentam um comportamento crítico controlado pela escolha de uma constante de integração arbitrária.

Dentro desta perspectiva mostremos, neste capítulo, que o mesmo modelo analítico estudado em [7] pode ser obtido via método de extensão. Para tanto, desenvolvemos um novo método para obter um modelo efetivo mais geral e em seguida analisamos algumas órbitas geradas por esse novo modelo. Assim, generalizamos o trabalho de Correa e Dutra [7]. O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 5.1 introduzimos algumas ideias fundamentais a respeito da violação da simetria de Lorentz. Na seção 5.2

discutimos defeitos topológicos em quebra de simetria de Lorentz. Para tanto utilizamos um modelo generalizado proposto em [7]. Na seção seguinte, 5.3, discorreremos sobre um novo método, baseado no método de deformação. Este método nos permitirá gerar novos modelos a partir do modelo inicial proposto. Finalmente na seção 5.4 utilizamos o método no modelo descrito em [7] e apresentamos os resultados obtidos.

5.1 Quebra de simetria de Lorentz

A simetria de Lorentz é a simetria fundamental por trás do princípio da relatividade especial proposto por Albert Einstein em 1905.

Até então, as chamadas transformações de Galileu permitiam transformar as equações da física de um referencial inercial para outro, de forma a manter as equações invariantes. Isto significa dizer que, a forma das equações da física não podem depender do estado de movimento de um observador, uma vez que o movimento é relativo.

No entanto havia contradições quando se considera a teoria do eletromagnetismo. A solução destas contradições levaram Albert Einstein a propor a Transformação de Lorentz com a transformação fundamental entre referenciais inerciais em movimento relativo. Para exemplificar, podemos considerar dois referenciais inerciais K e K' com a velocidade relativa \mathbf{v} entre eles. As coordenadas de tempo e de espaço de um ponto são (t, x, y, z) e (t', x', y', z') nos referenciais K e K' , respectivamente. Os eixos coordenados dos dois sistemas são paralelos e orientados de modo que o sistema K' move-se na direção dos z positivos, com velocidade escalar v , medida no sistema K . Por simplicidade, vamos considerar as origens das coordenadas em K e em K' serem coincidentes em $t = t' = 0$. Se a fonte luminosa está em repouso no sistema K (e, portanto, movendo-se com velocidade \mathbf{v} na direção dos z negativos, conforme medido em K') e pisca rapidamente, acedendo e apagando em $t = t' = 0$, o segundo postulando de Einstein implica os observadores, tanto em K como em K' , verem uma esfera de radiação expandindo-se com centro na respectiva origem, com velocidade escalar \mathbf{c} . A frente de onda atinge um ponto (x, y, z) , no sistema K , no instante \mathbf{t} dado pela equação

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (5.1)$$

Analogamente, no sistema K' , a frente de onda está especificada por

$$c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \quad (5.2)$$

Com a hipótese de o espaço-tempo ser homogêneo e isotrópico, conforme implica o primeiro postulado de Einstein, a relação entre os dois conjuntos de coordenadas é linear. As formas quadráticas (5.1) e (5.2) estão relacionadas por

$$c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda^2 [c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \quad (5.3)$$

onde $\lambda = \lambda(\mathbf{v})$ é uma possível modificação da escala entre os sistemas de coordenadas. Com a escolha de orientação dos eixos, e levando em conta a transformação inversa, de K' para K , é uma questão imediata a de mostrar que $\lambda(\mathbf{v}) = 1$ para todos os \mathbf{v} , e as coordenadas temporal e espaciais em K' estão relacionadas às coordenadas em K pela *transformação de Lorentz* [17]

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde, $x_0 = ct$, $x_1 = z$, $x_2 = y$ e $x_3 = x$. Além de $\beta = \mathbf{v}/c$, $\beta = |\beta|$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Apesar das observações experimentais de teorias relativísticas corroborarem com cenários onde a simetria de Lorentz é sempre preservada, estudos sobre a teoria de supercordas [18] sugeriram que esta simetria deveria ser violada em regimes de altas energias. Desde então uma grande quantidade de pesquisas envolvendo a quebra de simetria de Lorentz propagou-se em diversos ramos da física, algumas delas podem ser vistas em [19], [20], [21] e [22].

5.2 Modelo generalizado com quebra de simetria de Lorentz

No trabalho [14] os autores analisaram a quebra de simetria de Lorentz em modelos de dois campos escalares reais através da adição de funções vetoriais na densidade de lagrangiana. Outrossim, na referência [16] os efeitos da violação da simetria de Lorentz e CPT em defeitos topológicos para dois campos escalares reais também foram investigados. Neste caso a densidade lagrangiana tem um termo (um tensor) que quebra a simetria de Lorentz e conseqüentemente a simetria CPT. Com o intuito de construir um modelo mais

geral, Correa e Dutra [7] descreveram um modelo, cuja densidade de lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - G^\mu(\phi, \chi)\partial_\mu\phi - F^\mu(\phi, \chi)\partial_\mu\chi \\ & - \gamma k^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi) - p k^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\chi - V(\phi, \chi), \end{aligned} \quad (5.5)$$

em que $G^\mu(\phi, \chi)$ e $F^\mu(\phi, \chi)$ são as funções vetoriais; e $V(\phi, \chi)$ o potencial que especifica a teoria. Além disso, $k^{\mu\nu}$ é um tensor constante, representado por uma matriz 2X2, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 são parâmetros arbitrários,

$$k^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

com $\mu, \nu = 0, 1$.

A partir de (5.5), as equações de movimento para soluções do tipo onda viajante na qual $\phi = \phi(u)$ e $\chi = \chi(u)$, com $u = Ax + Bt$ são escritas como

$$-\phi_{uu} + \tilde{\beta}\chi_{uu} - \tilde{\alpha}\chi_u + \tilde{V}_\phi = 0, \quad (5.7)$$

e

$$-\chi_{uu} + \tilde{\beta}\phi_{uu} - \tilde{\alpha}\phi_u + \tilde{V}_\chi = 0, \quad (5.8)$$

nas quais foi utilizada as seguintes definições:

$$\tilde{\beta} \equiv -Kp[(\alpha_2 + \alpha_3)AB + \alpha_4A^2 + \alpha_1B^2], \quad (5.9)$$

$$\tilde{\alpha} \equiv -K[B(F_\phi^0 - G_\chi^0) + A(F_\phi^1 - G_\chi^1)], \quad (5.10)$$

$$\tilde{V}_\phi \equiv KV_\phi, \quad (5.11)$$

$$\tilde{V}_\chi \equiv KV_\chi, \quad (5.12)$$

onde,

$$K = \frac{1}{(1 + \gamma\alpha_4)A^2 - (1 - \gamma\alpha_1)B^2 + AB\gamma(\alpha_2 + \alpha_4)}. \quad (5.13)$$

A fim de desacoplar os pares de equações de segunda ordem, pode-se multiplicar a equação (5.7) por ϕ_u e a equação (5.8) por χ_u . Feito isso, podemos soma-las para obter

$$-\frac{1}{2}(\phi_u^2 + \chi_u^2) + \tilde{\beta}\phi_u\chi_u + \tilde{V}(\phi, \chi) = 0. \quad (5.14)$$

Observe que esta equação possui um termo de acoplamento entre os campos ϕ e χ . Podemos desacopla-la fazendo uma rotação do tipo

$$\begin{pmatrix} \phi(u) \\ \chi(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(u) \\ \varphi(u) \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

deste modo, a equação (5.14) se torna

$$-\frac{1}{2}(1 - \tilde{\beta})\theta_u^2 - \frac{1}{2}(1 + \tilde{\beta})\varphi_u^2 + \tilde{V}(\theta, \varphi) = 0. \quad (5.16)$$

Além disso, realizando as dilatações

$$\theta = \frac{\sigma(u)}{\sqrt{1 - \tilde{\beta}}}, \quad \varphi = \frac{\rho(u)}{\sqrt{1 - \tilde{\beta}}}, \quad (5.17)$$

obtemos

$$-\frac{1}{2}\sigma_u^2 - \frac{1}{2}\rho_u^2 + \tilde{V}(\sigma, \rho) = 0. \quad (5.18)$$

Então, o potencial pode ser escrito como

$$\tilde{V}(\sigma, \rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \rho} \right)^2, \quad (5.19)$$

com

$$\sigma_u = \frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \sigma}; \quad \rho_u = \frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \rho}. \quad (5.20)$$

A equação (5.20) nos permitirá encontrar as soluções tipo defeitos do sistema desde que saibamos a forma do super potencial. Veja também que o potencial dado por (5.19) é positivo definido.

5.3 Novo Método

Nosso método consiste, inicialmente, em reescrever a função deformadora $\phi = f(\chi)$ da seguinte forma

$$\phi^n = f^n(\chi), \quad (5.21)$$

em que “ n ” é um número inteiro diferente de zero. Após isto, vamos escrever as equações de primeira ordem, como sendo

$$\phi' = W_\phi(\phi, \chi) + C[\phi^n - f^n(\chi)]F(\phi) = \tilde{W}_\phi(\phi, \chi), \quad (5.22)$$

e

$$\chi' = W_\chi(\phi, \chi) + C[\phi^n - f^n(\chi)]G(\chi) = \tilde{W}_\chi(\phi, \chi), \quad (5.23)$$

onde “ C ” é uma constante arbitrária e $F(\phi)$ e $G(\chi)$ são funções de ϕ e χ , respectivamente. Observe que a adição desses termos não compromete as equações de primeira ordem já que $\phi^n - f^n(\chi) = 0$

Para que as equações (5.22) e (5.23) sejam diferenciais exatas o seguinte vínculo deve ser satisfeito

$$\tilde{W}_{\phi\chi} = \tilde{W}_{\chi\phi}, \quad (5.24)$$

o que resulta em

$$W_{\phi\chi} - C n f^{n-1} f_\chi F(\phi) = W_{\chi\phi} - C n \phi^{n-1} G(\chi). \quad (5.25)$$

Se substituirmos a equação (4.7) no resultado acima encontramos

$$- f^{n-1} f_\chi F(\phi) = \phi^{n-1} G(\chi), \quad (5.26)$$

e para que essa igualdade seja satisfeita devemos ter

$$F(\phi) = \phi^{n-1}, \quad e \quad G(\chi) = -f^{n-1} f_\chi. \quad (5.27)$$

Dessa forma as equações de primeira ordem podem ser escritas como

$$\phi' = W_\phi(\phi, \chi) + C[\phi^n - f^n(\chi)]\phi^{n-1}, \quad (5.28)$$

e

$$\chi' = W_\chi(\phi, \chi) - C[\phi^n - f^n(\chi)]f^{n-1} f_\chi. \quad (5.29)$$

Observe que com a função de deformação em mãos, podemos construir uma série de novos modelos a partir das equações (5.28) e (5.29). Isto será feito na próxima seção.

5.4 Novas órbitas e potenciais

Em [7] foi proposto o superpotencial:

$$W(\sigma, \rho) = \lambda\sigma + \frac{\lambda}{3}\sigma^3 + \mu\sigma\rho^2, \quad (5.30)$$

cujas equações de primeira ordem são dadas por

$$W_\sigma = -\mu(-1 + \sigma^2 + \rho^2), \quad e \quad W_\rho = -2\mu\sigma\rho, \quad (5.31)$$

e usando a relação [23]:

$$\sigma = \sqrt{1 + c_0\rho + \rho^2}, \quad (5.32)$$

encontram-se, para $\lambda = \mu$, as soluções (positivas) escritas na forma

$$\sigma(u) = \frac{(c_0^2 - 4)e^{4\mu(u-u_0)} - 1}{[c_0e^{2\mu(u-u_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(u-u_0)}}, \quad (5.33)$$

e

$$\rho(u) = \frac{4e^{2\mu(u-u_0)}}{[c_0e^{2\mu(u-u_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(u-u_0)}}. \quad (5.34)$$

Vamos agora aplicar o novo método nesse modelo considerando $\sigma = \sqrt{1 + c_0\rho + \rho^2} = f(\rho)$ como sendo a função de deformação. Logo, usando a equação (5.21) para $n = 2$, temos

$$\sigma^2 = 1 + c_0 + \rho^2. \quad (5.35)$$

Assim, as equações (5.22) e (5.23) podem ser reescritas como

$$\sigma' = -\mu(-1 + \sigma^2 + \rho^2) + C(\sigma^2 - 1 - c_0\rho - \rho^2)F(\sigma) = \tilde{W}_\sigma, \quad (5.36)$$

$$\rho' = -2\mu\sigma\rho + C(\sigma^2 - 1 - c_0\rho - \rho^2)G(\sigma) = \tilde{W}_\rho. \quad (5.37)$$

Já as equações vistas em (5.27) passam a ser

$$F(\sigma) = \sigma^{n-1}, \quad e \quad G(\rho) = -f^{n-1}f_\rho, \quad (5.38)$$

ou ainda,

$$F(\sigma) = \sigma, \quad e \quad G(\rho) = -\frac{c_0 + 2\rho}{2}. \quad (5.39)$$

Logo, substituindo estas funções nas equações (5.36) e (5.37) encontramos

$$\sigma' = -\mu(-1 + \sigma^2 + \rho^2) + C(\sigma^2 - 1 - c_0\rho - \rho^2)\sigma, \quad (5.40)$$

e

$$\rho' = -2\mu\sigma\rho - \frac{C(\sigma^2 - 1 - c_0\rho - \rho^2)(c_0 + 2\rho)}{2}. \quad (5.41)$$

Agora, para obter um modelo efetivo vamos integrar as equações acima, logo temos que

$$W(\sigma) = \mu \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{3} - \rho^2\sigma \right) + \frac{C}{2} \left(\frac{\sigma^4}{2} - \sigma^2 - c_0\rho\sigma^2 - \rho^2\sigma^2 \right) + \tilde{F}(\rho), \quad (5.42)$$

e

$$W(\rho) = -\mu\sigma\rho^2 + \frac{C}{2} \left(c_0\rho + c_0^2\frac{\rho^2}{2} + c_0\frac{\rho^3}{3} + \rho^2 + 2c_0\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{2} - c_0\rho\sigma^2 - \rho^2\sigma^2 \right) + \tilde{G}(\sigma). \quad (5.43)$$

Veja que para determinarmos uma forma unívoca para W devemos considerar

$$\tilde{F}(\rho) = \frac{C}{2} \left(c_0\rho + c_0^2\frac{\rho^2}{2} + c_0\frac{\rho^3}{3} + \rho^2 + 2c_0\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{2} \right), \quad (5.44)$$

e

$$\tilde{G}(\sigma) = \mu \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{3} \right) + \frac{C}{2} \left(\frac{\sigma^4}{2} - \sigma^2 \right). \quad (5.45)$$

Então, de uma maneira mais compacta podemos escrever $W(\sigma, \chi)$ como sendo

$$W(\sigma, \rho) = \frac{1}{12} \left\{ 3C\sigma^2(-2 + C\sigma^2) + 12\mu\sigma - 12\mu\rho^2\sigma - 4\mu\sigma^3 + 3C\rho(c_0 + \rho) \right\} [2 - 2\sigma^2 + \rho(c_0 + \rho)]. \quad (5.46)$$

Observe ainda que a matriz de rotação (5.15) e a equação (5.17) nos permite reescrever σ e ρ em termos dos campos originais ϕ e χ via as relações

$$\sigma(u) = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\beta}}{2}} (\phi(u) + \chi(u)), \quad (5.47)$$

e

$$\rho(u) = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\beta}}{2}} (\phi(u) - \chi(u)). \quad (5.48)$$

Substituindo a equação (5.46) na equação (5.19) tomando suas respectivas derivadas e em seguida utilizando as relações (5.47) e (5.48) o potencial passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\phi, \chi) = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \left(2\mu(-1 + \phi^2 - 2\tilde{\beta}\phi\chi + \chi^2) + \sqrt{2 - 2\tilde{\beta}} C(\phi + \chi)(1 - 2\phi\chi + \tilde{\beta}(\phi^2 + \chi^2)) \right. \right. \\ & + \sqrt{1 - \tilde{\beta}^2} C(-\phi^2 + \chi^2)c_0 \left. \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \tilde{\beta}^2}\mu(-\phi + \chi)(\phi + \chi) - \frac{1}{4}C(\sqrt{2}\sqrt{1 + \tilde{\beta}}(\phi - \chi) - c_0) \right. \\ & \left. \left. \cdot (-2(1 - 2\phi\chi + \tilde{\beta}(\phi^2 + \chi^2) + \sqrt{2}\sqrt{1 + \tilde{\beta}}(\phi - \chi)c_0) \right)^2 \right]. \quad (5.49) \end{aligned}$$

Mas observe que a partir das relações (5.11) e (5.12) podemos verificar que $V(\phi, \chi) = K \tilde{V}(\phi, \chi)$, dessa forma o potencial será dado por

$$\begin{aligned}
V(\phi, \chi) = & \frac{1}{2}K \left[\frac{1}{4} \left(2\mu(-1 + \phi^2 - 2\tilde{\beta}\phi\chi + \chi^2) + \sqrt{2 - 2\tilde{\beta}} C(\phi + \chi)(1 - 2\phi\chi + \tilde{\beta}(\phi^2 + \chi^2)) \right. \right. \\
& + \left. \sqrt{1 - \tilde{\beta}^2} C(-\phi^2 + \chi^2)c_0 \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \tilde{\beta}^2}\mu(-\phi + \chi)(\phi + \chi) - \frac{1}{4}C(\sqrt{2}\sqrt{1 + \tilde{\beta}}(\phi - \chi) - c_0) \right. \\
& \left. \left. \times (-2(1 - 2\phi\chi + \tilde{\beta}(\phi^2 + \chi^2) + \sqrt{2}\sqrt{1 + \tilde{\beta}}(\phi - \chi)c_0)) \right)^2 \right]. \tag{5.50}
\end{aligned}$$

A fim de ilustrar este modelo de dois campos, vamos gerar alguns gráficos onde mostramos diferentes formas do potencial e suas respectivas órbitas.

Na Figura 5.1 os mínimos do primeiro gráfico são $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$, $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, -0.707)$ no plano (ϕ, χ) . Já o segundo e terceiro gráfico possuem os mesmo vácuos $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$ e $(-0.707, -0.707)$. Nos três casos as órbitas conectam os pontos $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, 0.707)$ (linhas sólidas). Pode-se observar que a mudança de c_0 altera o formato do potencial mas as órbitas permanecem fixas no caso de $\tilde{\beta} = 0$.

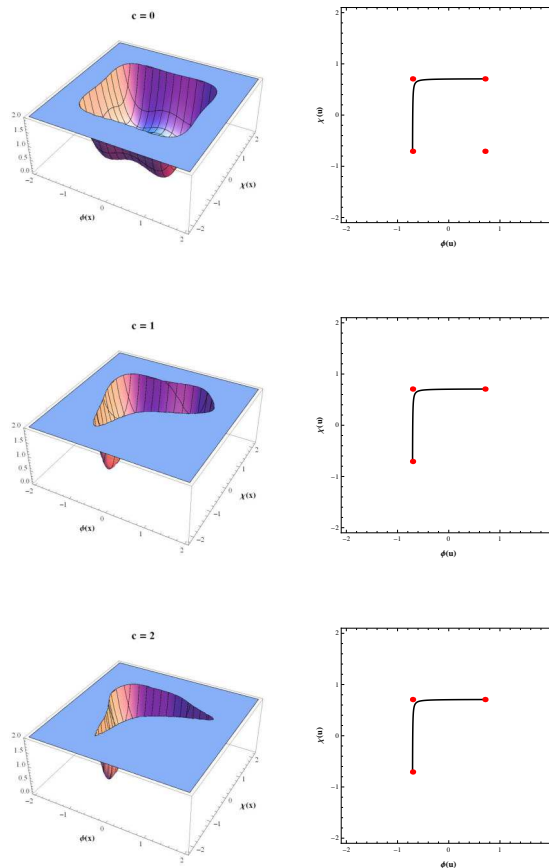


Figura 5.1: Diferentes formas do potencial $V(\phi, \chi)$ para o caso $c_0 = -2.01$, $\tilde{\beta} = 0$, $\mu = 1$ e $K = 1$, com seus mínimos (pontos vermelhos) e suas respectivas órbitas.

Na Figura 5.2 os vácuos do gráfico da parte superior são dados por $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$, $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, -0.707)$, sua órbita conecta os mínimos $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, 0.707)$ (linhas sólidas). Enquanto o gráfico da parte inferior possui os mínimos $(-0.577, 0.577)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ e $(0.577, -0.577)$. Neste caso, a órbita conecta os vácuos $(-1,-1)$ e $(1,1)$. Veja que ao manter c_0 fixo e modificar o valor de $\tilde{\beta}$, percebemos que tanto a órbita quanto o formato do potencial são alterados. O fato de $\tilde{\beta}$ ser diferente implica que estamos considerando efeitos da quebra de simetria de Lorentz.

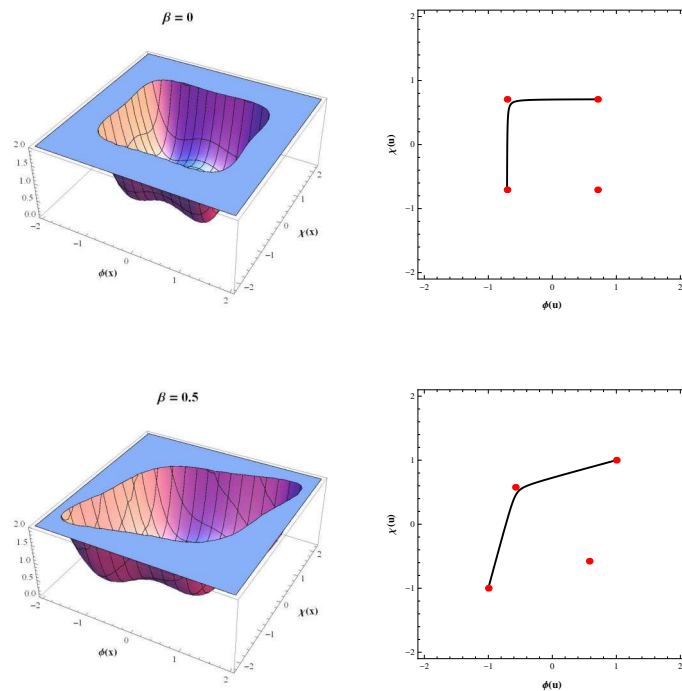


Figura 5.2: Nesta figura mostramos o potencial $V(\phi, \chi)$ para o caso $c_0 = -2.01$, $C = 0$, $\mu = 1$ e $K = 1$, seus mínimos (pontos vermelhos) e as órbitas correspondentes.

Na Figura 5.3, o primeiro gráfico possui os vácuos $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$ e $(-0.707, -0.707)$. Os vácuos do segundo gráfico são $(-0.577, 0.577)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. As órbitas destes modelos são idênticas aos da Figura 5.2. Observe que a alteração da constante c altera a forma do potencial mas não modifica as órbitas em relação aos gráficos da Figura 5.2.

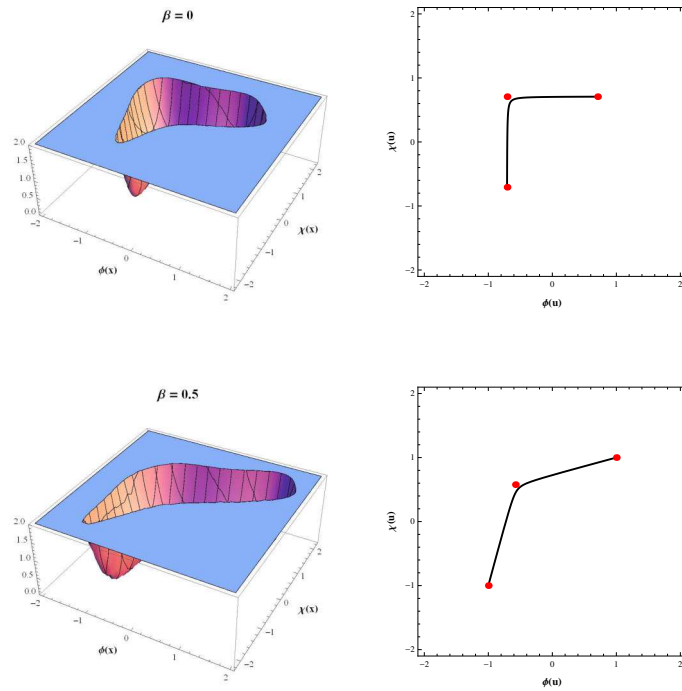


Figura 5.3: Estrutura do potencial $V(\phi, \chi)$ para $c_0 = -2.01$, $C = 1$, $\mu = 1$ e $K = 1$, com seus mínimos e suas órbitas.

Na Figura 5.4, os vácuos de ambos os gráficos estão em $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$, $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, -0.707)$. A órbita do primeiro gráfico conecta os mínimos $(-0.707, -0.707)$ e $(-0.707, 0.707)$ enquanto a do segundo conecta os mínimos $(-0.707, -0.707)$ e $(0.707, 0.707)$. Podemos perceber que a diferença das órbitas entre as figuras superior e inferior de é que na superior estamos tratando do par de soluções críticas, enquanto na inferior as soluções são não-críticas.

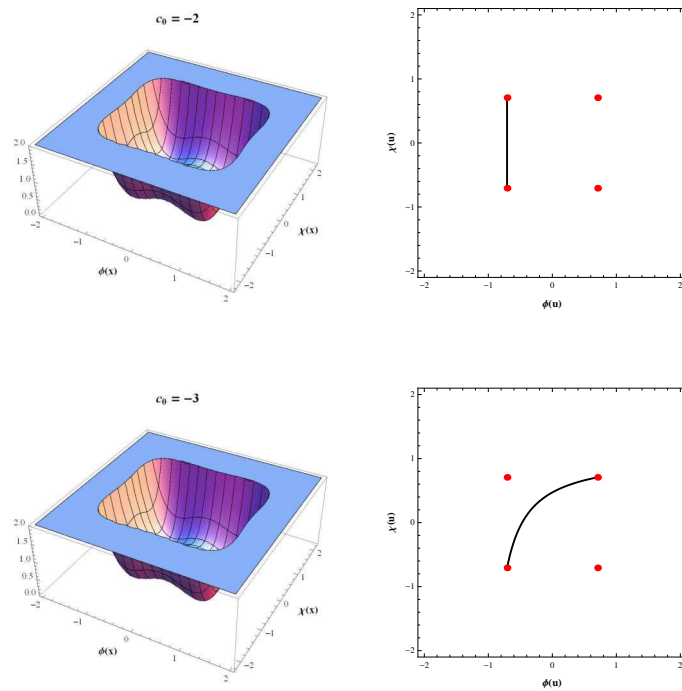


Figura 5.4: Estrutura do potencial $V(\phi, \chi)$ para $C = 0$, $\tilde{\beta} = 0$, $\mu = 1$ e $K = 1$, seus mínimos e suas respectivas órbitas.

Na Figura 5.5, os mínimos do primeiro gráfico são $(-0.707, 0.707)$, $(0.707, 0.707)$ e $(-0.707, -0.707)$ e o segundo gráfico possuem os mínimos $(-0.624, 0.921)$, $(0.707, 0.707)$ e $(-0.707, -0.707)$. Veja que as órbitas desta figura são idênticas ao da Figura 5.4 e que o formato do potencial são diferentes para os casos crítico e não-crítico.

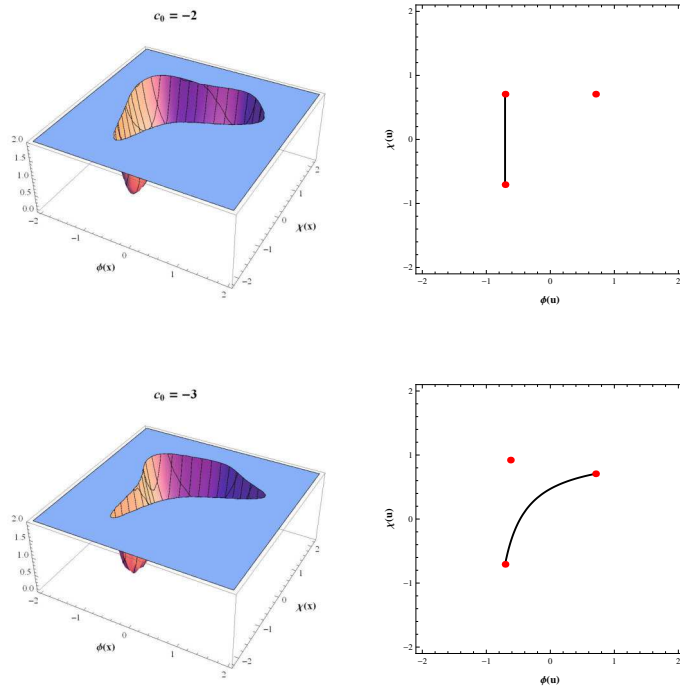


Figura 5.5: Do lado esquerdo ilustramos os potenciais para $\tilde{\beta} = 0$, $C = 1$, $\mu = 1$ e $K = 1$, do lado direito seus mínimos e órbitas correspondentes.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, foi proposto no capítulo 4, a ampliação do método de extensão de modelos, que até então descrevia modelos de dois campos, para modelos de três campos escalares reais. O procedimento consiste em acoplar três modelos de um campo escalar de forma não-trivial, via funções de deformação, para encontrar um modelo efetivo de três campos escalares com soluções analíticas. Este procedimento foi ilustrado por meio de alguns exemplos que nos permitiu verificar a eficiência do método para construir novos modelos de três campos.

Outro ponto fundamental deste trabalho foi desenvolvido no capítulo 5. Inicialmente apresentamos alguns dos resultados obtidos por Correa e Dutra [7] num trabalho em que os autores investigaram uma classe de defeitos viajantes em sistemas com quebra de simetria de Lorentz e CPT. Feito isto, discorremos sobre o novo método, baseado nos métodos de deformação e extensão, capaz de gerar um vasta quantidade de novos modelos que nos permitiu generalizar o trabalho feito por Correa e Dutra [7]. Finalizamos nosso trabalho analisando algumas das formas do novo potencial obtido e suas respectivas orbitas.

Estas duas investigações levantam uma questão interessante: o estudo de defeitos topológicos em quebra de simetria de Lorentz envolvendo modelos com três campos escalares. Esta é uma questão que estamos analisando e esperamos desenvolvê-la num futuro próximo.

Apêndice A

A dinâmica de modelos descritos por um único campo escalar real pode ser analisada por meio da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (6.1)$$

cuja ação é

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x \quad (6.2)$$

Neste caso, estamos considerando teorias de campos relativísticas que obedecem a métrica de Minkowsky $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, para sistemas quadri-dimensionais.

Tomando uma variação na ação, temos

$$\delta S = \delta \left(\int \mathcal{L} dt d^3x \right) = \int dt d^3x \delta \mathcal{L} = 0 \quad (6.3)$$

onde,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (6.4)$$

Logo,

$$\delta S = \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right] = 0 \quad (6.5)$$

Veja que, usando a regra da cadeia, o segundo termo da equação acima pode ser escrito como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi \quad (6.6)$$

Dessa forma,

$$\delta S = \int dt d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi \right\} \quad (6.7)$$

O segundo termo da integral deve ir à zero nos extremos de integração, uma vez que, estão interessados em campos escalares bem comportados no contorno, então

$$\delta S = \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0 \quad (6.8)$$

Isso implica em

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (6.9)$$

que é a equação de Euler-Lagrange para campos. Agora, vamos substituir a densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad (6.10)$$

na equação de Euler-Lagrange. O primeiro termo fica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\partial^\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]. \quad (6.11)$$

Veja que podemos fazer, $\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \delta_\nu^\mu$ e $\partial^\nu \phi = \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi$. Então a equação acima pode ser reescrita como reescrever a equação acima como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu] \quad (6.12)$$

Observe ainda que, $\partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu = \partial^\lambda \phi \delta_\nu^\mu$. Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial^\lambda \phi \delta_\nu^\mu] \quad (6.13)$$

Agora, vamos usar a convenção da soma de Einstein, para obter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi. \quad (6.14)$$

E Finalmente,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (6.15)$$

Já segundo termo é dado por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (6.16)$$

Dessa maneira a equação de movimento tem a forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (6.17)$$

que para (1,1) dimensões, pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (6.18)$$

Referências Bibliográficas

- [1] R. Rajaraman, “*Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions*”, Phys. Rev. Lett. **42**, 200, (1979).
- [2] D. Bazeia, L. Losano and J. R. L. Santos, “*Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models*”, Phys. Lett. A **377**, 1615 (2013).
- [3] D. Bazeia, L. Losano and J. Malbouisson, “*Deformed defects*”, Phys. Rev. D **66**, 101701, (2002).
- [4] E. Bogomol’nyi, “*The stability of classical solutions*”, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449-454 (1976).
- [5] M. Prasad, C. Sommerfield, “*Exact classical solution for the’t Hooft monopole and the Julia-Zee dyon*”, Phys. Rev. Lett. **35**, 760-762 (1975).
- [6] D. Bazeia, J.R.S Nascimento, R.F. Ribeiro, D. Toledo, “*Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions*”, J. Phys. A **30**, 8157 (1997).
- [7] A.S. Dutra and R.A.C. Correa, “*Traveling solitons in Lorentz and CPT breaking systems*”, Phys. Rev. D **83**, 105007 (2011).
- [8] M. A. M. Souza, D.Bazeia, L. Losano, R. Menezes, “*Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos*”, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 357-362,(2012).
- [9] Dionisio Bazeia Filho. “**Campos escalares em ação**”. Tese apresentada para concurso de Professor Titular. UFPB (2004).
- [10] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano and R. F. Ribeiro, “*Topological defects and the trial orbit method*”, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945, (2002).

- [11] J. Sadeghi, A.R. Amani and A. Imani, “*Deformation of three real scalar fields with defect structure solution*”, [arxiv:hep-th/0810.0822].
- [12] D. Bazeia, L. Losano, and C. Wotzasek, “*Domain walls in three-field models*”, Phys. Rev. D **66**, 105025, (2002).
- [13] D. Bazeia and F.A.Brito, “*Tiling the Plane without Supersymmetry*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 1094, (2000).
- [14] A.S. Dutra, M. Hott, F.A. Barrone, “*Two field BPS solutions for generalized Lorentz breaking models*”, Phys. Rev. D **74**, 085030 (2006).
- [15] M. N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, “*Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios*”, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006).
- [16] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, and R. Menezes, “*Lorentz-violating effects on topological defects generated by two real scalar fields*”, Physica D (Amsterdam) **239**, 942 (2010).
- [17] J. D. Jackson, “**Classical Electrodynamics**”, Wiley, New York, 1998.
- [18] V.A. Kostelecky and S. Samuel, “*Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*”, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [19] D. Colladay and V.A. Kostelecky, “*CPT violation and the standard model*”, Phys. Rev. D **55**, 55, 6760 (1997).
- [20] D. Colladay and V.A. Kostelecky, “*Lorentz-violating extension of the standard model*”, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [21] S.M. Carroll et al, “*Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*”, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [22] V.A. Kostelecky, “*Gravity, Lorentz Violation, and the Standard Model*”, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [23] A.S. Dutra, “*General solutions for some classes of interacting two field kinks*”, Phys. Lett. B **626**, (2005).