



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Explorando a Termodinâmica de Campos Escalares Não-Comutativos

Elisama Eraldene Marques Lima

Campina Grande

- 2014 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Explorando a Termodinâmica de Campos Escalares Não-Comutativos

Elisama Eraldene Marques Lima

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, em complementação aos requisitos para obtenção do título Mestre em Física.

Campina Grande

- 2014 -

L732e Lima, Elisama Eraldene Marques.  
Explorando a termodinâmica de campos escalares não-comutativos /  
Elisama Eraldene Marques Lima. – Campina Grande, 2014.  
54 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito".  
Referências.

1. Física de Partículas. 2. Campos Não-comutativos. 3. Propriedades  
Termodinâmicas. I. Brito, Francisco de Assis. II. Título.

CDU 539.12(043)

Elisama Eraldene Marques Lima

# Explorando a Termodinâmica de Campos Escalares Não-Comutativos

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande em complementação aos requisitos para obtenção do título Mestre em Física.

Aprovada em 26 de setembro de 2014

BANCA EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Francisco Assis Brito**

(Orientador - UAF/UFCG)

---

**Prof. Dr. João Batista da Silva**

(Membro Externo - CES/UFCG)

---

**Prof. Dr. Claudio Benedito Silva Furtado**

(Membro Externo - DF/UFPB)

---

**Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues Passos**

(Suplente - UAF/UFCG)

*Aos meus pais Marizete e Eraldo, e aos meus irmãos Eraldo Júnior e Ezequias (In memoriam), que de muitas formas me incentivaram e ajudaram para que fosse possível a concretização deste trabalho.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me concedido a oportunidade de concluir mais uma importante etapa em minha vida. À amada igreja Assembleia de Deus de Sossego a qual eu faço parte, por me proporcionar momentos de paz e aprendizado da Palavra de Deus.

Aos meus familiares pelo apoio em meus estudos. À minha mãe Marizete pelas suas orações e seu amor que me fizeram chegar até aqui, ao meu pai Eraldo pelos seus esforços para que eu concluísse esta etapa, ao meu irmão Eraldo Júnior e ao meu noivo Clebson que com muito carinho estiveram sempre ao meu lado. Obrigada por tudo que fizeram por mim.

No âmbito acadêmico, agradeço a todos os professores que me acompanharam durante a graduação e mestrado, pelas suas importantes contribuições dadas para minha formação pessoal e profissional, em especial agradeço ao Prof. Dr. Francisco de Assis Brito pela excelente orientação e ao Prof. Dr. João Batista da Silva por ter me incentivado a chegar até aqui. Também desejo expressar meus agradecimentos a todos os meus professores do ensino básico pelos conhecimentos fundamentais que me proporcionaram, que Deus os recompense pelo amor e dedicação ao ensino.

Agradeço também aos meus grandes amigos e amigas que conquistei durante minha trajetória acadêmica, pela convivência e os momentos de diversão, não posso citar todos aqui para não ser injusta com nenhum deles.

Finalmente, gostaria de agradecer à agência de fomento CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades termodinâmicas da condensação de Bose-Einstein (CBE) para um gás de bósons relativísticos no contexto da teoria quântica de campos não-comutativa. Tais teorias foram introduzidas como uma generalização da mecânica quântica em um espaço-tempo não-comutativo. Nosso principal objetivo é investigar em que regimes de temperatura e/ou energia a não-comutatividade pode caracterizar algum comportamento distinto nas propriedades de um condensado de Bose-Einstein descrito por um gás bosônico relativístico. Usamos uma teoria baseada no conceito de campos não-comutativos, são introduzidos os parâmetros  $\theta$  e  $\sigma$  que atuam como reguladores para a teoria, ambos desempenham um papel fundamental na modificação das relações de dispersão do campo bosônico não-comutativo em estudo, o que leva a possíveis consequências fenomenológicas. Expressões analíticas para a fração de partículas no condensado, energia interna, pressão e calor específico do sistema são obtidas através de aproximações baseadas em expansões nos parâmetros não-comutativos, cujos resultados são comparados com os obtidos através de cálculos numéricos. Os efeitos da não comutatividade nas propriedades do sistema são discutidos, então é encontrado que as modificações introduzidas nessa teoria se tornam mais relevantes no regime de altas temperaturas.

Palavras-chave: campos não-comutativos, propriedades termodinâmicas, parâmetros.

# Abstract

In this work, we study the thermodynamic properties of the Bose–Einstein condensation (BEC) for a relativistic Bose gas in the context of the noncommutative quantum field theory. Such theories was introduced as a generalization of quantum mechanics on a noncommutative spacetime. Our main goal is to investigate in which temperature and/or energy regimes the noncommutativity can characterize some influence in the properties of Bose–Einstein condensation described by a relativistic bosonic gas. We use a noncommutative bosonic field theory introducing the noncommutative parameters  $\theta$  and  $\sigma$ . Both parameters play a key role in the modified dispersion relations of the noncommutative bosonic field, leading to possible striking consequences for phenomenology. Analytical expressions for the condensate fraction, internal energy, pressure and specific heat of the system are obtained by expanding in a power series of the noncommutative parameters. These results are compared with that one get by numerical methods. The noncommutative effects in the thermodynamic properties of the system are discussed, then is found that the noncommutativity exhibit characteristics important at high temperature.

Keywords: noncommutative field, thermodynamic properties, parameters.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Teoria quântica de campos não-comutativa</b>	<b>13</b>
2.1	Espaço-tempo não-comutativo . . . . .	14
2.2	Bósons livres sem massa . . . . .	15
2.2.1	Campo escalar comutativo . . . . .	15
2.2.2	Campo escalar não-comutativo . . . . .	18
2.3	Bósons livres com massa . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Termodinâmica dos campos não-comutativos</b>	<b>27</b>
3.1	Termodinâmica de bósons livres sem massa . . . . .	27
3.1.1	Equações de estado . . . . .	29
3.2	Termodinâmica de bósons livres com massa . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Resultados e discussões</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Relações de comutação</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função $\theta(\sigma)$ para diferentes valores de $\sigma$ . . . . .	19
4.1	Fração de partículas no estado fundamental em função da temperatura . . .	40
4.2	(a) Resultados numéricos de $T_0$ em função do número de partículas $N$ para bósons sem massa. (b) Resultados numéricos de $T_0$ em função do número de partículas $N$ para bósons com massa . . . . .	41
4.3	(a) Energia interna por partícula em função da temperatura. (b) Pressão por densidade de partículas em função da temperatura. . . . .	42
4.4	(a) Fixando $\theta = 2.2 \times 10^{-14}$ e variando $\sigma$ . (b) Mantendo $\theta = 2.5 \times 10^{-14}$ fixo e variando $\sigma$ . . . . .	43
4.5	(a) Fixando $\sigma = 1.1 \times 10^{-16}$ e variando $\theta$ . (b) Mantendo $\sigma = 1.4 \times 10^{-16}$ fixo e variando $\theta$ . . . . .	43
4.6	Capacidade térmica em função da temperatura para bósons não massivos. . .	44
4.7	Resultados numéricos para a capacidade térmica em função da temperatura para bósons com massa. . . . .	44
4.8	Capacidade térmica em função da temperatura nos limites não-relativístico e ultrarelativístico . . . . .	45

# Capítulo 1

## Introdução

Teorias quântica de campos (TQC) formuladas em espaços não-comutativos apresentam interessantes implicações fenomenológicas que têm sido objeto de numerosas investigações nos últimos anos, em conexão com diversos fenômenos físicos relacionados a possibilidade da violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT [1–4], análises da assimetria matéria-antimatéria [5], implicações em modelos cosmológicos [6–9], além de observações envolvendo raios cósmicos ultra-energéticos, física de neutrinos, entre outras fontes de altas energias existentes no Universo [10, 11].

Tais teorias, também conhecidas como teorias quânticas de campos não-comutativas (TQCNC), foram inspiradas pela mecânica quântica não-comutativa [12, 13], cuja proposta é baseada na idéia da quantização do espaço-tempo através da substituição de suas coordenadas por operadores que obedecem a relação de comutação  $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \equiv i\theta^{\mu\nu}$ , isto faz com que as coordenadas espaciais tornem-se discretas e não existe mais a noção de ponto. Esta proposta segue a mesma linha de raciocínio da teoria quântica usual caracterizada pela quantização do espaço de fase que resulta na existência de uma área mínima dimensionada pela constante de Planck.

A TQCNC foi inicialmente motivada pelo interesse em descartar as divergências que aparecem na teoria quântica de campos, já que ao introduzir a não comutatividade é possível que exista uma distância mínima no espaço-tempo que elimine os infinitos [14, 15]. No entanto, esta proposta foi deixada de lado devido o sucesso do processo de

renormalização.

Posteriormente a teoria de Yang-Mills não-comutativa surgiu como um limite de baixas energias da teoria de cordas na presença de um campo magnético de fundo [16], provocando um grande impulso na retomada do estudo de modelos envolvendo características não-comutativas na TQC. O reaparecimento dessas teorias também é motivado pela formulação da gravidade quântica, que sugere que em regiões da ordem da escala de Planck ( $l_p \sim 10^{-33} \text{ cm}$ ) o espaço-tempo perde sua estrutura contínua e os efeitos quânticos da gravitação tornam-se importantes [17–19].

Uma importante característica apresentada pela teoria quântica de campos não-comutativa é a violação da invariância de Lorentz, que tem sido sujeito de grande atenção na TQC. Esta violação deve ocorrer somente a distâncias muito pequenas, desta forma, no limite que o parâmetro relacionado a não comutatividade tende a zero os resultados previamente conhecidos são resgatados.

Teorias com perda da invariância de Lorentz apresentam deformações na relação de dispersão. Estas deformações permitem construir modelos fenomenológicos que podem ser testados futuramente na cosmologia ou em experimentos na física de partículas. Nesta perspectiva, espera-se que sinais da não comutatividade apareçam em experimentos envolvendo radiação cósmica de fundo, raios cósmicos ultra-energéticos, ou outra fonte de altas energias.

A introdução da não comutatividade na TQC pode ser feita no nível dos campos pela modificação de suas relações de comutação canônicas [20], que discutiremos mais adiante no capítulo 2. Estes campos, chamados campos não-comutativos, surgem como uma generalização da mecânica quântica no plano Groenenwold-Moyal [21], com o espaço alvo (ou espaço dos campos) sendo considerado como um plano não-comutativo em um espaço-tempo comutativo.

Recentemente, vários autores têm investigado as implicações físicas causadas por esses campos não-comutativos. No trabalho [4] foi mostrado como a não comutatividade no espaço dos campos produz violação da invariância de Lorentz na relação de dispersão. Subsequentemente, em [22] Balachandran et al. mostrou como o espectro de radiação de corpo negro é modificado pela deformação das relações de comutação canônicas de campos escalares não massivos, uma importante característica deste espectro modificado

é que a densidade de energia na região de alta frequência é maior do que para o espectro de radiação de corpo negro usual. Ainda nessa perspectiva, no artigo [9] Barosi et al. apresentaram implicações dessa teoria em modelos cosmológicos inflacionários em um Universo preenchido com um gás composto por um campo escalar bosônico não-comutativo no regime de altas temperaturas.

No presente trabalho, vamos considerar esta aproximação baseada em campos não-comutativos com a relação de comutação em tempos iguais dada por

$$[\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^b(\vec{y}, t)] = i\epsilon^{ab}\theta(\sigma; \vec{x} - \vec{y}) \quad (1.1)$$

para investigarmos a condensação de Bose-Einstein de um sistema descrito por campo escalar no contexto da teoria quântica de campos não-comutativa, onde  $\theta(\sigma; \vec{x} - \vec{y})$  é considerado como uma distribuição gaussiana com um parâmetro  $\sigma$  relacionado com o desvio padrão da distribuição.

A condensação de Bose-Einstein apresenta algumas características bastante peculiares, como por exemplo, abaixo de certa temperatura uma fração finita do número de partículas se condensam no estado fundamental, o que foi predito por Einstein em 1925 [23]. Desde então, estudos teóricos e experimentais discutindo as propriedades termodinâmicas deste fenômeno tem ganhando grande atenção em diferentes áreas da física [24–29].

Recentemente várias pesquisas tem se desenvolvido na análise de efeitos relativísticos em condensados de Bose-Einstein [30–35]. No entanto, deve-se notar que os efeitos não-comutativos tornam-se relevantes para tais sistemas, portanto devem ser levados em conta. Em virtude disto, exploramos a termodinâmica de campos escalares relativísticos assumindo esses efeitos.

Este trabalho, está organizado como segue. No capítulo 2 fazemos uma revisão sobre teorias de campos em espaços não-comutativos envolvendo campos escalares massivos e não massivos, onde foram analisados as peculiaridades de teorias físicas nas quais a álgebra é não-comutativa. No capítulo 3 exploramos os efeitos causados pela não comutatividade nas grandezas termodinâmicas de um gás bosônico relativístico, foram obtidas expressões para várias funções termodinâmicas, tais como, densidade de partículas, energia interna, pressão e calor específico. No capítulo 4 apresentamos nossos resultados obtidos

através de cálculos numéricos e aproximados para campos escalares não-comutativos sem massa, os quais são comparados com os resultados estabelecidos pela teoria usual. Além disso, mostramos os efeitos não-comutativos causados em bósons massivos, que também são analisados nos limites não-relativístico e ultrarelativístico. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras desta pesquisa.

# Capítulo 2

## Teoria quântica de campos não-comutativa

Teorias de campos baseadas no conceito de espaço alvo não-comutativo vem ganhando cada vez mais atenção e interesse como objetos de estudo, cujas propriedades e implicações causadas são estudadas e aplicadas a diferentes problemas físicos [4, 9, 20, 22, 36]. O formalismo que descreve a não comutatividade dos campos é proposto a partir de uma analogia com as ideias fundamentais da mecânica quântica não-comutativa, o qual sugere a substituição das relações de não-comutação entre as coordenadas do espaço-tempo por relações de não-comutação entre os campos.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão sobre a teoria quântica de campos sobre espaços não-comutativos. Os conceitos aqui formulados servirão de alicerce para o estudo das propriedades termodinâmicas de um gás bosônico com sua relação de dispersão (relação entre energia e momento da partícula) modificada pela introdução de novos parâmetros relacionados a não comutatividade. Para isso, este capítulo foi dividido em duas seções. A primeira seção apresenta a definição de espaço-tempo não-comutativo, e as seções seguintes abordam uma extensão dessa teoria deformada para um campo escalar bosônico com e sem massa onde o espaço alvo é considerado não-comutativo em um espaço-tempo comutativo com  $(3+1)$ -dimensões.

## 2.1 Espaço-tempo não-comutativo

A noção de um espaço-tempo não-comutativo já havia sido proposta desde os primórdios da mecânica quântica [14]. Motivada pela extensão das relações usuais de comutação entre posição e momento, a mecânica quântica não-comutativa impõe relações de comutação entre as coordenadas do espaço-tempo. As coordenadas  $x^\mu$  são substituídas por operadores Hermitianos  $\hat{x}^\mu$  de uma álgebra não-comutativa<sup>1</sup> que obedecem a relações de comutação deformadas,

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu}\bar{\theta} \equiv i\bar{\theta}^{\mu\nu}, \quad (2.1a)$$

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \quad (2.1b)$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_\nu^\mu, \quad (2.1c)$$

onde  $\bar{\theta}$  é conhecido como parâmetro não-comutativo que possui dimensão de área, e  $\epsilon^{\mu\nu}$  é uma matriz antissimétrica real.

A não comutatividade do espaço-tempo causa efeitos em sua estrutura geométrica, já que o espaço-tempo deixa de ser contínuo e passa a ser discreto, deixando de lado a noção de ponto que é substituída por uma área de comprimento mínimo, chamada célula de Planck, isto implica em um conjunto de relações de incerteza entre suas coordenadas,

$$\Delta\hat{x}^\mu\Delta\hat{x}^\nu \geq \frac{1}{2}|\bar{\theta}^{\mu\nu}|. \quad (2.2)$$

Observe que no limite que  $\bar{\theta} \rightarrow 0$  a teoria comutativa usual é obtida.

Em [22], as coordenadas não-comutativas são relacionadas com as usuais pela deformação,

$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\mu\nu}p_\nu, \quad (2.3a)$$

$$\hat{p}^\mu = p^\mu, \quad (2.3b)$$

A deformação introduzida acima é aplicada no nível das coordenadas, que são os graus de liberdade do sistema. Analogamente, na TQC os graus de liberdade da teoria

---

<sup>1</sup>Operadores com o caractere chapéu indica que eles obedecem a álgebra não-comutativa.



são os campos definidos em cada ponto do espaço, sendo assim, iremos introduzir a não-comutatividade no nível dos campos para construirmos o espaço alvo não-comutativo.

## 2.2 Bósons livres sem massa

Nesta seção vamos revisar a teoria de um campo escalar não massivo comutativo e não comutativo, para então analisarmos os efeitos causados nesse sistema pela não comutatividade dos campos.

### 2.2.1 Campo escalar comutativo

Definimos aqui o espaço alvo comutativo que será importante para compararmos os efeitos que a não comutação dos campos causa na relação de dispersão. Para isto, considere um campo escalar bosônico sem massa e sem spin, sua base espacial (3+1)-dimensões e seu espaço alvo é um plano comutativo  $\mathbb{R}^2$ , então,

$$\begin{aligned}\varphi : M_3 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\vec{x}, t) &\longmapsto \varphi(\vec{x}, t).\end{aligned}$$

As componentes do campo serão denotadas por  $\varphi^i$  com  $i = 1, 2$ . Vamos assumir que cada direção espacial é compactificada em  $S^1$  com raio  $R$ , isto faz com que as componentes do campo sejam periódicas nas coordenadas espaciais  $(x, y, z)$ ,

$$\varphi^i(x + R, y + R, z + R, t) \equiv \varphi^i(x, y, z, t) \equiv \varphi^i(\vec{x}, t). \quad (2.4)$$

A compactificação do espaço permite que as componentes do campo  $\varphi^i(\vec{x}, t)$  sejam escritas como uma série de Fourier

$$\varphi^i(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{n}} e^{\frac{2\pi i}{R}\vec{n}\cdot\vec{x}} \varphi_{\vec{n}}^i(t), \quad (2.5)$$

onde  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , com  $n_i \in \mathbb{Z}$ , e as componentes de Fourier são

$$\varphi_{\vec{n}}^i(t) = \frac{1}{R^3} \int d^3x e^{-\frac{2\pi i}{R} \vec{n} \cdot \vec{x}} \varphi^i(\vec{x}, t). \quad (2.6)$$

Usaremos a densidade lagrangiana para o campo escalar não massivo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g}{2} \sum_i \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i, \\ &= \frac{g}{2} \sum_i [(\partial_t \varphi^i)^2 - (\nabla \varphi^i)^2], \end{aligned} \quad (2.7)$$

cuja lagrangiana é  $L = \int \mathcal{L} d^3x$ ,

$$L = \frac{g}{2} \sum_i \int d^3x [(\partial_t \varphi^i)^2 - (\nabla \varphi^i)^2]. \quad (2.8)$$

Para obtermos a lagrangiana acima escrita em termos dos modos de Fourier usamos as componentes dos campos  $\varphi^i(\vec{x}, t)$  dadas em (2.5),

$$\begin{aligned} \int d^3x (\partial_t \varphi^i)^2 &= \sum_{\vec{n}} R^3 \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i \dot{\varphi}_{-\vec{n}}^i, \\ \int d^3x (\nabla \varphi^i)^2 &= \sum_{\vec{n}} R^3 \left( \frac{2\pi |\vec{n}|}{R} \right)^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i, \end{aligned} \quad (2.9)$$

o que resulta em

$$L = \frac{gR^3}{2} \sum_{i, \vec{n}} \left[ \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i \dot{\varphi}_{-\vec{n}}^i - \left( \frac{2\pi |\vec{n}|}{R} \right)^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right]. \quad (2.10)$$

Os momentos canônicos associados aos modos de Fourier  $\dot{\varphi}_{\vec{n}}^i$  são

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{n}}^i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i} \\ &= \frac{gR^3}{2} \sum_{j, \vec{m}} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i} (\dot{\varphi}_{\vec{m}}^j \dot{\varphi}_{-\vec{m}}^j) \\ &= \frac{gR^3}{2} \sum_{j, \vec{m}} [\delta_i^j \delta_{\vec{n}}^{\vec{m}} \dot{\varphi}_{-\vec{m}}^j + \dot{\varphi}_{\vec{m}}^j \delta_i^j \delta_{\vec{n}}^{-\vec{m}}] \\ &= gR^3 \dot{\varphi}_{-\vec{n}}^i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Associado à lagrangiana (2.10), via transformada de Legendre, obtemos o hamiltoniano  $H$  em função dos modos  $\varphi_{\vec{n}}^i$  e dos momentos canônicos  $\pi_{\vec{n}}^i$

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i,\vec{n}} \pi_{\vec{n}}^i \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i - L, \\
&= \frac{1}{2gR^3} \sum_{i,\vec{n}} \left[ \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + (2\pi|\vec{n}|gR^2)^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right], \\
&= \sum_i \frac{(\pi_0^i)^2}{2gR^3} + \frac{1}{2gR^3} \sum_{i,\vec{n} \neq 0} \left[ \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + (2\pi|\vec{n}|gR^2)^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

O termo

$$H_0 = \sum_i \frac{(\pi_0^i)^2}{2gR^3}$$

associado com translação global do sistema, conhecido como modo zero, poderá ser ignorado. Enquanto, o segundo termo (com  $\vec{n} \neq 0$ ) é equivalente a um conjunto infinito de osciladores harmônicos desacoplados com frequências

$$\omega_{\vec{n}} = \frac{2\pi|\vec{n}|}{R}. \tag{2.13}$$

Assim a eq.(2.12) fica

$$H = H_0 + \sum_{i,\vec{n} \neq 0} \left[ \frac{\pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right]. \tag{2.14}$$

A hermiticidade dos campos  $\varphi^i$  implica que

$$\varphi_{\vec{n}}^{i\dagger}(t) = \frac{1}{R^3} \int d^3x e^{\frac{2\pi i}{R} \vec{n} \cdot \vec{x}} \varphi^i(\vec{x}, t) = \varphi_{-\vec{n}}^i(t), \tag{2.15a}$$

$$\pi_{\vec{n}}^{i\dagger} = gR^3 (\dot{\varphi}_{-\vec{n}}^i)^\dagger = gR^3 \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i = \pi_{-\vec{n}}^i. \tag{2.15b}$$

Esta propriedade será usada na seção seguinte, quando escreveremos o hamiltoniano em termos dos operadores criação e aniquilação.

## 2.2.2 Campo escalar não-comutativo

Nesta subseção, o plano comutativo  $\mathbb{R}^2$  definido acima é substituído por um plano não-comutativo  $\mathbb{R}^2$ . A forma de introduzir a não comutatividade no espaço dos campos é análoga a deformação feita no comutador das coordenadas, eq.(2.1a), visto na seção (2.1).

O campo escalar com espaço alvo não-comutativo  $\mathbb{R}^2$ , denotado por  $\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t)$ , foi escrito por Balachandran et. al. [22] em termos dos campos comutativos como

$$\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t) = \varphi^a(\vec{x}, t) - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\theta\pi_b(\vec{x}, t), \quad (2.16a)$$

$$\hat{\pi}_a(\vec{x}, t) = \pi_a(\vec{x}, t). \quad (2.16b)$$

Desta forma, as relações de comutação em tempos iguais para os campos escalares não-comutativos introduzidos acima tornam-se (veja apêndice A)

$$[\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^b(\vec{y}, t)] = i\epsilon^{ab}\theta\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.17a)$$

$$[\hat{\pi}_a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{y}, t)] = 0, \quad (2.17b)$$

$$[\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{y}, t)] = i\delta_b^a\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.17c)$$

neste cenário  $\theta$  é o parâmetro não-comutativo com dimensão de comprimento.

A função  $\theta\delta(\vec{x} - \vec{y})$  que aparece na eq.(2.17a) foi regularizada por [22] como uma distribuição tipo gaussiana, escrita em termos de um novo parâmetro  $\sigma$  associado ao desvio padrão da distribuição,

$$\theta(\sigma) = \frac{\theta}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left[-\sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - y_i)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.18)$$

onde  $\theta(\sigma) \equiv \theta(\sigma; \vec{x} - \vec{y}) = \theta\delta(\vec{x} - \vec{y})$  no limite que  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\theta(\sigma)$  tem dimensão de (comprimento)<sup>-2</sup>, e assumimos a simplificação  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  para o argumento da exponencial. O comportamento dessa função  $\theta(\sigma)$  pode ainda ser visto no gráfico da figura [2.1] para diferentes valores de  $\sigma$ .

Ao analisarmos essa regularização podemos notar que o parâmetro  $\sigma$  controla a largura da gaussiana descrevendo o alcance da não comutatividade, isto é, no limite em que esse parâmetro vai a zero a obtemos a função delta usual e no limite em que o

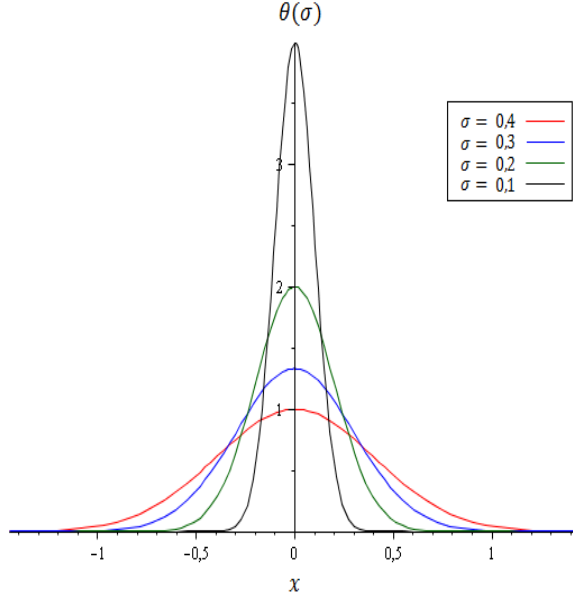


Figura 2.1: Gráfico da função  $\theta(\sigma)$  para diferentes valores de  $\sigma$ , com  $\theta = 1.0$  fixo.

parâmetro cresce recuperamos a comutatividade dos campos. Esta regularização mostrou-se útil no estudo do espectro de radiação de corpo negro deformado [22], onde foi previsto que a densidade de energia diverge com respeito a frequência se  $\sigma = 0$  e que o desvio do novo espectro de radiação modificado com relação a radiação de corpo negro possui uma dependência mais forte em  $\sigma$  do que em  $\theta$ . Além do mais,  $\theta(\sigma)$  pode ser escrita em termos de

$$\theta(n) = \theta e^{-\frac{2\pi^2 \sigma^2 |\vec{n}|^2}{R^2}}. \quad (2.19)$$

Análogo a eq.(2.5) os campos não-comutativos  $\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t)$  podem ser escritos em termos dos modos de Fourier

$$\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{n}} e^{\frac{2\pi i}{R} \vec{n} \cdot \vec{x}} \hat{\varphi}_{\vec{n}}^a(t). \quad (2.20)$$

Então, usando as equações (2.16) podemos obter as transformações vestidas, que estão associadas a geração de múltiplas soluções (ou campos) através de um campo inicial,

$$\hat{\varphi}_{\vec{n}}^a = \varphi_{\vec{n}}^a - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ab} \theta(n) \pi_{-\vec{n}}^b, \quad (2.21a)$$

$$\hat{\pi}_{\vec{n}}^a = \pi_{\vec{n}}^a. \quad (2.21b)$$

Veja que na eq.(2.16) os campos só dependem de um índice "a" enquanto as eqs.(2.21) dependem de "a" e " $\vec{n}$ ", neste caso " $\vec{n}$ " refere-se à multiplicidade dos campos.

As relações de comutação para as componentes de Fourier tornam-se (apêndice A)

$$[\hat{\varphi}_{\vec{n}}^a, \hat{\varphi}_{\vec{m}}^b] = \frac{i\epsilon^{ab}\theta(n)}{R^3}\delta_{\vec{n}+\vec{m},0}, \quad (2.22a)$$

$$[\hat{\pi}_{\vec{n}}^a, \hat{\pi}_{\vec{m}}^b] = 0, \quad (2.22b)$$

$$[\hat{\varphi}_{\vec{n}}^a, \hat{\pi}_{\vec{m}}^b] = i\delta^{ab}\delta_{\vec{n},\vec{m}}. \quad (2.22c)$$

A não comutatividade dos campos introduzida em (2.17) é equivalente a substituir o operador hamiltoniano (2.14) por um novo hamiltoniano não-comutativo

$$H_{NC} = \hat{H}_0 + \sum_{i,\vec{n}\neq 0} \left[ \frac{\hat{\pi}_{\vec{n}}^i \hat{\pi}_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \hat{\varphi}_{\vec{n}}^i \hat{\varphi}_{-\vec{n}}^i \right], \quad (2.23)$$

onde

$$\hat{H}_0 = \sum_i \frac{(\hat{\pi}_0^i)^2}{2gR^3}.$$

Usando as equações (2.21) no hamiltoniano (2.23) encontramos

$$H_{NC} = H_0 + \sum_{i,\vec{n}\neq 0} \left[ \frac{\Omega_{\vec{n}}^2}{2gR^3} \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i - \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \epsilon_{ik} \varphi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k \right], \quad (2.24)$$

com

$$\Omega_{\vec{n}}^2 = 1 + \left( \frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R} \right)^2 \quad \text{e} \quad \omega_{\vec{n}} = \frac{2\pi |\vec{n}|}{R}. \quad (2.25)$$

Observe que a relação de dispersão para estes bósons foi modificada, eq.(2.24), se tomarmos o limite  $\theta \rightarrow 0$  vemos que  $\theta(n) \rightarrow 0$  e  $\Omega_{\vec{n}}^2 = 1$ , recaindo na relação de dispersão usual, eq.(2.14).

É notável que o hamiltoniano (2.24) possui um termo equivalente a um conjunto de infinitos osciladores harmônicos e outro proporcional a componente-z do momento

angular  $L_z$ ,

$$H_{\vec{n}} = \sum_i \left[ \frac{\Omega_{\vec{n}}^2}{2gR^3} \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right] \quad (\text{oscilador harm\~{o}nico}) \quad (2.26a)$$

$$J_{\vec{n}}^z = \sum_{i,k} \epsilon_{ik} \varphi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k \quad (\text{momento angular}). \quad (2.26b)$$

Desta forma, o hamiltoniano (2.24) sem o termo de modo zero fica

$$H_{NC} = \sum_{\vec{n} \neq 0} \left[ H_{\vec{n}} - \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) J_{\vec{n}}^z \right]. \quad (2.27)$$

Al\~{e}m disso,  $H_{\vec{n}}$  dado por (2.26a) pode ser reescrito na forma usual do hamiltoniano de um oscilador harm\~{o}nico,

$$H_{\vec{n}} = \sum_i \left[ \frac{1}{2M} \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + \frac{1}{2} M \bar{\omega}_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right], \quad (2.28)$$

com frequ\~{e}ncia  $\bar{\omega}_{\vec{n}}$  e massa  $M$  dadas por

$$\bar{\omega}_{\vec{n}} = \Omega_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} \quad \text{e} \quad M = \frac{gR^3}{\Omega_{\vec{n}}^2}. \quad (2.29)$$

Este hamiltoniano pode ser diagonalizado pela introdu\~{c}o\~{e} dos operadores cria\~{c}o\~{e} e ani-  
quila\~{c}o\~{e}

$$a_{\vec{n}}^i = \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( \varphi_{\vec{n}}^i + i \frac{\pi_{-\vec{n}}^i}{\Delta_{\vec{n}}} \right), \quad (2.30a)$$

$$a_{\vec{n}}^{i\dagger} = \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( \varphi_{-\vec{n}}^i - i \frac{\pi_{\vec{n}}^i}{\Delta_{\vec{n}}} \right), \quad (2.30b)$$

onde

$$\Delta_{\vec{n}} = M \bar{\omega}_{\vec{n}} = \frac{gR^3 \omega_{\vec{n}}}{\Omega_{\vec{n}}} = \frac{2\pi |\vec{n}| gR^2}{\Omega_{\vec{n}}}. \quad (2.31)$$

As relações de comutação para  $a_{\vec{n}}^{i\dagger}$  e  $a_{\vec{n}}^i$  são (apêndice A)

$$[a_{\vec{m}}^i, a_{\vec{n}}^j] = 0, \quad (2.32a)$$

$$[a_{\vec{m}}^{i\dagger}, a_{\vec{n}}^{j\dagger}] = 0, \quad (2.32b)$$

$$[a_{\vec{m}}^i, a_{\vec{n}}^{j\dagger}] = \delta^{ij}\delta_{\vec{m},\vec{n}}. \quad (2.32c)$$

Os campos em termos dos operadores criação e aniquilação, eq.(2.30), tornam-se

$$\varphi_{\vec{n}}^i = \frac{1}{\sqrt{2\Delta_{\vec{n}}}} \left( a_{\vec{n}}^i + a_{-\vec{n}}^{i\dagger} \right), \quad (2.33a)$$

$$\pi_{\vec{n}}^i = -i\sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( a_{-\vec{n}}^i - a_{\vec{n}}^{i\dagger} \right). \quad (2.33b)$$

Substituindo as eqs.(2.33) na eq.(2.26a) obtemos  $H_{\vec{n}}$  em termos dos operadores criação e aniquilação,

$$H_{\vec{n}} = \sum_i \frac{\Omega_{\vec{n}}\omega_{\vec{n}}}{2} \left( a_{\vec{n}}^i a_{\vec{n}}^{i\dagger} + a_{-\vec{n}}^{i\dagger} a_{-\vec{n}}^i \right). \quad (2.34)$$

Podemos escrever os operadores na ordem normal (representada pelo símbolo  $::$ ) que constitui em rearranjar o operador criação à esquerda do operador aniquilação.

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \neq 0} H_{\vec{n}} &= \sum_{i, \vec{n} \neq 0} \frac{\Omega_{\vec{n}}\omega_{\vec{n}}}{2} : \left( a_{\vec{n}}^i a_{\vec{n}}^{i\dagger} + a_{-\vec{n}}^{i\dagger} a_{-\vec{n}}^i \right) : \\ &= \sum_{i, \vec{n} \neq 0} \frac{\Omega_{\vec{n}}\omega_{\vec{n}}}{2} \left( a_{\vec{n}}^{i\dagger} a_{\vec{n}}^i + a_{-\vec{n}}^{i\dagger} a_{-\vec{n}}^i \right) \\ &= \sum_{i, \vec{n} \neq 0} \Omega_{\vec{n}}\omega_{\vec{n}} a_{\vec{n}}^{i\dagger} a_{\vec{n}}^i. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para o termo do momento angular, eq.(2.26b), temos

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \neq 0} J_{\vec{n}}^z &= \sum_{i, k, \vec{n} \neq 0} \epsilon_{ik} \varphi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k, \\ &= -i \sum_{i, k, \vec{n} \neq 0} \epsilon_{ik} a_{\vec{n}}^{i\dagger} a_{\vec{n}}^k. \end{aligned} \quad (2.36)$$



Substituindo esses resultados na eq.(2.27) o hamiltoniano fica,

$$H_{NC} = \sum_{i, \vec{n} \neq 0} \left[ \Omega_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} a_{\vec{n}}^{i\dagger} a_{\vec{n}}^i - i \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \epsilon_{ik} a_{\vec{n}}^{i\dagger} a_{\vec{n}}^k \right], \quad (2.37)$$

ou ainda

$$H_{NC} = \sum_{\vec{n} \neq 0} \left[ \Omega_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} \left( a_{\vec{n}}^{1\dagger} a_{\vec{n}}^1 + a_{\vec{n}}^{2\dagger} a_{\vec{n}}^2 \right) - i \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \left( a_{\vec{n}}^{1\dagger} a_{\vec{n}}^2 - a_{\vec{n}}^{2\dagger} a_{\vec{n}}^1 \right) \right]. \quad (2.38)$$

Vamos definir novos operadores criação  $A_{\vec{n}}^{i\dagger}$  e aniquilação  $A_{\vec{n}}^i$  como

$$A_{\vec{n}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{n}}^1 - ia_{\vec{n}}^2) \quad \Rightarrow \quad A_{\vec{n}}^{1\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{n}}^{1\dagger} + ia_{\vec{n}}^{2\dagger}), \quad (2.39a)$$

$$A_{\vec{n}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{n}}^1 + ia_{\vec{n}}^2) \quad \Rightarrow \quad A_{\vec{n}}^{2\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{n}}^{1\dagger} - ia_{\vec{n}}^{2\dagger}), \quad (2.39b)$$

assim,

$$a_{\vec{n}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\vec{n}}^1 + A_{\vec{n}}^2) \quad \Rightarrow \quad a_{\vec{n}}^{1\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\vec{n}}^{1\dagger} + A_{\vec{n}}^{2\dagger}), \quad (2.40a)$$

$$a_{\vec{n}}^2 = i \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\vec{n}}^1 - A_{\vec{n}}^2) \quad \Rightarrow \quad a_{\vec{n}}^{2\dagger} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\vec{n}}^{1\dagger} - A_{\vec{n}}^{2\dagger}). \quad (2.40b)$$

As componentes dos campos e dos momentos, eqs.(2.33), em termos desses novos operadores ficam

$$\varphi_{\vec{n}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta_{\vec{n}}}} \left( A_{\vec{n}}^1 + A_{\vec{n}}^2 + A_{-\vec{n}}^{1\dagger} + A_{-\vec{n}}^{2\dagger} \right), \quad (2.41a)$$

$$\varphi_{\vec{n}}^2 = \frac{i}{2\sqrt{\Delta_{\vec{n}}}} \left( A_{\vec{n}}^1 - A_{\vec{n}}^2 - A_{-\vec{n}}^{1\dagger} + A_{-\vec{n}}^{2\dagger} \right), \quad (2.41b)$$

$$\pi_{\vec{n}}^1 = \frac{i\sqrt{\Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( A_{\vec{n}}^{1\dagger} - A_{-\vec{n}}^1 + A_{\vec{n}}^{2\dagger} - A_{-\vec{n}}^2 \right), \quad (2.41c)$$

$$\pi_{\vec{n}}^2 = \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( A_{\vec{n}}^{1\dagger} + A_{-\vec{n}}^1 - A_{\vec{n}}^{2\dagger} - A_{-\vec{n}}^2 \right). \quad (2.41d)$$

Os operadores  $A_{\vec{n}}^{i\dagger}$  e  $A_{\vec{n}}^i$  obedecem as seguintes relações de comutação,

$$[A_{\vec{m}}^i, A_{\vec{n}}^j] = [A_{\vec{m}}^{i\dagger}, A_{\vec{n}}^{j\dagger}] = 0, \quad [A_{\vec{m}}^i, A_{\vec{n}}^{j\dagger}] = \delta^{ij} \delta_{\vec{m}, \vec{n}}. \quad (2.42)$$

Substituindo as equações (2.40) na eq.(2.38) obtemos o hamiltoniano em termos  $A_{\vec{n}}^{i\dagger}$  e  $A_{\vec{n}}^i$ ,

$$\begin{aligned} H_{NC} &= \sum_{\vec{n} \neq 0} \left\{ \omega_{\vec{n}} \Omega_{\vec{n}} (A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 + A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2) + \frac{g\omega_{\vec{n}}^2 \theta(n)}{2} (A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 - A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2) \right\}, \\ &= \sum_{\vec{n} \neq 0} \omega_{\vec{n}} \left\{ \left( \Omega_{\vec{n}} + \frac{g\omega_{\vec{n}} \theta(n)}{2} \right) A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 + \left( \Omega_{\vec{n}} - \frac{g\omega_{\vec{n}} \theta(n)}{2} \right) A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

O hamiltoniano acima pode ser reescrito como

$$H_{NC} = \sum_{\vec{n} \neq 0} \omega_{\vec{n}} \left[ \Lambda_{\vec{n}}^1 A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 + \Lambda_{\vec{n}}^2 A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2 \right], \quad (2.44)$$

onde

$$\Lambda_{\vec{n}}^1 = \sqrt{1 + \left( \frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R} \right)^2} + \frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R} \quad (2.45a)$$

$$\Lambda_{\vec{n}}^2 = \sqrt{1 + \left( \frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R} \right)^2} - \frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R}. \quad (2.45b)$$

## 2.3 Bósons livres com massa

Os resultados obtidos na seção anterior são aqui estendidos para um cenário mais geral envolvendo campos escalares massivos. A densidade lagrangiana descrevendo bósons de spin nulo massivos é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2} \sum_i [\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - m^2 (\varphi^i)^2], \quad (2.46)$$

cuja lagrangiana será

$$L = \frac{g}{2} \sum_i \int d^3x [(\partial_t \varphi^i)^2 - (\nabla \varphi^i)^2 - m^2 (\varphi^i)^2]. \quad (2.47)$$

Usando as equações (2.9) e

$$\int d^3x (\varphi^i)^2 = \sum_{\vec{n}} R^3 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i, \quad (2.48)$$

obtemos a Lagrangiana escrita em termos dos modos de Fourier,

$$L = \frac{gR^3}{2} \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \dot{\varphi}_{\vec{n}}^i \dot{\varphi}_{-\vec{n}}^i - \left[ \left( \frac{2\pi|\vec{n}|}{R} \right)^2 + m^2 \right] \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right\}. \quad (2.49)$$

O hamiltoniano  $H$  associado à lagrangiana acima é

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \frac{\pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \left[ \left( \frac{2\pi|\vec{n}|}{R} \right)^2 + m^2 \right] \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right\}, \\ &= \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \frac{\pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde

$$\omega_{\vec{n}} = \sqrt{\left( \frac{2\pi|\vec{n}|}{R} \right)^2 + m^2}. \quad (2.51)$$

Introduzindo os campos não-comutativos, temos

$$\begin{aligned} H_{NC} &= \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \frac{\hat{\pi}_{\vec{n}}^i \hat{\pi}_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \hat{\varphi}_{\vec{n}}^i \hat{\varphi}_{-\vec{n}}^i \right\} \\ &= \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \left( 1 + \frac{g^2 \omega_{\vec{n}}^2 \theta^2(n)}{4} \right) \frac{\pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i}{2gR^3} + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i - \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \epsilon_{ik} \varphi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k \right\} \\ &= \sum_{i, \vec{n}} \left\{ \frac{\Omega_{\vec{n}}^2}{2gR^3} \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \varphi_{\vec{n}}^i \varphi_{-\vec{n}}^i - \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \epsilon_{ik} \varphi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k \right\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde

$$\Omega_{\vec{n}}^2 = 1 + \left( \frac{g\omega_{\vec{n}}\theta(n)}{2} \right)^2 \quad \text{e} \quad \omega_{\vec{n}} = \sqrt{\left( \frac{2\pi|\vec{n}|}{R} \right)^2 + m^2}. \quad (2.53)$$

Seguindo o mesmo procedimento feito na seção anterior encontramos

$$H_{NC} = \sum_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} \left[ \Lambda_{\vec{n}}^1 A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 + \Lambda_{\vec{n}}^2 A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2 \right], \quad (2.54)$$

onde

$$\Lambda_{\vec{n}}^1 = \sqrt{1 + \left( \frac{g\omega_{\vec{n}}\theta(n)}{2} \right)^2} + \frac{g\omega_{\vec{n}}\theta(n)}{2}, \quad (2.55a)$$

$$\Lambda_{\vec{n}}^2 = \sqrt{1 + \left( \frac{g\omega_{\vec{n}}\theta(n)}{2} \right)^2} - \frac{g\omega_{\vec{n}}\theta(n)}{2}. \quad (2.55b)$$

As expressões aqui apresentadas se reduzem as encontradas na seção anterior no limite que  $m \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow k$ , onde  $k = \frac{2\pi|\vec{n}|}{R}$  é o número de onda.

# Capítulo 3

## Termodinâmica dos campos não-comutativos

No capítulo anterior exploramos possíveis implicações que a não comutatividade do espaço alvo provoca na relação de dispersão de um gás bosônico relativístico sem spin com e sem massa. Neste capítulo iremos estudar a termodinâmica desse gás, verificando como a introdução da não comutatividade causa alterações em um condensado de Bose-Einstein.

Formulamos o problema quântico estatístico para um gás de bósons não-comutativo dentro de um volume  $V \sim R^3$ . Partindo disso, seguimos nossos estudos na obtenção de grandezas termodinâmicas relevantes, tais como, as equações de estado (pressão e energia) e calor específico  $C_v$ . Este capítulo será dividido em duas seções, a primeira trata sobre bósons sem massa, enquanto na segunda são desenvolvidos cálculos para bósons com massa nos limites não-relativístico (NR) e ultrarelativístico (UR).

### 3.1 Termodinâmica de bósons livres sem massa

Nesta seção o campo escalar é considerado como relativístico e sem massa ( $E \simeq p$ ). Usando o Hamiltoniano definido na eq.(2.44) escrito em termos do número de onda  $\omega = k$ , podemos descrever esse sistema no ensemble grande canônico. A grande função de partição

pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\Xi &= \text{Tr} e^{-\beta(H-\mu)} \\
&= \prod_{\vec{k} \neq 0} \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1 - \mu)n} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2 - \mu)m} \\
&= \prod_{\vec{k} \neq 0} \left( \frac{1}{1 - ze^{-\beta\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}} \right) \left( \frac{1}{1 - ze^{-\beta\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde estamos utilizando o sistema de unidades  $k_B = \hbar = c = 1$ ,  $z = e^{\beta\mu}$  é a fugacidade,  $\mu$  é o potencial químico e  $\beta = 1/T$ .

Assim, o logaritmo natural da grande função de partição fica,

$$\ln \Xi = - \sum_{\vec{k} \neq 0} \left[ \ln(1 - ze^{-\beta\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}) + \ln(1 - ze^{-\beta\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}) \right]. \tag{3.2}$$

Estamos lidando com um gás não-comutativo composto de  $N$  osciladores harmônicos dentro de um volume  $V \sim R^3$ . No limite termodinâmico  $V \rightarrow \infty$  ( $R \rightarrow \infty$ ) a soma é substituída por uma integral nos momentos,

$$\sum_{\vec{k} \neq 0} \rightarrow V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2.$$

Isto faz com que a eq.(3.2) fique

$$\ln \Xi = - \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left[ \ln(1 - ze^{-\beta k \Lambda^1(k)}) + \ln(1 - ze^{-\beta k \Lambda^2(k)}) \right], \tag{3.3}$$

onde temos<sup>1</sup>,

$$\Lambda^1(k) = \sqrt{1 + \left( \frac{k\theta(k)}{8\pi} \right)^2} + \frac{k\theta(k)}{8\pi} \tag{3.4a}$$

$$\Lambda^2(k) = \sqrt{1 + \left( \frac{k\theta(k)}{8\pi} \right)^2} - \frac{k\theta(k)}{8\pi} \tag{3.4b}$$

com

$$\theta(k) = \theta e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}. \tag{3.5}$$

---

<sup>1</sup>Onde adotamos a escolha  $g = 1/4\pi$ .

Dada a complexidade do problema quântico estatístico formulado, não é possível encontrarmos sua solução analítica exata, pois existe uma dependência não trivial de  $\Lambda^i(k)$  em  $k$  e no parâmetro  $\theta$  que aparece na eq.(3.3). Uma alternativa para contornar essas dificuldades é procurar aproximações adequadas, capazes de fornecer soluções que possibilitem o avanço de nossas investigações com cálculos analíticos sobre as propriedades do sistema em estudo. Outra alternativa é tratar o problema exatamente, recorrendo a procedimentos numéricos.

### 3.1.1 Equações de estado

Nesta subseção desenvolvemos os dois procedimentos, numérico e aproximado, na obtenção das equações de estado do gás bosônico não-comutativo, de modo a verificar o limite de validade da aproximação. As quantidades relevantes para a presente investigação são o número de partículas  $N$ , a energia interna  $U$  e a pressão  $p$  dadas pelas equações

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.6a)$$

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.6b)$$

$$p = \frac{1}{\beta V} \ln \Xi(\beta, V, z). \quad (3.6c)$$

Podemos ainda analisar a capacidade térmica a volume constante, definida por

$$C_v = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v, \quad (3.7)$$

onde derivada parcial  $\partial U / \partial T$  pode ser calculada através

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_z + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_T \frac{\partial z}{\partial T} \\ &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_z - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_T \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_z / \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)_T. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O termo devido a  $(\partial z / \partial T)$  contribui apenas na região  $T > T_0$ , devido ao fato que  $z$  é constante na região  $T \leq T_0$ .

## Cálculos exatos

Para obtermos as quantidades termodinâmicas de interesse sem fazermos uso de aproximações é necessário recorrermos a procedimentos numéricos. Substituindo a equação (3.3) em (3.6) encontramos as expressões para o número de partículas

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{1}{z^{-1}e^{\beta k \Lambda^1(k)} - 1} + \frac{1}{z^{-1}e^{\beta k \Lambda^2(k)} - 1} \right\}, \quad (3.9)$$

a energia interna,

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^3 \left\{ \frac{\Lambda^1(k)}{z^{-1}e^{\beta k \Lambda^1(k)} - 1} + \frac{\Lambda^2(k)}{z^{-1}e^{\beta k \Lambda^2(k)} - 1} \right\}, \quad (3.10)$$

e a pressão

$$p = -\frac{1}{2\pi^2\beta} \int dk k^2 \left\{ \ln(1 - ze^{-\beta k \Lambda^1(k)}) + \ln(1 - ze^{-\beta k \Lambda^2(k)}) \right\}. \quad (3.11)$$

A partir das equações definidas acima pode-se calcular a capacidade térmica molar definida em (3.7), com a derivada parcial  $\partial U/\partial T$ , eq.(3.8), dada a partir de

$$\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_z = \frac{Vz\beta^2}{2\pi^2} \int dk k^4 \left\{ \left( \frac{\Lambda^1(k)}{e^{\beta k \Lambda^1(k)} - z} \right)^2 e^{\beta k \Lambda^1(k)} + \left( \frac{\Lambda^2(k)}{e^{\beta k \Lambda^2(k)} - z} \right)^2 e^{\beta k \Lambda^2(k)} \right\}, \quad (3.12a)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_T = \frac{1}{z\beta^2} \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_z = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^3 \left\{ \frac{\Lambda^1(k)e^{\beta k \Lambda^1(k)}}{(e^{\beta k \Lambda^1(k)} - z)^2} + \frac{\Lambda^2(k)e^{\beta k \Lambda^2(k)}}{(e^{\beta k \Lambda^2(k)} - z)^2} \right\}, \quad (3.12b)$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)_T = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{e^{\beta k \Lambda^1(k)}}{(e^{\beta k \Lambda^1(k)} - z)^2} + \frac{e^{\beta k \Lambda^2(k)}}{(e^{\beta k \Lambda^2(k)} - z)^2} \right\}. \quad (3.12c)$$

Note que, as integrais que aparecem nas equações obtidas acima precisam ser resolvidas numericamente. Para isto, utilizamos regras de quadratura específicas desenvolvidas



em linguagem de programação FORTRAN 95.

### Cálculos aproximados

Escrevemos o logaritmo da função de partição (3.3) como uma série de potências da fugacidade  $z$ ,

$$\ln \Xi = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ z \left( e^{-\beta k \Lambda^1(k)} + e^{-\beta k \Lambda^2(k)} \right) + \frac{1}{2} z^2 \left( e^{-2\beta k \Lambda^1(k)} + e^{-2\beta k \Lambda^2(k)} \right) + \dots \right\}. \quad (3.13)$$

Logo após, expandimos o integrando da eq.(3.13) até a sexta ordem em  $\theta$  e até a segunda ordem em  $\sigma$ , então obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{V} \ln \Xi(\beta, V, z) = & \frac{4}{\beta^3} g_4(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5} g_6(z) - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7} g_8(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{33075}{1024\beta^7} g_8(z) \right. \\ & \left. - \frac{654885\sigma^2}{64\beta^9} g_{10}(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{2837835}{16384\beta^9} g_{10}(z) - \frac{1404728325\sigma^2}{8192\beta^{11}} g_{12}(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $g_\sigma(z)$  é a função de Bose definida como

$$g_\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\sigma}.$$

Uma vez que a função de partição foi obtida podemos determinar as quantidades termodinâmicas substituindo a equação (3.14) nas expressões (3.6). Desta forma, obtemos o número de partículas

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{V}N &= \frac{4}{\beta^3}g_3(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5}g_5(z) - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7}g_7(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{33075}{1024\beta^7}g_7(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{654885\sigma^2}{64\beta^9}g_9(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{2837835}{16384\beta^9}g_9(z) - \frac{1404728325\sigma^2}{8192\beta^{11}}g_{11}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

a energia interna

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{V}U &= \frac{12}{\beta^4}g_4(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{375}{8\beta^6}g_6(z) - \frac{15435\sigma^2}{4\beta^8}g_8(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{231525}{1024\beta^8}g_8(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{5893965\sigma^2}{64\beta^{10}}g_{10}(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{25540515}{16384\beta^{10}}g_{10}(z) - \frac{15452011575\sigma^2}{8192\beta^{12}}g_{12}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e a pressão

$$\begin{aligned}
2\pi^2p &= \frac{4}{\beta^4}g_4(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^6}g_6(z) - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^8}g_8(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{33075}{1024\beta^8}g_8(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{654885\sigma^2}{64\beta^{10}}g_{10}(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{2837835}{16384\beta^{10}}g_{10}(z) - \frac{1404728325\sigma^2}{8192\beta^{12}}g_{12}(z) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A capacidade térmica molar é obtida tomando as derivadas das equações (3.15) e (3.16) com respeito a  $T$  e  $z$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_z &= \frac{48}{\beta^3} g_4(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{1125}{4\beta^5} g_6(z) - \frac{30870\sigma^2}{\beta^7} g_8(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{231525}{128\beta^7} g_8(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{29469825\sigma^2}{32\beta^9} g_{10}(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{127702575}{8192\beta^9} g_{10}(z) - \frac{46356034725\sigma^2}{2048\beta^{11}} g_{12}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2 z}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_T &= \frac{2\pi^2}{V\beta^2} \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_z = \\
&\quad \frac{12}{\beta^4} g_3(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{375}{8\beta^6} g_5(z) - \frac{15435\sigma^2}{4\beta^8} g_7(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{231525}{1024\beta^8} g_7(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{5893965\sigma^2}{64\beta^{10}} g_9(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{25540515}{16384\beta^{10}} g_9(z) - \frac{15452011575\sigma^2}{8192\beta^{12}} g_{11}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{3.18b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2 z}{V} \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)_T &= \frac{4}{\beta^3} g_2(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5} g_4(z) - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7} g_6(z) \right\} + \frac{\theta^4}{\pi^4} \left\{ \frac{33075}{1024\beta^7} g_6(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{654885\sigma^2}{64\beta^9} g_8(z) \right\} + \frac{\theta^6}{\pi^6} \left\{ \frac{2837835}{16384\beta^9} g_8(z) - \frac{1404728325\sigma^2}{8192\beta^{11}} g_{10}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{3.18c}$$

## 3.2 Termodinâmica de bósons livres com massa

Nesta seção vamos considerar um gás de bósons relativísticos não-comutativo sem spin, com massa  $m$ , e energia  $E^2 \simeq p^2 + m^2$ . Usando a Hamiltoniana definida na eq.(2.54) escrita em termos de  $\omega^2 = k^2 + m^2$  e assumindo o limite termodinâmico, encontramos o logaritmo natural da grande função de partição,

$$\ln \Xi = -\frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \ln(1 - ze^{-\beta E_1(k)}) + \ln(1 - ze^{-\beta E_2(k)}) \right\}, \quad (3.19)$$

agora temos

$$E_1(k) = \omega(k) \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{\omega(k)\theta(k)}{8\pi} \right)^2} + \frac{\omega(k)\theta(k)}{8\pi} \right\} \quad (3.20a)$$

$$E_2(k) = \omega(k) \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{\omega(k)\theta(k)}{8\pi} \right)^2} - \frac{\omega(k)\theta(k)}{8\pi} \right\}. \quad (3.20b)$$

### Cálculos exatos

As equações de estado serão calculadas através das equações (3.19) e (3.6), de forma análoga a seção anterior, contudo são assumidos campos escalares massivos. Sendo assim, obtemos as expressões para o número de partículas

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_1(k)} - 1} + \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_2(k)} - 1} \right\}, \quad (3.21)$$

a energia interna

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{E_1(k)}{z^{-1}e^{\beta E_1(k)} - 1} + \frac{E_2(k)}{z^{-1}e^{\beta E_2(k)} - 1} \right\}, \quad (3.22)$$

e a pressão

$$p = -\frac{1}{2\pi^2\beta} \int dk k^2 \left\{ \ln(1 - ze^{-\beta E_1(k)}) + \ln(1 - ze^{-\beta E_2(k)}) \right\}. \quad (3.23)$$

As derivadas de (3.21) e (3.22) com respeito a  $T$  e  $z$  que resultam no capacidade térmica ficam

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_z = \frac{Vz\beta^2}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \left(\frac{E_1(k)}{e^{\beta E_1(k)} - z}\right)^2 e^{\beta E_1(k)} + \left(\frac{E_2(k)}{e^{\beta E_2(k)} - z}\right)^2 e^{\beta E_2(k)} \right\} \quad (3.24a)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_T = \frac{1}{z\beta^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_z = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{E_1(k)e^{\beta E_1(k)}}{(e^{\beta E_1(k)} - z)^2} + \frac{E_2(k)e^{\beta E_2(k)}}{(e^{\beta E_2(k)} - z)^2} \right\} \quad (3.24b)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_T = \frac{V}{2\pi^2} \int dk k^2 \left\{ \frac{e^{\beta E_1(k)}}{(e^{\beta E_1(k)} - z)^2} + \frac{e^{\beta E_2(k)}}{(e^{\beta E_2(k)} - z)^2} \right\} \quad (3.24c)$$

### Limite ultrarelativístico

O limite ultrarelativístico,  $k \gg m$ , é calculado a partir da expressão (3.19) por expansão do integrando em  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $m$  até a segunda ordem, então obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{V} \ln \Xi(\beta, V, z) = & \frac{4}{\beta^3} g_4(z) - \frac{m^2}{\beta} g_2(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5} g_6(z) - \frac{9m^2}{64\beta^3} g_4(z) \right. \\ & \left. - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7} g_8(z) + \frac{225m^2\sigma^2}{16\beta^5} g_6(z) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A partir da função de partição encontramos o número de partículas

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{V}N &= \frac{4}{\beta^3}g_3(z) - \frac{m^2}{\beta}g_1(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5}g_5(z) - \frac{9m^2}{64\beta^3}g_3(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7}g_7(z) + \frac{225m^2\sigma^2}{16\beta^5}g_5(z) \right\}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

a energia interna

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{V}U &= \frac{12}{\beta^4}g_4(z) - \frac{m^2}{\beta^2}g_2(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{375}{8\beta^6}g_6(z) - \frac{27m^2}{64\beta^4}g_4(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{15435\sigma^2}{4\beta^8}g_8(z) + \frac{1125m^2\sigma^2}{16\beta^6}g_6(z) \right\}, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

e a pressão

$$\begin{aligned}
2\pi^2p &= \frac{4}{\beta^4}g_4(z) - \frac{m^2}{\beta^2}g_2(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^6}g_6(z) - \frac{9m^2}{64\beta^4}g_4(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^8}g_8(z) + \frac{225m^2\sigma^2}{16\beta^6}g_6(z) \right\}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

A função de Bose  $g_\sigma(z)$  diverge para  $z = 1$  quando  $\sigma \leq 1$ , mas se torna a função Zeta de Riemann  $\zeta(\sigma)$  quando  $\sigma > 1$ . Como na expressão para o número de partículas (3.26) a densidade total de bósons deve ser fixa, então devemos assumir  $m^2g_1(1) \rightarrow 0$  na região  $T \leq T_0$ .

A capacidade térmica molar é calculada por (3.7) com a derivada parcial  $\partial U/\partial T$  dada por (3.8). Usando as equações (3.26) e (3.27) temos

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_z &= \frac{48}{\beta^3} g_4(z) - \frac{2m^2}{\beta} g_2(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{1125}{4\beta^5} g_6(z) - \frac{27m^2}{16\beta^3} g_4(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{30870\sigma^2}{\beta^7} g_8(z) + \frac{3375m^2\sigma^2}{8\beta^5} g_6(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2 z}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_T &= \frac{2\pi^2}{V\beta^2} \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_z = \\ &= \frac{12}{\beta^4} g_3(z) - \frac{m^2}{\beta^2} g_1(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{375}{8\beta^6} g_5(z) - \frac{27m^2}{64\beta^4} g_3(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{15435\sigma^2}{4\beta^8} g_7(z) + \frac{1125m^2\sigma^2}{16\beta^6} g_5(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.29b)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2 z}{V} \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)_T &= \frac{4}{\beta^3} g_2(z) - \frac{m^2}{\beta} g_0(z) + \frac{\theta^2}{\pi^2} \left\{ \frac{75}{8\beta^5} g_4(z) - \frac{9m^2}{64\beta^3} g_2(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2205\sigma^2}{4\beta^7} g_6(z) + \frac{225m^2\sigma^2}{16\beta^5} g_4(z) \right\}. \end{aligned} \quad (3.29c)$$

### Limite não relativístico

Tomamos o limite não-relativístico,  $m \gg k$ , por expansão das energias dadas em (3.20) com relação aos parâmetros  $\theta$  e  $\sigma$ , e  $k$  até a segunda ordem

$$E_1(k) \approx m + \frac{k^2}{2m} + \frac{m^2\theta}{8\pi} + \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2} \quad (3.30a)$$

$$E_2(k) \approx m + \frac{k^2}{2m} - \frac{m^2\theta}{8\pi} + \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2} \quad (3.30b)$$

Substituindo as energias acima na eq.(3.19) expandida em termos de  $z$ , encontramos

$$\ln \Xi = V \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} [g_{5/2}(z_1) + g_{5/2}(z_2)], \quad (3.31)$$

onde

$$z_1 = \exp \left[ \beta \left( \mu_1 - m - \frac{m^2\theta}{8\pi} - \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2} \right) \right], \quad (3.32a)$$

$$z_2 = \exp \left[ \beta \left( \mu_2 - m + \frac{m^2\theta}{8\pi} - \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2} \right) \right], \quad (3.32b)$$

onde  $z_i < 1$  para  $T > T_0$ , enquanto  $z_i = 1$  para  $T \leq T_0$  e o potencial químico se torna

$$\mu_1 = m + \frac{m^2\theta}{8\pi} + \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2} \quad (3.33a)$$

$$\mu_2 = m - \frac{m^2\theta}{8\pi} + \frac{m^3\theta^2}{128\pi^2}. \quad (3.33b)$$

Como podemos notar surge uma modificação na fugacidade atuando como uma massa adicional.

Dada a função de partição encontramos as expressões para o número de partículas e energia interna

$$N = V \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} [g_{3/2}(z_1) + g_{3/2}(z_2)], \quad (3.34)$$

$$U = \frac{3V}{2\beta} \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} [g_{5/2}(z_1) + g_{5/2}(z_2)]. \quad (3.35)$$

Sendo o calor específico calculado a partir das derivadas das equações acima, como definido em (3.7) e (3.8).

Como podemos ver, no estudo da condensação de Bose-Einstein através de campos não-comutativos surgem correções nas propriedades do sistema no limite não-relativístico, o que pode abrir novos caminhos à procura de pequenos efeitos produzidos por tal deformação nos sistemas da matéria condensada.



# Capítulo 4

## Resultados e discussões

O comportamento termodinâmico de campos escalares, apresentado no capítulo 3, foi explorado no contexto da teoria quântica de campos sobre um espaço alvo não-comutativo. Isto leva a deformações das grandezas físicas que serão analisadas em detalhes nesse capítulo. Esses resultados podem ser comparados com os bem estabelecidos na literatura pela teoria comutativa usual.

Foram levados em conta campos bosônicos não massivos, cujas propriedades serão estudadas através de cálculos numéricos e aproximados, além de campos massivos que serão discutidos em duas representações, nos limites não-relativístico e ultrarelativístico. As quantidades termodinâmicas modificadas pela não comutatividade dos campos são comparadas através de gráficos, construídos em variadas regiões de temperatura, nos quais são manifestados a relação entre essas grandezas com a temperatura e os parâmetros não-comutativos  $\theta$  e  $\sigma$ .

Dando início as nossas investigações, os resultados serão apresentados primeiramente para bósons sem massa assumindo o número de partículas sendo conservado, embora não existam partículas reais elementares que satisfaçam essas condições isto já foi considerado no trabalho [32]. Como por exemplo, os fótons e fônons são partículas não massivas mas não satisfazem a condição de terem um número de partículas conservado.

Vamos apresentar as contribuições dadas em um sistema de  $N$  partículas não massivas fixas. As equações (3.15) e (3.9) são interpretadas como o número de partículas excitadas,  $N - N_0$ , que para temperaturas maiores que determinada temperatura  $T_0$  equivale

ao número de total de partículas, onde  $T_0$  é a temperatura na qual uma fração relativamente alta de átomos começam a se condensar no estado de energia mais baixa. Ao ser atingida a temperatura crítica  $T_0$  a fugacidade  $z$  é igual a unidade e então é possível determinar a densidade total de partículas ( $n = N/V$ ). Por outro lado, para  $T < T_0$  o número de partículas no estado fundamental,  $N_0$ , se torna macroscopicamente ocupado e então a quantidade de partículas excitadas diminui proporcionalmente. Esse comportamento pode ser visto na figura abaixo para bósons comutativos e não-comutativos.

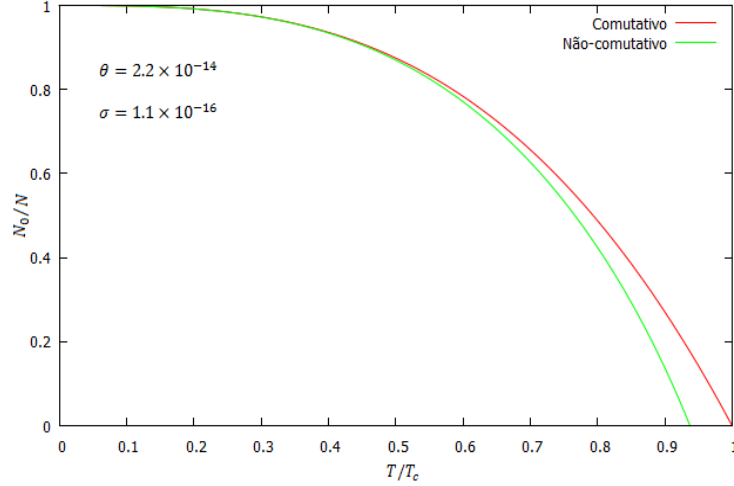


Figura 4.1: Fração de partículas no estado fundamental em função da temperatura comparando bósons comutativos e não-comutativos, onde  $T_c = 4.0 \times 10^{13}$  é a temperatura crítica para o caso comutativo.

A temperatura de transição  $T_0$  para bósons não-comutativos foi obtida numericamente pela equação (3.9) para um dado valor de  $N$ , sendo escolhidas temperaturas da ordem que os efeitos causados pela não comutatividade são vistos graficamente. Os parâmetros não-comutativos foram fixados nos seguintes valores  $\theta = 2.2 \times 10^{-14}$  e  $\sigma = 1.1 \times 10^{-16}$ , os quais estão intrinsecamente ligados a curtas distâncias. Desta forma, foi possível obter as temperaturas críticas relacionadas a bósons não-comutativos  $T_0 \approx 3.75 \times 10^{13}$  e comutativos  $T_0 \approx 4.0 \times 10^{13}$  para uma densidade fixa de partículas. Deve-se salientar que estamos assumindo o valor dessas grandezas em unidades arbitrárias.

Por conveniência os gráficos em função da temperatura estão normalizados pela temperatura crítica  $T_c$  do caso comutativo usual, este mesmo procedimento será feito em gráficos seguintes. Analisando o gráfico da figura 4.1 é notável que o comportamento obtido depois da introdução da não comutatividade é similar, contudo as temperaturas críticas são modificadas pela escolha dos valores dos parâmetros  $\theta$  e  $\sigma$ . Estas modifica-

ções causadas nas temperaturas críticas também podem ser vistas nas figs.[4.2], onde são mostrados os resultados numéricos de  $T_0$  para diferentes valores de  $N$  de bósons com e sem massa.

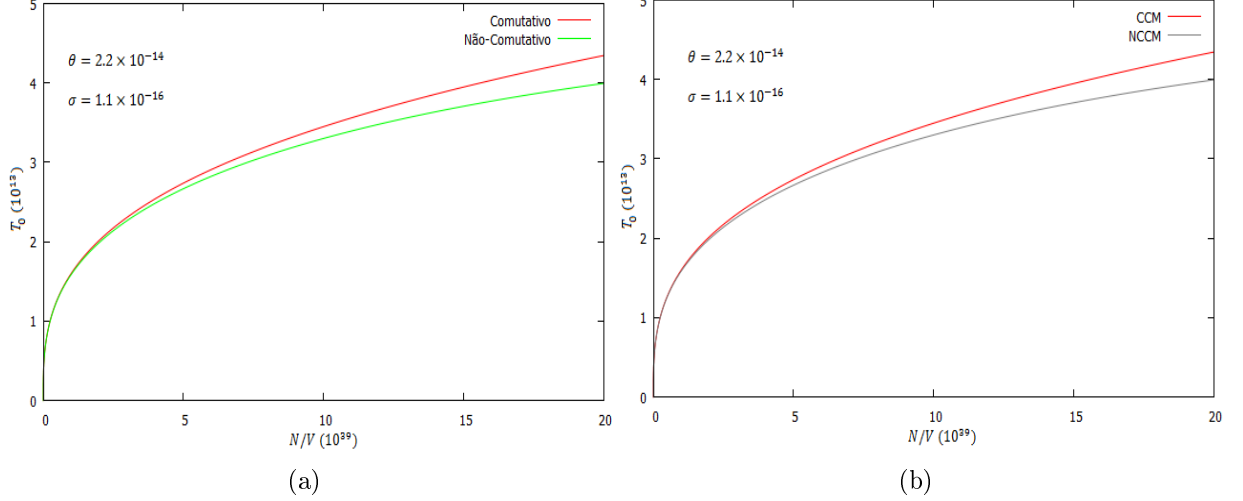


Figura 4.2: (a) Resultados numéricos de  $T_0$  em função do número de partículas  $N$  para bósons sem massa comutativos e não-comutativos. (b) Resultados numéricos de  $T_0$  em função do número de partículas  $N$  para bósons com massa comutativos (CCM) e não-comutativos (NCCM), sendo a escolha de  $m = 4.0 \times 10^8$  arbitrária.

Para temperaturas  $T$  maiores que a temperatura  $T_0$  podemos sempre encontrar valores de  $z$  tal que as equações (3.15) e (3.9) sejam satisfeitas. Desta forma, usando as equações (3.16), (3.10), (3.17) e (3.11) podemos também estudar os efeitos causados na energia interna e pressão, cujo o comportamento é mostrado na figura 4.3 comparando os resultados obtidos para bósons não-comutativos com os obtidos para o caso comutativo usual. São usados também resultados exatos e aproximados para testar a eficiência dessa aproximação na determinação das quantidades termodinâmicas em interesse e a fidelidade da aproximação baseada na expansão dos parâmetros  $\theta$  e  $\sigma$  com o resultado calculado exatamente.

Da figura 4.3 vemos que todas as curvas apresentam um comportamento assintótico, possuindo uma descontinuidade em  $T = T_0$ . Por outro lado, na fig.[4.3(a)] a dependência da energia com a temperatura para bósons comutativos se torna mais suave na região não degenerada  $T > T_0$ , enquanto que para bósons não-comutativos as curvas são mais acentuadas nessa região. Além disso, à medida que a temperatura aumenta os efeitos não-comutativos tornam-se mais significativos, isto está relacionado com o fato que a não comutatividade deve ter contribuições relevantes no regime de altas energias. De

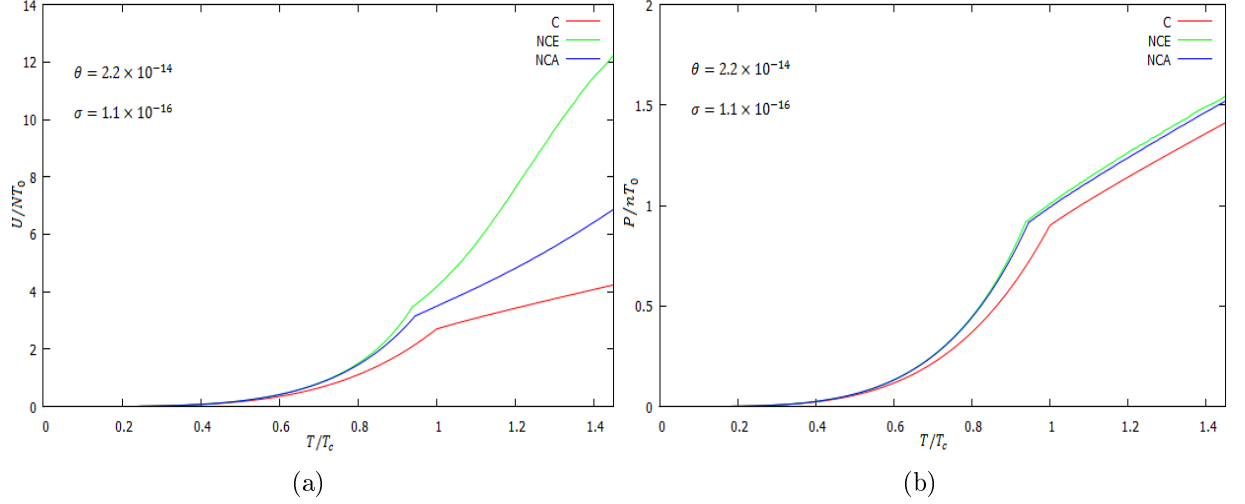


Figura 4.3: (a) Energia interna por partícula em função da temperatura. (b) Pressão por densidade de partículas em função da temperatura. Os símbolos C, NCE e NCA representam resultados obtidos com bósons comutativo, não-comutativo exato (numérico) e não-comutativo aproximado, respectivamente. As temperaturas críticas para um dado valor fixo de  $n$  para cada caso são  $T_0 \approx 4.0 \times 10^{13}$  (C),  $T_0 \approx 3.75 \times 10^{13}$  (NCE) e  $T_0 \approx 3,78 \times 10^{13}$  (NCA).

outro modo, os efeitos causados no limite de baixas energias são muito pequenos, podendo ser testados apenas com uma precisão muito alta.

Apresentamos também, na figura 4.4, os resultados obtidos numericamente para variações no valor do parâmetro  $\sigma$  mantendo  $\theta$  fixo. Essas variações fazem com que as temperaturas críticas sejam afetadas pela regularização dos parâmetros  $\theta$  e  $\sigma$ . Também observamos que o aumento de  $\sigma$  leva a uma diminuição da amplitude de energia modificada.

Por outro lado, na figura 4.5, apresentamos os resultados obtidos numericamente mantendo  $\sigma$  fixo enquanto o parâmetro  $\theta$  é variado. A partir da análise desses gráficos, podemos ver que a temperatura crítica possui uma dependência mais forte em variações em  $\theta$  do que em  $\sigma$ .

Continuando nossa análise, construímos o gráfico da capacidade térmica molar  $C_v$ , dada por (3.7) e (3.8), para bósons não massivos usando as equações (3.18) resolvidas numericamente e através das equações (3.12) calculadas a partir de aproximações. Este resultado é mostrado na fig.[4.6], onde é visto que a condensação de Bose-Einstein é acompanhada pelo aparecimento de um pico pronunciado e distinto no calor específico do sistema na temperatura crítica. Também podemos observar que a capacidade térmica

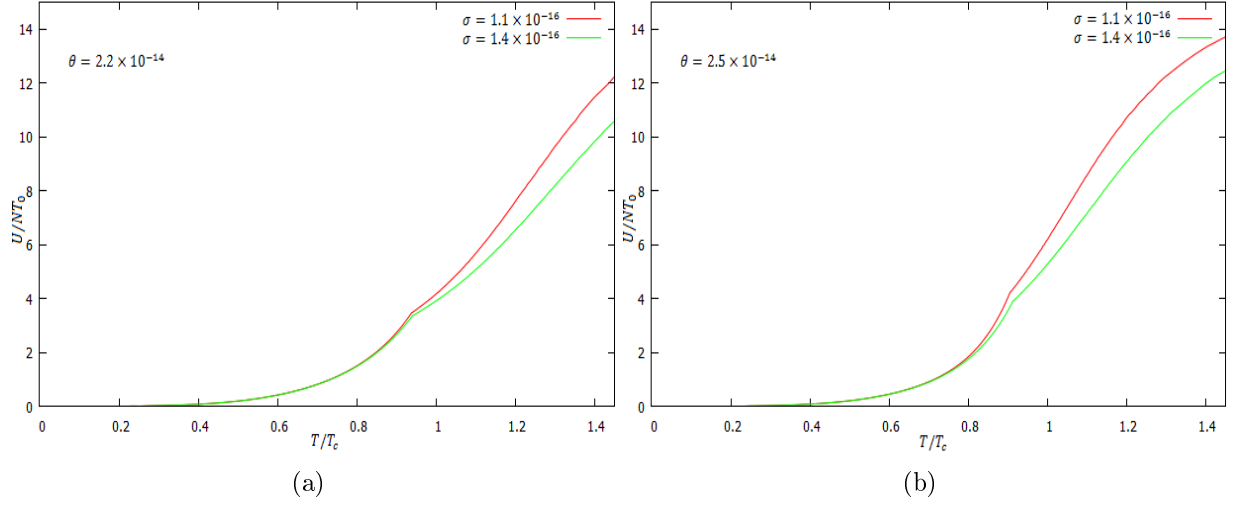


Figura 4.4: (a) Fixando  $\theta = 2.2 \times 10^{-14}$  e variando  $\sigma$ , a curva inferior com  $\sigma = 1.4 \times 10^{-16}$  apresenta uma temperatura crítica  $T_0 \approx 3.76 \times 10^{13}$ , enquanto a superior com  $\sigma = 1.1 \times 10^{-16}$  apresenta uma temperatura crítica  $T_0 \approx 3.75 \times 10^{13}$ . (b) Mantendo  $\theta = 2.5 \times 10^{-14}$  fixo e variando  $\sigma$ , a curva inferior com  $\sigma = 1.4 \times 10^{-16}$  apresenta uma temperatura crítica  $T_0 \approx 3.65 \times 10^{13}$ , enquanto a superior com  $\sigma = 1.1 \times 10^{-16}$  apresenta uma temperatura crítica  $T_0 \approx 3.62 \times 10^{13}$ .

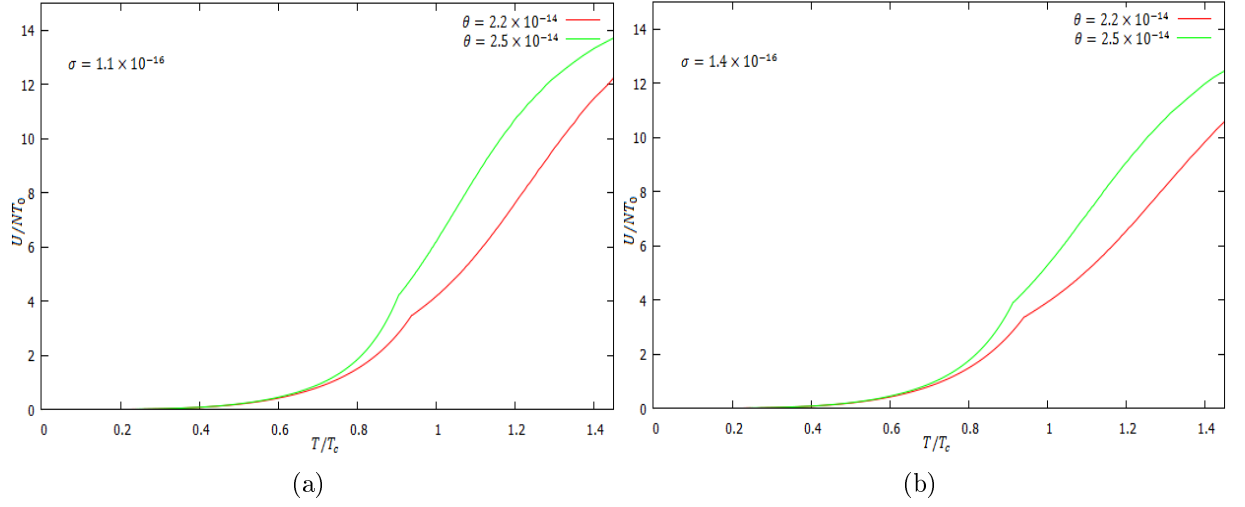


Figura 4.5: (a) Fixando  $\sigma = 1.1 \times 10^{-16}$  e variando  $\theta$ , na curva inferior com  $\theta = 2.2 \times 10^{-14}$  encontramos  $T_0 \approx 3.75 \times 10^{13}$ , enquanto na superior com  $\theta = 2.5 \times 10^{-14}$  encontramos  $T_0 \approx 3.62 \times 10^{13}$ . (b) Mantendo  $\sigma = 1.4 \times 10^{-16}$  fixo e variando  $\theta$ , na curva inferior com  $\theta = 2.2 \times 10^{-14}$  encontramos  $T_0 \approx 3.76 \times 10^{13}$ , enquanto na superior com  $\theta = 2.5 \times 10^{-14}$  encontramos  $T_0 \approx 3.65 \times 10^{13}$ .

obtida com a introdução da não comutatividade é maior do que a usual, possuindo um aumento na descontinuidade em  $T = T_0$ , nesta temperatura o "gap" em  $C_v$  para bósons não-comutativos é igual 10.45 enquanto que para bósons comutativos é 6.57.

Na sequência, os resultados referentes a capacidade térmica de bósons que possuem massa são exibidos na figura 4.7. Assumimos a relação para a frequência deslocada

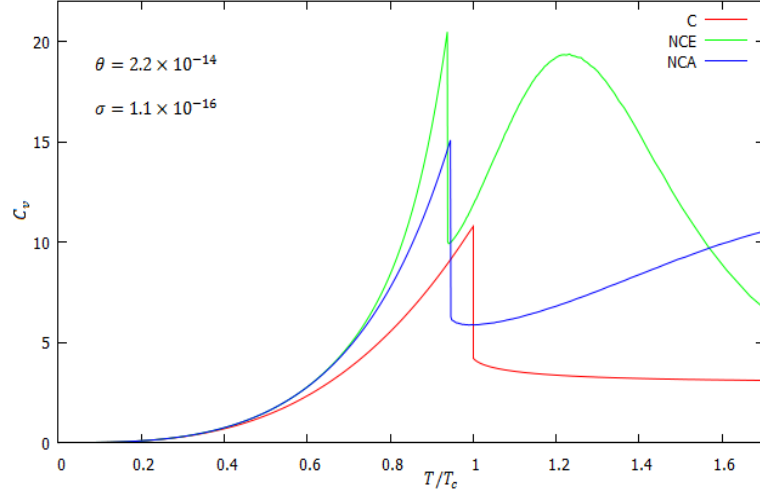


Figura 4.6: Capacidade térmica em função da temperatura para bósons não massivos comparando os resultados obtidos com bósons comutativo (C), não-comutativo exato (NCE) e não-comutativo aproximado (NCA), onde os valores dos parâmetros utilizados são os mesmos descritos na figura 4.3.

para  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2} - m$ , esta modificação não deve mudar a física, no entanto é mais conveniente para definir a frequência nula quando  $k = 0$ .

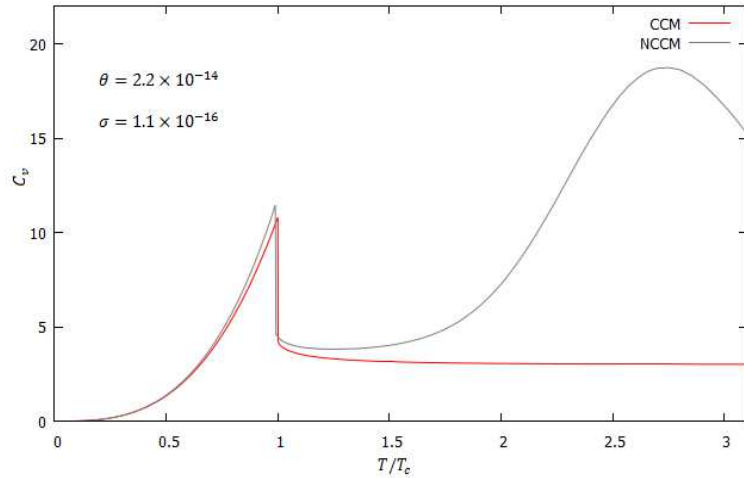


Figura 4.7: Resultados numéricos para a capacidade térmica em função da temperatura para bósons com massa comparando os casos comutativo (CCM) e não-comutativo (NCCM), pela escolha de um valor fixo de  $n$  as respectivas temperaturas críticas são  $T_0 \approx 1.8 \times 10^{13}$  e  $T_0 \approx 1.78 \times 10^{13}$ , onde fixamos  $m = 4.0 \times 10^8$ .

Dando continuidade as nossas investigações com bósons massivos procuramos aproximações capazes de fornecer correções produzidas pelos efeitos não-comutativos na física de altas e baixas energias. Para isto, tomamos os limites ultrarelativístico e não-relativístico, cujos resultados para a capacidade térmica são comparados na figura 4.8. Deste gráfico é visto que abaixo de certa temperatura,  $C_v$  no limite não-relativístico é

maior do que no limite ultrarelativístico, contudo acima desta temperatura esse resultado é invertido.

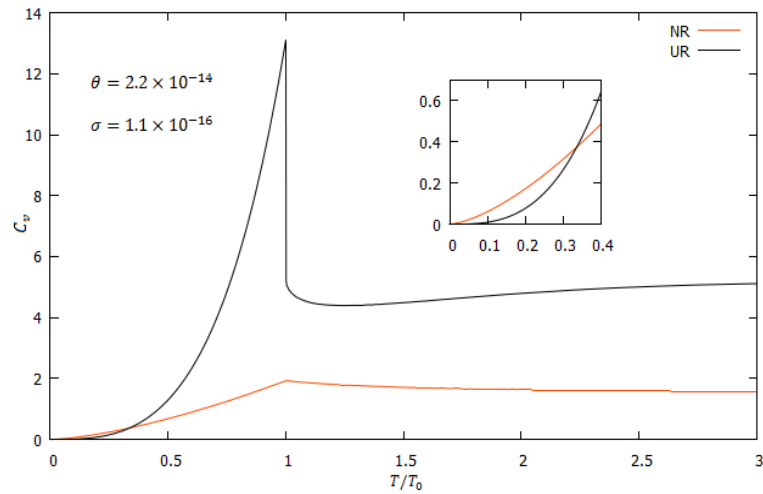


Figura 4.8: Capacidade térmica em função da temperatura nos limites não-relativístico e ultrarelativístico. Para o limite NR escolhemos  $T_0 = 1.0 \times 10^3$  e  $m = 1.0 \times 10^8$  ( $m \gg T$ ), enquanto que para o limite UR escolhemos  $T_0 = 3.78 \times 10^{13}$  e  $m = 1.0$  ( $m \ll T$ ), com esses valores dados em unidades arbitrárias.

Também encontramos que as curvas da capacidade térmica apresentam singularidades nas vizinhanças de  $T = T_0$ , isto indica uma descontinuidade da energia livre em derivadas de ordem superior a um, o que resulta em uma transição de fase comumente chamada de transição de segunda ordem.

# Capítulo 5

## Conclusões e perspectivas

Neste trabalho investigamos as propriedades termodinâmicas de um gás de bósons relativísticos no cenário da teoria quântica de campos baseada no conceito de campos não-comutativos. Neste estudo tivemos como objetivo obter as equações características que descrevem um condensado, tais como temperatura de transição, fração de partículas no condensado, energia interna, pressão e calor específico, de modo a verificar as correções causadas nesse sistema devido a introdução da não-comutatividade.

Usamos esta teoria para descrevermos dois tipos de sistemas de bósons. No primeiro caso consideramos bósons com massa zero, cujas propriedades são descritas através de cálculos numéricos e aproximados. No segundo caso são considerados bósons com massa finita que além de serem averiguados através de resultados numéricos, são também estudados nas representações dos limites não-relativístico e ultrarelativístico. Estes resultados são então comparados com conhecidos na literatura pela teoria comutativa.

A primeira consequência de tal deformação aparece na relação de dispersão, o que leva a modificações nas grandezas termodinâmicas. Para entendermos essas modificações e sua dependência com os parâmetros não-comutativos ( $\theta$  e  $\sigma$ ) introduzidos nessa teoria, estudamos graficamente essas quantidades termodinâmicas modificadas.

A análise desses gráficos revelam que os efeitos não-comutativos causam contribuições significativas em regimes de altas temperaturas, o que está relacionado ao fato da não-comutatividade ser uma teoria de altas energias, apresentando características perceptíveis na escala de Planck.



Nosso estudo também demonstra que a condensação do gás de bósons não-comutativo é caracterizada por mudanças abruptas nas funções termodinâmicas ao ser atingida determinada temperatura crítica de forma similar ao resultado usual. Isto pode ser visto nas curvas do calor específico, onde  $C_v$  exibe descontinuidades em  $T = T_0$ , desta forma a transição de fase é de segunda ordem. Por outro lado, na região  $T > T_0$  a não comutatividade provoca deformações bastante distintas em  $C_v$  quando comparamos com o caso comutativo.

Dentre as perspectivas que seguem deste trabalho a mais imediata é considerar produção de pares partículas-antipartículas que não estão sendo levados em conta, mas são importantes para o presente estudo. Uma maneira natural de introduzir a assimetria matéria-antimatéria é a partir da interpretação das equações de energia modificadas (3.30) como correspondentes a descrição de partículas e antipartículas.

Temos também como perspectiva aplicar a teoria não-comutativa para investigar o gás de bósons em um potencial harmônico. Outra possibilidade é explorar a condensação de Bose-Einstein com campos escalares não-comutativos fazendo uma extensão para geometrias em espaços curvos, tais que o escalar de curvatura seja diferente de zero ( $R \neq 0$ ).

# Apêndice A

## Relações de comutação

Neste apêndice vamos calcular os comutadores que aparecem na seção (2.2.2). Usando as equações (2.16) encontramos

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^b(\vec{y}, t)] &= \left[ \varphi^a(\vec{x}, t) - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta\pi_c(\vec{x}, t), \varphi^b(\vec{y}, t) - \frac{1}{2}\epsilon^{bd}\theta\pi_d(\vec{y}, t) \right] \\ &= [\varphi^a(\vec{x}, t), \varphi^b(\vec{y}, t)] - \frac{1}{2}\epsilon^{bd}\theta [\varphi^a(\vec{x}, t), \pi_d(\vec{y}, t)] \\ &\quad - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta [\pi_c(\vec{x}, t), \varphi^b(\vec{y}, t)] + \frac{1}{4}\epsilon^{ac}\epsilon^{bd}\theta^2 [\pi_c(\vec{x}, t), \pi_d(\vec{y}, t)] \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon^{bd}\theta\delta_d^a\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{i}{2}\epsilon^{ac}\theta\delta_c^b\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= i\epsilon^{ab}\theta\delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}^a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{y}, t)] &= \left[ \varphi^a(\vec{x}, t) - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta\pi_c(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t) \right] \\ &= [\varphi^a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta [\pi_c(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] \\ &= i\delta_b^a\delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$[\hat{\pi}_a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{y}, t)] = [\pi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] = 0. \tag{A.3}$$

As relações de comutação para as componentes de Fourier são obtidas usando as transformações (2.21)

$$\begin{aligned}
[\hat{\varphi}_{\vec{n}}^a, \hat{\varphi}_{\vec{m}}^b] &= \left[ \varphi_{\vec{n}}^a - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ac} \theta(n) \pi_{-\vec{n}}^c, \varphi_{\vec{m}}^b - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{bd} \theta(m) \pi_{-\vec{m}}^d \right] \\
&= [\varphi_{\vec{n}}^a, \varphi_{\vec{m}}^b] - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{bd} \theta(m) [\varphi_{\vec{n}}^a, \pi_{-\vec{m}}^d] - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ac} \theta(n) [\pi_{-\vec{n}}^c, \varphi_{\vec{m}}^b] \\
&\quad + \frac{1}{4R^6} \epsilon^{ac} \epsilon^{bd} \theta(n) \theta(m) [\pi_{-\vec{n}}^c, \pi_{-\vec{m}}^d] \\
&= -\frac{i}{2R^3} \epsilon^{bd} \theta(m) \delta^{ad} \delta_{\vec{n}, -\vec{m}} + \frac{i}{2R^3} \epsilon^{ac} \theta(n) \delta^{cb} \delta_{-\vec{n}, \vec{m}} \\
&= \frac{i \epsilon^{ab} \theta(n)}{R^3} \delta_{\vec{n}+\vec{m}, 0}, \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\varphi}_{\vec{n}}^a, \hat{\pi}_{\vec{m}}^b] &= \left[ \varphi_{\vec{n}}^a - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ac} \theta(n) \pi_{-\vec{n}}^c, \pi_{\vec{m}}^b \right] \\
&= [\varphi_{\vec{n}}^a, \pi_{\vec{m}}^b] - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ac} \theta(n) [\pi_{-\vec{n}}^c, \pi_{\vec{m}}^b] \\
&= i \delta^{ab} \delta_{\vec{n}, \vec{m}}, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$[\hat{\pi}_{\vec{n}}^a, \hat{\pi}_{\vec{m}}^b] = [\pi_{\vec{n}}^a, \pi_{\vec{m}}^b] = 0. \tag{A.6}$$

Para obtermos as relações de comutação para os operadores  $a_{\vec{n}}^{i\dagger}$  e  $a_{\vec{n}}^i$  usamos as equações (2.30a) e (2.30b)

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{m}}^i, a_{\vec{n}}^j] &= \left[ \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{m}}}{2}} \left( \varphi_{\vec{m}}^i + i \frac{\pi_{-\vec{m}}^i}{\Delta_{\vec{m}}} \right), \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( \varphi_{\vec{n}}^j + i \frac{\pi_{-\vec{n}}^j}{\Delta_{\vec{n}}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( [\varphi_{\vec{m}}^i, \varphi_{\vec{n}}^j] + \frac{i}{\Delta_{\vec{n}}} [\varphi_{\vec{m}}^i, \pi_{-\vec{n}}^j] + \frac{i}{\Delta_{\vec{m}}} [\pi_{-\vec{m}}^i, \varphi_{\vec{n}}^j] - \frac{1}{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}} [\pi_{-\vec{m}}^i, \pi_{-\vec{n}}^j] \right) \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( -\frac{1}{\Delta_{\vec{n}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m}+\vec{n},0} + \frac{1}{\Delta_{\vec{m}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m}+\vec{n},0} \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{m}}^{i\dagger}, a_{\vec{n}}^{j\dagger}] &= \left[ \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{m}}}{2}} \left( \varphi_{-\vec{m}}^i - i \frac{\pi_{\vec{m}}^i}{\Delta_{\vec{m}}} \right), \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( \varphi_{-\vec{n}}^j - i \frac{\pi_{\vec{n}}^j}{\Delta_{\vec{n}}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( [\varphi_{-\vec{m}}^i, \varphi_{-\vec{n}}^j] - \frac{i}{\Delta_{\vec{n}}} [\varphi_{-\vec{m}}^i, \pi_{\vec{n}}^j] - \frac{i}{\Delta_{\vec{m}}} [\pi_{\vec{m}}^i, \varphi_{-\vec{n}}^j] - \frac{1}{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}} [\pi_{\vec{m}}^i, \pi_{\vec{n}}^j] \right) \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( \frac{1}{\Delta_{\vec{n}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m}+\vec{n},0} - \frac{1}{\Delta_{\vec{m}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m}+\vec{n},0} \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{m}}^i, a_{\vec{n}}^{j\dagger}] &= \left[ \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{m}}}{2}} \left( \varphi_{\vec{m}}^i + i \frac{\pi_{-\vec{m}}^i}{\Delta_{\vec{m}}} \right), \sqrt{\frac{\Delta_{\vec{n}}}{2}} \left( \varphi_{-\vec{n}}^j - i \frac{\pi_{\vec{n}}^j}{\Delta_{\vec{n}}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( [\varphi_{\vec{m}}^i, \varphi_{-\vec{n}}^j] - \frac{i}{\Delta_{\vec{n}}} [\varphi_{\vec{m}}^i, \pi_{\vec{n}}^j] + \frac{i}{\Delta_{\vec{m}}} [\pi_{-\vec{m}}^i, \varphi_{-\vec{n}}^j] + \frac{1}{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}} [\pi_{-\vec{m}}^i, \pi_{\vec{n}}^j] \right) \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{m}} \Delta_{\vec{n}}}}{2} \left( \frac{1}{\Delta_{\vec{n}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m},\vec{n}} + \frac{1}{\Delta_{\vec{m}}} \delta^{ij} \delta_{\vec{m},\vec{n}} \right) \\
&= \delta^{ij} \delta_{\vec{m},\vec{n}}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Na sequência calculamos as relações de comutação (2.42) usando as expressões (2.39) e (2.39), então

$$\begin{aligned}
[A_{\vec{m}}^1, A_{\vec{n}}^{1\dagger}] &= \frac{1}{2} [a_{\vec{m}}^1 - ia_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger} + ia_{\vec{n}}^{2\dagger}] \\
&= \frac{1}{2} \left( [a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] + i[a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] - i[a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] + [a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] \right) \\
&= \delta_{\vec{m}, \vec{n}},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
[A_{\vec{m}}^2, A_{\vec{n}}^{2\dagger}] &= \frac{1}{2} [a_{\vec{m}}^1 + ia_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger} - ia_{\vec{n}}^{2\dagger}] \\
&= \frac{1}{2} \left( [a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] - i[a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] + i[a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] + [a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] \right) \\
&= \delta_{\vec{m}, \vec{n}},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

e

$$\begin{aligned}
[A_{\vec{m}}^1, A_{\vec{n}}^{2\dagger}] &= \frac{1}{2} [a_{\vec{m}}^1 - ia_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger} - ia_{\vec{n}}^{2\dagger}] \\
&= \frac{1}{2} \left( [a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] - i[a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] - i[a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] - [a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
[A_{\vec{m}}^2, A_{\vec{n}}^{1\dagger}] &= \frac{1}{2} [a_{\vec{m}}^1 + ia_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger} + ia_{\vec{n}}^{2\dagger}] \\
&= \frac{1}{2} \left( [a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] + i[a_{\vec{m}}^1, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] + i[a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{1\dagger}] - [a_{\vec{m}}^2, a_{\vec{n}}^{2\dagger}] \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Logo,

$$[A_{\vec{m}}^i, A_{\vec{n}}^{j\dagger}] = \delta^{ij} \delta_{\vec{m}, \vec{n}}. \tag{A.14}$$

# Bibliografia

- [1] CARROLL, S. M. et al. Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 141601, 2001.
- [2] HINCHLIFFE, I.; KERSTING, N. CP violation from noncommutative geometry. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 116007, 2001.
- [3] MORITA, K. Discrete symmetries in Lorentz-invariant non-commutative QED. *Prog. Theor. Phys.*, v. 110, p. 1003–1019, 2003.
- [4] CARMONA, J. M. et al. Noncommutativity in field space and Lorentz invariance violation. *Phys. Lett. B*, v. 565, p. 222–228, 2003.
- [5] CARMONA, J. M. et al. Matter-antimatter asymmetry without departure from thermal equilibrium. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 21, p. 883–892, 2006.
- [6] CHU, C.; GREENE, B. R.; SHIU, G. Remarks on inflation and noncommutative geometry. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 16, n. 34, p. 2231–2240, 2001.
- [7] ALEXANDER, S.; BRANDENBERGER, R.; MAGUEIJO, J. Non-commutative inflation. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 081301, 2003.
- [8] KOH, S.; BRANDENBERGER, R. H. Cosmological perturbations in non-commutative inflation. *JCAP*, v. 0706, 2007.
- [9] BAROSI, L.; BRITO, F.; QUEIROZ, A. Noncommutative field gas driven inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 0804, p. 005, 2008.
- [10] HORVAT, R.; KEKEZ, D.; TRAMPETIC, J. Spacetime noncommutativity and ultra-high energy cosmic ray experiments. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 065013, 2011.
- [11] HINCHLIFFE, I.; KERSTING, N.; MA, Y. Review of the phenomenology of noncommutative geometry. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 19, n. 2, p. 179–204, 2004.

- [12] SZABO, R. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rept.*, v. 378, p. 207–299, 2003.
- [13] DOUGLAS, M.; NEKRASOV, N. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 73, p. 977–1029, 2001.
- [14] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 71, n. 1, p. 38–41, 1947.
- [15] SNYDER, H. S. The electromagnetic field in quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 72, n. 1, p. 68–71, 1947.
- [16] SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, v. 9909, 1999.
- [17] DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Math. Phys.*, v. 172, n. 1, p. 187–220, 1995.
- [18] ASCHIERI, P. et al. A gravity theory on noncommutative spaces. *Class. Quant. Grav.*, v. 22, p. 3511–3532, 2005.
- [19] ASCHIERI, P. et al. Noncommutative geometry and gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 23, p. 1883–1912, 2006.
- [20] CARMONA, J. M. et al. Quantum theory of noncommutative fields. *Journal of High Energy Physics*, v. 0303, p. 058, 2003.
- [21] NAIR, V. P.; POLYCHRONAKOS, A. P. Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere. *Phys. Lett. B*, v. 505, p. 267–274, 2001.
- [22] BALACHANDRAN, A. P. et al. Quantum fields with noncommutative target spaces. *Phys. Rev. D*, v. 77, 2008.
- [23] EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen gases II. sitz. ber. preuss. akad. wissens. v. 3, 1925.
- [24] HUANG, K. *Statistical Mechanics*. New York: Wiley, 1963.
- [25] AL'TAIE, M. B. Bose-Einstein condensation in an Einstein universe. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 11, p. 1603–1620, 1978.
- [26] ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995.

- [27] DAVIS, K. B. et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, p. 3969, 1995.
- [28] ENSHER, J. R. Tese de doutorado, *The First Experiments with Bose-Einstein Condensation of  $^{87}\text{Rb}$* . 1998.
- [29] DALFOVO, F. et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, v. 71, n. 8, p. 463, 1999.
- [30] LANDSBERG, P. T.; DUNNING-DAVIES, J. Ideal relativistic bose condensation. *Phys. Rev.*, v. 138, p. A 1049– A 1052, 1965.
- [31] HABER, H. E.; WELDON, H. A. Thermodynamics of an ultrarelativistic ideal bose gas. *Phys. Rev. Lett*, v. 46, n. 23, p. 1497–1500, 1981.
- [32] FUJITA, S.; KIMURA, T.; ZHENG, Y. On the Bose-Einstein condensation of free relativistic bosons with or without mass. *Foundations of Physics*, v. 21, n. 9, p. 1117–1130, 1991.
- [33] BURAKOVSKY, L.; HORWITZ, L. P.; SCHIEVE, W. C. New relativistic high-temperature Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. D*, v. 54, p. 4029, 1996.
- [34] GRETHER, M.; LLANO, M.; BAKER, G. A. Bose-Einstein condensation in the relativistic ideal bose gas. *Phys. Rev. Lett*, v. 99, 2007.
- [35] DU, C. F.; KONG, X. M. Bose-Einstein condensation of a relativistic bose gas in a harmonic potential. *Physica B*, v. 407, n. 12, p. 1973–1977, 2012.
- [36] BALACHANDRAN, A. P.; PINZUL, A.; QUEIROZ. Twisted Poincaré invariance, noncommutative gauge theories and UV IR mixing. *Physics Letters B*, v. 668, p. 241–245, 2008.