

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**  
**ÁREA DE RECURSOS HÍDRICOS**

**METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DE REDES  
MALHADAS ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO  
LINEAR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**KLEBBER TEODOMIRO MARTINS FORMIGA**

**CAMPINA GRANDE - PARAÍBA**

**1999**

**KLEBBER TEODOMIRO MARTINS FORMIGA**

**METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS  
ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

Dissertação apresentada ao curso de mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal da Paraíba em cumprimento às exigências para a obtenção do Grau de Mestre.

**Orientador:** Heber Pimentel Gomes

**Co-orientador:** Wilson Fadlo Curi

**DIGITALIZAÇÃO:  
SISTEMOTECA - UFCG**

**CAMPINA GRANDE - PARAÍBA**

**1999**

**METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS ATRAVÉS DA  
PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

**KLEBBER TEODOMIRO MARTINS FORMIGA**

**DISSERTAÇÃO APROVADA EM 11/03/1999**



**HEBER PIMENTEL GOMES**  
Orientador – Presidente



**WILSON FADLO CURI**  
Co-Orientador



**VAJAPEYAM SRIRANGACHAR SRINIVASAN**  
Componente da Banca



**JOSÉ ALMIR CIRILO**  
Componente da Banca

**Campina Grande - PB**

## Agradecimentos

A Deus que em seu infinito amor nos deu a sabedoria e o conhecimento necessário para se chegar ao final dessa jornada.

Aos meus pais Teodomiro Pereira Formiga e Jovina Martins Formiga, pelo amor e carinho dispensado durante todo o período de minha vida, e pelo legado de vida que me deixaram.

A minha amada esposa Cibelle Kayenne Martins Roberto Formiga, pelo companheirismo que tem sido marca desde os tempos de graduação, bem como pelo amor e paciência que tem demonstrado durante esse período.

Aos meus familiares, em especial as minhas irmãs Kathia Regis Formiga Paz de Lira e Kassia Regis Formiga de Lima, que tanto me incentivaram durante o período desta pesquisa.

Aos meus orientadores Prof. Heber Pimentel Gomes e Prof. Wilson Fadlo Curi, pelo ensinamento, dedicação e, principalmente os conselhos sem os quais não se chegaria ao fim este trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro desprendido durante todo o período em que cursei a pós graduação.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelo acolhimento, e em especial aos professores da Área de Engenharia de Recursos Hídricos, representados pela pessoa do Prof. Carlos de Oliveira Galvão, que me ensinou a gostar da Hidráulica.

Aos meus colegas de curso: Gilliano Lima Borges, Gilvandro Barbosa Tito, Paulo Romero Serrano Guimarães de Andrade, Raimundo Glauber Lima Cunha e Valter Raglan Gonçalves Medeiros, e também ao Professor

José Gomes da Silva, pelo esforço e coletividade que impulsionaram o nosso aprendizado.

Aos amigos do Laboratório: Douglas Silva Luna, Eunice Porto Câmara, Herlen Lira Henriques Torres, Jorge Luiz Rabelo, Malba Linete Batista de Araújo, Marcos Tibério de Siqueira, Maria Betânia Almeida de Oliveira, Paulo da Costa Medeiros, Paulo Henrique Souto, Ricardo de Aragão, Rosilene Ferreira Silva, Rossana Cavalcanti Araújo Silva, Silvestre Lopes da Nobrega, Soniaeli Pires de Carvalho, pelo companheirismo mostrado ao longo de todo o curso.

Aos funcionários do Laboratório de Recursos Hídricos, representados pela pessoa de Alrezinha Dantas Veiga, pela ajuda prestada sem medir esforço para que este trabalho fosse concretizado.

## SUMÁRIO

RESUMO	14
ABSTRACT	15
CAPÍTULO II INTRUDUÇÃO	16
CAPÍTULO II OS SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA	18
2.1. INTRODUÇÃO	18
2.2. CAPTAÇÃO	19
2.3. ADUÇÃO	20
2.4. TRATAMENTO	20
2.5. RESERVATÓRIO DE DISTRIBUIÇÃO	22
2.6. REDE DE DISTRIBUIÇÃO	23
CAPÍTULO III AS REDES MALHADAS	26
3.1. FUNDAMENTOS HIDRÁULICOS	26
3.1.1. EQUAÇÕES DE PERDA DE CARGA	27
3.1.2. VELOCIDADE MÁXIMA ADMISSÍVEL	29

3.2. ANÁLISE HIDRÁULICA DAS REDES MALHADAS	30
3.2.1. MÉTODO DO SECCIONAMENTO FICTÍCIO	31
3.2.2. MÉTODO HARDY-CROSS	32

## CAPÍTULO IV

OTIMIZAÇÃO ECONÔMICA DE REDES MALHADAS	36
4.1. INTRODUÇÃO	36
4.2. TÉCNICAS DE ENUMERAÇÃO EXAUSTIVA	40
4.3. PROGRAMAÇÃO LINEAR	41
4.4. PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR	43
4.5. MÉTODOS DE GRADIENTE (PROGRAMAÇÃO DINÂMICA)	46
4.6. ALGORITMO GENÉTICO	47
4.7. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	48

## CAPÍTULO V

A PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR	52
5.1. INTRODUÇÃO	52
5.2. CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE	53
5.2.1. VETOR GRADIENTE	56
5.2.2. MATRIZ HESSIANA	56
5.2.3. CONVEXIDADE E CONCAVIDADE	57
5.3. MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR	59
5.4. MÉTODOS DE BUSCA UNIDIRECIONAL	61
5.4.1. MÉTODOS DE REDUÇÕES SUCESSIVAS DE INTERVALOS	62
5.4.1.1. Métodos Direto	62
5.4.1.2. Métodos de Aproximações por Polinômios	62
5.4.2. MÉTODOS FINITOS OU APROFUNDAMENTO	62
5.5. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA	63

5.5.1. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA COM BUSCA ATRAVÉS DE DERIVADAS	63
5.5.1.1. Método do Gradiente	63
5.5.1.2. Método de Newton-Raphson	64
5.5.1.3. Método de Direções Conjugadas	64
5.5.1.4. Métodos Quase-Newtonianos	65
5.5.2. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA COM BUSCA SEM O AUXÍLIO DE DERIVADAS	65
5.5.2.1. Método de Hooke e Jeeves	66
5.5.2.2. Método de Rosenbrock	66
5.5.2.3. Método de Powell	66
5.6. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES	67
5.6.1. MÉTODOS DE PENALIDADE	67
5.6.1.1. Métodos de Penalidade Interna	68
5.6.1.2. Métodos de Penalidade Externa	70
5.6.2. MÉTODOS PRIMAIS	71
5.6.2.1. Métodos de Linearização	72
5.6.2.1.1. Método de Frank e Wolfe	72
5.6.2.2. Método do Gradiente Reduzido	73

## CAPÍTULO VI

METODOLOGIA DE DIMENSIONAMENTO DE REDES MALHADAS ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR	75
6.1. INTRODUÇÃO	75
6.2. DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA	78
6.2.1. DIMENSIONAMENTO DE REDES MALHADAS CONSIDERANDO A COTA DE CABECEIRA COMO CONHECIDA	80
6.2.1.1. 1ª Etapa	81
6.2.1.2. 2ª Etapa	84
6.2.2. DIMENSIONAMENTO DE REDES MALHADAS CONSIDERANDO A COTA DE CABECEIRA COMO VARIÁVEL	85
6.2.2.1. 1ª Etapa	85
6.2.2.2. 2ª Etapa	87



CAPÍTULO VII	
RESULTADOS E DISCUSSÕES	88
7.1. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	88
7.1.1. EXEMPLO 1	89
7.1.1.1. 1ª Etapa	92
7.1.1.2. 2ª Etapa	96
7.1.2. EXEMPLO 2	104
7.1.2.1. As Partes do Sistema	105
7.1.2.1.1. Linha Tronco	105
7.1.2.1.2. Grande Anel	105
7.1.2.1.3. Setores Secundários	105
7.1.2.2. Dados do sistema	108
7.1.2.3. Cota de cabeceira fixa	111
7.1.2.3.1. 1ª Etapa	111
7.1.2.3.2. 2ª Etapa	117
7.1.2.4. Cota de Cabeceira Variável	128
7.1.2.4.1. 1ª Etapa	130
7.1.2.4.2. 2ª Etapa	136
7.2. COMENTÁRIOS	143
CAPÍTULO VIII	
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	146
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	149

## Índice de Tabelas

	Página
<b>Tabela 3.1</b> - Velocidades máximas admissíveis recomendadas por Granados	30
<b>Tabela 7.1</b> - Dados de demanda e elevação dos nós da rede	90
<b>Tabela 7.2</b> - Custos dos tubos segundo seus diâmetros	90
<b>Tabela 7.3</b> - Coeficientes da equação de Hazen-Williams utilizados por diferentes autores para diâmetros em metros e vazões em m <sup>3</sup> /s	91
<b>Tabela 7.6</b> – Resultados da otimização da primeira etapa com $\omega = 10,5088$	95
<b>Tabela 7.7</b> – Resultados da otimização da primeira etapa com $\omega = 10,9031$	96
<b>Tabela 7.8</b> – Diâmetros comerciais utilizados na segunda etapa	97
<b>Tabela 7.9</b> – Resultados da otimização da segunda etapa com $\omega=10,5088$	101
<b>Tabela 7.10</b> – Resultados da otimização da segunda etapa com $\omega=10,9031$	102
<b>Tabela 7.11</b> – Resultados obtidos por outros métodos de otimização	103
<b>Tabela 7.12</b> – Resultados obtidos por outros métodos de otimização	103
<b>Tabela 7.13</b> – Pressão requerida, demanda e cotas dos nós do grande anel e dos setores	108
<b>Tabela 7.14</b> – Comprimentos dos trechos do grande anel e dos setores	109
<b>Tabela 7.15</b> – Preço dos tubos em função dos diâmetros	110
<b>Tabela 7.16</b> – Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel	111

	Página
<b>Tabela 7.17</b> – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3	112
<b>Tabela 7.18</b> – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4	114
<b>Tabela 7.19</b> – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5	116
<b>Tabela 7.20</b> – Diâmetros comerciais utilizados na segunda etapa do Exemplo 2	118
<b>Tabela 7.21</b> - Resultados da Segunda etapa da otimização do Grande Anel	119
<b>Tabela 7.22</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3	120
<b>Tabela 7.23</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4	122
<b>Tabela 7.24</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5	124
<b>Tabela 7.25</b> - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS para o Grande Anel	125
<b>Tabela 7.26</b> - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS para o Setor 3	125
<b>Tabela 7.27</b> - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS para o Setor 4	126
<b>Tabela 7.28</b> - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS para o Setor 5	127
<b>Tabela 7.29</b> - Comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos	127
<b>Tabela 7.30</b> – Pressões disponível e excessos de pressão obtidos pelos métodos Granados e WADISO para o Grande Anel	128
<b>Tabela 7.31</b> – Preços do tubos de PVC em umt/m e R\$/m	129
<b>Tabela 7.32</b> - Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável	130

<b>Tabela 7.33</b> - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável	131
<b>Tabela 7.34</b> - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável	133
<b>Tabela 7.35</b> - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável	135
<b>Tabela 7.36</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável	136
<b>Tabela 7.37</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável	137
<b>Tabela 7.38</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável	139
<b>Tabela 7.39</b> - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável	141
<b>Tabela 7.40</b> – Custo total anual da rede para o caso em que a cota de cabeceira é tida como variável	142
<b>Tabela 7.41</b> – Comparação dos resultados para as duas considerações a respeito das cotas de cabeceira.	142

## Índice de Figuras

<b>Figura 2.1</b> – Esquema de uma rede ramificada	24
<b>Figura 2.2</b> – Esquema de uma rede malhada	25
<b>Figura 5.1</b> – Tipos de máximos e mínimos de uma função	54
<b>Figura 5.2</b> – Funções unimodais e multimodais	55
<b>Figura 5.3</b> – Comportamento das funções côncavas e convexas	58
<b>Figura 6.1</b> – Representação da variação do custo com a cota de cabeceira	80
<b>Figura 7.1</b> - Esquema da rede do exemplo 1	89
<b>Figura 7.2</b> – Curva de ajuste Custo do Tubo X Diâmetro do Exemplo 1	91
<b>Figura 7.3</b> – Esquema da rede de abastecimento do bairro do Bessa	104
<b>Figura 7.4</b> - Traçado da linha tronco e grande anel	106
<b>Figura 7.5</b> – Traçado do setor 3	106
<b>Figura 7.6</b> - Traçado do setor 4	107
<b>Figura 7.7</b> – Traçado do setor 5	107
<b>Figura 7.8</b> – Curva de ajuste Custo do Tubo X Diâmetro do Exemplo 2	110

## RESUMO

As redes de distribuição, que fazem parte dos sistemas de abastecimento de água, são, em grande parte, redes malhadas, cuja complexidade no dimensionamento tem forçado os projetistas a utilizar metodologias tradicionais de tentativa e erro para obter a solução do problema. Esses métodos, dos quais o mais empregado é o de Hardy-Cross, fazem tão somente o balanceamento da rede, deixando a cargo da experiência do projetista a busca de um dimensionamento mais econômico. Neste trabalho será apresentado um método que utiliza técnicas de programação não linear para o dimensionamento econômico de redes malhadas. Esse método é composto de duas etapas. Na primeira, as vazões e os diâmetros são considerados como variáveis de decisão, e na segunda etapa, as variáveis de decisão são os comprimentos dos segmentos dos trechos, com diâmetros constantes, e suas correspondentes vazões. Essa metodologia foi aplicada a duas redes encontradas na literatura, em que o dimensionamento já havia sido feito por outros métodos de otimização. Os resultados mostram que o método da programação não linear apresenta uma eficácia maior na busca do custo mínimo de uma rede, quando comparado com outras metodologias de otimização de redes malhadas estudadas.

## ABSTRACT

The design complexity of looped networks has forced to use traditional trial and error methods to attain a solution for the problem. Those methods, where the Hardy-Cross method is the most known among them, only carry out energy and mass balance of the network without dealing with the system's cost, that is, nor estimating neither improving the system's cost. In this work, a method for designing economical looped networks based on nonlinear programming is presented. To reduce the number of variables and, probably, improve the performance of the solution procedure, this method is composed of two stages to reach an optimal solution. In a first stage, a nonlinear programming technique is applied to determine the flows and diameters of the pipes connecting two nodes of the network. In a second stage are chosen which are the upper and lower values of the results attained at the first stage for each pipe segment, and a nonlinear programming technique is applied once more to determine the length of each diameter for each pipe segment along with its flow. In both stages the objective function was related to the cost of the pipes and pumping requirements. This method has been applied to two examples of looped networks, which have been used in the literature to illustrate the application of other optimization methods developed by other authors. The optimal solutions attained from the method presented herein have shown to be better than the ones resulting from the application of any other method, which were taken into account for comparison in this work.

## Capítulo I

### Introdução

“Só o oxigênio atmosférico pode ser tão essencial à vida quanto a água. Dentre todas as substâncias necessárias aos organismos animais e vegetais, são essas as mais relevantes.”

(Ildelfonso Puppi)

A água constitui um bem inestimável para a humanidade. Por esse motivo, todas as grandes civilizações e cidades do mundo tem por comum o fato de terem surgido sempre ao lado de grandes rios e lagos. Em todas as épocas, uma das prioridades dos governos era colocar ao alcance dos habitantes das cidades, a água que lhes era necessária. Isso, até relativamente pouco tempo, era feito de forma empírica e rudimentar. Entretanto, devido à revolução industrial, o tamanho das cidades aumentou de forma exacerbada, fazendo-se necessário o estudo e a implantação de sistemas de distribuição eficientes, que garantissem a essas grandes massas populosas água em quantidade e qualidade, para suprir suas necessidades.

Das partes que compõem os sistemas de abastecimento de água, as redes de distribuição são, sem dúvida, as mais laboriosas para se fazer o dimensionamento. Isso é ocasionado pela grande quantidade de condutos e



derivações que estas redes possuem. Por causa disso, tornou-se necessário a introdução de diversas simplificações, já que, até alguns anos atrás, não se podia contar com o auxílio dos computadores para a realização dos cálculos. Entretanto, dado o aumento da capacidade de cálculo dos computadores modernos, bem como a facilidade que há nos nossos dias em se trabalhar com ferramentas computacionais, tornou-se viável e desejável a implementação do dimensionamento das redes de distribuição através do computador. Assim sendo, além da determinação das vazões e dos diâmetros das tubulações para os trechos, que garantissem a obediência das leis físicas do escoamento dos líquidos, pode-se introduzir ao dimensionamento outros critérios, como a minimização dos custos de investimento e de operação do sistema.

Esse trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de uma metodologia de dimensionamento otimizado de redes malhadas, baseada em técnicas de programação não linear.

No Capítulo II desta dissertação, são descritas as classificações e finalidades das partes que formam os sistemas de abastecimento urbano de água. O Capítulo III mostra os fundamentos teóricos para o estudo e o dimensionamento de redes malhadas. O Capítulo IV faz uma abordagem das principais técnicas de otimização utilizadas para o dimensionamento de redes de distribuição de água. O Capítulo V mostra os fundamentos e as principais técnicas de Programação Não Linear. No Capítulo VI, onde se encontra a principal contribuição desta dissertação, é apresentada a metodologia desenvolvida para o dimensionamento otimizado de redes malhadas, através da Programação Não Linear. Dois exemplos de dimensionamento de redes, que já foram resolvidos por outros métodos de otimização, são resolvidos e comparados no Capítulo VII. Por último, no Capítulo VIII são expostas as conclusões finais do trabalho, bem como são feitas algumas recomendações para futuras pesquisas nessa área de estudo.

## Capítulo II

# Os Sistemas de Abastecimento de Água

### 2.1. Introdução

Os sistemas de abastecimento de água compreendem o conjunto de obras e equipamentos, destinados a suprir as necessidades de consumos doméstico, público e industrial de uma comunidade. Esses sistemas devem fornecer água, em quantidade e qualidade, indistintamente, a toda a população, com o menor dispêndio possível.

Segundo Garcez (1974), o abastecimento de água a uma comunidade têm influência decisiva sobre:

- controle e prevenção de doenças;
- práticas que promovem o aprimoramento da saúde (hábitos higiênicos, limpeza pública).
- melhoria do conforto e da segurança da população (sistema de combate a incêndios, piscinas, etc).
- desenvolvimento industrial.

Assim sendo, pode-se afirmar que ao lado dos sistemas de transmissão de eletricidade, o abastecimento urbano de água é um dos alicerces da sociedade moderna, já que, sem um sistema eficiente de distribuição de água, seria impraticável e altamente insalubre se viver nas cidades.

Os sistemas de distribuição de água são, geralmente, formados por cinco partes: captação, tratamento, sistema de adução, reservatório de distribuição e rede de distribuição.

## 2.2. Captação

A captação é composta pelo conjunto de estruturas e equipamentos, responsáveis por retirar a água, em seu estado bruto da natureza. Quanto ao tipo de manancial a captação pode ser realizada em:

- **Manancial Subterrâneo:** a água subterrânea pode ser captada através de: bicas ou fontes (água aflorante); aquíferos freáticos ou subsuperficiais ou rasos; e aquíferos profundos. As bicas, fontes e lençóis subsuperficiais normalmente fornecem uma vazão pequena, ao contrário dos aquíferos profundos, já que esses, por possuírem, na maioria dos casos, grandes espessuras e de terem uma maior capacidade de recarga, são capazes de fornecer vazões maiores. Esses aquíferos, geralmente, se encontram confinados entre duas camadas impermeáveis.
- **Manancial Superficial:** para os mananciais superficiais existem vários tipos de captação cujas características são função da conformação do leito do manancial, associado à topografia e à geologia do local, bem como da velocidade, qualidade e elevação do nível da água. As formas de captação mais utilizadas são: captação direta, barragem de nível, canal de derivação, torre de tomada, poço de derivação e reservatório de regularização. (Dacach, 1979).

### 2.3. Adução

O sistema adutor compreende toda estrutura responsável por levar a água entre dois pontos do sistema, que antecedem a rede de distribuição. (captação – tratamento; tratamento – reservatório de distribuição; etc). Esse sistema tem por característica a não ocorrência de saída em marcha ao longo da tubulação, ou seja, não existe sangria destinada a abastecer pontos intermediários. Entretanto, existem adutoras em que ocorrem derivações para o abastecimento de outros pontos do sistema. Essas derivações são denominadas subadutoras (Azevedo Netto e Alvarez, 1991).

Segundo Azevedo Netto e Alvarez (1991), as linhas de adução podem se classificar:

1. Quanto a natureza da água que elas transportam em:
  - adução de água bruta;
  - adução de água tratada.
2. Quanto a energia utilizada para a movimentação da água em:
  - adução por gravidade;
  - adução por recalque;
  - adução mistas.
3. Quanto ao modo de escoamento, para as adutoras por gravidade, em:
  - adução em conduto livre;
  - adução em conduto forçado.

### 2.4. Tratamento

São muitas as impurezas que normalmente estão presentes na água em sua forma natural. Essas impurezas podem ser partículas em suspensão, material coloidal, soluções de sais, compostos orgânicos e gases dissolvidos na água. Devido ao seu alto poder de erosão e transporte, bem como sua excelente qualidade de solvente, as águas, em todo o seu percurso, têm inúmeras

oportunidades de incorporar impurezas, que muitas vezes são prejudiciais à saúde do homem (Martins, 1973).

O sistema público de abastecimento é responsável por fornecer à comunidade água de boa qualidade, sob o ponto de vista físico, químico, biológico e bacteriológico. Para isso, deve se efetuar o tratamento da água em instalações denominadas estações de tratamento (Azevedo Netto e Alvarez, 1991).

Segundo Garcez (1974) a finalidade do tratamento de água pode ser:

- **Higiênica** - eliminação de bactérias e outros microorganismos (algas, protozoários, etc); eliminação ou redução de substâncias nocivas ao homem; e eliminação ou redução de teores excessivos de matéria orgânica.
- **Econômica** - redução da corrosividade e dureza da água.
- **Estética** - remoção ou redução da cor, turbidez, odor e sabor.

Segundo Dacach (1979), os processos de tratamento aos quais a água é submetida são:

- remoção de substâncias grosseiras em flutuação ou em suspensão através de grades, crivos e telas;
- remoção de substâncias finas em suspensão, ou em solução, e de gases dissolvidos através da aeração (para gases), sedimentação simples, sedimentação precedida de coagulação e filtração lenta e/ou rápida (para partículas sólidas ou coloidais);
- correção do odor e sabor, através de tratamentos químicos e leitos de contato com carvão ativado;
- correção da dureza e da corrosão através de tratamentos químicos;

- remoção de bactérias ou outros microorganismos, através da desinfecção (remoção seletiva) e esterelização (eliminação total da atividade microbiana).

## 2.5. Reservatório de Distribuição

São unidades destinadas a compensar as flutuações de consumo e garantir o abastecimento da rede de distribuição em casos de emergência, mantendo as pressões necessárias para o bom funcionamento da rede (Azevedo Netto e Alvarez, 1979).

Garcez (1974) cita algumas finalidades dos reservatórios de distribuição:

- a) Garantia de quantidade de água
  - armazenamento para atender às vazões de consumo, permitindo um escoamento uniforme na adução, possibilitando, dessa forma, a utilização de diâmetros menores e um funcionamento mais econômico das unidades de bombeamento e tratamento.
  - armazenamento para atender às demandas de emergências, evitando interrupções no fornecimento de água no caso de acidentes no sistema de adução, ou na estação de tratamento, e oferecendo maior segurança ao abastecimento, quando houver uma demanda de emergência destinada ao combate de incêndios.
- b) Melhoria das condições de pressões da água na rede de distribuição, possibilitando uma melhor distribuição de água aos consumidores e uniformidade de pressões nos hidrantes.

Segundo Martins (1973) os reservatórios de distribuição podem ser classificados da seguinte maneira:

- I. Quanto à posição relativa na rede:
  - reservatórios de montante;
  - reservatórios de jusante;
  - reservatórios intermediários.

II. Quanto a sua posição relativa ao terreno:

- reservatórios enterrados;
- reservatórios não enterrados;
- reservatórios elevados.

III. Quanto a sua forma geométrica:

- reservatórios de seção retangular;
- reservatórios de seção circular, etc.

IV. Quanto ao material de construção:

- reservatórios de concreto armado;
- reservatório de aço;
- reservatório de alvenaria, etc.

## 2.6. Rede de Distribuição

Garcez (1974) define rede de distribuição como o conjunto de tubulações peças e obras, destinadas a conduzir a água até os pontos de tomada das instalações prediais ou de consumo público, tendo como característica um grande número de derivações em seus condutos.

Os condutos da rede de distribuição distinguem-se em principais e secundários. Os condutos principais, chamados também de tronco, são canalizações de diâmetros maiores, responsáveis pelo abastecimento de grandes áreas, através dos condutos secundários. Esses últimos possuem diâmetros menores que os primários, e estão ligados diretamente aos ramais prediais, fazendo com que a sua área de serviço se restrinja apenas a sua vizinhança (Martins, 1973).

Quanto à disposição dos tubos, as redes de distribuição podem ser classificadas em: ramificadas, malhadas e mistas.

As redes ramificadas são compostas essencialmente de uma linha principal da qual partem as tubulações transversais, dando ao conjunto o formato de espinha de peixe, como mostra a Figura 2.1 (Dacach, 1979). Essas redes têm por característica a fluência da vazão em apenas um sentido da tubulação. Esse tipo de disposição de tubos se restringe a sistemas de abastecimento de pequenas comunidades e a perímetros irrigados. Tais restrições se devem ao fato de que qualquer avaria em um trecho da rede pode interromper o fornecimento de água para todos os trechos à jusante deste. Outra desvantagem se dá pela falta de circulação de água nos extremos da rede, sendo essa água parada um ambiente propício à proliferação de microorganismos, que podem tornar a água imprópria para o consumo humano. A vantagem desse tipo de rede reside no seu menor custo, em relação a uma rede malhada de mesmo porte (Gouter et al, 1986), além do fato de ter um dimensionamento menos complexo.

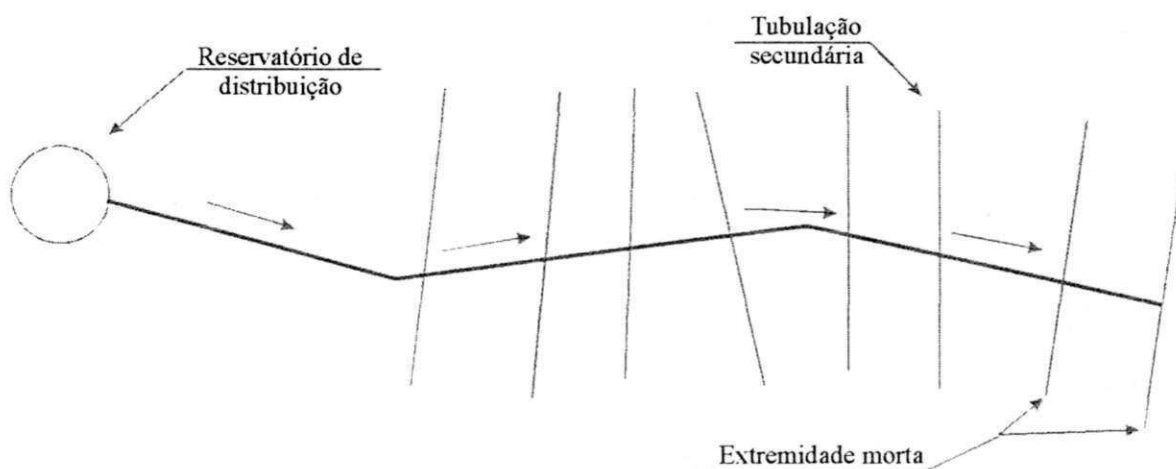


Figura 2.1 – Esquema de uma rede ramificada

As redes malhadas são compostas por tubos que se intercomunicam uns com os outros, formando circuitos fechados chamados de malhas ou anéis (Figura 2.2). A maior vantagem desse tipo de rede, com relação às ramificadas, está na segurança de operação, já que um problema em um determinado ponto, não implicará no corte de fornecimento de água em parte da rede. Por não ter



uma vazão fixa em um trecho, e podendo o sentido dessa vazão variar, o dimensionamento desse tipo de rede é mais complexo do que o das redes ramificadas. Além disso, por utilizar uma quantidade maior de tubos, essas redes se tornam mais onerosas que as ramificadas de mesmo porte.

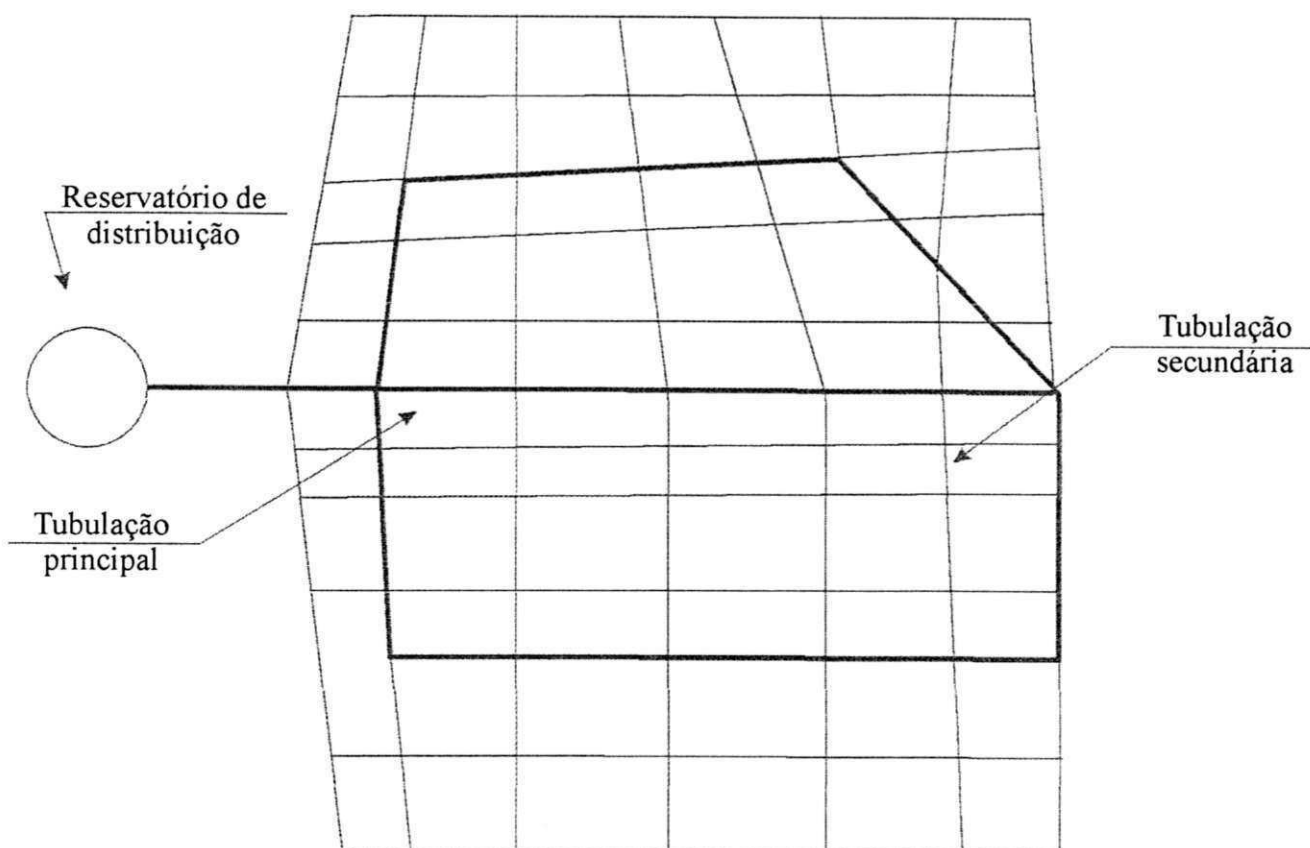


Figura 2.2 – Esquema de uma rede malhada

## Capítulo III

### As Redes Malhadas

#### 3.1. Fundamentos Hidráulicos

O fluxo de água nas redes malhadas ocorre em condutos forçados, onde impera o escoamento turbulento, que é regido por dois grupos de equações: equações da continuidade ou conservação de massa e equações de energia. Para efeito de cálculo, ao longo de um trecho, este escoamento é considerado como permanente e uniforme.

Considerando a água como incompressível, a equação da continuidade estabelece que num escoamento permanente, a vazão  $Q$  mantém-se constante ao longo de um conduto. Assim sendo, para qualquer seção do conduto verifica-se que:

$$Q = A.V = \text{cte.} \quad (\text{eq. 3.1})$$

sendo  $A$  a área da seção transversal da tubulação e  $V$  a velocidade média de circulação de água nesta seção.

Nos nós da rede essa equação assume a forma de:

$$\sum_{i=1}^m Q_{entra_i} = \sum_{j=1}^n Q_{sai_j} \quad (\text{eq. 3.2})$$

onde:

$Q_{entra(i)}$  são as vazões que chegam ao nó pelos trechos  $i=1,2,\dots,m$ ; e

$Q_{sai(j)}$  são as vazões que saem do nó através dos trechos  $i=1,2,\dots,n$

Considerando duas seções de um mesmo conduto (de 1 para 2), segundo a equação da energia, a soma da energia cinética, potencial e de pressão em 1 é igual à soma destas mesmas energias na seção 2, mais as perdas de energia produzidas entre as duas seções. Esta expressão também conhecida como equação de Bernoulli é representada por:

$$\frac{p_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} - h_{1-2} \quad (\text{eq. 3.3})$$

em que:

$\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}$  - termos representativos da energia de pressão nas duas seções

$z_1, z_2$  - energia potencial nas seções 1 e 2

$\frac{V_1^2}{2g}, \frac{V_2^2}{2g}$  - energia cinética nas seções 1 e 2

$h_{1-2}$  - perdas de energia (ou de carga) entre as duas seções.

### 3.1.1. Equações de Perda de Carga ao Longo do Conduto

A perda de energia que ocorre ao longo de uma tubulação decorre da atuação de dois componentes: o efeito da viscosidade da água (atrito interno); e os choques entre si das partículas do líquido (inércia).

As perdas de carga totais, ao longo do conduto, são diretamente proporcionais ao comprimento do tubo (L), e a uma potência ( $\alpha$ ) da velocidade média de escoamento (V), e inversamente proporcionais a uma potência ( $\beta$ ) do diâmetro (D), sendo também influenciada pela natureza dos tubos (rugosidade). Dessa forma, pode-se expressar essas perdas por:

$$h = k \frac{V^\alpha}{D^\beta} L \quad (3.4)$$

onde o coeficiente  $k$  é obtido em função da natureza dos tubos e do regime de escoamento, do número de Reynolds e da rugosidade relativa.

Existem na literatura diversas equações para determinar a perda de carga ao longo do conduto. Entretanto duas fórmulas são as mais utilizadas por poderem ser aplicadas a uma ampla faixa de situações. São elas a equação de Darcy-Weissbach - também chamada de fórmula universal da perda de carga, e a equação de Hazen-Williams.

#### Darcy-Weissbach

$$h = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} L \quad \text{ou} \quad 0,0826 \frac{fV^2}{D^5} L \quad (3.5)$$

onde  $f$  é o coeficiente adimensional de atrito que é função da rugosidade do tubo  $\varepsilon$ , do número de Reynolds ( $Re$ ) e do diâmetro do tubo ( $D$ ). Para o regime de fluxo turbulento o coeficiente  $f$  pode ser obtido pela equação de Colebrook e White que é:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (3.6)$$

#### Hazen-Williams

Uma das versões da fórmula de Hazen Williams é a seguinte:

$$h = 10,643 \frac{1}{C^{1,85}} \frac{V^{1,85}}{D^{1,17}} L \quad \text{ou} \quad 16,64 \frac{Q^{1,85}}{C^{1,85} D^{4,87}} L \quad (3.7)$$

onde:

Q é a vazão em  $m^3/s$ ;

L é o comprimento em metros;

D o diâmetro em metros.

O coeficiente de perda de carga (C) de Hazen-Williams é função do material do tubo. A grande aceitação da fórmula permitiu que fossem obtidos valores bem determinados de C, que podem ser encontrado nos catálogos de tubos ou em manuais de hidráulica (Hwang, 1981).

A fórmula de Hazen-Williams é largamente empregada no dimensionamento de sistemas de distribuição de água, já que os diâmetros das tubulações destes se encontram na faixa de 50 a 1.000 mm, valores para o qual esta fórmula foi desenvolvida e pode ser aplicada satisfatoriamente (Azevedo e Alvarez, 1991).

### 3.1.2. Velocidade Máxima Admissível

No transporte de uma determinada vazão (Q) por uma tubulação, sabe-se, através da equação da continuidade, que quanto maior for a velocidade do fluxo menor será o diâmetro necessário do tubo, implicando em uma tubulação com menos custo. Porém, ao se aumentar a velocidade de circulação da água, ocorrerão maiores perdas de carga, as tubulações poderão ser danificadas pelos golpes de ariete, haverá maiores desgastes nos tubos e nas demais peças (conexões, registros, válvulas, etc.), a rede sofrerá maiores vibrações e outros fenômenos associados ao aumento da velocidade do fluxo.

Visando evitar os efeitos danosos que as altas velocidades de fluxo podem causar às redes de distribuição, vários pesquisadores procuraram impor alguns limites de velocidade para o fluxo de água nessas redes. Granados (1990) admite, para os sistemas de distribuição de água de um modo geral, valores de velocidades máximas até 2,0 m/s para diâmetros menores ou iguais a 250 mm para os diâmetros entre 300 e 1.000 mm, Granados recomenda

velocidades entre 2,1 e 3,0 m/s (Tabela 3.1), e para diâmetros maiores que 1.000 mm é proposto a seguinte fórmula:

$$V_{\max} = 2 + D \quad (\text{eq. 6.16})$$

para D em metros.

Diâmetro (mm)	Velocidade (m/s)	Diâmetro (mm)	Velocidade (m/s)
≤250	2	600	2,6
300	2,1	700	2,7
350	2,2	800	2,8
400	2,3	900	2,9
450	2,4	≥1.000	2 + D(m)
500	2,5		

Tabela 3.1 – Velocidades máximas admissíveis recomendadas por Granados (1990)

Clement e Galant (1986) recomendam valores de velocidades situados entre 1,8 e 3,0 m/s, enquanto Walski (1985) admite velocidades máximas de até 2,4 m/s no horário de pico de consumo. Alzamora e Tárrega (1987) propuseram velocidades entre 0,6 e 2,25 m/s, enquanto Silvestre (1982) admite que as velocidades devem, de um modo geral, situar-se entre 1 e 2 m/s.

### 3.2. Análise Hidráulica das Redes Malhadas

Para que uma rede malhada atenda às equações fundamentais da hidráulica (equações da continuidade e equações da energia), é necessário que sejam obedecidas as seguintes condições:

1. em qualquer nó o balanço das vazões deve ser nulo, ou seja, a vazão que entra no nó é a mesma que sai;

2. entre dois pontos quaisquer da rede, a perda de carga será igual independente do percurso seguido. Assim sendo, em um anel, a soma das perdas de carga no sentido horário devem ser iguais às do sentido anti-horário.

A primeira condição é a aplicação da equação da continuidade ao caso das redes, enquanto que a segunda condição exprime a equação da conservação da energia para os anéis da rede. Estas condições atuam como restrições no modelamento matemático da rede.

Para se atender a essas condições, foram desenvolvidas algumas técnicas de dimensionamento que executam o balanceamento das perdas de carga na rede. Dessas técnicas as mais utilizadas são o método do seccionamento fictício e o método de Hardy-Cross. Esses métodos de dimensionamento de redes malhadas são baseados em tentativa e erro, e fazem com que a parte referente a economia de projeto e a operação da rede fiquem a cargo da experiência dos projetistas.

Essas metodologias, principalmente o método de Hardy Cross, são muito empregadas para se fazer a simulação do funcionamento de uma rede, onde é verificado se, para uma determinada condição de funcionamento, as pressões nos nós serão atendidas. Para se fazer essa simulação existem diferentes pacotes de programas que podem ser usados como o KYPIPE (Wood, 1980) WATSYS (Olde, 1985), WATER (Fowler 1990) e C.REDE (1997).

### **3.2.1. Método do Seccionamento Fictício**

Este método baseia-se na transformação da rede malhada original em uma ramificada fictícia, de resolução mais fácil. Essa transformação se dá

através do seccionamento do circuito fechado, que dará origem a extremidades livres na rede.

A escolha dos pontos de seccionamento é feita de forma que a água percorra sempre o menor trajeto, para se atingir um determinado ponto da rede. Esses cortes são feitos geralmente em nós onde haja convergência de fluxos. Após ser realizado o seccionamento da rede procura-se determinar as vazões e os diâmetros para cada trecho.

Depois de serem estabelecidas as vazões e os diâmetros dos trechos, verifica-se para os nós, onde ocorreram os seccionamentos, se as diferenças das alturas piezométricas em todos os extremos, em que o seccionamento foi efetuado, são menores que 10%. Caso isto seja verdadeiro, a rede pode ser considerada dimensionada e balanceada. Se as alturas piezométricas não estiverem dentro dessa faixa de tolerância, deve-se variar os diâmetros previamente escolhidos, o local do seccionamento, ou as vazões nos trechos, repetindo-se o processo até que as condições impostas inicialmente sejam satisfeitas.

### **3.2.2. Método de Hardy-Cross**

O método de Hardy Cross, é uma das mais antigas metodologias utilizadas para o dimensionamento sistemático das redes malhadas, sendo ainda uma das técnicas mais utilizadas. Um dos motivos que levaram a essa grande aceitação, por parte dos projetistas, se deve à sua fácil adaptação à informática.

O método de Hardy-Cross faz o balanceamento das pressões nos nós, corrigindo a distribuição de vazões inicialmente assumida. Tal distribuição deve satisfazer a equação da continuidade em todos os nós. O conceito chave para este método é impor uma correção de vazão em todos os tubos de um anel, aplicando essa correção à distribuição inicial de fluxo assumida. As vazões nos trechos são repetidamente corrigidas até que a equação da energia aplicada às redes seja atendida, dentro de limites práticos aceitáveis, para todos os anéis.



O início do método de Hardy-Cross consiste em identificar a demanda de cada ponto de saída de água da rede e os pontos onde existem convergência de fluxos. Em seguida, uma distribuição inicial das vazões circulantes em cada trecho é assumida. Essa distribuição inicial determinará o sentido e a quantidade do fluxo que passa em cada trecho, e deverá cumprir a equação da continuidade em todos os nós, de maneira que a soma das vazões que chegam a cada nó seja igual a soma das vazões que saem.

Logo após à distribuição dos fluxos iniciais, os diâmetros de cada trecho são escolhidos em função da vazão transportada e da velocidade inicial de fluxo admitida para cada diâmetro de tubo escolhido. Assim, cada trecho terá o seu diâmetro inicial e sua perda de carga definidos.

Usando este método, a solução do grupo de equações não lineares dos fluxos das redes é encontrada pelas sucessivas correções das vazões inicialmente arbitradas. O procedimento é repetido até que o critério de precisão, pré-estabelecido, para as pressões nos nós, seja satisfeito.

A expressão da correção, que é sucessivamente usada para um anel, pode ser obtida da expressão geral da relação perda de carga-vazão:

$$h_i = K_i Q^\alpha \quad (\text{eq. 3.9})$$

sendo:

$h_i$  a perda de carga no trecho  $i$ ;

$K_i$  uma constante do trecho, que é função do diâmetro, do comprimento e da equação de perdas adotada;

$Q$  a vazão no trecho;

$\alpha$  a potência da fórmula usada.

Adotando um sentido, arbitrado, para o fluxo (que pode ser o sentido horário, como o anti-horário) como positivo e percorrendo um anel neste sentido, tem-se que a diferença de perda de carga será dada por:

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n h_i \quad (\text{eq. 3.10})$$

onde:

$h_i$  é a perda de carga no trecho  $i$  do anel, considerando a perda como positiva para o caso de a direção da vazão no sentido arbitrado como positivo e vice-versa;

$n$  o número de trechos do anel.

Assim, procura-se determinar uma correção da descarga  $\Delta Q$ , que igualaria as duas perdas de carga. Esse  $\Delta Q$  iria ser somado às vazões nos trechos de sentido positivo e subtraída nos trechos onde o fluxo fosse considerado como negativo. Assim, a correção de vazão irá obedecer à seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^m K_i (Q_i \pm \Delta Q)^\alpha = 0 \quad (\text{eq. 3.11})$$

onde:

$m$  é o número de trechos do anel.

A equação acima, desenvolvida em uma série de potências, terá a seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^m K_i \left[ Q_i \pm \alpha Q_i^{\alpha-1} \Delta Q + \alpha \frac{\alpha-1}{2} Q_i^{\alpha-2} \Delta Q^2 \dots \pm \Delta Q^\alpha \right] = 0 \quad (\text{eq. 3.12})$$

Como o valor de  $\Delta Q$  é muito pequeno quando comparado com  $Q$ , todos os termos que contenham  $\Delta Q$  com potência maior ou igual a 2 podem ser desprezados. Desta forma a equação (3.12) fica reduzida a:

$$\sum_{i=1}^m K_i \left[ Q_i \pm \alpha Q_i^{\alpha-1} \Delta Q \right] = 0 \quad (\text{eq. 3.13})$$

Assim:

$$\Delta Q = \frac{\sum_{i=1}^m K_i Q_i^\alpha}{\alpha \sum_{i=1}^m K_i Q_i^{\alpha-1}} \quad (3.14)$$

Onde  $\Delta Q$  é a correção do fluxo a ser aplicada em um anel, devendo para cada anel ser calculada uma correção. Qualquer precisão desejada dentro de um limite prático prescrito pode ser alcançada executando-se mais iterações. No caso de um único anel, é fácil verificar que existe apenas uma taxa de correção da vazão em cada trecho. É importante notar que após a aplicação da taxa de correção  $\Delta Q$ , a equação de continuidade em todos os nós também estariam satisfeitas.

Quando na rede houver mais de um anel, poderão existir alguns trechos comuns aos anéis. A correção a ser aplicada em cada um desses trechos, seria igual a correção do anel em questão, menos a correção dos outros anéis, aos quais esse trecho pertence, mudando-se assim o balanço realizado para o primeiro anel. Como as correções a serem feitas em um anel são afetadas pelas outras, devido à existência de trechos comuns, haverá um número de tentativas maior para a obtenção do resultado definitivo. Devido a essas novas correções, a convergência torna-se muito lenta piorando com o aumento do sistema, chegando em alguns casos, até a não convergir.

## Capítulo IV

### Otimização Econômica de Redes Malhadas

#### 4.1. Introdução

Os métodos vistos no capítulo anterior, levam em conta apenas o balanceamento hidráulico da rede, de forma a atender às condições impostas pelas equações da conservação de massa nos nós e conservação de energia nos anéis. Não se pode negar a importância desses métodos para a evolução da busca por um melhor dimensionamento dos sistemas de distribuição de água. Entretanto, com as ferramentas hoje disponíveis, principalmente a capacidade de resolução numérica do computador e seus programas torna-se possível a introdução, explícita, de outros critérios ao dimensionamento das redes que compõem esses sistemas. Para a resolução desses problemas, vários pesquisadores lançaram mão de ferramentas matemáticas, baseadas na área da pesquisa operacional.

Problemas que procuram maximizar ou minimizar uma função numérica de uma ou mais variáveis, onde essas variáveis estão sujeitas a determinadas restrições, são chamados de *problemas de otimização*. Muitos problemas de otimização foram encontrados inicialmente nas ciências físicas e na geometria, onde a necessidade de resolvê-los fez

surgir o cálculo diferencial e o cálculo das variações, que são técnicas clássicas de otimização conhecidas há mais de 150 anos. Os problemas de otimização que não podem ser resolvidos através de métodos clássicos de cálculo são geralmente chamados de *problemas de programação* (Fritzsche, 1978).

Até os anos 40 muito pouco era conhecido sobre métodos para a otimização numérica de funções de muitas variáveis. Com a evolução da informática ocorreu o desenvolvimento de métodos de otimização, com destaque ao método Simplex, básico dentro da Programação Linear, e desenvolvido naquela década com fins inicialmente de logística militar. Os primeiros métodos de otimização em Programação Não Linear eram bastante restritos e tornaram-se mais significativos no final da década de 50 com a introdução de métodos de métrica variável, capazes de solucionar problemas de muitas variáveis em pequeno tempo (Mateus e Luna, 1986).

O objetivo da otimização é encontrar a melhor solução, entre todas as soluções, em potencial, de um determinado problema (Mateus e Luna, 1986). Os problemas não lineares, em geral, não podem ser resolvidos utilizando técnicas clássicas de cálculo diferencial, devendo-se utilizar, para resolvê-los, métodos numéricos iterativos que geram soluções intermediárias a cada passo do processo, e, portanto, necessitando do auxílio do computador. Esses métodos acarretam algumas dificuldades tais como: a necessidade de uma solução inicial para se começar o processo iterativo; o escalonamento de variáveis de forma que se reduza os erros numéricos computacionais; a aproximação do problema original para uma função matemática; a exigência de continuidade e diferenciabilidade das funções envolvidas, entre outras.

O modelo científico de otimização representativo de um sistema, é a síntese da análise de muitas variáveis onde se procura a distribuição eficiente de recursos limitados entre diversas atividades competitivas. Dessa forma, procura-se uma solução para um problema de decisão considerando-se um objetivo previamente definido. Esse objetivo pode ser o de maximizar lucros e benefícios ou de minimizar custos, satisfazendo porém a restrições físicas, de mão-de-obra, de material, etc. Quando o objetivo e as restrições podem ser quantificadas e representadas através de equações e inequações, tem-se um *modelo matemático* representativo do sistema (Fritzsche, 1978).

Assim, o problema consistirá em otimizar (maximizar ou minimizar) uma função denominada *função objetivo* (FO), respeitando um conjunto de *restrições*. Estas restrições determinam uma região no espaço n-dimensional, onde as soluções do problema de otimização devem estar contidas. Essa região é denominada região viável ou factível. O conjunto de soluções viáveis que otimiza a função objetivo denomina-se *Solução Ótima*.

Existe hoje uma grande quantidade de artigos e livros publicados que estão relacionados à otimização de redes (Lansey e Mays 1989). Vários pesquisadores têm empregado as mais diversas ferramentas matemáticas de otimização para a solução desse problema, dentre as quais pode-se citar: a Técnicas de Enumeração Exaustiva, a Programação Linear, a Programação Não linear, a Programação Dinâmica e o Algoritmo Genético.

A preocupação com a economia no dimensionamento de sistemas de abastecimento de água surgiu nos anos 40, quando houve uma aceleração no processo de urbanização (Hamberg e Shamir, 1988). Na

década de sessenta, com a consolidação do uso de computadores, nos centros de pesquisas e nas universidades, ocorreu o desenvolvimento e aplicações das técnicas de otimização matemática a problemas práticos como: alocação de recursos na indústria, planejamento de rotas de transportes, etc. Com isso, surgiram as primeiras idéias sobre a aplicação de técnicas de simulação e otimização no dimensionamento de redes de abastecimento de água. No entanto, foi somente no final da década de 60, e início dos anos 70, que ocorreu o surgimento de métodos mais elaborados para a otimização de redes de abastecimento. Esses métodos eram baseados em técnicas heurísticas de busca, ou no emprego da Programação Linear e da Programação Dinâmica (Walski et al., 1987).

A década de oitenta foi caracterizada pela consolidação das metodologias existentes (Santana e Soares 1997). Na conferência “Computer in Water Resources”, realizada na cidade de Nova Iorque em 1985, ocorreu uma série de seções denominadas “*The Battle of the Networks Models*” (A Batalha dos Modelos de Redes). Nesse encontro, diversos grupos de pesquisa apresentaram suas soluções para uma rede hipotética previamente estabelecida. Uma análise dos resultados obtidos pelas diferentes metodologias e algoritmos empregados foi feita por Walski et al. (1987), onde se verificou que as diferentes soluções otimizadas apresentavam uma diferença de aproximadamente 10% entre a de menor e a de maior custo.

A década de noventa tem se caracterizado pela sofisticação dos algoritmos, onde cada vez mais tem-se procurado o desenvolvimento de um modelo especialista, capaz de não só fazer o dimensionamento econômico da rede, mas também de determinar o layout, bem como a operação da mesma (Gouter, 1992).

A seguir é mostrado um resumo das principais técnicas de otimização, utilizadas para o dimensionamento de redes encontradas na literatura.

## 4.2. Técnicas de Enumeração Exaustiva

A enumeração exaustiva é uma técnica que simula todas as combinações possíveis, para os diâmetros comerciais dos tubos, onde então é feita a seleção do menor custo da rede que satisfaça as restrições de pressão nos nós. A principal desvantagem que esta técnica apresenta é a quantidade de cálculos envolvidos. Por exemplo, considerando uma rede de 30 trechos e um conjunto de 5 diâmetros candidatos à solução, haverá um total de  $5^{30}$  possíveis soluções para o problema. Se um computador muito potente analisar cerca de 1.000.000 soluções por segundo, seria necessário mais de 29.000.000 anos para verificar todas as possíveis soluções do problema.

Em virtude disso, Gessler (1985) propôs o uso da enumeração seletiva, de modo a restringir severamente a quantidade de soluções possíveis para a rede, restrições essas que tiveram por base a experiência do autor. Loubser and Gessler (1990) sugeriram algumas diretrizes para a redução da quantidade de cálculo efetuado pelo computador. As principais são:

1. agrupar uma série de trechos e fazer com que o mesmo diâmetro seja utilizado em todo o grupo;
2. armazenar progressivamente as combinações de diâmetros que proporcionam o menor custo e que satisfazem as restrições, eliminando assim possíveis combinações de custos maiores;
3. checar as combinações que violam as restrições e eliminar aquelas que incluem tamanhos do tubo iguais ou menores aos rejeitados.

Apesar do auxílio dessas diretrizes, no caso de grandes redes ainda é necessário um tempo computacional elevado para se chegar a uma solução de menor custo, e não existe nenhuma garantia de que a solução ótima tenha sido descartada por essas diretrizes que "podam" o espaço das possíveis soluções (Simpson et al. 1994).



Um dos resultados dessa técnica de otimização foi o programa WADISO (Gessler e Walski, 1985), utilizado por Leal (1995) para fazer a otimização de um sistema de abastecimento de água em João Pessoa-PB.

### 4.3. Programação Linear

Dentre as metodologias desenvolvidas nestes últimos anos para a otimização de sistemas de distribuição de água, as técnicas baseadas na programação linear formam um dos mais importantes grupos. Dentre as diversas técnicas utilizadas, o gradiente de programação linear (GPL), é considerado como a que teve um avanço mais significativo (Bhave e Sonak 1992).

O método GPL decompõe o problema da otimização em duas etapas: na primeira, algumas variáveis são tidas como constantes, enquanto outras são otimizadas através da programação linear (PL); na segunda etapa, uma técnica de pesquisa é utilizada para determinar como as variáveis, tidas como constantes na primeira etapa, devem ser modificadas de forma a melhorar a solução preliminarmente obtida. As duas etapas são repetidas até que não haja redução nos custos da rede.

A técnica GPL foi originalmente proposta por Alperovits e Shamir (1977). Na primeira etapa do método a vazão nos tubos foi considerada como constante. Por assumir a vazão nos tubos como constantes e conhecidas, a rede pode ser otimizada através de técnicas de programação linear, utilizando-se uma metodologia semelhante à empregada por Karmelli et al. (1968). Por esse método, cada trecho da rede é composto por uma ou mais séries de tubos com diâmetros comerciais, e os comprimentos desses sub-trechos são tidos como variáveis de decisão. Para restringir a quantidade de tubos a ser empregada em cada trecho, e conseqüentemente o número de variáveis do problema, os diâmetros comerciais, que irão ser utilizados em cada trecho, podem ser

escolhidos segundo o julgamento do projetista, ou limitando a máxima e mínima perda de carga unitária.

Na segunda fase, a solução ótima obtida na etapa anterior é usada para determinar o gradiente da função objetivo (GFO). Alperovits e Shamir (1977), sugeriram o uso de um algoritmo de busca simples do gradiente para:

1. determinar a direção em que o GFO irá modificar a vazão no anel;
2. definir o incremento de vazão fixo que deve sofrer cada anel da rede.

Modificada as vazões o problema inicial é novamente resolvido de forma a se encontrar uma redução do custo da rede (Bhave e Sonak, 1992). Esse procedimento se repete até que não haja mais redução desse custo.

Quidry et al. (1979) fizeram uma correção matemática na expressão do GFO proposta por Alperivitz e Shamir (1977) considerando a interação entre os trechos que pertenciam a anéis distintos da rede. Gouter et al. (1986) consideraram diferentes configurações de fluxo para os nós da rede e observaram que a solução final é afetada pela escolha do “caminho” do fluxo entre a fonte (reservatório ou bomba) e os nós, na definição das restrições de mínima pressão nodal.

Fujiwara et al. (1987) apresentaram a derivação completa das expressões do GFO, e propuseram o uso do método quasi-Newton para determinar a direção do fluxo e um método de busca linear, para determinar o tamanho do incremento de vazão que irá ocorrer em cada anel. Foi observado que a solução final do problema era bastante sensível ao incremento de vazão arbitrado inicialmente pelo projetista. Isso ocorre devido à existência de muitos ótimos locais próximos. Dessa forma foi sugerido o emprego de vários valores para os incrementos de vazão antes que a solução final seja aceita.

Em um outro estudo realizado, Kessler e Shamir (1989), apresentaram o problema na forma de matriz e também mostraram que a solução final é independente da escolha dos caminhos de fluxo, contrariando dessa forma a afirmação feita por Gouter et al. (1986).

#### 4.4. Programação Não Linear

Até o momento, já foram aplicados vários pacotes de otimização no dimensionamento ótimo de redes malhadas. Dentre esses pode-se citar o MINOS (Murtagh and Saunders 1987), GINO (Liebman et al. 1986) e o GAMS (Brooke et al. 1988). Todos esses pacotes usam a técnica do Gradiente Reduzido Generalizado (Abadie e Carpentier, 1969) para identificar a configuração ótima do problema. A partir desses pacotes, vários pesquisadores desenvolveram aplicações da otimização não linear para o problema das redes de abastecimento de água (El-Baharawy and Smith 1985, 1987; Su et al. 1987; Lansey e Mays 1989, Lansey et al. 1989; Duan et al. 1990).

El-Baharawy and Smith (1985) aplicaram o MINOS no dimensionamento de sistemas de coleta e distribuição de água. Seu modelo é composto de três etapas: na primeira fase ocorre a montagem do problema, a partir do banco de dados; na segunda etapa é realizada a otimização propriamente dita e na terceira fase ocorre o arredondamento do tamanho dos tubos para diâmetros comercialmente disponíveis. Neste modelo de distribuição podem ser simuladas diversas partes que compõem um sistema de abastecimento de água como: bombas, reservatórios, válvulas de redução de pressão, válvulas de manobra, etc. El-Baharawy and Smith (1987) aplicaram este modelo em um grande número de casos de estudo onde mostraram que sua metodologia era hábil para: trabalhar com bombas e válvulas; achar o posicionamento ótimo de um sistema

auxiliar de bombas ao longo da tubulação, bem como a sua altura ótima de operação; e determinar o layout ótimo para o problema.

Su et al. (1987) usaram a programação não linear para otimizar redes malhadas. Neste trabalho, além das restrições físicas do problema (continuidade nos nós, pressão mínima requerida, etc.), foram adicionadas restrições que envolvem a confiabilidade do sistema. Segundo Su et al. (1987), a confiabilidade do sistema é a probabilidade deste executar uma tarefa, dentro de certos limites, em um determinado intervalo de tempo. A confiabilidade, relacionada aos sistemas de distribuição de água, indica a capacidade que o sistema tem para suprir demandas nos nós, ou em pontos de um sistema, com um mínimo de pressão requerida. Para a aplicação dessa metodologia, foi desenvolvido um método para a determinação da probabilidade de falha dos diversos componentes do sistema de abastecimento de água. As possíveis falhas nos componentes que podem acontecer incluem: ruptura da tubulação, parada do sistema de bombas, quebra de válvulas, etc.

Para a solução desse problema, o modelo de otimização foi embasado na técnica dos gradientes reduzidos generalizados (GRG). O programa de simulação KIIPIPE (Wood, 1980) foi usado em cada iteração para calcular a pressão ao longo do sistema. Paralelamente foi utilizado um modelo para simular a confiabilidade do sistema. Este modelo define confiabilidade como a probabilidade da pressão de projeto ser mantida em todos os nós do sistema, dado a possibilidade de algum trecho da tubulação se tornar indisponível devido à quebra. Este modelo não incluiu outros elementos do sistema como bombas, válvulas, reservatórios, etc.

Lansey et al. (1989) consideraram as incertezas no dimensionamento ótimo de redes, pois os sistemas de abastecimento de água, de que estas redes fazem parte, são projetados para serem utilizados durante um longo período de tempo. Devido ao número e ao tipo de futuros consumidores, torna-se

impossível definir com precisão as futuras demandas e pressões requeridas para o projeto, sendo essas grandes incertezas do problema. Outro parâmetro de incerteza no dimensionamento é o estado de conservação do sistema, que é afetado pela corrosão e pela incrustação de substâncias nos tubos. Essa mudança na conservação do sistema é refletida no coeficiente de rugosidade dos tubos (Hudson, 1966). Como o impacto dos diferentes processos que influenciam na conservação do sistema é desconhecido, acarreta uma incerteza nas projeções dos coeficientes de rugosidade a serem utilizados no projeto.

O problema acima descrito foi solucionado, utilizando-se uma restrição de probabilidade para converter o problema probabilístico em um determinístico. Nessas restrições são especificadas a capacidade do sistema de satisfazer as demandas e as pressões nodais.

Lansey and Mays (1989) usaram a programação não linear para fazer o dimensionamento ótimo, inclusive do layout, de redes de distribuição de água. Eles adicionaram o programa KYPIPE (Wood, 1980) ao seu modelo, para assegurar que a continuidade e a conservação de energia sejam atendidas. O método GRG é utilizado para encontrar a solução ótima para o problema e um método Langrangiano são usados para incluir as restrições. Posteriormente Duan et. al. (1990) fizeram um aprimoramento do método de Lansey and Mays (1989). Foi desenvolvido um modelo de otimização generalizado no qual podem ser incluídos bombas, reservatórios e suas alocações. Este modelo é dividido em três fases: na primeira fase (problema principal) é identificado o número e a alocação de tanques e reservatórios utilizando métodos de enumeração exaustiva. Na fase seguinte (subproblema) é utilizado a técnica GRG para se fazer a otimização dos tubos, para o layout de bombas e reservatórios especificados no problema principal. A terceira etapa é um loop dentro do subproblema que serve para assegurar que as equações de continuidade e de pressão mínima requerida nos nós sejam satisfeitas. Ainda nesta etapa é feita uma análise da confiabilidade do sistema.

Silva (1997) aplicou a Programação Não Linear na otimização de redes ramificadas. O problema foi resolvido em duas etapas: na primeira foram considerados variáveis de decisão a cota de cabeceira e os diâmetros contínuos dos tubos. Na segunda fase adotam-se diâmetros discretos, dentre os comercialmente disponíveis e utiliza-se como variáveis de decisão o comprimento dos tubos juntamente com a cota de cabeceira. Verificou-se que, para redes ramificadas, a programação não linear apresenta resultados semelhantes aqueles obtidos pelas metodologias de Granados (Granados, 1990) e da Programação Linear (Karmeli et al., 1968).

Cirilo (1997) propõe um modelo de otimização de redes malhadas, em que o problema é resolvido sem a necessidade de se utilizar um programa para o balanceamento de vazões da rede, a fim de se assegurar a continuidade e a pressão mínima nodal. Para isso é considerado como variáveis de decisão a vazão e os diâmetros da tubulação. A função objetivo proposta não visa a minimização dos custos mas sim a determinação de diâmetros mínimos e máximas vazões, que estejam dentro dos limites impostos pelas restrições.

#### 4.5. Métodos de Gradiente (Programação Dinâmica)

Monbaliu et al. (1990) propôs uma técnica de gradiente de pesquisa para alcançar um projeto eficiente. Inicialmente, fixa-se um diâmetro mínimo para cada tubo, em seguida, utiliza-se um pacote de simulação para se determinar as pressões nos nós da rede. Se os limites mínimos de pressão não são satisfeitos, o tubo com a maior perda de carga unitária tem o seu diâmetro elevado para o imediatamente superior, em seguida é feita uma nova simulação. Este processo é repetido até que todos os limites de pressão sejam satisfeitos.

Leal e Gomes (1997) propõem uma metodologia semelhante só que ao invés de utilizar a maior perda de carga unitária como parâmetro para escolha

de qual tubo irá ter o seu diâmetro modificado, é utilizado o acréscimo de custo de um determinado trecho, produzido pela mudança de seu diâmetro pelo nominal consecutivo superior, relacionado com a diminuição da perda de carga correspondente, o que se chama de *gradiente de câmbio* (Granados, 1990). Para se aplicar o método Granados no dimensionamento de redes malhadas, é necessário transformar essas redes em ramificadas, através de um seccionamento semelhante ao efetuado no método do Seccionamento Fictício (Leal, 1995)

A metodologia do trabalho de Leal (1995), consistiu basicamente em se utilizar o programa REDES (Gomes, 1995) para se fazer dimensionamento da rede ramificada, obtida a partir do seccionamento. O balanceamento da rede é efetuado, através do método de Hardy-Cross, a cada iteração, de modo a atender as restrições de energia e continuidade características das redes malhadas.

#### 4.6. Algoritmo Genético

O algoritmo genético (AG) é uma técnica relativamente nova de otimização. Em virtude disso, a quantidade de pesquisadores, e consequentemente o número de publicações, que utilizam essa ferramenta para a otimização de sistemas de abastecimento de água ainda é pequeno.

O AG é um algoritmo de busca baseado na seleção natural e nos mecanismos da genética das populações (Holland 1975; Goldberg 1989). O AG tem por fundamento o processo biológico de sobrevivência e adaptação. O resultado disso é um algoritmo eficiente e flexível que permite a solução de problemas complexos como a otimização de redes malhada (Savic e Walters, 1997a)

Simpson et. al. (1994) utilizaram um algoritmo genético simples composto por três operadores: reprodução, cruzamento e mutação. Foram utilizados cadeias de números binários para a codificação das variáveis de decisão, onde foram considerados diâmetros comerciais. O modelo desenvolvido se divide em três partes, onde na primeira ocorre a geração de uma “população inicial” de soluções para o problema. Na segunda etapa, é feita a simulação hidráulica da rede, através de um método de balanceamento tradicional. Em seguida, é feita a geração de uma nova população, a partir dos “indivíduos” que compõem a população inicial. As duas últimas etapas são repetidas até que não haja mais redução do custo mínimo da rede, à medida que surjam novas populações.

Savic e Walters (1997b) desenvolveram um modelo computacional chamado GENET, utilizado para a solução do problema de menor custo de uma rede. Esse programa utiliza basicamente os mesmos operadores empregados por Simpson et al. (1994). O algoritmo de simulação da rede é baseado no programa EPANET (Rossman 1993), que emprega o método do gradiente (Toldini e Pilati, 1987) para determinar as vazões nos trechos e as pressões nos nós da rede. Esse método é mais eficiente do que as técnicas tradicionais de balanceamento de rede, o que implica em uma quantidade menor de tempo de máquina do que o utilizado por Simpson et. al. (1994).

#### 4.7 Considerações a respeito dos métodos de otimização

Embora façam mais de vinte anos que as técnicas de otimização começaram a ser aplicadas no dimensionamento de redes malhadas, elas não chegaram ao seu usuário final, que são os projetistas dos sistemas de abastecimento de água, onde, pelo menos no nosso país, ainda continuam



utilizando o método de Hardy-Cross como principal ferramenta no dimensionamento dessas redes. A não utilização dessas técnicas por parte dos engenheiros projetistas se deve, principalmente, a dois motivos: a não disponibilidade de um programa específico para o dimensionamento econômico de redes malhadas; e, a dificuldade da implementação em uma linguagem de programação dos métodos desenvolvidos, seja por inaptidão do projetista em programar, seja pela complexidade do algoritmo de alguns desses métodos de otimização. A seguir serão mostradas algumas dificuldades e desvantagens apresentadas para a difusão dos métodos de otimização que foram abordados nesse trabalho.

O método do Gradiente da Programação Linear (GPL), é uma adaptação de um problema não linear para um linear. Bhave e Sonak (1992) fazem uma crítica a esse método, mostrando sua ineficiência para se obter o custo ótimo de uma rede. Essa crítica tem por base a separação que ocorre entre o processo de otimização (dos tubos) da determinação de vazão nos trechos. Outra dificuldade enfrentada pela metodologia do Gradiente da Programação Linear é a sua aplicação, pois não existe um programa específico para o emprego prático desta metodologia, sendo necessário a implementação desse algoritmo através de uma linguagem de programação.

A Enumeração Exaustiva, embora apresente um conceito simples de otimização e um programa para aplicá-lo (WADISO), pode ser considerada uma técnica ineficiente, pois, para se achar o ótimo, é necessário testar todas as possíveis soluções do problema, o que acarreta em um tempo de computação muito elevado. Loubser e Gessler (1990) introduziram uma série de modificações de forma a descartar algumas soluções, e assim, diminuir a quantidade de cálculo a ser efetuada. Porém, Simpson et. al. (1994) mostram que, para redes de grande porte, essas modificações podem fazer com que a solução ótima do problema também seja descartada.

O método Granados (Programação Dinâmica), desenvolvido inicialmente para a otimização de redes ramificadas, foi adaptado para trabalhar também com redes malhadas por Leal (1995). O inconveniente deste método está no fato de ser necessário, a cada iteração, a modificação manual das vazões no programa REDES. Além disso, a determinação das vazões é efetuada “fora” do processo de otimização.

O Algoritmo Genético é uma técnica “evolucionista” que tem sido ultimamente empregada em uma série de aplicações em recursos hídricos, que vão desde a otimização de parâmetros em modelos hidrológicos até à alocação de válvulas em redes malhadas. No caso do dimensionamento econômico de redes, essa metodologia pode ser considerada como um aperfeiçoamento do método da enumeração exaustiva. A desvantagem da utilização deste método reside no fato de que cada trecho só pode ter um diâmetro como solução, quando, entretanto, o ótimo em um trecho pode ser formado por um grupo de até dois diâmetros (Granados, 1990). Para redes que possuem trechos pequenos, essa restrição não é muito evidente. Entretanto, para redes que tem longos trechos, principalmente os grandes anéis de distribuição, a consideração de apenas um diâmetro por trecho pode resultar em uma solução que não é a ótima.

Como foi visto, a Programação Não Linear foi aplicada a casos em que havia incertezas sobre o sistema. Como no método Granados aplicado por Leal (1995) a redes malhadas, essa técnica consiste em se fazer a otimização do sistema, e em seguida realizar o balanceamento da rede através de um programa específico. Esse procedimento é repetido até que o ótimo para as condições impostas fosse encontrado. Embora seja um método mais refinado, ele incorre no problema de não possuir um programa específico para a sua aplicação, além do fato não de incorporar o balanceamento de vazões dentro da fase de otimização. A metodologia proposta por Cirilo (1997), embora seja eficiente sob o ponto de vista hidráulico, já que as modificações de vazões são efetuadas

junto com a dos diâmetros, não dá como resultado necessariamente o ótimo econômico, pois em sua estrutura, não são considerados explicitamente os preços das tubulações.

Pelos motivos acima descritos procurou-se desenvolver um método de dimensionamento econômico de redes malhadas, que além de possuir uma eficiência, sob o ponto de vista da otimização, pudesse ser facilmente utilizado pelos projetistas desses sistemas. Dessa forma, nesta dissertação, tornou-se por bem utilizar a Programação Não Linear na otimização desse tipo de rede, pois a natureza do problema enfrentado, devido as equações de perda de carga, possui um alto grau de não linearidade.

A metodologia proposta neste trabalho, procura fazer a otimização da rede como um todo, ou seja, efetuar o balanceamento da rede, no caso, a determinação das vazões, juntamente com o dimensionamento econômico das tubulações. Para isso, será utilizado o algoritmo otimização GRG2, disponível em planilhas eletrônicas. A razão que levou a utilização de uma planilha eletrônica, em detrimento de outros pacotes de otimização como o GAMS, MINOS, MathLAB, etc., foi o fato dessas planilhas serem, atualmente, o instrumento computacional mais utilizado pelos projetistas de rede. Além do mais, a migração de um método como o Hardy-Cross para a metodologia proposta poderia facilmente ser feita.

## Capítulo V

### A PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

#### 5.1 Introdução

A programação não linear compreende o conjunto de técnicas utilizadas para a resolução de problemas que têm, seja em sua função objetivo, seja em suas restrições, expressões não lineares.

De acordo com Cirilo (1997) um problema de Programação Não Linear pode ser escrito da seguinte forma:

Minimizar (ou Maximizar)  $f(\mathbf{X})$

sujeito a

$$g_i(\mathbf{X}) < 0 \text{ ou } (>0); \quad i = 1, 2, 3, \dots, s_1; \quad (\text{eq. 5.1})$$

$$h_j(\mathbf{X}) = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, s_2; \quad (\text{eq. 5.2})$$

$$\mathbf{X}^I < \mathbf{X} < \mathbf{X}^S; \quad (\text{eq. 5.3})$$

onde:

$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_r]^T$  é um vetor contendo  $n$  variáveis, denominadas *variáveis de decisão* cujos valores ótimos se busca determinar;

$f(\mathbf{X})$  é a função objetivo, cujo valor pretende-se minimizar (ou maximizar);

$g_i(\mathbf{X})$  são restrições de desigualdade;

$h_j(\mathbf{X})$  são restrições de igualdade;

$\mathbf{X}^l$  e  $\mathbf{X}^s$  são os valores mínimos e máximos, respectivamente, que podem ser assumidos pelas variáveis de decisão.

Embora essa seja uma forma padrão, nem todos os problemas são obrigados a conter todos esses tipos de restrições, podendo muitas vezes ser um problema de otimização irrestrita, ou seja, sem restrições à função objetivo.

## 5.2. Condições de Otimalidade

Cirillo (1997) faz uma abordagem de alguns conceitos e teoremas, necessários para definir condições para a determinação da solução ótima de um problema.

Seja o seguinte problema de otimização:

otimizar (maximizar ou minimizar)  $f(\mathbf{X})$

sujeito a

$a \leq \mathbf{X} \leq b$

(eq. 5.4)

Se para um dado valor de  $X_0$  existir um intervalo centrado neste ponto tal que  $f(X) \geq f(X_0)$  para todo valor de  $X$  desse intervalo, diz-se que  $X_0$  é um *mínimo local* de  $f(X)$ .

Se  $f(X) > f(X_0)$  para todo  $x$  onde a função é definida, diz-se que  $x_0$  é um *mínimo global* de  $f(X)$ .

Essa mesma definição se aplica de forma análoga aos máximos locais e globais, utilizando-se a desigualdade oposta. A Figura 5.1 ilustra esses conceitos de mínimos e máximos locais e globais para uma função  $f(X)$  em um intervalo  $[a, b]$ .

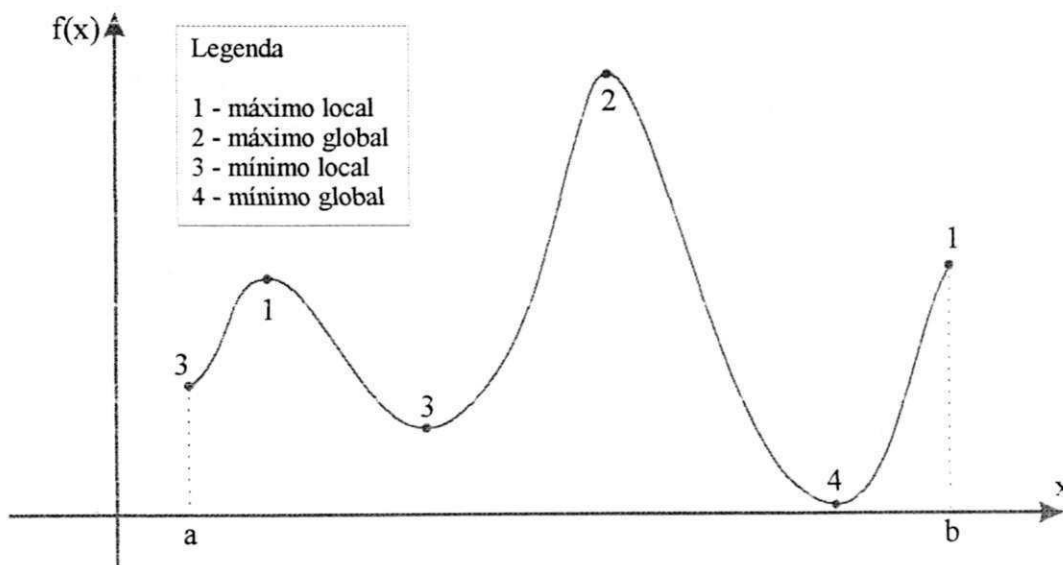


Figura 5.1 – Tipos de máximos e mínimos de uma função

Se existir apenas um ótimo, este será o global para o intervalo, diz-se então que a função é *unimodal* no intervalo (Figuras 5.2a e 5.2b). Quando num certo intervalo existir mais de um ótimo local diz-se que a função é *multimodal* no intervalo (Fig. 5.2c).

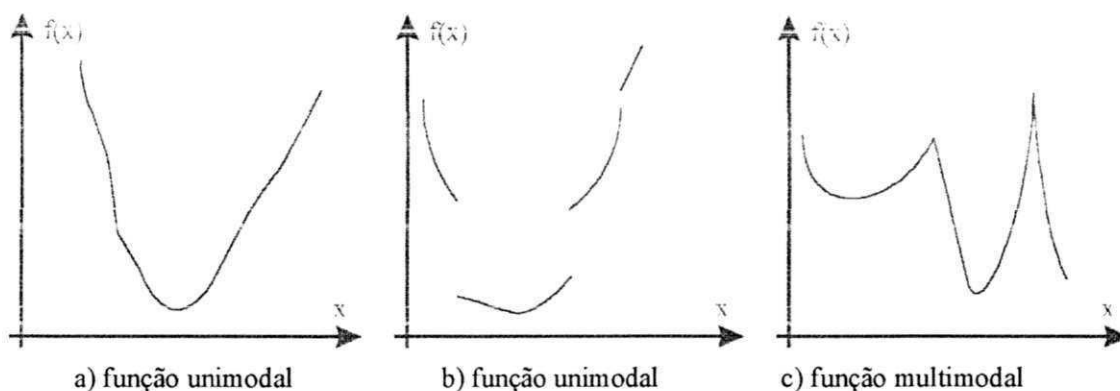


Figura 5.2 – Funções unimodais e multimodais

A seguir são enunciados três teoremas do Cálculo Diferencial, necessários para a compreensão do problema:

Teorema 1: Se  $f(\mathbf{X})$  é contínua em um intervalo  $[a,b]$ , então  $f(\mathbf{X})$  possui ótimos neste intervalo.

Teorema 2: Se  $f(\mathbf{X})$  possui um ótimo local em  $x_0$  e é derivável em um pequeno intervalo centrado em  $x_0$ , então  $f'(\mathbf{X}_0) = 0$ .

Teorema 3: Se  $f(\mathbf{X})$  possui derivada de segunda ordem em um pequeno intervalo centrado em  $x_0$ , se  $f'(\mathbf{X}_0) = 0$  e  $f''(\mathbf{X}_0) > 0$ , então  $f(\mathbf{X}_0)$  é mínimo local. Se  $f'(\mathbf{X}_0) = 0$  e  $f''(\mathbf{X}_0) < 0$ , então  $f(\mathbf{X}_0)$  é um máximo local.

Pelos dois primeiros teoremas conclui-se que se  $f(\mathbf{X})$  for contínua no intervalo  $[a,b]$ , a solução global pode ocorrer de três formas: onde  $f'(\mathbf{X})$  não existe, onde  $f'(\mathbf{X})$  for nula ou nos limites do intervalo.

Esses teoremas se aplicam de forma semelhante a funções de mais de uma variável.

### 5.2.1. Vetor Gradiente

Se  $f(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_r]^T$  possuir derivada parcial de primeira ordem, o seu *vetor gradiente* é definido por:

$$\nabla f(\mathbf{X}) \equiv \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \right]^T \quad (\text{eq. 5.5})$$

Para um ponto qualquer  $\mathbf{X}^*$  o vetor  $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ , perpendicular ao plano tangente a  $f(\mathbf{X})$ , indica a direção onde ocorre o maior crescimento da função  $f(\mathbf{X})$ .

### 5.2.2. Matriz Hessiana

Se  $f(\mathbf{X})$  é continuamente diferenciável de segunda ordem, então existe uma matriz quadrada simétrica de derivadas segundas de  $f(\mathbf{X})$  que é denominada *matriz hessiana*.

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{X}) = \nabla^2 f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2} \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.6})$$

Considerando  $\mathbf{H}_f(\mathbf{X}^*)$  o valor da matriz Hessiana no ponto  $\mathbf{X}^*$ , esta matriz é dita *definida positiva* se, para todo vetor  $\mathbf{X} \neq 0 \in \mathfrak{R}$ :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} > 0 \quad (\text{eq. 5.7})$$

Se o primeiro termo da inequação for maior ou igual a zero, diz-se que a matriz  $\mathbf{H}$  é *semidefinida positiva*. A matriz  $\mathbf{H}$  será *definida negativa*, se o primeiro



termo da equação for menor que zero, e semidefinida negativa se este termo for maior ou igual a zero.

**Teorema 4** Se  $f(\mathbf{X})$  é uma função contínua, definida em uma região fechada e limitada, então essa função apresenta um máximo e um mínimo nessa região.

**Teorema 5** Se  $f(\mathbf{X})$  apresenta um máximo ou mínimo local em  $\mathbf{X}^*$  e se  $\nabla f(\mathbf{X})$  existe na vizinhança de  $\mathbf{X}^*$  então  $\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$ .

**Teorema 6** Se  $f(\mathbf{X})$  possui derivadas parciais de segunda ordem na vizinhança de  $\mathbf{X}^*$  e ainda  $\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$ , como também a matriz hessiana  $\mathbf{H}_f(\mathbf{X})$  for definida negativa, então  $f(\mathbf{X})$  possui máximo local em  $\mathbf{X}^*$ . Se a  $\mathbf{H}_f(\mathbf{X})$  for definida positiva então  $f(\mathbf{X})$  possuirá mínimo local em  $\mathbf{X}^*$ .

A partir dos Teoremas 4 e 5, pode-se concluir que a função contínua assume ótimos nos pontos em que  $\nabla f(\mathbf{X})$  é nulo ou inexistente. (Cirillo, 1997)

### 5.2.3. Convexidade e Concavidade

Uma das condições necessárias para a determinação de que um ótimo local também é ótimo global, são os conceitos de convexidade e concavidade

Uma função  $f(\mathbf{X})$  é dita *convexa* sobre um conjunto convexo  $\mathfrak{R}$ , se para quaisquer dois pontos  $\mathbf{X}_1 \in \mathfrak{R}$  e  $\mathbf{X}_2 \in \mathfrak{R}$ :

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2) \quad (\text{eq. 5.8})$$

onde  $\lambda$  é um escalar tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$

Se para todo  $X_1 \neq X_2$  o sinal da inequação 5.8 for substituído por “<”, a função  $f(X)$  será *estritamente convexa*.

Uma função será *côncava* se a função  $-f(X)$  for convexa, e *estritamente côncava*, se  $-f(X)$  for estritamente convexa.

A Figura 5.3 mostra graficamente o comportamento, para uma só variável, dos diferentes tipos de funções definidas anteriormente.

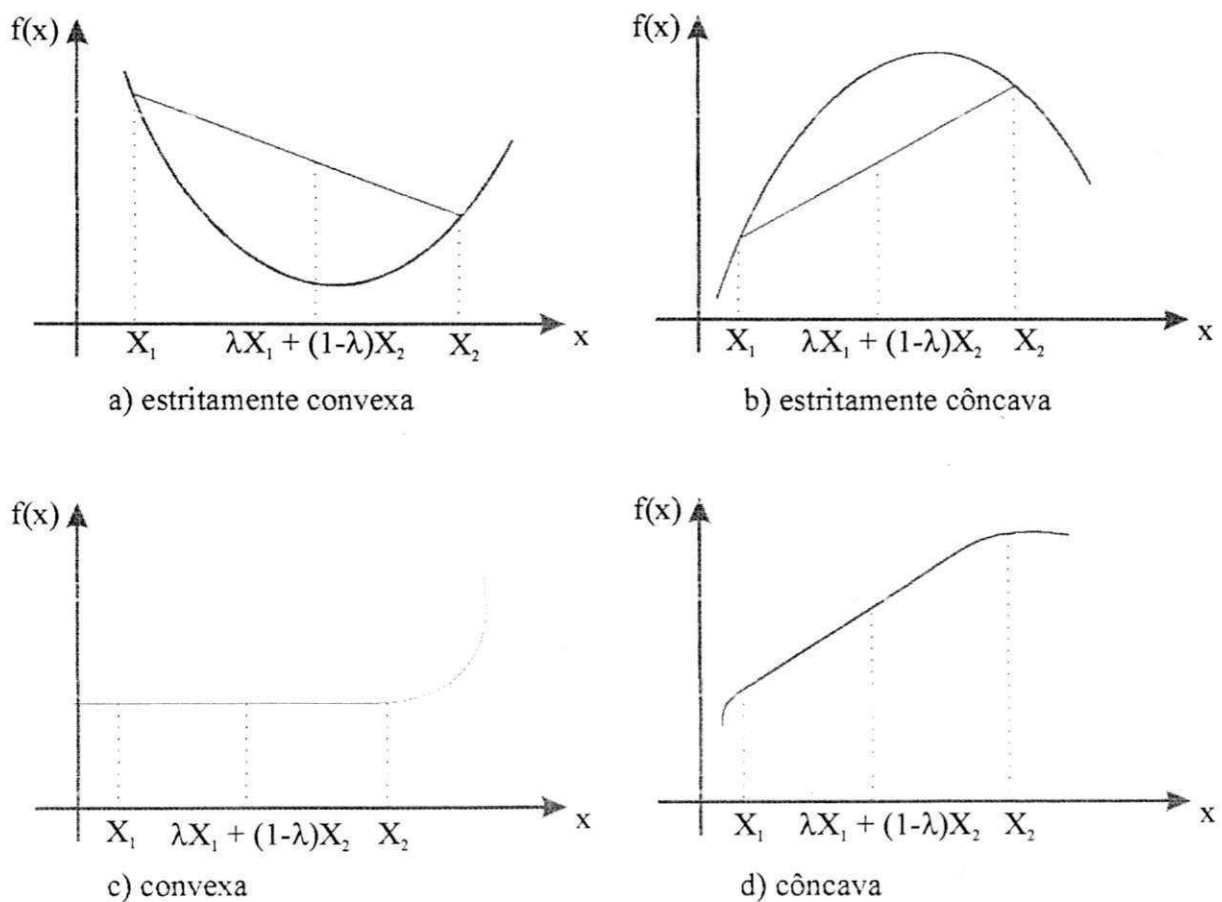


Figura 5.3 – Comportamento das funções côncavas e convexas.

**Teorema 7** Se  $f(X)$  possui derivadas parciais de segunda ordem em  $\mathfrak{R}$ ,  $f(X)$  é convexa (ou estritamente convexa) se e somente se uma matriz hessiana  $H_f(X)$  for semidefinida (ou definida) positiva para todo  $X$  em  $\mathfrak{R}$ .

**Teorema 8** Se  $f(\mathbf{X})$  é uma função estritamente convexa, definida sobre um conjunto  $\mathfrak{R}$ , então qualquer mínimo local de  $f(\mathbf{X})$  em  $\mathfrak{R}$  é um mínimo global.

As condições para a existência de um máximo global são semelhantes. Para isso, é necessário que a função seja estritamente côncava, ou seja, a sua matriz hessiana seja definida negativa.

### 5.3. Métodos de Programação Não Linear

Uma das características da Programação Não Linear é a de não possuir um método geral, como o Simplex<sup>1</sup> da Programação Linear para a resolução de seus problemas de pequeno e médio porte. Existem na literatura muitos algoritmos, sendo que a maioria são quase sempre voltados para problemas específicos, sendo restritos a situações com características diversas como: continuidade,

---

<sup>1</sup> “O método Simplex é um procedimento algébrico, suficientemente genérico, que permite obter a solução de um problema de Programação Linear. A autoria do método é devida a George Dantzig, em 1947, associando-se a própria origem da Programação Linear. Este método permaneceu como única alternativa de solução para problemas de maior porte de Programação Linear até 1978, quando veio à luz o algoritmo de elipsoides de Khachiyan (1979). Posteriormente, Karmarkar (1984) desenvolveu um novo algoritmo que, em virtude das anunciadas vantagens computacionais, provocou muita controvérsia inicialmente, classificados na categoria de algoritmos dos pontos interiores. Apesar do reconhecimento atual sobre as vantagens desses algoritmos para problemas de grande porte, a utilização do método Simplex não está descartada, podendo-se assegurar que ele ainda é usado na maioria das aplicações comerciais da Programação Linear” (Barbosa, 1997).

unimodalidade, diferenciabilidade de primeira e/ou segunda ordem, etc (Mateus e Luna, 1986).

Os métodos de Programação Não Linear podem ser classificados de diversas formas. Esta classificação geralmente está associada à técnica utilizada no processo de otimização. Esses métodos podem ser divididos em duas categorias principais, que são: técnicas analíticas e técnicas de busca numérica. (Cirilo, 1997)

As *técnicas analíticas* são os métodos que determinam a solução ótima através de sistemas de equações, utilizando para isso as derivadas dessas equações. Geralmente esses métodos se reduzem à obtenção das raízes desses sistemas. O Método do Cálculo Diferencial, o Método dos Multiplicadores de Lagrange e a Programação Geométrica, são alguns exemplos de técnicas analíticas (Cirilo, 1997). OK

As técnicas de busca numérica são métodos iterativos que melhoram as soluções do processo de otimização através de informações obtidas ao longo das iterações realizadas. Essas técnicas estão baseadas no emprego de métodos numéricos para a resolução dos problemas, onde não é possível o emprego de soluções analíticas (Cirilo, 1997).

Segundo Mateus e Luna (1979), métodos de busca numérica podem ser classificados em: OK

- Métodos de Busca Unidirecional;
- Métodos de Minimização Irrestrita:
  - com direção de busca a partir de derivadas;
  - com direção de busca sem derivadas;
- Métodos de Otimização Restrita
  - Métodos de Penalidades;
  - Métodos Primais.

A seguir serão descritos alguns aspectos, bem como as principais técnicas destes métodos.

#### 5.4. Métodos de Busca Unidirecional

A escolha da direção em que a função irá procurar o ótimo é o critério determinante para a classificação dos métodos de busca irrestrita. Os métodos de *busca unidirecional* se caracterizam por realizar a procura por melhores soluções, numa única direção, a partir de um ponto inicial adotado.

Segundo Mateus e Luna (1986), em um processo de busca unidirecional se está interessado em:

1. encontrar um ponto ótimo próximo ao ponto mínimo, dentro de uma tolerância ( $\epsilon$ ) dada, devido à impossibilidade computacional de se determinar o ponto mínimo exato;
2. ou encontrar um ponto desejável, que simplesmente diminua bastante o valor da função objetivo, sem no entanto, tentar minimizá-la.

A partir da finalidade da otimização, pode-se classificar os métodos de busca unidirecional em métodos de reduções sucessivas dos intervalos e métodos finitos ou de aprofundamento.

### **5.4.1. Métodos de Reduções Sucessivas de Intervalos**

#### *5.4.1.1. Métodos Diretos*

Esses métodos exigem funções unimodais e não exigem diferenciabilidade. São geralmente aplicados a problemas com funções simples, gerando um número maior de iterações de baixa complexidade. São exemplos desses métodos, o método de Fibonacci e o método de busca do meio termo (ou método da seção áurea)

#### *5.4.1.2. Método de Aproximação por polinômios*

Essas técnicas exigem funções “bem comportadas” (convexa; côncava; continuamente diferenciáveis, de primeira e de segunda ordem). Isso permite ajustar uma outra função que faz com que o mínimo seja facilmente determinado. Tais métodos geram um número menor de iterações, quando comparado aos métodos diretos, porém, essas iterações são mais complexas. Podem ser classificados como metodologias de aproximação por polinômios, o método de Newton, o método da secante, o método DSC-Powel, entre outros.

### **5.4.2. Métodos Finitos ou de Aprofundamento**

Esses métodos exigem derivadas direcionais no ponto de partida, porém não exigem convexidade. O Método de Armijo e o Método de Goldstein fazem parte dessas técnicas.

## 5.5. Métodos de Otimização Irrestrita

A determinação das direções em cada passo do processo iterativo de otimização, caracteriza os métodos de otimização irrestrita, ou seja, como se determina uma direção de movimento, ou busca a cada iteração. Determinada essa direção, inicia-se o processo de minimização da função objetivo, seja aplicando os métodos estudados no item anterior, seja com o auxílio de outros artifícios.

### 5.5.1. Métodos de Otimização Irrestrita com Busca Através de Derivadas

#### 5.5.1.1. Método do Gradiente

Este método também é conhecido como método de Cauchy ou método do máximo declive (steepest descent). Essa é uma das mais antigas e difundidas técnicas de otimização de funções de múltiplas variáveis. Devido à sua simplicidade, é ainda uma técnica muito utilizada, porém em alguns casos ela pode convergir lentamente. A importância dessa técnica se deve à sua base teórica que deu origem a outros métodos mais modernos, com melhores condições de convergência.

A principal vantagem do método do gradiente é a necessidade apenas do cálculo de derivadas de primeira ordem. Como foi visto anteriormente, o gradiente de uma função indica a direção de maior crescimento da mesma a partir de um determinado ponto.

Embora o método do gradiente procure convergir para um ponto de gradiente nulo a cada iteração, ele é ineficaz em muitos casos práticos, visto que essa convergência pode ser muito lenta.

#### *5.5.1.2. Método de Newton-Raphson*

O método de Newton-Raphson é uma extensão do método de Newton para busca unidirecional, onde aproxima a função  $f(\mathbf{X})$ , a ser minimizada, a uma quadrática. Enquanto no método do gradiente ocorre uma convergência linear, o de Newton-Raphson possui convergência quadrática. No entanto, a convergência por este último só é atendida se duas condições forem satisfeitas: a existência da inversa da hessiana; e que a hessiana seja definida positiva, de modo a garantir uma direção de descida, ou diminuição da função objetivo (Mateus e Luna, 1986).

A grande dificuldade de utilização dessa metodologia, apesar de sua rápida convergência, está na necessidade de se calcular a inversa de uma matriz  $[r \times r]$ , o que torna esse método pouco prático para matrizes onde o número de variáveis  $n$  é grande.

#### *5.5.1.3. Método de Direções Conjugadas*

Como foi mostrado nas seções anteriores, o método do gradiente, embora exija pouca informação e apresente uma simplicidade computacional grande, tem uma convergência muito lenta, o que inviabiliza a sua utilização para muitas funções. O método de Newton apresenta uma convergência rápida para o ponto ótimo, porém é necessário se fazer o cálculo da inversa da hessiana, que muitas vezes é inexistente, tornando-se nesse caso impossível a minimização através desta técnica.



Os métodos de direções conjugadas foram formulados para melhorar as propriedades de convergência do método do gradiente, sem no entanto possuir uma complexidade de cálculo como o método de Newton, pois para se obter as direções conjugadas só é necessário o cálculo de derivadas de primeira ordem.

#### *5.5.1.4. Métodos Quase-Newtonianos*

Como o método das direções conjugadas, os métodos quase-newtonianos são intermediários entre a rapidez do método de Newton e a simplicidade do método do gradiente, e podem também ser chamados de métodos de métrica variável. Esses métodos, ao invés de calcular a hessiana, como o método de Newton, procuram a cada iteração achar uma matriz aproximada, utilizando apenas derivadas de primeira ordem. Dentre os métodos quasenewtonianos pode-se destacar o método de Broyden, o método de Davidson-Fletcher-Powell e o método de Pearson, entre outros (Fritzsche, 1978).

#### **5.5.2. Métodos de Otimização Irrestrita com Busca sem o Auxílio de Derivadas**

Os métodos de otimização vistos no item 5.5.1. são baseados em derivadas de primeira e de segunda ordem. Esses métodos, quando aplicados a problemas complexos, devido ao porte das funções, podem tornar a avaliação dessas derivadas bastante complicada e demorada. As técnicas de otimização irrestrita sem o auxílio de derivadas, também chamados de métodos de pesquisa, foram desenvolvidas para superar esse problema.

Para problemas simples, os métodos de pesquisa demoram mais para convergir do que aqueles que utilizam derivadas. Entretanto, para problemas complexos, os resultados obtidos com esses métodos podem ser considerados satisfatórios (Mateus e Luna, 1986).

#### *5.5.2.1. Método de Hooke e Jeeves*

Este método de pesquisa apresentado por Hooke e Jeeves (1961) realiza dois tipos de pesquisa em torno de um ponto **X**: buscas exploratórias ou locais, que são realizadas na direção dos eixos coordenados; e buscas padrões ou globais, que procuram acelerar o processo de otimização.

#### *5.5.2.2. Método de Rosenbrock*

Este método proposto por Rosenbrock (1960) realiza saltos discretos, como no método de Hooke e Jeeves, dados em direções linearmente independentes e ortogonais entre si, sendo que as pesquisas nessas direções serão feitas utilizando um método de busca unidimensional.

#### *5.5.2.3. Método de Powell*

Este método, que utiliza o conceito de direções conjugadas que são geradas a cada iteração, foi proposto por Powell (1964). O algoritmo de Powell parte do princípio de que se o mínimo de uma função quadrática é determinado para duas

direções paralelas, a direção que une esses pontos será conjugada às anteriores (Fritzche, 1978).

## 5.6. Métodos de Otimização com Restrições

Até agora foram mostrados métodos utilizados somente para otimização sem restrições à função objetivo. Entretanto, quando são impostas condições a esta, o nível de dificuldade para a obtenção do ponto ótimo irá aumentar à medida em que o grau de não linearidade do problema cresce (Fritzsche, 1978).

A resolução de um problema não linear restrito pode ser feita partindo-se de dois enfoques diferentes:

1. transformar o problema restrito em um não restrito, de modo que se possa resolvê-lo através de uma técnica vista na seção anterior;
2. estender os conceitos de programação linear à não linear, de forma a substituir o problema não linear original por um linear análogo, através de aproximações lineares sucessivas das funções envolvidas.

### 5.6.1. Métodos de Penalidade

Essas metodologias procuram transformar um problema não linear restrito em um irrestrito, adicionando à função objetivo funções de penalidades, relativas às restrições. Os métodos de penalidade podem ser divididos em:

- Métodos de Penalidade Interna (MPI), ou de Barreira, ou de Pontos Interiores. São métodos que geram os seus pontos dentro da região factível do problema. Para isso adicionam à função objetivo uma penalidade que favorece os pontos interiores próximos da fronteira da região factível.
- Métodos de Penalidade Externa (MPE), ou de Pontos Exteriores. Uma penalidade é adicionada à função objetivo de modo a “punir” qualquer violação às restrições, gerando uma sequência de pontos, que podem, ou não, estar contidos na região viável, e cujo limite é a solução ótima do problema original.

#### *5.6.1.1. Métodos de Penalidade Interna*

O uso de funções barreiras foi proposto inicialmente por Carrol (1961) com o nome “created response surface technique” (CRST). Esse procedimento foi posteriormente utilizado por Box, Davies e Swann (1969), em combinação com o método de Davidson e Kowalik (1966) na resolução de problemas de programação não linear restritos (Mateus e Luna, 1986).

Os métodos de penalidade interna procuram converter um problema restrito em irrestrito, através do acréscimo na função objetivo de funções que penalizem a aproximação dos limites da região viável, de forma que todas as soluções obtidas a partir de uma solução inicial viável, ocorram sempre dentro da região factível. Este método apresenta a vantagem de se trabalhar sempre dentro da região factível, obtendo-se pelo menos uma solução viável, caso ocorra uma interrupção do processo.

Dado um problema de Programação Não Linear restrito:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{X}) \\ & g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ & \mathbf{X} \in \mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (\text{eq. 5.9})$$

sendo  $\mathbf{S}$  é um conjunto não vazio no  $\mathbf{R}^n$ , que representa a região factível, e  $g(\mathbf{X})$  é um vetor função com componentes  $g_1, g_2, \dots, g_s$  que é contínuo em  $\mathbf{S}$ .

Para impedir a saída da região factível pode-se transformar o problema anterior no seguinte.

$$\min \quad f(\mathbf{X}) + u \cdot b(\mathbf{X}) \quad (\text{eq. 5.10})$$

onde  $u$  é um escalar positivo e  $b(\mathbf{X})$  é uma função de penalidade interna não negativa e contínua na região factível, que tende ao infinito à medida que se aproxima dessa região, a partir de um ponto interior.

Uma função que atende a essas características é:

$$b(\mathbf{X}) = - \sum_{i=1}^s \frac{1}{g_i(\mathbf{X})} \quad (\text{eq. 5.11})$$

A função barreira ideal seria aquela que fosse nula para os pontos interiores e infinita nos limites da região viável. Entretanto, esta função seria descontínua e dificultaria o desenvolvimento computacional (Fritzche, 1978).

Dentre os métodos de otimização irrestrita a serem empregados no processo de otimização destacam-se os métodos quase-Newtonianos e o método das direções conjugadas. Os métodos de pesquisa com saltos discretos como Hooke e Jeeves, Rosenbrock, etc., devem ser adaptados à situação, pois em um desses saltos, a solução pode sair da região factível (Mateus e Luna, 1986).

### 5.6.1.2. Métodos de Penalidade Externa

A utilização de funções de penalidade externa a problemas restritos é atribuída a Courant (1962). No entanto a sua aplicação a problemas práticos foi feita por Fiacco e McCormick (1964), (1966), (1967), Zangwill (1967) e Himmelblau (1972), conforme citados por Mateus e Luna (1986).

Os métodos de penalidade procuram, através de funções adicionadas à função objetivo, transformar um problema restrito em um irrestrito. Essas funções geram uma penalidade positiva para pontos em que as restrições não são satisfeitas. As restrições podem ser basicamente de dois tipos: restrições de igualdade e restrições de desigualdades. Isto implica em dois diferentes tipos de penalidade que deverão ser adicionadas à função objetivo.

Seja o problema:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) \\ h(\mathbf{X}) = 0 \\ \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (\text{eq. 5.12})$$

Pode-se transformar este problema restrito em um irrestrito. Sendo  $u$  um escalar positivo, tem-se que:

$$\min f(\mathbf{X}) + u \left[ \sum_{i=1}^s h_i(\mathbf{X}) \right]^2 \quad (\text{eq. 5.13})$$

Nos problemas do tipo:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) \\ g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (\text{eq. 5.14})$$

não se pode utilizar do mesmo artifício empregado anteriormente, pois os pontos em que  $g(\mathbf{X}) < 0$  pertencem à região factível e não podem ser penalizados. Zangwill (1967) propôs então a seguinte função de penalidade:

$$\min f(\mathbf{X}) + u \sum_{i=1}^s \{\text{Max}[0, g_i(\mathbf{X})]\}^2 \quad (\text{eq. 5.15})$$

Se  $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ , ponto viável, então a penalidade será nula, caso contrário, tem-se uma penalidade  $u[g_i(\mathbf{X})]^2$ .

O método de penalidade externas, ao contrário do de barreira, permite trabalhar com pontos fora da região viável durante o processo iterativo. Para valores elevados de  $u$ , as penalidades de violação de qualquer restrição tornam-se grandes, fazendo com que os pontos gerados aproximem-se da região viável, minimizando a função objetivo. Portanto, à medida que  $u \rightarrow \infty$ , a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original. (Mateus e Luna, 1986).

### 5.6.2. Métodos primais

Os métodos primais, também chamados de métodos viáveis, são algoritmos baseados na manipulação do gradiente da função objetivo em cada iteração, levando-se em conta as restrições ativas do problema, no ponto em que está sendo trabalhado. Como nos métodos de penalidade interna, os métodos primais ou viáveis possuem a característica de trabalhar com os pontos que pertencem a região viável ou factível. Por se basear em conceitos extraídos da Programação Linear, através da linearização de funções, e do emprego do método Simplex, os métodos primais se adequam muito bem a problemas com restrições lineares.

### 5.6.2.1. Métodos de Linearização

O princípio geral do método da linearização consiste em substituir a resolução do problema não linear pela resolução de uma sequência de problemas lineares. A técnica mais utilizada por tais métodos é a aproximação tangencial, em que uma função não linear, continuamente diferenciável  $f(\mathbf{X})$ , é substituída na sua vizinhança de  $\mathbf{X}_0$  pela função linear:

$$z(\mathbf{X}_0) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla^T f(\mathbf{X}_0) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (\text{eq. 5.16})$$

esta função corresponde à equação do plano tangente em  $\mathbf{X}_0$  ao gráfico da função  $f(\mathbf{X})$ .

Dois métodos que trabalham com essa metodologia são o método de Frank e Wolfe (1956) e o método de Robinson (1972). O primeiro método é aplicado para casos em que as restrições são compostas por funções lineares, enquanto o segundo trabalha também com restrições compostas por funções do tipo não linear. Será descrito a seguir o método de Frank e Wolfe.

#### 5.5.2.1.1. Método de Frank e Wolfe

Seja o seguinte problema:

Min  $f(\mathbf{X})$

sujeito a  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$  (eq. 5.17)

onde  $f(\mathbf{X})$  é uma função continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{A}$  a matriz dos coeficientes das restrições.



A partir de um ponto inicial viável  $\mathbf{X}_0$ , determina-se o gradiente da função objetivo neste ponto, e procura-se calcular o ponto  $\mathbf{X}_1$ , que seria a solução do problema linear:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(\mathbf{X}_0) + \nabla^T f(\mathbf{X}_0) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \\ & \text{sujeito a } \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{eq. 5.18})$$

Esse processo é repetido até que  $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}| < \varepsilon$

onde  $\varepsilon$  é a tolerância desejada.

#### 5.6.2.2. Método do Gradiente Reduzido

Este método foi desenvolvido por Wolfe (1963), sendo uma adaptação do método simplex, para o caso de uma função objetivo não linear.

Dado o problema:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(\mathbf{X}) \\ & \text{sujeito a } \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{eq. 5.19})$$

onde  $\mathbf{A}(m \times n)$  é a matriz dos componentes e  $\mathbf{b}$  um vetor de  $m$  componentes.

Como no Simplex, o vetor  $\mathbf{X}$  é particionado em dois sub-vetores  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$ , onde  $\mathbf{X}_B$  é o vetor das variáveis básicas ou dependentes, e  $\mathbf{X}_N$  é o vetor das variáveis não-básicas, ou independentes. A matriz dos componentes  $\mathbf{A}$ , também chamada de matriz tecnológica, também é particionada em duas sub-matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{N}$ .

Assim, as restrições do problema podem ser expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}_B + \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_N = \mathbf{b} \quad (\text{eq. 5.20})$$

Com isso é possível exprimir as variáveis básicas como função das não-básicas:

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}_N \quad (\text{eq. 5.21})$$

Para um deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$ , tem-se:

$$d\mathbf{X}_B = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} d\mathbf{X}_N \quad (\text{eq. 5.22})$$

O deslocamento da função objetivo para essa variação de  $d\mathbf{X}$  será:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_B} \right)^T d\mathbf{X}_B + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_N} \right)^T d\mathbf{X}_N \quad (\text{eq. 5.23})$$

Substituindo (5.22) em (5.23) tem-se:

$$df = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_N} \right)^T - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_B} \right)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \right] d\mathbf{X}_N \quad (\text{eq. 5.24})$$

O termo entre colchetes é definido como sendo o gradiente reduzido,  $\mathbf{u}_N^T$ , da função objetivo. Se esta função for linear do tipo:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_N \mathbf{X}_N + \mathbf{C}_B \mathbf{X}_B \quad (\text{eq. 5.25})$$

implicará no seguinte gradiente reduzido:

$$\mathbf{u}_N^T = \mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \quad (\text{eq. 5.26})$$

que é o vetor dos coeficientes de custo reduzido das variáveis não básicas do método Simplex.

A partir da determinação do gradiente reduzido, o problema é resolvido de forma análoga ao método Simplex, sendo no entanto necessário o cálculo das derivadas da função objetivo, com relação às variáveis, básicas e não básicas, a cada iteração.

## Capítulo VI

### Metodologia de Dimensionamento de Redes Malhadas Através da Programação Não Linear

#### 6.1. Introdução

O dimensionamento de redes hidráulicas, utilizando métodos de otimização que levassem em conta o custo da tubulação, foi proposto inicialmente por Karmeli (1968). Para tanto ele utilizou a Programação Linear com o objetivo de achar a solução ótima do problema. O método proposto é baseado em uma seleção especial das variáveis de decisão, onde é utilizado o artifício de se admitir uma série de diâmetros candidatos, dentre os comercialmente disponíveis, para cada trecho, sendo as variáveis de decisão os comprimentos dos segmentos dos trechos, com diâmetros constantes. Desse modo o custo de um determinado trecho  $i$  é dado por:

$$C_i = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} P(D_j)_i ; \quad (\text{eq. 6.1})$$

onde:

$C_i$  é o custo do trecho  $i$  da rede de distribuição;

$l_{ij}$  é o comprimento ocupado pelo diâmetro  $D_j$  no trecho  $i$  considerado;

$P(D_j)_i$  é o preço unitário do tubo de diâmetro  $D_j$  e;

$n_i$  é o número de diâmetros comerciais atribuídos ao trecho  $i$  em questão.

A função objetivo para todos os trechos da rede que será minimizada através da Programação Linear, será dada por:

$$C_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} P(D_j)_i \quad (\text{eq. 6.2})$$

em que  $m$  é o número de trechos da rede de distribuição.

A solução obtida deve estar sujeita às seguintes restrições:

1. As pressões nos nós da rede não devem ser inferiores às requeridas para o bom funcionamento das mesmas, ou seja:

$$Z - \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k \quad (\text{eq. 6.3})$$

onde:

$Z$  é a cota de cabeceira na rede;

$Z_k$  é a cota piezométrica requerida no nó  $k$  e;

$\sum J_c$  é a soma das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó  $k$ .

2. A soma dos comprimentos  $l_{ij}$ , correspondentes aos distintos diâmetros  $D_j$ , atribuídos a cada trecho  $i$ , deve ser igual ao comprimento do trecho:

$$\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = L_i \quad (\text{eq. 6.4})$$

sendo  $L_i$  o comprimento total do trecho  $i$ .

3. Não negatividade dos comprimentos  $l_{ij}$ ;

$$l_{ij} \geq 0 \quad (\text{eq. 6.5})$$

Esse modelo tem sido usado com êxito no dimensionamento de redes ramificadas. Entretanto para redes malhadas, essa metodologia não pode ser aplicada, já que o problema é bem mais complexo. As vazões nas redes ramificadas são fixas, não variando de uma solução para outra, enquanto que nas redes malhadas as vazões nos trechos são dependentes dos diâmetros utilizados - sendo dessa forma variáveis.

Para se contornar esse problema, foi proposto o método GPL (Gradiente da Programação Linear). Este método decompõe a otimização das redes malhadas em duas etapas (Alperovits e Shamir (1977)).

Na primeira etapa, é otimizada a parte referente aos diâmetros da rede, considerando conhecida a distribuição do fluxo no sistema. Para a resolução dessa etapa é adotada a formulação do método da PL proposto por Karmeli (1968), em que os comprimentos dos segmentos com diâmetros constantes no trecho serão as variáveis de decisão, sendo necessário entretanto um novo conjunto de restrições ao problema, para satisfazer à equação de conservação de energia nos anéis, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{z_k} J_i - \sum_{j=1}^{p_k} E_{p_j} = 0 \quad (\text{eq. 6.6})$$

sendo:

$J_i$  a perda de carga no trecho  $i$ ;

$z_k$  o número de trechos no anel  $k$  em questão e;

$E_{p_i}$  a energia de impulsão aplicada na malha ou anel. Na falta de uma fonte externa dessa energia no interior do anel, o valor de  $\sum E_p$  será nulo.

$p_k$  o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel  $k$ .

Na segunda etapa é utilizado um procedimento de mudança sistemática da vazão  $Q$  - que é considerada como um vetor, já que esta pode ter dois sentidos no escoamento - com o objetivo de diminuir o custo da rede, obtido na primeira etapa. O método empregado na mudança de  $Q$  é

baseado na resolução do problema, através de técnicas de programação linear dual, utilizando como variável dual, a folga de pressão que se tem nos nós da rede, onde a diminuição dessa diferença de cota se dá através de uma modificação no vetor vazão (Alperovitz e Shamir, 1977). Esse processo é feito por meio de um gradiente de mudança  $\Delta Q$  que atua em todo anel, de modo que:

$$PL(Q+\Delta Q) < PL(Q) \quad (\text{eq. 6.7})$$

onde PL indica o custo da rede obtido na primeira etapa do método.

A partir dessa formulação básica feita por Alperovitz e Shamir (1977) o método LPG foi modificado por outros pesquisadores [ Quindry et al. (1979), Gouter et al.(1986) Fujiwara et al. (1987), Kessler e Shamir(1989), e Fujiwara et al. (1990) ]. No entanto, em todos esses trabalhos, tem-se adotado sempre a decomposição do problema em duas etapas, como proposto originalmente.

## 6.2. Definição da Metodologia Proposta Nesta Dissertação

Dado que no problema físico o cálculo de redes malhadas se enquadra em um processo matemático não linear, optou-se, nesta pesquisa, pela utilização da metodologia da Programação Não Linear (PNL), para se alcançar o dimensionamento mais econômico para essas redes. O método proposto inicialmente para o dimensionamento econômico da rede, consistiu em utilizar a PNL para *simultaneamente otimizar os comprimentos dos trechos com diâmetros constantes e balancear as vazões*, onde para cada trecho eram utilizados, como em Alperovitz e Shamir (1977), quatro diâmetros “candidatos” dos comercialmente disponíveis. Este método, quando aplicado ao dimensionamento de pequenas redes, no caso uma rede de oito trechos e dois anéis, mostrou-se satisfatório na obtenção do custo mínimo. Entretanto, quando se aumentou o tamanho da rede, a capacidade do modelo de encontrar uma

solução ótima diminuiu sensivelmente, onde, em alguns casos, não foi possível encontrar nenhuma solução viável como resposta. Isso é decorrência de dois fatores: a necessidade de bons valores iniciais para que se possa chegar a um ponto próximo do ótimo (essa é, sem dúvida, uma das principais desvantagens da Programação Não-Linear); e o grande número de variáveis de decisão e de equações do problema – já que para cada trecho haverá cinco variáveis de decisão (quatro comprimentos e uma vazão).

Para se contornar esse problema, optou-se por fazer o dimensionamento econômico da rede em duas etapas. Na primeira etapa, faz-se um pré-dimensionamento, no qual os diâmetros dos tubos são considerados como variáveis de decisão. Em seguida, com os resultados obtidos a partir do pré-dimensionamento, é feito o ajuste da solução inicialmente obtida. Nesta segunda etapa o diâmetro contínuo calculado inicialmente para um determinado trecho é desdobrado em dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente inferior, considerando como variáveis de decisão os comprimentos de seus sub-trechos, pertencentes ao trecho considerado. Utilizando-se este artifício foi possível além de diminuir o número de variáveis de decisão para a problema, encontrar valores iniciais bastante próximos do possível ótimo para a segunda etapa, já que nesta, o ponto de partida para se fazer a otimização é uma solução ótima já obtida. Além dos diâmetros e dos comprimentos dos tubos, as vazões nos trechos também são consideradas como variáveis de decisão, tanto na primeira como na segunda etapa do método.

Para se realizar a otimização utilizou-se o algoritmo GRG2, um código de programação não-linear geral desenvolvido por Lasdon et al. (1984). Este algoritmo está baseado no método dos Gradientes Reduzidos, que foi brevemente descrito no Capítulo V. O GRG2 é utilizado pela ferramenta de otimização Solver da planilha eletrônica Excel<sup>®</sup> - que foi usada na resolução do exemplos propostos nesse trabalho - para se fazer a otimização de problemas não lineares. Além do Excel, esse código está disponível para a maioria dos pacotes de programação não linear, como GINOS, LINOS, GAMS, MatLab, etc.

O dimensionamento das tubulações de redes malhadas pode ser efetuado considerando duas situações. Na primeira, a cota de cabeceira é tida como conhecida, sendo portanto uma constante do problema. No segundo caso a cota piezométrica de cabeceira – que é a soma da cota do terreno com a altura manométrica – é considerada como variável a ser otimizada pelo dimensionamento. Assim, procura-se minimizar a soma dos custos de instalação - tubos, peças, etc, - e de operação – que é representado pela energia de bombeamento. A relação antagônica desses dois custos é mostrada na Figura 6.1 (Gomes, 1997).

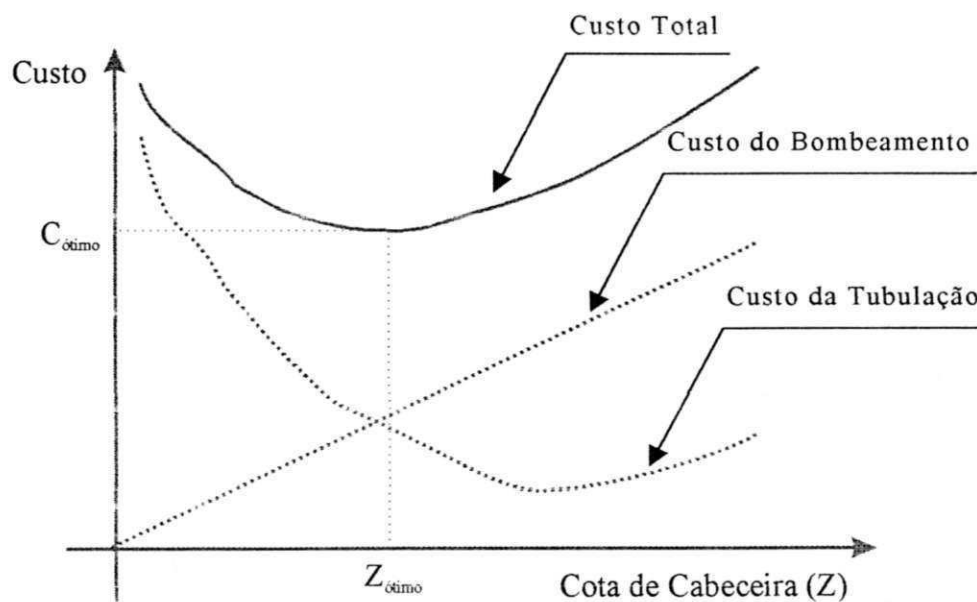


Figura 6.1 – Representação da variação do custo do sistema de abastecimento com a cota de cabeceira

### 6.2.1. Dimensionamento de Redes Malhadas Considerando a Cota de Cabeceira como Conhecida

O dimensionamento das redes malhadas é feito para cota de cabeceira fixa, quando a rede irá partir de um reservatório de distribuição já existente; ou quando o sistema puder ser abastecido exclusivamente por gravidade. Esse tipo de sistema é característico dos locais em que a fonte



de abastecimento está a uma cota suficientemente maior do que o setor a ser abastecido.

### 6.2.1.1. 1ª Etapa

Na primeira fase, a *função objetivo* a ser minimizada será:

$$C(D_i, Q_i) = \sum_{i=1}^m L_i P(D_i) \quad (\text{eq. 6.8})$$

onde:

$C(D_i, Q_i)$  é o custo da rede, em função dos diâmetros e das vazões nos seus trechos;

$L_i$  é o comprimento do trecho  $i$ ;

$P(D_i)$  é a função que relaciona o preço do tubo com o diâmetro;

$m$  é o número de trechos da rede.

Existem diversos trabalhos que procuram relacionar o custo do tubo com o diâmetro, através de uma equação ou fórmula fixa (Silva, 1997). Dentre eles, Holzapfel et al. (1990) considera que os tubos de polietileno e PVC têm seu custo definido por uma equação de potência do tipo:

$$C_j = C_0 (D_j)^{P_0} \quad (\text{eq. 6.9})$$

onde:

$C_j$  é o custo do tubo  $j$  em unidades monetárias por metro;

$D_j$  é o diâmetro do tubo utilizado;

$C_0, P_0$  são coeficientes de regressão.

Oron e Karmeli (1979) definiram, com base em catálogos de preço, que o custo das tubulações pode ser expresso pela seguinte função:

$$C = aD^2 + bD + c \quad (\text{eq. 6.10})$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes de regressão.

Atualmente, a melhor maneira de se estabelecer essa relação de custo é através de programas computacionais de ajustes de curvas, que permitem, facilmente, testar vários tipos de funções.

A equação (6.8), com o critério de custo mínimo, representa a função objetivo do método proposto, cujas variáveis de decisão são os diâmetros contínuos  $D_i$  e as vazões  $Q_i$  de cada trecho  $i$ .

A função objetivo está sujeita a um grupo de cinco restrições, que são derivadas do tipo de problema do dimensionamento de redes em questão e da peculiaridade do modelo não linear.

#### 1. Pressões mínimas nos nós

As pressões nos nós da rede não devem ser inferiores às requeridas ( $Z_k$ ), de modo a garantir o abastecimento com qualidade ao usuário final:

$$Z - \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k \quad (\text{eq. 6.11})$$

$Z$  é a cota de cabeceira na rede;

$Z_k$  é a cota piezométrica requerida no nó  $k$  e;

$\sum J_c$  é a soma das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó  $k$ .

#### 2. Diâmetros mínimos e máximos

Os diâmetros  $D_i$  devem ser maiores que um diâmetro mínimo ( $D_{\min}$ ) adotado e menores que um diâmetro máximo estimado ( $D_{\max}$ ).

$$D_{\min} \leq D_i \leq D_{\max} \quad (\text{eq. 6.12})$$

3. Conservação de energia no anel

$$\sum_{i=1}^{z_k} J_i - \sum_{j=1}^{p_k} E p_j = 0 \quad (\text{eq. 6.13})$$

em que:

$J_i$  a perda de carga no trecho  $i$ ;

$z_k$  o número de trechos no anel  $k$  em questão e;

$E p_i$  a energia de impulsão aplicada na malha ou anel. Na falta de uma fonte externa dessa energia no interior do anel, o valor de  $\sum E p$  será nulo.

$p_k$  o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel  $k$ .

4. Continuidade nos nós

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra_i} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai_j} = d_n \quad (\text{eq. 6.14})$$

sendo:

$Q_{entra(i)}$  as vazões dos trechos  $i$  que chegam ao nó  $n$ ;

$Q_{sai(j)}$  as vazões dos trechos  $j$  que deixam o nó  $n$ ;

$d_n$  a demanda concentrada nesse nó;

$k_n$  o número de trechos com vazões chegando ao nó  $n$ ;

$q_n$  o número de trechos com vazões saindo do nó  $n$ .

5. Velocidade máxima admissível.

A rede deve funcionar com velocidades de fluxo limitadas, de forma a se evitar a ocorrência de golpes de aríete, vibrações, como também um desgaste prematuro do sistema.

$$V_i \leq V_{\max} \quad (\text{eq. 6.15})$$

onde:

$V_i$  é a velocidade média no trecho  $i$ ;

$V_{\max}$  é a velocidade máxima admissível.

### 6.2.1.2. 2ª Etapa

A partir dos resultados obtidos no pré-dimensionamento, executa-se a segunda etapa do método. Assim, para cada trecho, o diâmetro contínuo, obtido na primeira etapa, é desdobrado em dois diâmetros comerciais, sendo um o imediatamente superior, e o outro o imediatamente inferior àquele encontrado. Dessa forma, a função objetivo a ser minimizada será:

$$C(l_{ij}, Q_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^2 l_{ij} P(D_j)_i \quad (\text{eq. 6.17})$$

em que:

$C(l_{ij}, Q_i)$  é o custo total da rede de distribuição;

$l_{ij}$  é o comprimento ocupado pelo diâmetro  $D_j$  no trecho  $i$  considerado;

$P(D_j)_i$  é o preço unitário do tubo de diâmetro  $D_j$  e;

$m$  é o número de trechos da rede.

A função objetivo (eq. 6.17), tem como variáveis de decisão os comprimentos dos subtrechos  $l_{ij}$ , e as vazões  $Q_i$ . As restrições 1, 3, 4 e 5 da etapa inicial também devem ser satisfeitas nesta fase. Além dessas, a solução encontrada deve satisfazer a mais dois grupos de restrições, que são:

#### 6. Comprimento dos subtrechos

$$\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = L_i \quad (\text{eq. 6.18})$$

7. Não negatividade dos comprimentos dos sub-trechos

$$l_{ij} \geq 0 \quad (\text{eq. 6.19})$$

**6.2.2. Dimensionamento de Redes Malhadas Considerando a Cota de Cabeceira como Variável**

Para o dimensionamento econômico de uma rede, considerando a cota de cabeceira como variável, se faz necessário acrescentar à função objetivo um termo que represente o custo da energia de bombeamento em função dessa cota de cabeceira.

Os gastos com a implantação da rede, representados neste caso pelos tubos, são denominados gastos fixos, ou de investimento, enquanto que os gastos que incidem ao longo da vida útil do sistema são considerados variáveis. Como esses gastos incidem em tempos diferentes, faz-se necessário converter, financeiramente, os gastos variáveis em gastos fixos, ou os fixos em variáveis. Esta última alternativa foi a forma adotada neste trabalho. Para isso, é preciso amortizar o custo de investimento, mediante a introdução, na função objetivo, de um coeficiente que transforme os custos fixos, em custos amortizados anualmente (Gomes, 1997).

Como no caso em que se considera a cota de cabeceira como fixa, o problema a ser otimizado é dividido em duas etapas.

*6.2.2.1. 1ª Etapa*

A função objetivo que será minimizada é expressa por:

$$C(D_i, Q_i, Z) = \sum_{i=1}^m L_i P(D_i) a + C_h H \quad (\text{eq. 6.20})$$

onde:

$Z$  é a cota de cabeceira da rede, que é a soma da altura manométrica de bombeamento com a cota do terreno no local.

$a$  é o fator, ou coeficiente, de amortização anual do custo das tubulações;

$C_h$  é o custo de operação da estação de bombeamento por unidade de altura manométrica e;

$H$  é a altura manométrica.

De acordo com os conceitos básicos de matemática financeira, o valor da amortização “ $a$ ” é calculado por:

$$a = \frac{(1+r)^T r}{(1+r)^T - 1} \quad (\text{eq. 6.21})$$

em que:

$r$  é a taxa de juros anuais, e;

$T$  é o período de amortização (em anos), que normalmente se considera como sendo igual à vida útil da instalação.

De acordo com a equação básica de potência de conjuntos elevatórios, o custo de operação da estação de bombeamento,  $C_h$ , é expresso por:

$$C_h = \frac{Q}{101,96 \eta} n p; \quad (\text{eq. 6.22})$$

sendo:

$Q$  a vazão em l/s;

$\eta$  o rendimento do conjunto motor-bomba;

$n$  o número de horas anual de utilização da estação de bombeamento,

e;

$p$  o preço do kWh.

As restrições para o caso de cota piezométrica fixa são as mesmas aplicadas para essa situação.

#### 6.2.2.2. 2ª Etapa

De forma semelhante ao que foi feito no caso anterior, em que a cota piezométrica de cabeceira é tida como fixa, desdobra-se o diâmetro contínuo obtido na primeira etapa, em dois diâmetros comercialmente disponíveis. Assim sendo, a função objetivo a ser minimizada será:

$$C(l_{ij}, Q_i, H) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^2 l_{ij} P(D_j)_i + C_h H; \quad (\text{eq. 6.23})$$

Essa função objetivo é submetida às mesmas restrições da situação em que a cota piezométrica de cabeceira é fixa.

## Capítulo VII

### Resultados e Discussões

#### 7.1. Exemplos de Aplicação

Para a aplicação da metodologia apresentada no Capítulo VI, foram escolhidos dois exemplos encontrados na literatura, em que o dimensionamento já havia sido feito utilizando outras metodologias de otimização. Optou-se pela aplicação desses exemplos, para que se pudesse comparar os avanços alcançados nesta pesquisa, em relação à outras metodologias já desenvolvidas.

O primeiro exemplo adotado para a demonstração do modelo, trata de uma rede fictícia proposta por Alperovits e Shamir (1977) e utilizada posteriormente por Quidry et al. (1979), Gouter et al. (1986), Kessler e Shamir (1989), Eiger et al. (1994) e Savic e Walters (1997), para a comparação de suas metodologias. Neste exemplo, o dimensionamento será feito considerando apenas a situação em que a cota de cabeceira é tida como fixa.

A rede a ser dimensionada no segundo exemplo pertence a um projeto real, dimensionado pela CAGEPA, em 1982, para abastecer o bairro do Bessa, na cidade de João Pessoa-PB. Esse sistema foi otimizado por Leal (1995) através de duas metodologias: Granados (Gomes, 1997) e WADISO (Gessler e Walski, 1995). Neste exemplo serão utilizadas as duas situações, em que a cota de cabeceira é fixa, e quando a mesma é considerada como uma variável a ser otimizada.

O primeiro exemplo será apresentado detalhadamente, enquanto que o segundo exemplo, que é semelhante ao primeiro, porém com uma quantidade de



variáveis e equações maior, será apresentado de forma resumida. Em ambos OS exemplos adotou-se os valores de velocidade máxima admissível na tubulação recomendados por Granados (1990).

**7.1.1. Exemplo 1**

A rede considerada neste exemplo (Figura 7.1), é formada por oito trechos, distribuídos em dois anéis. Ela é abastecida por gravidade a partir de um reservatório que possui carga constante, a uma cota de 210 m. Cada nó deve ter uma pressão mínima requerida igual a 30 m, sendo que todos os trechos possuem um comprimento igual a 1.000 m . Os dados relacionados com as características da rede, demandas e cotas de cada nó estão sintetizados na Tabela 7.1. Os dados referentes aos custos dos tubos (em umt/m)\*, que tem coeficiente de perda de Hazen-Williams igual a 130, com a mesma classe de pressão, são apresentados na Tabela 7.2.

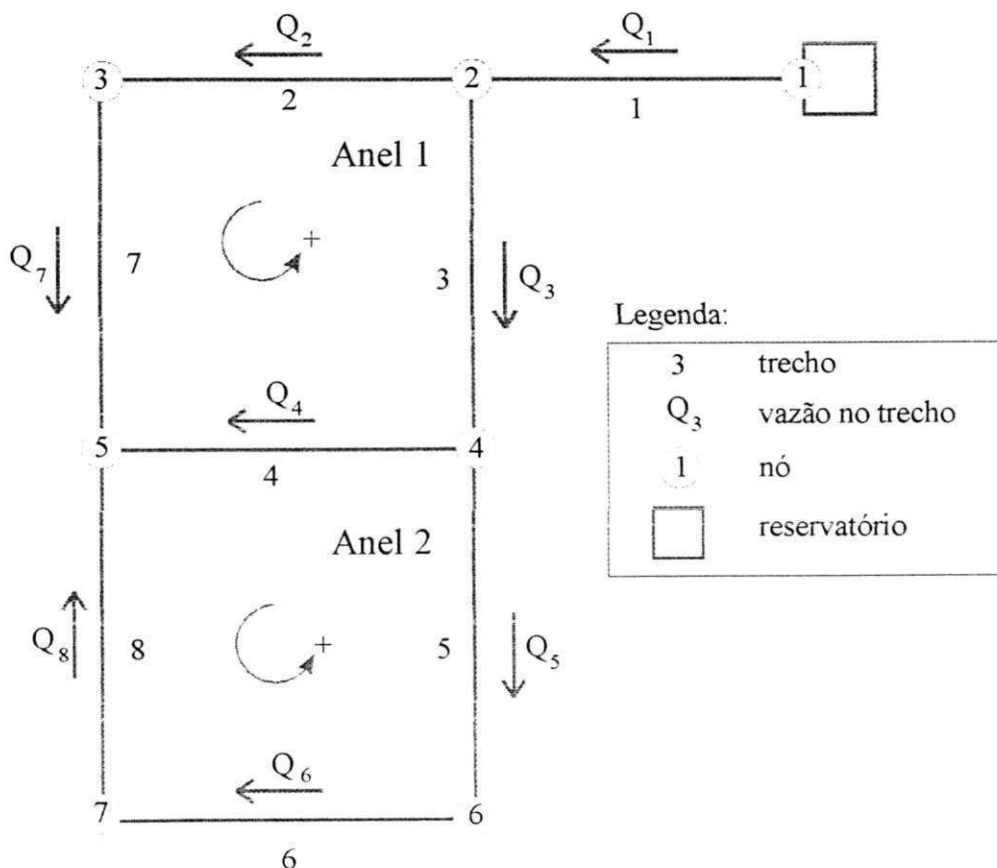


Figura 7.1 - Esquema da rede do exemplo 1

Nó	Demanda (m <sup>3</sup> /h)	Elevação (m)
1 (reservatório)	-1.200	210
2	100	150
3	100	160
4	120	155
5	270	150
6	330	165
7	200	160

Tabela 7.1 - Dados de demanda e elevação dos nós da rede

Diâmetro (pol)	Custo (umt/m)*	Diâmetro (pol)	Custo (umt/m)*
1	2	12	50
2	5	14	60
3	8	16	90
4	11	18	130
6	16	20	170
8	23	22	300
10	32	24	550

\* Unidades monetárias por metro

Tabela 7.2 - Custos dos tubos segundo seus diâmetros

A equação utilizada para o cálculo das perdas de carga nos trechos foi a de Hazen-Williams (eq. 7.1),

$$h_f = \omega \left( \frac{Q}{C} \right)^a \frac{L}{D^b} \quad (\text{eq. 7.1})$$

Os autores referidos neste trabalho empregaram diferentes coeficientes  $\omega$  para essa equação, que são apresentados na Tabela 7.3. Sendo assim, optou-se por utilizar os dois grupos extremos de coeficientes, neste caso os utilizados por Fujiwara e Khang (1990) e Quidry et al. (1981), como sendo os que, respectivamente, produzem as menores e maiores perdas de carga.

Autores	Coeficientes		
	a	b	$\omega$
Alperovits e Shamir (1977)	1,852	4,87	10,6792
Alperovits e Shamir (1977)	1,852	4,87	10,7109
Quidry et al. (1981)	1,852	4,8704	10,9031
Ormsbee e Wood (1986)	1,852	4,87	10,6866
Gouter et al. (1986)	1,852	4,8704	10,6658
Kessler e Shamir (1989)	1,852	4,8704	10,6792
Fujiwara e Khang (1990)	1,852	4,8704	10,5088
Murphy e Simpson (1992)	1,852	4,8704	10,6744
Eiger et al. (1994)	1,852	4,8704	10,6792
Simpsosn et. Al (1994)	1,852	4,8704	10,6750

Tabela 7.3 – Coeficientes da equação de Hazen-Williams utilizados por diferentes autores para diâmetros em metros e vazões em m<sup>3</sup>/s. (Fonte: Savic e Walters, 1997)

O passo inicial para a aplicação do método consiste na definição da função que relaciona o preço do tubo com o diâmetro. Para isso foi utilizado um programa de regressão da Planilha Excel. A partir dos dados da Tabela 7.2, projetou-se a melhor curva de ajuste (Figura 2), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \text{Custo (D)} = & 2,24 \times 10^{-13} D^6 - 3,27 \times 10^{-10} D^5 + 1,81 \times 10^{-7} D^4 \\ & - 4,61 \times 10^{-5} D^3 + 5,53 \times 10^{-3} D^2 - 1,71 \times 10^{-1} D + 3,81 \end{aligned} \quad (\text{eq. 7.2})$$

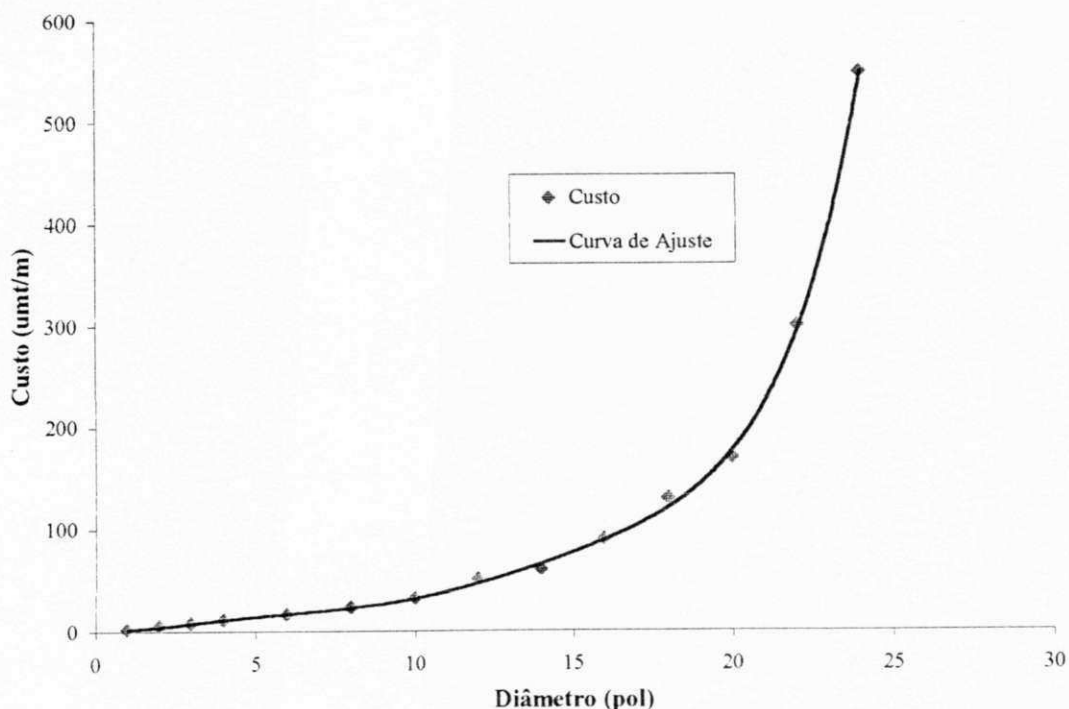


Figura 7.2 – Curva de ajuste Custo do Tubo X Diâmetro dos valores da Tabela 7.2

### 7.1.1.1. 1ª Etapa

De posse da expressão que relaciona o custo da tubulação com o preço, tem-se a função objetivo, que será:

$$C(D_i, Q_i) = 1.000 P(D_1) + 1.000 P(D_2) + 1.000 P(D_3) + 1.000 P(D_4) \quad (\text{eq. 7.3}) \\ + 1.000 P(D_5) + 1.000 P(D_6) + 1.000 P(D_7) + 1.000 P(D_8)$$

Rearranjando os termos da equação tem-se:

$$C(D_i, Q_i) = 1.000 [(2,24 \times 10^{-13} D_1^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_1^5 + 1,81 \times 10^{-7} D_1^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_1^3 + 5,53 \times 10^{-3} D_1^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_1 + 3,81) + (2,24 \times 10^{-13} D_2^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_2^5 + 1,81 \times 10^{-7} D_2^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_2^3 + 5,53 \times 10^{-3} D_2^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_2 + 3,81) + \dots + (2,24 \times 10^{-13} D_8^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_8^5 + 1,81 \times 10^{-7} D_8^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_8^3 + 5,53 \times 10^{-3} D_8^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_8 + 3,81)]$$

Essa função estará sujeita às seguintes restrições:

#### 1. Pressão Mínima nos Nós

As restrições de conservação da energia garantem que, independente do caminho escolhido entre os trechos, a queda de pressão será a mesma. Ao todo, serão seis equações de restrição de pressão, uma para cada nó, excetuando-se o nó 1. Para o nó 4, por exemplo, poder-se-ia escolher qualquer caminho que partisse do nó 1 (reservatório), que tem o nível da água na cota 210, até aquele nó que está à cota 155. Entretanto, o caminho escolhido deve ser o mais curto, de modo a diminuir o tamanho da equação de restrição (na resolução adotou-se o caminho através dos trechos 1 e 3). Assim, as equações de restrição serão:

$$\text{Nó 2: } J_1 \leq (210 - 150) - 30 \quad (\text{eq. 7.5a})$$

$$\text{Nó 3: } J_1 + J_2 \leq (210 - 160) - 30 \quad (\text{eq. 7.5b})$$

$$\text{Nó 4: } J_1 + J_3 \leq (210 - 155) - 30 \quad (\text{eq. 7.5c})$$

$$\text{Nó 5: } J_1 + J_3 + J_4 \leq (210 - 150) - 30 \quad (\text{eq. 7.5d})$$

$$\text{Nó 6: } J_1 + J_3 + J_5 \leq (210 - 165) - 30 \quad (\text{eq. 7.5e})$$

$$\text{Nó 7: } J_1 + J_3 + J_5 + J_6 \leq (210 - 160) - 30 \quad (\text{eq. 7.5f})$$

## 2. Diâmetros máximos e mínimos

Todos os diâmetros ( $D_1, D_2, \dots, D_8$ ) devem ser maiores do que 1 pol e menores do que 24 pol. Sendo 8 o número de trechos na rede, e havendo 2 inequações para cada trecho, o número de restrições, quanto ao diâmetro, será igual a 16. Ou seja:

$$D_i \geq 1 \quad p/ i=1,2,\dots,8 \quad (\text{eq. 7.6})$$

$$D_i \leq 24 \quad p/ i=1,2,\dots,8 \quad (\text{eq. 7.7})$$

## 3. Conservação da Energia nos Anéis

Como não existem estações de bombeamento dentro da rede, essa restrição deve garantir que a soma algébrica das perdas de carga dos trechos de um anel seja nula. A rede deste exemplo é composta por dois anéis, o que proporcionará duas equações de restrição. Serão consideradas como positivas as perdas em que o sentido da vazão é o mesmo que o arbitrado para o anel (no caso contrário as perdas serão negativas). Dessa forma, tem-se:

$$\text{Anel 1: } J_2 + J_7 - J_3 - J_4 = 0 \quad (\text{eq. 7.8a})$$

$$\text{Anel 2: } J_4 - J_5 - J_6 - J_8 = 0 \quad (\text{eq. 7.8b})$$

## 4. Continuidade nos nós

A soma algébrica das vazões nos nós deve ser igual a zero, ou seja, as vazões que entram devem ser iguais às que saem. Como ao todo são 7 nós, serão também 7 equações de restrição.

$$\text{Nó 1: } Q_1 = 1120 \quad (\text{eq. 7.9a})$$

$$\text{Nó 2: } Q_1 - Q_2 - Q_3 = 100 \quad (\text{eq. 7.9b})$$

$$\text{Nó 3: } Q_2 - Q_7 = 100 \quad (\text{eq. 7.9c})$$

$$\text{Nó 4: } Q_3 - Q_4 - Q_5 = 120 \quad (\text{eq. 7.9d})$$

$$\text{Nó 5: } Q_4 + Q_7 + Q_8 = 270 \quad (\text{eq. 7.9e})$$

$$\text{Nó 6: } Q_5 - Q_6 = 330 \quad (\text{eq. 7.9f})$$

$$\text{Nó 7: } Q_6 - Q_7 = 220 \quad (\text{eq. 7.9g})$$

### 5. Velocidade Máxima Admissível

A velocidade máxima em um trecho  $i$  é dada por:

$$V_i = \frac{Q_i}{\frac{\pi D_i^2}{4}} \quad (\text{eq. 7.9})$$

Assim, aproximando tem-se que:

$$V_i = 1,273 \frac{Q_i}{D_i^2}$$

Sendo 8 o número de trechos ter-se-á também 8 restrições de velocidade nos trechos. Como não se conhece previamente os diâmetros dos trechos, e conseqüentemente a sua velocidade máxima adotada por Granados (1990), empregou-se a fórmula que relaciona as velocidades nos trechos para diâmetros superiores a 1.000 mm,  $2+D(m)$ . Isso pôde ser feito nesta fase pois ela serve apenas para se determinar uma faixa dos diâmetros e vazões que serão adotadas para os trechos, não incorrendo assim em um erro de projeto.

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1}{D_1^2} \leq 2 + D_1 \quad (\text{eq. 7.9a})$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2}{D_2^2} \leq 2 + D_2 \quad (\text{eq. 7.9b})$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3}{D_3^2} \leq 2 + D_3 \quad (\text{eq. 7.9c})$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4}{D_4^2} \leq 2 + D_4 \quad (\text{eq. 7.9d})$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5}{D_5^2} \leq 2 + D_5 \quad (\text{eq. 7.9e})$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6}{D_6^2} \leq 2 + D_6 \quad (\text{eq. 7.9f})$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7}{D_7^2} \leq 2 + D_7 \quad (\text{eq. 7.9g})$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8}{D_8^2} \leq 2 + D_8 \quad (\text{eq. 7.9h})$$

Montadas as equações procede-se a otimização, utilizando o algoritmo GRG2 disponível na ferramenta Solver da Planilha Excel<sup>®</sup>. Os resultados da otimização dessa etapa são mostrados nas Tabela 7.6a e 7.6b, para o coeficiente  $\omega$ , da equação de Hazen-Williams (eq.7.1), igual a 10,5088; e nas Tabelas 7.7a e 7.7b, para  $\omega$  igual 10,9031.

Trecho	Vazão (m <sup>3</sup> /h)	Vazão (l/s)	Diâmetro (pol)	Diâmetro (mm)	Perda de Carga (mca)	Velocidade (m/s)
1	1120,0	311,1	18,0	456,0	6,735	1,90
2	368,2	102,3	10,3	260,9	13,021	1,91
3	651,8	181,1	15,9	404,7	4,419	1,41
4	1,1	0,3	1,0	26,5	18,846	0,55
5	530,7	147,4	15,2	385,1	3,846	1,27
6	200,7	55,7	9,9	252,1	5,000	1,12
7	268,2	74,5	9,6	243,0	10,243	1,61
8	0,7	0,2	1,0	25,4	10,000	0,38
Custo Total (umt)					388.604,00	

Tabela 7.6a – Resultados da otimização da primeira etapa com  $\omega = 10,5088$

Nó	Altura Piezométrica (m)	Cota (m)	Pressão Disponível (mca)
1	210,0	210	210
2	203,3	150	53,26
3	190,2	160	30,24
4	198,8	155	43,85
5	180,0	150	30,00
6	195,0	165	30,00
7	190,0	160	30,00

Tabela 7.6b – Resultados da otimização da primeira etapa com  $\omega = 10,5088$

Trecho	Vazão (m <sup>3</sup> /h)	Vazão (l/s)	Diâmetro (pol)	Diâmetro (mm)	Perda de Carga (mca)	Velocidade (m/s)
1	1120,0	458,9	18,1	458,9	6,78	1,88
2	368,2	263,0	10,4	263,0	12,99	1,88
3	651,8	408,2	16,1	408,2	4,40	1,38
4	1,1	26,8	1,0	26,0	18,82	0,55
5	530,7	388,6	15,3	388,7	3,82	1,24
6	200,7	254,1	10,0	254,1	5,00	1,10
7	268,2	244,9	9,6	244,9	10,23	1,58
8	0,7	25,4	1,0	26,0	10,00	0,37
Custo Total (umt)					395.777,52	

Tabela 7.7a - Resultados da otimização da primeira etapa com  $\omega = 10,9031$ 

Nó	Altura Piezométrica (m)	Cota (m)	Pressão Disponível (mca)
1	210	210	210
2	203,22	150	53,2
3	190,23	160	30,2
4	198,82	155	43,8
5	180,00	150	30,0
6	195,00	165	30,0
7	190,00	160	30,0

Tabela 7.7b - Resultados da otimização da primeira etapa com  $\omega = 10,9031$ 

### 7.1.1.2. 2ª Etapa

Com os resultados dos diâmetros e vazões obtidos na primeira etapa do dimensionamento, executa-se um novo processo de otimização, considerando como variáveis de decisão as vazões e os comprimentos dos sub-trechos. Para cada trecho serão adotados dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente inferior ao obtido na etapa anterior. A Tabela 7.8 mostra os diâmetros comercialmente utilizados.



Trecho	$\omega = 10,5033$			$\omega = 10,9031$		
	Diâmetro Calculado (pol)	Diâmetros Adotados (pol)	Diâmetros Adotados (mm)	Diâmetro Calculado (pol)	Diâmetros Adotados (pol)	Diâmetros Adotados (mm)
1	18	18	457,2	18,1	18	457,2
		20	508		20	508
2	10,3	10	254	10,4	10	254
		12	304,8		12	304,8
3	15,9	14	355,6	16	14	355,6
		16	406,4		18	457,2
4	1	1	25,4	1	1	25,4
		2	50,8		2	50,8
5	15,2	14	355,6	15	14	355,6
		16	406,4		16	406,4
6	9,9	8	203,2	10	8	203,2
		10	254		10	254
7	9,6	8	203,2	9,6	8	203,2
		10	254		10	254
8	1	1	25,4	1	1	25,4
		2	50,8		2	50,8

Tabela 7.8 – Diâmetros comerciais utilizados na segunda etapa

Assim a função objetivo que representa o custo total da rede, para  $\omega = 10,5033$ , será dada por:

$$C(l_{ij}, Q_i) = \{[l_{1,18} P(18) + l_{1,20} P(20)] + [l_{2,10} P(10) + l_{2,12} P(12)] + [l_{3,14} P(14) + l_{3,16} P(16)] + [l_{4,1} P(1) + l_{4,2} P(2)] + [l_{5,14} P(14) + l_{5,16} P(16)] + [l_{6,8} P(8) + l_{6,10} P(10)] + [l_{7,8} P(8) + l_{7,10} P(10)] + [l_{8,1} P(1) + l_{8,2} P(2)]\} \quad (\text{eq. 7.10})$$

Substituindo os valores dos preços dos tubos (Tabela 7.2), tem-se:

$$C(l_{ij}, Q_i) = \{[130 l_{1,18} + 170 l_{1,20}] + [32 l_{2,10} + 50 l_{2,12}] + [60 l_{3,14} + 90 l_{3,16}] + [2 l_{4,1} + 5 l_{4,2}] + [60 l_{5,14} + 90 l_{5,16}] + [23 l_{6,8} + 32 l_{6,10} P(10)] + [23 l_{7,8} + 32 l_{7,10}] + [2 l_{8,1} + 5 l_{8,2}]\} \quad (\text{eq. 7.11})$$

Nesta etapa a perda de carga em um trecho será igual a soma das perdas dos sub-trechos com diâmetros diferentes. Utilizam-se os diâmetros em *mm*, obtidos diretamente da Tabela 7.8, para o cálculo dessas perdas. Assim, para o trecho 2, a equação de perda de carga com  $\omega=10,5033$ , será:

$$J_2 = J_{2,10} + J_{2,12} \quad (\text{eq. 7.12})$$

ou seja:

$$J_2 = 10,5033 \left( \frac{Q_2}{130} \right)^{1,852} \frac{I_{2,10}}{0,254^{4,704}} + 10,5033 \left( \frac{Q_2}{130} \right)^{1,852} \frac{I_{2,12}}{0,3048^{4,704}} \quad (\text{eq. 7.13})$$

A função objetivo está sujeita às seguintes restrições:

#### 1. Pressão mínima nos nós

$$\text{Nó 2: } (J_{1,18} + J_{1,20}) \leq (210 - 150) - 30 \quad (\text{eq. 7.14a})$$

$$\text{Nó 3: } (J_{1,18} + J_{1,20}) + (J_{2,10} + J_{2,12}) \leq (210 - 160) - 30 \quad (\text{eq. 7.14b})$$

$$\text{Nó 4: } (J_{1,18} + J_{1,20}) + (J_{3,14} + J_{3,16}) \leq (210 - 155) - 30 \quad (\text{eq. 7.14c})$$

$$\text{Nó 5: } (J_{1,18} + J_{1,20}) + (J_{3,14} + J_{3,16}) + (J_{4,1} + J_{4,2}) \leq (210 - 150) - 30 \quad (\text{eq. 7.14d})$$

$$\text{Nó 6: } (J_{1,18} + J_{1,20}) + (J_{3,14} + J_{3,16}) + (J_{5,14} + J_{5,16}) \leq (210 - 165) - 30 \quad (\text{eq. 7.14e})$$

$$\text{Nó 7: } (J_{1,18} + J_{1,20}) + (J_{3,14} + J_{3,16}) + (J_{5,14} + J_{5,16}) + (J_{6,8} + J_{6,10}) \leq (210 - 160) - 30 \quad (\text{eq. 7.15f})$$

#### 3. Conservação de energia nos anéis

$$\text{Anel 1: } (J_{2,10} + J_{2,12}) + (J_{7,8} + J_{7,10}) - (J_{3,14} + J_{3,16}) - (J_{4,1} + J_{4,2}) = 0 \quad (\text{eq. 7.16a})$$

$$\text{Anel 2: } (J_{4,1} + J_{4,2}) - (J_{5,14} + J_{5,16}) - (J_{6,8} + J_{6,10}) - (J_{8,1} + J_{8,2}) = 0 \quad (\text{eq. 7.16b})$$

#### 4. Continuidade nos nós

As equações de continuidade nos nós são idênticas às utilizadas na 1ª etapa do método.

#### 5. Velocidade máxima admissível

Como nesta etapa os diâmetros utilizados são os comercialmente disponíveis, e portanto previamente conhecidos para cada trecho, pode-se

utilizar diretamente os valores de velocidade máxima admissível recomendados por Granados (1990), que se encontram na Tabela 3.1. Para cada trecho existirão duas restrições de velocidade, havendo assim dezesseis inequações de restrição de velocidade nesta etapa.

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1}{D_{1,18}^2} \leq 2,4 \text{ e } 1,273 \frac{Q_1}{D_{1,20}^2} \leq 2,5 \quad (\text{eq. 7.17a})$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2}{D_{2,10}^2} \leq 2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_2}{D_{2,12}^2} \leq 2,1 \quad (\text{eq. 7.17b})$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3}{D_{3,14}^2} \leq 2,2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_3}{D_{3,16}^2} \leq 2,3 \quad (\text{eq. 7.17c})$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4}{D_{4,1}^2} \leq 2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_4}{D_{4,2}^2} \leq 2 \quad (\text{eq. 7.17d})$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5}{D_{5,14}^2} \leq 2,2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_5}{D_{5,16}^2} \leq 2,3 \quad (\text{eq. 7.17e})$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6}{D_{6,8}^2} \leq 2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_6}{D_{6,10}^2} \leq 2 \quad (\text{eq. 7.17f})$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7}{D_{7,8}^2} \leq 2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_7}{D_{7,10}^2} \leq 2 \quad (\text{eq. 7.17g})$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8}{D_{8,1}^2} \leq 2 \text{ e } 1,273 \frac{Q_8}{D_{8,2}^2} \leq 2 \quad (\text{eq. 7.17h})$$

## 6. Comprimento dos trechos

A soma dos comprimentos dos sub-trechos, deve ser igual ao comprimento de cada trecho. Sendo o número de trechos igual a oito, haverá oito equações de restrição deste tipo.

$$\text{Trecho 1: } l_{1,18} + l_{1,20} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18a})$$

$$\text{Trecho 2: } l_{2,10} + l_{2,12} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18b})$$

$$\text{Trecho 3: } l_{3,14} + l_{3,16} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18c})$$

$$\text{Trecho 4: } l_{4,1} + l_{4,2} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18d})$$

$$\text{Trecho 5: } l_{5,14} + l_{5,16} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18e})$$

$$\text{Trecho 6: } l_{6,8} + l_{6,10} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18f})$$

$$\text{Trecho 7: } l_{7,8} + l_{7,10} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18g})$$

$$\text{Trecho 8: } l_{8,1} + l_{8,2} = 1.000 \quad (\text{eq. 7.18h})$$

### 7. Não negatividade dos comprimentos dos sub-trechos

Todos os comprimentos dos sub-trechos devem ser maiores ou superiores a zero. Havendo oito trechos, com dois sub-trechos cada um, têm-se um total de desesseis inequações de restrições.

$$\text{Trecho 1: } l_{1,18} \geq 0; l_{1,20} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19a})$$

$$\text{Trecho 2: } l_{2,10} \geq 0; l_{2,12} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19b})$$

$$\text{Trecho 3: } l_{3,14} \geq 0; l_{3,16} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19c})$$

$$\text{Trecho 4: } l_{4,1} \geq 0; l_{4,2} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19d})$$

$$\text{Trecho 5: } l_{5,14} \geq 0; l_{5,16} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19e})$$

$$\text{Trecho 6: } l_{6,8} \geq 0; l_{6,10} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19f})$$

$$\text{Trecho 7: } l_{7,8} \geq 0; l_{7,10} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19g})$$

$$\text{Trecho 8: } l_{8,1} \geq 0; l_{8,2} \geq 0 \quad (\text{eq. 7.19h})$$

Terminado o processo de elaboração das equações, faz-se a otimização do problema. Os resultados da otimização são mostrados nas Tabelas 7.9a e 7.9b e Tabelas 7.10a e 7.10b, para os coeficientes  $\omega$  iguais a 10,5081 e 10,9031 respectivamente. A otimização apresentou como resultados alguns trechos compostos por um conjunto de dois diâmetros, que é normal, visto que o ótimo em um trecho pode ser formado por um grupo de até dois diâmetros (Granados, 1990).

As Tabelas 7.11 e 7.12 fazem uma comparação entre as diferentes metodologias empregadas para a otimização dessa rede. Onde pode se verificar que neste exemplo, o método apresentou uma economia que varia entre 0,02 a 24%, quando comparado a outras metodologias de otimização. Com relação aos diferentes coeficientes de perda de carga da equação de Hazen-Williams, para um acréscimo de cerca de 3,1% no coeficiente de perda de carga, houve um acréscimo no custo de apenas 1,9% no custo final da rede.

Trecho	Vazão (m <sup>3</sup> /h)	Diâmetro (pol)	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Perda no trecho	Velocidade (m/s)
1	1120,00	18	457,2	1000	6,900	1,9
		20	508,0	0		0,0
2	368,43	10	254,0	746	13,100	2,0
		12	304,8	254		1,4
3	651,56	14	355,6	1000	4,491	1,4
		16	406,4	0		0,0
4	0,94	1	25,4	1000	18,609	0,5
		2	50,8	0		0,0
5	530,63	14	355,6	191	3,607	1,5
		16	406,4	809		1,1
6	200,63	8	203,2	0	5,003	0,0
		10	254,0	1000		1,1
7	268,43	8	203,2	85	10,000	0,0
		10	254,0	915		1,5
8	0,63	1	25,4	1000	10,000	0,3
		2	50,8	0		0,0
Custo Total (umt)					401.159,17	

Tabela 7.9a – Resultados da otimização da segunda etapa com  $\omega=10,5088$

Nó	Altura Piezométrica (m)	Cota (m)	Pressão Disponível (mca)
1	210,0	210	
2	203,3	150	53,35
3	190,0	160	30,00
4	199,0	155	44,02
5	181,7	150	31,74
6	195,0	165	30,00
7	190,0	160	30,00

Tabela 7.9b – Resultados da otimização da segunda etapa com  $\omega=10,5088$

Trecho	Vazão (m <sup>3</sup> /h)	Diâmetro (pol)	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Perda no trecho	Velocidade (m/s)
1	1120,00	18	457,2	1.000	6,900	1,9
		20	508,0	-	-	-
2	368,36	10	254,0	746	13,100	2,0
		12	304,8	254	-	1,4
3	651,64	16	406,4	1.000	4,491	1,4
		18	457,2	-	-	-
4	0,96	1	25,4	1.000	18,609	0,5
		2	50,8	-	-	-
5	530,68	14	355,6	191	3,607	1,5
		16	406,4	809	-	1,1
6	200,68	8	203,2	-	5,003	-
		10	254,0	1.000	-	1,1
7	268,36	8	203,2	85	10,000	-
		10	254,0	915	-	1,5
8	0,68	1	25,4	1.000	10,000	0,3
		2	50,8	-	-	0
Custo Total (umt)					408.825,23	

Tabela 7.10a – Resultados da otimização da segunda etapa com  $\omega=10,9031$ 

Nó	Altura Piezométrica (m)	Cota (m)	Pressão Disponível (mca)
1	210,0	210	
2	203,1	150	53,10
3	190,0	160	30,00
4	198,6	155	43,61
5	181,4	150	31,43
6	195,0	165	30,00
7	190,0	160	30,00

Tabela 7.10b – Resultados da otimização da segunda etapa com  $\omega=10,9031$

Trecho	Alperovits e Shamir (1977) $\omega=10,7109$		Gouter et al. (1986) $\omega = 10,6658$		Kessler e Shamir (1989) $\omega = 10,6792$	
	L (m)	D (pol)	L (m)	D (pol)	L (m)	D (pol)
1	256,00	20	383,00	20	1.000,00	18
	744,00	18	617,00	18		
2	996,38	8	1.000,00	10	66,00	12
	3,62	6			934,00	10
3	1.000,00	18	1.000,00	16	1.000,00	16
4	319,38	8	687,00	6	713,00	3
	680,62	6	313,00	4	287,00	2
5	1.000,00	16	1.000,00	16	836,00	16
					164,00	14
6	784,94	12	98,00	12	109,00	12
	215,06	10	902,00	10	891,00	10
7	1.000,00	6	492,00	10	819,00	10
			508,00	8	181,00	8
8	990,93	6	20,00	2	920,00	3
	9,07	4	980,00	1	80,00	2
Custo (umt)	497.525,00		435.015,00		417.500,00	

Fonte: Savic e Walters (1997)

Tabela 7.11 – Resultados obtidos por outros métodos de otimização

Trecho	Eiger at al. (1994)		Savic e Walters (1997) $\omega = 10,9031$		Savic e Walters (1997) $\omega = 10,5088$	
	L (m)	D (pol)	L (m)	D (pol)	L (m)	D (pol)
1	1.000,00	18	1.000,00	20	1.000,00	18
2	238,02	12	1.000,00	10	1.000,00	10
	761,98	10				
3	1.000,00	16	1.000,00	16	1.000,00	16
4	1.000,00	1	1.000,00	1	1.000,00	4
5	628,86	16	1.000,00	14	1.000,00	16
	371,14	14				
6	989,05	10	1.000,00	10	1.000,00	10
	10,95	8				
7	921,86	10	1.000,00	10	1.000,00	10
	78,14	8				
8	1.000,00	1	1.000,00	1	1.000,00	1
Custo (umt)	402.352,00		420.000,00		419.000,00	

Fonte: Savic e Walters (1997)

Tabela 7.12 – Resultados obtidos por outros métodos de otimização

### 7.1.2. Exemplo 2

A rede deste exemplo foi projetada pela CAGEPA, em 1982, para abastecer o bairro do Bessa, na cidade de João Pessoa-PB. O suprimento de água é realizado a partir de um reservatório elevado (Reservatório R-9 situado no bairro de Tambaú). O sistema projetado compreende a linha tronco, que parte do reservatório R-9 e atravessa a área de Tambaú, sem que haja derivação de água; o grande anel, que envolve toda a área do bairro do Bessa, e anéis secundários de distribuição, cada um ligado em um ponto distinto do grande anel (Figura 7.3).

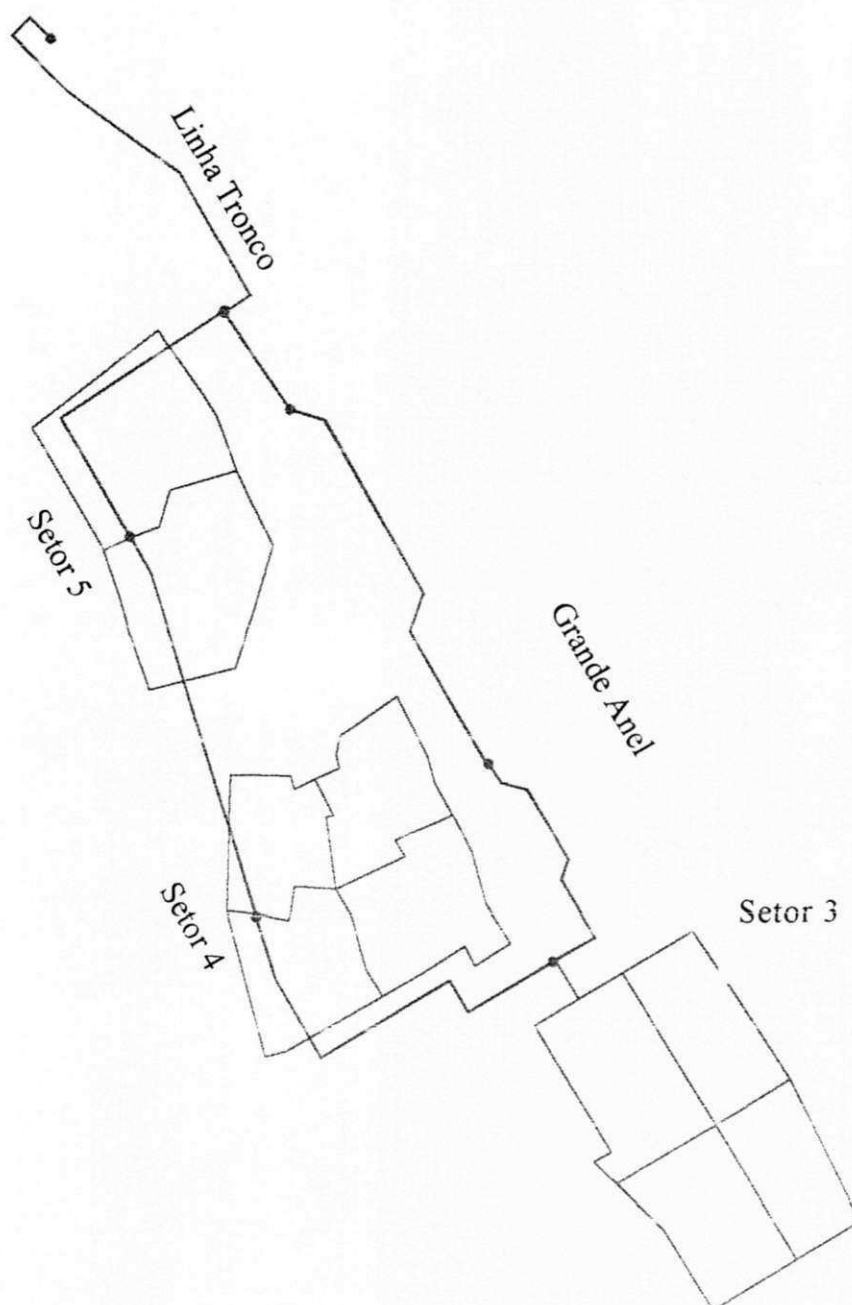


Figura 7.3 – Esquema da rede de abastecimento do bairro do Bessa



### *7.1.2.1. As Partes do Sistema*

#### *7.1.2.1.1. Linha Tronco*

A linha Tronco (Figura 7.4) é responsável pela ligação do reservatório R-9 ao grande anel. O traçado foi determinado considerando o menor percurso possível ao longo de ruas não pavimentadas. O seu dimensionamento será realizado como parte do grande anel.

#### *7.1.2.1.2. Grande Anel*

O grande anel (Figura 7.4), é responsável pelo abastecimento de água de uma área de 592 ha, que constitui a parte residencial do bairro do Bessa, bem como 58 há do distrito industrial vizinho a essa área.

A alça Leste do grande anel constitui a etapa inicial que foi construída, e se estende ao longo da área mais edificada do bairro. A alça Oeste, percorre o traçado que corta áreas residenciais e industriais (Leal, 1995).

#### *7.1.2.1.3. Setores Secundários*

A área do projeto foi dividida em 5 setores secundários, cada um dispondo de suprimento retirado de um único ponto do grande anel. Aos anéis secundários se ligam os ramais distribuidores, para os quais foram adotados o diâmetros de 50 mm. Os cinco setores secundários têm as seguintes áreas:

Setor 1 – 98 ha

Setor 2 – 92 ha

Setor 3 – 316 ha

Setor 4 153 ha

Setor 5 – 91 ha

O traçado e os sentidos arbitrados para as vazões do grande anel, que inclui a linha tronco, e dos setores 3, 4 e 5 – setores que foram os considerados no dimensionamento efetuado por Leal (1995) – são mostrados nas figuras 7.4, 7.5, 7.6 e 7.7, respectivamente.

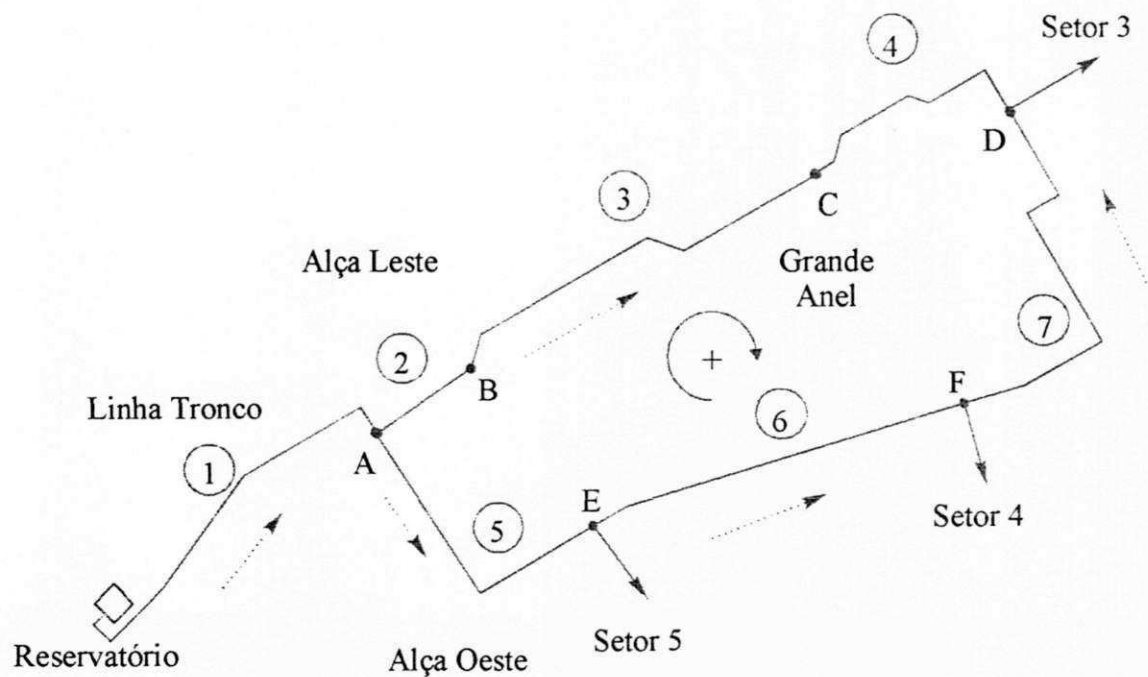


Figura 7.4 - Traçado da linha tronco e grande anel

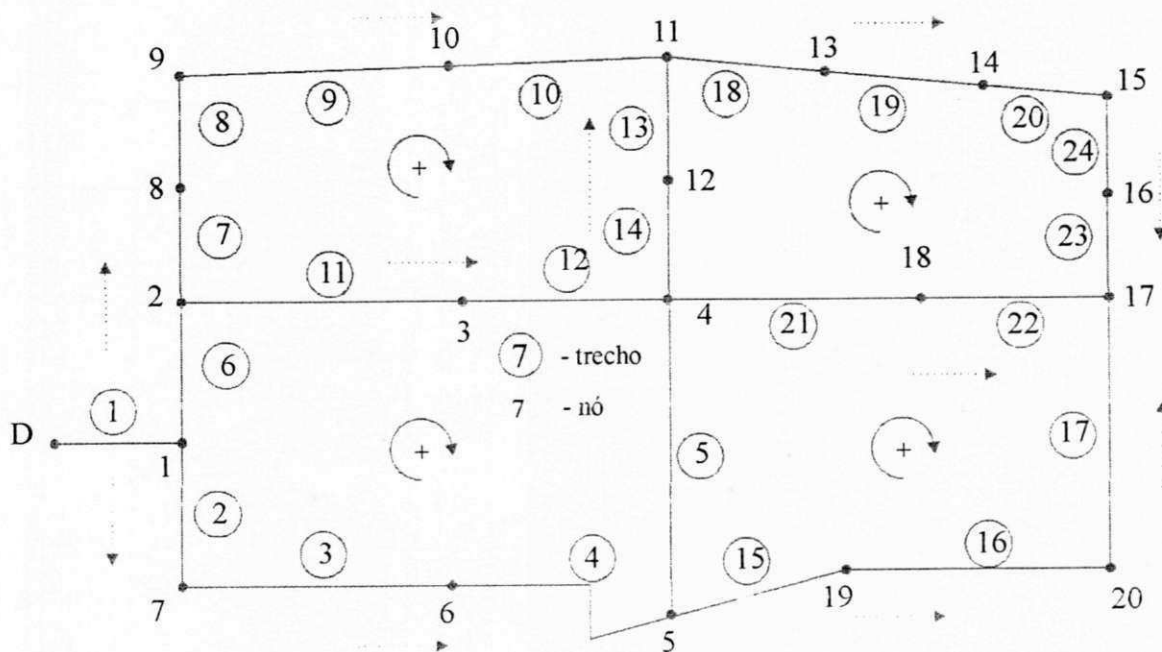


Figura 7.5 – Traçado do setor 3

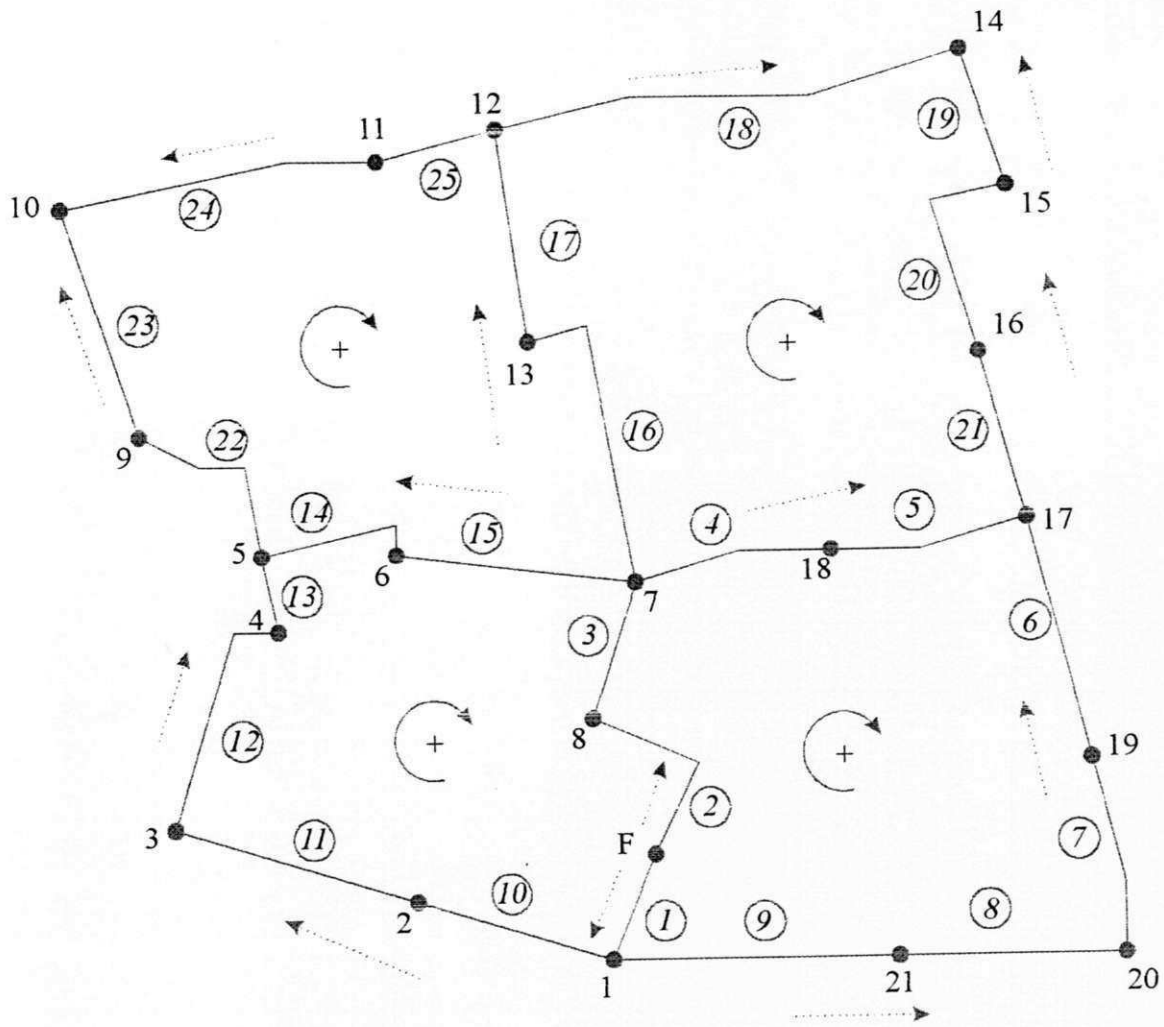


Figura 7.6 - Traçado do setor 4

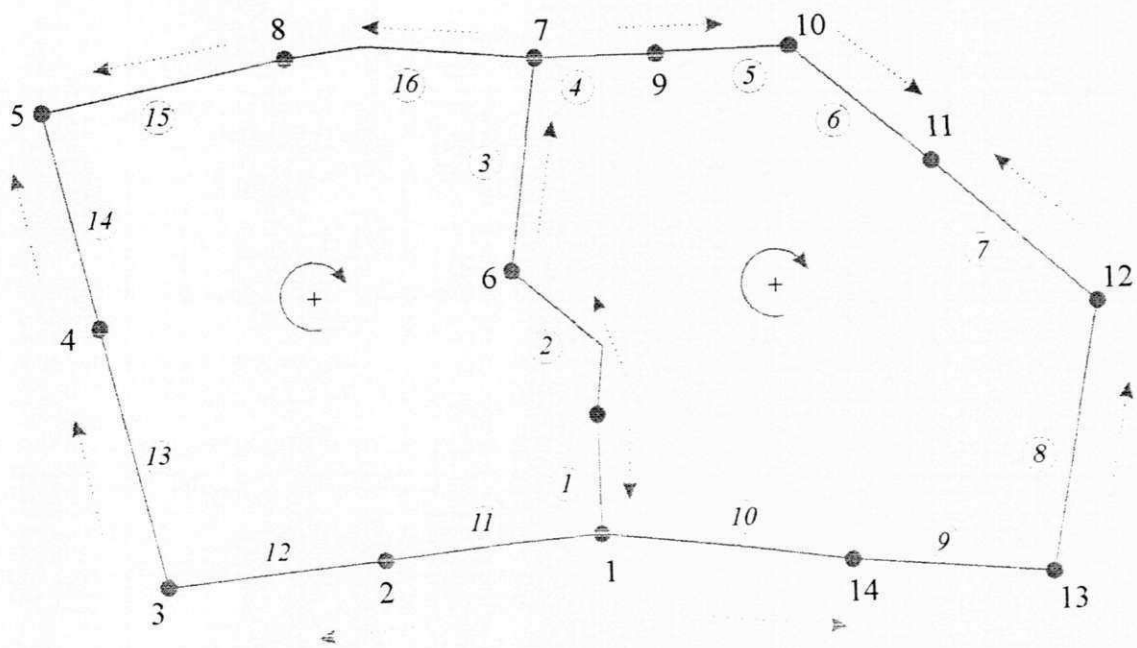


Figura 7.7 - Traçado do setor 5

## 7.1.2.2. Dados do sistema

A Tabela 7.13 mostra as demandas de água, as pressões requeridas, e a cota altimétrica do terreno, nos nós do grande anel e dos setores 3, 4 e 5. Enquanto que a Tabela 7.14 mostra os dados referentes aos comprimentos dos trechos da rede. Os nós do grande anel são identificados por letras enquanto que os nós dos setores são expressos por números.

Nó	Grande Anel		Setor 3		Setor 4		Setor 5	
	Pressão requerida 25 mca		Pressão requerida 15 mca		Pressão requerida 15 mca		Pressão requerida 15 mca	
	Demanda (l/s)	Cota (m)	Demanda (l/s)	Cota (m)	Demanda (l/s)	Cota (m)	Demanda (l/s)	Cota (m)
1 - (A)	-	5	0	4,5	3,2	5	3,2	5
2 - (B)	43,44	5	7,4	5	2,6	6	3,2	4,7
3 - (C)	40,29	4	5,2	4,5	2,1	4,5	1,6	5
4 - (D)	208,6	4,5	4,7	5	2,1	4,5	2,8	5
5 - (E)	47,78	4,5	4,2	3,5	2,1	4	1,6	5
6 - (F)	80,32	4,5	7,4	3,5	2,6	4	4,7	4,5
7	-	-	10,5	3,5	3,2	4	2,6	3
8	-	-	5,2	5	3,7	4,3	3,2	4,5
9	-	-	5,2	6	2,1	4	2,6	4
10	-	-	6	6	4,2	4	4,3	3
11	-	-	2,6	6	3,2	4	4,3	4,5
12	-	-	3,2	6	3,2	4	8,4	4,5
13	-	-	4,2	6	4,7	4	3,7	4,5
14	-	-	4,2	6	6,3	4	2,1	5
15	-	-	2,6	5	4,7	4,5	-	-
16	-	-	5,2	3	6,3	4	-	-
17	-	-	61,9	3,5	8	2,5	-	-
18	-	-	7,9	6	4,2	2,5	-	-
19	-	-	2,6	3,5	4,7	3,5	-	-
20	-	-	58,3	3,5	3,7	4,5	-	-
21	-	-	-	-	3,2	5	-	-

Tabela 7.13 – Pressões requeridas, demandas e cotas dos nós do grande anel e dos setores 3, 4 e 5

O material da tubulação utilizado no sistema é de ferro dúctil para tubos de diâmetros iguais ou superiores a 300 mm e de PVC para diâmetros entre 100 mm, que é o menor diâmetro usado para anéis, e 250 mm. No projeto da CAGEPA (1982) foram aproveitadas algumas tubulações de cimento amianto existentes de diâmetros de 200 mm nos setores 4 e 5. A fórmula de perda de

carga empregada, foi a de Hazen-Williams, também utilizada por Leal (1995), onde os coeficientes  $\omega$ ,  $a$  e  $b$ , da equação (7.1) foram tomados como 10,66; 1,852 e 4,87 respectivamente. Os coeficientes de rugosidade de Hazen-Williams (C) utilizados neste estudo foram de 145 para tubos de PVC, 130 para o ferro dúctil e 140 para o cimento amianto. A fórmula de perda de carga utilizada (Hazen-Williams), e os valores dos coeficientes adotados neste exemplo, coincidem com aqueles empregados no projeto original da CAGEPA (1982). Isso foi feito para que pudesse ser feita uma comparação dos resultados obtidos.

	Grande Anel	Setor 3	Setor 4	Setor 5
Trecho	Comprimento (m)	Comprimento (m)	Comprimento (m)	Comprimento (m)
1	2540	220	110	115
2	350	190	280	180
3	1140	295	225	140
4	1430	390	200	215
5	1020	370	190	175
6	1430	190	285	180
7	1710	310	210	260
8	-	205	240*	205
9	-	305	250*	255*
10	-	295	340*	260*
11	-	300	270*	275*
12	-	290	240	315*
13	-	180	160	200
14	-	315	260	175
15	-	300	250	300
16	-	295	330	250
17	-	215	230	-
18	-	140	385	-
19	-	220	160	-
20	-	220	330	-
21	-	285	210	-
22	-	300	150	-
23	-	315	255	-
24	-	170	260	-
25	-	-	230	-

Tabela 7.14 – Comprimentos dos trechos do grande anel e dos setores  
(\*tubulação existente de cimento amianto)

A Tabela 7.15 fornece os preços dos tubos, em função dos seus diâmetros. Esses preços, que são independentes das pressões nominais utilizadas, foram retirados da planilha de orçamento que fazem parte do projeto da CAGEPA (1982).

Diâmetro (mm)	Custo (umt/m)	Diâmetro (mm)	Custo (umt/m)
100	1.629	350	11.012
150	4.054	400	12.397
200	5.769	450	15.501
250	7.718	500	17.696
300	9.237	600	23.132

Tabela 7.15 – Preço dos tubos em função dos diâmetros

Este exemplo foi desenvolvido considerando duas situações para a cota de cabeceira. Na primeira situação, a cota de cabeceira é tida como fixa em 54 m, na segunda, esta cota é desconhecida, devendo também ser otimizada.

A equação que relaciona o custo do tubo com o seu diâmetro foi obtida através de um ajuste de curva (Figura 7.8) feito pela ferramenta Linha de Tendência do Excel. A equação obtida foi:

$$\text{Custo} = 2 \times 10^{-12} D^6 - 6 \times 10^{-9} D^5 + 6 \times 10^{-6} D^4 - 0,0026 D^3 + 0,466 D^2 + 9,9675 D - 1980,8 \quad (\text{eq. 7.20})$$

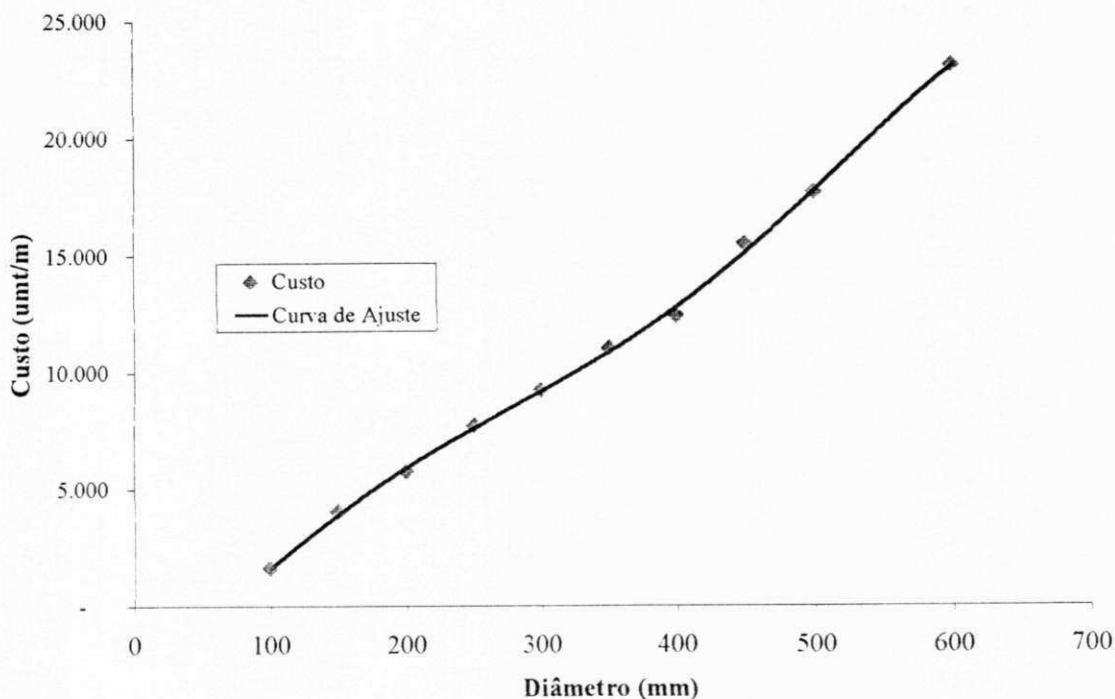


Figura 7.8 – Curva de ajuste Custo do Tubo X Diâmetro do Exemplo 2

A otimização foi feita considerando os setores da rede como independentes do grande anel. Primeiro fez-se a otimização do grande anel, e em seguida com os dados de pressão nos nós obtidos, efetuou-se a otimização dos restantes dos setores.

### 7.1.2.2. Cota de cabeceira fixa

#### 7.1.2.2.1. 1ª Etapa

Armando-se as funções objetivo e as restrições, segundo a metodologia proposta, obteve-se os resultados que são apresentados nas Tabelas 7.16a, 7.16b, 7.17a, 7.17b, 7.18a, 7.18b, 7.19a e 7.19b. Para alguns trechos da rede foram obtidos como resultados vazões e perdas de carga negativas, isso apenas indica que o sentido do fluxo encontrado pelo dimensionamento, é contrário àquele arbitrado inicialmente.

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	556,8	2540	420,43	11,45	1,7
2	474,1	350	292,32	1,76	1,7
3	453,8	1140	248,88	5,28	1,5
4	432,8	1430	208,59	6,01	1,4
5	333,8	1020	128,11	6,15	1,5
6	292,7	1430	80,33	6,89	1,2
7	100,0	1710	0,01	0,00	0,0
Custo (umt)					125.404.652

Tabela 7.16a – Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
A	42,5	5,0	37,5
B	40,8	5,0	35,8
C	35,5	4,0	31,5
D	29,5	4,5	25,0
E	36,4	4,5	31,9
F	29,5	4,5	25,0

Tabela 7.16b – Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	421,8	220	208,5	1,05	1,5
2	237,9	190	69,7	1,58	1,6
3	231,0	295	59,2	2,09	1,4
4	210,2	390	51,8	3,41	1,5
5	100,0	370	-6,9	-2,87	-0,9
6	362,8	190	138,8	0,89	1,3
7	190,6	310	30,2	1,61	1,1
8	178,9	205	25,0	1,02	1,0
9	160,1	305	19,8	1,69	1,0
10	148,5	295	13,8	1,21	0,8
11	308,6	300	101,3	1,72	1,4
12	304,6	290	96,1	1,60	1,3
13	100,0	180	2,9	0,28	0,4
14	100,2	315	6,1	1,93	0,8
15	241,8	300	54,4	1,46	1,2
16	239,9	295	51,8	1,36	1,1
17	100,0	215	-6,5	-1,49	-0,8
18	161,2	140	14,1	0,40	0,7
19	140,6	220	9,9	0,63	0,6
20	105,0	220	5,7	0,94	0,7
21	263,2	285	78,4	2,20	1,4
22	250,0	300	70,5	2,00	1,4
23	100,0	315	-2,1	-0,28	-0,3
24	100,0	170	3,1	0,30	0,4
Custo (umt)	35.792.593				

Tabela 7.17a – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3



Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,5	4,5	24,0
2	27,6	5,0	22,6
3	25,8	4,5	21,3
4	24,2	5,0	19,2
5	21,4	3,5	17,9
6	24,8	3,5	21,3
7	26,9	3,5	23,4
8	26,0	5,0	21,0
9	24,9	6,0	18,9
10	23,2	6,0	17,2
11	22,0	6,0	16,0
12	22,3	6,0	16,3
13	21,6	6,0	15,6
14	21,0	6,0	15,0
15	20,1	5,0	15,1
16	19,8	3,0	16,8
17	20,0	3,5	16,5
18	22,0	6,0	16,0
19	19,9	3,5	16,4
20	18,6	3,5	15,1

Tabela 7.17b – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	214,9	110,0	48,2	0,76	1,3
2	177,7	280,0	31,9	2,27	1,3
3	169,9	225,0	28,2	1,81	1,2
4	100,0	200,0	8,3	2,19	1,1
5	100,0	190,0	4,1	0,56	0,5
6	146,0	285,0	19,1	2,33	1,1
7	158,3	210,0	23,8	1,73	1,2
8*	200,0	240,0	27,5	0,89	0,9
9*	200,0	250,0	30,7	1,13	1,0
10*	200,0	340,0	14,2	0,37	0,5
11*	200,0	270,0	11,6	0,20	0,4
12	100,0	240,0	9,5	3,41	1,2
13	100,0	160,0	7,4	1,43	0,9
14	100,0	260,0	3,5	0,56	0,4
15	100,0	250,0	6,1	1,53	0,8
16	104,4	330,0	10,7	4,71	1,2
17	100,0	230,0	6,0	1,39	0,8
18	100,0	385,0	2,1	0,33	0,3
19	100,0	160,0	4,2	0,50	0,5
20	117,2	330,0	8,9	1,91	0,8
21	142,6	210,0	15,2	1,26	1,0
22	100,0	150,0	8,8	1,83	1,1
23	100,0	255,0	6,7	1,88	0,9
24	100,0	260,0	-2,5	-0,31	-0,3
25	100,0	230,0	0,7	0,03	0,1
Custo (umt)		12.367.543			

Tabela 7.18a – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4

(\* trecho com tubo de cimento-amianto pré existente)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,7	5,0	23,7
2	28,4	6,0	22,4
3	28,2	4,5	23,7
4	24,8	4,5	20,3
5	23,3	4,0	19,3
6	23,9	4,0	19,9
7	25,4	4,0	21,4
8	27,2	4,3	22,9
9	21,5	4,0	17,5
10	19,6	4,0	15,6
11	19,3	4,0	15,3
12	19,3	4,0	15,3
13	20,7	4,0	16,7
14	19,0	4,0	15,0
15	19,5	4,5	15,0
16	21,4	4,0	17,4
17	22,7	2,5	20,2
18	23,2	2,5	20,7
19	25,0	3,5	21,5
20	26,7	4,5	22,2
21	27,6	5,0	22,6

Tabela 7.18b – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	148,4	115	34,6	2,60	2,0
2	100	180	13,7	5,01	1,7
3	100	140	9,0	1,79	1,1
4	100	215	7,0	1,72	0,9
5	100	175	4,4	0,59	0,6
6	100	180	0,1	0,00	0,0
7	100	260	4,2	0,81	0,5
8	100	205	12,6	4,89	1,6
9*	200	255	16,3	0,36	0,5
10*	200	260	18,4	0,46	0,6
11*	200	275	13,0	0,25	0,4
12*	200	315	9,8	0,17	0,3
13	100	200	8,2	2,14	1,0
14	100	175	5,4	0,86	0,7
15	100	300	-3,8	-0,77	-0,5
16	100	250	-0,6	-0,02	-0,1
Custo (umt)	4.095.801				

Tabela 7.19a – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5

(\* trecho com tubo de cimento-amianto pré existente)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	33,8	5,0	28,8
2	33,5	4,7	28,8
3	33,4	5,0	28,4
4	31,2	5,0	26,2
5	30,4	5,0	25,4
6	31,4	4,5	26,9
7	29,6	3,0	26,6
8	29,6	4,5	25,1
9	27,9	4,0	23,9
10	27,3	3,0	24,3
11	27,3	4,5	22,8
12	28,1	4,5	23,6
13	33,0	4,5	28,5
14	33,3	5,0	28,3

Tabela 7.19b – Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5

#### 7.1.2.2.2. 2ª Etapa

A partir dos resultados obtidos na primeira fase do método, que são os diâmetros contínuos e as vazões em todos os trechos, fez-se uma nova otimização considerando como variáveis de decisão os comprimentos dos sub-trechos e as vazões dos trechos. Em cada trecho serão adotados dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente inferior ao diâmetro contínuo obtido no pré-dimensionamento. Os diâmetros comerciais adotados para cada trecho da rede são mostrados na Tabela 7.20.

Após a montagem da função objetivo e das equações de restrição, de acordo com a metodologia apresentada, procede-se o processo de otimização, como visto no Capítulo VI, utilizando o algoritmo de otimização GRG2, disponível na ferramenta Solver do Microsoft Excel®.

Os resultados finais obtidos nesta etapa são apresentados nas Tabelas 7.21a, 7.21b, 7.22a, 7.22b, 7.23a, 7.23b, 7.24a e 7.24b.

As Tabelas 7.25, 7.26, 7.27 e 7.28, mostram os resultados da otimização feita por Leal (1995), para esse mesmo sistema, utilizando a metodologia Granados (1990), através do programa REDES (1995) e o método Hardy-Cross; e o método da enumeração exaustiva (Gessler, 1985), através do programa WADISO – “Water Distribution System Optimization - (Gessler e Walski, 1985).

Trecho	Grande Anel		Setor 3		Setor 4		Setor 5	
	Diâmetro Calculado (mm)	Diâmetro Adotado (mm)	Diâmetro Calculado (mm)	Diâmetro Adotado (mm)	Diâmetro Calculado (mm)	Diâmetro Adotado (mm)	Diâmetro Calculado (mm)	Diâmetro Adotado (mm)
1	556,8	500 600	421,8	400 450	214,9	200 250	148,4	100 150
2	474,1	450 500	237,9	200 250	177,7	150 200	100	100 150
3	453,8	450 500	231,0	200 250	169,9	150 200	100	100 150
4	432,8	400 450	210,2	200 250	100,0	100 150	100	100 150
5	333,8	300 350	100,0	100 150	100,0	100 150	100	100 150
6	292,7	250 300	362,8	350 400	146,0	100 150	100	100 150
7	100,0	100 150	190,6	150 200	158,3	150 200	100	100 150
8	-	-	178,9	150 200	200*		100	100 150
9	-	-	160,1	150 200	200*		200*	
10	-	-	148,5	100 150	200*		200*	
11	-	-	308,6	300 350	200*		200*	
12	-	-	304,6	300 350	100,0	100 150	200*	
13	-	-	100,0	100 150	100,0	100 150	100	100 150
14	-	-	100,2	100 150	100,0	100 150	100	100 150
15	-	-	241,8	200 250	100,0	100 150	100	100 150
16	-	-	239,9	200 250	104,4	100 150	100	100 150
17	-	-	100,0	100 150	100,0	100 150	-	-
18	-	-	161,2	150 200	100,0	100 150	-	-
19	-	-	140,6	100 150	100,0	100 150	-	-
20	-	-	105,0	100 150	117,2	100 150	-	-
21	-	-	263,2	250 300	142,6	100 150	-	-
22	-	-	250,0	250 300	100,0	100 150	-	-
23	-	-	100,0	100 150	100,0	100 150	-	-
24	-	-	100,0	100 150	100,0	100 150	-	-
25	-	-	-	-	100,0	100 150	-	-

Tabela 7.20 – Diâmetros comerciais utilizados na segunda etapa do Exemplo 2

(\* tubo de cimento-amianto)

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	2540,0	600	420,4	7,96	1,5
2	331,2	450	292,3	2,22	1,8
	18,8	500			1,5
3	1140,0	450	248,9	5,49	1,6
4	1430,0	400	208,6	8,82	1,7
5	1020,0	350	128,1	4,88	1,3
6	1316,3	250	80,3	11,65	1,6
	113,7	300			1,1
7	1710,0	100	-0,01	0,00	0,0
Custo (umt)		124.873.088			

Tabela 7.21b - Resultados da Segunda etapa da otimização do Grande Anel

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
A	46,0	5,0	41,0
B	43,8	5,0	38,8
C	38,3	4,0	34,3
D	29,5	4,5	25,0
E	41,2	4,5	36,7
F	29,5	4,5	25,0

Tabela 7.21b - Resultados da segunda etapa da otimização do Grande Anel

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	220	400	208,5	1,36	1,7
2	190	250	65,7	1,36	1,3
3	110,6	200	55,2	2,34	1,8
	184,4	250			1,1
4	390	200	47,8	3,75	1,5
5	270	100	-8,9	-3,37	-1,1
6	190	400	142,8	0,58	1,1
7	310	200	32,2	1,43	1,0
8	205	200	27,0	0,68	0,9
9	305	200	21,8	0,68	0,7
10	285	150	15,8	1,43	0,9
11	300	300	103,2	2,04	1,5
12	290	300	98,0	1,46	1,4
13	180	100	0,4	0,01	0,0
14	315	100	3,6	0,72	0,5
15	300	250	52,5	1,16	1,1
16	295	250	49,9	1,04	1,0
17	215	100	-8,4	-2,44	-1,1
18	140	150	13,6	0,53	0,8
19	117,0	100	9,4	1,80	1,2
	103,0	150			0,3
20	220	100	5,2	1,00	0,7
21	285	300	80,9	1,23	1,1
22	231,0	250	73,0	1,89	1,5
	69,0	300			1,0
23	315	100	-2,6	-0,42	-0,3
24	170	100	2,6	0,21	0,3
Custo (umt)					35.761.760

Tabela 7.22a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3



Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,1	4,5	23,6
2	27,6	5,0	22,6
3	25,5	4,5	21,0
4	24,1	5,0	19,1
5	20,7	3,5	17,2
6	24,4	3,5	20,9
7	26,8	3,5	23,3
8	26,1	5,0	21,1
9	25,4	6,0	19,4
10	24,8	6,0	18,8
11	23,3	6,0	17,3
12	23,3	6,0	17,3
13	22,8	6,0	16,8
14	21,0	6,0	15,0
15	20,0	5,0	15,0
16	21,4	3,0	18,4
17	20,9	3,5	17,4
18	22,8	6,0	16,8
19	19,5	3,5	16,0
20	18,5	3,5	15,0

Tabela 7.22b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	110	200	45,4	0,96	1,4
2	280	200	34,7	1,49	1,1
3	225	200	31,0	0,97	1,0
4	200	100	9,7	2,93	1,2
5	190	100	5,5	0,97	0,7
6	285	150	17,2	1,68	1,0
7	210	150	21,9	1,93	1,2
8*	240	200	25,6	0,78	0,8
9*	250	200	28,8	1,01	0,9
10*	340	200	13,4	0,33	0,4
11*	270	200	10,8	0,18	0,3
12	240	100	8,7	2,89	1,1
13	160	100	6,6	1,16	0,8
14	260	100	4,6	0,96	0,6
15	250	100	7,2	2,11	0,9
16	330	100	10,9	5,99	1,4
17	230	100	6,2	1,46	0,8
18	385	100	2,6	0,49	0,3
19	160	100	3,7	0,40	0,5
20	227,1	100	8,4	2,72	1,1
	102,9	150			0,5
21	210	150	14,7	0,92	0,8
22	150	100	9,1	1,96	1,2
23	255	100	7,0	2,05	0,9
24	260	100	-2,8	-0,39	-0,4
25	230	100	0,4	0,01	0,0
Custo (umt)		12.568.771			

Tabela 7.23a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4  
 (\*tubos de cimento amianto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,5	5,0	23,5
2	28,2	6,0	22,2
3	28,0	4,5	23,5
4	25,1	4,5	20,6
5	24,0	4,0	20,0
6	24,9	4,0	20,9
7	27,0	4,0	23,0
8	28,0	4,3	23,7
9	22,0	4,0	18,0
10	20,0	4,0	16,0
11	19,6	4,0	15,6
12	19,6	4,0	15,6
13	21,1	4,0	17,1
14	19,1	4,0	15,1
15	19,5	4,5	15,0
16	22,2	4,0	18,2
17	23,1	2,5	20,6
18	24,1	2,5	21,6
19	24,8	3,5	21,3
20	26,8	4,5	22,3
21	27,5	5,0	22,5

Tabela 7.23b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	115	150	34,7	2,48	2,0
2	180	100	13,6	4,97	1,7
3	140	100	8,9	1,77	1,1
4	215	100	7,0	1,71	0,9
5	175	100	4,4	0,58	0,6
6	180	100	0,1	0,00	0,0
7	260	100	4,2	0,82	0,5
8	205	100	12,6	4,91	1,6
9*	255	200	16,3	0,36	0,5
10*	260	200	18,4	0,46	0,6
11*	275	200	13,0	0,25	0,4
12*	315	200	9,8	0,17	0,3
13	200	100	8,2	2,16	1,0
14	175	100	5,4	0,87	0,7
15	300	100	-3,8	-0,78	-0,5
16	250	100	-0,6	-0,02	-0,1
Custo (umt)		4.180.330			

Tabela 7.24a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5  
(\* tubos de cimento amianto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	33,8	5,0	28,8
2	33,5	4,7	28,8
3	33,4	5,0	28,4
4	31,2	5,0	26,2
5	30,4	5,0	25,4
6	31,4	4,5	26,9
7	29,6	3,0	26,6
8	29,6	4,5	25,1
9	27,9	4,0	23,9
10	27,3	3,0	24,3
11	27,3	4,5	22,8
12	28,1	4,5	23,6
13	33,0	4,5	28,5
14	33,3	5,0	28,3

Tabela 7.24b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5

Trecho	WADISO			GRANADOS		
	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)
1	600	420,4	2540	500	420,4	180
				600		2360
2	400	263,5	350	400	241,9	350
3	400	220,1	1140	400	198,5	1140
4	400	179,8	1430	400	158,2	1430
5	400	156,9	1020	400	178,4	1020
6	300	109,1	1430	400	130,7	1430
7	300	28,8	1710	250	50,4	1710
Custo (umt)	138.458.323			137.562.788		

Tabela 7.25 - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS-Hardy-Cross para o Grande Anel

Trecho	WADISO			GRANADOS		
	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)
1	450	208,6	220	400	208,7	220
2	350	88,9	190	250	85,1	190
3	300	78,4	295	250	74,6	295
4	300	71	390	250	67,2	390
5	100	2	370	100	0,8	370
6	300	119,7	190	350	123,6	190
7	250	30,4	310	200	29,6	310
8	200	25,1	205	150	24,3	205
9	200	19,9	305	150	19,1	305
10	150	13,9	295	150	13,2	295
11	300	81,9	300	250	86,7	300
12	300	76,7	290	250	81,4	290
13	100	1,9	180	100	1,6	180
14	150	5	315	100	4,7	315
15	300	64,9	300	250	63,8	300
16	300	62,3	295	250	61,2	295
17	100	4	215	100	2,9	215
18	150	13,2	140	150	12,1	140
19	150	9	220	100	1	220
20	100	4,8	220	100	0,5	220
21	300	68,9	285	250	71,7	285
22	300	61	300	250	63,3	300
23	100	3,1	315	100	4,2	315
24	100	2,1	170	100	1	170
Custo (umt)	35.442.350			34.118.970		

Tabela 7.26 - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS-Hardy-Cross para o Setor 3

Trecho	WADISO			GRANADOS		
	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)	Diâmetro (m)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)
1	200	34,5	110	200	110	37,2
2	200	45,4	280	200	280	42,8
3	200	41,8	225	200	225	39,1
4	150	19,4	200	150	200	16,4
5	150	15,2	190	100	190	12,2
6	100	5,9	285	100	285	7,6
7	100	10,6	210	100	210	12,4
8	200	14,3	240	200	240	16
9	200	17,4	250	200	250	19,2
10	200	14	340	200	340	14,9
11	200	11,4	270	200	270	12,2
12	100	9,3	240	100	240	10,2
13	100	7,1	160	100	160	8,1
14	100	2,7	260	100	260	4,6
15	100	5,3	250	100	250	7,3
16	150	13,9	330	100	330	12,2
17	100	9,2	230	100	230	7,5
18	100	4,4	385	100	385	5,5
19	100	2	160	100	160	0,8
20	100	6,7	330	100	330	5,6
21	150	13	210	100	210	11,9
22	100	7,8	150	100	150	10,6
23	100	5,7	255	100	255	8,5
24	100	1,5	260	100	260	4,3
25	100	1,7	230	100	230	1,1
Custo (umt)	12.864.904			11.091.575		

Tabela 7.27 - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS-Hardy-Cross para o Setor 4

Trecho	WADISO			GRANADOS		
	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)	Diâmetro (m)	Vazão (l/s)	Comprimento (m)
1	200	29,9	115	200	32,5	115
2	150	18,1	180	150	15,5	180
3	150	13,4	140	100	10,8	140
4	100	8,5	215	100	7,6	215
5	100	5,9	175	100	5	175
6	100	1,6	180	100	0,8	180
7	100	2,6	260	100	3,4	260
8	100	11	205	100	11,8	205
9	200	14,6	255	200	15,5	255
10	200	16,7	260	200	17,6	260
11	200	10	275	200	11,7	275
12	200	6,9	315	200	8,6	315
13	100	5,3	200	100	7	200
14	100	2,5	175	100	4,2	175
15	100	0,9	300	100	2,6	300
16	100	2,3	250	100	0,6	250
Custo (umt)	5.153.559			4.814.059		

Tabela 7.28 - Resultados dos métodos WADISO e GRANADOS-Hardy-Cross para o Setor 5

Para os setores 3 e 4, o método da programação não linear, apresentou um custo maior do que os métodos Granados-Hardy-Cross e WADISO (Tabela 7.29). Isso se deve ao fato de que os excessos de pressão nos nós do grande anel que abastecem esses setores não foram totalmente zerados por últimos métodos (Tabela 7.30). Pelo fato de o grande anel representar mais de 70% do custo total da rede, a metodologia da programação não linear, procurou minimizar mais essa parte da rede em detrimento das outras, procedendo assim, essa metodologia encontrou resultados finais melhores do que aqueles obtidos pelos métodos Granados e WADISO.

Métodologia	PNL	Granados-Hardy-Cross	Wadiso
Grande Anel	124.873.088	137.562.788	138.458.323
Setor 3	35.761.760	34.118.970	35.442.350
Setor 4	12.568.771	11.091.575	12.864.904
Setor 5	4.180.330	4.814.059	5.153.559
<b>Total</b>	<b>177.383.949</b>	<b>187.587.392</b>	<b>191.919.136</b>
Economia	-	6%	8%

Tabela 7.29 - Comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos empregados neste exemplo

Nó	Granados		Wadiso	
	Press. Disponível (mca)	Excesso de Press. (mca)	Press. Disponível (mca)	Excesso de Press. (mca)
A	40,8	15,8	41,6	16,6
B	38,2	13,2	40,5	15,5
C	33,2	8,2	34,3	9,3
D	27,2	2,2	27,5	2,5
E	36,9	11,9	38,6	13,6
F	33,4	8,4	28,5	3,5

Tabela 7.30 – Pressões disponível e excessos de pressão obtidos pelos métodos Granados-Hardy-Cross e WADISO para o Grande Anel.

### 7.1.2.3. Cota de Cabeceira Variável

Para se fazer o dimensionamento econômico dessa rede, considerando a cota de cabeceira como variável, foi necessário se estimar alguns termos, que não fazem parte do projeto original da CAGEPA (1982). Esses termos são: o número de horas anuais de bombeamento, o rendimento do conjunto motor-bomba e o custo do kWh.

Para a determinação do número de horas de bombeamento, foi considerado que as bombas trabalhariam 8h por dia, todos os dias do ano. Outros valores poderiam ser considerados, como os de 12h/dia e de 24h/dia. No entanto, procurou-se adotar apenas um valor, mesmo que não seja este o regime de funcionamento das bombas. Isto não trará nenhum inconveniente, já que esta parte do exemplo tem por objetivo, apenas, o de se verificar a possibilidade da metodologia apresentada trabalhar considerando a cota de cabeceira variável. Para o rendimento do conjunto motor-bomba foi considerado um valor médio para toda a vida do projeto de 65%.

Para a determinação do custo do kWh, na época em que os preços dos tubos foram adquiridos, houve uma certa dificuldade, em virtude do regime inflacionário vivido pelo País durante mais de 10 anos. Assim procurou-se fazer uma comparação entre os preços dos tubos de PVC da época (1982), com os preços atuais, obtidos a partir do trabalho de Formiga (1997) (ver Tabela 7.31). É possível



que tenha havido uma redução do preço real do tubo de PVC durante os quinze anos em que o preço foi tomado, mas vale lembrar que esta parte do problema, tem a finalidade de verificar o comportamento da metodologia diante de outras situações.

Diâmetro Tubo de PVC (mm)	Preço do Tubo (umt/m) (CAGEPA, 1982)	Preço do Tubo (R\$/m) (Formiga, 1997)	Coefficiente de Conversão
100	1.629	7,77	209,7
150	4.054	14,4	281,5
200	5.769	28,02	205,9
250	7.718	42,73	180,6
300	9.237	60,65	152,3
Média			206,0

Tabela 7.31 – Preços do tubos de PVC em umt/m e R\$/m

Fez-se a conversão da seguinte forma, para os diâmetros de 100, 150, 200, 250 e 300 mm, efetuou-se a divisão dos preços dos tubos em umt/m, da época, pelos preços em R\$/m, atuais, obtendo-se assim cinco coeficientes (Tabela 7.31). Calculou-se a média ponderada desses coeficientes, multiplicando, em seguida, esta média pelo valor do kWh em R\$, obtém-se este valor em umt, que é a unidade usada para expressar o preço tubos. Considerando o custo atual do kWh igual a R\$ 0,06 tem-se:

$$\text{Custo kWh (umt)} = 0,06 \times 206,0 = 12,36 \text{ umt} \quad (\text{eq. 7.21})$$

O custo de operação da estação de bombeamento,  $C_h$ , é dado pela equação (6.22). Substituindo os valores encontrados naquela equação tem-se:

$$C_h = \frac{0,4204}{101,96 \times 0,65} 2920 \times 12,36 = 228,94 \text{ umt/m/ano} \quad (\text{eq. 7.22})$$

Considerando ainda que a vida útil do projeto é igual a 30 anos, e uma taxa de juros anual igual a 12%, determina-se o coeficiente de amortização (eq. 6.21) que será:

$$a = \frac{(1 + 0,12)^{30} 0,12}{(1 + 0,12)^{30} - 1} = 0,1241 \quad (\text{eq. 7.23})$$

De posse desses valores, executa-se a otimização da rede, conforme a metodologia apresentada no Capítulo VI.

### 7.1.2.3.1. 1ª Etapa

Nesta primeira etapa são consideradas como variáveis de decisão, os diâmetros dos tubos, as vazões nos trechos e a cota de cabeceira. Procedeu-se de forma semelhante ao caso em que a cota de cabeceira é constante, elaborou-se a função objetivo e as restrições, colocando-se em seguida na planilha eletrônica Excel, e utilizando a ferramenta Solver para se achar o custo mínimo da rede. Os resultados da otimização são apresentados nas tabelas 7.32a, 7.32b, 7.33a, 7.33b, 7.34a, 7.34b, 7.35a e 7.35b.

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	583,3	2540	420,43	9,13	1,6
2	492,5	350	292,32	1,46	1,5
3	471,0	1140	248,88	4,40	1,4
4	448,9	1430	208,59	5,03	1,3
5	345,9	1020	128,11	5,17	1,4
6	304,2	1430	80,33	5,72	1,1
7	100,0	1710	0,01	0,00	0,0
Custo Tubos (umt)				132.684.111	
Custo Tubos Amortizado (umt)				16.471.891	
Custo Anual do Bombeamento (umt)				4.471.073	
Cota Ótima do Reservatório R-9 (m)				49,52	

Tabela 7.32a - Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
A	40,4	5,0	35,4
B	38,9	5,0	33,9
C	34,5	4,0	30,5
D	29,5	4,5	25,0
E	35,2	4,5	30,7
F	29,5	4,5	25,0

Tabela 7.32b - Resultados da primeira etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	421,8	220	208,5	1,05	1,5
2	237,9	190	69,7	1,58	1,6
3	231,0	295	59,2	2,09	1,4
4	210,2	390	51,8	3,41	1,5
5	100,0	370	-6,9	-2,87	-0,9
6	362,8	190	138,8	0,89	1,3
7	190,6	310	30,2	1,61	1,1
8	178,9	205	25,0	1,02	1,0
9	160,1	305	19,8	1,69	1,0
10	148,5	295	13,8	1,21	0,8
11	308,6	300	101,3	1,72	1,4
12	304,6	290	96,1	1,60	1,3
13	100,0	180	2,9	0,28	0,4
14	100,2	315	6,1	1,93	0,8
15	241,8	300	54,4	1,46	1,2
16	239,9	295	51,8	1,36	1,1
17	100,0	215	-6,5	-1,49	-0,8
18	161,2	140	14,1	0,40	0,7
19	140,6	220	9,9	0,63	0,6
20	105,0	220	5,7	0,94	0,7
21	263,2	285	78,4	2,20	1,4
22	250,0	300	70,5	2,00	1,4
23	100,0	315	-2,1	-0,28	-0,3
24	100,0	170	3,1	0,30	0,4
Custo dos Tubos (umt)				35.792.593	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				4.443.423	

Tabela 7.33a - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,5	4,5	24,0
2	27,6	5,0	22,6
3	25,8	4,5	21,3
4	24,2	5,0	19,2
5	21,4	3,5	17,9
6	24,8	3,5	21,3
7	26,9	3,5	23,4
8	26,0	5,0	21,0
9	24,9	6,0	18,9
10	23,2	6,0	17,2
11	22,0	6,0	16,0
12	22,3	6,0	16,3
13	21,6	6,0	15,6
14	21,0	6,0	15,0
15	20,1	5,0	15,1
16	19,8	3,0	16,8
17	20,0	3,5	16,5
18	22,0	6,0	16,0
19	19,9	3,5	16,4
20	18,6	3,5	15,1

Tabela 7.33b - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	214,9	110,0	48,2	0,76	1,3
2	177,7	280,0	31,9	2,27	1,3
3	169,9	225,0	28,2	1,81	1,2
4	100,0	200,0	8,3	2,19	1,1
5	100,0	190,0	4,1	0,56	0,5
6	146,0	285,0	19,1	2,33	1,1
7	158,3	210,0	23,8	1,73	1,2
8*	200,0	240,0	27,5	0,89	0,9
9*	200,0	250,0	30,7	1,13	1,0
10*	200,0	340,0	14,2	0,37	0,5
11*	200,0	270,0	11,6	0,20	0,4
12	100,0	240,0	9,5	3,41	1,2
13	100,0	160,0	7,4	1,43	0,9
14	100,0	260,0	3,5	0,56	0,4
15	100,0	250,0	6,1	1,53	0,8
16	104,4	330,0	10,7	4,71	1,2
17	100,0	230,0	6,0	1,39	0,8
18	100,0	385,0	2,1	0,33	0,3
19	100,0	160,0	4,2	0,50	0,5
20	117,2	330,0	8,9	1,91	0,8
21	142,6	210,0	15,2	1,26	1,0
22	100,0	150,0	8,8	1,83	1,1
23	100,0	255,0	6,7	1,88	0,9
24	100,0	260,0	-2,5	-0,31	-0,3
25	100,0	230,0	0,7	0,03	0,1
Custo dos Tubos (umt)				12.367.543	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				1.535.352	

Tabela 7.34a - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável (\* tubos de cimento amianto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,7	5,0	23,7
2	28,4	6,0	22,4
3	28,2	4,5	23,7
4	24,8	4,5	20,3
5	23,3	4,0	19,3
6	23,9	4,0	19,9
7	25,4	4,0	21,4
8	27,2	4,3	22,9
9	21,5	4,0	17,5
10	19,6	4,0	15,6
11	19,3	4,0	15,3
12	19,3	4,0	15,3
13	20,7	4,0	16,7
14	19,0	4,0	15,0
15	19,5	4,5	15,0
16	21,4	4,0	17,4
17	22,7	2,5	20,2
18	23,2	2,5	20,7
19	25,0	3,5	21,5
20	26,7	4,5	22,2
21	27,6	5,0	22,6

Tabela 7.34b - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável

Trecho	Diâmetro (mm)	Comprimento (m)	Vazão (l/s)	Perda de carga (m)	Velocidade (m/s)
1	148,4	115	34,6	2,60	2,0
2	100	180	13,7	5,01	1,7
3	100	140	9,0	1,79	1,1
4	100	215	7,0	1,72	0,9
5	100	175	4,4	0,59	0,6
6	100	180	0,1	0,00	0,0
7	100	260	4,2	0,81	0,5
8	100	205	12,6	4,89	1,6
9*	200	255	16,3	0,36	0,5
10*	200	260	18,4	0,46	0,6
11*	200	275	13,0	0,25	0,4
12*	200	315	9,8	0,17	0,3
13	100	200	8,2	2,14	1,0
14	100	175	5,4	0,86	0,7
15	100	300	-3,8	-0,77	-0,5
16	100	250	-0,6	-0,02	-0,1
Custo dos Tubos (umt)				4.095.801	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				508.468	

Tabela 7.35a - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável (\*tubos de cimento aminanto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	32,6	5,0	27,6
2	32,4	4,7	27,7
3	32,2	5,0	27,2
4	30,1	5,0	25,1
5	29,2	5,0	24,2
6	30,2	4,5	25,7
7	28,4	3,0	25,4
8	28,4	4,5	23,9
9	26,7	4,0	22,7
10	26,1	3,0	23,1
11	26,1	4,5	21,6
12	26,9	4,5	22,4
13	31,8	4,5	27,3
14	32,2	5,0	27,2

Tabela 7.35b - Resultados da primeira etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável

## 7.1.2.3.2. 2ª Etapa

Com os resultados dos diâmetros, vazões e cota de cabeceira, obtidos na etapa anterior, executa-se a segunda etapa, onde os comprimentos dos subtrechos, vazões e cota de cabeceira serão agora tidos como variáveis de decisão do processo de otimização.

Os resultados finais da otimização considerando a cota de cabeceira como variável são mostrados nas tabelas 7.36a, 7.36b, 7.37a, 7.37b, 7.38a, 7.38b, 7.39a e 7.39b.

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	2540,0	600	420,4	7,96	1,5
2	1140,0	500	292,4	1,36	1,5
3	1430,0	500	248,9	3,29	1,3
4	508,8	400	208,6	6,34	1,7
	921,2	450			1,3
5	1020,0	350	128,1	4,88	1,3
6	1430,0	300	80,3	6,11	1,1
7	1710,0	100	0,0	0,00	0,0
Custo Tubos (umt)				132.951.913	
Custo Tubos Amortizado (umt)				16.505.137	
Custo Anual do Bombeamento (umt)				4.226.117	
Custo Total Anual Amortizado (umt)				20.731.254	
Cota Ótima do Reservatório R-9 (m)				48,45	

Tabela 7.36a - Resultados da segunda etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
A	40,5	5,0	35,5
B	39,1	5,0	34,1
C	35,8	4,0	31,8
D	29,5	4,5	25,0
E	35,6	4,5	31,1
F	29,5	4,5	25,0

Tabela 7.36b - Resultados da segunda etapa da otimização do Grande Anel considerando a cota de cabeceira variável



Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	220	400	208,5	1,36	1,7
2	190	250	65,7	1,36	1,3
3	110,6	200	55,2	2,34	1,8
	184,4	250			1,1
4	390	200	47,8	3,75	1,5
5	270	100	-8,9	-3,37	-1,1
6	190	400	142,8	0,58	1,1
7	310	200	32,2	1,43	1,0
8	205	200	27,0	0,68	0,9
9	305	200	21,8	0,68	0,7
10	285	150	15,8	1,43	0,9
11	300	300	103,2	2,04	1,5
12	290	300	98,0	1,46	1,4
13	180	100	0,4	0,01	0,0
14	315	100	3,6	0,72	0,5
15	300	250	52,5	1,16	1,1
16	295	250	49,9	1,04	1,0
17	215	100	-8,4	-2,44	-1,1
18	140	150	13,6	0,53	0,8
19	117,0	100	9,4	1,80	1,2
	103,0	150			0,3
20	220	100	5,2	1,00	0,7
21	285	300	80,9	1,23	1,1
22	231,0	250	73,0	1,89	1,5
	69,0	300			1,0
23	315	100	-2,6	-0,42	-0,3
24	170	100	2,6	0,21	0,3
Custo dos Tubos (umt)				35.792.593	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				4.443.423	

Tabela 7.37a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,1	4,5	23,6
2	27,6	5,0	22,6
3	25,5	4,5	21,0
4	24,1	5,0	19,1
5	20,7	3,5	17,2
6	24,4	3,5	20,9
7	26,8	3,5	23,3
8	26,1	5,0	21,1
9	25,4	6,0	19,4
10	24,8	6,0	18,8
11	23,3	6,0	17,3
12	23,3	6,0	17,3
13	22,8	6,0	16,8
14	21,0	6,0	15,0
15	20,0	5,0	15,0
16	21,4	3,0	18,4
17	20,9	3,5	17,4
18	22,8	6,0	16,8
19	19,5	3,5	16,0
20	18,5	3,5	15,0

Tabela 7.37b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 3 considerando a cota de cabeceira variável

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	110	200	45,4	0,96	1,4
2	280	200	34,7	1,49	1,1
3	225	200	31,0	0,97	1,0
4	200	100	9,7	2,93	1,2
5	190	100	5,5	0,97	0,7
6	285	150	17,2	1,68	1,0
7	210	150	21,9	1,93	1,2
8*	240	200	25,6	0,78	0,8
9*	250	200	28,8	1,01	0,9
10*	340	200	13,4	0,33	0,4
11*	270	200	10,8	0,18	0,3
12	240	100	8,7	2,89	1,1
13	160	100	6,6	1,16	0,8
14	260	100	4,6	0,96	0,6
15	250	100	7,2	2,11	0,9
16	330	100	10,9	5,99	1,4
17	230	100	6,2	1,46	0,8
18	385	100	2,6	0,49	0,3
19	160	100	3,7	0,40	0,5
20	227,1	100	8,4	2,72	1,1
	102,9	150			0,5
21	210	150	14,7	0,92	0,8
22	150	100	9,1	1,96	1,2
23	255	100	7,0	2,05	0,9
24	260	100	-2,8	-0,39	-0,4
25	230	100	0,4	0,01	0,0
Custo dos Tubos (umt)				12.367.543	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				1.535.352	

Tabela 7.38a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável (\* tubos de cimento amianto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	28,5	5,0	23,5
2	28,2	6,0	22,2
3	28,0	4,5	23,5
4	25,1	4,5	20,6
5	24,0	4,0	20,0
6	24,9	4,0	20,9
7	27,0	4,0	23,0
8	28,0	4,3	23,7
9	22,0	4,0	18,0
10	20,0	4,0	16,0
11	19,6	4,0	15,6
12	19,6	4,0	15,6
13	21,1	4,0	17,1
14	19,1	4,0	15,1
15	19,5	4,5	15,0
16	22,2	4,0	18,2
17	23,1	2,5	20,6
18	24,1	2,5	21,6
19	24,8	3,5	21,3
20	26,8	4,5	22,3
21	27,5	5,0	22,5

Tabela 7.38b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 4 considerando a cota de cabeceira variável

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Vazão (l/s)	Perda de Carga (m)	Velocidade (m/s)
1	115	150	34,7	2,48	2,0
2	180	100	13,6	4,97	1,7
3	140	100	8,9	1,77	1,1
4	215	100	7,0	1,71	0,9
5	175	100	4,4	0,58	0,6
6	180	100	0,1	0,00	0,0
7	260	100	4,2	0,82	0,5
8	205	100	12,6	4,91	1,6
9*	255	200	16,3	0,36	0,5
10*	260	200	18,4	0,46	0,6
11*	275	200	13,0	0,25	0,4
12*	315	200	9,8	0,17	0,3
13	200	100	8,2	2,16	1,0
14	175	100	5,4	0,87	0,7
15	300	100	-3,8	-0,78	-0,5
16	250	100	-0,6	-0,02	-0,1
Custo dos Tubos (umt)				4.095.801	
Custo dos Tubos Amortizado (umt)				508.468	

Tabela 7.39a - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável (\*tubos de cimento amianto)

Nó	Cota Piezométrica (m)	Cota do Terreno (m)	Pressão Disponível (m)
1	33,1	5,0	28,1
2	32,9	4,7	28,2
3	32,7	5,0	27,7
4	30,5	5,0	25,5
5	29,7	5,0	24,7
6	30,6	4,5	26,1
7	28,9	3,0	25,9
8	28,9	4,5	24,4
9	27,2	4,0	23,2
10	26,6	3,0	23,6
11	26,6	4,5	22,1
12	27,4	4,5	22,9
13	32,3	4,5	27,8
14	32,7	5,0	27,7

Tabela 7.39b - Resultados da segunda etapa da otimização do Setor 5 considerando a cota de cabeceira variável

O custo total anual da rede é mostrado na tabela 7.40, enquanto que uma comparação de custos totais anuais considerando os resultados obtidos para os casos de cota de cabeceira constante e variável, é apresentada na tabela 7.41. Esta tabela mostra que houve uma economia de 4,6% quando se compara o caso em que a cota de cabeceira é otimizada (48,45 m) com o caso em que esta cota é tida como fixa (54 m). Pode-se verificar que os custos para os setores 3, 4 e 5 da rede não foram alterados, isso ocorreu devido ao fato de que as cotas piezométricas nas entradas dos setores 3 e 4 foram iguais nos dois casos estudados. Já no setor 5, a cota de entrada não influenciou o resultado, pois a restrição que não permite a diminuição do custo neste setor, é a velocidade máxima admissível.

Setor	Custo (umt/ano)	% custo total
Grande Anel	16.505.137	60,6%
Setor 3	4.443.423	16,3%
Setor 4	1.535.352	5,6%
Setor 5	508.468	1,9%
Energia	4.226.117	15,5%
<b>Total</b>		<b>27.218.497</b>

Tabela 7.40 – Custo total anual da rede para o caso em que a cota de cabeceira é tida como variável

Setor	Cota de Cabeceira	
	54 m	48,45 m
Grande Anel	15.568.192,00	16.505.137,00
Setor 3	4.443.423,00	4.443.423,00
Setor 4	1.535.352,00	1.535.352,00
Setor 5	508.468,00	508.468,00
Energia	6.412.224,00	4.226.117,00
<b>Total</b>	<b>28.467.659,00</b>	<b>27.218.497,00</b>
<b>Economia</b>		<b>4,6%</b>

Tabela 7.41 – Comparação dos resultados para as duas considerações a respeito das cotas de cabeceira.

## 7.2. Comentários

Como foi visto nos exemplos mostrados, o método da Programação Não Linear aplicado no dimensionamento econômico de redes malhadas mostrou-se bastante eficiente, alcançando para as duas redes analisadas os menores valores dentre as metodologias comparadas.

No início da pesquisa, procurou-se dimensionar as redes malhadas, apenas com a segunda etapa do método, onde foram considerados quatro diâmetros candidatos para cada trecho. Assim, resolveu-se o Exemplo 1, obtendo-se como melhor resultado o valor de 416.777 umt (Formiga e Gomes, 1998). No entanto, ao se aplicar esta metodologia a redes maiores, como o Setor 3 e 4 do Exemplo 2, que tem 24 e 25 trechos respectivamente, nem sempre era possível se obter um resultado viável. Esse impasse era fruto de dois fatores: a quantidade de variáveis de decisão - cada trecho possui 5 variáveis (quatro comprimentos dos subtrechos e uma vazão) - e a necessidade de valores iniciais próximos ao ótimo. Verificou-se que a necessidade de “bons” valores iniciais, aumenta a medida que se aumenta o número de variáveis de decisão.

A partir dessas conclusões optou-se por desmembrar o problema em duas etapas como foi exposto no Capítulo VI. Na primeira etapa trabalhou-se com duas variáveis de decisão por trecho (um diâmetro contínuo e uma vazão), e com três variáveis de decisão na segunda (dois comprimentos e uma vazão). Com essa abordagem do problema, ficou diminuída consideravelmente a necessidade de “bons” valores iniciais. Entretanto, por se tratar de um *método viável* de otimização, (Ver item 5.6.2), o Gradiente Reduzido necessita que os valores iniciais sejam valores viáveis, ou seja, a solução inicial adotada deve estar contida na região factível ou viável do problema.

No Exemplo 2, cada setor da rede foi dimensionado separadamente. Procedeu-se dessa forma devido a uma incapacidade do Excel trabalhar com um número muito grande de equações de restrição, além do fato de que a quantidade de variáveis de decisão que iriam ser otimizadas ao mesmo tempo, seria muito grande. Como verificação foi feita uma tentativa, considerando a

otimização do grande anel, juntamente com o setor 3 (Gomes e Formiga, 1998), obtendo-se o mesmo resultado de quando se fez a otimização separada. Essa situação foi ocasionada pelo fato de a pressão obtida para o nó do setor 3 no grande anel ter sido igual a mínima requerida (25 mca), sendo que o mesmo ocorreu para o setor 4.

Diferentemente dos setores 3 e 4 onde as restrições ativas eram as pressões mínimas requeridas, no setor 5 a restrição ativa foi a velocidade máxima admissível no trecho 1, ficando as pressões em todos os nós muito superiores a mínima requerida de 15 mca. O método não foi capaz de reduzir mais a pressão devido ao fato de que os diâmetros encontrados para todos os trechos, exceto o trecho 1, foram os menores diâmetros comerciais adotados (100 mm).

Sabe-se que existe uma tendência dos algoritmos de programação não linear pararem o processo de otimização ao ficar em um *ótimo local*. Embora tenha se verificado que isto não ocorreu nos exemplos estudados, é necessário testar se a solução encontrada é a melhor. Para se fazer esta verificação, pode-se proceder de duas formas: modificando os valores iniciais, ou então mudando a função objetivo que se quer otimizar. As duas hipóteses foram estudadas por este trabalho.

Para o caso em que a cota de cabeceira é tida como fixa, a função objetivo que minimizava os custos da rede foi substituída por uma função semelhante à proposta por Cirilo (1997) que seria:

$$\text{Max } F = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^2}{D_i^5} \quad (\text{eq 7.24})$$

Neste caso, para a primeira etapa, as variáveis de decisão e as restrições seriam as mesmas da metodologia proposta no Capítulo VI. Para a segunda etapa a função objetivo alternativa a ser otimizada seria:

$$\text{Max } F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{Q_i^2 l_{ij}}{D_{ij}^5} \quad (\text{eq. 7.25})$$



tendo como variáveis de decisão os comprimentos dos sub-trechos e as vazões, sendo as restrições as mesmas atribuídas à segunda etapa da metodologia proposta no Capítulo VI.

Em cada etapa, após se fazer a otimização com a função objetivo alternativa, executa-se um novo dimensionamento através da função objetivo original - que minimiza os custos. Esse processo é repetido até que não haja mais mudança no resultado final. Nos exemplos resolvidos neste trabalho, o ótimo foi alcançado em todas as tentativas foi igual ao da primeira (na qual se utilizou a função objetivo original).

Para o caso em que se considera a cota de cabeceira como variável, utilizou-se o critério de se modificar, arbitrariamente, as variáveis de decisão, verificando-se que a solução encontrada foi a ótima. Novamente, a metodologia mostrou-se bastante confiável para o exemplo resolvido, e a solução ótima sempre convergiu para os mesmos valores das variáveis de decisão.

Uma discussão que vem se estendendo a mais de uma década é a de que o caminho adotado entre a cabeceira e os nós para a formulação das restrições de pressão mínima requerida, influenciavam o resultado final da otimização. Essa questão foi inicialmente levantada por Goulter et al. (1986) e negada por Kessler e Shamir (1989), que afirmou que o resultado independe do caminho adotado. Ambos os trabalhos citados, utilizavam a técnica do gradiente de programação linear para se otimizar a rede. No primeiro exemplo, que foi o adotado por esses autores para se basear as suas conclusões, procurou-se montar as mais diferentes configurações para as equações das restrições nos nós. Entretanto, para qualquer que fosse a configuração utilizada, o resultado da otimização foi sempre o mesmo, ou seja, o resultado da otimização da rede independe da configuração de fluxo adotado para se elaborar as equações de restrição.

## Capítulo VIII

### Conclusões e Recomendações

Devido ao seu alto grau de complexidade o dimensionamento de redes malhadas tem sido feito, na maioria dos casos práticos, baseado em métodos tradicionais, como o de Hardy-Cross e o Seccionamento Fictício. Essas metodologias não consideram a questão econômica e fazem apenas o balanceamento das vazões na rede de distribuição, ficando a minimização de custos a critério da experiência do projetista, que, diante das dificuldades envolvidas e do volume de cálculos necessário, dificilmente conseguem atingir a solução de mínimo custo para a rede.

Dos anos setenta até hoje, foram desenvolvidos vários métodos de dimensionamento econômico de redes, a maioria desses, baseados em técnicas matemáticas de otimização. Entretanto, devido a falta de programas específicos ou pela necessidade da implantação desses métodos através de alguma linguagem de programação, essas técnicas de otimização não foram absorvidas pelos engenheiros projetistas. Assim, procurou-se desenvolver neste trabalho uma metodologia de dimensionamento econômico de redes, que além de eficiente, fosse de fácil assimilação por parte dos usuários finais. A metodologia proposta executa o dimensionamento em duas etapas.

Essa divisão do problema foi feita de forma a melhorar a eficiência do algoritmo de otimização na busca do custo ótimo da rede.

O método proposto mostrou-se bastante eficaz na resolução dos problemas em que ele foi aplicado. Essa eficácia se deve a utilização de uma técnica de programação não linear para se fazer o dimensionamento das redes malhadas, que é um problema regido por equações que possuem um alto grau de não linearidade. Além disso, ao se incluir as vazões como variáveis de decisão, procurou-se unir em um mesmo processo o balanceamento das vazões nas redes e a minimização dos custos (que é feita através de modificações nas tubulações), pois, todas as metodologias pesquisadas executavam esses dois processos separadamente.

Além de possuir uma eficiência igual ou superior a todos os métodos abordados nesta dissertação, o dimensionamento econômico de redes malhadas através da programação não linear apresenta como vantagens: o fato de poder ser implementado através de qualquer pacote computacional de otimização, no que se incluem as planilhas eletrônicas que são as principais ferramentas da informática utilizadas pelos projetistas; e a facilidade que há na sua utilização e compreensão, bem como a possibilidade de modificações na estrutura da função objetivo ou na inclusão de novas restrições, o que dá ao modelo uma maior flexibilidade em se ajustar ao estilo do engenheiro projetista.

A não capacidade das ferramentas de otimização, contidas nas planilhas eletrônicas, de trabalhar com um número muito grande de equações de restrições (pois esta capacidade é limitada a um valor máximo de 256 restrições), pode ser considerada a desvantagem de se utilizar essas planilhas, como ferramenta computacional, para o dimensionamento otimizado de redes malhadas. Dessa forma, caso se necessite fazer o dimensionamento, para uma rede de grande porte, que exceda esse número

de restrições, pode-se utilizar outra ferramenta computacional mais potente como o MathLab.

Nos dois exemplos resolvidos neste trabalho, verificou-se que em alguns trechos a vazão calculada tende a ser nula (como os trechos 4 e 8 do exemplo1), o que implica numa transformação fictícia da rede malhada calculada em uma ramificada. Isto se justifica pelo fato de que, normalmente, uma rede ramificada é mais barata do que uma malhada de mesmo porte. Pode-se evitar esta situação através da introdução de uma restrição de vazão mínima para os trechos, ou pela limitação dos diâmetros mínimos a serem utilizados, que foi a técnica utilizada neste trabalho.

A potencialidade mostrada pelo método da programação não linear justifica a importância de serem realizados mais trabalhos nesta linha de pesquisa. Esses trabalhos poderiam estudar:

- uma forma de se reduzir a quantidade de restrições ao problema, evitando-se a redundância das mesmas;
- o comportamento da metodologia da programação não linear ao se dimensionar uma rede que é abastecida por mais de uma fonte;
- a inclusão da confiabilidade de operação do sistema como uma restrição no processo de otimização;
- uma expressão que relacionasse o custo do reservatório com o volume e a altura deste;
- a consideração como variáveis de decisão das classe de pressões dos tubos.

## Referências Bibliográficas

ABADIE, J.; CARPENTIER, J.. Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to Case of Non Linear Constraints, in: OPTIMIZATION. Ed. R. Fletcher, Chap. 4, p. 37-47, Academic Press, London, UK, 1969.

ALPEROVITS, E.; SHAMIR, U. Design of Optimal Water Distribution Systems. Water Resources Research. AGO. Vol. 13, Nº 6, p. 885-900. New York, NY, USA, 1977.

ALZAMORA, Fernando Martínez; TÁRREGA, Felipe Sanz. Dimensionado Económico de Tuberías de Presión, in: Curso de Ingeniería Hidráulica Aplicada a los Sistemas de Distribución de Agua. Catedra de Mecánica de Fluidos Universidad Politecnica de Valencia. Madrid, 1987.

AZEVEDO NETTO, José Martiniano; Tratamento de Água, in: Planejamento de Sistemas de Abastecimento de água. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR, 1973.

AZEVEDO NETTO, José Martiniano; ALVAREZ, Guillermo Acosta. Manual de hidráulica. Volume I, 7ª Edição. Editora Edgard Blucher Ltda., São Paulo, SP, 1991.

BARBOSA, Paulo S. F.. Modelos de Programação Linear em Recursos Hídricos, in: Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos. Organizador: Rubem La Laina Porto. Editora Universidade/UFGRS/ Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, RS, 1997.

BHAVE, Pramod R.; SONAK, Vilas V.. *A Critical Study of the Linear Programming Gradient Method for Optimal Design of Water Supply Networks.*

Water Resources Research. AGO. Vol. 28, Nº 6, p. 1577-1584. New York, NY, USA, 1992.

→  
CAP-4  
p. 41  
42  
45  
49

BROOKE, A. KENDRICK, D.; MEEARUS, A.. *GAMS: a User's Guide.* The Scientific Press. Redwood City, CA, USA, 1988.

CAGEPA – Companhia de Água e Esgoto do Estado da Paraíba. *Projeto da Rede Distribuidora do Bairro do Bessa.* João Pessoa, PB, 1982.

CEMBROWICZ, R. G.. *Evolutions Strategies and Genetic Algorithms in Water Supply and Waste Water Systems Design.* Water Resources and Distribution Editors. W. R. Blain & K. L. Katsifaarakis. Computational Mechanics Publication. Vol 1, p 27-41. Southampton, Boston, 1994.

CEMBROWICZ, R. G.; ATEs, S.; NGUYEN, K M. *Mathematical Optimization of the Main Water Distribution System City of Hanoi, Vietnam.* ???????????????????????????????.

CIRILO, José Almir. *Programação Não Linear Aplicada a Recursos Hídricos, in: Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos.*

Organizador: Rubem La Laina Porto. Editora Universidade/UFGRS/ Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, RS, 1997.

psg 46

CLEMENT, R.; GALLANT, A.. *El Riego por Aspersión.* Editores Tecnicos Asociados S.A. Baecelona España, 1986.

DACACH, Nelson Gandur. *Sistemas Urbanos de Água.* 2ª Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, RJ, 979.

- DUAN, Ning; MAYS, Larry W.; LANSEY, Kevin E.. Optimal Reliability-Based Design of Pumping and Distribution Systems. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol 116 N° 2, p. 249-267, New York, NY - USA ,1990.
- EIGER, G.; SHAMIR, U. BEM-TAL, A.. Optimal Design of Water Distribution System. : Water Resources Research. AGO. Vol. 30, N° 9, p. 2937-2946. New York, NY, USA, 1994.
- EL-BAHARAWY, A.; SMITH, A. A.. Application of MINOS to Water Collection and Distribution Networks. Civil Engineering Systems, Vol 2, p. 38-49, 1985.
- EL-BAHARAWY, A.; SMITH, A. A.. A Methodology for Optimal Design of Pipe Distribution Networks. Canadian Joint of Civil Engineering, Vol. 14, p. 207-215. Canada, 1987.
- FIACCO, A.V.; McCORMICK, G. P. Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non Linear Programming. Manual Science. Vol. 10, p. 601-617, 1964.
- FIACCO, A.V.; McCORMICK, G. P. Extensions of SMUT for Nonlinear Programming: Equality Constraints and Extrapolation. Manual Science, Vol. 12, p. 816-828, 1966.
- FIACCO, A.V.; McCORMICK, G. P. The Slacked Unconstrained Minimization Technique for Convex Programming. SIAM Journal Applied Mathematics, p. 505-515, 1967.
- FORMIGA, Klebber Teodomiro Martins. Dimensionamento Econômico de Sistemas de Adução. Relatório Final do Projeto de Bolsa de Iniciação Científica. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1997.
- FORMIGA, Klebber Teodomiro Martins; GOMES, Heber Pimentel. Otimização de Redes Malhadas Utilizando Programação Não Linear. Anais em CD-ROM do VII

- SILUBESA – Simpósio Luso-Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental. João Pessoa, PB, 1998.
- FOWLER, A. J.. WATER. Municipal Hydraulics Vancouver, British Columbia, Canadá, 1990.
- FRANK, M.; WOLFE, P.. An Algorithm for Quadratic Programming. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, p. 95-110, 1956.
- FRITZCHE, Helmut. Programação Não Linear: análise e métodos. Editora Edgard Blucher. São Paulo, SP, 1979.
- FUJIWARA, O.; JENCHAIMAHAKOON, B.; EDIRISINGHE, N. C. P.. A Modified Linear Programming Gradient Method for Optimal Design of Looped Water Distribution Networks. Water Resources Research. AGO. Vol. 23, Nº 6, p. 977-982. New York, NY, USA, 1987.
- FUJIWARA, O.; KHANG, D. B.. A Two-Phase Decomposition Method for Optimal Design of Looped Water Distribution Networks. Water Resources Research. AGO. Vol. 26, Nº 4, p. 539-549, New York, NY, USA, 1990.
- GARCEZ, Lucas Nogueira. Elementos de engenharia hidráulica e ambiental. 2ª Edição, Editora Edgard Blucher Ltda., São Paulo, SP, 1974.
- GESSLER, J.; WALSKY, T. M. Technical Report EL-85-11: Water Distribution System Optimization. U.S. Army Corps Engineers, Washington, DC, USA, 1985.
- GESSLER, J.. Pipe Network Optimization by Enumeration. Proc. Computer Applications Water Resources, ASCE. New York, NY, USA, 1985.
- GOLDBERG, D. E.. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley Publishing Co. Reading Massachusetts, USA, 1989.



GOMES, Heber Pimentel. REDES: Programa para Dimensionamento de Redes Hidráulicas Pressurizadas. Universidade federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1995.

GOMES, Heber Pimentel. Engenharia de Irrigação: hidráulica dos sistemas pressurizados aspersão e gotejamento. 2ª Edição. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1997.

GOMES, Heber Pimentel; FORMIGA, Klebber T. M.. Dimensionamento Conjunto de Redes Malhadas Utilizando a Programação Não Linear. Anais em CD-ROM do IV Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste. Campina Grande, PB, 1998.

GOUTER, I. C.; MORGAN, D. R.. Optimal Urban Water Distribution Design Water Resources Research. AGO. Vol. 21, Nº 5, p. 642-652. New York, NY, USA, 1985.

<sup>CAP II pág 21 p. 28-2</sup>  
GOUTER, Ian C.; LUSSIER, Bernard M.; MORGAN, David R.. Implications of Head Loss Path Choice in Optimization of Water Distribution Networks. Water Resources Research. AGO. Vol. 22, Nº 5, p. 819-822, New York, NY, USA, 1986.

GOUTER, I. C. Systems Analysis Water-Distribution Network Design: From theory to Practice. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 118. N. 3. p. 238-248. New York, NY, USA, 1992.

GRANADOS, Alfredo. Infraestructuras de Regadíos – Redes Colectivas de Riego a Presión. Servicio de Publicación de E. T. S. I. de Caminos de la Universidad politécnica de Madrid, Espanha, 1990.

HAMBERG, Dan; SHAMIR, Uri. Schematic Models for Distribution Systems Design I: Combination Concept. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 114. N. 2. p. 129-162. New York, NY, USA, 1988.

- HIMMELBLAU, D. M.. Applied Nonlinear Programming, Ed. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1972.
- HOLLAND, J. H.. Adaptation in Natural and Artificial Systems. MIT Press. <sup>42</sup>  
Cambridge, Massachusetts, USA, 1975. <sup>pag 41</sup>
- HOLZAPFEL, E. A.; MARIÑO, M. A.; VALENZUELA, A.. Drip Irrigation Nonlinear Optimization Model. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol. 116, n.4, p. 479-493, New York, NY, USA, 1990.
- HOOKE R.; JEEVES, T. A.. Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. Journal of Association Computer Machinery, 8, p. 212-229, 1961.
- HUDSON, W. D.. Studies of Distribution System Capacity in Seven Cities. J. American Water Works Association, p. 157-164, USA, 1966.
- HWANG, Ned H. C. Fundamentos de Sistemas de Engenharia Hidráulica, Pratices/Hall do Brasil. Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- KARMAKAR, N. A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming. Combinatoria, nº. 4, p. 373-395, 1984.
- KARMELI, D., GADISH, Y.; MEYERS, S. Design of Optimal Water Distribution Networks <sup>2-8-43</sup>  
Networks. Journal of Pipeline Division, ASCE, Vol. 94, Nº 10, p. 1-10., New York, NY USA, New York, NY, USA, 1968.
- KESSLER, Avner; SHAMIR, Uri. Analysis of the Linear Programming Gradient Method for Optimal Design of Water Supply Networks. <sup>2-8-43</sup>  
Water Resources Research, Vol. 25, Nº 7, p. 1469-1480, New York, NY, USA, 1989.
- KHACHIYAN, L. G.. A New Polynomial Algorithm for Linear Programming. Soviet Mathematical Doklady, nº. 20, p.191-194.

LANSEY, Kevin E.; MAYS, Larry W.. Optimization Model for Water Distribution System Design. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol 115 N° 10, p. 1401-1419, New York, NY, USA, 1989. 45

LANSEY, Kevin E.; DUAN, Ning; MAYS, Larry W.; TUNG, Y.eou-Kuong. Water Distribution System Under Uncertainties. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol 115 N° 5, p. 630-644, New York, NY, USA, 1989

LASDON, L. S.; WARREN, A. D.; RATNER, M. S.. GRG2 User's Guide. University of Texas at Austin, Austin Tex, USA, 1984.

LEAL, Antônio Farias. Estudo Comparativo de Métodos de Otimização de Redes Malhadas Pressurizadas. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1995.

LEAL, Antônio Farias; GOMES, Heber Pimentel. Utilização da metodologia granados para a otimização de redes hidráulicas malhadas. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, Vol-1, p. 13-16, Campina Grande, PB, 1997. 46

LIEBMAN, J. S.; LASDON, L.; SCHRAGE, L.; WAREN, A.. Modeling and Optimization with GINO. The Scientific Press. Palo Alto, CA, USA, 1986.

LOUBSER, B. F.; GESSLER, J. Computer Aided Optimization of Water Distribution Networks. The Civil Engineering in South Africa, pp 413-422, Johannesburg, South Africa, 1990.

MARTINS, José Augusto. Adução; Reservatório de Distribuição; Rede de Distribuição, in: Planejamento de Sistemas de Abastecimento de água. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR, 1973.

MARTINS, José Rodolfo Scarati (Coordenador). CREDE-Cálculo de Redes de Conduitos Forçados; Hidráulica Computacional, São Paulo, 1997.

MATEUS, Geraldo Robson; LUNA, Henrique Pacca L.. Programação Não Linear. V Escola de Computação. Belo Horizonte, MG, 1986.

MONBALIU.J.; JO, J. H.; FRAISSSE, C. W.; VADAS, R. G.. Computer Aided Design Pipe Network, in: Water Resource Systems Applications. Friesen Printers, Winnipeg, Canada, 1990.

MURTAGH, B. A.. MINOS 5.1 User's Guide. Systems Optimization Laboratory. Department of Operations and Research, Stanford University, Stanford, CA, USA, 1987.

OLDE, M. WATSYS User's Manual. HCP Pty Ltd., Sydney, Austrália, 1985.

ORON, G.; KARMELI, D.. Procedure for Economical Evaluation of Water Networks Parameters. Water Resources Bulletin, Vol. 15, Nº. 4, p. 1050-1069, 1979.

POWELL, M. J. D.. An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives. Computer Journal. 7, p. 155-162, 1964.

QUINDRY, G. E., BRILL, E. D., LIEBMAN, J. C. e ROBINSON, A. R.. Comment on 'Design of Optimal Water Distribution Systems' by E. ALPEROVITS and U. SHAMIR. Water Resources Research, Vol. 15, Nº 6, p. 1651-1654. New York, NY, 1979.

ROBINSON, S. M.. A Quadratically Convergent Algorithm for General Nonlinear Programming Problems. Mathematical Programming, Vol. 3, p. 145-156, 1972.

ROSENBROCK, H. H.. An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function. Computer Journal, 3, p. 175-184, USA, 1960.



- TOLDINI, E.; PILATI, S.. *A Gradient Method for the Analysis of Pipe Networks.*  
Procedure of the International Conference on Computers Applications for Water Supply  
and Distribution. Leicester Polytechnic, Leicester, UK, 1987.
- WALSKI, Thomas M. et alli. <sup>Batalla dos modelos de rede</sup> *Battle of the Network Models: Epilogue* Journal of Water  
Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 113. N. 2. p. 191-203. New  
York, NY, USA, 1987.
- WOLFE, P.. *Methods of Nonlinear Programming: the Reduced Gradient Method,*  
*in Recent Advances in Mathematical Programming.* Editors Graves e Wolfe,  
McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1963.
- WOOD. D. J. *User's Manual Computer Analysis of Flow in Pipe Networks*  
*Including Extended Period Simulations.* University of Kentucky, Lexington, KY,  
USA, 1980. 158 74  
45
- ZANGWILL, W. I.. *Minimizing a Function without Calculating Derivatives.*  
Computer Journal, Vol. 10, p. 293-296, 1967.