



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



João Batista Siqueira Lustosa

## **Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o Ensino Básico**

Campina Grande - PB  
Agosto /2021



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



João Batista Siqueira Lustosa

## Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação  
em Matemática - CCT - UFCG, na modali-  
dade Mestrado Profissional, como requisito par-  
cial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Campina Grande - PB  
Agosto /2021

L972t

Lustosa, João Batista Siqueira.

Tópicos da história da matemática e suas contribuições para o ensino básico / João Batista Siqueira Lustosa. – Campina Grande, 2021.

77 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho".

Referências.

1. História da Matemática. 2. Contexto Histórico. 3. Sistemas de Numeração. 4. Antigos Egípcios. 5. Operações Básicas. 6. Solução de Equações. I. Barbosa Sobrinho, Jaime Alves. II. Título.

CDU 51:37.013(091)(043)

João Batista Siqueira Lustosa

## Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 26 de Agosto de 2021:

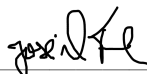


---

**Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho**  
Orientador - UFCG

---

**Prof. Dr. Airton Temistocles de Castro**  
Membro externo - UFPE



---

**Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes**  
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB

26 de Agosto de 2021

# Dedicatória

Ao meu Senhor Jesus e a minha família, que sempre foram a fonte de força, coragem e foco, da qual sempre usufruí na busca e conquista dos meus sonhos.

# Agradecimentos

A minha esposa e companheira, Hyarlla, a minha filha Lara Helena e ao meu filho Manuel Alaric, pelo amor, compreensão e paciência, sempre abundantes diante das minhas ausências para dedicar-se ao trabalho e ao mestrado.

Aos Professores, Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho e Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, pelas orientações e pelo apoio. Agradeço de coração pela prontidão em me atender, pela competência, paciência e por todas as sugestões tão valiosas e fundamentais para elaboração e conclusão deste trabalho, bem como o grande auxílio na minha formação profissional.

A UFCG, ao Corpo Docente da Unidade e a Coordenação do Programa PROFMAT que juntos contribuíram bastante para o meu desempenho no curso, sempre com muito profissionalismo destinaram seus conhecimentos para o engrandecimento dos meus.

A Banca Examinadora, composta pelos professores Dr. Airton Temistocles de Castro, membro Externo (UFPE) e Dr. José de Arimatéia Fernandes, membro Interno (UFCG) por toda ajuda e pelas observações que melhoram significativamente esse Trabalho de Conclusão de Curso.

Meu muito obrigado a todos os colegas da turma 2019. Não citarei nome por nome, mas cada um de vocês tem um lugar especial em meu coração, todos, sem exceção, foram importantíssimos para minha caminhada. Quero também externar minha gratidão aos inesquecíveis colegas, Tiago Maciel e Elania Hortins, companheiros de algumas disciplinas cursadas na UEPB, sempre estarão nas minhas lembranças em todos os momentos que passamos juntos.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, pelo apoio, força, pelas dicas colaborativas no desenvolvimento deste trabalho, ou uma simples palavra de incentivo. Vocês contribuíram muito para que eu chegasse até o final desse desafio.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática – SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

# Resumo

Este trabalho apresenta alguns Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem em algumas etapas da Educação Básica. Mostra as principais características dos Sistemas de Numeração Decimal Indo-arábico e Hieróglifo Egípcio, bem como suas aplicações no desenvolvimento dos algoritmos de resolução das operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Também descrevemos alguns métodos para resolução de equações de 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> graus, sem a utilização de fórmulas prontas desprovidas de riquezas didáticas. Através da leitura de algumas obras e trabalhos voltados para o contexto histórico da Matemática busquei exibir alguns métodos que podem ser trabalhados na Educação Básica visando uma abordagem da disciplina com melhores recursos metodológicos, podendo acrescentar mais sentido aos conteúdos uma vez que mostramos sua importância dentro de situações práticas relacionadas as necessidades reais da humanidade no que diz respeito ao seu desenvolvimento em diversas áreas. Foram esses recursos que me motivaram a elaborar este trabalho, com o intuito de implementar na sala de aula alguns desses métodos, sempre ressaltando seus aspectos históricos, bem como suas influências para alcançar a Matemática bem estruturada e coerente que conhecemos hoje.

**Palavras Chaves:** História da Matemática; Contexto Histórico; Sistemas de Numeração; Antigos Egípcios; Operações Básicas; Solução de Equações.

# Abstract

This work presents some Topics in the History of Mathematics and their contributions to the teaching-learning process in some stages of Basic Education. It shows the main features of the Indo-Arabic and Egyptian Hieroglyph Decimal Numbering Systems, as well as their applications in the development of algorithms for solving the basic arithmetic operations of addition, subtraction, multiplication and division. We also describe some methods for solving 1st, 2nd and 3rd degree equations, without the use of ready-made formulas devoid of didactic richness. By reading some works and works focused on the historical context of Mathematics, I sought to show some methods that can be worked on in Basic Education aiming at an approach to the discipline with better methodological resources, which can add more meaning to the contents since we show its importance within practical situations related to the real needs of humanity with regard to its development in various areas. It was these resources that motivated me to elaborate this work, in order to implement some of these methods in the classroom, always emphasizing their historical aspects, as well as their influences to achieve the well-structured and coherent Mathematics we know today.

**Keywords:** History of Mathematics; Historical context; Numbering Systems; Ancient Egyptians; Basic Operations; Solution of Equations.



# Lista de Tabelas

2.1	Classes e Ordens . . . . .	9
2.2	Valor Posicional dos algarismos em um numeral . . . . .	9
2.3	Valor Posicional = a quantidade de unidade . . . . .	10
2.4	Classes e escrita por extenso . . . . .	10
3.1	Multiplicação entre 23 e 85 . . . . .	28
3.2	Multiplicação entre 13 e 45 . . . . .	29
3.3	Multiplicação de 7 por 7 . . . . .	30
3.4	Multiplicação de 7 por 49 . . . . .	30
3.5	Multiplicação de 7 por 343 . . . . .	30
3.6	Multiplicação de 7 por 2401 . . . . .	30
3.7	Divisão de 184 por 8 . . . . .	47
3.8	Divisão de 19 por 8 . . . . .	48
3.9	Divisão de 203 por 15 . . . . .	48
3.10	Divisão de 100 por $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . . . . .	49
4.1	Multiplicação de 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . . . . .	52
4.2	Divisão de 15 por 5 . . . . .	53
4.3	Multiplicação de 3 por 4 . . . . .	53
4.4	Divisão de 21 por 6 . . . . .	54
4.5	Multiplicação de $\left(3 + \frac{1}{2}\right)$ por 5 . . . . .	55
5.1	Significado de alguns termos utilizados por Al-Khwarizmi . . . . .	58

# Lista de Figuras

2.1	Mapa do Egito Antigo . . . . .	11
2.2	Símbolos Hieróglifos e os seus valores . . . . .	12
2.3	Alguns numerais em símbolos hieróglifos . . . . .	13
2.4	Ênfase a característica aditiva . . . . .	13
2.5	Característica não posicional do Sistema Hieróglifo . . . . .	14
2.6	Técnica do Papiro de Harris . . . . .	14
3.1	Adição de 5 427 com 78 369 . . . . .	16
3.2	Adição com valores posicionais . . . . .	17
3.3	Adição da esquerda para direita . . . . .	17
3.4	Valores posicionais da esquerda para direita . . . . .	18
3.5	Adição no sistema hieróglifo egípcio . . . . .	18
3.6	Adição com a simbologia hieroglífica . . . . .	19
3.7	Adição com a simbologia hieroglífica . . . . .	19
3.8	Subtração entre 17 346 e 15 928 . . . . .	20
3.9	Subtração entre 5 000 e 2 987 . . . . .	21
3.10	Subtração entre 5 000 e 1 374 . . . . .	21
3.11	Subtração no sistema hieróglifo egípcio . . . . .	22
3.12	Subtração com a simbologia hieroglífica . . . . .	22
3.13	Subtração com a simbologia hieroglífica . . . . .	23
3.14	Subtração com a simbologia hieroglífica . . . . .	23
3.15	Subtração com a simbologia hieroglífica . . . . .	23
3.16	Subtração com a simbologia hieroglífica . . . . .	23
3.17	Multiplicação entre 7 453 e 82 . . . . .	24
3.18	Multiplicação entre 82 e 7 453 . . . . .	25

3.19	Multiplicação entre 82 e 7 453 . . . . .	25
3.20	Erro comum na multiplicação iniciada pela ordem das dezenas . . . . .	25
3.21	Multiplicação entre 5 674 e 39 iniciada pelas maiores ordens . . . . .	26
3.22	Multiplicação pelo método de duplicações . . . . .	27
3.23	Multiplicação entre 23 e 85 pelo método dos antigos egípcios . . . . .	28
3.24	Divisão de 86 por 6 . . . . .	33
3.25	Divisão de 196 por 12 . . . . .	34
3.26	Possível erro na divisão de 5 203 por 5 . . . . .	35
3.27	Divisão de 5 203 por 5 . . . . .	35
3.28	Representação geométrica da fração $\frac{5}{6}$ . . . . .	37
3.29	Transformação de números mistos em frações . . . . .	39
3.30	Transformação de números mistos em frações . . . . .	39
3.31	Transformação de frações em números mistos . . . . .	39
3.32	Transformação de frações em números mistos . . . . .	40
3.33	Representação geométrica de frações impróprias . . . . .	40
3.34	Representação geométrica de frações impróprias . . . . .	41
3.35	Representação geométrica de frações impróprias . . . . .	41
3.36	Representação hieroglífica de frações . . . . .	42
3.37	Divisão de 5 sacos de feijão por 8 pessoas . . . . .	45
3.38	Divisão de 6 pães por 7 empregados . . . . .	46

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.3	Organização . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Os Sistemas de Numeração</b>	<b>7</b>
2.1	O Sistema de Numeração Decimal Indo-Arábico . . . . .	8
2.2	O Sistema de Numeração no Antigo Egito . . . . .	11
2.2.1	Contexto Histórico . . . . .	11
2.2.2	O Sistema de Numeração Hieróglifo Egípcio . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Operações aritméticas nos sistemas indo-arábico e egípcio</b>	<b>15</b>
3.1	Adição no sistema indo-arábico . . . . .	15
3.2	Adição no sistema hieróglifo egípcio . . . . .	18
3.3	Subtração no sistema indo-arábico . . . . .	19
3.4	Subtração no sistema hieróglifo egípcio . . . . .	21
3.5	Multiplicação no sistema indo-arábico . . . . .	24
3.6	Multiplicação no sistema hieróglifo egípcio . . . . .	27
3.7	Divisão no sistema decimal indo-arábico . . . . .	31
3.8	Frações no sistema decimal indo-arábico . . . . .	36
3.8.1	Algumas ideias associadas as frações . . . . .	37
3.8.2	Números Mistos . . . . .	38
3.9	As Frações no Antigo Egito . . . . .	41
3.10	A divisão no Antigo Egito . . . . .	44
<b>4</b>	<b>O Método da Falsa Posição</b>	<b>50</b>

<b>5</b>	<b>Resolução de Equações Algébricas no contexto histórico da Matemática</b>	<b>57</b>
5.1	Contexto Histórico . . . . .	57
5.2	Al-Khwarizmi e os problemas do segundo grau . . . . .	58
5.3	Bhaskara e os Problemas do Segundo Grau . . . . .	61
5.4	Resolução de equações do 3 <sup>o</sup> grau por radicais . . . . .	67
5.4.1	Alguns personagens importantes e suas contribuições . . . . .	67
5.5	O Método de Cardano-Tartaglia . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
	Referências Bibliográficas . . . . .	74
	ANEXO A . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

Nos últimos anos, a Matemática tem sido ensinada de uma maneira isolada, como se fosse um conjunto de conceitos e fórmulas prontas e acabadas, destinado a memorização e com o único objetivo de resolver exercícios pré-determinados e repetitivos. Isso tem amedrontado os alunos, levando muitos a escolherem suas carreiras universitárias nas áreas em que acreditam não precisar de Matemática, além disso muitas das vezes acarreta o abandono dos estudos por falta de motivação e principalmente por falta de identificação com o que lhe é apresentado em sala aula. Muitas vezes, o contato com seus conceitos e ferramentas torna-se difícil, pois a imagem que se tem dessa disciplina é marcada por seu caráter mecânico, abstrato e formal, o que produz uma sensação de distância na maioria das pessoas. [17]

Baseados na veracidade destes fatos e com a convivência na prática, permitida por mais de 10 anos atuando na Educação Básica, entendo que a Matemática deva ser ensinada de forma a permitir a formação de alunos críticos que percebam as mudanças conceituais e os problemas que existiram e que existem na construção dos seus conhecimentos, bem como no desenvolvimento tecnológico da humanidade. Trabalhar os conteúdos da Educação Básica contextualizados com seus precedentes históricos ajuda a mostrar que a Matemática não é apenas aquilo que o ensino atual lhe permite compreender. Quando encarada como uma disciplina de aplicações diversas, esse conhecimento se mostra composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias necessidades para fazer matemática e com ideias singulares sobre o que isso significa.

Compreender a Matemática e sua história com base apenas naquilo que vemos nas escolas de hoje é algo impossível, sendo o contexto histórico um caminho para seguir, mesmo sabendo que este também não é muito fácil, afinal devemos tentar mergulhar nos problemas que caracterizavam o pensamento de certa época em toda a sua complexidade, considerando os fatores científicos, mas também culturais, sociais e filosóficos. Só assim, será possível vislumbrar os problemas e, portanto, o ambiente em que se definiram objetos, se inventaram métodos e se estabeleceram resultados. [17]

As citações de *Boyer, tradução de 2012*, reforçam a nossa ideia de trabalhar alguns conteúdos do Ensino Básico com foco dedutivo a partir do contexto histórico, uma vez que os conhecimentos matemáticos, mesmo os mais remotos, não passaram por correções significativas e sim por extensões.

*"Uma vez que os gregos desenvolveram o método dedutivo, o que fizeram estavam correto, correto para todo o sempre. Euclides foi incompleto e sua obra foi enormemente estendida, mas não teve que ser corrigida. Seus teoremas, todos eles, são válidos até hoje. Ptolomeu pode ter desenvolvido uma representação errônea do sistema planetário, mas o sistema de trigonometria que ele criou para ajudá-lo em seus cálculos permanece correto para sempre."*

Certamente, conseguir implementar na aprendizagem dos nossos alunos conhecimentos matemáticos, com vínculos concretos na sua base histórica, será algo bastante proveitoso, pois tal conhecimento poderá ser aperfeiçoado e estendido com o seu amadurecimento, mas nunca perderá a sua essência.

A História da matemática pode ser trabalhada em sala de aula em vários contextos diferentes, pode ser apresentada de forma lúdica despertando a curiosidade, por meio de enigmas, como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo. Os tópicos de História da Matemática podem destacar a disciplina como uma grande geradora de possibilidades de atividades diferenciadas que vão muito além das inúmeras sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas. É preciso ter em mente que na atualidade os alunos precisarão lidar com uma sociedade bastante exigente e os seus conhecimentos devem estar sincronizados com a modernização e globalização de informações. Não se alinhar a estas mudanças constantes resultará em seu isolamento social e grandes dificuldades de entrar e se manter no mercado de trabalho.

Segundo Medeiros (1987 apud DCE, 2006, p.24)

*"...abre-se espaço para um discurso matemático voltado tanto para cognição do estudante como para relevância social do ensino da matemática. A Educação matemática, assim, implica olhar a própria matemática do ponto de vista do seu fazer e do seu pensar, da sua construção histórica e implica, também, olhar o ensinar e o aprender matemática, buscando compreendê-los".*

Trabalhando com a História da Matemática, geramos possibilidades de buscar novas formas de ver e entender a disciplina, tornando-a mais contextualizada e mais integrada com as outras disciplinas.

Segundo D'Ambrosio (1999, p.97):

*“As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. ”*

Alinhados com essas verdades fica evidente que a História da Matemática tem um grande potencial para fazer a diferença nas ações de ensino-aprendizagem e interdisciplinaridade, uma vez que ela acompanha a história da humanidade. É notório, que a História da Matemática evidencia que esta disciplina é proveniente de um processo histórico, é uma construção humana, gerada pelas necessidades práticas desenvolvidas para atender a certas demandas da sociedade. Não se trata de um amontoado de números e fórmulas jogados para os alunos de forma aleatória, sem nenhum sentido e com o mero objetivo de amedrontá-los.

Segundo Tatiana Roque e João B. Pitombeira (2013, p.07):

*“Fala-se muito, hoje em dia, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. Justamente porque muitos alunos consideram a matemática por demais abstrata, ouvimos muitos pedidos para que ela se torne mais concreta e ligada ao cotidiano. ”*

Não podemos negar que muitos conceitos matemáticos são de cunho abstrato. Muitos deles não lidam com objetos sensíveis a nossa realidade, como é o caso dos conceitos primitivos da Geometria como o ponto e a reta. Todos estão fora de um contexto concreto, pois tudo que lidamos em nosso cotidiano é provido de dimensões, não sendo simples compreender e aceitar objetos sem dimensões. Entretanto, o nosso trabalho não quer tornar concreto os conceitos abstratos, na verdade o que queremos é despertar em nossos alunos o pensamento lógico e dedutivo, desenvolver sua capacidade de raciocinar de forma coerente com o pensamento abstrato.

Por intermédio da História da Matemática, poderemos ensinar de uma maneira mais concreta, pois daremos sentido e principalmente utilidades a muitos conteúdos matemáticos, uma vez que os conceitos sejam trabalhados a partir de um contexto. Isto não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que estes conceitos se relacionam, como podem ser inseridos em uma rede de relações e de significados sem descartar o fato que todas as relações pertencem a Matemática.

É muito comum nos depararmos com críticas ao conhecimento e as metodologias utilizadas pelos professores de matemática no ensino básico e até mesmo no ensino superior, e que isso acarreta grandes prejuízos, limitando também a aprendizagem dos alunos. Certamente uma saída recomendada seria pela via da História.



*“A história das dificuldades, esforços, tempo envolvido em toda a evolução da matemática dá a medida da grandeza desta realização humana. Não deixa persistir a impressão, que o ensino pode dar, de algo que caiu do céu pronto e perfeito. Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos de alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas até que um resultado fosse construído. E é a história desse esforço permanente que se procura retratar. ” (Elza F. Gomide, 1996).*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) reforçam que, a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Ainda tomando os PCNs como documento norteador para o ensino de Matemática, podemos citar que um dos princípios que derivam das práticas, pesquisas e estudos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental é que o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente foi construído e que está em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.

Com isso, enxergo a História da Matemática como uma excelente ferramenta para ajudar a formar alunos que contextualizem seus conhecimentos e os insiram numa perspectiva de construção humana mais coletiva. Por meio dela, pode-se verificar que esta disciplina é uma construção humana, e foi desenvolvida ao longo do tempo e, por assim ser, permite compreender a origem das ideias que deram forma à cultura, como também observar aspectos humanos de seu desenvolvimento, valorizando a grande virtude e engenhosidade dos antigos povos, como os babilônios, egípcios, gregos, romanos, árabes, indianos, entre outros. Homens que criaram e difundiram métodos aritméticos e geométricos extraordinários, em épocas bem remotas e desprovidos de qualquer auxílio tecnológico, dos quais desfrutamos hoje.

A história será o fio condutor do nosso trabalho. A cada conteúdo trabalhado, buscaremos usar o contexto histórico do mesmo para as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, tentaremos promover uma aprendizagem significativa, propiciando ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais. Usaremos exemplos cotidianos nas quais os conceitos são aplicados e desenvolveremos as soluções com os métodos utilizados pelos povos antigos, mostrando que tais processos se desenvolviam de maneira dedutiva e muito criativa. Partindo com essas ações procuraremos dar sentido a muitos métodos e fórmulas utilizadas atualmente de maneira isolada e acabada, que descarta os pilares que levaram a sua construção.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos gerais deste trabalho consistem em contextualizar historicamente alguns conteúdos matemáticos da Educação Básica, com intuito de dar sentido ao ensino e a aprendizagem dos mesmos, mostrando que eles não surgiram por acaso e sim para suprir necessidades reais das civilizações mais antigas da humanidade.

São muitos os tópicos da História da Matemática que podem contribuir para melhorar os processos de ensino-aprendizagem desta disciplina, sendo praticamente impossível abordar todos em um único trabalho. Inclusive poderíamos abordar aqui outros sistemas de numeração da antiguidade como o dos babilônicos, gregos, chineses, romanos ou dos maias, para estabelecer uma comparação com o nosso sistema. Certamente esse estudo agregaria muito ao nosso trabalho e revelaria mais relações importantes entre estes sistemas. Porém, apesar da sua simbologia não apresentar muita praticidade, escolhi o sistema dos antigos egípcios porque seus métodos de multiplicação e divisão me chamaram bastante atenção pelo cunho intuitivo que possuem. Sendo assim, entre outros, focaremos nos seguintes objetivos específicos:

- Mostrar algumas características da civilização egípcia e o seu respectivo sistema de numeração;
- Comparar o nosso atual sistema de numeração com o sistema egípcio, mostrando suas semelhanças, diferenças, vantagens e desvantagens;
- Mostrar a importância dos sistemas de numeração para compreensão dos algoritmos das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Contextualizar historicamente cada ação desenvolvida, mostrando sua relevância para dá sentido e a devida importância para cada conteúdo que precisa ser estudado;
- Trabalhar alguns problemas simples de multiplicação e divisão utilizando o método dos antigos egípcios;
- Trabalhar a Regra da Falsa Posição para resolução de equações simples e problemas que atualmente são resolvidos com o auxílio de fórmulas algébricas prontas, como se fossem receitas, pobres de significados;
- Trabalhar os métodos de resolução de equações do 2º grau dos antigos árabes e indianos, os quais desencadearam no que atualmente conhecemos como a fórmula de Bháskara;
- Mostrar as contribuições dos matemáticos italianos do século XV e XVI com o desenvolvimento do método para resolução de equações do 3º grau por meio de radicais;
- Em cada conteúdo desenvolvido prezaremos pelos métodos de dedução aplicado, visando desenvolver o raciocínio lógico de cada aluno.

## 1.3 Organização

De acordo com o que mostramos até aqui e na busca de alcançar os objetivos descritos no tópico anterior, estruturamos nosso trabalho da seguinte maneira:

No capítulo 1, começamos com uma introdução na qual apresentamos as justificativas e os motivos pelos quais escolhemos a História da Matemática para desenvolver este trabalho. Destacamos também o objetivo geral e os objetivos específicos do TCC, bem como a organização de todo o texto.

No capítulo 2, mostraremos as principais características do Sistema de Nomeação Decimal Indo-arábico e do Sistema Hieroglífico dos Antigos Egípcios, também destacaremos suas principais semelhanças e diferenças, suas vantagens e desvantagens e acima de tudo focamos na importância da compreensão destes sistemas para o desenvolvimento das operações aritméticas básicas.

No capítulo 3, serão abordadas as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão no Sistema Decimal Indo-arábico, com ênfase nos algoritmos mais utilizados atualmente, mostrando sua relação com as propriedades do sistema. Também mostraremos como os antigos egípcios trabalhavam com essas operações dentro do seu sistema de numeração, sempre procurando relacionar os seus métodos aos nossos.

No capítulo 4, falaremos sobre o Método da Falsa Posição utilizado por diversos povos da antiguidade para resolverem problemas que atualmente solucionamos por meio de equações do 1º grau. Mostraremos o poder intuitivo desse método na solução de situações inseridas no contexto histórico da época em questão.

No capítulo 5, trataremos sobre os métodos de Al-Khwarizmi e de Bháskara para a resolução de problemas do 2º grau, relacionando os mesmos com as fórmulas atuais e utilizando-os na resolução de situações propostas pelos próprios autores em suas obras. Também falaremos sobre o desenvolvimento da Álgebra a partir do século XV na Europa e da importância e contribuição de alguns matemáticos italianos desta época no desenvolvimento dos métodos para resolução de equações de 3º grau, além de resolvermos alguns exemplos com abordagem destes métodos.

No capítulo 6, finalizamos este Trabalho de Conclusão de Curso com as nossas considerações finais sobre o mesmo e com a apresentação das referências bibliográficas utilizadas para o seu desenvolvimento.

## Capítulo 2

# Os Sistemas de Numeração

A introdução da escrita e das numerações constituem o alicerce da História da Matemática. A criação dos símbolos numéricos e a escrita foram processos que aparentemente surgiram de forma simultânea. Não vejo nenhum absurdo em admitir que os seres humanos mais primitivos tivessem algum conhecimento numérico, pois, no mínimo, eram capazes de reconhecer alguns atos de acrescentar ou retirar objetos de um determinado conjunto. Entretanto, devemos saber que esse conceito primitivo de número seria completamente abstrato. Sendo um conceito abstrato, não originará uma imagem instantânea, não podendo também ser exibido, sendo apenas concebido na mente. Contudo, um outro progresso foi atingido com a criação dos nomes dos números, processo que veio permitir a obtenção de uma designação oral, bem mais precisa, das quantidades, facilitando-se, desse modo, a conquista do patamar de uma plena abstração. [11]

Os fatos históricos nos mostram que, em seus primeiros registos numéricos, o homem teria recorrido a incisões ou traços, mas, rapidamente se deparou com as limitações de tal procedimento. O conceito elementar de número não evoluiria sem que um instrumento simbólico fosse criado. Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar foi sistematizado. Com os esforços para se efetuarem registos permanentes, vários sistemas de numeração foram surgindo. [2]

Uma vez que os números ocupam um papel central na Matemática, todo aquele que deseje um dia aprender e ensinar Matemática deve compreender a maneira pela qual os números são representados, o que leva ao estudo dos sistemas de numeração. Esse conhecimento exerce também grande influência na realização das operações numéricas, pois a partir das regras destes sistemas foi possível criar os algoritmos operacionais. Encontrar uma boa notação para eles foi de suma importância para o desenvolvimento da Matemática.

Muitas civilizações da Antiguidade, como as dos babilônios, egípcios, gregos, chineses e hindus criaram os seus próprios sistemas numéricos, inclusive os maias, que viveram na América Central em tempos mais recentes, também desenvolveram um modo interessante de registrar números. Ao examinarmos os sistemas de numeração que antecederam o nosso teremos também uma visão do desenvolvimento do conhecimento matemático, a oportunidade de analisar os procedimentos utilizados pelos povos antigos, conhecer a utilização que era dada à Matemática e os tipos de problemas que levaram os nossos antepassados a desenvolverem os seus métodos. Além disso, teremos a certeza que esta disciplina como atividade humana remete-se a algumas centenas de anos e deve ser compreendida como um produto da sociedade. A História da Matemática fica mais

coerente quando conhecemos um pouco das culturas que a produziram, onde e quando isso ocorreu. Será então importante estarmos cientes que nenhum assunto perde mais do que a Matemática na tentativa de dissociá-lo da sua história [2]

## 2.1 O Sistema de Numeração Decimal Indo-Arábico

Nesta seção falaremos do sistema de numeração indo-arábico, mostraremos as suas principais características por meio da descrição de suas principais regras. Não vamos nos apegar tanto ao contexto histórico relacionado a este sistema pois a nossa intenção é criar subsídios para podermos compará-lo com o sistema de numeração dos antigos egípcios que será trabalhado posteriormente. Os sistemas de numeração mais antigos se caracterizam por exibir explicitamente suas regras de funcionamento. E é por esta razão, que pensamos que eles podem servir de instrumentos de comparação que permita aos alunos compreender o nosso sistema de numeração indo-arábico. Acreditamos que o estudo de outros sistemas de numeração pode levar a uma melhor compreensão do nosso próprio sistema. [15]

Defende-se que o sistema de numeração indo-arábico tenha origem no vale do Rio Indo, pela civilização Indiana, há cerca de 3000 anos. Esse sistema de numeração possui influências de outros povos que os indianos tiveram contato, e foi apenas por volta do século V que ele se configurou como conhecemos hoje. Já no século VII, com a expansão do estado islâmico pelo Oriente Médio, norte da África e sul da Europa, o povo árabe apropriou-se do sistema de numeração indiano e divulgou por todo território que dominava. Foi o matemático Leonardo Fibonacci, em 1202, com a publicação do seu livro, *Liber Abaci* que propiciou o uso do sistema de numeração indo-arábico por toda Europa. [12]

É importante salientarmos aqui a distinção entre numeral e algarismo. Enquanto o primeiro refere-se à representação ou indicação do número, que pode ser de forma escrita ou falada, o segundo refere-se aos símbolos numéricos utilizados para expressar qualquer numeral.

Um dos principais pontos para construção e também compreensão de um sistema de numeração é conhecer os algarismos (símbolos) que irão compor cada numeral. Outra característica importante é conhecer a base do sistema, quando o mesmo possuir, a qual, trata-se de uma certa quantidade de unidades que deve constituir uma unidade de ordem imediatamente superior. No caso do sistema de numeração indo-arábico, os algarismos utilizados são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. A contagem nesse sistema é feita em agrupamentos de 10 em 10, ou seja, a cada 10 unidades temos 1 dezena, e a cada 10 dezenas temos uma centena. Isso caracteriza o nosso sistema como sendo decimal, isto é, um sistema de numeração de base 10. Nem todos os sistemas de numeração apresentam uma base definida, como é o caso do Sistema de Numeração Romano.

Outra característica importante do sistema de numeração indo-arábico, que ajuda na leitura e no desenvolvimento das operações, é a sua divisão em ordens e classes. A primeira ordem é denominada de **ordem das unidades** e como a base do sistema é decimal, ao tomarmos 10 unidades formamos **uma dezena**, que é a ordem imediatamente superior às **unidades**. Da mesma forma, ao tomarmos 10 dezenas formamos **uma centena**, que é a ordem imediatamente superior às **dezenas**. Em relação as classes, ao reunirmos três ordens temos uma classe, sendo a primeira delas a **classe das unidades**, a segunda, a **classe dos milhares**, a terceira, a **classe dos milhões**, a quarta, a **classe dos bilhões** e assim por diante. Na **tabela 2.1**, exponho um exemplo com o número 45 785 301 692 dividido em suas respectivas ordens e classes.

**Exemplo 2.1:** Dividir o numeral 45 785 301 692 em ordens e classes conforme as regras do sistema decimal indo-arábico.

Tabela 2.1: Classes e Ordens

Classes	Bilhões			Milhões			Milhares			Centenas	Dezenas	Unidades
Ordens	12 <sup>a</sup>	11 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>
Números	0	4	5	7	8	5	3	0	1	6	9	2

**Tabela produzida pelo autor**

Neste ponto é viável abrirmos um parêntese e falar sobre algumas utilidades do 0 (zero) dentro do nosso sistema. O mesmo é empregado para indicar uma ordem vazia dentre os agrupamentos de dez de um número considerado. No caso dos números naturais, ao multiplicarmos um número por 10, encontraremos como produto o próprio número acrescido de um zero a sua direita, ao multiplicarmos um número por 100, encontraremos como produto o próprio número acrescido de dois zeros a sua direita, e assim por diante. Esta técnica pode facilitar bastante o processo de multiplicações por potências de base 10. No **exemplo 2.1** podemos notar a utilização do 0 (zero) em duas oportunidades, na ordem das dezenas de milhar e das centenas de bilhões, onde ele é utilizado para indicar uma ordem vazia. Vale salientar que na última ordem do exemplo a utilidade do 0 (zero) é opcional, não ocasionando alteração no valor do numeral.

Mostramos adiante mais duas características importantes do sistema de numeração indo-arábico. Trata-se de um sistema **posicional e multiplicativo**. **Posicional** porque o valor de cada algarismo que forma o numeral é determinado pela posição que ele ocupa no mesmo, e **multiplicativo**, porque o valor posicional de cada algarismo dentro do numeral pode ser determinado por um produto entre este algarismo e uma potência de base 10. Muitos livros didáticos não apresentam esta característica para o sistema indo-arábico, uma vez que este conteúdo é trabalhado quando ainda não se tem introduzido o conceito de potências. Por isso seria importante fazer referências ao nosso sistema de numeração quando se trabalhar com as potências de base 10. Utilizando mais uma vez o **exemplo 2.1** construímos a **tabela 2.2** onde são expostos os valores posicionais de todos os algarismos que compõem o numeral considerado.

Tabela 2.2: Valor Posicional dos algarismos em um numeral

Algarismos	Valor Posicional
2	$2 \times 10^0 = 2 \times 1 = 2$
9	$9 \times 10^1 = 9 \times 10 = 90$
6	$6 \times 10^2 = 6 \times 100 = 600$
1	$1 \times 10^3 = 1 \times 1000 = 1000$
0	$0 \times 10^4 = 0 \times 10000 = 0$
3	$3 \times 10^5 = 3 \times 100000 = 300000$
5	$5 \times 10^6 = 5 \times 1000000 = 5000000$
8	$8 \times 10^7 = 8 \times 10000000 = 80000000$
7	$7 \times 10^8 = 7 \times 100000000 = 700000000$
5	$5 \times 10^9 = 5 \times 1000000000 = 5000000000$
4	$4 \times 10^{10} = 4 \times 10000000000 = 40000000000$

**Tabela produzida pelo autor**

Além das características anteriores, o sistema de numeração indo-arábico é **aditivo**, pois o valor do numeral é dado pela soma dos valores posicionais de cada algarismo. Ao estabelecer

o valor posicional de cada algarismo dentro do numeral também determinamos a quantidade de unidades contidas em cada ordem. Com o auxílio do exemplo anterior, vejamos essa característica na **tabela 2.3**.

Tabela 2.3: Valor Posicional = a quantidade de unidades

<b>Ordens</b>	<b>Algarismos</b>	<b>Valor Posicional e quantidade de unidades</b>
<b>11<sup>a</sup></b>	4	40 000 000 000 unidades
<b>10<sup>a</sup></b>	5	5 000 000 000 unidades
<b>9<sup>a</sup></b>	7	700 000 000 unidades
<b>8<sup>a</sup></b>	8	80 000 000 unidades
<b>7<sup>a</sup></b>	5	5 000 000 unidades
<b>6<sup>a</sup></b>	3	300 000 unidades
<b>5<sup>a</sup></b>	0	0 unidades
<b>4<sup>a</sup></b>	1	1 000 unidades
<b>3<sup>a</sup></b>	6	600 unidades
<b>2<sup>a</sup></b>	9	90 unidades
<b>1<sup>a</sup></b>	2	2 unidades
Soma dos valores posicionais		<b>45 785 301 692</b>

#### Tabela produzida pelo autor

Uma outra decomposição importante que pode ser feita é a partição do numeral apenas em classes, isso facilita bastante a leitura do numeral, uma vez que cada classe fica escrita justamente como devemos lê-la individualmente e, ao “juntarmos” a leitura de todas as classes, chegamos a leitura completa do numeral, o que facilita a sua representação por extenso. Vejamos essa ação na **tabela 2.4**.

Tabela 2.4: Classes e escrita por extenso

<b>Classes</b>	<b>Valor</b>	<b>Leitura</b>
<b>Bilhões</b>	45 000 000 000	Quarenta e cinco bilhões
<b>Milhões</b>	785 000 000	Setecentos e oitenta e cinco milhões
<b>Milhares</b>	301 000	Trezentos e um mil
<b>Unidades</b>	692	Seiscentos e noventa e duas unidades
<b>Total</b>	<b>45 785 301 692</b>	<b>45 bilhões, 785 milhões, 301 mil, 692 unidades.</b>

#### Tabela produzida pelo autor

Compreender todas essas características do nosso sistema é necessário, pois a partir delas notamos a sua simplicidade e ao mesmo tempo a sua facilidade para representação e leitura dos números. Tais regras também facilitam a utilização deste sistema no desenvolvimento das técnicas utilizadas na resolução das operações por meio dos algoritmos e acima de tudo, mostram que esses procedimentos não ocorrem de forma meramente mecânica.

Normalmente, as características do nosso sistema de numeração são abordadas de maneira muito breve nos livros didáticos, além disso, muitos professores também não dão a importância necessária a este conteúdo, isso começa a criar barreiras contra as aprendizagens posteriores que se baseiam nas regras do sistema para se desenvolverem. Com base nisso, reforço a necessidade de aprofundamento deste tópico nos anos finais do Ensino Fundamental I, detalhando suas características e considerando os sistemas de numeração das civilizações antigas como referência para a criação e aperfeiçoamento do nosso.

## 2.2 O Sistema de Numeração no Antigo Egito

### 2.2.1 Contexto Histórico

Os Egípcios formaram uma das maiores civilizações da Idade Antiga. Se desenvolveu no nordeste da África, em uma região conhecida como Crescente Fértil. Formada por diversos povos, a civilização teve seu crescimento fortemente ligado aos recursos hídricos fornecidos pelo Rio Nilo. Se destacou pela forma de organização de um Estado forte, capaz de comandar milhares de pessoas.

Os egípcios ocuparam um território que fazia fronteiras com o Mar Mediterrâneo, ao norte; com o Deserto da Líbia, a oeste; com o Deserto Oriental Africano, a leste; e com a primeira catarata do Nilo, ao sul, conforme mostra a **figura 2.1** abaixo.

Figura 2.1: Mapa do Egito Antigo



Fonte:

<https://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/>

A civilização egípcia desenvolveu conhecimentos nas áreas de Matemática e Astronomia. No que se refere a Matemática podemos citar métodos operacionais de multiplicação e divisão, representações e operações com frações, resolução de equações e muitos cálculos que desencadearam em conteúdos de Geometria. Conhecimentos na área da Astronomia ajudavam a prever as cheias do Nilo, e a Matemática ajudava a dividir as terras, bem como a calcular os impostos e planejar as construções civis e hidráulicas.

Muito do que se conhece atualmente sobre os egípcios está escrito em papiros, um tipo de papel muito resistente produzido a partir de uma planta com mesmo nome (papiro) que eles cultivavam as margens do Rio Nilo. Os papiros foram de grande importância para o estudo da história egípcia, pois subsidiaram o conhecimento das culturas, ciências, religião, medicina e demais características desses povos. Tais documentos eram redigidos pelos escribas, homens descendentes



das famílias mais ricas que tinham a oportunidade de aprender a ler e escrever. Muitos desses papiros receberam nomes próprios, como o principal deles, o Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes (nome do escriba que o redigiu) com cerca de 0,30 m de largura por 5 m de comprimento. Neste papiro constam 87 problemas matemáticos, os quais foram enumerados de 1 a 87 pelo editor alemão A.A. Eisenlohr, em 1877. Outros importantes documentos são o Papiro de Moscou, o Papiro de Kahun, o Papiro de Berlin e Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias, todos espalhados em museus pelo mundo. [15] [4]








Os antigos egípcios escreviam, além dos papiros, nas paredes das pirâmides, palácios e templos, desenvolvendo três tipos de escrita:

- *A Escrita Hieroglífica*, que vem do grego hieróglifo e significa sinal sagrado. Era uma escrita de característica pictográfica, isto é, desenvolvida por símbolos que representavam objetos, conceitos e ideias. Segundo os estudiosos essa escrita era constituída de mais de seiscentos caracteres que se juntavam e formavam os textos.
- *A Escrita Hierática*, também de cunho sagrado, representada por símbolos cursivos e bem mais abreviada que a hieroglífica. Era dominada principalmente pelos escribas para fins comerciais, sendo as mais utilizadas nos papiros.
- *A Escrita Demótica*, como o próprio nome sugere era a escrita mais popular entre os egípcios antigos, sendo também a mais simplificada. Em nosso trabalho nos restringiremos a escrita hieroglífica, sendo esta a mais conhecida e trabalhada no campo da História da Matemática.

### 2.2.2 O Sistema de Numeração Hieróglifo Egípcio

A primeira semelhança entre o sistema de numeração egípcio e o indo-arábico é a utilização da mesma base 10. Para representar os algarismos de 1 a 9 os egípcios usavam um traço vertical e símbolos especiais para representar 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 e 1 000 000, conforme a **figura 2.2** abaixo.

Figura 2.2: Símbolos Hieróglifos e os seus valores

Classe	Número Decimal	Hieróglifo Egípcio	Significado
Unidades	1		Haste/bastão
Dezenas	10		Arco de cesto/calcanhar
Centenas	100		Pergaminho /rolo de corda
Milhares	1 000		Flor de lótus
Dez milhares	10 000		Dedo dobrado
Cem milhares	100 000		Girino/sapo/peixe
Milhão	1 000 000		Deus acordando/homem espantado

**Figura produzida pelo autor**

Assim como em nosso sistema, os egípcios agrupavam os símbolos de 10 em 10 formando classes, sendo que cada símbolo só poderia ser repetido até 9 vezes. Chegando a este limite, se introduzia uma nova classe representada por um novo símbolo.

Uma outra singularidade entre os sistemas egípcios e indo-arábico é o fato de serem aditivos. Para representar os números de 11 até 19 ou 21 até 30, por exemplo, usa-se o símbolo da dezena, que é o arco de cesto seguido da quantidade necessária de hastes conforme cada número exigir.

**Exemplo 2.2:** Representação de alguns numerais no sistema hieróglifo egípcio.

Figura 2.3: Alguns numerais em símbolos hieróglifos

Número Decimal	Método aditivo	Hieróglifo Egípcio
11	10 + 1	
12	10 + 2	
13	10 + 3	
...	...	...
19	10 + 9	
20	10 + 10	
21	20 + 1	
22	20 + 2	
...	...	...
29	20 + 9	
30	10 + 10 + 10	

**Figura produzida pelo autor**

Seguindo este raciocínio, para cada dezena acrescentamos um arco de cesto e o número de hastes apropriado para as unidades até chegarmos a **99 = 9 arcos e 9 hastes**, com isso chegamos a próxima classe que é a das centenas, e será representada por um novo símbolo, o pergaminho ou rolo de corda, conforme a **figura 2.2**. A partir daí os procedimentos são similares e não há dificuldades para representar os demais numerais.

Apesar da época bem remota tem-se registros de que os egípcios possuíam uma certa familiaridade com números grandes. Um museu em Oxford possui um cetro real de mais de 5 mil anos sobre o qual aparece o registro de 120 000 prisioneiros e 1 422 000 cabras capturadas. Esses números podem ser exagerados, mas fica claro, no entanto, que os egípcios eram louvavelmente precisos no contar e medir [4]. Como exemplo, construímos a **figura 2.4** com a representação desses valores em notação hieroglífica egípcia.

**Exemplo 2.3:** Representação dos numerais 120 000 e 1 422 000 com hieróglifos egípcios e ênfase a característica aditiva desse sistema.

Figura 2.4: Ênfase a característica aditiva

Números decimais	Notação hieroglífica egípcia	Ênfase ao método aditivo
120 000 prisioneiros		100 000 + 20 000
1 422 000 cabras		1 000 000 + 400 000 + 20 000 + 2 000

**Figura produzida pelo autor**

Devemos lembra que nas escrituras hieroglíficas nem sempre os algarismos eram dispostos da esquerda para direita obedecendo a ordem decrescente de valores, às vezes os dígitos menores eram colocados a esquerda ou dispostos na vertical. Alguns símbolos, como no caso do pergaminho (100), em algumas notações aparecem invertidos, convexo para direita ou convexo para esquerda. Tal fato, acrescido das demais características estudadas, servem de subsídios para perceber uma importante diferença entre o sistema de numeração hieróglifo egípcio e o indo-arábico. Trata-se do fato, deste primeiro não ser posicional, ou seja, cada símbolo possui um valor fixo, independentemente da posição que ele ocupa dentro do numeral. Por exemplo, os símbolos hieroglíficos para representar o

numeral 123 podiam aparecer em ordens e posições distintas que isso não mudaria seu valor como podemos observar na **figura 2.5** abaixo.

Figura 2.5: Característica não posicional do Sistema Hieróglifo

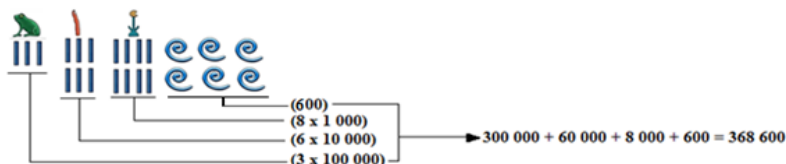
$$\begin{aligned} \text{e n n III} &= 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 123 \\ \text{III n n e} &= 1 + 1 + 1 + 10 + 10 + 100 = 123 \end{aligned}$$

**Figura produzida pelo autor**

Portanto, o símbolo do arco de cesto, por exemplo, valerá 10 independentemente da posição que ele seja alocado no numeral e esta conclusão se estende a todos os demais símbolos hieroglíficos dos antigos egípcios.

Outra notável diferença entre os sistemas é que o egípcio não possui nenhum símbolo para representar o 0 (zero). E uma desvantagem do sistema de numeração hieróglifo egípcio é a questão da representação de alguns numerais. Por ser um sistema aditivo e não posicional, alguns números relativamente pequenos para o nosso sistema torna-se muito extenso na notação hieroglífica, como por exemplo, o número 9 999, escrito com apenas 4 dígitos no sistema decimal indo-arábico, graças a sua característica de ser posicional, necessita de 36 (9 flor de lótus, 9 pergaminhos, 9 arcos de cesto e 9 hastes) símbolos para ser representado no sistema egípcio. No papiro de Harris, que se encontra atualmente no Museu Britânico, existe a aplicação de uma técnica com a qual se assinalava o registo de grandes quantidades, recorrendo-se para isso à sobreposição de sinais, para desse modo se exprimir um princípio multiplicativo [2]. Na **figura 2.6** abaixo, representamos o número 368 600 em numeração hieroglífica usando a técnica do Papiro de Harris.

Figura 2.6: Técnica do Papiro de Harris



**Figura produzida pelo autor**

Essa técnica aproxima ainda mais os sistemas hieróglifo egípcio e indo-arábico, pois ela se assemelha a questão dos valores posicionais dos algarismos. Entretanto, não ameniza muito o fato das grandes quantidades de símbolos para representar um mesmo número. Por outro lado, reforça a precisão e engenhosidade desses povos tão antigos em lidar com os números. Esta desvantagem na representação não faz com que o sistema hieróglifo deixe de ser fascinante e suficientemente eficaz para as necessidades de sua época. Isso também não diminui a importância de estudarmos o mesmo buscando compreender melhor as características do nosso sistema. Talvez as desvantagens de outros sistemas tenham servido de alerta e contribuído para fazer do sistema decimal indo-arábico um instrumento muito eficaz. Assim, a abordagem dos antigos sistemas de numeração no ensino básico deveria se dar de forma mais profunda, pois suas raras presenças nos livros didáticos se resumem a um sucinto contexto histórico com a apresentação dos símbolos que representam os numerais, outras tantas vezes nem aparecem nos conteúdos. Cabe então aos professores buscar metodologias que melhorem o conhecimento a respeito desses antigos sistemas, evitando que suas características sejam ignoradas e aproveitando-as para contextualizar e compreender melhor o nosso sistema.

## Capítulo 3

# Operações aritméticas nos sistemas indo-arábico e egípcio

Neste capítulo, iremos ver como podemos trabalhar na sala de aula da educação básica as operações aritméticas básicas no sistema indo-arábico e hieróglifo egípcio. Esta ação merece ser feita para que não fiquemos restritos apenas a conhecer como os números são representados no sistema numeral do antigo Egito. Além disso, queremos aprender a manipular quantidades dentro desse Sistema de Numeração, com o intuito de compreender sua lógica e desenvolver algumas técnicas relacionadas as operações. Trata-se, também, de destacar mais uma vez, as semelhanças e diferenças com o nosso sistema de numeração, pois, acreditamos que se pode melhorar consideravelmente o conhecimento de um objeto comparando-o com outro de mesma categoria. [15]

Ao se trabalhar com as operações aritméticas básicas recorreremos de forma espontânea aos seus **algoritmos**, que são instruções passo a passo, realizadas quase mecanicamente, a fim de se chegar a um resultado desejado. [18]

### 3.1 Adição no sistema indo-arábico

Neste tópico, o propósito é dar ênfase a importância das regras do nosso sistema de numeração para o desenvolvimento do algoritmo que é mais utilizado atualmente. Este conhecimento deve ser transmitido ao aluno de forma que ele compreenda o passo a passo do processo gerando assim uma aprendizagem mais significativa. É muito comum que a maneira como devemos adicionar dois, três ou mais números seja transmitida de forma meramente mecânica. Esse procedimento enxuto, pronto e acabado é memorizado pelo aluno e torna-se algo isolado sem nenhuma fundamentação lógica e muito menos teórica. Vamos analisar o exemplo 3.1, e a partir dele, fazer algumas observações importantes.

**Exemplo 3.1:** Efetuar a adição de 78 369 e 5 427:

Figura 3.1: Adição de 5 427 com 78 369

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{1} \phantom{5} \phantom{4} \phantom{2} \phantom{7} \\ + \phantom{1} \phantom{5} \phantom{4} \phantom{2} \phantom{7} \\ \hline \phantom{+} \phantom{1} \phantom{5} \phantom{4} \phantom{2} \phantom{7} \\ \phantom{+} \phantom{1} \phantom{5} \phantom{4} \phantom{2} \phantom{7} \end{array}$$

**Figura produzida pelo autor**

Normalmente, orienta-se a realização desta adição da seguinte maneira:

- Coloquem as parcelas uma abaixo da outra, alinhadas da direita para esquerda, colocando sempre as maiores a cima das menores;
- Comece a somar obrigatoriamente da direita para esquerda;
- Agora basta somar;
- $7 + 9 = 16$ , baixa o 6 e leva o 1;
- $1 + 2 + 6 = 9$ ;
- $4 + 3 = 7$ ;
- $5 + 8 = 13$ , baixa o 3 e leva o 1;
- $1 + 7 = 8$ . E pronto.

Este procedimento deixa muito a desejar, uma vez que muitas informações importantes são ocultadas. Faremos então algumas observações pertinentes a este procedimento. A primeira delas é quando se fala em alinhar as parcelas da direita para esquerda, ao invés de explicar que os números devem ser organizados de forma que suas ordens correspondentes fiquem alinhadas, isto é, unidades abaixo de unidades, dezenas abaixo de dezenas, e assim por diante. Além disso, é interessante neste ponto, reforçarmos a importância da divisão dos numerais em ordem e em classes, uma das características principais do nosso sistema de numeração. A segunda é em relação a ordem das parcelas, como bem sabemos a adição desfruta da propriedade comutativa sendo a ordem das parcelas irrelevantes para a soma. Creio que este fato seja considerado apenas por questão de praticidade. A terceira observação está relacionada a soma dos algarismos em cada ordem. Os algarismos **7** e **9** representam a ordem das **unidades** em seus respectivos numerais, e ao somarmos 7 unidades + 9 unidades, obtemos 16 unidades o que equivale a  $10 + 6$ , ou seja, 1 dezena e 6 unidades. Por isso que o 6 fica abaixo do 7 e do 9, pois pertencem a mesma ordem. O número 1, que na verdade representa 1 dezena é levado para ser somado com os algarismos 2 e 6 que representam a ordem das **dezenas** nos seus respectivos numerais. O mesmo procedimento ocorre com os algarismos **5** e **8** que representam a ordem das **unidades de milhar**. Ao serem somados resultam em 13 unidades de milhar e o fato de estarmos lidando com um sistema decimal, nos leva a necessidade de sabermos que  $13 \text{ unidades de milhar} = 1 \text{ dezena de milhar} + 3 \text{ unidades de milhar}$ . Esta dezena de milhar é justamente o 1 que é levado para ser somado com 7, pois ambos

representam a mesma ordem. Na **figura 3.2** tentei representar esta mesma adição utilizando o valor posicional dos algarismos e levando em consideração um detalhe indispensável, o agrupamento de 10 em 10 que deve ser respeitado em cada ordem.

Figura 3.2: Adição com valores posicionais

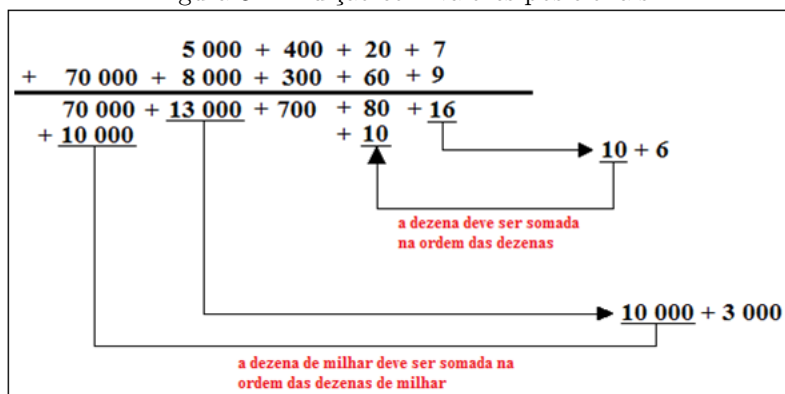


Figura produzida pelo autor

Agora efetuando a soma chegamos ao mesmo resultado:

$$(70000 + 10000) + 3000 + 700 + (80 + 10) + 6 = 80000 + 3000 + 700 + 90 + 6 = 83796.$$

A quarta e última observação é em relação a obrigatoriedade de iniciarmos a soma sempre da direita para esquerda. Afirmo que dominando o conhecimento do valor posicional de cada algarismo e a necessidade do agrupamento decimal para composição das ordens, esta exigência não é necessária. Entretanto iniciar a soma da direita para esquerda é bem mais prático, ou seja, essa praticidade não se configura como uma obrigatoriedade. Nas **figuras 3.3 e 3.4**, chegamos ao resultado correto começando a soma da esquerda para direita.

Figura 3.3: Adição da esquerda para direita

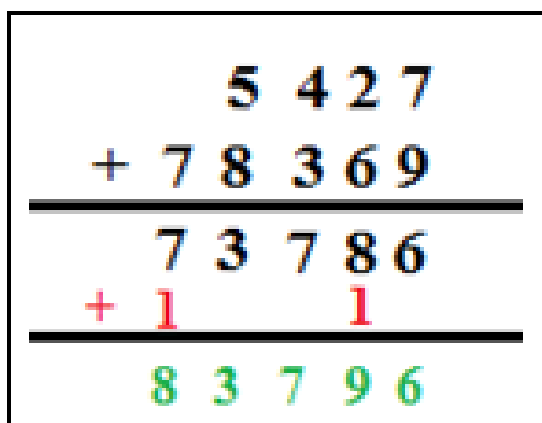


Figura produzida pelo autor

O cuidado que devemos tomar ao somar as ordens neste sentido é de trazer os valores excedentes para serem somados nas ordens anteriores e não levá-los para as ordens seguintes.

Figura 3.4: Valores posicionais da esquerda para direita

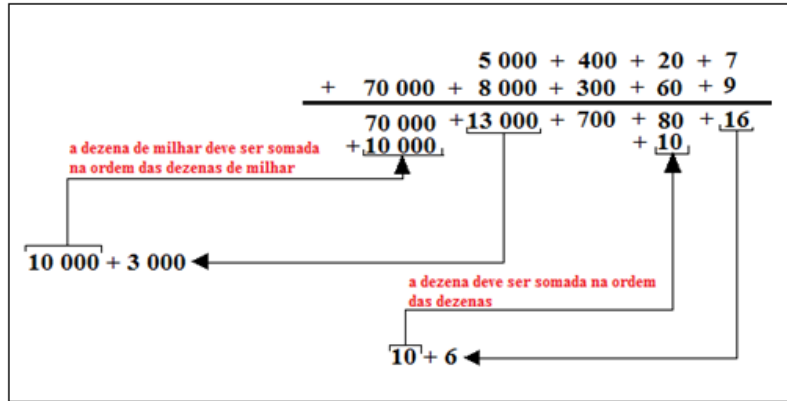


Figura produzida pelo autor

Através dos exemplos analisados, concluímos que o algoritmo utilizado na adição é bastante prático, e essa praticidade é proveniente das regras que compõem o sistema de numeração decimal indo-arábico, portanto, se não conhecermos essas regras o ensino será restrito a uma mecanização e memorização que não contribuem para uma verdadeira aprendizagem matemática.

### 3.2 Adição no sistema hieróglifo egípcio

Sendo o sistema hieróglifo egípcio aditivo por justaposição dos símbolos, como já expomos anteriormente, para adicionar números representados neste sistema seguimos o mesmo raciocínio, juntado os símbolos correspondentes de cada numeral. Acompanhe na **figura 3.5** os exemplos 3.2 e 3.3.

Figura 3.5: Adição no sistema hieróglifo egípcio

Exemplo 3.2	
Sistema decimal indo-arábico	$123 + 234 = 357$
Sistema hieróglifo egípcio	
Exemplo 3.3	
Sistema decimal indo-arábico	$202\ 205 + 5\ 412 = 207\ 617$
Sistema hieróglifo egípcio	

Figura produzida pelo autor

Como podemos ver trata-se de um processo simples e de fácil compreensão. Agora nos dois exemplos a seguir são necessárias mais algumas manipulações.

**Exemplo 3.4:** Efetuar a adição de 406 e 206 usando hieróglifos egípcios.

Figura 3.6: Adição com a simbologia hieroglífica

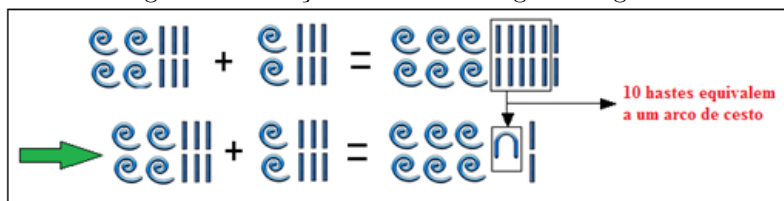


Figura produzida pelo autor

Neste exemplo, efetuamos a operação  $406 + 206 = 612$ . Note que na primeira junção dos símbolos chegamos a um impasse, pois o sistema hieróglifo egípcio não permite que um símbolo seja repetido mais de 9 vezes e no processo repetimos a haste 12 vezes ( $6 + 6$ ). Então para contornar esta situação levamos em consideração a característica decimal do sistema e trocamos 10 hastes por um arco de cesto, chegando assim, ao resultado correto.

**Exemplo 3.5:** Efetuar a adição de 2 266 e 4 088 usando hieróglifos egípcios.

Figura 3.7: Adição com a simbologia hieroglífica

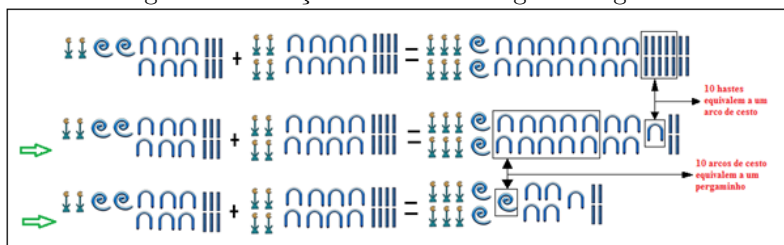


Figura produzida pelo autor

Neste exemplo, efetuamos a operação  $2266 + 4088 = 6354$ . Note que na primeira junção dos símbolos chegamos a dois impasses, 14 arcos de cestos ( $6 + 8$ ) e 14 hastes ( $6 + 8$ ). Ao passarmos da primeira para segunda linha, contornamos o problema das hastes ao trocarmos 10 delas por um arco de cesto. Ficamos, então, com 15 arcos ( $6 + 8 + 1$ ) e ao passarmos da segunda para terceira linha, resolvemos o último impasse ao trocarmos 10 arcos por um pergaminho.

Convém observar que a “armação das contas” como fizemos nos exemplos acima não retrata a forma de como os egípcios somavam, pois eles nem sempre organizavam seus símbolos desta maneira e muito menos utilizavam os símbolos de “+” e “=”, que só passaram a ser utilizados muitos séculos depois. Mais uma vez reforçamos o nosso interesse em mostrar as relações entre o nosso atual sistema e o sistema hieróglifo egípcio, além do objetivo de desenvolver o raciocínio intuitivo dos alunos da educação básica perante a realização de operações elementares.

### 3.3 Subtração no sistema indo-arábico

Com o mesmo intuito do tópico anterior, abordaremos aqui o algoritmo da subtração que é mais utilizado atualmente na educação básica e expandiremos alguns pontos que passam despercebidos devido a mecanização do ensino.

**Exemplo 3.6:** Efetuar a subtração entre 17 346 e 15 928.



Figura 3.8: Subtração entre 17 346 e 15 928

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{1} \overset{\mathbf{6}}{\cancel{\mathbf{7}}} \mathbf{13} \overset{\mathbf{3}}{\cancel{\mathbf{4}}} \mathbf{16} \\
 - \mathbf{1} \mathbf{5} \mathbf{9} \mathbf{2} \mathbf{8} \\
 \hline
 \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{4} \mathbf{1} \mathbf{8}
 \end{array}$$

Figura produzida pelo autor

Ao introduzirmos na Educação Básica o algoritmo da subtração, por volta do 4<sup>o</sup> ou 5<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental I, os alunos ainda não têm a noção de número negativo, por isso é importante salientar a necessidade e o cuidado de sempre retiramos o menor valor do maior. Isso não garante que em todas as ordens esse padrão seja mantido e, é justamente neste ponto, que entra o conhecimento do sistema decimal indo-arábico, principalmente no que diz respeito ao valor posicional dos algarismos dentro do numeral. É sempre possível e fácil converter o valor de um algarismo de uma ordem superior para uma ordem inferior, no exemplo acima, na ordem das unidades, não seria possível retirarmos 8 unidades de 6, por isso recorremos a ordem das dezenas e convertemos uma das 4 dezenas em 10 unidades e somamos estas as 6 que já tínhamos, ficando com 16 unidades, das quais retiramos 8, restando 8 como o algarismo das unidades no resultado. Lembrando que das 4 dezenas que tínhamos na ordem das dezenas tiramos 1, restando 3, das quais é possível retirar 2 sem necessidade de manipulação. Na ordem das centenas ocorre o mesmo imprevisto, sendo contornado ao retirarmos 1 unidade de milhar das 7 disponíveis, e transformar em 10 unidades de milhar que serão somadas as três 3 já disponíveis, totalizando 13 unidades de milhar, das quais é possível retirar 9 restando 4 como algarismo das centenas no resultado.

Uma dica interessante é fazermos antes todos os ajustes, corrigindo os imprevistos dentro das ordens, feito isso basta realizar os cálculos, que chegaremos ao resultado correto. Este procedimento pode parecer desnecessário, porém contorna com maior facilidade situações como a do **exemplo 3.7**, principalmente para os alunos que estão iniciando os trabalhos com o algoritmo.

**Exemplo 3.7:** Efetuar a subtração entre 5 000 e 2 987.

Ao caracterizarmos o nosso sistema de numeração dissemos que o 0 (zero) era o símbolo usado para representar uma ordem vazia, não tendo valor posicional dentro do numeral. Neste exemplo, na ordem das unidades não é possível retirarmos 7 unidades de 0. Também não é possível recorrer a ordem das dezenas para contornar o impasse, pois ela também está representada por um 0 (zero), bem como na ordem das centenas. Esse impasse poderia se alastrar por muitas ordens, dependendo do número considerado. Apenas na ordem das unidades de milhar temos um valor diferente de 0 (zero). Assim, como podem ver na **figura 3.9**, corrigimos todas as ordens antes de efetuar as subtrações em cada ordem.

Figura 3.9: Subtração entre 5 000 e 2 987

$$\begin{array}{r}
 \cancel{5}^4 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 - 2 \ 9 \ 8 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 4 \ \cancel{0}^9 \ 0 \ 0 \\
 - 2 \ 9 \ 8 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 4 \ 9 \ \cancel{0}^9 \ 0 \\
 - 2 \ 9 \ 8 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 4 \ 9 \ 9 \ \cancel{0} \\
 - 2 \ 9 \ 8 \ 7 \\
 \hline
 2 \ 0 \ 1 \ 3
 \end{array}$$

Figura produzida pelo autor

A repetição das contas é para evidenciar cada passo dado na correção dos impasses em cada ordem. Claro que isso pode ser feito em uma única conta, acompanhada com a devida explicação. Note que o cálculo foi feito depois de corrigidas todas as ordens. Lembrando que começar a subtrair da esquerda para direita ou vice-versa não influenciará no resultado.

**Exemplo 3.8:** Efetuar a subtração entre 5 000 e 1 374.

Quando o aluno começa a trabalhar o algoritmo da subtração sem a devida noção dos valores posicionais dos algarismos, um erro recorrente no desenvolvimento dos cálculos é o seguinte:

Figura 3.10: Subtração entre 5 000 e 1 374

$$\begin{array}{r}
 \cancel{5}^2 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 - 1 \ 3 \ 7 \ 4 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \ \cancel{0}^{10} \ 0 \ 0 \\
 - 1 \ 3 \ 7 \ 4 \\
 \hline
 1 \ 7 \ 3 \ 6
 \end{array}$$

Figura produzida pelo autor

Não podemos julgar este erro como um total absurdo, basta lembrar como normalmente os professores executam os algoritmos da adição e subtração. Ao fazer os ajustes nas ordens é comum a expressão “baixa o 3 e leva o 1” ou “tira 1 do 5 que fica 4 e leva o 1”, há sempre a referência a este 1, dessa forma, o aluno pode julgar como correto tirar 3 do 5 e distribuir este 3 para as ordens seguintes, contornando seus problemas de uma única vez. É necessário que o aluno saiba que ao lidar com o 5, ele encontra-se na ordem das unidades de milhar e o 1 naquela ordem tem valor posicional igual a 1 000, portanto, acredito que estes tipos de erros são gerados por raciocínios equivocados, devido a falta do conhecimento de alguns detalhes importantes.

### 3.4 Subtração no sistema hieróglifo egípcio

A subtração no sistema hieróglifo egípcio a princípio não apresenta grandes dificuldades, pois trata-se basicamente de subtrair símbolos iguais, como podemos ver nos **exemplos 3.9 e 3.10** expostos na **figura 3.11**.

Figura 3.11: Subtração no sistema hieróglifo egípcio

<b>Exemplo 3.9</b>	
Sistema decimal indo-arábico	$234 - 123 = 111$
Sistema hieróglifo egípcio	
<b>Exemplo 3.10</b>	
Sistema decimal indo-arábico	$235\ 425 - 203\ 202 = 32\ 223$
Sistema hieróglifo egípcio	

Figura produzida pelo autor

Podemos notar facilmente no **exemplo 3.9** que dos 2 pergaminhos retiramos 1 ( $200 - 100 = 100$ ), dos 3 arcos de cesto retiramos 2 ( $30 - 20 = 10$ ) e das 4 hastes retiramos 3 ( $4 - 3 = 1$ ), resultando em  $100 + 10 + 1 = 111$ . No **exemplo 3.10**, dos 2 sapos retiramos 2 ( $200000 - 200000 = 0$ ), dos 3 dedos não retiramos nenhum ( $30000 - 0 = 30000$ ), das 5 flores de lótus retiramos 3 ( $5000 - 3000 = 2000$ ), dos 4 pergaminhos retiramos 2 ( $400 - 200 = 200$ ), dos dois arcos de cesto não retiramos nenhum ( $20 - 0 = 20$ ) e das 5 hastes retiramos 2 ( $5 - 2 = 3$ ) resultando em  $0 + 30000 + 2000 + 200 + 20 + 3 = 32223$ .

No entanto, em algumas situações teremos que fazer alguns ajustes antes de realizar as subtrações entre os símbolos iguais. Os egípcios não trabalhavam com números negativos, portanto, sempre retiravam os valores menores dos maiores. A seguir realizamos mais dois exemplos e reforçamos que as armações feitas aqui são para tentar deixar bem claro o desenvolvimento do algoritmo, não retratando uma iniciativa dos egípcios.

**Exemplo 3.11:** Efetuar a subtração entre 15 346 e 13 528 usando hieróglifos egípcios.

Figura 3.12: Subtração com a simbologia hieroglífica

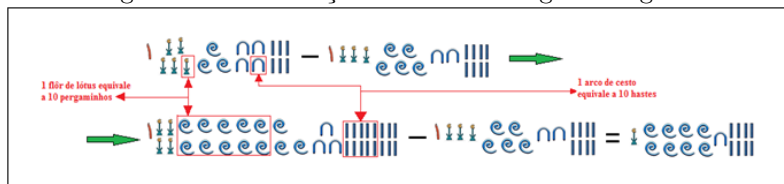


Figura produzida pelo autor

Nesta situação, não podemos efetuar a subtração dos símbolos iguais de forma direta, pois não é possível retirarmos 5 pergaminhos de 3, nem é possível retirarmos 8 hastes de 6. Para contornar estes impasses, transformamos uma flor de lótus (1000) em 10 pergaminhos, que somados aos 3 já existentes totalizaram 13 e transformamos 1 arco de cesto (10) em 10 hastes, que foram somados ao 6 já existentes, resultando em 16. Daí feitas estas alterações necessárias, efetuamos tranquilamente a subtração dos símbolos iguais.

**Exemplo 3.12:** Efetuar a subtração entre 331 000 e 5 678 usando hieróglifos egípcios.

Para esta subtração iremos descrever e ilustrar cada um dos passos para facilitar a compreensão.

Figura 3.13: Subtração com a simbologia hieroglífica

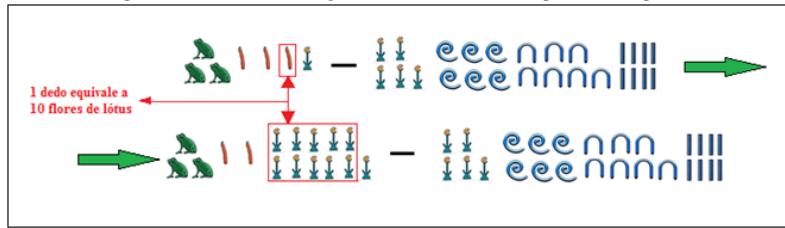


Figura produzida pelo autor

O primeiro impasse é não podermos retirar 5 flores de lótus de apenas 1, para resolver isso transformamos 1 dedo (10 000) em 10 flores de lótus que serão somadas a 1 flor já existente totalizando 11.

Figura 3.14: Subtração com a simbologia hieroglífica

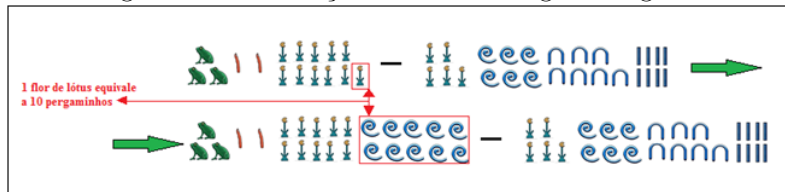


Figura produzida pela autor

O segundo impasse é que temos 6 pergaminhos para serem retirados, porém não temos de onde tirá-los. A solução foi transformarmos 1 flor de lótus (1 000) em 10 pergaminhos.

Figura 3.15: Subtração com a simbologia hieroglífica

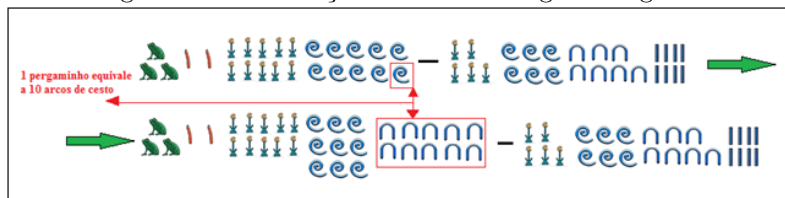


Figura produzida pelo autor

O terceiro impasse é que temos 7 arcos de cesto para serem retirados, mas também não temos de onde tirá-los. A solução foi transformarmos 1 pergaminho (100) em 10 arcos de cesto.

Figura 3.16: Subtração com a simbologia hieroglífica

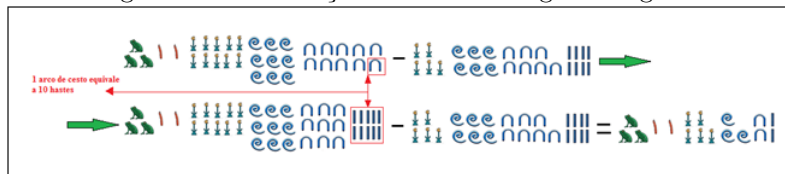


Figura produzida pelo autor

O quarto e último impasse é que temos 8 hastas para serem retiradas, mas também não temos de onde tirá-las. A solução foi transformarmos 1 arco de cesto (10) em 10 hastas. Feitas todas essas alterações ficou fácil subtrair os símbolos iguais, pois todas as quantidades que deviam ser retiradas ficaram menores do que as quantidades de onde elas serão retiradas, conforme a **figura 3.16**.

Feitas todas essas operações de adição e subtração nos dois sistemas, indo-arábico e egípcio, a grande importância para qual devemos estar atentos é na semelhança que os procedimentos guardam em comum e usar esta relação para desenvolver o raciocínio e aguçar a perícia do aluno na aquisição dos conhecimentos sobre estes conteúdos.

### 3.5 Multiplicação no sistema indo-arábico

A multiplicação é uma das quatro operações básicas da Aritmética elementar, que geralmente é definida como uma adição repetida. É uma habilidade essencial para estudantes que se preparam para a vida no mundo matemático do século XXI, pois ela possibilita ao aluno uma ferramenta importante na resolução de problemas do cotidiano, o que institui uma forte base para o raciocínio proporcional, pensamento algébrico, e de nível superior da Matemática. Nesse ponto, a História da Matemática pode entrar como um fator diferenciador, revivendo diferentes abordagens do processo de multiplicação das civilizações antigas, refletindo sobre a Matemática intrínseca na operação. [16]

Estudiosos acreditam que o algoritmo padrão da multiplicação que atualmente é mais utilizado na Educação Básica foi trazido para a Europa pelos povos Árabes e Africanos. Nos anos finais do Ensino Fundamental I (4º e 5º ano) e no ano início do Ensino Fundamental II (6º ano), os livros didáticos costumam nomear os dois termos de uma multiplicação básica como **multiplicando**, que é normalmente o numeral com a maior quantidade de algarismos e **multiplicador**, que é normalmente o numeral com a menor quantidade de algarismos e o método de resolução é o algoritmo tradicional. A lógica, para o uso desse algoritmo, resume-se a efetuar-se a multiplicação de cada algarismo do multiplicador por cada um do multiplicando e, em seguida, soma-se adequadamente todos os resultados. Esse método requer dos alunos memorização de multiplicações básicas como aquelas contidas na tabuada. Outro aspecto muito importante nesse ponto é o aluno e o professor terem ciência de que estão lidando com o sistema decimal indo-arábico e, por isso, todas as suas regras devem ser levadas em consideração para que o processo tenha sentido e não se retrate como uma simples receita para qual a memorização do passo-a-passo é suficiente. Salientamos também a importância da multiplicação gozar da propriedade comutativa, ou seja, independente de quem escolhermos para ser multiplicando ou multiplicador o resultado não será alterado, por isso é mais simples que os termos a serem multiplicados sejam chamados de **fatores** e o resultado chamado de **produto**. Na **figura 3.17**, resolveremos uma multiplicação simples pelo método tradicional e depois faremos algumas observações que devem ser consideradas de suma importância para a compreensão satisfatória do algoritmo utilizado.

**Exemplo 3.13:** Efetuar a multiplicação entre 7 453 e 82.

Figura 3.17: Multiplicação entre 7 453 e 82

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & 3 & 4 & 2 \\
 & 1 & & \\
 \hline
 & 7 & 4 & 5 & 3 \\
 \times & & & 8 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 9 & 0 & 6 \\
 + & 5 & 9 & 6 & 2 & 4 & 0 \\
 \hline
 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura produzida pelo autor



Percebe-se facilmente que este erro é concebido devido a mecanização do processo, o aluno aprende que ao passar de uma ordem para outra basta “pular uma casa”, sempre da esquerda para direita.

Uma abordagem da multiplicação que deve ser feita com os alunos é a resolução da operação usando os valores posicionais dos algarismos. Assimilado este conhecimento seria mais fácil compreender o algoritmo tradicional e talvez evitaria a prática dos erros citados anteriormente. Vejamos a resolução de um exemplo, trabalhando passo-a-passo com os valores posicionais dos algarismos.

**Exemplo 3.14:** Efetuar a multiplicação entre 5 674 e 39, usando o valor posicional dos algarismos.

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 5674 \cdot 39 &= (5000 + 600 + 70 + 4) \cdot (30 + 9) \\
 &= (5000 \cdot 30) + (600 \cdot 30) + (70 \cdot 30) + (4 \cdot 30) + (5000 \cdot 9) + (600 \cdot 9) + (70 \cdot 9) + (4 \cdot 9) \\
 &= 150000 + 18000 + 2100 + 120 + 45000 + 5400 + 630 + 36 = 221286
 \end{aligned}$$

Realizando a multiplicação, desta forma, percebemos que podemos começar tanto pela ordem das dezenas como da esquerda para direita, pois a primeira multiplicação feita foi  $(30 \cdot 5000)$  e isso não interfere no resultado. Fazer uma multiplicação desta forma é mais trabalhoso, porém exige que o aluno conheça de forma eficaz as características do sistema decimal indo-arábico.

Figura 3.21: Multiplicação entre 5 674 e 39 iniciada pelas maiores ordens

Ordens	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª
1º Fator			5	6	7	4
2º Fator				×	3	9
$30 \times 5\ 000 =$	1	5	0	0	0	0
$30 \times 600 =$		1	8	0	0	0
$30 \times 70 =$			2	1	0	0
$30 \times 4 =$				1	2	0
$9 \times 5\ 000 =$		4	5	0	0	0
$9 \times 600 =$			5	4	0	0
$9 \times 70 =$				6	3	0
$9 \times 4 =$					3	6
Soma Parcial	$1 + 1 = 2$	$10 + 2 = 12$	$20 + 1 = 21$	12	8	6
Produto	2	2	1	2	8	6

Figura produzida pelo autor

Na **figura 3.21**, procurei enfatizar a multiplicação usando os valores posicionais, iniciando os cálculos pelas maiores ordens, sempre obedecendo as regras do sistema de numeração. Na primeira vista, pode parecer estranho e muito complicado, mas sem sombras de dúvidas este trabalho de forma bem esclarecida em sala de aula desvendaria muitos detalhes que estão por trás do algoritmo enxuto que é abordado com mais frequência.

### 3.6 Multiplicação no sistema hieróglifo egípcio

São poucos os registros históricos dos antigos egípcios que nos revelam a maneira como aqueles povos desenvolviam a multiplicação. Os problemas contidos no Papiro de Rhind (ou Ahmes) dão a ideia de que as multiplicações realizadas pelos antigos egípcios restringiam-se a duas operações básicas, a duplicação de um valor e a adição de algumas parcelas. Trata-se de um método bem intuitivo sem a necessidade de decorar toda a tabuada de multiplicação, sendo suficiente efetuar adições, coisa que eles já faziam com facilidade no seu sistema de numeração. De início, resolveremos um problema que se assemelha com o contexto histórico das operações desenvolvidas pelos egípcios.

**Exemplo 3.15:** Supondo que cada pessoa tem direito a 9 sacos de trigo, um grupo de 15 pessoas teria direito a quantos sacos?

**Solução:** Usando a multiplicação conforme os antigos egípcios e os símbolos hieróglifos temos:

Figura 3.22: Multiplicação pelo método de duplicações

*I	IIII*
*II	IIII IIII = 9 IIII*
*III	9 IIII 9 IIII = 81 IIII*
*VIII	81 IIII 81 IIII = 648 IIII*
<b>TOTAL</b> I+II+III+VIII = 15 II	IIII + 9 IIII + 81 IIII + 648 IIII = 729 IIII

Figura produzida pelo autor

Como podemos observar o método das duplicações sucessivas era bem apropriado para o sistema hieróglifo egípcio. Sua característica aditiva facilitava os cálculos, pois para duplicar certo valor seria suficiente repetir sua escrita e fazer os ajustes caso fosse necessário.

Na primeira linha da primeira coluna temos o símbolo equivalente a 1 que representa uma pessoa, e na primeira linha da segunda coluna, temos o símbolo equivalente a 9, que representa a quantidade de sacos de trigo que uma pessoa tem direito. Na linha seguinte ambas as quantidades são duplicadas e assim segue até que a soma das pessoas seja igual ou superior a 15. Os valores marcados com asteriscos na primeira coluna indicam aqueles que devem ser somados para se obter 15 e os marcados na segunda coluna são aqueles que devem ser somados para se obter a solução do problema. Esse algoritmo realmente funciona, pois

$$15 \times 9 = (1 + 2 + 4 + 8) \times 9 = 1 \times 9 + 2 \times 9 + 4 \times 9 + 8 \times 9 = 9 + 18 + 36 + 72 = 135.$$

**Exemplo 3.16:** Multiplique, como os egípcios, 23 por 85, ou seja, tome 23 vezes o número 85.

**Solução:** Para fixar um pouco mais as ideias farei o produto com os símbolos hieróglifos e depois com algarismos indo-arábicos.



Figura 3.23: Multiplicação entre 23 e 85 pelo método dos antigos egípcios

Coluna 1	Coluna 2
I*	nnnn III*
II*	nnnn III nnnn II = e nnn*
III*	e nnn e nnn = e nn*
IIII*	e nn e nn = eennnn
IIII III = n III*	eennnn eennnn = i e nnn*
<b>Total</b>	<b>Produto</b> nnnn III + e nnn + e nn + i e nnn = eennnn

Figura produzida pelo autor

Em ambas as colunas, observamos a duplicação dos símbolos de uma linha para outra, seguida dos ajustes necessários impostos pelas regras do sistema. Na primeira coluna cessamos a duplicação no 16 pois o próximo valor seria 32 que já supera o fator 23.

Usando notações algébricas atuais, podemos descrever o método para multiplicação de valores naturais utilizado pelos antigos egípcios da seguinte maneira.

Suponha que desejamos efetuar a multiplicação entre os fatores A e B:

- Na primeira coluna, iniciamos com o número 1 e vamos duplicando esse valor em cada linha seguinte;
- Na segunda coluna, iniciamos com um dos fatores A ou B, digamos que escolhemos o B, então em cada linha vamos duplicando o seu valor;
- Encerramos o processo de duplicação em ambas as colunas assim que a soma dos valores da primeira coluna se igualar ou superar o valor de A;
- Na primeira coluna, escolhemos os valores cuja soma seja igual a A;
- Na segunda coluna, somamos os valores correspondentes aos escolhidos na primeira. Esta soma será o valor do produto  $A \times B$ .

Transcrevendo o **exemplo 3.16** para os algarismos indo-arábicos temos a solução na tabela 3.1:

Tabela 3.1: Multiplicação entre 23 e 85

Coluna 1	Coluna 2
*1	*85
*2	*170
*4	*340
8	680
*16	*1 360
$23 = 1 + 2 + 4 + 16$	$23 \times 85 = 85 + 170 + 340 + 1360 = 1955$

Tabela produzida pelo autor

Note que, conforme a descrição anterior do método, na coluna 1 selecionamos os valores 1, 2, 4 e 16 que somados resultam em 23. Daí, somando os valores correspondentes a estes na

coluna 2 chegamos ao produto desejado. Para resolução dos exemplos seguintes usaremos o método das duplicações apenas com algarismos indo-arábicos, pois seria ele ideal para se trabalhar multiplicações no Ensino Básico de uma forma mais intuitiva e menos decorativa.

**Exemplo 3.17:** Efetuemos usando o método da duplicação dos antigos egípcios o produto  $13 \times 45$ .

Tabela 3.2: Multiplicação entre 13 e 45

Coluna 1	Coluna 2
*1	*45
2	90
*4	*180
*8	*360
$13 = 1 + 4 + 8$	$13 \times 45 = 45 + 180 + 360 = 585$

### Tabela produzida pelo autor

Como já frisamos anteriormente, a maioria das fontes e problemas que conduziram os estudiosos ao conhecimento do método da multiplicação utilizado pelos antigos egípcios encontram-se no Papiro de Ahmes e, embora não se tivesse encontrado muita dificuldade para decifrar e então interpretar a maioria dos problemas desse papiro há um, o de número 79, cuja interpretação não é tão precisa. Nesse problema, figura o seguinte conjunto curioso de dados:

- 7 casas;
- 49 gatos;
- 343 ratos;
- 2 401 espigas de trigo;
- 16 807 hécatas de grãos;
- Total 19 607.

Facilmente se reconhecem os números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma. Devido a isso, inicialmente, pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica casas, gatos etc. para representar primeira potência, segunda potência e assim por diante. Em 1907, porém, o historiador Moritz Cantor deu uma interpretação mais interessante e mais plausível. Representaremos esta interpretação em mais um exemplo, o qual resolveremos usando o método multiplicativo dos antigos egípcios. [9]

**Exemplo 3.18:** “Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hécatas de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hécatas de grãos, quanto havia disso tudo?”. [9]

**Solução:** Para encontrar o número de gatos efetuamos o produto  $7 \times 7$ :

Tabela 3.3: Multiplicação de 7 por 7

Coluna 1	Coluna 2
*1	*7
*2	*14
*4	*28
8	56
$7 = 1 + 2 + 4$	$7 \times 7 = 7 + 14 + 28 = 49$

**Tabela produzida pelo autor**

Logo, na situação descrita, existiam 49 gatos. Agora vamos calcular o número de ratos, para isso efetuamos o produto  $7 \times 49$ :

Tabela 3.4: Multiplicação de 7 por 49

Coluna 1	Coluna 2
*1	*49
*2	*98
*4	*196
8	392
$7 = 1 + 2 + 4$	$7 \times 49 = 49 + 98 + 196 = 343$

**Tabela produzida pelo autor**

Portanto, na situação descrita existiam 343 ratos. Agora para calcular o número de espigas efetuamos o produto  $7 \times 343$ :

Tabela 3.5: Multiplicação de 7 por 343

Coluna 1	Coluna 2
*1	*343
*2	*686
*4	*1372
8	2744
$7 = 1 + 2 + 4$	$7 \times 343 = 343 + 686 + 1372 = 2401$

**Tabela produzida pelo autor**

Concluimos que na situação descrita existiam 2 401 espigas. Por fim, determinamos o número de hécates de grãos ao efetuarmos o produto  $7 \times 2401$ :

Tabela 3.6: Multiplicação de 7 por 2401

Coluna 1	Coluna 2
*1	*2401
*2	*4802
*4	*9604
8	19208
$7 = 1 + 2 + 4$	$7 \times 2401 = 2401 + 4802 + 9604 = 16807$

**Tabela produzida pelo autor**

Finalizamos com o total de hécates de grãos existente na situação, sendo este igual a 16 807. E, ao juntarmos todos os bens existentes na situação, chegaremos a um montante de 19 607.

Uma dúvida que não pode ser ignorada após esta explanação é a seguinte: “*É possível se utilizar o algoritmo abordado para a multiplicação entre quaisquer dois números naturais dados?*” Tal dúvida é compreensível, pois ao analisarmos os exemplos anteriores, percebemos que na primeira coluna, sempre encontramos um dos fatores da multiplicação a partir da soma de potências de base 2, então “*será possível escrever todo número inteiro positivo de modo único como soma de diferentes potências de base 2 com expoentes inteiros não negativos?*” A demonstração da veracidade deste fato será apresentada no **Anexo A** deste trabalho.

### 3.7 Divisão no sistema decimal indo-arábico

A divisão é considerada como uma das quatro operações fundamentais da Aritmética. Esta operação pode ser apresentada de duas maneiras distintas. A de repartir em partes iguais, na qual são dados um inteiro e a quantidade de partes em que o mesmo deve ser dividido, sendo o resultado, o valor de cada parte. A outra está associada a ideia de medida, ou seja, medir quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Neste caso, são dados um inteiro e o valor de cada uma das partes que formam este inteiro, sendo o resultado procurado, a quantidade de partes. Dentre as quatro operações básicas, a divisão sempre foi considerada a mais difícil, ainda no século XV, o matemático italiano Luca Pacioli escreveu a seguinte frase “*se um homem pode dividir bem, tudo mais se torna fácil.*”

Até hoje as dificuldades de compreender o algoritmo da divisão são atestadas entre os alunos da educação básica e até mesmo entre professores. Alguns fatores tornam este algoritmo um pouco mais complexos que os das outras operações, pois o seu domínio envolve não só os fatos básicos da própria operação, mas também exige domínios relativos à multiplicação e à subtração. Outra grande dificuldade está relacionada ao uso de estimativa, permitindo ao estudante, através de tentativa e erro, chegar ao quociente, embora possa não obter sucesso nas primeiras tentativas.

A abordagem do algoritmo da divisão que faremos aqui será como nas outras operações, buscando sempre fortalecer o conhecimento e a utilidade das características do nosso sistema de numeração para compreensão dos passos. Posteriormente falaremos sobre o método utilizado pelos antigos egípcios para efetuar divisões, por isso nos restringiremos a divisão entre números inteiros positivos.

Os quatro termos envolvidos em uma divisão estão descritos abaixo:

- *Dividendo* ( $D$ ) – o inteiro que será dividido;
- *Divisor* ( $d$ ) – a quantidade de partes em que o inteiro será dividido;
- *Quociente* ( $q$ ) – o valor referente a cada parte;
- *Resto* ( $r$ ).

As primeiras observações que devem ser feitas em relação a estes termos, antes de falar do algoritmo, são as seguintes:

- O divisor deve ser sempre diferente de 0, ou seja,  $d \neq 0$ ;
- E o resto deve sempre ser maior que ou igual a 0 (zero) e menor que  $d$ , ou seja,  $0 \leq r < d$ .

Quando  $r = 0$  dizemos que a divisão é **exata** e quando  $r \neq 0$  dizemos que a divisão é **inexata**.

Uma das proposições mais importantes da divisibilidade é o **Algoritmo da Divisão**, seu resultado é bastante conhecido, sendo muitas vezes abordado nos livros do Ensino Fundamental como a prova real da divisão. Este algoritmo garante que em uma divisão entre dois números inteiros, considerando os termos destacados anteriormente temos que:

$$D = d \cdot q + r$$

Ao falar do **Algoritmo da Divisão**, não podemos deixar passar o seu contexto histórico, pois trata-se de mais uma grande contribuição para o ensino proveniente da História da Matemática. Este algoritmo é destacado no Livro VII dos Elementos de Euclides, uma das maiores obras da matemática, datada de aproximadamente 300 a.C. Constitui o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora criado, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável. [4] Inclusive alguns matemáticos defendem que esta obra definiu os padrões do que é matemática e como é que se faz matemática.

Começaremos falando do algoritmo da divisão através de situações-problemas cujas características e o nível de dificuldade são comuns aos livros didáticos adotados na educação básica para alunos de 5<sup>o</sup> e 6<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental.

**Exemplo 3.19:** Um professor do 5<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental realizará uma atividade em grupo e dispõe de 84 folhas para serem divididas entre os 6 grupos formados. Quantas folhas serão disponibilizadas para cada grupo?

**Solução:** Neste exemplo a ideia associada a divisão é a de repartir em partes iguais. A solução desta situação consiste em dividir 84 por 6 e para isso desenvolveremos o algoritmo normalmente usado, conhecido como “*método da chave*”.

Figura 3.24: Divisão de 86 por 6

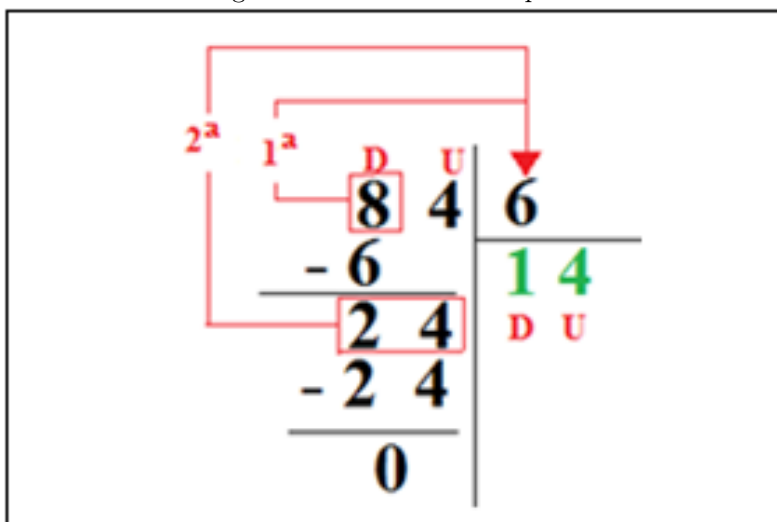


Figura produzida pelo autor

O total de 84 folhas contém 8 dezenas e 4 unidades, então a primeira divisão será das 8 dezenas de folhas para as 6 equipes, sendo possível disponibilizar 1 dezena para cada equipe, restando apenas 2 dezenas. Como no resultado a ordem das dezenas já foi preenchida, então as 2 dezenas que sobraram são transformadas em 20 unidades e acrescentadas das 4 unidades já existentes, totalizando 24 unidades. Assim a 2ª divisão será das 24 unidades para as 6 equipes, o que resulta em 4 unidades para cada equipe e não sobra nenhuma folha, isto é, o resto é 0 (zero) e a divisão é exata. Conclusão, cada equipe receberá 1 dezena de folhas mais 4 unidades, ou seja, 14 folhas.

Aplicando o Algoritmo da Divisão, verificamos a veracidade dos cálculos.

$$D = d \cdot q + r = 6 \cdot 14 + 0 = 84.$$

**Exemplo 3.20:** Determinada granja embala os ovos em caixas de 1 dúzia para serem comercializados. Certo dia haviam 196 ovos para serem embalados, quantas caixas serão necessárias para esta atividade?

**Solução:** Neste exemplo, a ideia associada a divisão é a de medida, isto é, medir quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Sabendo que uma dúzia corresponde a 12 ovos, então resolveremos o problema efetuando a divisão de 196 por 12. Ou seja, mediremos quantas vezes 1 dúzia = 12 cabe em 196.

Figura 3.25: Divisão de 196 por 12

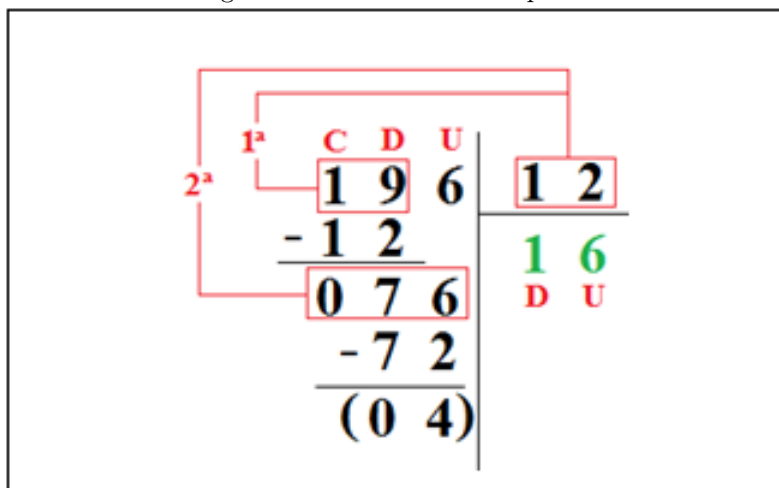


Figura produzida pelo autor

O total de 196 ovos possui 1 centena, 9 dezenas e 6 unidades. Se dividirmos 1 centena por 12 obteremos menos de 1 centena, logo devemos perceber que no quociente a ordem das centenas será vazia, logo o resultado inicia-se pela ordem das dezenas. Para isso, tomamos 1 centena como 10 dezenas e somamos a elas as 9 dezenas do dividendo, totalizando 19 dezenas. Desta forma a primeira divisão que realizamos é de 19 dezenas de ovos por 12, isso nos fornece 1 dezena de caixas no quociente. Ao multiplicarmos 1 dezena por 12, obtemos 12 dezenas, que subtraídas das 19, deixa 7 dezenas como resto. A ordem das dezenas no quociente fica preenchida, então transformamos as 7 dezenas em 70 unidades e somamos com as 6 unidades do dividendo, obtendo 76 unidades. A segunda divisão que realizamos é de 76 unidades por 12. Neste ponto, cabe a seguinte pergunta: “Por quantas unidades devemos multiplicar 12 para chegarmos em 76 ou nos aproximarmos sem ultrapassar”? Aí o aluno deve ter um conhecimento básico da multiplicação para saber que 12 deve ser multiplicado por 6, obtendo 72 unidades, que subtraídas das 76 deixam 4 unidades como resto. Estas 4 unidades não podem ser divididas por 12, além disso, a menor ordem do quociente já foi preenchida, assim podemos encerrar a divisão e interpretar o resultado. A interpretação correta é a seguinte: para realizar a atividade desejada serão necessárias 16 caixas. Nestas 16 caixas serão embalados 192 ovos, restando 4 sem ser embalados.

Verificando os resultados no Algoritmo da Divisão, temos:

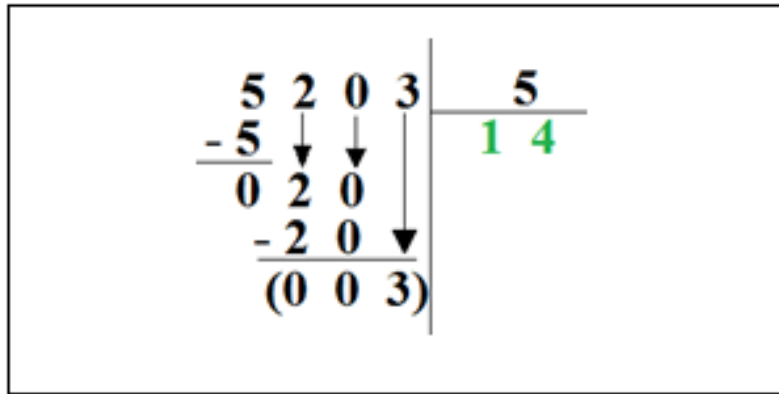
$$D = d \cdot q + r = 12 \cdot 16 + 4 = 192 + 4 = 196.$$

**Exemplo 3.21:** No último ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), 5 203 estudantes se inscreveram para realizar a prova em uma pequena cidade do interior da Paraíba, que dispõe de 5 escolas para receber estes alunos. Como as escolas possuem todas o mesmo porte, a comissão organizadora resolveu dividir estes candidatos de forma igualitária entre as escolas disponíveis. É possível que todas as escolas recebam a mesma quantidade de alunos? Justifique sua resposta.

Trata-se de uma situação simples em que a ideia associada a divisão sobre cai na repartição de um todo em partes iguais, isto é, repartir os 5 203 alunos entre as 5 escolas disponíveis. Antes de expor a solução correta para a situação, farei uma análise de um erro bem comum entre os alunos que não dominam de forma correta o algoritmo da divisão em situações similares a esta. A maioria dos alunos compreendem que precisam dividir 5 203 por 5, mas muitos cometem o seguinte

erro na execução do algoritmo:

Figura 3.26: Possível erro na divisão de 5 203 por 5



**Figura produzida pelo autor**

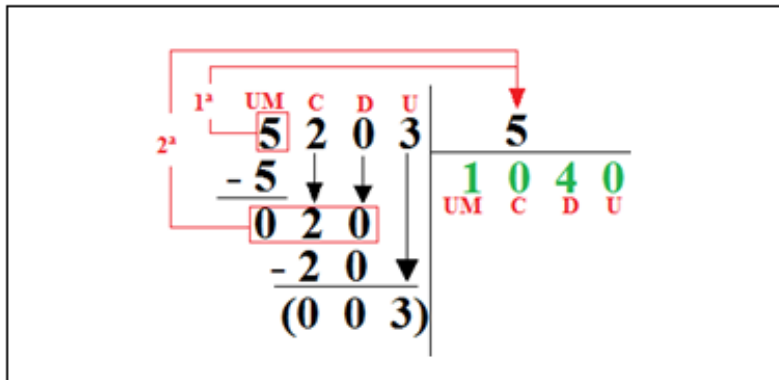
Pode parecer um grande absurdo, entretanto, a forma como o algoritmo é normalmente apresentado para estes alunos lhes conduz facilmente a cometerem este erro. Tentando interpretar o raciocínio do aluno, notamos que inicialmente ele dividiu 5 por 5 que deu 1. Multiplicou  $1 \cdot 5 = 5$  e subtraiu  $5 - 5 = 0$ . Baixou o próximo algarismo que é o 2 e como não dá para dividir 2 por 5, baixou também o 0 (zero), resultando em 20. Então dividiu 20 por 5, que deu 4, multiplicou  $4 \cdot 5 = 20$  e subtraiu  $20 - 20 = 0$ . Finalmente, baixou o 3 que era o último algarismo e como o 3 não dá pra ser dividido por 5, ficou sendo o resto, encerrando a divisão.

Trabalhar os algoritmos nas operações básicas sem relacionar cada passo as características do sistema de numeração pode ser muito perigoso, pois além de mecanizar o processo leva a propagação desses erros, que passam despercebidos pelos alunos. É preciso incentivá-los a verificarem a solução por meio do Algoritmo da Divisão, isso pode levá-los a constatação do erro, pois teríamos:

$$D = d \cdot q + r = 14 \cdot 5 + 3 = 70 + 3 = 73 \neq 5203.$$

**Solução:** O cálculo correto seria o seguinte:

Figura 3.27: Divisão de 5 203 por 5



**Figura produzida pelo autor**

Nunca é demais chamar a atenção para as ordens que compõem o dividendo: 5 unidades de milhar, 2 centenas, 0 dezenas e 3 unidades. A primeira divisão realizada foi 5 unidades de milhar



por 5, que dá 1 unidade de milhar, ficando esta ordem preenchida no quociente. 1 unidade de milhar  $\times 5 = 5$  unidades de milhar e 5 unidades de milhar - 5 unidades de milhar = 0. Agora vamos para ordem das centenas, como 2 centenas divididas por 5 não chega a gerar uma centena já concluímos que esta ordem no quociente será vazia e respeitando as características do nosso sistema de numeração preenchemos ela com o 0 (zero). Ao invés de 2 centenas consideramos 20 dezenas e como a ordem das dezenas no dividendo é vazia, a segunda divisão efetuada será 20 dezenas por 5, obtendo 4 dezenas, ficando preenchida a ordem das dezenas no quociente. 4 dezenas  $\times 5 = 20$  dezenas e 20 dezenas - 20 dezenas = 0. Finalmente chegamos a ordem das unidades representada por 3. Como 3 unidades divididas por 5 não chega a gerar 1 unidade, percebemos que a ordem das unidades no quociente também ficará vazia e como na ordem das centenas, preenchemos ela com o 0 (zero) e as 3 unidades serão o resto da nossa divisão.

Recapitulando a situação proposta, concluímos que a comissão organizadora do ENEM poderá alocar 1 040 alunos em cada uma das 5 escolas disponíveis e os 3 alunos restantes farão a prova em uma das 5 escolas ou serão distribuídos em 2 ou 3 delas. Feito isso as escolas citadas não ficarão todas com o mesmo número de alunos e a resposta para pergunta do problema será, **não**.

Verificando a solução pelo Algoritmo da Divisão, temos:

$$D = d \cdot q + r = 1040 \cdot 5 + 3 = 5200 + 3 = 5203.$$

### 3.8 Frações no sistema decimal indo-arábico

As frações surgiram da necessidade de registrar medidas de maneira mais precisa. Sua abordagem no decorrer do Ensino Fundamental I está relacionado a construção dos números racionais, em geral, trabalhado nos currículos do 4º e 5º anos. Já no Ensino Fundamental II, o seu ensino deve estar em conexão direta a outros conhecimentos: Medidas, Razão, Proporção, Porcentagem e outros. Segundo os PCN's,

*No terceiro e no quarto ciclos a abordagem dos racionais, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Para abordar o estudo dos racionais, sob essa perspectiva, os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino. (BRASIL, 1997, p. 101).*

Ainda segundo PCN's, embora as representações fracionárias dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao Ensino Fundamental II sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma fracionária. Uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais. A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a

unidade que representa o todo, compreenda a inclusão de classes de equivalência, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas. Todo esse contexto, exige um conhecimento bem além das operações trabalhadas pelos alunos até então.

### 3.8.1 Algumas ideias associadas as frações

- **1ª Ideia: fração como parte/todo**

Esta é a ideia de fração mais explorada nos estudos iniciais deste conteúdo. Normalmente se trabalha com figuras geométricas, em que a figura completa representa o **todo** ou o **inteiro**. Este inteiro é dividido igualmente em um certo número de partes, tal número será definido como o **denominador** da fração. Algumas dessas partes são pintadas e ao número dessas partes pintadas dá-se o nome de **numerador** da fração. Assim, a fração é representada separando os seus termos por um traço horizontal ou uma barra inclinada, sendo o termo de cima (ou o termo antes da barra) o numerador e o termo de baixo (ou o termo depois da barra) o denominador. Vejamos no **exemplo 3.22**, a representação de uma fração por meio de uma figura geométrica.

**Exemplo 3.22:** A fração  $\frac{5}{6}$  representada por uma figura geométrica.

Figura 3.28: Representação geométrica da fração  $\frac{5}{6}$

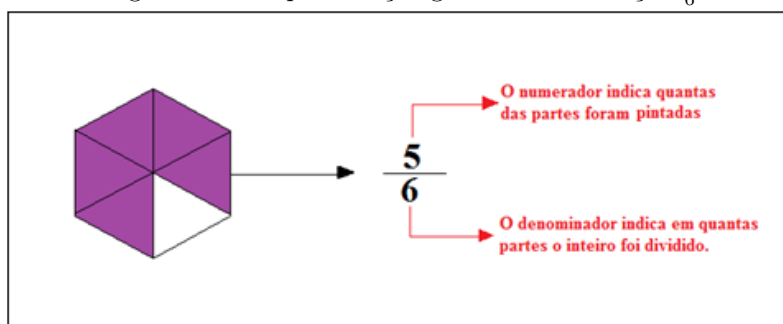


Figura produzida pelo autor

- **2ª Ideia: fração como uma razão**

Desempenhando a ideia de razões, as frações são usadas para fazer comparações entre duas grandezas. Considere um time titular de futebol, digamos que ele atue com 5 defensores, 3 meias e 3 atacantes. Dessa informação, é possível retirar algumas razões e representá-las por meio de frações:

- A razão entre os defensores e o time titular completo seria  $\frac{5}{11}$ . Neste caso, estamos comparando o número de jogadores de defesa com o número total de jogadores do time titular;
- A razão entre os atacantes e o time titular completo seria  $\frac{3}{11}$ . Neste caso, estamos comparando o número de jogadores de ataque com o número total de jogadores do time titular;
- A razão entre os atacantes e os defensores seria  $\frac{3}{5}$ . Neste caso, estamos comparando o número de jogadores de ataque com o número de jogadores de defesa.

Existem algumas razões especiais e bastante comum no dia-a-dia, aquelas que comparam grandezas de naturezas distintas, vejamos alguns exemplos:

- **Velocidade Escalar Média:** razão entre o deslocamento de um objeto e o tempo gasto nesse deslocamento:

$$V_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}}$$

- **Densidade Demográfica:** razão entre o número de habitantes de uma localidade e a área superficial dessa localidade:

$$D_m = \frac{\text{numero - de - habitantes}}{\text{area}}$$

- **Escala utilizadas em mapas e plantas de arquiteturas:** razão entre as medidas do desenho e as medidas reais:

$$\text{Escala} = \frac{\text{medidas - do - desenho}}{\text{medidas - reais}}$$

- **3ª Ideia: fração como uma divisão**

Neste ponto, a fração é abordada como uma divisão, em que o numerador seria o dividendo, o denominador seria o divisor e a fração seria o quociente. Sem efetuar a divisão entre numerador e denominador teríamos o quociente na forma fracionária, caso dividamos o numerador pelo denominador, o quociente pode ser um número inteiro ou um número decimal.

De acordo com os seus termos, as frações podem ser classificadas da seguinte maneira:

- **Frações Próprias** – são as frações em que o numerador é diferente de zero e menor que o denominador;
- **Frações Impróprias** – são as frações em que o numerador é zero ou é igual ou é maior que o denominador.

As frações impróprias, em que o numerador é divisível pelo denominador, também são chamadas de **Frações Aparentes**.

### 3.8.2 Números Mistos

Nos estudos das frações abordados no 5º e 6º anos, trabalha-se com os chamados números mistos, como próprio nome sugere, números formados por uma parte inteira e outra fracionária. Exemplos:  $1\frac{3}{5}$ ;  $5\frac{1}{2}$ ;  $3\frac{2}{11}$ . Quando abordamos a ideia de fração como uma divisão do numerador pelo denominador, podemos transformar toda fração imprópria em um número misto e vice-versa, para isso lançamos mão do Algoritmo da Divisão.

**Exemplo 3.23:** Transformar os números mistos  $5\frac{1}{2}$  e  $3\frac{2}{11}$  em frações.

Solução:

Figura 3.29: Transformação de números mistos em frações

$$5 \frac{1}{2} = \frac{5 \times 2 + 1}{2} = \frac{11}{2}$$

Figura produzida pelo autor

Para converter o número misto em fração precisamos apenas determinar o numerador da fração, pois o denominador não se altera. No número misto, o denominador representa o divisor, a parte inteira representa o quociente e o numerador representa o resto, logo pelo Algoritmo da Divisão, temos  $5 \cdot 2 + 1 = 11$ . De maneira análoga, para  $3 \frac{2}{11}$ , temos:

Figura 3.30: Transformação de números mistos em frações

$$3 \frac{2}{11} = \frac{3 \times 11 + 2}{11} = \frac{35}{11}$$

Figura produzida pelo autor

**Exemplo 3.24:** Transformar as frações impróprias  $\frac{7}{3}$  e  $\frac{18}{5}$  em números mistos.

Solução:

Figura 3.31: Transformação de frações em números mistos

$$\frac{7}{3} \rightarrow \begin{array}{r} 7 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline (1) \end{array} \rightarrow 2 \frac{1}{3}$$

Figura produzida pelo autor

O processo também se ampara no Algoritmo da Divisão. Dividindo-se o numerador pelo denominador, o quociente será a parte inteira, o resto será o numerador e o denominador se mantém. De maneira análoga aplicamos o processo para a fração  $\frac{18}{5}$ .

Figura 3.32: Transformação de frações em números mistos

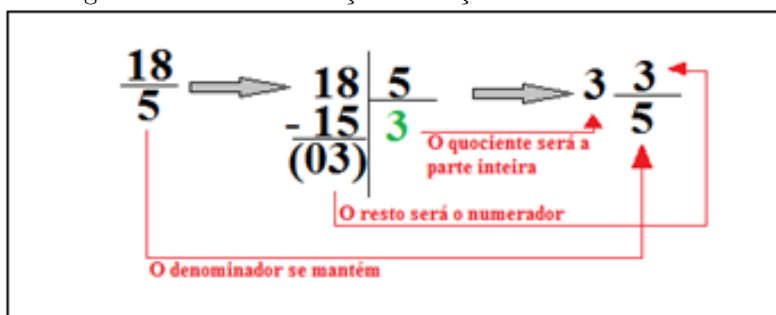


Figura produzida pelo autor

A utilização de números mistos ajuda bastante a compreender alguns valores referentes a algumas medidas, quando estas não representam quantidades inteiras das unidades consideradas. Como vimos no **exemplo 3.22**, é bem simples representar geometricamente uma fração própria, basta dividir a figura igualmente no número de partes correspondente ao denominador e pintar o número de partes correspondente ao numerador.

Porém se pedirmos aos alunos para representarem geometricamente algumas frações impróprias, por exemplo  $\frac{7}{3}$  e  $\frac{18}{5}$ , certamente ouviremos dúvidas do tipo: “como vou pintar 7 partes se minha figura só foi dividida em 3”? E ainda poderemos ver erros mais absurdos do que as dúvidas anteriores, como os seguintes:

Figura 3.33: Representação geométrica de frações impróprias

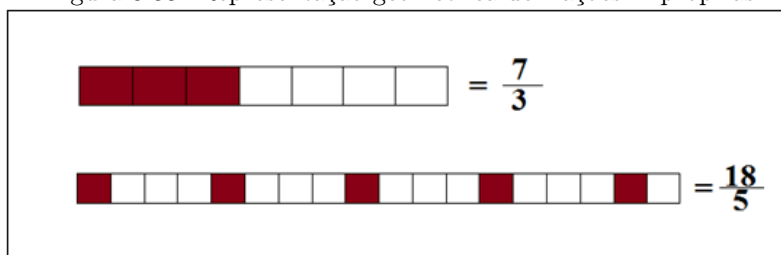


Figura produzida pelo autor

O aluno que externar a dúvida supracitada deixará transparecer que ele compreendeu a função do numerador e do denominador de uma fração quando queremos representá-la geometricamente, o que não acontece com o aluno que apresentar a solução da **figura 3.33**. Nestas situações, talvez trabalhar com os números mistos seja mais fácil de concretizar a compreensão da representação geométrica. Como visto no **exemplo 3.24**, a fração  $\frac{7}{3}$  equivale ao número misto  $2\frac{1}{3}$ , então necessitamos de 3 figuras idênticas, 2 para representar as partes inteiras e uma para representar a parte fracionária. Como o denominador se mantém todas as figuras serão divididas em 3 partes iguais, daí 2 são pintadas completamente e da outra será pintada apenas uma parte. Confira na **figura 3.34**.

Figura 3.34: Representação geométrica de frações impróprias

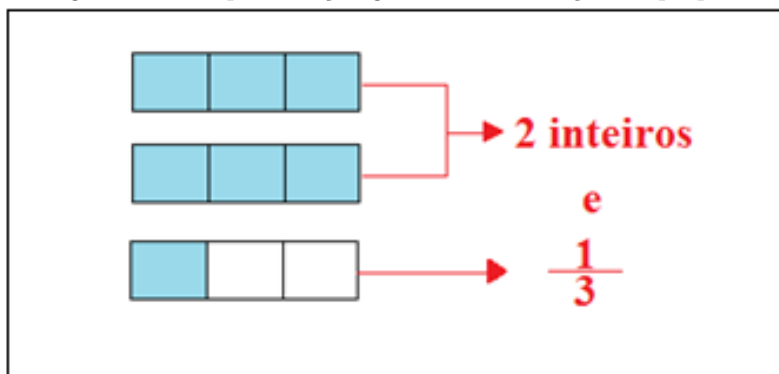


Figura produzida pelo autor

De maneira análoga, para representar a fração  $\frac{18}{5}$  que equivale ao número misto  $3\frac{3}{5}$ , precisamos de 4 figuras idênticas, 3 para representar os 3 inteiros e uma para representar a parte fracionária. Todas divididas em 5 partes iguais. Confira na **figura 3.35**.

Figura 3.35: Representação geométrica de frações impróprias

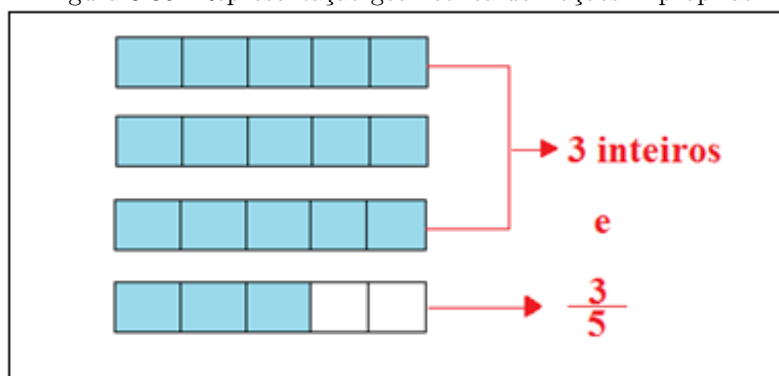


Figura produzida pelo autor

Esse processo se assemelha bastante ao raciocínio que os antigos egípcios desenvolviam quando precisavam efetuar divisões, como veremos no **tópico 3.10**.

### 3.9 As Frações no Antigo Egito

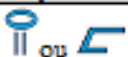





Até o momento falamos apenas como os antigos egípcios trabalhavam com os números naturais, veremos agora, como eles representavam e utilizavam os números fracionários. De antemão afirmo que os números fracionários dos antigos egípcios se assemelham ao que hoje definimos como frações unitárias, ou seja, aquelas frações com numeradores iguais a 1. As notações hieroglíficas egípcias para estes números eram bem simples, eles apenas acrescentavam em cima dos números naturais, os quais hoje chamamos de denominador, um símbolo oval que lembra bastante a forma de uma elipse.

Uma grande diferença entre as frações dos antigos egípcios e as nossas é que este símbolo elíptico não exerce a mesma função dos numeradores das frações atuais. Enquanto os numeradores atuais representam números cardinais, designando quantas partes estão sendo consideradas do total

de partes em que foi dividido um inteiro, o símbolo hieróglifo oval tem sentido ordinal, ou seja, indica que, em uma distribuição em  $n$  partes iguais, tomamos como a  $n$ -ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em  $n$  partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por  $n$  pessoas e  $\frac{1}{n}$  é quanto cada uma irá ganhar. Dessa forma, é considerado um abuso de linguagem afirmar que as frações egípcias possuem numerador igual a 1, é bem mais conveniente dizer que estas frações representam os inversos dos números inteiros. [17]

Vejamos na **figura 3.36** as representações hieroglíficas de algumas frações.

Figura 3.36: Representação hieroglífica de frações

Frações	Representação Hieroglífica
$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{13}$	
$\frac{1}{22}$	
$\frac{1}{101}$	

**Figura produzida pelo autor**

Como podemos notar, uma fração com numerador diferente de 1 que possuía uma representação no sistema egípcio era  $\frac{2}{3}$ , já a fração  $\frac{1}{2}$ , muitas vezes possuía uma representação especial, as demais seguiam o mesmo padrão. Aliás, os escribas atribuíam à fração  $\frac{2}{3}$  um papel de destaque nos processos aritméticos, de modo que para encontrar o terço de um valor, primeiro eles calculavam  $\frac{2}{3}$  e depois calculavam a metade disso. Caso eles, precisassem encontrar o terço de 9, por exemplo, primeiro eles encontravam  $\frac{2}{3}$  de 9, que é 6 e depois tomavam a metade de 6 que é  $3 = \frac{1}{3}$  de 9.

Pelo exposto no Papiro de Ahmes, naquela época as frações eram manipuladas livremente em operações aritméticas, no entanto, com exceção da fração  $\frac{2}{3}$  as demais frações racionais próprias com numeradores diferentes de 1 não eram vistas como elementares, necessitando passar por um processo de transformação, sendo reduzidas a uma soma de frações unitárias. Por exemplo, a fração  $\frac{2}{7}$ , para nós uma fração irredutível, era vista pelos egípcios como uma fração redutível a soma de duas frações unitárias  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{28}$ .

Nesta perspectiva, o Papiro de Ahmes inicia-se com uma tabela que fornece todas as frações do tipo  $\frac{2}{n}$  com  $5 \leq n \leq 101$ , como somas de frações unitárias. Como exemplos podemos citar:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Na sequência da tabela supracitada, o Papiro de Ahmes traz uma outra pequena tabela com todas as frações do tipo  $\frac{n}{10}$  com  $1 \leq n \leq 9$  representadas novamente como soma de frações unitárias e da fração  $\frac{2}{3}$ . Como exemplo temos:

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{2}{3}$$

Ao expormos a representação da fração  $\frac{2}{101}$  como a soma das frações unitárias  $\frac{1}{101}$ ,  $\frac{1}{202}$ ,  $\frac{1}{303}$  e  $\frac{1}{606}$  conforme fez o escriba Ahmes em seu papiro, poderíamos questionar, “não seria mais fácil fazer  $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{101}$ ? É claro que pra gente atualmente seria bem mais fácil. Entretanto, as escolhas feitas pelos antigos egípcios não são deixadas claras para nós. Devemos analisar o conhecimento desses povos sob a perspectiva daquela época, só assim poderemos dar ao mesmo valor merecido, uma vez que estes conhecimentos foram de suma importância para o desenvolvimento da nossa matemática. [4]

Nos dois exemplos a seguir, mostraremos um procedimento que permite expressar uma fração do tipo  $\frac{m}{n} \in Q^+$  como uma soma de frações egípcias, isto é, como uma soma de frações unitárias. Vale salientar que uma mesma fração pode ser representada de maneiras distintas, portanto não existe unicidade de representação.

**Exemplo 3.25:** Neste exemplo, mostraremos o passo-a-passo de como representar a fração  $\frac{2}{7}$  como uma soma de frações unitárias.

**Solução:** Primeiramente é necessário encontrar a maior fração com numerador 1 que seja menor que  $\frac{2}{7}$ , para isso procedemos da seguinte maneira:

- Invertamos a fração  $\frac{2}{7}$ , obtendo  $\frac{7}{2}$ ;
- Tomamos o maior inteiro mais próximo da fração  $\frac{7}{2}$ . Como  $3 < \frac{7}{2} < 4$ , então este inteiro é o 4;
- Faço  $\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ , o que nos garante que  $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ .

Como destacado anteriormente esta representação não é única, pois  $\frac{2}{7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{420}$  que seria uma outra maneira de representar a fração  $\frac{2}{7}$  como soma de frações unitárias.

**Exemplo 3.26:** Expressar a fração  $\frac{7}{15}$  como uma soma de frações com numerador 1.

Solução:

- Invertamos a fração  $\frac{7}{15}$ , obtendo  $\frac{15}{7}$ ;
- Como  $2 < \frac{15}{7} < 3$ , tomamos a fração  $\frac{1}{3}$  que é a maior fração unitária menor  $\frac{7}{15}$ ;



- Faço  $\frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ , isso nos garante que  $\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}$ . Agora basta aplicar o mesmo processo para fração  $\frac{2}{15}$ . Onde acharemos  $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$ , chegando, portanto a seguinte representação:  $\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$ .

Como anteriormente, ao falar da primeira tabela do Papiro de Ahmes, mostramos que o escriba representou  $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ , então concluímos que,  $\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$  seria uma outra maneira de representar a fração  $\frac{7}{15}$  como uma soma de frações unitárias, reforçando a ideia que não existe unicidade para representação.

Analisando a forma como os antigos egípcios lidavam com a representação das frações, em alguns casos particulares podemos detectar uma vantagem em relação aos nossos métodos quando precisamos decidir entre duas frações qual delas é maior. Para isso vamos analisar o **exemplo 3.27**.

**Exemplo 3.27:** Considerando as frações  $\frac{5}{8}$  e  $\frac{9}{14}$ , vamos decidir qual delas representa um maior valor.

**Solução:** Levando em consideração o nosso contexto, as maneiras mais utilizadas no Ensino Básico são, encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador e comparar os seus numeradores ou transformar as frações em números decimais e fazer a comparação dos mesmos. Ou seja,  $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$  e  $\frac{9}{14} = \frac{36}{56}$ . Ou ainda,  $\frac{5}{8} = 0,625$  e  $\frac{9}{14} = 0,6428571428571\dots$ . Assim concluímos que  $\frac{9}{14} > \frac{5}{8}$ .

Levando em consideração, o contexto dos antigos egípcios já saberíamos que essas frações seriam representadas como soma de frações unitárias, então, considerando  $\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$  e  $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ . Apenas olhando para esta representação, vemos que a parcela  $\frac{1}{2}$  é comum e  $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ , logo já podemos concluir que  $\frac{9}{14} > \frac{5}{8}$ . Reforço que essa vantagem não poderá ser observada em todos os casos para comparar duas ou mais frações, porém não deixa de ser interessante abordar o método em algumas situações cabíveis.

A forma como os egípcios trabalhavam com as frações não deve ser considerado como uma limitação da sua matemática, e sim, como uma relação bastante coesa com a forma que eles desenvolviam as divisões. Estes procedimentos poderiam ser abordados no Ensino Básico como meio de fortalecer as raízes do desenvolvimento matemático como ferramenta para solucionar situações cotidianas e proporcionar aulas diferenciadas das comuns, ao contextualizar todos os métodos com fatos históricos e trabalhar operações básicas usando métodos distintos dos atuais que podem ser bem mais atrativos. [4]

### 3.10 A divisão no Antigo Egito

Para compreender o processo de divisão desenvolvido no Antigo Egito, assim como a multiplicação, se dispõe basicamente dos problemas dispostos nos Papiros de Ahmes e de Moscou, em que a divisão é sempre abordada como a partilha de um determinado número de objetos por um certo número de pessoas.

Ao analisar os procedimentos usados na divisão, compreendemos a importância da aborda-

gem das frações feita pelos egípcios. Para reforçar esta relação, perceberemos através dos exemplos seguintes a notória contribuição da representação das frações como adição de frações unitárias.

**Exemplo 3.28:** Como repartir a quantidade de grãos contida em 5 sacos de feijão por 8 pessoas.

**Solução:** Se tivéssemos apenas 4 sacos, cada pessoa deveria receber a metade de cada saco. Sendo assim, como são 5 sacos, cada pessoa deve receber, no mínimo, a metade de cada saco, ou seja,  $\frac{1}{2}$ . Fazendo isso, sobrarão um saco, que poderá ser dividido pelas oito pessoas, cada uma recebendo mais  $\frac{1}{8}$  deste saco. Sendo assim, podemos dizer que o resultado da divisão de 5 por 8 é  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ . Este resultado expressa diretamente o modo como a divisão foi realizada. A **figura 3.37** esclarece ainda melhor o procedimento descrito acima.

Figura 3.37: Divisão de 5 sacos de feijão por 8 pessoas

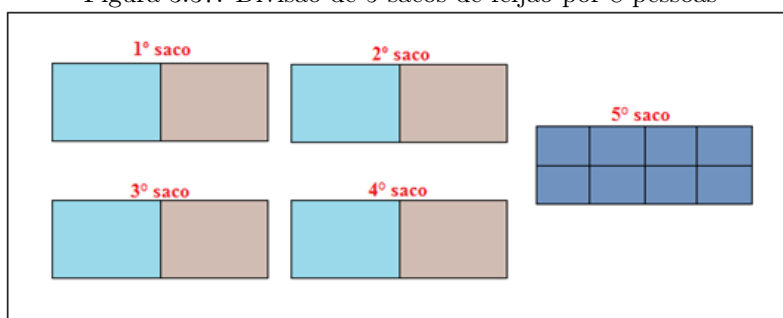


Figura produzida pelo autor

Dividindo na metade os quatro primeiros sacos, obtemos 8 metades, ou seja, uma metade para cada pessoa. O 5º saco será então dividido em 8 partes iguais, gerando mais  $\frac{1}{8}$  para cada pessoa e, portanto, cada pessoa receberá  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$  dos grãos. Em nossa representação, a soma  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$  equivale a  $\frac{5}{8}$ , isso significa que cada metade deveria ser dividida em 4 partes, ou melhor, cada saco deveria ser dividido em 8 partes iguais, sendo distribuídas 5 dessas partes para cada pessoa, tudo isso com o intuito de justificar o nosso método de somar frações com o mesmo denominador. [7]

Note que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$  é a forma como os antigos egípcios representariam a fração  $\frac{5}{8}$ , de certa forma já mostrando como procederiam para efetuar a divisão de 5 por 8.

**Exemplo 3.29:** Explique como os egípcios dividiriam o salário de 7 empregados na construção das pirâmides, pagando-os com 6 pães.

**Solução:** Inicialmente, vamos lembrar que a única fração com numerador diferente de 1 que os egípcios utilizavam com frequência era  $\frac{2}{3}$ . Com essa informação em mãos, esboçamos na **figura 3.38** uma das maneiras utilizadas pelos antigos egípcios para solucionar esta situação.

Figura 3.38: Divisão de 6 pães por 7 empregados

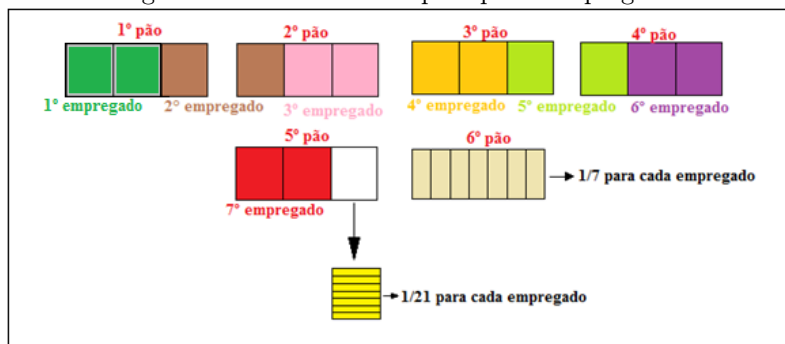


Figura produzida pelo autor

Notem que os 5 primeiros pães foram divididos em 3 partes iguais, gerando 15 pedaços. Cada pedaço equivale a  $\frac{1}{3}$  de um pão, sendo distribuídos 2 desses pedaços para cada empregado, ou seja, cada um recebe inicialmente  $\frac{2}{3}$  de um pão. Do 5º pão sobrarão  $\frac{1}{3}$  e este pedaço será dividido em 7 partes iguais, cada parte equivalente a  $\frac{1}{21}$  de um pão. Daí cada empregado receberá mais  $\frac{1}{21}$  de um pão. Por fim, resta o 6º pão completo, que é então dividido em 7 partes iguais, sendo somado a cada empregado mais  $\frac{1}{7}$  de um pão. Portanto, cada empregado receberá como salário a seguinte quantidade:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{7}$ . Isso representa justamente a forma como os egípcios trabalhavam com a fração  $\frac{6}{7}$ , que para nossas notações trata-se de uma fração irredutível.

A partir dos exemplos anteriores, nota-se que a divisão dos egípcios era feita por etapas, até se chegar ao resultado final. Vejamos mais dois exemplos.

**Exemplo 3.30:** Como poderíamos dividir 58 coisas entre 87 pessoas?

**Solução:** Vamos elencar o passo-a-passo do processo:

- Primeiramente, vamos dividir cada uma das 58 coisas na metade, obtendo 116 metades, pois  $58 \times 2 = 116$ ;
- Agora distribuímos uma metade para cada pessoa, restando 29 metades, pois  $116 - 87 = 29$ ;
- Agora dividimos cada metade que sobrou em três partes iguais, obtendo 87 sextos, pois  $29 \times 3 = 87$ ;
- Concluimos assim, que cada uma das 87 pessoas receberá  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$  das 58 coisas. [17]

Agora vamos resolver uma situação-problema nos moldes abordados nos livros didáticos do Ensino Básico.

**Exemplo 3.31:** O professor de matemática do 5º Ano comprou 3 barras de chocolate e pretende dividi-las igualmente entre os seus 10 alunos. Quanto receberá cada aluno?

**Solução:** Normalmente, para uma situação simples desta, aplica-se o algoritmo da divisão e determina-se que cada aluno receberá 0,3 ou 3 décimos de uma barra. Este processo é muito mecânico e uma vez decorado pelo aluno lhe conduz a uma compreensão simplesmente numérica, deixando escapar a essência da divisão, como realmente as barras foram distribuídas. Usar o

método dos antigos egípcios é bem mais intuitivo e com certeza exige mais um pouco de raciocínio e aproximação de uma divisão na prática.

- Primeiramente, dividimos cada barra em 4 partes iguais obtendo 12 partes equivalentes a  $\frac{1}{4}$ , pois  $3 \times 4 = 12$ ;
- Agora distribuimos  $\frac{1}{4}$  para cada aluno, restando dois quartos, pois  $12 - 10 = 2$ ;
- Agora dividimos cada  $\frac{1}{4}$  em 5 partes iguais, obtendo 10 partes equivalentes a  $\frac{1}{20}$ , pois  $2 \times 5 = 10$ ;
- Distribuimos  $\frac{1}{20}$  para cada aluno e o processo está finalizado, cabendo a cada aluno  $\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$  de uma barra de chocolate.

Seguindo este procedimento, é bem mais simples desenvolver atividades práticas de divisão com materiais concretos.

Pelas informações contidas nos papiros, assim como nas multiplicações as divisões egípcias também eram efetuadas por uma sucessão de duplicações. Para dividir, por exemplo, 184 por 8, começamos por dobrar sucessivamente o divisor 8 até um passo antes que o número obtido nas duplicações exceda o dividendo 184, conforme a **tabela 3.7**

Tabela 3.7: Divisão de 184 por 8

Coluna 1	Coluna 2
*1	*8
*2	*16
*4	*32
8	64
*16	*128
1 + 2 + 4 + 16 = 23	8 + 16 + 32 + 128 = 184

#### Tabela produzida pelo autor

Escolhemos, na coluna 2, os termos que somados dão 184. E tomamos os valores correspondentes na coluna 1 e somamos:  $1 + 2 + 4 + 16 = 23$ . Dessa forma, chegamos ao resultado da divisão de 184 por 8 que é 23.

Agora nos perguntamos, e se esta divisão não fosse exata? Se quiséssemos dividir, por exemplo, 185 por 8? Ora a resposta é simples, o resto da divisão seria 1, assim o resultado seria  $23 + \frac{1}{8}$ . Ou seja, o resto 1 seria dividido em 8 partes e cada parte acrescida aos 23. E se fosse 189? Simples também, pois teríamos um resto  $5 = 4 + 1$ . Para o 1 já explicamos, e para o 4, basta dividi-lo em 8 metades, gerando como resultado final  $23 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ .

Ao observar com atenção os problemas contidos no Papiro de Ahmes, não fica muito claro, porém pode-se perceber uma certa habilidade do escriba com os divisores naturais de alguns números. [17]. Vejamos mais dois exemplos, em que podemos constatar esta habilidade.

**Exemplo 3.32:** Divida 19 por 8, ou seja, por quanto devemos multiplicar 8 para obtermos 19?

**Solução:** Na **tabela 3.8** descrevemos o procedimento usado pelo escriba. [7]

Tabela 3.8: Divisão de 19 por 8

Coluna 1	Coluna 2
1	8
*2	*16
$\frac{1}{2}$	4
* $\frac{1}{4}$	*2
* $\frac{1}{8}$	*1
$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$16 + 2 + 1 = 19$

**Tabela produzida pelo autor**

Como esta divisão não é exata, a duplicação do divisor não gera valores que somados sejam 19. Assim, ao invés de continuar duplicando ele começa a reduzir pela metade, ou seja, utilizando o processo inverso. Daí ele usa, na coluna 2, depois do 16, o 4, o 2 e o 1, que são divisores de 8, e na coluna 1 usa  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{8}$  que são, respectivamente, as metades de 1,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ . Agora, na coluna 2, seleciona 16, 2 e 1 que adicionados geram 19 e a soma dos seus correspondentes da coluna 1 é o resultado procurado. Portanto, 19 dividido para 8 é igual a  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ .

**Exemplo 3.33:** Divida 203 por 15, ou seja, por quanto devemos multiplicar 15 para obtermos 203?

**Solução:** Na [tabela 3.9](#) esboçamos uma possível solução por meio do método dos egípcios.

Tabela 3.9: Divisão de 203 por 15

Coluna 1	Coluna 2
*1	*15
2	30
*4	*60
*8	*120
* $\frac{1}{3}$	*5
* $\frac{1}{5}$	*3
$1 + 4 + 8 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$	$15 + 60 + 120 + 5 + 3 = 203$

**Tabela produzida pelo autor**

Neste exemplo percebemos mais uma vez a utilização de divisores naturais, no caso 3 e 5, que são divisores de 15. Pelos cálculos concluímos que  $15 \times (13 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}) = 203$ , ou seja, 203 dividido por 15 é igual a  $13 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ .

Os cálculos existentes no Papiro de Ahmes, deixa muito claro que os antigos egípcios haviam alcançado uma grande virtuosidade na aplicação do processo de duplicação para efetuar multiplicações e divisões além do conceito de frações unitárias. Vejamos no exemplo seguinte como o escriba resolveu o Problema 70, contido neste papiro. [4]

**Exemplo 3.34:** Encontrar o quociente da divisão de 100 por  $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ .

**Solução:** A primeira vista parece ser uma solução bastante complicada, pois não estamos acostumados a lidar com esses métodos, mas sob a ótica dos antigos egípcios não seria tão complicado, considerando suas habilidades de lidar com as frações unitárias, com a fração  $\frac{2}{3}$  e com o suporte da tabela representativa das frações do tipo  $\frac{2}{n}$  com  $5 \leq n \leq 101$  já citada no tópico anterior.

Tabela 3.10: Divisão de 100 por  $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 

Coluna 1	Coluna 2
1	$7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
2	$15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
*4	* $31 + \frac{1}{2}$
*8	*63
* $\frac{2}{3}$	* $5 + \frac{1}{4}$
* $\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$	* $\frac{1}{4}$
$4 + 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126} = 12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$	$31 + \frac{1}{2} + 63 + 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 100$

### Tabela produzida pelo autor

Após a análise da solução exposta na **tabela 3.10** vamos tentar compreender o raciocínio do escriba neste procedimento. Primeiramente, ele dobrou o divisor sucessivamente, primeiro obtendo  $15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , depois  $31 + \frac{1}{2}$ , e finalmente 63, que equivale a 8 vezes o divisor. Depois disso, provavelmente ele percebeu que  $\frac{2}{3}$  do divisor equivale a  $5 + \frac{1}{4}$ . Dessa forma, considerando na coluna 2 a soma dos valores  $31 + \frac{1}{2} + 63 + 5 + \frac{1}{4}$ , obtemos  $99 + \frac{3}{4}$ , faltando apenas  $\frac{1}{4}$  para completar o dividendo que é 100. Este ajuste final feito pelo escriba foi muito inteligente e coerente com os seus métodos. Como 8 vezes, o divisor dá 63, então o divisor quando multiplicado por  $\frac{2}{63}$  produzirá  $\frac{1}{4}$ . Com o auxílio da tabela para representação das frações  $\frac{2}{n}$  sabe-se que  $\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$ , concluindo, portanto, que o resultado procurado seria  $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$ .

Considerando o que já foi dito anteriormente, esses métodos podem parecer bem mais trabalhosos que os nossos, porém não podemos negar o quanto eles superam os nossos métodos atuais quando se trata de buscar um desenvolvimento do raciocínio lógico dos nossos alunos e a prioridade pelo enriquecimento dos cálculos, com o intuito de torná-los mais significativos e menos mecânicos.

## Capítulo 4

# O Método da Falsa Posição

Segundo Cleide Medeiros e Alexandre Medeiros em um artigo publicado em 2004 na revista Ciências e Educação da UNESP, o Método da Falsa Posição é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente, nos livros didáticos, denota-se por equações de 1<sup>o</sup> grau.

Nos últimos anos, o ensino elementar da Aritmética tem sido substituído pelo ensino de uma Álgebra muito abstrata. Isso é particularmente observado na resolução de problemas que podem ser modelados pelas equações supracitadas. Tais problemas são costumeiramente resolvidos de uma forma exclusivamente simbólica, com a adoção imediata de letras na representação das quantidades desconhecidas. Esta simbolização precoce traz sérios danos para a formação do pensamento especulativo e dedutivo da exploração das relações numéricas porventura existentes na situação em causa e da própria intuição matemática a ser necessariamente desenvolvida. Os alunos que nunca trabalharam com a álgebra simbólica, quando submetidos a problemas relacionados com equações do 1<sup>o</sup> grau nem sempre conseguem resolvê-los. E, quando conseguem, o fazem de forma bem sucedida, agem, quase sempre, por tentativas e erros, seguidos de correções apropriadas e, portanto, de um modo semelhante ao Método da Falsa Posição.

Em sua essência, esse método consiste em um procedimento de tentativas e erros. Entretanto, como veremos, há algo mais consistente por trás dessa postura aparentemente tão simples. Suas origens perdem-se no tempo, tendo surgido independentemente em vários locais e em várias civilizações da Antiguidade, como uma tentativa de resolver problemas práticos ligados ao comércio, à cobrança de impostos e ao armazenamento de animais. Esta multiplicidade de formas e locais, independentes de surgimento, fortalece a convicção de ser tal método uma abordagem naturalmente convidativa ao raciocínio. Seus usos iniciais eram, além disso, desprovidos de qualquer justificativa e, portanto, dotados de uma característica realmente intuitiva, parecendo sensato afirmar que esta seria uma forma natural que leigos tenderiam espontaneamente a usar. Em sua gênese histórica, o Método da Falsa Posição é um procedimento iterativo de resolução de problemas lineares já bastante antigo. Suas origens remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa, tendo sido largamente utilizado, desde então, por matemáticos de várias civilizações. Embora o método da falsa posição seja um assunto muito antigo, algumas variações do mesmo têm aplicações bem mais recentes. A ideia, por exemplo, de proceder-se, no Cálculo Numérico, por tentativas e erros, seguidos de repetidas correções na solução de equações não lineares é inspirada no antigo método da falsa posição, recebendo, assim, a mesma denominação e sendo conteúdo usual em cursos de fundamentos da computação. [13]

Não podemos afirmar, categoricamente, que este método foi criado pelos antigos egípcios, mas nos papiros deixados por eles pôde-se observar a utilização desta fantástica regra para resolução de alguns problemas. Por exemplo, os problemas 24, 26 e 27 do Papiro de Ahmes são resolvidos com a utilização deste método, conforme veremos logo mais.

Inicialmente vamos descrever em termos da Álgebra atual como seria o Método da Falsa Posição para resolvermos equações do tipo  $ax = b$ .

- O primeiro passo é escolhermos um valor arbitrário  $x_0$  e calcularmos o valor de  $ax_0$ , que chamaremos de  $b_0$ ;
- Caso  $a$  seja um valor fracionário, é interessante que escolhamos um valor conveniente para facilitar os cálculos. Digamos que  $a$  tenha denominador igual a 29, então é bastante coerente que escolhamos  $x_0 = 29$ , pois isso eliminaria o denominador;
- Agora, considerando a igualdade  $ax_0 = b_0$ , devemos descobrir por qual valor devemos multiplicar ambos os membros da mesma a fim que tenhamos no 2º membro o valor  $b$ . Sem dificuldades percebemos que este valor deve ser  $\frac{b}{b_0}$ ;
- Ficamos então com a seguinte expressão:

$$ax_0 \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right) = b_0 \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right) = b$$

- Assim teremos,

$$a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b$$

Concluindo que o valor de  $x$  que satisfaz  $ax = b$  é  $\left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right)$ .

Em resumo, o método consiste em darmos um “chute” inicial que será corrigido ao longo do processo. Assim, tanto o “chute” inicial quanto o resultado errado, obtido por meio dele, são usados para se chegar à resposta certa. Chamamos “Método da Falsa Posição”, uma vez que ele começa por um palpite falso para chegar ao resultado correto. [17] [7]

Agora resolveremos os problemas 24, 26 e 27 do Papiro de Ahmes. Primeiro usaremos a nossa forma de resolução, depois o Método da Falsa Posição e por último mostraremos como foi feita a resolução no referido papiro.

**Exemplo 4.1: (Problema 24):** Uma quantidade e seu  $\frac{1}{7}$  somados fazem 19. Qual a quantidade?

**Solução 1: (Resolvendo uma equação do 1º grau):** Em termos da Álgebra moderna, o problema pode ser modelado pela seguinte equação de 1º grau:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

cuja resolução normalmente é a seguinte:

$$x + \frac{x}{7} = 19 \Leftrightarrow \frac{8x}{7} = 19 \Leftrightarrow x = \frac{7 \cdot 19}{8} = \frac{133}{8}.$$



Portanto,  $x = \frac{133}{8}$ , é a solução da equação.

**Solução 2: (Método da Falsa Posição):** Primeiramente “chutamos” um valor para  $x$ . Como já foi descrito anteriormente, não seria bem um “chute”, pois é interessante a conveniência da escolha para eliminar o denominador 7. Escolhemos então,  $x_0 = 7$ . Assim temos,

$$x_0 + \frac{x_0}{7} = 8$$

Como no 2º membro deve figurar o 19, então multiplicamos ambos os membros da igualdade

$$7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$$

por  $\frac{19}{8}$ , obtendo

$$\left(7 \cdot \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \cdot \left(7 \cdot \frac{19}{8}\right) = 8 \cdot \frac{19}{8} = 19.$$

Portanto,  $7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$  é a quantidade procurada. [7]

**Solução 3: (Solução dos egípcios):** A solução apresentada pelo escriba apresenta três etapas, na primeira, nota-se que ele apenas escolheu  $x_0 = 7$  e calculou  $x_0 + \frac{x_0}{7}$ .

Na segunda etapa ele divide 19 por 8, encontrando  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ , conforme já fizemos no **exemplo 3,32**.

Na terceira e última, ele multiplica o resultado da divisão de 19 por 8, ou seja,  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  por 7.

Tabela 4.1: Multiplicação de 7 por  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Coluna 1	Coluna 2
*1	*2 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
*2	*4 + $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
*4	*9 + $\frac{1}{2}$
1 + 2 + 4 = 7	2 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{2} = \frac{133}{8}$

#### Tabela produzida pelo autor

Podemos ver que o escriba chegou ao mesmo resultado, seguindo os passos do Método da Falsa Posição.

**Exemplo 4.2: (Problema 26):** Uma quantidade e seu  $\frac{1}{4}$  somados fazem 15. Qual a quantidade?

**Solução 1: (Resolvendo uma equação do 1º grau):** Em termos da Álgebra moderna, o problema pode ser modelado pela seguinte equação de 1º grau:

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

cuja resolução normalmente é a seguinte:

$$x + \frac{x}{4} = 15 \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = 15 \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 15}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Portanto,  $x = 12$  é a solução da equação.

**Solução 2: (Método da Falsa Posição):** Primeiramente, escolhemos  $x_0 = 4$ , que é o mais conveniente para facilidade dos cálculos. Assim temos,

$$x_0 + \frac{x_0}{4} = 5$$

Como no 2º membro deve figurar o 15, então multiplicamos ambos os membros da igualdade

$$4 + \frac{1}{4} \times 4 = 5$$

por 3, obtendo

$$(4 \cdot 3) + \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 3) = 5 \cdot 3 = 15$$

Portanto,  $4 \cdot 3 = 12$  é a quantidade procurada.

**Solução 3: (Solução dos egípcios):** Seguindo a mesma lógica do problema anterior, teremos no primeiro momento, a escolha  $x_0 = 4$  e o cálculo  $x_0 + \frac{x_0}{4} = 5$ .

Na segunda etapa, dividimos 15 por 5:

Tabela 4.2: Divisão de 15 por 5

Coluna 1	Coluna 2
*1	*5
*2	*10
$1 + 2 = 3$	$5 + 10 = 15$

**Tabela produzida pelo autor**

Na terceira e última etapa, multiplicamos o resultado da divisão por 4, isto é,  $3 \times 4$ :

Tabela 4.3: Multiplicação de 3 por 4

Coluna 1	Coluna 2
1	3
2	6
*4	*12
4	12

**Tabela produzida pelo autor**

Mais uma vez percebe-se como os egípcios chegavam com destreza ao resultado correto, utilizando o Método da Falsa Posição.

**Exemplo 4.3: (Problema 27):** Uma quantidade e seu  $\frac{1}{5}$  somados fazem 21. Qual a quantidade?

**Solução 1: (Resolvendo uma equação do 1º grau):** O problema pode ser modelado pela seguinte equação de 1º grau:

$$x + \frac{x}{5} = 21$$

cuja resolução normalmente é a seguinte:

$$x + \frac{x}{5} = 21 \Leftrightarrow \frac{6x}{5} = 21 \Leftrightarrow x = \frac{(5 \cdot 21)}{6} = \frac{105}{6} = \frac{35}{2}.$$

Portanto,  $x = \frac{35}{2}$  é a solução da equação.

**Solução 2: (Método da Falsa Posição):** Primeiramente escolhemos  $x_0 = 5$ , que é o mais conveniente para facilidade dos cálculos. Assim temos,

$$x_0 + \frac{x_0}{5} = 6$$

Como no 2º membro deve figurar o 21, então multiplicamos ambos os membros da igualdade

$$5 + \frac{1}{5} \cdot 5 = 6$$

por  $\frac{21}{6}$ , obtendo

$$\left(5 \cdot \frac{21}{6}\right) + \frac{1}{5} \cdot \left(5 \cdot \frac{21}{6}\right) = 6 \cdot \frac{21}{6} = 21$$

Portanto,  $5 \cdot \frac{21}{6} = \frac{105}{6} = \frac{35}{2}$  é a quantidade procurada.

**Solução 3: (Solução dos egípcios):** Seguindo a mesma lógica dos problemas anteriores, teremos no primeiro momento a escolha  $x_0 = 5$  e o cálculo  $x_0 + \frac{x_0}{5} = 6$ .

Na segunda etapa dividimos 21 por 6:

Tabela 4.4: Divisão de 21 por 6

Coluna 1	Coluna 2
*1	*6
*2	*12
* $\frac{1}{2}$	*3
<hr style="border-top: 1px solid black;"/> 1 + 2 + $\frac{1}{2}$ = 3 + $\frac{1}{2}$	<hr style="border-top: 1px solid black;"/> 6 + 12 + 3 = 21

**Tabela produzida pelo autor**

Na terceira e última etapa, multiplicamos o resultado da divisão por 5, isto é,  $\left(3 + \frac{1}{2}\right)$  por 5:

Tabela 4.5: Multiplicação de  $\left(3 + \frac{1}{2}\right)$  por 5

Coluna 1	Coluna 2
*1	* $\left(3 + \frac{1}{2}\right)$
2	7
*4	*14
$1 + 4 = 5$	$3 + \frac{1}{2} + 14 = 17 + \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$

**Tabela produzida pelo autor**

Os próximos dois exemplos foram elaborados com o teor e nível de dificuldade que se assemelham as situações-problemas contidas nos livros didáticos atuais que são adotados na Educação Básica. Elaboramos suas soluções utilizando o Método da Falsa Posição, com a intenção de mostrar que ele pode ser usado nesse nível de problemas sem a necessidade de recorrer a álgebra simbólica.

**Exemplo 4.4:** Após casar, o Professor José ainda viveu  $\frac{1}{6}$  da sua vida de solteiro para que nascesse o seu primeiro filho. Sabendo que o Professor teve seu primeiro filho aos 42 anos de idade, com quantos anos ele se casou?

**Solução 1: (Resolução de uma equação do 1º grau)** - É solicitado no problema a idade que o Professor José tinha quando se casou ou, equivalentemente, quantos anos o Professor viveu solteiro. Nomeando por  $x$ , esta idade podemos modelar a situação pela seguinte equação:

$$x + \frac{x}{6} = 42$$

que normalmente se resolve da seguinte maneira:

$$x + \frac{x}{6} = 42 \Leftrightarrow \frac{7x}{6} = 42 \Leftrightarrow x = \frac{(6 \cdot 42)}{7} = 36.$$

**Solução 2: (Método da Falsa Posição)** - É logicamente impossível uma pessoa se casar apenas com 6 anos de idade, porém esta falsa idade para o casamento é bastante conveniente para ser considerada devido a fração  $\frac{1}{6}$  existente no problema. Desta forma, considerando a vida de solteiro do Professor José de apenas 6 anos, teremos

$$6 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 7.$$

Como o Professor teve seu primeiro filho apenas aos 42 anos de idade, então este valor deve aparecer no segundo membro da igualdade acima. Para que isso ocorra, basta multiplicar ambos os membros da igualdade

$$6 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 7.$$

por 6. Assim, obtemos

$$(6 \cdot 6) + \frac{1}{6} \cdot (6 \cdot 6) = 7 \cdot 6 = 42.$$

Portanto, a idade procurada é  $6 \cdot 6 = 36$ , ou seja, o Professor José se casou aos 36 anos de idade.

**Exemplo 4.5:** Uma corrida de táxi tem a bandeirada de 5,00 reais e o custo por km percorrido de 1,60. Sabendo que Maria pagou 85,00 reais por uma corrida, quantos km ela percorreu de táxi?

**Solução 1: (Resolução de uma equação do 1º grau)** – Conforme o enunciado, podemos modelar a situação pela seguinte equação

$$1,60x + 5,00 = 85,00$$

em que a variável  $x$  representa o número de km percorridos e cuja resolução se dá normalmente da seguinte maneira:

$$1,60 \cdot x + 5,00 = 85,00 \Leftrightarrow 1,60x = 80,00 \Leftrightarrow x = \frac{80,00}{1,60} = 50.$$

**Solução: (Método da Falsa Posição)** - Não é difícil o aluno perceber que dos 85,00 reais, gastos apenas 80,00 são referentes aos km rodados, uma vez que os outros 5,00 reais correspondem a bandeirada. Usando o Método da Falsa Posição, vamos “chutar” que Maria percorreu 65 km, daí teríamos

$$1,60 \cdot 65 = 104.$$

Como no segundo membro deve aparecer 80, então, devemos multiplicar ambos os membros dessa igualdade por  $\frac{80}{104}$ , obtendo

$$1,60 \cdot \left(65 \cdot \frac{80}{104}\right) = 104 \cdot \frac{80}{104} \Leftrightarrow 1,60 \cdot \left(\frac{5400}{104}\right) = 80,00 \Leftrightarrow 1,60 \cdot 50 = 80,00.$$

Portanto, concluímos que Maria percorreu 50 km de táxi.

Ao comparar as soluções, é comum julgar a resolução costumeira de uma equação do 1º grau, efetivamente, muito simples. Entretanto, ela já requer que o estudante compreenda que os símbolos podem ser operados semelhantemente aos números. Como na solução do **exemplo 4.4**, o cálculo do mmc, a inocente soma dos monômios  $6x + x$  para dar  $7x$  só faz sentido dentro de um contexto algébrico já desenvolvido. De modo análogo, no **exemplo 4.5**, as passagens, aparentemente triviais, de fazermos  $1,60x + 5,00 = 85,00$  resultar em  $1,60x = 80,00$  e esta resultar em  $x = \frac{80,00}{1,60}$ , só pode ser compreendida baseando-se na aceitação prévia de que a subtração de um mesmo valor em ambos os membros e a divisão de ambos os membros de uma equação algébrica por uma quantidade diferente de zero não altera a igualdade. Operar diretamente com números, como no caso aritmético, não é nem cognitivamente nem matematicamente a mesma coisa que operar diretamente com símbolos. A simples transferência das propriedades operatórias dos números para os símbolos corresponde a um enorme salto conceitual que deu origem à Álgebra e não deve jamais ter sua complexidade trivializada, sob pena de introduzirmos os alunos em um jogo sem sentido. A questão da dificuldade matemática e cognitiva não está no simples uso de uma letra para simbolizarmos uma quantidade desconhecida, mas sim no fato de operarmos um tal símbolo como operamos um número. [13]

## Capítulo 5

# Resolução de Equações Algébricas no contexto histórico da Matemática

Neste capítulo, falaremos um pouco sobre a resolução de equações algébricas do 2º e 3º grau no sentido histórico. No Ensino Básico, quando falamos em equações do 2º grau a primeira coisa que nos vem à mente é a famosa fórmula de Bháskara. No momento do tempo que nos situaremos para esta explanação, não fazia muito sentido falar de fórmulas, nem no contexto de Bháskara, nem de outros matemáticos que vieram depois dele. Nossa intenção, é mostrar o que significava uma equação e como se chegava à solução de uma sem a necessidade de se apegar a uma fórmula pronta, mostrando que estes termos possuíam sentidos bem diferentes do nosso.

### 5.1 Contexto Histórico

Saindo da época dos antigos egípcios, por volta de 3 000 anos a.C. passaremos ao século XV, salto bastante considerável, porém bem comum nos livros de História da Matemática, pois segundo os mesmos, este último foi a época em que a Matemática voltou a se desenvolver na Europa. É bastante conhecido o fato de que as primeiras universidades surgiram na Idade Média, entre os séculos XII e XIII. Suas contribuições, no entanto, são entendidas como herdeiras do saber dos antigos, ou seja, o conhecimento matemático ou de qualquer outra ciência jamais poderá ser dissociado do seu contexto histórico.

No século IX, a renovação do saber matemático dos povos mais antigos foi bastante influenciada pela dominação islâmica que introduziram uma síntese entre teoria e prática o que propiciou o desenvolvimento de uma Matemática nova, com grande influência sobre os procedimentos algébricos. Ao falar de Álgebra no sentido histórico, devemos primeiramente enaltecer a importância dos povos árabes, que a partir do século IX, começaram a desenvolver uma Matemática original que tinha a álgebra como um de seus pontos fortes. O matemático mais ilustre desse século foi *Al-Khwarizmi*<sup>1</sup>.

Sem sombras de dúvidas, não podemos apontar um único personagem como inventor da

---

<sup>1</sup>Mohamed Ibn Musa Al-Khwarizmi, considerado o Pai da Álgebra, criou novas maneiras de solucionar problemas matemáticos com sistemas de soluções que hoje é chamado de álgebra. Essa palavra originou-se da expressão árabe al-jabr, que aparece no título de um dos seus livros. Do século XII ao XVI, esse livro foi usado no ensino de matemática nas universidades europeias.

Álgebra. O desenvolvimento desse ramo da matemática se deve ao empenho e a inteligência de muitos personagens, os quais não mediram esforços para superar suas “ambições” em se eternizar na história da disciplina, deixando para todos nós um grande legado.[7]

## 5.2 Al-Khwarizmi e os problemas do segundo grau

Não queremos aqui nos aprofundar na história da Álgebra, porém é válido salientar que paralelamente ao desenvolvimento deste ramo da matemática também se deu o desenvolvimento do simbolismo. Desta forma, podemos citar a Álgebra Retórica, em que, praticamente, não existiam símbolos e todos os termos matemáticos eram citados com palavras, depois estas palavras começaram a ser abreviadas, formando a Álgebra Sincopada, e aos poucos as abreviações foram sendo substituídas por símbolos, chegando na chamada Álgebra Simbólica, que com alguns aperfeiçoamentos e introdução de novos símbolos ao longo dos séculos nos deu a Álgebra atual.

A linguagem utilizada por Al-Khwarizmi era completamente verbal, ele empregava o que definimos anteriormente como Álgebra Retórica, tendo um vocabulário padrão para os objetos que apareciam nos problemas. Ao estudar os problemas do segundo grau, ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, principalmente os três modos sob os quais os números apareciam nos cálculos: a raiz, o quadrado da raiz e o número simples. Na **tabela 5.1**, estão descritos os termos com seus significados e a sua representação atual.

Tabela 5.1: Significado de alguns termos utilizados por Al-Khwarizmi

Palavras	Significado nos problemas	Notação atual
Adad	Valor conhecido (número dado)	$c$
Jidhr	Valor desconhecido	$x$
Mal	Quadrado do valor desconhecido	$x^2$

### Tabela produzida pelo autor

O seguinte método, abordado por Al-Khwarizmi utilizando as notações algébricas da sua época, já era conhecido pelos babilônios a quase mil anos e soluciona de forma direta equações do 2º grau escritas na forma  $x^2 + bx = c$ . Trata-se de uma sequência de operações equivalentes à fórmula de resolução atual, porém sem utilização de símbolos ou fórmulas.

#### Método de Al-Khwarizmi:

- Tome a metade da quantidade de jidhr;
- Multiplique esta quantidade por si mesma;
- Some no resultado os adad;
- Extraia a raiz quadrada do resultado;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr, encontrando a solução.

A partir do Método de Al-Khwarizmi e usando a nomenclatura da **tabela 5.1** podemos relacionar este procedimento de resolução com a fórmula atual usada para resolver as equações do 2º grau escritas na forma  $x^2 + bx = c$ .

- Tome a metade da quantidade de jidhr:  $\left(\frac{b}{2}\right)$ ;
- Multiplique esta quantidade por si mesma:  $\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{4}$ ;
- Some no resultado os adad:  $\frac{b^2}{4} + c$ ;
- Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$ ;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr,  $\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right) - \frac{b}{2}$  que será a solução.

Fazendo umas simples manipulações, temos

$$\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right) - \frac{b}{2} \Leftrightarrow -\frac{b}{2} + \left(\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right) \Leftrightarrow -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \Leftrightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Concluimos que o método realmente condiz com a fórmula que determina solução positiva da equação  $x^2 + bx = c$ .

**Exemplo 5.1:** “Um Mal e dois Jidhr igualam quinze denares”

**Solução: (Método de Al-Khwarizmi):** Seguido as correspondências da **tabela 5.1** e o método de Al-Khwarizmi, temos:

- Tome a metade da quantidade de jidhr:  $\frac{2}{2} = 1$ ;
- Multiplique esta quantidade por si mesma:  $1 \cdot 1 = 1$ ;
- Some no resultado os adad:  $1 + 15 = 16$ ;
- Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{16} = 4$ ;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr:  $4 - \frac{2}{2} = 4 - 1 = 3$  encontrando assim a solução.

Realmente, o valor do Jidhr = 3, é uma solução positiva para o problema proposto. [7]

No contexto atual, tal problema seria modelado pela seguinte equação do 2º grau  $x^2 + 2x = 15$  que além de 3, apresenta uma outra raiz real que é -5. Entretanto, Al-Khwarizmi utilizava apenas coeficientes positivos e considerava como solução apenas as raízes positivas, as quais eram aceitas e se enquadravam perfeitamente nas necessidades da época. Isso não torna o método de Al-Khwarizmi ineficaz, nem o torna inútil para ser trabalhado em sala de aula, pois toda equação do 2º grau pode tranquilamente ser escrita na forma  $x^2 + bx = c$ , isto é, podemos generalizar seu método para encontrar soluções para qualquer tipo de equações do 2º grau, conforme veremos nos exemplos seguintes.

**Exemplo 5.2:** Resolver usando o Método de Al-Khwarizmi a seguinte equação:

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

**Solução:** Sabemos que,

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x = -9$$



Agora aplicamos o Método de Al-Khwarizmi:

- Tome a metade da quantidade de jidhr:  $\frac{(-10)}{2} = -5$ ;
- Multiplique esta quantidade por si mesma:  $(-5) \cdot (-5) = 25$ ;
- Some no resultado os adad:  $25 + (-9) = 25 - 9 = 16$ ;
- Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{16} = \pm 4$ ;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr:  $4 - (-5) = 4 + 5 = 9$  ou  $-4 - (-5) = -4 + 5 = 1$ , encontrando as soluções.

Concluimos, portanto, que  $x = 1$  e  $x = 9$ , são as soluções para equação proposta.

**Exemplo 5.3:** Resolver usando o Método de Al-Khwarizmi a seguinte equação:

$$-2x^2 + 8x - 8 = 0$$

Solução: Sabemos que,

$$-2x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = -4$$

Agora aplicamos o Método de Al-Khwarizmi:

- Tome a metade da quantidade de jidhr:  $\frac{(-4)}{2} = -2$ ;
- Multiplique esta quantidade por si mesma:  $(-2) \cdot (-2) = 4$ ;
- Some no resultado os adad:  $4 + (-4) = 4 - 4 = 0$ ;
- Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{0} = 0$ ;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr:  $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$  encontrando a solução.

Concluimos que  $x = 2$ , é a solução para equação proposta.

**Exemplo 5.4: (Prova Brasil)** O proprietário de uma fazenda adquiriu alguns pássaros, que se alimentam de lagartas, para acabar com a praga que infestou sua plantação. A equação  $L(t) = 4t^2 - 80t + 400$  representa o número de lagartas  $L(t)$ , em milhares, após  $t$  dias da presença dos pássaros na plantação. Qual é o tempo gasto para acabar com a população de lagartas?

**Solução:** Como  $L(t)$  representa o número de lagartas e  $t$  o número de dias, queremos encontrar o valor de  $t$ , tal que  $L(t) = 0$ . Ou seja, queremos calcular o valor de  $t$  na seguinte equação:

$$4t^2 - 80t + 400 = 0$$

Esta equação é equivalente a:

$$t^2 - 20t = -100$$

Agora, aplicamos o Método de Al-Khwarizmi.

- Tome a metade da quantidade de jidhr:  $\frac{(-20)}{2} = -10$ ;
- Multiplique esta quantidade por si mesma:  $(-10) \cdot (-10) = 100$ ;
- Some no resultado os adad:  $100 + (-100) = 100 - 100 = 0$ ;
- Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{0} = 0$ ;
- Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr:  $0 - (-10) = 0 + 10 = 10$ , encontrando a solução.

Portanto, para acabar com a população de lagartas serão necessários 10 dias.

### 5.3 Bháskara e os Problemas do Segundo Grau

Bháskara, também conhecido como Bháskara Acharya (que significa Bháskara, o professor), foi o mais importante matemático indiano do século XII. Em sua obra mais famosa, intitulada de “*Lilavati*” publicou um método de resolução de problemas do 2º grau, que apesar de já ser conhecido a pelo menos um século, ganhou mais visibilidade após sua obra e certamente por isso, se configura atualmente como a famosa “fórmula de Bháskara”. Além deste método descreveu numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas e outros. [4]

Na sua época, não se usava o termo equação e sim se trabalhavam com problemas que eram resolvidos por meio de alguns métodos bastante inteligentes que certamente contribuiram muito para se chegar as fórmulas utilizadas atualmente. O que designamos hoje de “equação” equivalia a um enunciado como o seguinte:

*“De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado”.*

Note que, assim como os árabes, Bháskara trabalhava com uma igualdade sem o uso de qualquer símbolo ou fórmula.

A quantidade citada é um quadrado e a raiz deste quadrado é a incógnita. Ele forma, assim, usando somente palavras, a equação  $x^2 \pm px = q$ .

O método de resolução utilizado por Bháskara consiste em reduzir o problema a uma equação do 1º grau. Este método era denominado por ele de “*eliminação do termo médio*”. Vejamos a seguir, como Bháskara descrevia o seu método de resolução:

*“Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida.”*

Para aplicar o método anterior a um problema, ele afirmava serem necessárias ainda as seguintes especificações:

*“E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar”.*

Analisando e compreendendo este método, concluímos que ele é equivalente ao nosso método atual de completar quadrados. Diferenciando-se no que diz respeito a simbologia algébrica.

Para uma melhor compreensão vamos considerar a equação  $ax^2 + bx = c$  e descrever de forma mais objetiva o método utilizado por Bháskara e em seguida mostrar sua eficiência na resolução de alguns exemplos.

#### **Método de Bháskara:**

- Multiplicar ambos os membros da equação pelo quádruplo do número de quadrados, ou seja, por  $4a$ ;
- Adicionar a ambos os membros o quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples, ou seja, adicionar  $b^2$  aos dois membros;
- Para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz, basta reescrevê-lo como o quadrado de uma soma ou diferença, (método que segundo Bháskara eliminava o termo médio);
- Extrair a raiz quadrada de ambos os membros;
- Resolve-se a equação de 1º grau restante, encontrando assim a quantidade desconhecida.

Não restam dúvidas que aplicando este procedimento a uma equação do 2º grau da forma  $ax^2 + bx + c = 0$  chegaremos à fórmula de resolução que utilizamos hoje em dia. Vejamos:

- Multiplicar ambos os membros da equação pelo quádruplo do número de quadrados, ou seja, por  $4a$ ;

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0 \cdot 4a \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

- Adicionar a ambos os membros quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples, ou seja, adicionar  $b^2$  aos dois membros;

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

- Para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz, basta reescrevê-lo como o quadrado de uma soma ou diferença, ou seja,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

- Extrair a raiz quadrada de ambos os membros;

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Resolve-se a equação de 1º grau restante, encontrando assim a quantidade desconhecida,

ou seja, encontrando o valor de  $x$ .

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Exemplo 5.5:** “O quádruplo do quadrado de uma quantidade desconhecida mais oito vezes esta quantidade é igual a doze unidades. Qual o valor dessa quantidade?”

**Solução:** Podemos modelar o problema pela seguinte equação:

$$4x^2 + 8x = 12$$

Agora aplicamos o Método de Bháskara:

- Multiplicar ambos os membros da equação pelo quádruplo do número de quadrados. Ou seja, devemos multiplicar ambos os membros por  $16 = 4 \cdot 4$ ;

$$(4x^2 + 8x) \cdot 16 = 12 \cdot 16 \Rightarrow 64x^2 + 128x = 192$$

- Adicionar a ambos os membros o quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples, ou seja, adicionar  $8^2 = 64$  aos dois membros;

$$64x^2 + 128x + 64 = 192 + 64 \Rightarrow 64x^2 + 128x + 64 = 256$$

- Reescrevemos o primeiro membro como o quadrado de uma soma;

$$(8x + 8)^2 = 256 = (16)^2$$

- Extraí a raiz quadrada de ambos os membros;

$$\sqrt{(8x + 8)^2} = \sqrt{(16)^2} \Rightarrow 8x + 8 = 16$$

- Resolve a equação de 1º grau, encontrando o valor da quantidade desconhecida. Ou seja,

$$8x + 8 = 16 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1.$$

Note que,  $-3$  também se configura como solução do problema, porém, assim como os árabes, os indianos também desconsideravam os números negativos. Para a grande maioria naquela época as equações que possuíam apenas soluções negativas eram consideradas não solucionáveis e para os poucos que as admitiam lhes tratavam de maneiras diferentes, chamando-os de números fictícios ou de raízes menos pura.

A maioria dos problemas propostos por Bháskara em sua obra, além de escritos apenas com palavras também eram impressos na forma de versos. Os exemplos seguintes retratam esse fato. A forma como conduzirei as soluções dos problemas mescla o método de Bháskara com a nossa simbologia atual, pois o interesse do trabalho é mostrar a relação entre ambos e principalmente a riqueza pedagógica e metodológica que tal método oferece ao nosso exercício docente.

**Exemplo 5.6 - (Verso 75):** “De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada (do total) foram para o lago de manasa, um oitavo foi para a floresta coberta

de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando.” [7]

**Solução:** Primeiramente, vamos procurar modelar a situação através de uma equação do 2º grau. Como, pelo texto precisamos trabalhar com dez vezes a raiz quadrada do total de gansos, então vamos considerar que esse total seja  $4x^2$  tornando mais fácil a modelagem da situação:

- Dez vezes a raiz quadrada do total foram para o lago de manasa;

$$10 \cdot \sqrt{4x^2} = 10 \cdot 2x = 20x$$

- Um oitavo do total foi para a floresta coberta de hibiscos;

$$\frac{1}{8} \cdot 4x^2 = \frac{4x^2}{8} = \frac{x^2}{2}$$

- Três pares foram vistos brincando na água;

$$3 \cdot 2 = 6$$

Assim, podemos representar o número total de gansos pela seguinte equação,

$$4x^2 = 20x + \frac{x^2}{2} + 6 \Leftrightarrow 4x^2 - \frac{x^2}{2} - 20x = 6 \Leftrightarrow 8x^2 - x^2 - 40x = 12 \Leftrightarrow 7x^2 - 40x = 12.$$

Agora é só aplicar o Método de Bháskara

- Multiplicar ambos os membros por  $28 = 4 \cdot 7$ ;

$$(7x^2 - 40x) \cdot 28 = 12 \cdot 28 \Rightarrow 196x^2 - 1120x = 336$$

- Adicionar  $40^2 = 1600$  a ambos os membros;

$$196x^2 - 1120x + 1600 = 336 + 1600 \Rightarrow 196x^2 - 1120x + 1600 = 1936$$

- Escreve o primeiro membro como o quadrado de uma diferença;

$$(14x - 40)^2 = 1936 = (44)^2$$

- Extrair a raiz quadrada de ambos os membros;

$$\sqrt{(14x - 40)^2} = \sqrt{(44)^2} \Rightarrow 14x - 40 = 44$$

- Resolve a equação linear, encontrando o valor da quantidade desconhecida. Ou seja,

$$14x - 40 = 44 \Leftrightarrow 14x = 84 \Leftrightarrow x = 6.$$

Como, inicialmente, consideramos o total de gansos igual a  $4x^2$ , então esse total é dado por:

$$4 \cdot 6^2 = 4 \cdot 36 = 144.$$

Portanto, o número de gansos no bando era 144.

Uma outra raiz que satisfaz a equação é  $-\frac{2}{7}$ , entretanto não condiz com o número de gansos

por se tratar de um número negativo. Como já frisamos anteriormente tais raízes não eram aceitas naquela época, nem tão pouco eram necessárias para os problemas, uma vez que eles sempre trabalhavam com quantidades positivas.

**Exemplo 5.7 – (Verso 76b):** “Enraivecido numa batalha, Arjuna disparou uma quantidade de setas para matar Karna. Com metade das setas desviou as setas do seu adversário; com quatro vezes a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo; com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta, cortou a sua cabeça. Quantas setas Arjuna disparou?” [7]

**Solução:** Vamos modelar a situação através de uma equação do 2º grau. Pelo mesmo motivo do problema anterior, vamos considerar que o número total de setas disparadas por Arjuna seja igual a  $4x^2$ , assim teremos:

- Com metade das setas desviou as setas do seu adversário;

$$\frac{4x^2}{2} = 2x^2$$

- Com quatro vezes, a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo;

$$4 \cdot \sqrt{4x^2} = 4 \cdot 2x = 8x$$

- Com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta, cortou a sua cabeça;

$$6 + 3 + 1 = 10$$

Assim, podemos representar o número total de setas lançadas pela seguinte equação:

$$4x^2 = 2x^2 + 8x + 10 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x^2 - 8x = 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 10.$$

Agora é só aplicar o Método de Bháskara:

- Multiplicar ambos os membros por  $8 = 4 \cdot 2$ ;

$$(2x^2 - 8x) \cdot 8 = 10 \cdot 8 \Rightarrow 16x^2 - 64x = 80$$

- Adicionar  $8^2 = 64$  a ambos os membros;

$$16x^2 - 64x + 64 = 80 + 64 \Rightarrow 16x^2 - 64x + 64 = 144$$

- Escreve o primeiro membro como o quadrado de uma diferença;

$$(4x - 8)^2 = 144 = (12)^2$$

- Extrair a raiz quadrada de ambos os membros;

$$4x - 8 = 12$$

- Resolve a equação linear, encontrando o valor da quantidade desconhecida. Ou seja,

$$4x - 8 = 12 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5.$$

Como, inicialmente, consideramos o total de setas lançadas igual a  $4x^2$ , então esse total será:

$$4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100.$$

Portanto, o número inicial de setas lançadas foi 100.

**Exemplo 5.8 – (Verso 77):** “De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?” [7]

**Solução:** Poderíamos representar o número total de abelhas apenas por  $x$ , porém teríamos mais trabalho para modelar a situação por uma equação do 2º grau, para facilitar vamos considerar este total igual a  $8x^2$ , pois assim tomaremos a metade e depois a raiz, conforme a situação, com menas manipulações algébricas. Assim teremos:

- De um enxame de abelhas tome a metade;

$$\frac{8x^2}{2} = 4x^2$$

- Depois tomamos a raiz

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

- Oito nonos do todo flutuam pelo céu;

$$\frac{8}{9} \cdot 8x^2 = \frac{64x^2}{9}$$

- Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus;

$$1 + 1 = 2$$

Assim podemos representar o número total de abelhas do enxame pela seguinte equação:

$$8x^2 = 2x + \frac{64x^2}{9} + 2 \Leftrightarrow 8x^2 - \frac{64x^2}{9} - 2x = 2 \Leftrightarrow 72x^2 - 64x^2 - 18x = 18 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x = 9.$$

Agora é só aplicar o Método de Bháskara:

- Multiplicar ambos os membros por  $16 = 4 \cdot 4$ ;

$$(4x^2 - 9x) \cdot 16 = 9 \cdot 16 \Rightarrow 64x^2 - 144x = 144$$

- Adicionar  $9^2 = 81$  a ambos os membros;

$$64x^2 - 144x + 81 = 144 + 81 \Rightarrow 64x^2 - 144x + 81 = 225$$

- Escreve o primeiro membro como o quadrado de uma diferença;

$$(8x - 9)^2 = 225 = (15)^2$$

- Extrair a raiz quadrada de ambos os membros;

$$\sqrt{(8x - 9)^2} = \sqrt{(15)^2} = 8x - 9 = 15$$

- Resolve a equação linear, encontrando o valor da quantidade desconhecida. Ou seja,

$$8x - 9 = 15 \Leftrightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3.$$

Como inicialmente consideramos o total de abelhas do enxame igual a  $8x^2$ , então esse total será:

$$8 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$$

Portanto, no enxame haviam 72 abelhas.

Conforme observado nos exemplos anteriores, o sentido das equações naquela época era bastante diferente do nosso e uma peculiaridade da matemática indiana era que ela não se separava da gramática, ou seja, eram dois exercícios concomitantes. Entender os problemas matematicamente e resolvê-los matematicamente exigia muita interpretação gramatical, pois essas duas áreas não eram separadas como são hoje em dia. Dessa forma, trabalhar os problemas do 2º grau abordando suas raízes históricas também se conjectura como boas ações de interdisciplinaridade. A boa interpretação gramatical das situações nos leva a fazer escolhas que facilitam nossos cálculos. Nos problemas anteriores, sempre consideramos o total de coisas procuradas como um quadrado perfeito, evitado assim lidar com raízes inexatas ao longo das soluções. Outra coisa interessante seria utilizar o Método da Falsa Posição trabalhado no capítulo anterior no último passo do Método de Bháskara, que solicita a resolução de uma equação do 1º grau, assim estaremos nos adequando cada vez mais a estes tópicos da História da Matemática como ferramentas muito úteis ao desenvolvimento lógico e intuitivo dos nossos alunos.

## 5.4 Resolução de equações do 3º grau por radicais

Por volta dos séculos XII e XIII, a matemática praticada na Europa era bem inferior ao que já se tinha no mundo árabe. A partir do século XII, os tratados e as obras árabes que apresentavam métodos de resolução de equações algébricas começaram a ser traduzidos para o latim e disseminados no ocidente. Todo o desenvolvimento algébrico que se deu a partir deste século teve ápice nos séculos XV e XVI, se consolidando nos séculos seguintes até atingir os métodos que usamos atualmente. Todos os esforços feitos por diversos matemáticos, para encontrar soluções para equações, foram responsáveis pelos desenvolvimentos algébricos mais importantes dos séculos XV e XVI. Diante das dificuldades e até de conflitos pessoais, muitos empecilhos foram superados e coube a matemática italiana os créditos pela descoberta dos principais métodos resolutivos de equações do 3º grau, uma vez que as equações de 2º grau já possuíam algoritmos de resolução provenientes dos árabes e indianos, os quais foram aprimorados com alguns métodos mais generalizados e uma simbologia mais moderna. [7] [6]

### 5.4.1 Alguns personagens importantes e suas contribuições

O Frei Luca Pacioli (1445 – 1517) foi um grande matemático italiano que publicou uma bela obra em 1494 (Soma de Aritmética, Geometria, Proporção e Proporcionalidade), considerada



uma das obras mais completas sobre matemática do século XV, teve sua finalização assegurando que um método de resolução para equações cúbicas era tão impossível quanto a quadratura de um círculo, problema que perdurava sem solução desde a matemática grega. No início do século XVI, Scipione Del Ferro (1465 – 1526), outro matemático italiano, contrariando as afirmações de Pacioli e inovando em relação aos árabes resolveu um caso particular da equação  $x^3 + px = q$ , mantendo seu método em segredo, como era de costume na época. Alguns anos mais tarde, Nicolo Fontana (1500 – 1557), matemático italiano, mais conhecido pelo pseudônimo de Tartaglia, em 1535, já havia resolvido algumas equações do tipo  $x^3 + px^2 = q$  e devido as disputas da época e principalmente por questões financeiras não teve como publicar seus métodos de resolução, cabendo a outro matemático contemporâneo seu, Girolamo Cardano (1501 – 1576) que possuía mais recursos financeiros e uma ambição aguçada, se apoderar das suas descobertas, segundo relatos históricos, por meios desonestos, e publicá-las em sua brilhante obra de 1545, “*Ars Magna*” (A Grande Arte), na qual constava métodos resolutivos para os 13 tipos de equações do 3º grau considerados naquela época. Método este, que foi generalizado e se consolidou mundialmente como o método de Cardano-Tartaglia para resolução de equações do 3º grau. [7] [6]

## 5.5 O Método de Cardano-Tartaglia

Neste tópico, trataremos do Método de Cardano-Tartaglia, para resolver de forma direta as equações do 3º grau escritas na forma  $x^3 + px = q$ . Apresentamos agora sua versão conforme a álgebra retórica usada por Cardano em sua obra:

1. Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas;
2. Some o quadrado da metade do termo numérico;
3. Extraia a raiz quadrada deste total que será usado, em dois momentos;
4. Em um deles, adicione a metade do termo numérico e no outro subtraia o mesmo número;
5. Teremos então um *binomium* e o seu *apotome* respectivamente;
6. Subtraia a raiz cúbica do *apotome* da raiz cúbica do *binomium* e o resultado final e o valor da coisa.

Considerando a nossa simbologia e a equação  $x^3 + px = q$ , podemos ver que “o número de coisas” corresponde a  $p$  e o “termo numérico” corresponde a  $q$ . Assim, o Método de Cardano-Tartaglia se configura da seguinte maneira:

1.  $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ ;
2.  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ;
3.  $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)$ ;
4.  $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}\right)$  e  $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}\right)$ ;
5. *Binomium* =  $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)$  e o seu *Apotome* =  $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}\right)$ ;

$$6. x = \left( \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{q}{2}}} \right) - \left( \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q}{2}}} \right).$$

Agora vamos verificar a eficiência deste método através da resolução de um exemplo.

**Exemplo 5.9:** Resolver pelo Método de Cardano-Tartaglia a equação

$$x^3 + 9x = 30$$

**Solução:** Temos:  $p = 9$  e  $q = 30$ , agora aplicamos o Método de Cardano-Tartaglia:

- Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas;

$$\left(\frac{9}{3}\right)^3 = 3^3 = 27$$

- Some o quadrado da metade do termo numérico;

$$27 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 27 + 225 = 252$$

- Extraia a raiz quadrada deste total;

$$\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$$

- Em um deles, adicione a metade do termo numérico e no outro subtraia o mesmo número;

$$Binomium = 6\sqrt{7} + \frac{30}{2} = 6\sqrt{7} + 15$$

e

$$Apotome = 6\sqrt{7} - \frac{30}{2} = 6\sqrt{7} - 15$$

- Subtraia a raiz cúbica do *Apotome* da raiz cúbica do *Binomium* e o resultado final é o valor da coisa;

$$x = \left( \sqrt[3]{6\sqrt{7} + 15} \right) - \left( \sqrt[3]{6\sqrt{7} - 15} \right).$$

Apesar de publicar os métodos de Tartaglia, Cardano trouxe algumas inovações importantes em sua obra, como por exemplo, um método para transformar uma equação do 3º grau qualquer, do tipo,  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  em uma do tipo  $y^3 + py = q$ , para as quais já possuía o método de resolução. Tal método, se apropria de uma mudança de variável, conforme veremos a seguir:

- Considere a seguinte equação do 3º grau;

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Dividimos ambos os membros por  $a \neq 0$ ;

$$\frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

- Fazemos,  $A = \frac{b}{a}$ ,  $B = \frac{c}{a}$  e  $C = \frac{d}{a}$  e teremos

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

- Agora, fazemos a seguinte mudança de variável:  $x = y - \frac{A}{3}$  obtendo,

$$\left(y - \frac{A}{3}\right)^3 + A\left(y - \frac{A}{3}\right)^2 + B\left(y - \frac{A}{3}\right) + C = 0$$

- Desenvolvendo o cubo e o quadrado da diferença de dois termos e colocando  $y$  em evidência, obtemos

$$y^3 + \left(\frac{A^2}{3} - \frac{2A^2}{3} + B\right)y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0 \Leftrightarrow y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

Agora, basta tomarmos,  $p = B - \frac{A^2}{3}$  e  $q = -\left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right)$  obtendo,

$$y^3 + py = q$$

como pretendíamos.

**Exemplo 5.10:** Resolver pelo Método de Cardano-Tartaglia a seguinte cúbica

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$$

**Solução:** Note que  $A = 3$ , então, faremos a seguinte mudança de variável,

$$x = y - \frac{A}{3} \Rightarrow x = y - 1$$

assim teremos,

$$(y - 1)^3 + 3 \cdot (y - 1)^2 - 3 \cdot (y - 1) - 14 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 - 3y + 3 - 14 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 6y - 9 = 0.$$

Como

$$y^3 - 6y - 9 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 6y = 9$$

aplicamos agora o Método de Cardano-Tartaglia.

Temos,  $p = -6$  e  $q = 9$ , daí

- Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas;

$$\left(\frac{(-6)}{3}\right)^3 = (-2)^3 = -8$$

- Some o quadrado da metade do termo numérico;

$$-8 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -8 + \frac{81}{4} = \frac{49}{4}$$

- Extraia a raiz quadrada deste total;

$$\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

- Em um deles, adicione a metade do termo numérico;

$$\text{Binomium} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

e no outro subtraia o mesmo número;

$$\textit{Apotome} = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = \frac{(-2)}{2} = -1$$

- Subtraia a raiz cúbica do *Apotome* da raiz cúbica do *Binomium* e o resultado final e o valor da coisa, ou seja,

$$y = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{(-1)} = 2 - (-1) = 3$$

Como tomamos,

$$x = y - 1$$

então,

$$x = 3 - 1 = 2.$$

Concluimos através do Método de Cardano-Tartaglia que 2 é uma solução positiva para a equação proposta.

Vale salientar que no método proposto, inicialmente por Tartaglia, os coeficientes da equação deveriam ser números positivos, entretanto, Cardano chega a admitir soluções negativas para as equações, denominando-as como “raízes menos puras” ou “números fictícios”. Outro ponto que merece uma ressalva, é o fato dos métodos discutidos neste capítulo não caracterizar a criação de fórmulas por partes dos matemáticos citados, como por exemplo, atribuir a fórmula de resolução de equações de 2º grau o nome de “Fórmula de Bháskara”. Segundo *Guimarães (2006, p. 44)*, o hábito de dar este nome para o algoritmo de resolução da equação de 2º grau se estabeleceu no Brasil, por volta de 1960 e, aparentemente, é um costume só brasileiro, pois não se encontram nome de Bháskara associado a esse algoritmo na literatura internacional.[10] Baseado nisso, reforçamos a importância de trabalharmos estes métodos com nossos alunos no Ensino Básico, pois foram desenvolvidos de forma intuitiva com bastante coerência e raciocínio, habilidades que devem sempre ser desenvolvidas nos discentes visando uma aprendizagem mais concreta e significativa.

## Capítulo 6

# Considerações Finais

No contexto atual, o ensino da Matemática deve ser abordado com muito cuidado. Se apegar simplesmente aos livros didáticos, de modo geral, é um risco muito grande que se corre, pois os mesmos apresentam uma abordagem dos conteúdos sem motivações para professores e alunos, restringindo-se a simples repetições de fórmulas, exercícios e resultados. A maior parte dos conteúdos são lançados sem nenhuma fundamentação teórica, limitados a definições, exemplos e exercícios.

No desenvolvimento deste trabalho, um dos pontos mais enfatizados foi a compreensão de que a História da Matemática no contexto da prática escolar, trata-se de um componente necessário e primordial da disciplina, pois conduz os estudantes a certeza de que a Matemática em sua natureza possui uma relevância de extrema importância para o desenvolvimento da humanidade. Além disso, procuramos manter um dos principais objetivos do PROFMAT, que é o atendimento prioritário de professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdos matemáticos relevantes para sua docência.

O conhecimento matemático não se limita as quatro paredes da sala de aula, nem surgiu por acaso, trata-se de algo que vai muito além disso. Foi desenvolvido para suprir necessidades reais, ajudando as civilizações mais antigas a se organizarem e progredirem.

Conhecer os numerais e dominar as operações aritméticas básicas é, sem sombra de dúvidas, o alicerce principal para a construção do conhecimento matemático. Neste contexto, entram em cena os sistemas de numeração com suas características e propriedades que servem de organização para os numerais e de norte para o desenvolvimento e a compreensão dos algoritmos operacionais. Convicto destes fatos procurei escrever este trabalho de forma clara, simples e objetiva. Mesmo se tratando de conteúdos e operações simples, acredito que os capítulos 2 e 3 revelaram muitos detalhes que deixam de ser observados e ensinados em sala de aula. Do meu ponto de vista, uma abordagem mais abrangente dos algoritmos das operações aritméticas traz mais sentido para os cálculos e dar maior profundidade ao conhecimento. Além disso, comparar nosso sistema de numeração com o Sistema Hieróglifo Egípcio, tanto nas características como nas suas formas de operar, gera a certeza de que os esforços daqueles povos há milhares de anos atrás contribuíram muito para efetivação do Sistema Decimal Indo-arábico em todo o mundo como o mais completo e eficaz.

No que diz respeito aos capítulos 4 e 5, a escolha de discorrer sobre as equações deve-

se ao fato delas estarem presentes em praticamente tudo que estudamos em Matemática, afinal precisamos resolver equações quando trabalhamos com Geometria, Trigonometria, inclusive em outras áreas das Ciências Exatas. Assim, dominar estes métodos de resolução é primordial no estudo da disciplina e adquirir este domínio de forma mais intuitiva e contextualizada torna-se mais eficiente e prazeroso. Mais uma vez, a História da Matemática se destaca como ferramenta de apoio inigualável, pois nos permite conhecer fatos e personagens importantíssimos para o desenvolvimento destes conteúdos, além de nos ensinar como os conhecimentos adquiridos através de muito esforço podem gerar frutos que atravessam o tempo e atinge gerações bem posteriores sem perder sua importância nem a sua essência.

Finalizo este trabalho com a sensação de dever cumprido, mas consciente de que tudo que foi visto até aqui representa uma pequena parcela dos subsídios que a História da Matemática pode oferecer ao ensino desta disciplina na Educação Básica. Em virtude disso, pretendo desenvolver outros trabalhos nesta perspectiva, sempre com a finalidade de contribuir para o melhoramento do ensino de Matemática e engrandecer meus conhecimentos e minhas práticas profissionais, afinal ser professor é ser um eterno aprendiz.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. AABOE. *Episódios da história antiga da matemática (Coleção do professor de matemática)*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [2] F. M. M. B. ALMEIDA. *Sistemas de numeração precursores do sistema Indo-Árabe*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2011.
- [3] M. C. ALMEIDA. *A matemática na idade da pedra: filosofia, epistemologia, neuro-fisiologia e pré-história da matemática*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2017.
- [4] C. BOYER. *História da matemática*. Blucher, São Paulo, 3<sup>a</sup> ed. edition, 2012.
- [5] S. d. E. F. BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, mec/sef edition, 1998.
- [6] R. S. CARNEIRO. Métodos de resolução de equações do terceiro grau - dissertação de mestrado – profmat, 2015.
- [7] J. B. P. CARVALHO, T. ROQUE. *Tópicos de história da matemática (Coleção PROFMAT)*. SBM, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2013.
- [8] U. D’AMBROSIO. *A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexos na Educação Matemática*. Unesp, São Paulo, 1999.
- [9] H. EVES. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2<sup>a</sup> ed. edition, 2007.
- [10] P. S. GUIMARÃES. *Equações Algébricas*. Ed. da UFSM, Santa Maria, 2006.
- [11] G. IFRAH. *Os números: a história de uma grande invenção*. Globo, São Paulo, 11<sup>a</sup> ed. edition, 2010.
- [12] L. M. IMENES. *Vivendo a Matemática: Os números na história da civilização*. Editora Scipione, São Paulo, 10<sup>a</sup> ed. edition, 1995.
- [13] A. MEDEIROS, C. F. MEDEIROS. O método da falsa posição na história e na educação matemática. 10, 2004.
- [14] C. F. MEDEIROS. *Por uma educação matemática como intersubjetividade*. Cortez, São Paulo, 1987.
- [15] S. G. S. MOREY, B. *Os sistemas de numeração antigos na formação de professores*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2017.
- [16] A. C. C. PEREIRA. *A evolução histórica da multiplicação do século X ao XVI: Construindo interfaces para o ensino*. SBEM / SBEM-PA, Belém, 2017.

- [17] T. ROQUE. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2012.
- [18] C. M. S. SILVA. *Explorando as operações aritméticas com os recursos da história da matemática*. Plano Editora, Brasília, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2003.
- [19] R. R. STEFFENON. *Belos Problemas: Indução e Princípio das Gavetas de Dirichlet*. SBM/impa/UFRJ, 2017.



# ANEXO A

No método utilizado pelos antigos egípcios para efetuar a multiplicação entre dois números naturais, sempre encontramos um dos fatores da multiplicação a partir da soma de potências de base 2. Então, neste anexo faremos a seguinte demonstração:

*“Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos.”*

## Demonstração:

Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em  $n$ .

Temos que,

$$1 = 2^0; 2 = 2^1; 3 = 2^0 + 2^1; 4 = 2^2; 5 = 2^2 + 2^0,$$

e, com isso o resultado vale para todo  $n \leq 5$ . Suponhamos que o resultado vale até um certo  $k \geq 5$ .

Se  $k + 1$  é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe  $t$  tal que

$$2^t < k + 1 < 2^t + 1 = 2^t + 2^0.$$

Logo

$$k + 1 - 2^t \leq k$$

e como qualquer número menor ou igual a  $k$  é soma de potências de 2, segue que existem inteiros não negativos

$$0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_i$$

tais que

$$k + 1 - 2^t = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i}.$$

Como

$$k + 1 - 2^t < 2^t$$

segue que

$$2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i} < 2^t$$

e assim

$$m_i < t.$$

Logo

$$k + 1 = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i} + 2^t,$$

com

$$0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_i < t$$

Portanto, está provada a existência da representação.

Agora provaremos a unicidade da representação. Suponhamos que a representação é única até um certo  $k$  e que

$$k + 1 = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_s},$$

com

$$0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_r$$

e

$$0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_s.$$

Então

$$2^{a_r} \leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_s} \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{b_s} = 2^{b_s+1} - 1.$$

Logo

$$2^{a_r} < 2^{b_s+1}$$

e assim

$$a_r < b_s + 1,$$

ou seja,

$$a_r < b_s.$$

De maneira análoga podemos mostrar que  $b_s \leq a_r$  e, portanto  $a_r = b_s$ . Usando a hipótese de indução concluímos que  $r - 1 < s - 1$  e que  $a_i = b_j$  para  $i, j \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$ . Portanto está provada a unicidade. [19]