



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
CAMPINA GRANDE

Enivaldo Santos Barbosa

**ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS
PETROLÍFEROS HETEROGÊNEOS**

Dissertação de Mestrado

Dissertação submetida e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Campina Grande – Campus I, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestrado em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto

UAEQ
Campina Grande
2006

DIGITALIZAÇÃO:
SISTEMOTECA - UFCG

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

B238c

2006 Barbosa, Enivaldo Santos.

Escoamento bifásico em reservatórios petrolíferos heterogêneos /
Enivaldo Santos Barbosa.— Campina Grande, 2006.
115f.: il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Universidade
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Referências.

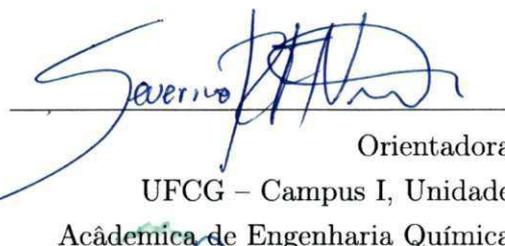
Orientador: Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto.

1. Reservatório Petrolífero. 2. Meios Heterogêneos. 3. Simulação
Numérica. 4. Método dos Volumes Finitos. I. Título.

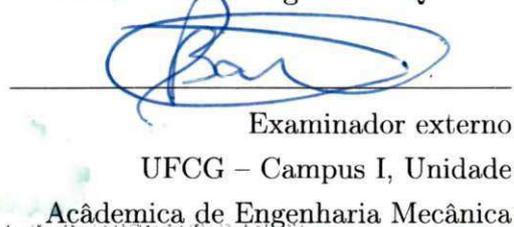
CDU 656.55:665.6

Dissertação de Mestrado submetida e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em em **Engenharia Química** da Universidade Federal de Campina Grande – Campus I, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de **Mestre** em Engenharia Química. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

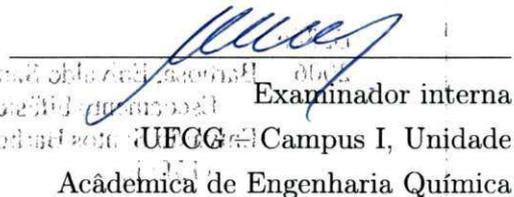
Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto


Orientadora
UFCG – Campus I, Unidade
Acadêmica de Engenharia Química

Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima


Examinador externo
UFCG – Campus I, Unidade
Acadêmica de Engenharia Mecânica

Dr. Maria Wilma Nunes Carvalho


Examinador interna
UFCG – Campus I, Unidade
Acadêmica de Engenharia Química

Mestrando: Enivaldo Santos Barbosa

Campina Grande, 24 de Novembro de 2006.

*“A vida será mais complicada se você possuir uma curiosidade ativa,
além de aumentarem as chances de você entrar em apuros, mas será
mais divertida”.*

EDWARD SPEYER
em “Seis Caminhos a Partir de Newton”, 1994

A meus pais ...

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Severino R. de Farias Neto por seu exemplo profissional e caráter como ser humano pelo apoio, simpatia de sempre, e incentivo para a realização deste trabalho.

Agradeço, à Antonio Gilson Barbosa de Lima e Maria Wilma Nunes Carvalho, pelos comentários e sugestões na dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro por meio do programa Mestrado em Engenharia Química.

RESUMO

Este trabalho diz respeito à modelagem e simulação do processo de recuperação de petróleo em um reservatório petrolífero, no qual foi empregado o modelo de arranjos de poços de injeção e de produção de cinco pontos ou “five-spot”, sendo a malha base formada por um quadrado com um poço produtor no dentro e o restante nos vértices do mesmo. Neste estudo, foi considerado que a distribuição da permeabilidade absoluta em 1/4 (um quarto) desta malha era igual aos outros 3/4 (três quartos). A modelagem matemática utilizada para descrever o escoamento bifásico (água-óleo) através de um meio poroso com heterogeneidade geológica correspondente a uma modificação no modelo utilizado por WENDLAND *et al.* (2001), no qual, basicamente, separa a equação de advecção e difusão em uma parte hiperbólica e outra parabólica. As equações diferenciais que compõem o modelo foram discretizados pelo método dos volumes finitos e os sistemas de equações resultantes foram resolvidos com auxílio de um esquema explícito para a parte hiperbólica e o método ADI (Alternating Direction Implicit) para a parte parabólica, ambos sendo executados em um programa computacional desenvolvido em MatLab. Foram avaliadas três situações distintas de distribuição da permeabilidade do reservatório petrolífero: a primeira com permeabilidade uniforme; segunda constituída de duas regiões de permeabilidade diferentes, sendo uma região quadrada e localizada no centro do reservatório e, por fim, a terceira situação onde foi definida uma permeabilidade da rocha aleatória variando entre $1,0 \cdot 10^{-12} m^2$ a $1,0 \cdot 10^{-8} m^2$. Os resultados apresentados demonstram a aplicabilidade do método proposto e demonstrou ser capaz de prever o avanço de água no reservatório petrolífero nas distintas situações avaliadas. Em especial, no caso da distribuição randômica da permeabilidade absoluta da rocha reservatório, na qual foi evidenciada a presença de óleo residual aprisionado nas regiões de baixas permeabilidades, e como conseqüências afetam nas curvas de produção acumuladas.

TWO-PHASE FLOW IN RESERVOIR HETEROGENEOUS PETROLIFEROUS

ABSTRACT

This assignment says respect to modeling and simulation of the recovery process of oil in a petroliferous reservoir, in which the model of arrangements of injection wells and production wells of five-spot was used, being the mesh base formed by a square with a producing well in the center and the remain in the vertices of the same. In this study, it was considered that the distribution of the absolute permeability in 1/4 (a quarter) of this mesh was equal to the others 3/4 (three fourths). The mathematical modeling used to describe the two-phase flow (water-oil) through a porous way with geologic heterogeneity is correspondent to a modification in the model used by WENDLAND *et al.* (2001), in which, basically, it separates the equation of advection and diffusion in a hyperbolic part and in a parabolic one. The differential equations that compose the model were discrete by the method of finite volumes and the systems of resultant equations were solved with assistance of an explicit scheme for the hyperbolic part and the ADI method (Alternating Direction Implicit) for the parabolic part, both being executed in a computational program developed in MatLab. Three distinct situations of distribution of the permeability of the petroliferous reservoir were evaluated: the first one with uniform permeability; the second one constituted of two different regions of permeability, being it a shaped square region and located in the center of the reservoir and, finally, the third situation in which was defined a permeability of the random rock varying between $1,0 \cdot 10^{-12} m^2$ the $1,0 \cdot 10^{-8} m^2$. The results presented demonstrate the applicability of the considered method and also demonstrated to be capable to foreseeing the water advance in the petroliferous reservoir in those distinct evaluated situations. In special, in the case of the fortuitous distribution of the absolute permeability of the rock reservoir, in which was evidenced the presence of the imprisoned residual oil in the regions of low permeabilities, and as consequences they affect in the curves of accumulated production.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 - Introdução	18
CAPÍTULO 2 - Revisão Bibliográfica	21
2.1 - Reservatório Petrolífero	21
2.1.1 - Métodos de Recuperação	21
2.2 - Descrição Físico-Matemática do Fenômeno de Transferência em Meios Porosos	23
2.2.1 - Propriedades das Rochas e dos Fluidos	24
2.2.2 - Forças que Agem Sobre o Fluido	26
2.2.3 - Equação Integral do Balanço Global	29
2.3 - Escoamento em Meios Porosos	34
2.3.1 - Equação que Regem o Escoamento em Meio Poroso	35
2.4 - Simulação Numérica em Reservatórios Petrolíferos	45
CAPÍTULO 3 - Metodologia	48
3.1 - Descrição Física	48
3.1.1 - Definição do Problema	48
3.2 - Modelo Matemático para o Escoamento Bifásico	49
3.2.1 - Condições de Contorno e Inicial	50
3.2.2 - Algoritmo para Solução do Sistema de Equações	54
3.3 - Modelagem Numérica	55
3.3.1 - Aproximação do Sistema de Equações Governantes do Escoamento Bifásico	56
CAPÍTULO 4 - Resultados e Discussões	67
CAPÍTULO 5 - Conclusões e Perspectivas	93

5.1 - Conclusões	93
5.2 - Perspectivas	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
APÊNDICE A - Derivada Substativa e Teorema da Divergência	100
APÊNDICE B - Método Implícito de Direções Alternadas	103
B.1 - Metodologia Numérica do Método ADI	103
APÊNDICE A - Permeabilidade Absoluta do Meio Poroso	107

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 volume de controle Ω e sua fronteira $\partial\Omega$, no instante t	30
2.2 Escoamento em um meio poroso heterogêneo.	34
3.1 Representação do modelo de injeção em uma malha de cinco pontos	49
3.2 Domínio para o modelo proposto.	51
3.3 Protótipo proposto por WENDLAND <i>et al.</i> (2001).	53
3.4 volume de controle elementar Ω	56
3.5 Domínio físico discretizado ou malha.	57
3.6 algoritmo da decomposição de operador (malha temporal).	58
3.7 volume de controle e vizinhanças	59
3.8 Sequência de cálculo do método ADI.	62
4.1 Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 10 dias e 50 dias.	68
4.2 Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 100 dias e 200 dias.	69
4.3 Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 400 dias e 600 dias.	70

4.4	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 800 dias e 1000 dias.	71
4.5	Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10^{-7}m^2$ após 10 dias e 50 dias de injeção de água.	72
4.6	Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10^{-7}m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.	73
4.7	Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10^{-7}m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.	74
4.8	Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10^{-7}m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.	75
4.9	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 10 dias e 50 dias.	77
4.10	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 100 dias e 200 dias.	78
4.11	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 400 dias e 600 dias.	79
4.12	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 10$, após 400 dias.	80

4.13	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 10$, após 600 dias.	81
4.14	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 2$, após 400 dias.	81
4.15	Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 2$, após 600 dias.	82
4.16	Distribuição da permeabilidade absoluta sobre a rocha-reservatório utilizada na simulação do CASO 3 (ver distribuição de permeabilidade em anexo).	82
4.17	Isosuperfícies de saturação de água com razão de permeabilidade absoluta randômica após diferentes dias de injeção.	87
4.18	Eficiência de varrido horizontal versus o tempo de injeção de água em reservatórios com permeabilidade constante e randômica.	88
4.19	Produção acumulada de óleo para uma injeção contínua de água $Q_{inj} = 3, 2 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{m^2}$	89
4.20	Produção acumulada de óleo para uma injeção contínua de água $Q_{inj} = 3, 2 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{m^2}$	90
4.21	Isosuperfícies de saturação de água com razão de permeabilidade absoluta $K_1/K_2 = 1000$, para (a) o presente trabalho e (b) Wendland et al. (2001).	91
B.1	Indentificação dos pontos w, e, P, s e n no volume elementar Ω	104

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Descrição das Situações	53
3.2 Propriedades Físicas	54
3.3 Permeabilidade Relativa da Fase α (modeo de Corey)	54
A.1 Permeabilidade absoluta.	108
A.2 Permeabilidade absoluta.	110
A.3 Permeabilidade absoluta.	112
A.4 Permeabilidade absoluta.	114

LISTA DE SÍMBOLOS

“Uma boa notação possui uma engenhosidade e uma sugestividade que, às vezes, a faz parecer com um professor de verdade.”

Bertrand Russell (1872 – 1970)

EPDs	–	Equações diferenciais parciais
MDF	–	Método das diferenças finitas
MEF	–	Método dos elementos finitos
MVF	–	Método dos volumes finitos
V_T	–	Volume de controle do meio poroso
V	–	Volume total de rocha
ϕ	–	Porosidade
V_p	–	Volume poroso da rocha
C_f	–	Compressibilidade efetiva da formação
Δp	–	Varição da pressão
s_o	–	Saturação de óleo
s_g	–	Saturação de gás
s_w	–	Saturação de água
V_o	–	Volume de óleo
V_g	–	Volume de gás
V_w	–	Volume de água
K	–	Permeabilidade absoluta
q	–	Vazão de um fluido
μ	–	Viscosidade dinâmica
L	–	Comprimento do meio poroso
A	–	Área da seção transversal
q_o	–	Vazão do óleo
μ_o	–	Viscosidade dinâmica do óleo
Δp_o	–	Varição de pressão do óleo
q_w	–	Vazão da água
μ_w	–	Viscosidade dinâmica da água
Δp_w	–	Varição de pressão da água
q_g	–	Vazão do gás
μ_g	–	Viscosidade dinâmica do gás
Δp_g	–	Varição de pressão do gás
k_w	–	Permeabilidade efetiva da água
k_o	–	Permeabilidade efetiva do óleo
k_g	–	Permeabilidade efetiva do gás
k_{ro}	–	Permeabilidade relativa do óleo
k_{rw}	–	Permeabilidade relativa da água
k_{rg}	–	Permeabilidade relativa do gás
T	–	Tensor tensão

P	-	Pressão
δ	-	Tensor unidade
λ	-	mobilidade da total
λ_w	-	mobilidade da fase água
λ_o	-	mobilidade da fase óleo
U	-	Velocidade média do fluido
$T_r(D)$	-	Tensor contraído
F	-	Forças que atuam num corpo
F_g	-	Força gravitacional
g	-	Aceleração da gravidade
Δz	-	Distância em relação a um referencial
U^R	-	Velocidade da partícula
U^F	-	Velocidade da corrente de fluido livre
F_{ex}	-	Força externa
a_{ex}	-	aceleração da partícula resultante da força externa
F_{re}	-	Força resistiva
Re	-	Número de Reynolds
Ω	-	Volume de controle
ρ	-	Massa específica
Φ	-	Fração volumétrica
c	-	Compressibilidade
ΔP_c	-	Gradiente de pressão capilar
f_w	-	Fluxo fracionário da fase água
P_c	-	Pressão capilar
P_o	-	Pressão do óleo
P_w	-	Pressão da água
P_α	-	Pressão da fase alfa
ρ_α	-	Massa específica da fase alfa
n	-	Vetor normal unitário
Δt	-	Variação de tempo
τ	-	Força de superfície
U_w	-	Velocidade da fase água
U	-	Velocidade total
CO_2	-	Dióxido de carbono
L_x	-	Comprimento na direção x
L_y	-	Comprimento na direção y
adv	-	Advecção
dif	-	Difusão
Δt_e	-	passo de tempo para problema elíptico
Δt_i	-	passo de tempo para problema hiperbólico

Δt_d - passo de tempo para problema difusivo

CAPÍTULO 1

Introdução

O escoamento em meio poroso envolvendo transportes de massa é bastante frequente e de extrema relevância nas varias áreas da engenharia e ciências aplicadas, dentre as quais podem ser citadas:

- Engenharia de petróleo (no processo de recuperação de petróleo);
- Engenharia de civil (mecânica dos solos, fundações);
- Hidrologia (águas subterrâneas);
- Engenharia agrícola (irrigação, drenagem, secagem);
- Engenharia química (filtração, secagem);
- Medicina (no projeto de substitutos, como pulmões artificiais).

Na maioria dos casos, se tem como objetivo conhecer a pressão e a velocidade do fluido quando escoar no meio poroso. Na industria petrolífera, além destas, pode-se citar: conhecer as saturações dos fluidos no reservatório.

Um reservatório petrolífero pode ser definido como uma rocha composta de grãos interligados por um ou mais materiais denominados de cimento¹ e matriz. Como o cimento e a matriz não ocupam todo o espaço existente entre os grãos, restam espaços vazios denominados de poros, conferindo-lhe a característica de permeabilidade. Os reservatórios petrolíferos são frequentemente heterogêneos, ou seja, com propriedades que são modificadas ao longo de sua extensão e no tempo. Os maiores campos heterogêneos de óleos são os chamados campos de óleo fraturados, os quais consistem em adições de blocos de meios porosos separados por uma rede de fraturas. Neste tipo de reservatório, a compressibilidade, a porosidade e a saturação são semelhantes, enquanto que a permeabilidade pode variar significativamente. São essas propriedades que determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio poroso, a sua distribuição na rocha reservatório, a sua capacidade de escoamento e as quantidades a serem extraídas. A produção de óleo de um reservatório pode se dar por energia primária, que é determinada pelo volume e pela natureza dos fluidos existente na acumulação e, também pela pressão e temperatura em que se encontra

¹Material que une os grãos de uma rocha sedimentar consolidada.

o reservatório. Este primeiro estágio é conhecido como recuperação primária e, apenas uma pequena porcentagem do total de óleo é produzida. Para recuperar parte de óleo restante, utiliza-se operações que conduzem ao aumento da eficiência de recuperação e aceleração da produção que é chamada de recuperação secundária.

Desde 1880, o método de recuperação secundária vem sendo utilizado no mundo. Neste método os poços são divididos em dois conjuntos: um conjunto de poços de injeção e outro de produção. Os poços de injeção são usados com a finalidade de injetar um fluido, que normalmente é água (devido a disponibilidade, o custo e outras características apresentadas pelo fluido) dentro do meio poroso para manutenção da pressão elevada e, conseqüentemente, deslocar o óleo na direção dos poços produtores. Sendo a água menos viscosa do que o óleo, em geral há a formação de canais preferenciais, havendo assim regiões consideráveis do reservatório, que nem chegam a ser varrida pela água. Como consequência, dependendo da diferença de viscosidade entre os dois fluidos, não é raro ocorrer a irrupção prematura e crescente da água nos poços produtores, comprometendo a vazão de óleo produzido e com ela a recuperação final.

A compreensão do escoamento e de outros fenômenos de transporte em meios porosos heterogêneos têm sido, um dos temas mais instigante no que se refere à hidrologia subterrânea. Além disso a modelagem desses meios porosos é também de grande importância para a simulação numérica de reservatórios petrolíferos, isto é, a engenharia de petróleo depende da resolução bem-sucedida desse fenômeno de escoamento em meio poroso, pois alguns tipos de reservatórios de petróleo apresentam um sistema de planos fraturados interconectados dividindo a rocha porosa numa coleção de blocos. O estudo do processo de recuperação de petróleo em reservatórios petrolíferos tem merecido atenção nas últimas décadas, embora com toda a tecnologia existente, recupera-se entre 20% e 30% do petróleo existente numa jazida.

A utilização de técnicas numéricas, tem sido uma fonte aliada na compreensão destes fenômenos de transporte em meios porosos heterogêneos, aos quais quando bem implementados permitem resolver o modelo matemático constituído de equações diferenciais parciais "EDPs". Dentre estas técnicas destacam-se os métodos das diferenças finitas (MDF), elementos finitos (MEF) e volumes finitos (MVF). O método de diferenças finitas tem sido usado nos simuladores que são aplicados na indústria petrolífera. Entretanto, o método de volumes finitos é alternativamente vantajoso, pois expressa a física do problema por meio de relações entre os fluxos

que cruzam as fronteiras dos volumes de controle. Portanto, o presente trabalho tem por objetivo avaliar numericamente os aspectos fluidodinâmicos do escoamento bifásico (água/óleo) em meios porosos heterogêneos. Para atingir este objetivo foram definidas as seguintes metas:

- Apresentar uma modelagem matemática bidimensional transiente para prever o escoamento bifásico em reservatórios petrolíferos heterogêneos;
- Desenvolver um programa computacional para resolver o modelo matemático proposto;
- Simular a distribuição da saturação de água/óleo e pressão no interior do reservatório de petróleo;
- Avaliar a influência da permeabilidade do meio poroso sobre os campos de pressão e de saturação;

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica

Não se preocupe com suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são bem maiores.

Albert Einstein (1879 – 1955)

2.1 Reservatório Petrolífero

Segundo THOMAS (2001), o petróleo, após ser gerado e ter migrado, é eventualmente acumulado em uma rocha que é chamada de reservatório. Esta rocha pode ter qualquer origem ou natureza, mas para constituir um reservatório deve apresentar espaços vazios no seu interior denominado de poros, e que estes vazios estejam interconectados, conferindo-lhe a característica de permeabilidade. Assim, podem se constituir rocha-reservatório, os arenitos e calcarenitos, e todas as rochas sedimentares essencialmente dotadas de porosidade intergranular que sejam permeáveis.

2.1.1 Métodos de Recuperação

A tecnologia para estimular a produção de poços individuais contendo óleo, que apresente algum influxo natural, tem evoluído e tem sido uma preocupação constante de todos os setores da indústria de petróleo (MEZZOMO, 2000; THOMAS, 2001).

Uma característica importante de um reservatório de óleo é a natureza dos fluidos que preenchem o meio poroso. O caso mais simples é de um reservatório monofásico, no qual todo o meio poroso é preenchido com um só fluido (usualmente gás ou óleo). Tais reservatórios podem ser encontrados entre aqueles que estão num estágio inicial de produção, quando o gás ou o óleo é produzido pela descompressão natural simples. Este estágio monofásico termina rapidamente, quando a pressão do reservatório atinge uma pressão de equilíbrio com a da superfície (ALLEN *et al.*, 1988). Neste momento, a produção natural de óleo ou gás é interrompida ainda que só uma pequena porcentagem do total do óleo ou gás tenha sido produzida. Este primeiro estágio é conhecido como recuperação primária (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986). Para recuperar parte do óleo restante, uma possibilidade é causar uma queda de pressão no poço de tal forma que o óleo se desloque para este poço. Isto pode levar a duas situações: a primeira delas, é que a pressão em torno do poço cairá abaixo da pressão de bolha

do óleo e nesse caso produzirá quase apenas gás, e os componentes mais pesados continuarão sobretudo armazenados no reservatório; a segunda, é que a diminuição da pressão da fase fluida poderá conduzir a rocha ao colapso, resultando em um reservatório com baixa permeabilidade e, portanto, com mais dificuldade para produzir. Além disto, pode ainda ocorrer o fenômeno de acomodação das rochas, o qual poderia ser sentido na superfície da terra. Por este motivo, os engenheiros de petróleo usam métodos alternativos denominados de recuperação secundária (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986).

Na recuperação secundária os poços são divididos em dois conjuntos: poços de injeção e produção (ROSA *et al.*, 2001). Os poços de injeção são usados para injetar um fluido, usualmente água, dentro do meio poroso para deslocar o óleo na direção dos poços de produção. Durante este processo, a pressão no interior do reservatório é mantida acima do nível inicial, de tal forma a evitar o colapso ou acomodação, como mencionado anteriormente.

Para o processo de recuperação secundária, dois casos devem ser considerados: (i) quando a pressão é mantida acima da pressão de bolha do óleo e (ii) quando a pressão cai, em alguns pontos do reservatório, abaixo da pressão de bolha do óleo. No primeiro caso, o fluido consiste de duas fases imiscíveis (água e óleo) sem transferência de massa entre elas, e no segundo caso, o óleo pode separar-se em uma fase líquida e uma fase gasosa em equilíbrio termodinâmico. Este é o denominado reservatório “*black-oil*” (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986; SMOLLER, 1994; SANTOS, 1998).

A técnica de injeção de água possibilita recuperar um certo percentual do óleo residente no reservatório, em torno de 40%, no melhor dos casos. Existem três razões principais para este pequeno fator de recuperação: (i) regiões no reservatório que nunca são atingidas pela água e, conseqüentemente, o óleo daquela região não será produzido; (ii) regiões que mesmo tendo sido completamente atingidas pela água, uma parte significativa do óleo (entre 20% e 30%) permanece retida nos poros devido à ação de forças capilares e (iii) diferença de viscosidade entre os fluidos existentes no reservatório com a formação de direções preferenciais pela água (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986).

Segundo MEZZOMO (2000), entre os muitos problemas que afetam a recuperação nos reservatórios de petróleo, um, em particular, está diretamente ligado à imiscibilidade e à diferença de viscosidade entre os fluidos. O fato do óleo ser mais viscoso

que a água faz com que, no escoamento simultâneo destes dois fluidos através do meio poroso, a água tenda a se deslocar numa velocidade mais elevada em relação ao óleo no seu trajeto em direção aos poços produtores. Como consequência, dependendo da diferença de viscosidade entre os dois fluidos, não é raro ocorrer à irrupção prematura e crescente da água nos poços produtores, comprometendo a vazão de óleo produzido e com ela o chamado fator de recuperação.

Para aumentar o fator de recuperação, a indústria de petróleo faz uso de outras técnicas conhecidas como recuperação terciária ou avançada. Uma das principais metas destas técnicas é atingir a miscibilidade dos fluidos e, com isto, diminuir a saturação do óleo que permaneceu no reservatório após a injeção de água. Esta miscibilidade pode ser obtida pelo aumento da temperatura (técnicas de combustão *in situ*, que provocam aumento na mobilidade do fluido) ou pela introdução de outros componentes, como por exemplo alguns polímeros, os quais produzirão a miscibilidade do óleo e da água quando em proporções adequadas. De forma análoga, a miscibilidade das fases gasosa e líquida é obtida quando do uso de polímeros de médio peso molecular em escoamento do tipo “*black-oil*” (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986).

Uma situação típica para a recuperação terciária é o escoamento parcialmente miscível ou composicional. O número de fases e a composição de cada fase, em termos dos componentes dados, dependem das condições termodinâmicas (temperatura e pressão) e da concentração de cada componente.

Numa situação prática, nunca serão encontrados escoamentos completamente miscíveis, como por exemplo, no caso da água doce e água salgada. De qualquer modo, este tipo de fluxo compartilha algumas similaridades com os escoamentos parcialmente miscíveis e, conseqüentemente, são úteis para o efeito do desenvolvimento de métodos numéricos (PEACEMAN, 1977; ALLEN *et al.*, 1988).

2.2 Descrição Físico-Matemática do Fenômeno de Transferência em Meios Porosos

Nos estudos de um reservatório petrolífero é fundamental o conhecimento das propriedades da rocha que o forma. São essas propriedades que determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio poroso, a sua distribuição na rocha-reservatório, a sua capacidade de escoamento e as quantidades a serem extraídas. Entre as propriedades existentes destacam-se a porosidade, a compressibilidade e a

permeabilidade da rocha (SCHEIDEGGER, 1974; ROSA *et al.*, 2001). Estas propriedades são definidas para um volume de controle do meio poroso denotado por V_T [m³ de rocha].

2.2.1 Propriedades das Rochas e dos Fluidos

2.2.1.1 Porosidade

Porosidade (ϕ) é uma das mais importantes propriedades das rochas, pois ela mede a capacidade de armazenamento de fluidos. É definida como a relação entre o volume de vazios de uma rocha e o volume total da mesma:

$$\phi = \frac{V_p}{V_T} \quad (2.1)$$

onde V_p [m³ de volume poroso de rocha] é o volume de vazios, ou seja, é o volume poroso inicial e V_T é o volume de controle do meio poroso.

A porosidade é uma medida adimensional e pode ser absoluta ou efetiva:

A porosidade absoluta é a razão entre o volume de todos os poros, interconectados ou não, e o volume total da rocha. Já a porosidade efetiva é a razão entre o volume dos poros interconectados e o volume total da rocha.

2.2.1.2 Compressibilidade

A compressibilidade (c_f) é definida como o quociente entre a variação fracional de volume e a variação de pressão. A variação fracional é o quociente entre a redução de volume e o volume inicial. A relação entre esta variação fracional dos volumes dos poros e a variação de pressão é denominada de compressibilidade efetiva da formação. Assim:

$$c_f = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial P} \text{ ou } c_f = \frac{\Delta V_p / V_p}{\Delta P} \quad (2.2)$$

onde ΔV_p [m³ de volume poroso de rocha] é a variação do volume poroso, V_p [m³ de volume poroso de rocha] é o volume poroso inicial, $\Delta V_p / V_p$ é a variação fracional do volume e ΔP [Pa] é a variação da pressão.

2.2.1.3 Saturações de Fluidos

Os poros de uma rocha-reservatório contém sempre dois ou mais fluidos em seu interior, ou seja, água-óleo; óleo-gás e água-óleo-gás. Assim sendo, o conhecimento do volume poroso não é suficiente para estabelecer as quantidades de óleo, água e gás contidas nas formações. Para que essas quantidades sejam estimadas, é necessário estabelecer qual é o percentual de volume poroso ocupado por cada uma das fases. Esses percentuais recebem o nome de saturações.

Portanto, as saturações de óleo, água ou gás são dadas respectivamente por:

$$s_o = V_o/V_p, \text{ é a saturação de óleo,} \quad (2.3)$$

$$s_g = V_g/V_p, \text{ é a saturação de gás,} \quad (2.4)$$

$$s_w = V_w/V_p, \text{ é a saturação de água.} \quad (2.5)$$

onde $V_o[m^3]$, $V_g[m^3]$, $V_w[m^3]$ são os volumes das fases óleo, gás e água, respectivamente.

Note que, devido ao fato de ser considerado que todo o volume poroso é ocupado pelo fluido, têm-se necessariamente a seguinte restrição nas saturações das fases:

$$s_o + s_g + s_w = 1 \quad (2.6)$$

2.2.1.4 Permeabilidade

A permeabilidade é a medida da capacidade de uma rocha permitir o fluxo de fluidos. A permeabilidade possui a seguinte classificação:

- a) **Permeabilidade Absoluta (K):** Quando existe um único fluido saturando a rocha, a permeabilidade absoluta é dada por:

$$K = \frac{q\mu L}{A\Delta P}, \text{ [m}^2\text{]} \quad (2.7)$$

onde q [m^3/s] é a vazão ou fluxo de um fluido através de um meio poroso linear, μ [Pa s] é a viscosidade dinâmica, L [m] é comprimento do meio poroso, A [m^2] é a área da seção transversal e ΔP [Pa] é a variação de pressão.

- b) **Permeabilidade Efetiva (K_α):** No caso da existência de mais de uma fase numa rocha-reservatório, a facilidade com que cada uma se move é chamada de permeabilidade efetiva da fase considerada. No caso de um reservatório com água, óleo e gás, as permeabilidades são denotadas como K_w , K_o e K_g , respectivamente. Estas são definidas como:

$$K_\alpha = \frac{q_\alpha \mu_\alpha L}{A \Delta P_\alpha}, \text{ [m}^2\text{]}, \alpha = w, o, g. \quad (2.8)$$

- c) **Permeabilidade Relativa ($k_{r\alpha}$):** No estudo de um reservatório é usual considerar os valores de permeabilidade após submetê-los a um processo de normalização. Normalizar os dados de permeabilidade, significa dividir todos os valores de permeabilidade efetiva pela permeabilidade absoluta. Ao resultado da normalização dá-se o nome de permeabilidade relativa da fase. Portanto,

$$k_{ro} = K_o/K, \text{ é a permeabilidade relativa do óleo,} \quad (2.9)$$

$$k_{rg} = K_g/K, \text{ é a permeabilidade relativa do gás,} \quad (2.10)$$

$$k_{rw} = K_w/K, \text{ é a permeabilidade relativa do água.} \quad (2.11)$$

Baseado em dados experimentais, o modelo de Corey propõe que a função de permeabilidade relativa da fase α seja dependente apenas da saturação da própria fase α e que esta função tenha um comportamento na forma de potência, s_α^p , onde p é um expoente positivo e maior do que 1 (um) (PEACEMAN, 1977; ALLEN *et al.*, 1988).

Os reservatórios são freqüentemente heterogêneos, com propriedades que variam ao longo de sua extensão e tempo. Os maiores campos heterogêneos de óleo são os chamados “campos de óleo fraturados”, os quais consistem em adições de blocos de meios porosos separados por uma rede de fraturas (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986; ROSA *et al.*, 2001).

2.2.2 Forças que Agem Sobre o Fluido

O fluido quando é mecânicamente isotrópico, isto é, nele não existem direções preferenciais de tensões ou deformações, ou seja, suas propriedades mecânicas independem do referencial. As forças que agem sobre o fluido podem ser de dois tipos: forças de superfície ou de campo.

2.2.2.1 Força de Superfície

- a) **Tensor tensão:** A Equação (2.12) representa as tensões em função das propriedades macroscópicas do fluido, tais como: viscosidade, gradientes de velocidades e de pressão. Para os fluidos newtonianos, esta expressão é definida pela **lei de Cauchy-Poisson**:

$$T = -P \delta + \Gamma \delta T_r(D) + \nu D. \quad (2.12)$$

Na Equação (2.12), o coeficiente Γ esta associada à taxa de expansão, sendo chamado de segundo coeficiente da viscosidade. Enquanto, o coeficiente ν representa a viscosidade molecular, que agora esta multiplicando o tensor taxa de deformação, no qual, mede de uma forma geral a extensão e o cisalhamento, sendo assim, chamado de primeiro coeficiente da viscosidade. O escala P é chamado de pressão, δ é o tensor identidade ou ainda de tensor unidade e $T_r(D)$ é o tensor contraído é também chamado de traço do tensor, definido por:

$$T_r(D) = \sum_i \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{U} \quad (2.13)$$

pois, é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz que exhibe os componentes de D , que denota a matriz $\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^t$. Logo, se tem que

$$T = -P \delta + \Gamma \delta \nabla \cdot \vec{U} + \nu \left(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^t \right) \quad (2.14)$$

Nesse caso, as componentes do tensor tensão T dadas por:

$$T_{ij} = -P \delta_{ij} + \Gamma \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.15)$$

é limitada aos fluidos newtonianos que escoam em condição laminar.

Para o tensor parcial de tensão T^F , se tem que:

$$T^F = -P^F \delta + \Gamma \delta \nabla \cdot \vec{U}^F + \nu \left(\nabla \vec{U}^F + (\nabla \vec{U}^F)^t \right) \quad (2.16)$$

Desprezando os efeitos viscosos para efeitos de simplificação, tem-se que

$$T^F = -P^F \delta \quad (2.17)$$

onde, δ denota a matriz identidade, a função P^F é chamada de pressão do fluido F

$$\nabla \cdot T^F = -\nabla P^F$$

Então, a força de superfície resultante, é dada pela expressão:

$$\tau^F = T^F \quad \text{ou} \quad \tau^F = -P^F \delta \quad (2.18)$$

2.2.2.2 Força de Campo

- a) **Força gravitacional:** Levando-se em consideração a força de campo associada pela ação da gravidade, ou seja, uma força gravitacional (isto é, força por unidade de massa), resultante da posição em que um elemento de massa do fluido está em relação a um plano de referência do campo gravitacional terrestre, é definida por:

$$\Phi^F F_g^F = g \nabla z \quad (2.19)$$

onde, ∇z é a distância em relação ao referencial tomado, g é aceleração da gravidade e Φ^F é a fração volumétrica a qual é definida como sendo o quociente entre o volume do fluido, que ocupa o meio poroso, V^F , e o volume total da rocha, V , dada por:

$$\Phi^F = \frac{V^F}{V} \quad (2.20)$$

- b) **Forças que atuam num corpo (F):** No escoamento de um fluido em regime permanente e aceleração do fluido é nula, ou ao menos desprezível. Em um meio poroso, o fluido exerce uma força (F) sobre os sólidos particulados. As forças que atuam sobre o corpo, são as forças externa (F_{ex}) e resistiva (F_{re}), devida ao atrito do fluido na direção da velocidade relativa (\vec{U}_{rel}) entre o fluido e a partícula, respectivamente (MASSARANI, 2002).

Esta força externa (F_{ex} , isto é, força por unidade de massa), pode ser a força da gravidade, ou a de força centrífuga, sendo expressa pela lei de Newton sob a forma

$$F_{ex} = a_{ex} \quad (2.21)$$

onde, F_{ex} é a força por unidade de massa e a_{ex} é a aceleração da partícula resultante da força externa.

A força resistiva (F_{re}), devido à ação do fluido sobre os sólidos particulados, foi estudada primeiro por Darcy, que propôs a linear da força dinâmica devido a velocidade relativa entre as duas fases, e ainda mais, a dependência na viscosidade dinâmica do fluido, definida pela seguinte relação:

$$F_{re} = \frac{\mu}{K} \Phi^F \vec{U}_{rel} = \frac{\mu}{K} \Phi^F (\vec{U}^F - \vec{U}^R) \quad (2.22)$$

onde \vec{U}^R e \vec{U}^F são as velocidades da partícula e da corrente de fluido livre, respectivamente, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e K é a permeabilidade do meio poroso. Essa aproximação é satisfatória quando o escoamento do fluido através do meio poroso é suficientemente lento (baixo número de Reynolds $Re \ll 1, 0$), ou seja, quando as forças com origem na viscosidade do fluido sejam maiores que as originárias das forças de inércia.

Por hipótese, tem-se que $\vec{U}^R = 0$, então $\vec{a}_{ex} = 0$. Logo a força resultante que o fluido exerce sobre o meio poroso, é dada por

$$F = \rho F_{ex} - F_{re},$$

ou seja,

$$F = -\frac{\mu}{K} \Phi^F \vec{U}^F \quad (2.23)$$

Portanto, completando a descrição do modelo físico, têm-se que a força de campo (\mathcal{F}^F) é dada por:

$$\mathcal{F}^F = \rho \Phi^F F_g^F - \frac{\mu}{K} \Phi^F \vec{U}^F,$$

ou

$$\mathcal{F}^F = \rho g \nabla z - \frac{\mu}{K} \Phi^F \vec{U}^F \quad (2.24)$$

2.2.3 Equação Integral do Balanço Global

A quantidade líquida de uma grandeza ψ qualquer, que atravessa as fronteiras do volume de controle Ω por unidade de tempo (conforme a Figura 2.1) é obtida pela

sua integração sobre essas fronteiras, resultando na Equação integral (2.25) chamada **balanço global** (ALLEN *et al.*, 1988). São levados em consideração as forças de campo e de superfície que agem sobre o fluido,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi d\Omega = \oint_{\partial\Omega_t} \tau \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_t} \mathcal{F} d\Omega \quad (2.25)$$

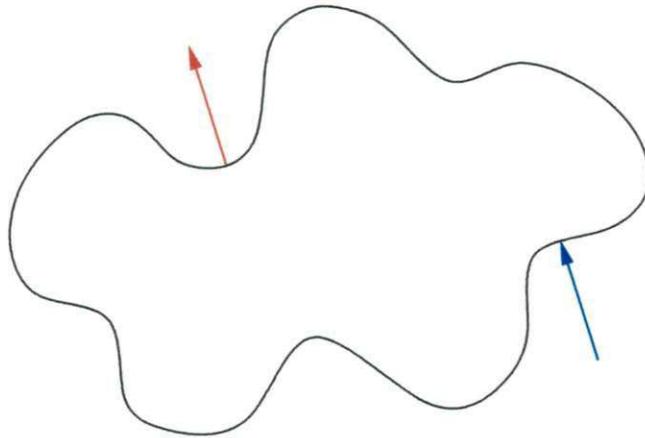


Figura 2.1 - volume de controle Ω e sua fronteira $\partial\Omega$, no instante t

A Equação (2.25) pode ainda ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi d\Omega - \oint_{\partial\Omega_t} \tau \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega_t} \mathcal{F} d\Omega = 0 \quad (2.26)$$

sendo que Ω_t é o volume material ocupado pelo fluido no instante t , $\partial\Omega_t$ sua fronteira, τ é o tensor das tensões que agem sobre a superfície do elemento de fluido, \vec{n} é a normal externa a esta fronteira e \mathcal{F} é um vetor que representa a força resultante exercida no elemento de fluido por unidade de volume.

A interpretação do balanço global pode ser feita com auxílio da Figura 2.1, levando em conta que a unidade de massa do fluido transporta a quantidade ψ . O primeiro termo da Equação (2.26) representa a taxa de acúmulo da quantidade de ψ em Ω_t , devida a variação com o tempo da grandeza ψ do contínuo. No segundo termo, está representado a resultante das forças internas ou forças de superfície que são transmitidas por tração ao contínuo contido no volume material. Por fim, o terceiro

termo representa a resultante das forças de campo que atuam no contínuo, contido no volume do material. Essas interpretações se referem a um dado instante t , quando o volume material Ω_t é caracterizado pelo volume espacial ou volume de controle Ω .

Aplicando os teoremas do transporte a cada componente e o da Divergência na Equação (2.26), obtém-se, então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega_t} (\psi \vec{U}) \cdot \vec{n} dS - \oint_{\partial\Omega_t} \tau \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega_t} \mathcal{F} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot (\psi \vec{U}) d\Omega - \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \tau d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathcal{F} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \vec{U}) - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

o fato de seu integrando ser contínuo e Ω_t arbitrário, resultam a equação de balanço global ou diferencial na forma conservativa:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \vec{U}) - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} = 0 \quad (2.28)$$

sendo ψ a propriedade macroscópica do fluido.

Na forma não-conservativa tem-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \psi}_{\text{Derivada Substantiva}} + \psi \nabla \cdot \vec{U} - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} &= 0 \\ \frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \vec{U} - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2.3.1 Equação da Continuidade e do Momento

A equação do balanço de massa global pode ser obtida a partir da Equação (2.26), tomando-se $\psi = \rho$ como sendo a massa específica, $\tau = 0$ assumindo ausência de força internas, e $\mathcal{F} = \dot{Q}$, como sendo a taxa do fluxo de massa por unidade de volume

dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho d\Omega - \int_{\Omega_t} \check{Q} d\Omega = 0 \quad (2.30)$$

O primeiro termo da Equação (2.30), é chamado de derivada substativa, material ou total, a ser definida a seguir, trata-se de um conceito importante em mecânica dos fluidos.

Pode-se reescrever a Equação (2.30), utilizando a Equação (A.12) para $\mathcal{T} = \rho$ (tensor de ordem zero), como sendo:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial \Omega_t} (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega_t} \check{Q} d\Omega = 0 \quad (2.31)$$

O segundo termo da Equação (2.31) é uma integral de superfície, a qual deve ser transformada numa integral de volume, então, aplicando o teorema da Divergência, e reagrupando os termos semelhantes (ver Anexo A), é possível mostrar que:

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) - \check{Q} \right] d\Omega = 0 \quad (2.32)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = \check{Q} \quad (2.33)$$

Esta Equação (2.33) é conhecida como sendo a equação da continuidade, em que \check{Q} é a taxa do fluxo de massa por unidade de volume. Note-se que o primeiro termo representa a variação temporal da densidade do fluido, enquanto o segundo termo descreve a taxa da variação da massa por unidade de volume da região Ω_t . Pode-se reescrever a Equação (2.33) na forma não-conservativa, ou seja,

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho}_{\text{Derivada Substantiva}} + \rho \nabla \cdot \vec{U} = \check{Q}, \quad (2.34)$$

ou ainda,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{U} = \check{Q}. \quad (2.35)$$

Se ψ da Equação (2.29) representar o momento por unidade de volume, definido como sendo o produto da massa específica (ρ) pela sua velocidade, $\psi = \rho \vec{U}$, sendo \vec{U} é o vetor velocidade, então, o momento representa uma grandeza vetorial. Assim, a Equação (2.29) pode ser escrita na forma vetorial:

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{U}) + \rho \vec{U} \nabla \cdot \vec{U} - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} = 0, \quad (2.36)$$

ou,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{U} \nabla \cdot \vec{U} - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} = 0, \quad (2.37)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{U} \right] - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} = 0 \quad (2.38)$$

Utilizando a Equação (2.35) sobre o segundo termo do lado esquerdo da Equação (2.38), pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \check{Q} - \nabla \cdot \tau - \mathcal{F} &= 0, \\ \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} &= \nabla \cdot \tau + \mathcal{F} - \vec{U} \check{Q} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Esta Equação (2.39) corresponde a formulação geral da segunda lei Newton do movimento (BIRD *et al.*, 1960). Ou seja, a taxa de variação temporal de momento do fluido é igual à resultante das forças que atuam sobre o fluido. Também, pode-se escrever a equação de momento linear na forma conservativa, utilizando a Equação (2.28), como segue:

$$\frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \nabla \cdot \tau + \mathcal{F} \quad (2.40)$$

os termos a esquerda da igualdade na Equação (2.40) representam, respectivamente, as taxas de acumulação de momento e do momento no elemento de volume, devido ao efeito de arraste do movimento do fluido no escoamento (SISSON e PITTS, 1988).

2.3 Escoamento em Meios Porosos

O fenômeno a ser analisado corresponde ao escoamento de um fluido através de um meio poroso como ilustrado na Figura 2.2 (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986; ALLEN *et al.*, 1988).

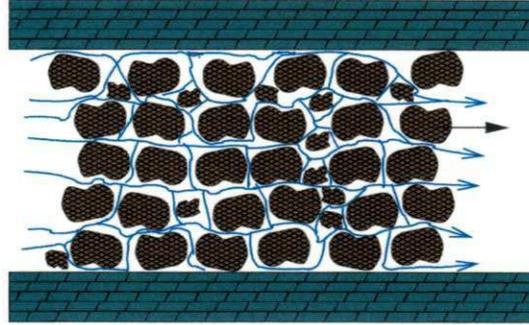


Figura 2.2 - Escoamento em um meio poroso heterogêneo.

Supondo que as partículas sólidas do meio poroso permanecem fixas, enquanto o fluido se movimenta através do meio poroso, com velocidade média \vec{U} . Logo, o modelo físico é constituído pela rocha porosa (R) e pelo fluido (F).

As equações de balanço para cada constituinte, são obtidas utilizando-se as Equações (2.33) e (2.40), aplicada para uma mistura multifase $\alpha = R, F$, dadas por:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \vec{U}^\alpha) = \check{Q}^\alpha \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial (\rho^\alpha \vec{U}^\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \vec{U}^\alpha \vec{U}^\alpha) = \nabla \cdot \tau^\alpha + \mathcal{F}^\alpha \quad (2.42)$$

Por hipótese têm-se que a rocha porosa é rígida e está em repouso, com isto as equações de balanço de massa e balanço de momento linear são automaticamente satisfeitas (PEACEMAN, 1977; ALLEN *et al.*, 1988).

Observa-se que a densidade do fluido F , ρ^F , pode-se ser relacionada em cada

ponto (x, y, z, t) com a densidade real do fluido, ρ , por

$$\rho^F = \Phi^F \rho \quad (2.43)$$

onde Φ^F é a fração volumétrica.

Dessa forma, as Equações (2.41) e (2.42) podem ser rescritas para o fluido (F) e utilizando a Equação (2.43) como sendo:

$$\frac{\partial(\Phi^F \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi^F \rho \vec{U}^F) = \check{Q}^F \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial(\Phi^F \rho \vec{U}^F)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi^F \rho \vec{U}^F \vec{U}^F) = \nabla \cdot \tau^F + \mathcal{F}^F \quad (2.45)$$

estas equações estão na forma conservativa e, na qual, apresentam melhores propriedades numéricas do que as escritas na forma não-conservativas:

$$\frac{D^F(\Phi^F \rho)}{Dt} + \Phi^F \rho \nabla \cdot \vec{U}^F = \check{Q}^F, \quad (2.46)$$

$$\Phi^F \rho \frac{D^F \vec{U}^F}{Dt} - \nabla \cdot \tau^F = \mathcal{F}^F - \vec{U}^F \check{Q}^F. \quad (2.47)$$

Para completar a descrição do modelo matemático é preciso relacionar τ (força de superfície) e \mathcal{F} (força de campo) com as outras variáveis do modelo físico.

2.3.1 Equação que Regem o Escoamento em Meio Poroso

Embora os reservatórios sejam governados essencialmente pelas mesmas equações, variando ligeiramente as suas propriedades, eles apresentam algumas propriedades específicas adicionais (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986; SANTOS, 1998).

2.3.1.1 Conservação de Momento e Equação de Darcy

Inserindo as expressões (2.18) e (2.24) correspondentes ao modelo físico na equação (2.47), obtém-se

$$\rho \Phi^F \frac{D^F \vec{U}^F}{Dt} = -\nabla P^F + \left(\rho g \nabla z - \frac{\Phi^F}{\lambda^F} \vec{U}^F \right) - \vec{U}^F \check{Q}^F, \quad (2.48)$$

que após algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\rho \Phi^F \frac{D^F \vec{U}^F}{Dt} + \left(\frac{\Phi^F}{\lambda^F} + \check{Q}^F \right) \vec{U}^F = -\nabla P^F + \rho g \nabla z \quad (2.49)$$

que é chamada de equação de conservação de momento na forma não-conservativa, enquanto, na forma conservativa é dada por

$$\frac{\partial(\rho \Phi^F \vec{U}^F)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \Phi^F \vec{U}^F \vec{U}^F) + \frac{\Phi^F}{\lambda^F} \vec{U}^F = -\nabla P^F + \rho g \nabla z. \quad (2.50)$$

Suponha que o fluido possua velocidades constantes ou velocidades relativamente baixas, uma vez que sua aceleração é nula, e que podem ser tratadas estaticamente, nestas circunstâncias, não ocorre nenhuma transferência de momento e é chamado de fluido inercial, ou seja,

$$\frac{D^F \vec{U}^F}{Dt} \simeq 0,$$

nesse caso, a Equação (2.49) é escrita como

$$\left(\frac{\Phi^F}{\lambda^F} + \check{Q}^F \right) \vec{U}^F = -\nabla P^F + \rho g \nabla z, \quad (2.51)$$

esta Equação (2.51) é conhecida como **Equação de Darcy**, e o escoamento darcyano está associado à validade desta equação, ou ainda,

$$\vec{U}^F = -\frac{1}{\left(\frac{\Phi^F}{\lambda^F} + \check{Q}^F \right)} (\nabla P^F - \rho g \nabla z) \quad (2.52)$$

onde $\phi^F = 1 - \phi^R = \phi$ é a porosidade.

Nestas condições, as equações que modela o escoamento de um fluido inercial e não-inercial no meio poroso, em resumo são dadas por:

- Equação da Continuidade

$$\frac{\partial(\Phi^F \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi^F \rho \vec{U}^F) = \check{Q}^F \quad (2.53a)$$

- Equação de Darcy

$$\vec{U}^F = -\frac{1}{\left(\frac{\Phi^F}{\lambda^F} + \check{Q}^F\right)} (\nabla P^F - \rho g \nabla z) \quad (2.53b)$$

- Equação do Momento Linear

$$\frac{\partial(\Phi^F \rho \vec{U}^F)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi^F \rho \vec{U}^F \vec{U}^F) + \frac{\Phi^F}{\lambda^F} \vec{U}^F = -\nabla P^F + \rho g \nabla z \quad (2.53c)$$

2.3.1.2 Escoamento Bifásico em Meio Poroso

Suponha que o fluido presente no meio poroso, é composto de duas fases imiscíveis (água (w) e óleo (o)), neste caso é chamado bifásico. Sejam V , o volume de controle do meio poroso ou volume total de rocha e V_P , o volume de vazios de uma rocha (ALLEN *et al.*, 1988; CUNHA *et al.*, 1999). A relação entre V e V_P é chamada de porosidade (ϕ) que foi definida na seção 2.2.1.1.

Todavia, o conhecimento do volume poroso não é suficiente para estabelecer as quantidades de óleo e água contidas nas formações. E a relação entre a fração volumétrica, a porosidade e a saturação (ver seção 2.2.1.3) é expressa por:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= \frac{V_\alpha}{V} \cdot \frac{V_P}{V_P} \\ \Phi_\alpha &= \frac{V_\alpha}{V_P} \cdot \frac{V_P}{V} \\ \Phi_\alpha &= \phi s_\alpha \end{aligned} \quad (2.54)$$

Note que, devido ao fato de ser considerado que todo o volume poroso é ocupado pelo fluido, têm-se necessariamente a seguinte restrição nas saturações das fases, utilizando a Equação (2.6), obtém-se:

$$s_w + s_o = 1 \quad (2.55)$$

Considere inicialmente as equações de balanço de massa para cada fase, na ausência de reações químicas e fontes de massa ou sumidores (PEACEMAN, 1977; ALLEN *et*

al., 1988; SANTOS, 1998). Portanto, utilizando as Equações (2.44) e (2.54) e levando em consideração a velocidade que existiria se um único fluido ocupasse o espaço poroso da rocha, U_α , dada pela relação

$$U_\alpha = \phi s_\alpha \vec{U}_\alpha \quad (2.56)$$

(pois é mais conveniente usar a velocidade superficial do fluido U_α) é possível mostrar que:

- Balanço de Massa da fase água

$$\frac{\partial (\phi s_w \rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w U_w) = 0 \quad (2.57)$$

- Balanço de Massa da fase óleo

$$\frac{\partial (\phi s_o \rho_o)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o U_o) = 0 \quad (2.58)$$

onde U_α a velocidade superficial da fase α , ou fluxo volumétrico da fase por unidade de área.

A velocidade de Darcy (U_α), é dada por:

$$U_\alpha = -K \lambda_\alpha (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \quad \alpha = w, o \quad (2.59)$$

onde K é a permeabilidade absoluta da rocha; λ_α e P_α são respectivamente a mobilidade relativa e a pressão da fase α ($\alpha = w, o$). A mobilidade relativa, λ_α , é função da saturação e é definida por

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}(s_\alpha)}{\mu_\alpha} \quad (2.60)$$

onde μ_α e $k_{r\alpha}$ são respectivamente, a viscosidade dinâmica e a permeabilidade relativa da fase α .

A mobilidade total do fluido, que depende das saturações, é definida por

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o \quad (2.61)$$

A velocidade de Darcy total do fluido, é dada por

$$U = U_w + U_o \quad (2.62)$$

A pressão capilar corresponde a diferença entre as pressões das duas fases numa mistura de dois fluidos imiscíveis, ou seja, diferença entre as pressões das duas fases dada pela equação

$$P_c = P_o - P_w \quad (2.63)$$

a qual é responsável pelo surgimento de um menisco na interface entre duas fases imiscíveis. Esse termo pode ser definido em função da saturação da água como segue:

$$P_c = f_c(s_w) \quad (2.64)$$

Portanto, usando as condições adicionais $s_w + s_o = 1$ e $P_c = P_o - P_w$, as Equações (2.57), (2.58) e (2.59) formam um sistema de equação diferencial parcial com variáveis s_w , U_w , U_o e P_w .

2.3.1.3 Equação de Estado

Neste ponto são introduzidas, na equação diferencial parcial do escoamento, as equações de estado, isto é; as equações que representam as compressibilidades dos fluidos e da rocha (SANTOS, 1998; ROSA *et al.*, 2001). 4:14 am Para o caso de escoamento bifásico, em que o reservatório encontra-se saturado pelos fluidos, água (s_w) e óleo (s_o), numa pressão interna da fase α P_α (SANTOS, 1998; ROSA *et al.*, 2001; ALLEN e FURTADO, 2004).

A equação da compressibilidade para a fase α , é

$$c_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_\alpha}, \quad \text{onde } \alpha = w, o \quad (2.65)$$

onde ρ_α a massa específica de α e P_α a pressão da fase α .

Quando fluidos são produzidos de uma rocha-reservatório, o esgotamento destes no espaço poroso faz com que haja uma variação da pressão interna da rocha e, com isso, ela fica sujeita a tensões resultantes diferentes. Essa variação de tensões provoca modificações nos grãos, nos poros e, algumas vezes, no volume total da

rocha. A variação do volume poroso é um parâmetro importante na Engenharia de Reservatório devido a compressibilidade efetiva da formação ou dos poros c_f definida na seção 2.2.1.2.

Da definição de porosidade pode-se escrever uma expressão para o volume poroso:

$$V_p = \phi V_t \quad (2.66)$$

considerando que o volume total da rocha é constante e derivando a expressão do volume poroso em relação à pressão obtém-se:

$$\frac{\partial V_p}{\partial p} = V_t \frac{\partial \phi}{\partial P} \quad (2.67)$$

substituindo as Equações (2.2) e (2.66) na Equação (2.67) é possível mostrar que:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P} \quad (2.68)$$

2.3.1.4 Modelo Matemático das Equações Governantes

WENDLAND *et al.* (2001) mostrou que a aproximação da formulação das Equações (2.57) e (2.58) consiste em um sistema de equações diferenciais com perturbação singular com relação à derivada temporal. Em problemas com baixa compressibilidade essa característica conduz a uma propagação de erros de arredondamento durante o processo de solução numérica, que nem sempre são identificados pelo usuário (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986).

Essa propriedade pode ser aliviada transformando o sistema original de Equações (2.57) e (2.58) em outro equivalente, conforme proposto por PEACEMAN (1977). A transformação consiste na substituição das pressões de cada uma das fases por uma pressão média, objetivo dessa transformação é a eliminação da perturbação singular com relação à derivada temporal da saturação (WENDLAND *et al.*, 2001; WENDLAND e FLENSBERG, 2003; ABREU, 2003).

O desenvolvimento do primeiro termo da Equação (2.57), pela aplicação da regra

da cadeia, com $\alpha = w, o$, produz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\phi s_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} &= s_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi s_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} \\
&= s_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi s_\alpha \frac{d\rho_\alpha}{dP_\alpha} \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} \\
&= s_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \rho_\alpha s_\alpha c_\alpha \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} \quad (2.69)
\end{aligned}$$

a partir desta expressão (2.69) para a fase w e substituindo na Equação (2.57) obtém-se

$$s_w \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \rho_w s_w c_w \frac{\partial P_w}{\partial t} + \phi \rho_w \frac{\partial s_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w U_w) = 0 \quad (2.70)$$

em que c_w é a compressibilidade da água. De maneira analoga, para a fase o , é possível chegar a:

$$s_o \rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \rho_o s_o c_o \frac{\partial P_o}{\partial t} + \phi \rho_o \frac{\partial s_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o U_o) = 0 \quad (2.71)$$

Dividindo as Equação (2.70) e (2.71), respectivamente por suas densidades ρ_w e ρ_o , e somando essas equações, obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi s_w c_w \frac{\partial P_w}{\partial t} + \phi s_o c_o \frac{\partial P_o}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w U_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o U_o) = 0 \quad (2.72)$$

Supondo, que a pressão interna (P) corresponde a pressão média das fases, ou seja:

$$P = \frac{(P_w + P_o)}{2}$$

e utilizando a Equação (2.63), obtém-se:

$$P_w = P - \frac{1}{2} P_c \quad (2.73)$$

$$P_o = P + \frac{1}{2} P_c \quad (2.74)$$

Substituindo, agora as Equações (2.68), (2.73) e (2.74) na Equação (2.72) e rea-

grupando os termos, mostra-se que:

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \phi (s_o c_o - s_w c_w) \frac{\partial P_c}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w U_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o U_o) = 0 \quad (2.75)$$

sendo $c_t = s_w c_w + s_o c_o + c_f$ a compressibilidade total do sistema.

Ao se admitir a seguinte hipótese simplificadora

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} \gg \frac{1}{2} \phi (s_o c_o - s_w c_w) \frac{\partial P_c}{\partial t}$$

então, a Equação (2.75) pode ser reescrita como sendo:

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w U_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o U_o) = 0, \quad (2.76)$$

Com a finalidade de substituir U_α (ou seja, a velocidade das fases $\alpha = w, o$) na Equação (2.76) foi utilizada a Equação (2.59) para cada fase em função das pressões média e capilar, aplicando as seguintes Equações (2.73) e (2.74), chega-se:

$$U_w = -K \lambda_w \left(\nabla P - \frac{1}{2} \nabla P_c - \rho_w g \nabla z \right), \quad (2.77)$$

$$U_o = -K \lambda_o \left(\nabla P + \frac{1}{2} \nabla P_c - \rho_o g \nabla z \right) \quad (2.78)$$

logo, se obtém igualmente a equação da velocidade total

$$U = K \left(-\lambda \nabla P + \frac{\lambda_w - \lambda_o}{2} \frac{dP_c}{ds_w} \nabla s - (\lambda_w \rho_w - \lambda_o \rho_o) \vec{g} \nabla z \right) \quad (2.79)$$

Substituindo, as Equações (2.77) e (2.78) na Equação da pressão (2.76), chega-se a:

$$\begin{aligned} \phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \left[\frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \lambda_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o) \right] \nabla P - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \lambda_w) - \right. \\ \left. \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o) \right] \nabla P_c + g \left[\frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w^2 \lambda_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o^2 \lambda_o) \right] \nabla z = 0. \quad (2.80) \end{aligned}$$

Em geral, tanto a compressibilidade do líquido como os gradientes de pressões

são valores pequenos. Portanto, pode-se desprezar os gradientes de pressões capilar, quando comparados com os gradientes de pressões, isto é

$$\nabla P_c \ll \nabla P,$$

além disso, o último termo da Equação (2.80) pode ser desprezado quando comparado com os outros termos da equação. Neste caso, a Equação (2.80) é reescrita como sendo:

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \left[\frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \lambda_w) + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o) \right] \nabla p = 0. \quad (2.81)$$

A Equação (2.81) pode ser simplificada ainda mais, se as densidades da fase água (w) e óleo (o) são considerada constantes (ou seja, fluidos incompressíveis) logo:

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (K \lambda \nabla P) = 0 \quad (2.82)$$

Além disso, as equações das saturações de água e óleo (2.57) e (2.58), tornam-se

$$\frac{\partial (\phi s_w)}{\partial t} + \nabla \cdot U_w = 0 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial (\phi s_o)}{\partial t} + \nabla \cdot U_o = 0 \quad (2.84)$$

daí tem-se que somando as Equações (2.83) e (2.84), e utilizando a Equação (2.62), obtém-se a equação da conservação de massa total do fluido:

$$\nabla U = 0 \quad (2.85)$$

portanto, a velocidade total não depende da posição, o que caracteriza a incompressibilidade do fluido.

Multiplicando as Equações (2.77) e (2.78), respectivamente por λ_o e $(-\lambda_w)$ e, somando-as obtém-se

$$\lambda_o U_w - \lambda_w U_o = K \lambda_w \lambda_o [\nabla P_c + (\rho_w - \rho_o) g \nabla z]. \quad (2.86)$$

A multiplicação da Equação (2.62) por λ_w , resulta em:

$$\lambda_w U_w + \lambda_w U_o = \lambda_w U \quad (2.87)$$

O sistema de equações formado pelas Equações (2.86) e (2.87), após sua resolução conduz uma a expressão para a velocidade da fase água em função da velocidade total dada por:

$$U_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} U + K \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} [\nabla P_c + (\rho_w - \rho_o) g \nabla z] \quad (2.88)$$

Ao se definir as seguintes funções

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \text{ (fluxo fracionario)} \quad (2.89)$$

$$h_w = -\frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} \frac{dP_c}{ds_w} \quad (2.90)$$

permite que a Equação (2.88), possa ser reescrita como sendo

$$U_w = f_w U - h_w \nabla s_w + \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) g \nabla z \quad (2.91)$$

Portanto o modelo matemático que representa o escoamento bifásico em sua forma equivalente para o domínio Ω delimitada pela fronteira $\partial\Omega$, após algumas simplificações é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi s_w)}{\partial t} + \nabla \cdot U_w = 0 & \text{é a Equação da Saturação da Água} \\ \phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (K \lambda \nabla P) = 0 & \text{é a Equação da Pressão} \end{cases} \quad (2.92)$$

no qual

$U_w = f_w U - h_w \nabla s_w + \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) g \nabla z$ é a velocidade da fase água

$U = K \left(-\lambda \nabla P + \frac{\lambda_w - \lambda_o}{2} \frac{dP_c}{ds_w} \nabla s - (\lambda_w \rho_w - \lambda_o \rho_o) \vec{g} \nabla z \right)$ é a velocidade total

As incógnitas primárias do modelo são a pressão média, P , e a saturação da fase água, s_w . Ambas equações são acopladas por meio da velocidade total do sistema, U , na equação da saturação e da dependência de s_w nos coeficientes da equação da pressão.

2.4 Simulação Numérica em Reservatórios Petrolíferos

O entendimento do escoamento e de outros fenômenos de transporte em meios porosos é de grande interesse em engenharia de petróleo. Dentre os trabalhos publicados sobre o assunto cabe destacar as mais importantes, e que fazem um estudo sobre reservatórios petrolíferos e estudo sobre os métodos numéricos aplicados as leis de conservação.

WENDLAND *et al.* (2001) descreve um esquema numérico destinado à simulação de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos (DOUGLAS *et al.*, 1997; WENDLAND e FLENSBERG, 2003; FURTADO e PEREIR, 2003). O sistema de EDPs resultante do balanço de massa para as diferentes fases é transformado em um problema equivalente, conforme proposto por PEACEMAN (1977), cuja solução numérica é obtida pela técnica de operator-split. A idéia do operator-split consiste em separar a equação de advecção e difusão em uma parte hiperbólica e outra parabólica. A parte hiperbólica é aproximada por um esquema explícito, de forma que as componentes de alta frequência da solução não sejam amortecidas e as equações da pressão e da saturação sejam numericamente desacopladas. Para a equação parabólica, um esquema implícito é utilizado, de modo a contornar os critérios de estabilidade. Uma combinação dos métodos de elementos finitos e volumes finitos é utilizada para aproximação espacial do problema. A viabilidade do esquema desenvolvido é demonstrado para um problema típico da Engenharia de Petróleo.

COUTINHO (2002) apresentou uma metodologia numérica para realizar simulações de reservatórios de petróleo. As equações diferenciais que compõem o modelo isotérmico black-oil são escritas na formulação em frações mássicas para um caso bifásico imiscível (óleo-água) e transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas não-ortogonais, sem a consideração dos termos capilares e gravitacionais nos potenciais de fase (SANTOS, 1998). O sistema de equações discretizadas, obtido através do método dos volumes finitos, é resolvido de forma totalmente implícita. Em cada passo de tempo, as equações de conservação da massa para os componentes óleo e água são resolvidos para a fração mássica e a pressão do óleo.

ABREU (2003) apresentou uma solução numérica do escoamento trifásico em reservatório petrolífero, onde as simulações numéricas capturaram corretamente ondas transicionais que dependem fortemente da difusão física presente no modelo. Mostrando-se bastante preciso e eficiente, a aplicação da nova metodologia, que baseia-se na decomposição de operadores em dois níveis permitindo que passos de tempos distintos sejam utilizados para as etapas transporte, difusão e velocidade-pressão, que resultou desta decomposição. outro trabalho de ABREU *et al.* (2006) incorporaram os aspectos das heterogeneidades geológica presentes nos meios porosos naturais e que estão incorporados nas equações governantes.

ANDRADE (2003) trabalhou com um procedimento usado para aumentar o fator de recuperação de óleo num reservatório petrolífero que é introduzir ar em poços injetores a fim de manter o gradiente de pressão e expelir o óleo para os poços produtores. Este procedimento usualmente conduz a um processo de oxidação lenta e torna-se necessário por questões de segurança, garantir que todo o oxigênio seja consumido antes de atingir os poços produtores (SOUZA *et al.*, 2002). Apresentou um modelo matemático para uma situação simplificada de recuperação térmica por oxidação para um escoamento linear bifásico num meio poroso. Neste modelo, alguns efeitos físicos importantes serão omitidos, como os da compressibilidade e das perdas laterais de calor para a formação rochosa, sendo, no entanto, incluídas a condução longitudinal de calor, a força gravitacional e a pressão capilar entre as fases. Foi feita também a suposição que o gás injetado consiste de oxigênio puro. Quando o oxigênio entra em contato com o óleo ocorre uma reação exotérmica gerando CO_2 , o qual é instantaneamente e totalmente dissolvido na fase óleo. Daí a necessidade de ferramentas de simulação numérica para fazer a previsão da eficiência e de segurança deste processo (MOTA, 1998; SOUZA *et al.*, 2001).

BARBOSA (2004) considerou um modelo matemático para uma situação idealizada de um escoamento bifásico (água-óleo) unidimensional num meio poroso sujeito ao efeito de histerese, o qual está relacionado ao fato de que, quando a água está sendo injetada e embebendo o meio poroso deve ser usada um tipo de função de permeabilidade relativa para a fase óleo e, quando a água está sendo drenada, outra função de permeabilidade reativa do óleo deve ser usada, surgindo daí um problema interessante na modelagem matemática (MARCHESIN e PLOHR, 1999; MARCHESIN e PLOHR, 2001; PLOHR *et al.*, 2001). As soluções analíticas do problema de Riemann para o sistema de equações diferenciais parciais que modela o fluxo com histerese são

obtidos, na qual são utilizados para validar o método numérico de Godunov corrigido, que é um método numérico conservativo no qual capta com eficiência a localização das discontinuidades (ondas de choque) que aparecem nos problemas, pois esse método está baseado em soluções de problemas de Riemann. A solução do modelo físico obtido pelo método numérico fornece uma ótima aproximação comparada com a solução analítica (SOUZA *et al.*, 1999; PLOHR *et al.*, 2002).

CAPÍTULO 3

Metodologia

Com o intuito de analisar a influência do escoamento em meio poroso heterogêneo, ou seja, das características físicas dos materiais constituintes do reservatório petrolíferos (permeabilidade da rocha). Muitas questões importantes da engenharia de petróleo dependem da resolução bem-sucedida desse fenômeno, resultando numa maior segurança e otimização quanto ao plano de exploração do reservatório de petróleo. Portanto, foi desenvolvida uma modelagem para o processo de recuperação avançada de petróleo conhecida como modelo de injeção de água considerado o seguinte esquema de injeção de malha de cinco pontos (five-spot). Ao final desta foi construída uma ferramenta computacional utilizando o software MatLab 6.0. Nela foi implementada através de uma discretização das equações que modela o problema proposto pelo método de volumes finitos. Neste capítulo, portanto, foram apresentadas as principais etapas para se atingir os objetivos pretendidos.

3.1 Descrição Física

O sistema de EDPs representa o modelo físico, e foi preciso adicionar condições auxiliares, de forma a caracterizar a situação modelada. Essas condições foram definidas de acordo com o problema e as condições iniciais e de fronteiras.

3.1.1 Definição do Problema

O processo de recuperação de óleo de um reservatório petrolífero, por meio de injeção de água/gás em poços injetores, tem por finalidade manter o gradiente de pressão no reservatório e deslocar o óleo contido no meio poroso na direção dos poços produtores. Dentre as diferentes possibilidades de arranjos de poços de injeção e produção no processo de recuperação secundária de um reservatório, o presente trabalho, optou pelo arranjo de uma malha de cinco pontos (“five-spot”) conforme ilustrado na Figura 3.1(a). Esta malha é formada por cinco poços distribuídos em um quadrado, sendo quatro poços de injeção situados nos vértices e o poço produtor localizado no centro do mesmo. Ao se injetar o fluido (água ou gás) através do poço de injeção as distribuições de saturações dos fluidos ao longo do reservatório são modificadas devidas à movimentação natural dos fluidos nele contido (ALLEN *et al.*, 1988; ROSA *et al.*, 2001; THOMAS, 2001).

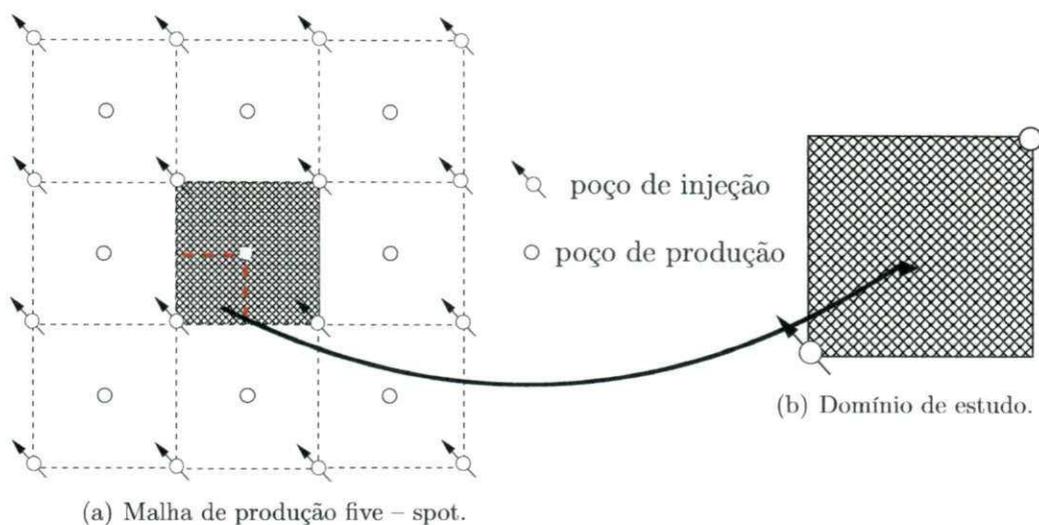


Figura 3.1 - Representação do modelo de injeção em uma malha de cinco pontos

Considerando o arranjo de uma malha de cinco pontos (“five-spot”) ver a Figura 3.1(a), sendo a malha base um quadrado com cinco poços, um em cada vértice (poço injetor) e um localizado no centro (poço produtor). O fluido deslocante (água/gás) é injetado na própria zona de óleo, alternando-se drasticamente a distribuição de saturação e a movimentação natural dos fluidos no reservatório.

A Figura 3.1(b) apresenta o domínio de estudo adotado no presente trabalho, o qual representa um quarto (1/4) de um quadrante da malha de produção na malha de cinco pontos (“five-spot”), conforme área hachurada Figura 3.1(a). A escolha do referente domínio foi baseado na seguintes considerações:

- O reservatório era inicialmente saturado com óleo;
- As condições dos poços de injeção nos vértices eram iguais;
- A distribuição da permeabilidade em 1/4 do quadrante era igual aos outros 3/4 da malha de cinco pontos.

3.2 Modelo Matemático para o Escoamento Bifásico

O modelo matemático utilizado no presente trabalho corresponde a uma modificação do modelo proposto por WENDLAND *et al.* (2001) representado pelas Equações

(2.92). A descrição do escoamento bifásico em um domínio delimitado pelas fronteiras (ver a Figura 3.1(b)), é descrito pelo sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) que consiste em combinar as seguintes equações:

- Equação da Continuidade

$$\nabla U = 0 \quad (3.1a)$$

em que as relações constitutivas são:

- Velocidade da fase água

$$U_w = f_w U - h_w \nabla s_w \quad (3.1b)$$

- Velocidade total

$$U = K \left(-\lambda \nabla p + \frac{\lambda_w - \lambda_o}{2} \frac{dP_c}{ds_w} \nabla s_w \right) \quad (3.1c)$$

e a Equação da saturação da água

$$\frac{\partial(\phi s_w)}{\partial t} + \nabla \cdot U_w = 0 \quad (3.1d)$$

onde s_w , p , K , f_w , λ_w , λ_o , λ , p_c e c_t correspondem respectivamente a saturação de água, pressão média, permeabilidade absoluta, as mobilidade da água, do óleo e total, a pressão capilar e a compressibilidade total.

3.2.1 Condições de Contorno e Inicial

Considerando que o meio poroso pode ser representado pelo domínio bidimensional retangular $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ representado pela Figura 3.2, as seguintes condições de contorno foram usadas:

- Injeção de água, estabelecendo um escoamento diagonal.

$$U \cdot n = -q \text{ em } 0 \leq x \leq L_{x_1} \text{ e } 0 \leq y \leq L_{y_1}, \quad (3.1e)$$

a água é injetada a uma taxa constante $-q$ através da fronteira de Ω , onde n é um vetor normal unitário exterior à fronteira $\partial\tilde{\Omega} = (0 \leq x \leq L_{x_1}) \cup (0 \leq y \leq L_{y_1})$.

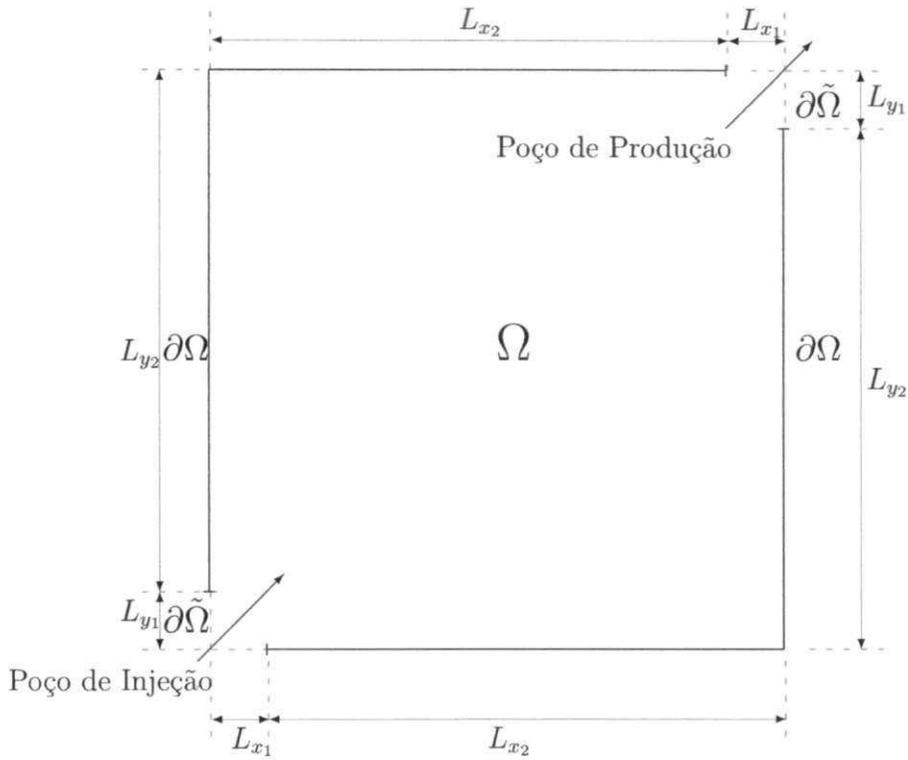


Figura 3.2 - Domínio para o modelo proposto.

- b) Condições de simetria, ou seja, derivada normal da pressão e saturação de água nula nas fronteiras $\partial\Omega$,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \eta}(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial s_w}{\partial \eta}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad \text{em } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (3.1f)$$

- c) A distribuição de saturação de água no poço injetor é definida por:

$$s(x, y, t) = 1 \quad \text{em } (x, y) \in \partial\tilde{\Omega} \quad (3.1g)$$

Para a condição inicial empregada no tempo inicial $t = 0$, tem-se:

a) A pressão é tomada como uniforme, ou seja

$$P(x, y, 0) = P_r, \text{ (Como nível de referência de pressão),} \quad (3.1h)$$

onde P_r é a pressão de referência.

b) Os fluidos estão em repouso, isto é,

$$U(x, y, 0) = 0, \text{ (Velocidade da fase água).} \quad (3.1i)$$

c) A distribuição inicial de saturação de água é dada por:

$$s(x, y, 0) = s(x, y) \text{ em } (x, y) \in \Omega. \quad (3.1j)$$

Visando avaliar o modelo matemático proposto a uma aplicação prática na indústria de petróleo, foram escolhidas três situações distintas para averiguar a relação do avanço da frente de saturação de água com a variação da permeabilidade da rocha nos diferentes tipos de materiais constituintes. A primeira e segunda situação é definida num domínio Ω sendo formado por duas regiões de permeabilidade distintas ou não (ver, Figura 4.18), sendo uma região quadrada e localizada no centro do reservatório com uma permeabilidade maior do que aquela que a rodeia numa razão (K_1/K_2) de acordo com as Tabelas 3.1 e 3.2. A segunda situação é semelhante por WENDLAND *et al.* (2001). E por fim, a terceira situação onde foi definida uma permeabilidade da rocha aleatória variando entre os valores mínimos $1, 0.10^{-12}m^2$ e máximos $1, 0.10^{-8}m^2$, cujo os valores estão em Anexo.

Estas três situações foram distribuídas em casos diferentes, conforme estão apresentados na Tabela 1 para um valor de permeabilidade da rocha constante $K_1 = 1, 0.10^{-7}m^2$.

Já para a função de permeabilidade relativa da fase α , foi utilizado o modelo de Corey que é dependente apenas da saturação da própria fase α . Os seus valores estão na Tabela 3.3

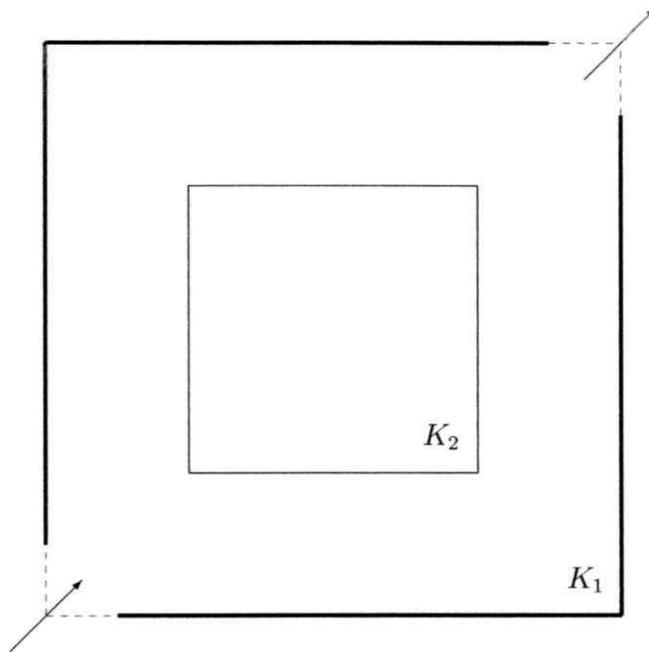


Figura 3.3 - Protótipo proposto por WENDLAND *et al.* (2001).

TABELA 3.1 - Descrição das Situações

Situação	Caso	K_1/K_2	ϕ
1	1	1	0,2
	2a	1000	0,2
2	2b	10	0,2
	2c	2	0,2
3	3	aleatório	0,2

Aceita-se que a pressão capilar depende apenas da saturação de água, isto é, $P_c(s) = P_o - Pw$. Adotando o modelo definido por —, ou seja,

$$P_c(s) = A \ln \left(\frac{s + \kappa}{1 + \kappa} \right) \quad (3.2a)$$

sendo

$$A = \frac{\tilde{P}_c}{\ln \left(\frac{\kappa}{(1 + \kappa)} \right)} \quad (3.2b)$$

onde κ é tomada normalmente como 10^{-3} , e \tilde{P}_c é a pressão capilar máxima.

TABELA 3.2 - Propriedades Físicas

Fluido α	$\rho_\alpha [Kg/m^3]$	$\mu_\alpha [Pa.s]$
<i>a</i> (água)	1000	0.001
<i>o</i> (óleo)	1000	0.001

FONTE: (WENDLAND *et al.*, 2001)TABELA 3.3 - Permeabilidade Relativa da Fase α (modeo de Corey)

α	p	$k(s_\alpha) = s_\alpha^p$
<i>w</i>	2	s_w^2
<i>o</i>	2	s_o^2

3.2.2 Algoritmo para Solução do Sistema de Equações

A metodologia a ser abordada para obtenção da solução numérica, consiste no seguinte esquema: Na equação de saturação de água (3.1d) será utilizada uma decomposição de operadores (“operator splitting”) em duas partes, separando a equação de advecção e de difusão (ABREU, 2003), e na equação da pressão – velocidade (3.1a), um método iterativo será empregado, de modo que as equações da pressão – velocidade e de saturação de água sejam numericamente desacopladas (WENDLAND *et al.*, 2001; ABREU, 2003). Portanto, os termos responsáveis pela advecção e difusão na Equação (3.1d), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$U_w = U_w^{\text{adv}}(s_w, U) + U_w^{\text{dif}}(s_w) \quad (3.3a)$$

tendo as seguintes expressões:

$$U_w^{\text{dif}}(s_w) = -h_w \nabla s_w \quad (3.3b)$$

$$U_w^{\text{adv}}(s_w, U) = f_w U \quad (3.3c)$$

Em cada intervalo de tempo, a equação de saturação de água (3.1d) será aproxi-

gada é o método de volumes finitos (MALISKA, 1995; THOMAS, 1999; BORTOLI, 2000; FORTUNA, 2000), pois se baseia na discretização das equações através de balanços nos volumes e conservação das propriedades em nível de volume elementar. Sendo, assim, uma técnica numérica largamente empregada em problemas de escoamento de fluidos.

3.3.1 Aproximação do Sistema de Equações Governantes do Escoamento Bifásico

As equações governantes foram discretizadas com base em uma malha cartesiana de $n_i \times n_j$ volumes, em que n_i e n_j são, respectivamente, o número de volumes nas direções x e y .

Na metodologia dos volumes finitos obtém-se a aproximação numérica da equação diferencial parcial a partir de suas integrações no tempo e no espaço sobre o volume de controle elementar Ω apresentada na Figura 3.4, que em conjunto com a representação virtual do domínio físico ou malha, por exemplo o ilustrado na Figura 3.5, originou em um sistema de equações, que com as devidas condições de contorno, conduziu a obtenção dos resultados empregando, para isso, um método iterativo.

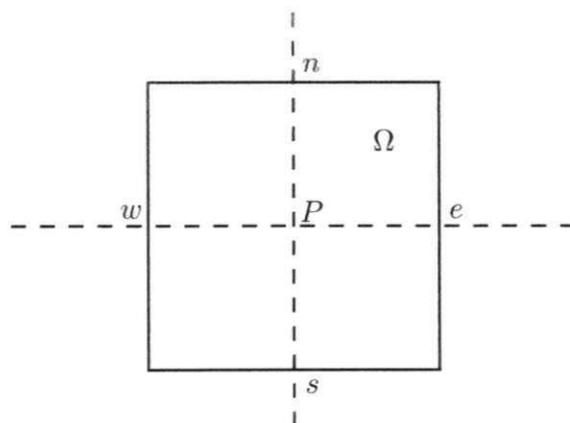


Figura 3.4 - volume de controle elementar Ω

Na equação de difusão, Equação 3.4b, aplica-se uma estratégia implícita de solução, sendo assim, não se tem restrição na escolha do passo de tempo. Enquanto na equação do transporte foi aplicado um esquema tipo *upwind*.

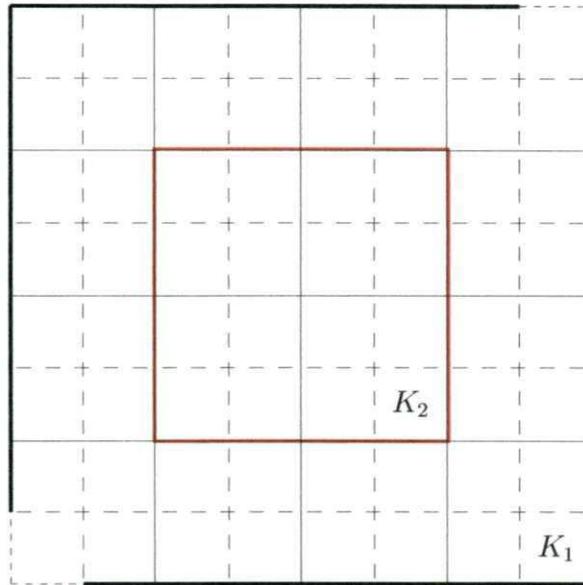


Figura 3.5 - Domínio físico discretizado ou malha.

A discretização espacial do problema velocidade-pressão foi feita por volumes finitos obtendo-se, assim, o campo de velocidade e pressão em uma distribuição de permeabilidades heterogêneas.

A decomposição dos operadores do problema físico modelado pelas equações diferenciais parciais foi feita visando melhorar a eficiência computacional, onde diferentes passos de tempo são utilizados para a discretização temporal. Em outras palavras introduzidos três passos de tempo: Δt_e para o problema elíptico presente no cálculo dos campos de velocidade-pressão, Δt_t para a solução do problema hiperbólico associado ao transporte de fluido e Δt_d para a incorporação dos efeitos difusivos presente no sistema água-óleo.

Sendo $\Delta t_e = m_1 \Delta t_d = m_1 m_2 \Delta t_t$, onde m_1 e m_2 são números inteiros positivos, isto é, vale a relação $\Delta t_e \geq \Delta t_d \geq \Delta t_t$, logo a discretização da variável temporal é definida por:

$$t_m = m \Delta t_e, t_n = n \Delta t_d \text{ e } t_{n,\epsilon} = t_n + \epsilon \Delta t_t, 0 \leq \epsilon \leq n \quad (3.5)$$

Na Figura 3.6 esta ilustrado o esquema de decomposição de operador, bem como identifica a equação diferencial parcial que é resolvida em cada um dos passos de tempo Δt_e , Δt_t e Δt_d , respectivamente.

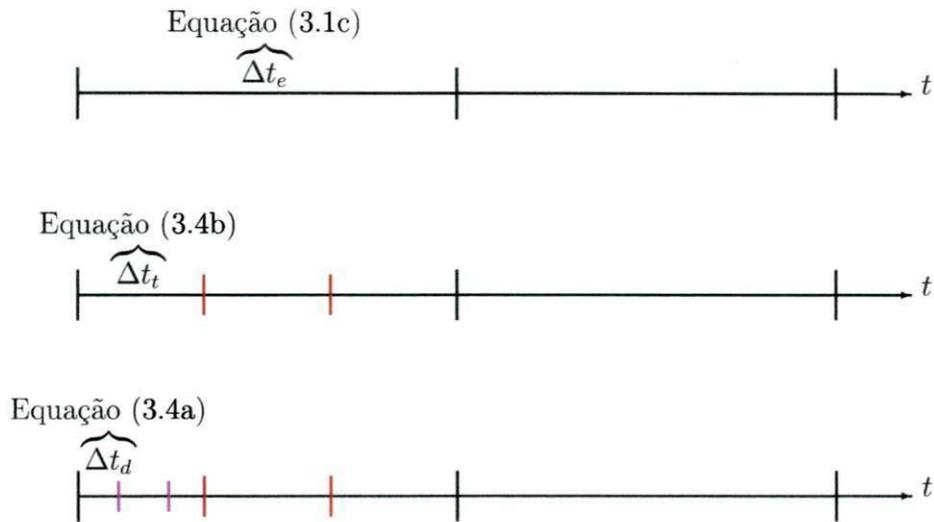


Figura 3.6 - algoritmo da decomposição de operador (malha temporal).

3.3.1.1 Discretização da Equação Convectiva

Ao se reescrever a Equação (3.4a) na forma conservativa em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) bidimensional, então:

$$\frac{\partial(\phi s)}{\partial t} = -\frac{\partial(u f(s))}{\partial x} - \frac{\partial(v f(s))}{\partial y} \quad (3.6)$$

Ao se Integra a Equação (3.6) no volume de controle (conforme mostrado na Figura 3.4) e no tempo, na forma

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\phi s)}{\partial t} dx dy dt = - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left\{ \frac{\partial(u f(s))}{\partial x} + \frac{\partial(v f(s))}{\partial y} \right\} dx dy dt \quad (3.7a)$$

A discretização temporal na Equação (3.7a) foi aproximada pelo método de Euler

explícito, no qual todos os termos que envolvem a variável saturação de água (s) e as componentes de velocidades médias intersticiais u e v nas respectivas direções x e y empregando o no nível de tempo θ , conforme discutido na seção 3.2.2.

Discretizando o termo de acumulo, ou seja, o termo do lado esquerdo da Equação (3.7a), tem-se:

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\phi s)}{\partial t} dt dx dy = \phi_P (s_P^{\theta+1} - s_P^\theta) \Delta x \Delta y \quad (3.7b)$$

O termo do lado direito da (3.7a) foram aproximadas no nível de tempo θ , começando pelo termo convectivo na direção x chegando á:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(f(s)u)}{\partial x} dx dy dt \approx (\Delta y)(\Delta \theta) (u_e f(s_e) - u_w f(s_w)) \quad (3.7c)$$

em que, as velocidades nas faces do volume de controle Ω u_e e u_w são consideradas conhecidas (conforme a Figura 3.7).

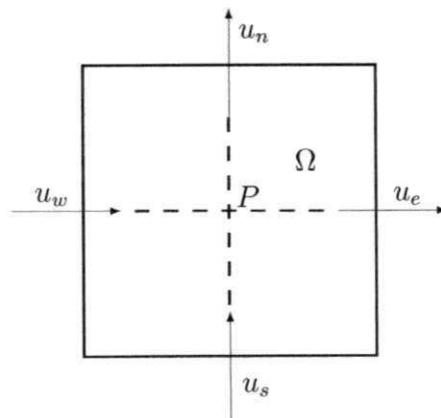


Figura 3.7 - volume de controle e vizinhanças

Os valores que o valor das funções nas faces do volume de controle, de acordo com a Figura 3.7, foram obtidas empregando a função de interpolação WUDS (Weighted Differencing Scheme), aproximando a variável s para as faces oeste e leste do volume

de controle:

$$s_e = \frac{1}{2} [(1 + \alpha_e) s_P + (1 - \alpha_e) s_E] \quad (3.7d)$$

$$s_w = \frac{1}{2} [(1 + \alpha_w) s_W + (1 - \alpha_w) s_P] \quad (3.7e)$$

sendo α_j definido, respectivamente, por: $\alpha_j = \text{senal}(u_j)$, onde

$$\text{senal}(u_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } u_j < 0 \\ 1, & \text{se } u_j \geq 0 \end{cases} \quad \text{para } j = w, e \quad (3.7f)$$

portanto, a função de interpolação, depende do sinal do vetor velocidade u .

De forma análoga, integrando o termo convectivo na direção y da Equação (3.7a) foi discretizada:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(f(s)v)}{\partial y} dy dx dt \approx (\Delta x) (\Delta \theta) (v_n f(s_n) - v_s f(s_s)) \quad (3.7g)$$

sendo v_s e v_n as velocidade nas faces do volume de controle conhecidas.

A saturação de água (s) são aproximadas nas faces sul e norte do volume de controle usando a seguinte função interpolação

$$s_n = \frac{1}{2} [(1 + \alpha_n) s_P + (1 - \alpha_n) s_N] \quad (3.7h)$$

$$s_s = \frac{1}{2} [(1 + \alpha_s) s_S + (1 - \alpha_s) s_P] \quad (3.7i)$$

onde α_i é definido respectivamente por $\alpha_i = \text{senal}(v_i)$, sendo

$$\text{senal}(v_i) = \begin{cases} -1, & \text{se } v_i < 0 \\ 1, & \text{se } v_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{para } i = s, n \quad (3.7j)$$

Substituindo as expressões (3.7b), (3.7c) e (3.7g) na Equação (3.7a) e reagrupando,

chega-se a versão discreta da equação da saturação da água, dada por:

$$s_P^{\theta+1} = s_P^\theta - \frac{\Delta\theta}{\Delta x \Delta y} \{ \Delta y (f(s_e^\theta) u_e^\theta - f(s_w^\theta) u_w^\theta) + \Delta x (f(s_n^\theta) v_n^\theta - f(s_s^\theta) v_s^\theta) \} \quad (3.8)$$

3.3.1.2 Discretização da Equação Difusiva

A discretização da Equação (3.4b), para um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional, escrita na forma conservativa é dada por:

$$\frac{\partial(\phi s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.9)$$

De forma análoga a seção anterior. Integra-se a Equação (3.9) no volume de controle Ω e no tempo, nesta Equação (3.9) foi aplicada na variável temporal o método Euler implícito. Quando escrito para todos os pontos do domínio Ω a Equação (3.9) mais as condições de contorno dá origem a uma matriz de coeficientes pentadiagonal. Para a resolução do sistema de equações algébricas, oriundas da discretização, que foi definido um método de resolução de acordo com a necessidade e complexidade do problema. o método adotado foi o método iterativo ADI (Alternating Directon Implicit), o qual fatora a matriz pentadiagonal em duas matrizes tridiagonais (ver Apêndice B) permitindo, assim, uma redução no custo computacional da solução numérica. Desse modo, cada passo Δt no tempo é feito em duas etapas, conforme está ilustrado na Figura 3.8):

A seguir é descrito estas duas etapas:

- a) Inicialmente, o termo temporal da Equação (3.9) envolvendo a saturação foi discretizado no nível tempo $\theta + 1/2$

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\frac{\Delta t}{2}} \frac{\partial(\phi s)}{\partial t} dt dx dy = \phi_P (s_P^{\theta+1/2} - s_P^\theta) \Delta x \Delta y \quad (3.10)$$

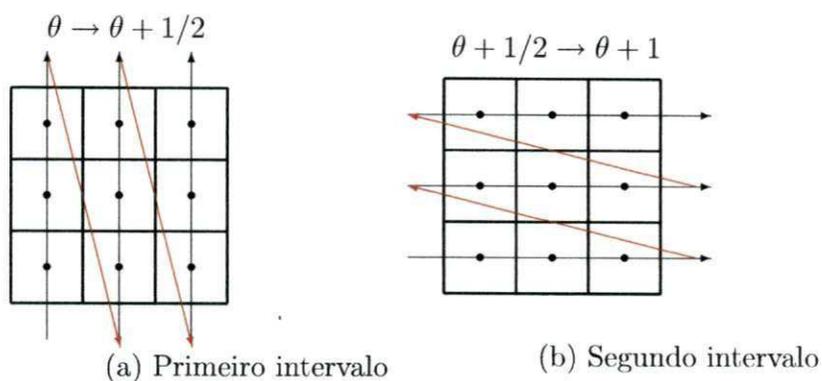


Figura 3.8 - Sequência de cálculo do método ADI.

As derivadas espaciais na direção x foi aproximada no nível de tempo θ e na direção y no nível de tempo $\theta + 1/2$, como se segue:

$$\int_t^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx dy dt \approx \frac{1}{2} \Delta t \Delta y \left\{ \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_e^\theta - \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_w^\theta \right\} \quad (3.11)$$

$$\int_t^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_w^e \int_s^\theta \frac{\partial}{\partial y} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) dy dx dt \approx \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \left\{ \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) \Big|_n^{\theta+1/2} - \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) \Big|_s^{\theta+1/2} \right\} \quad (3.12)$$

As derivadas presentes nos termos difusivos foram aproximadas por diferenças centrais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_e^\theta &\approx \frac{s_E^\theta - s_P^\theta}{\Delta x} & \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_n^{\theta+1/2} &\approx \frac{s_N^{\theta+1/2} - s_P^{\theta+1/2}}{\Delta y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_w^\theta &\approx \frac{s_P^\theta - s_W^\theta}{\Delta x} & \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_s^{\theta+1/2} &\approx \frac{s_P^{\theta+1/2} - s_S^{\theta+1/2}}{\Delta y} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para as derivadas, obtém-se:

$$a_s s_s^{\theta+1/2} + a_P s_P^{\theta+1/2} + a_n s_N^{\theta+1/2} = \beta \quad (3.13)$$

onde os coeficientes a_s , a_P e a_n são dados por:

$$a_s = \sigma \Delta x^2 h_s^{\theta+1/2}$$

$$a_P = 1 - \sigma \Delta x^2 [h_n^{\theta+1/2} + h_s^{\theta+1/2}]$$

$$a_n = \sigma \Delta x^2 h_n^{\theta+1/2}$$

e o termo β definido pela expressão

$$\beta = a_w s_W^\theta + a_P s_P^\theta + a_e s_E^\theta$$

na qual os coeficientes a_w , a_P e a_e são expressos por:

$$a_w = -\sigma \Delta y^2 h_w^\theta$$

$$a_P = 1 - \sigma \Delta y^2 [h_w^\theta + h_e^\theta]$$

$$a_e = -\sigma \Delta y^2 h_e^\theta$$

sendo $\sigma = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2 \Delta y^2 \phi_P}$

b) Em seguida, a Equação (3.9) foi discretizada no nível de tempo $\theta + 1$, em que, a derivada espacial na direção y foi aproximada explicitamente em $\theta + 1/2$ e aproximada implicitamente em $\theta + 1$ na direção x (de acordo com a Figura 3.8b). Portanto, o sistema de equações resultante é tridiagonal. Os valores de $s_p^{\theta+1/2}$, que compõem o sistema, são obtidos com a solução das equações para todos os pontos do domínio Ω no primeiro intervalo temporal.

$$\int_s^n \int_w^e \int_{t+\frac{1}{2}\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\partial(\phi s)}{\partial t} dt dx dy = \phi_P (s_P^{\theta+1} - s_P^{\theta+1/2}) \Delta x \Delta y \quad (3.14)$$

Em seguida, as derivadas espaciais nas direções y e x foram aproximadas respectivamente nos níveis de tempo $\theta + 1/2$ e $\theta + 1$.

$$\int_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx dy dt \approx \frac{1}{2} \Delta t \Delta y \left\{ \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_e^{\theta+1} - \left(h_w \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_w^{\theta+1} \right\} \quad (3.15)$$

$$\int_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) dy dx dt \approx \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \left\{ \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) \Big|_n^{\theta+1/2} - \left(h_w \frac{\partial s}{\partial y} \right) \Big|_s^{\theta+1/2} \right\} \quad (3.16)$$

E as derivadas presentes nos termos difusivos (3.15) e (3.16) foram aproximadas por diferenças centrais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_e^{\theta+1} &\approx \frac{s_E^{\theta+1} - s_P^{\theta+1}}{\Delta x} & \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_n^{\theta+1/2} &\approx \frac{s_N^{\theta+1/2} - s_P^{\theta+1/2}}{\Delta y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_w^{\theta+1} &\approx \frac{s_P^{\theta+1} - s_W^{\theta+1}}{\Delta x} & \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_s^{\theta+1/2} &\approx \frac{s_P^{\theta+1/2} - s_S^{\theta+1/2}}{\Delta y} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (3.14), (3.15) e (3.16) na Equação (3.9) e reagrupando os termos semelhantes, obtém-se:

$$a_w s_w^{\theta+1} + a_P s_P^{\theta+1} + a_e s_E^{\theta+1} = \hat{\beta} \quad (3.17)$$

em que, os coeficientes a_w , a_P e a_e são definidos por:

$$a_w = \sigma \Delta y^2 h_w^{\theta+1}$$

$$a_P = 1 - \sigma \Delta y^2 [h_w^{\theta+1} + h_e^{\theta+1}]$$

$$a_e = \sigma \Delta y^2 h_e^{\theta+1}$$

e o termo $\hat{\beta}$ é expresso da seguinte forma

$$\hat{\beta} = a_s s_S^{\theta+1/2} + a_P s_P^{\theta+1/2} + a_n s_N^{\theta+1/2}$$

sendo a_s , a_P e a_n os coeficientes dados por

$$a_s = -\sigma \Delta x^2 h_s^{\theta+1/2}$$

$$a_P = 1 + \sigma \Delta x^2 [h_n^{\theta+1/2} + h_s^{\theta+1/2}]$$

$$a_n = -\sigma \Delta x^2 h_n^{\theta+1/2}$$

3.3.1.3 Critério de Convergencia

O modulo da diferença entre o máximo e mínimo valores da distribuição de uma grandeza representa a faixa de variação da função no domínio físico de interesse e foi usado como referencial de comparação

$$\left| \frac{\psi_P^{j+1} - \psi_P^j}{\Psi} \right| \leq \varepsilon \quad (3.18)$$

sendo ψ a grandeza calculada numericamente (pressão, velocidade, etc.) na interação j e no centro do volume P , j é o número inteiro na qual indica o nível iterativo, ε é a tolerancia e $\Psi = \psi_{\text{máx}} - \psi_{\text{mín}}$

Em todas as simulações o critério de parada adotado foi $\varepsilon = 10^{-5}$.

CAPÍTULO 4

Resultados e Discussões

Neste capítulo estão apresentados os principais resultados da simulação numérica obtida, com auxílio do aplicativo computacional MATLAB, sobre um domínio de estudo de dimensões de $300\text{ m} \times 300\text{ m}$ usando uma malha computacional de 32×32 volumes de controle. Estes resultados foram divididos em cinco casos distintos, cujas principais propriedades estão mencionadas na Tabela 3.1: Situação 1 (Caso 1) - onde foi considerada uma permeabilidade absoluta constante e igual 1.10^{-7} m^2 em todo o domínio; Na situação 2 (Casos 2(a) a 2(c)) - foi introduzido um quadrado de $112,5\text{ m} \times 112,5\text{ m}$ centralizado no domínio Ω (conforme Figura 4.18, Capítulo 3) com permeabilidade absoluta maior do que a região que a circula. Nestes três casos foram investigadas diferentes razões de permeabilidade absoluta (K_1/K_2) com valores de 1000, 10 e 2, respectivamente para os casos 2(a), 2(b) e 2(c). E finalmente, A situação 3 (Caso 3) - na qual foi considerada uma distribuição de permeabilidade absoluta randômica, a qual se aproxima mais da realidade de um reservatório.

Nas Figuras 4.1 a 4.4 estão representados os resultados de um ensaio hipotético (Caso 1) visando uma melhor compreensão do processo de deslocamento horizontal de um fluido por outro, o qual emprega um modelo físico que utiliza o esquema de injeção de cinco pontos ou "five-spot" e uma permeabilidade absoluta (K_1) constante e igual a 1.10^{-7} m^2 . Estes resultados além de terem contribuído no entendimento deste fenômeno, foram utilizados como parâmetros de referências nas análises seguintes, na presença de meios porosos heterogêneos. Ao observar cada uma das figuras para diferentes tempos de injeção, percebe-se que a água se propaga radialmente no meio poroso a partir do poço de injeção, até um determinado tempo de injeção. Este fato pode ser explicado pelo comportamento do gradiente de pressão nas proximidades deste poço que se mantém praticamente o mesmo em todas as direções, como pode ser observado nas Figuras 4.5 e 4.8, na qual estão representados os campos de pressão a diferentes tempos de injeção.

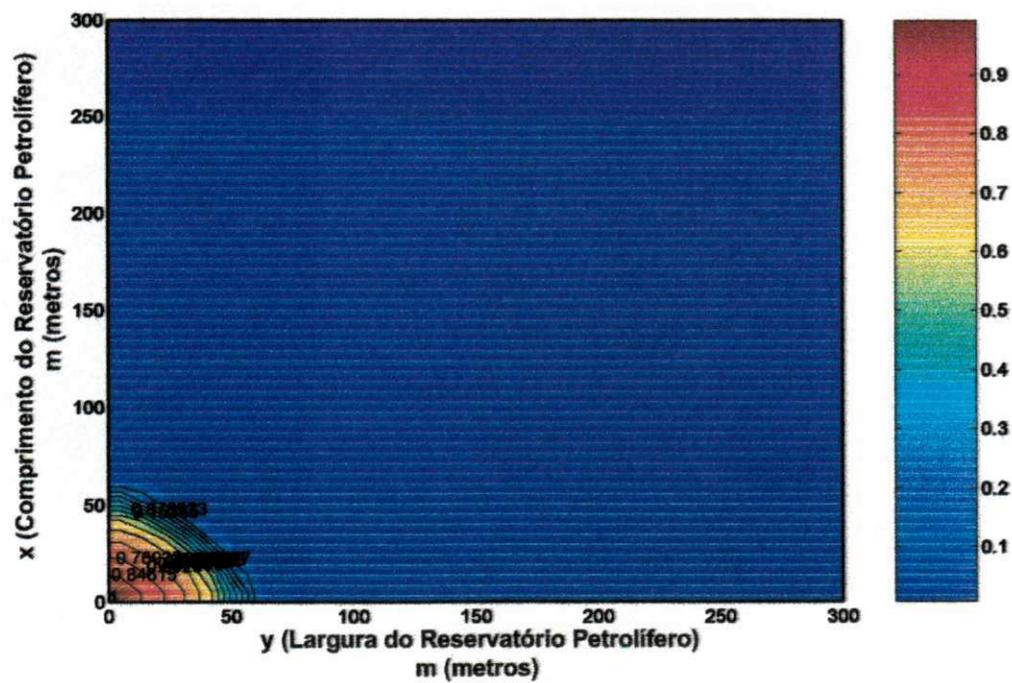
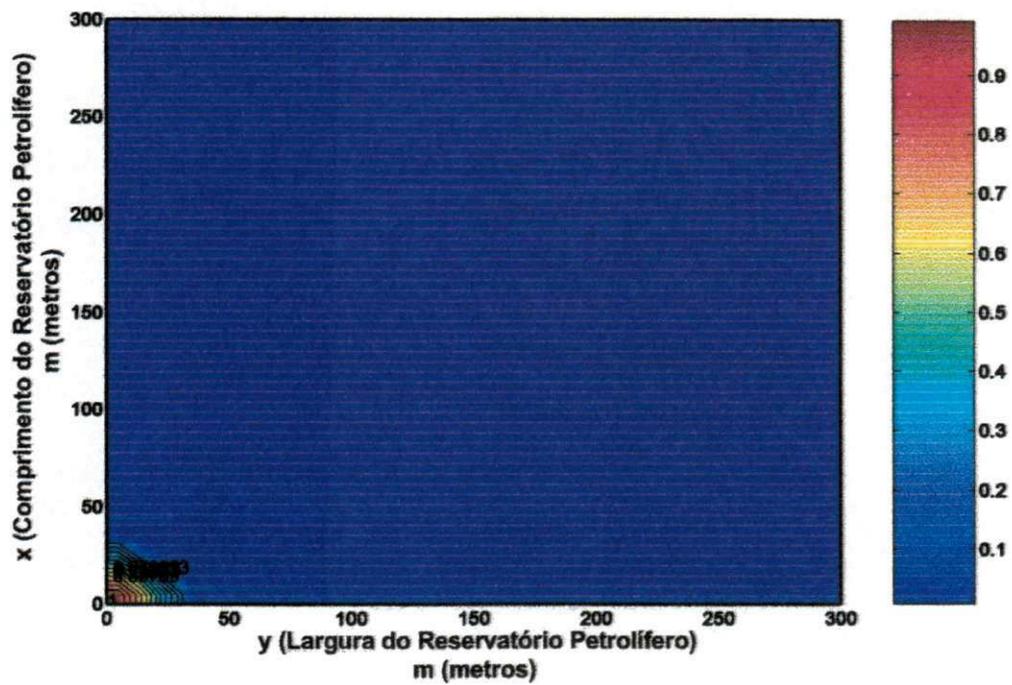


Figura 4.1 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 10 dias e 50 dias.

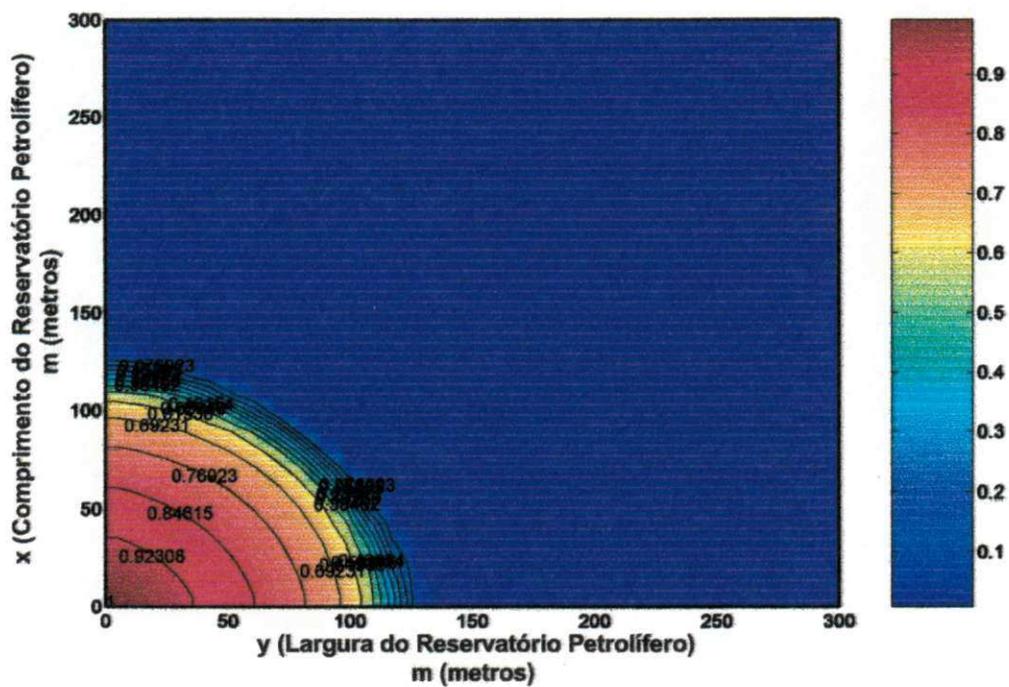
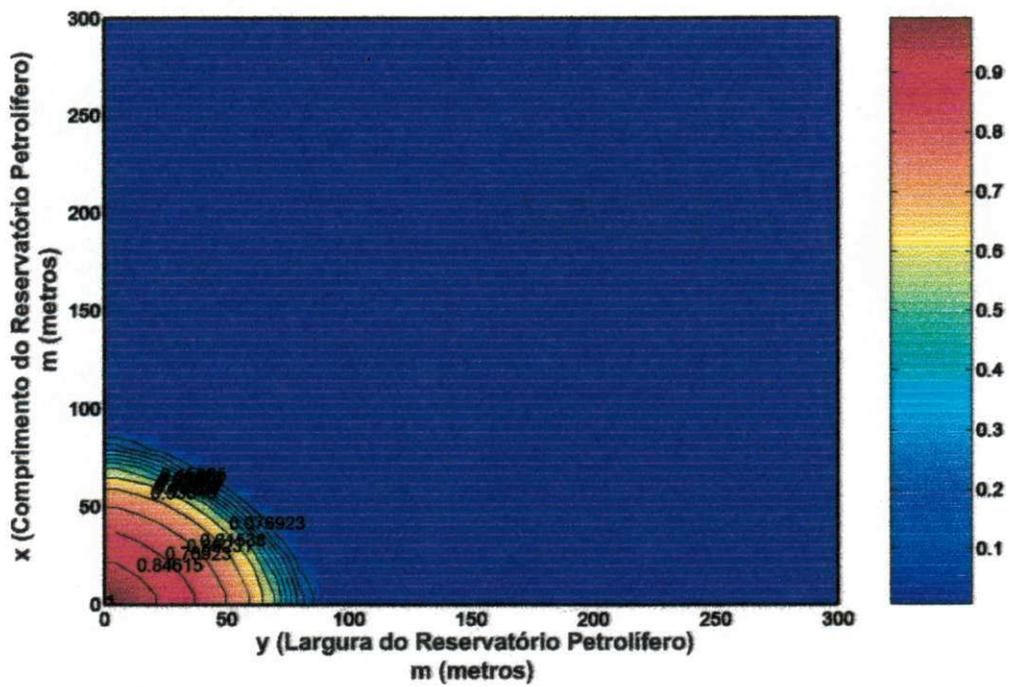


Figura 4.2 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 100 dias e 200 dias.

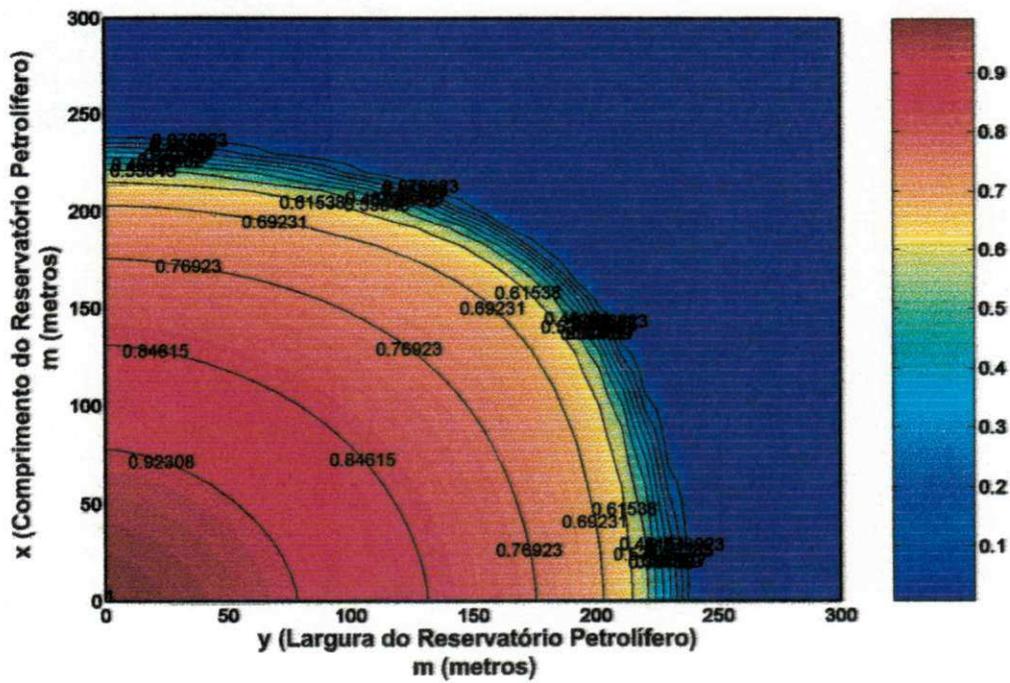
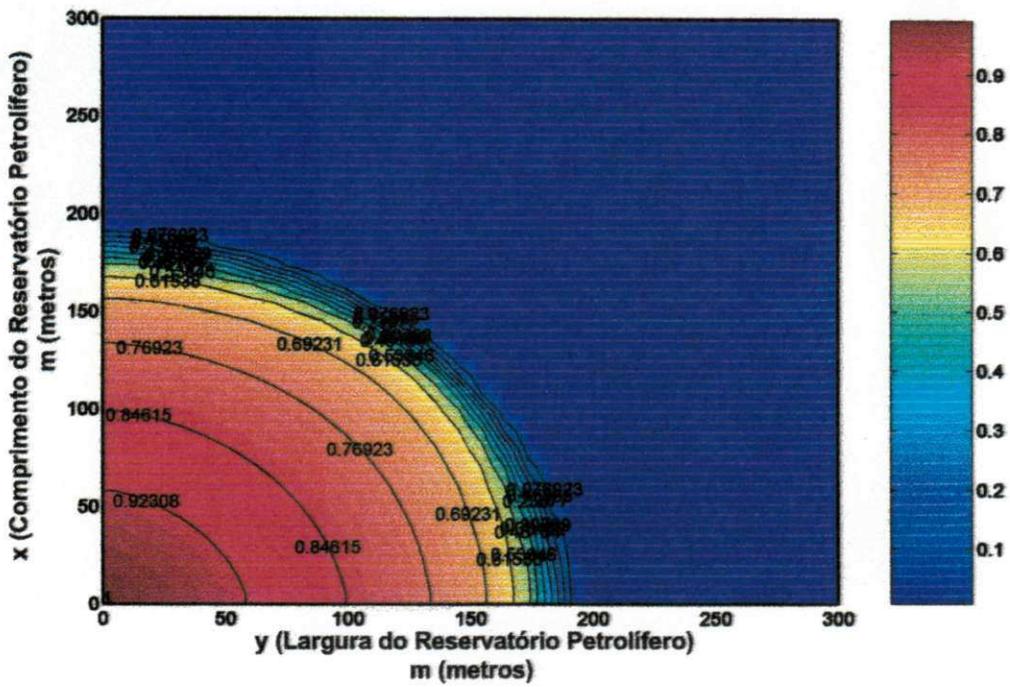


Figura 4.3 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 400 dias e 600 dias.

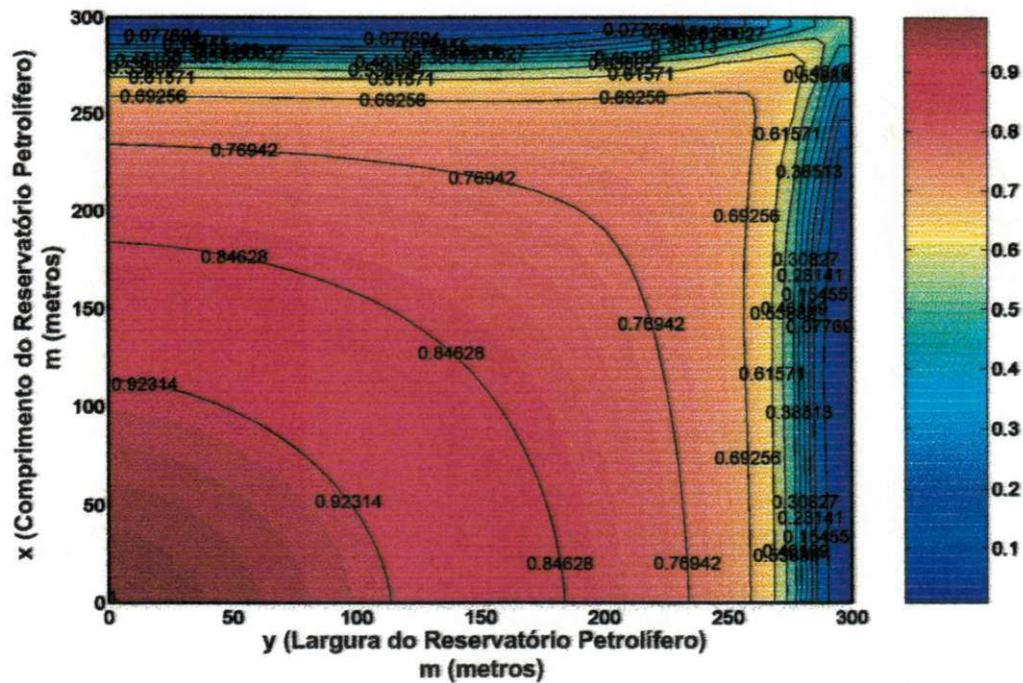
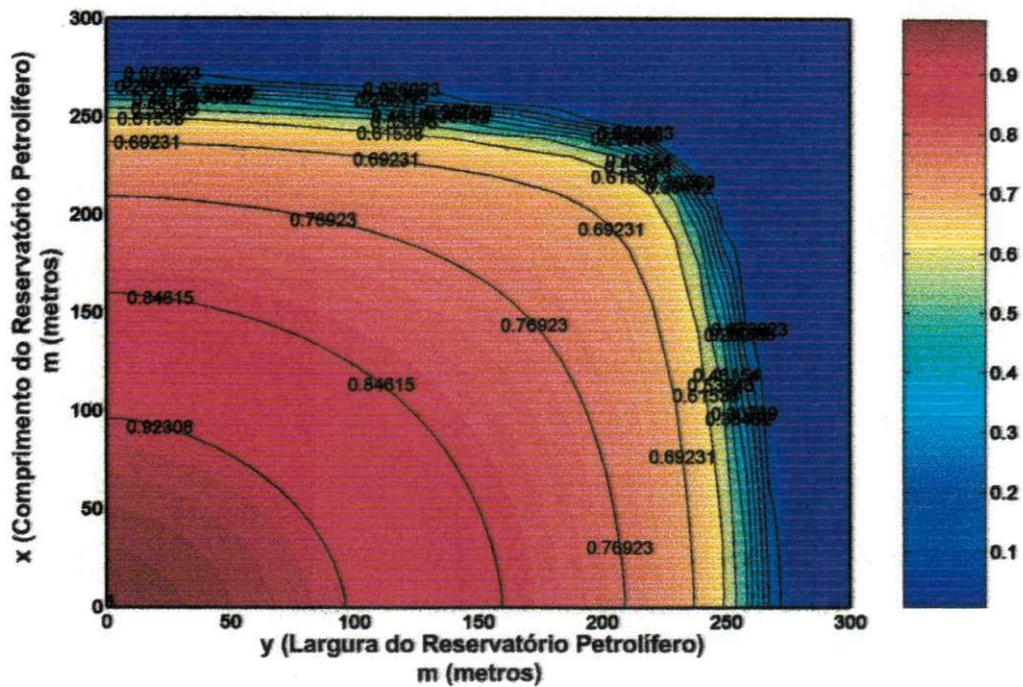


Figura 4.4 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta igual $K_1 = 1.10^{-7}$, respectivamente após 800 dias e 1000 dias.

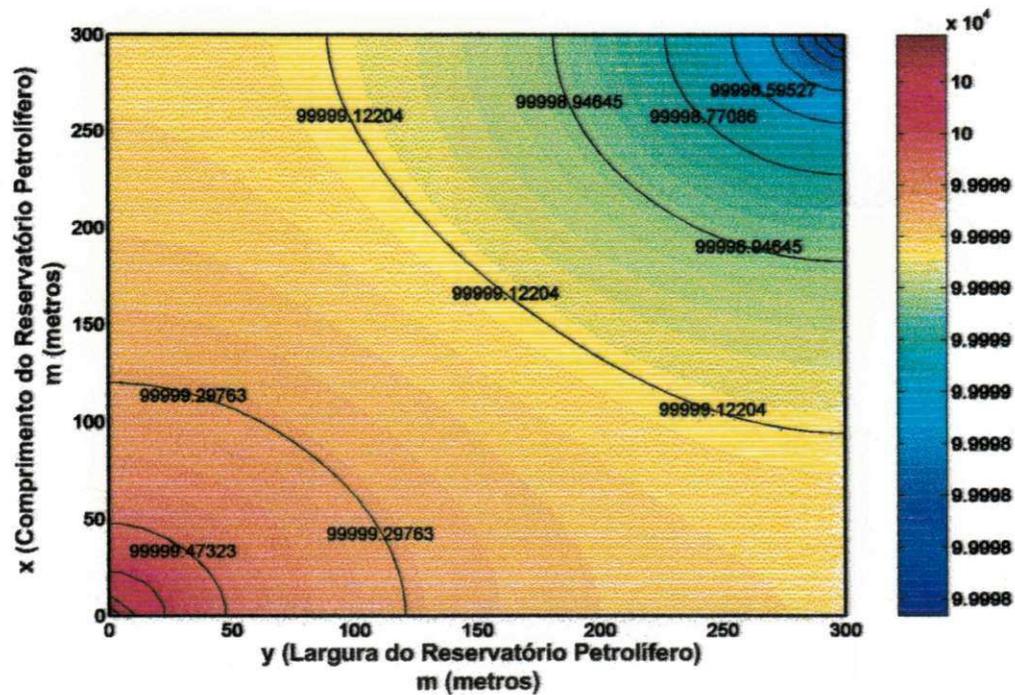
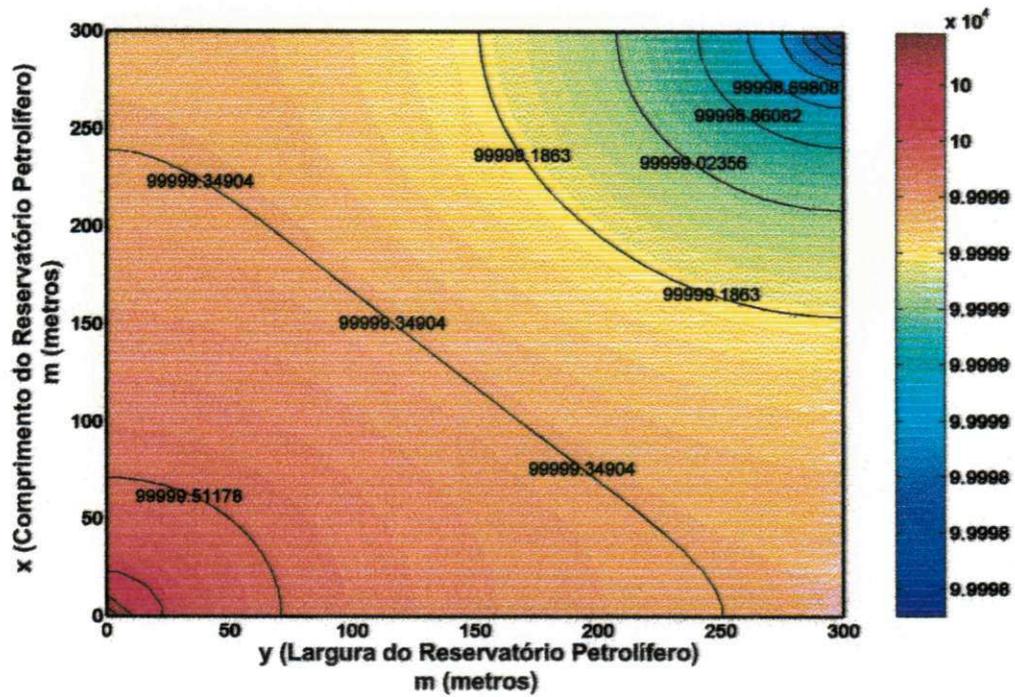


Figura 4.5 - Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10^{-7} m^2$ após 10 dias e 50 dias de injeção de água.

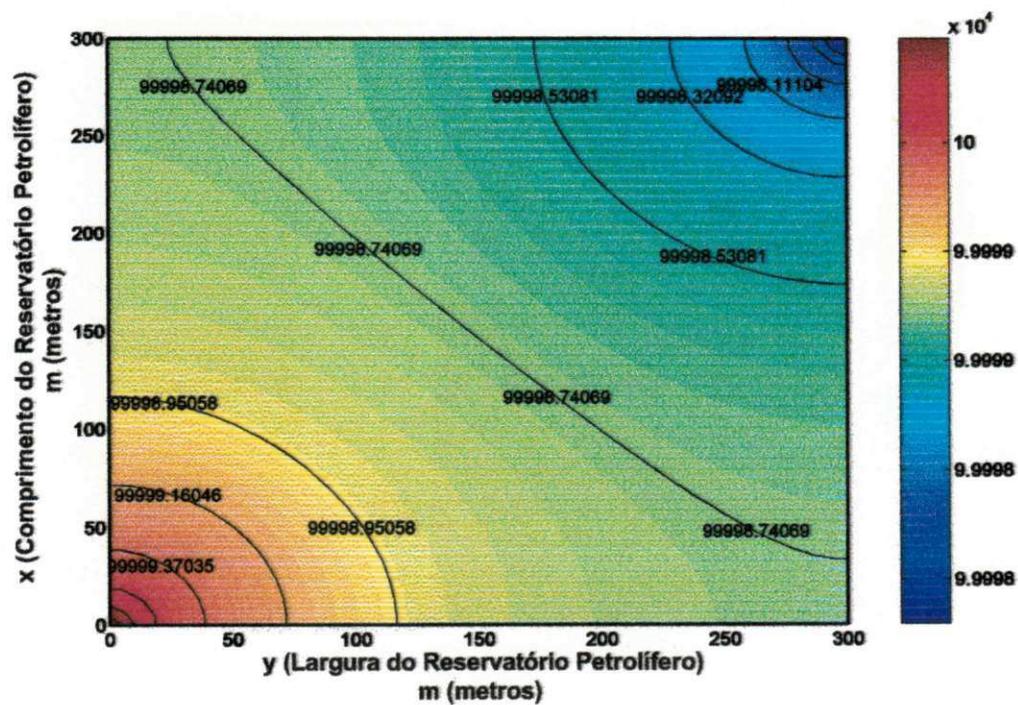
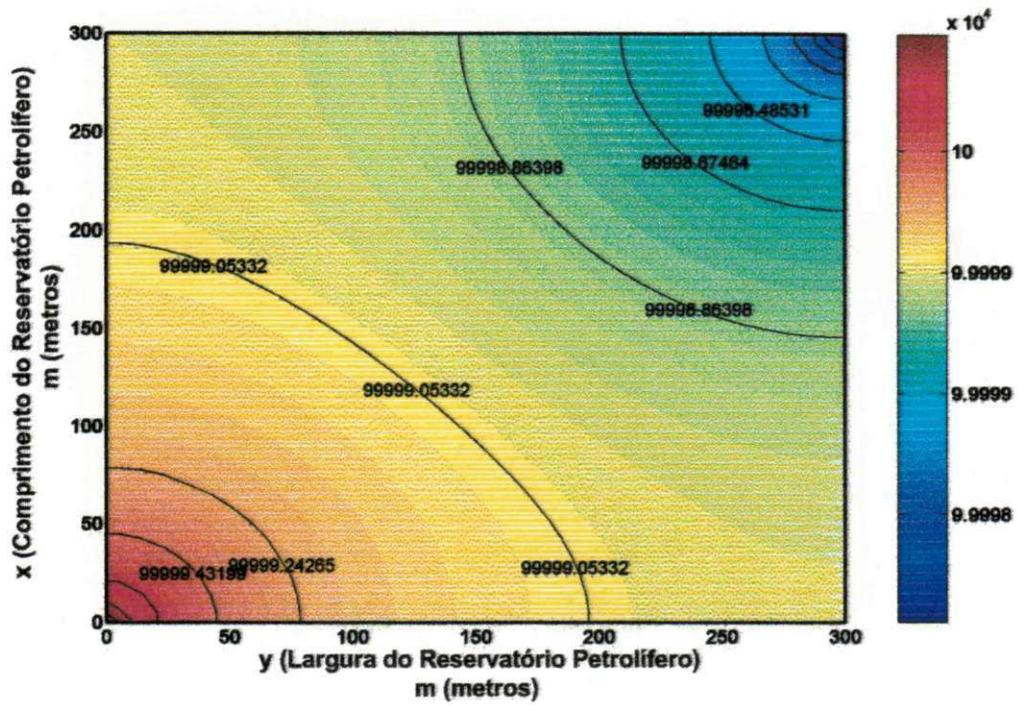


Figura 4.6 - Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K_1 = 1.10 \cdot 10^{-7} m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.

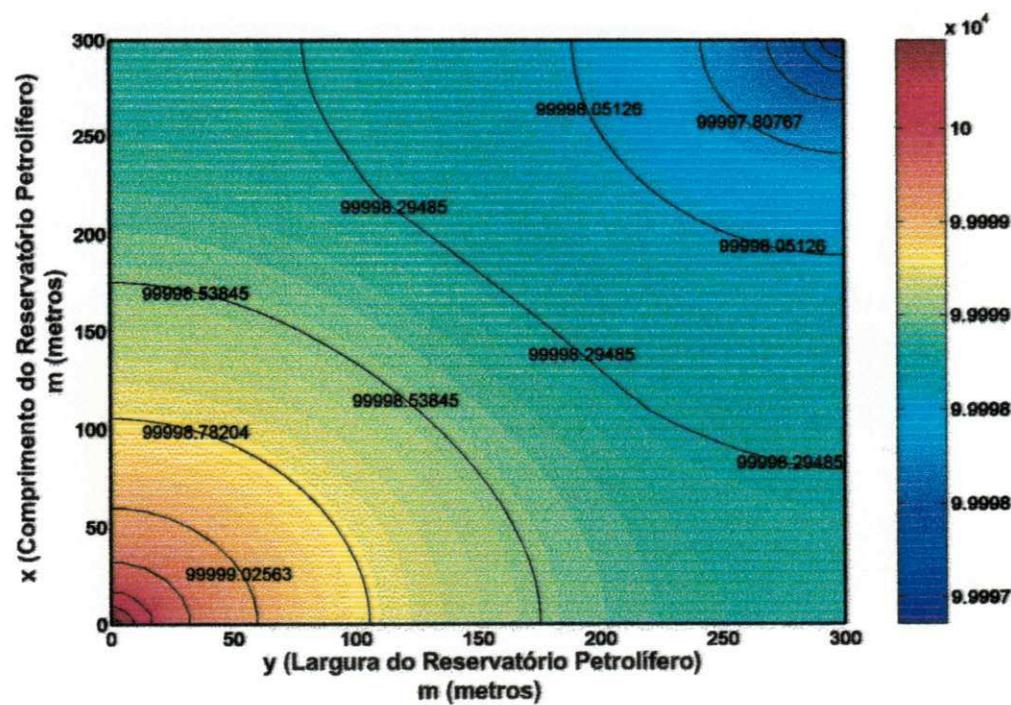
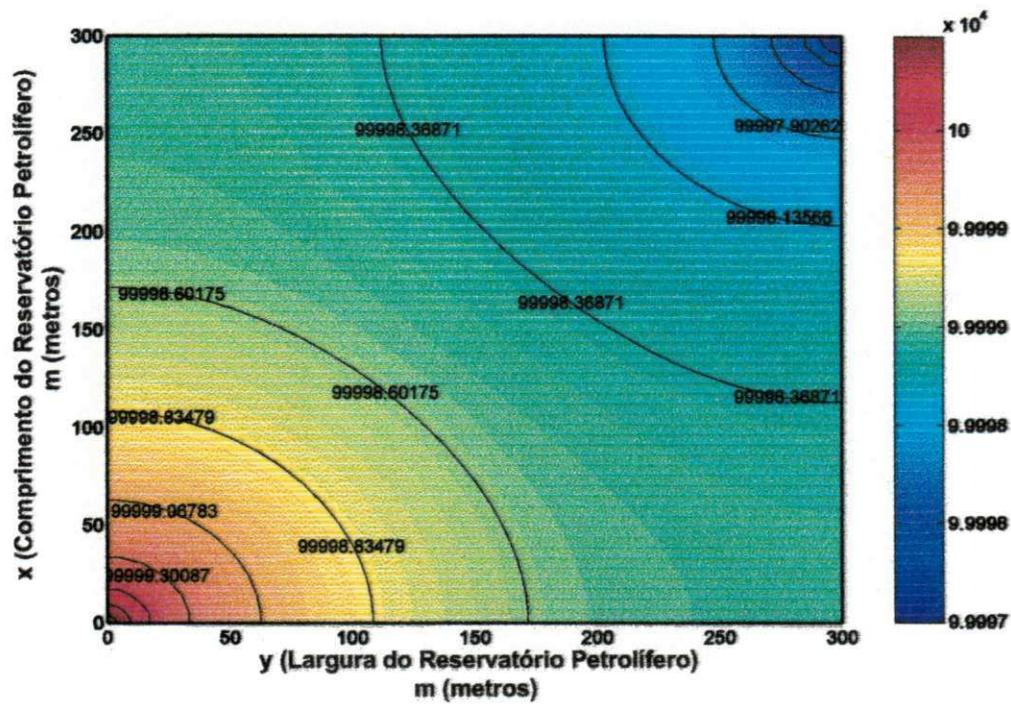


Figura 4.7 - Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K1 = 1.10^{-7} m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.

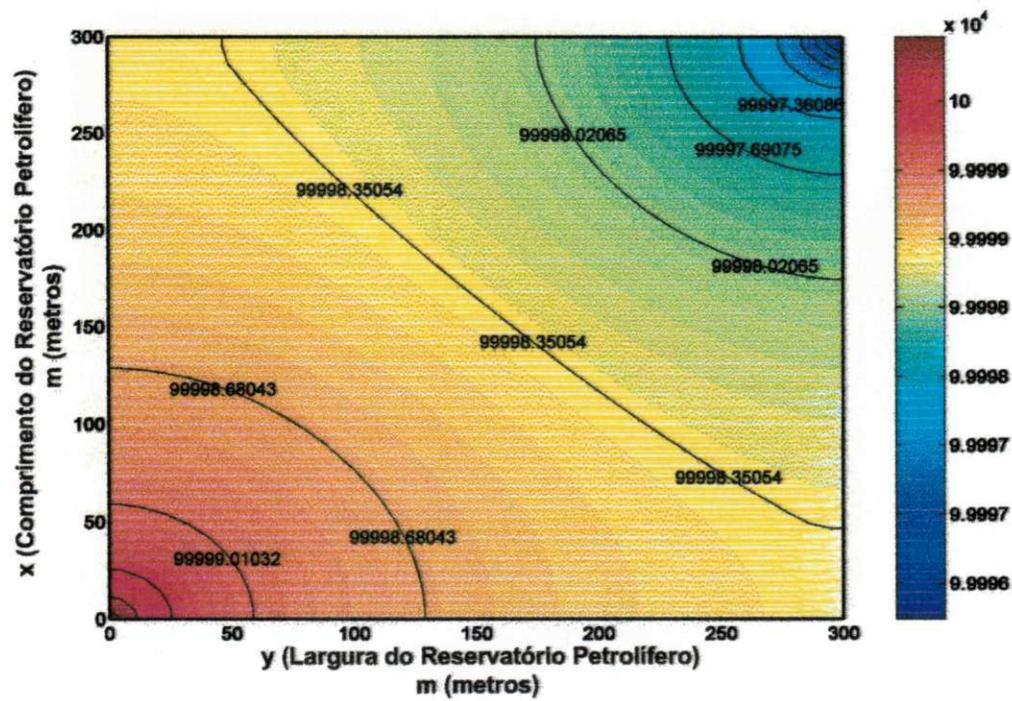
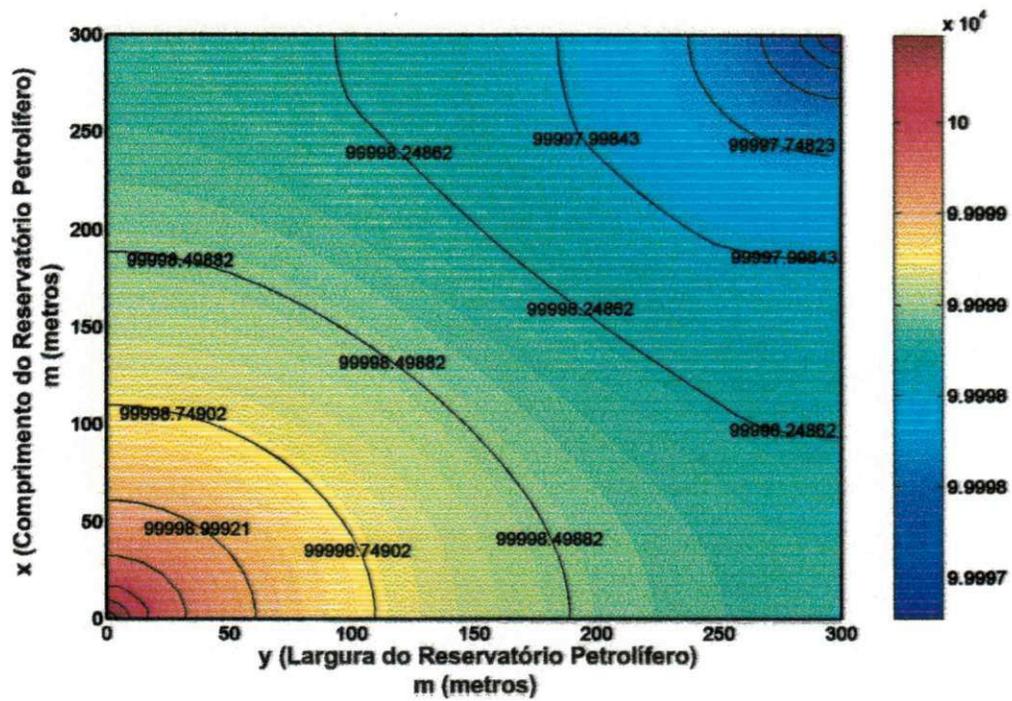


Figura 4.8 - Distribuição de Pressão em uma malha de cinco pontos com permeabilidade absoluta $K1 = 1.10^{-7} m^2$ após 100 dias e 200 dias de injeção de água.

Todavia, à medida que a água avança no meio poroso o seu gradiente de pressão e, conseqüentemente, sua velocidade vão se alterando fazendo com que haja uma mudança na forma e na dimensão da região invadida pela água.

As Figuras 4.12 a 4.11 apresentam as isosuperfícies de saturação de água sobre o domínio de estudo formado por duas regiões de permeabilidades absolutas distintas (Caso 2a), sendo a de menor permeabilidade (K_2) formada por um quadrado de $112,5\text{ m} \times 112,5\text{ m}$ centralizado no domínio Ω , conforme pode ser observado na Figura 4.18, Capítulo 3. Estas figuras ilustram a evolução da frente de avanço da água injetada no reservatório para diferentes tempos de injeção. Observa-se, portanto, que os resultados nos primeiros 100 dias de injeção d'água apresentaram um comportamento semelhante ao observado no Caso 1, onde a permeabilidade absoluta foi considerada constante. No entanto, percebe-se uma mudança de comportamento do avanço em relação ao observado na Figura 4.11 para tempos de injeção superior a 200 dias, a qual está relacionada à presença da região onde sua permeabilidade é 1000 vezes menor do que aquela que a circula ($K_1/K_2 = 1000$), mostrando que modelo matemático proposto foi capaz de prever sua presença. Como se pode observar a água não consegue remover o óleo presente na região central do domínio em virtude da baixa permeabilidade absoluta, indicando a presença de um caminho preferencial do escoamento dos fluidos no reservatório. Ao se atingir o tempo de injeção de 600 dias se distingue uma frente de avanço suficientemente aguda, igualmente observado no trabalho de WENDLAND *et al.* (2001), onde estes autores consideraram uma espécie de problema que se assemelha ao do tipo Buckley-Leverett (dominados pela advecção, sem efeitos difusivos, de capilaridade e gravidade). Não foram constatadas na interface, entre as regiões de baixa e alta permeabilidade, problemas de oscilação e espalhamento, ou seja, difusão numérica, nos resultados apresentados.

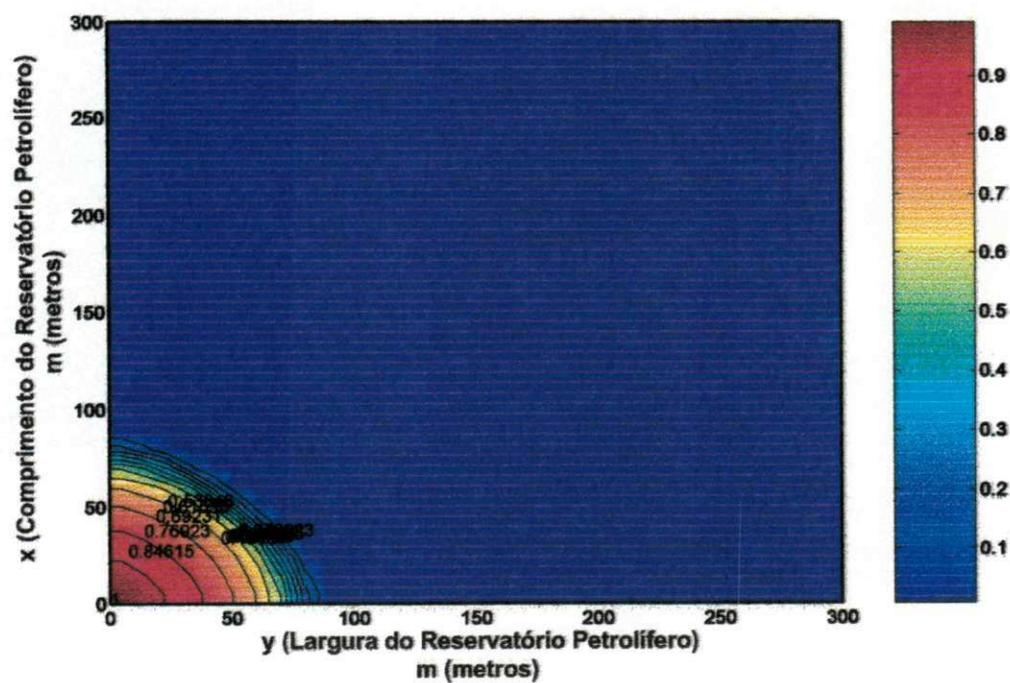
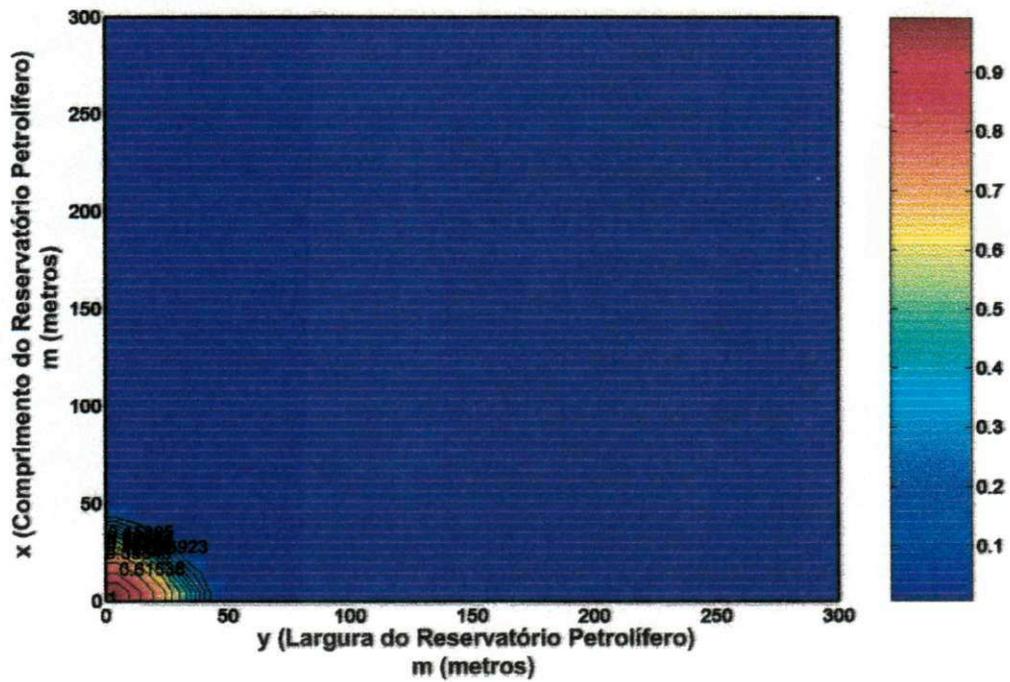


Figura 4.9 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 10 dias e 50 dias.

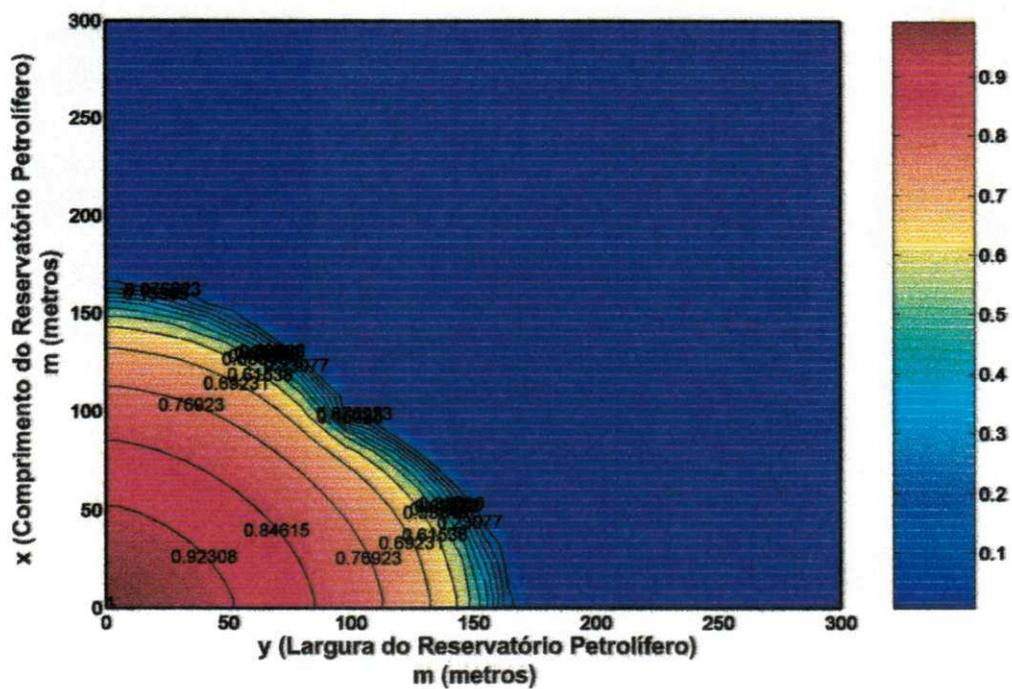
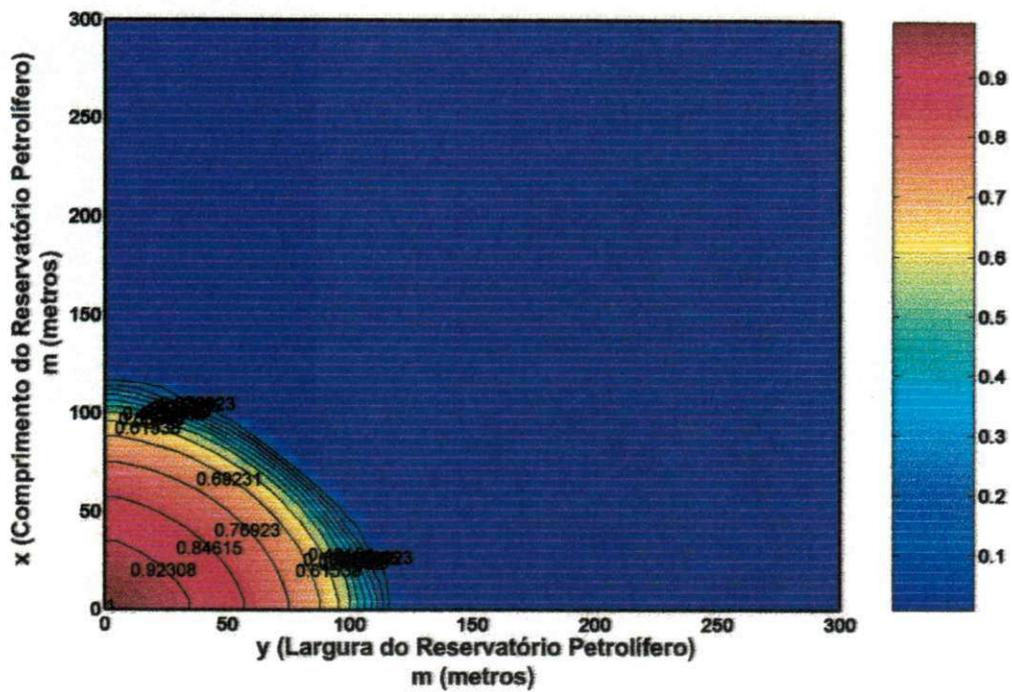


Figura 4.10 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 100 dias e 200 dias.

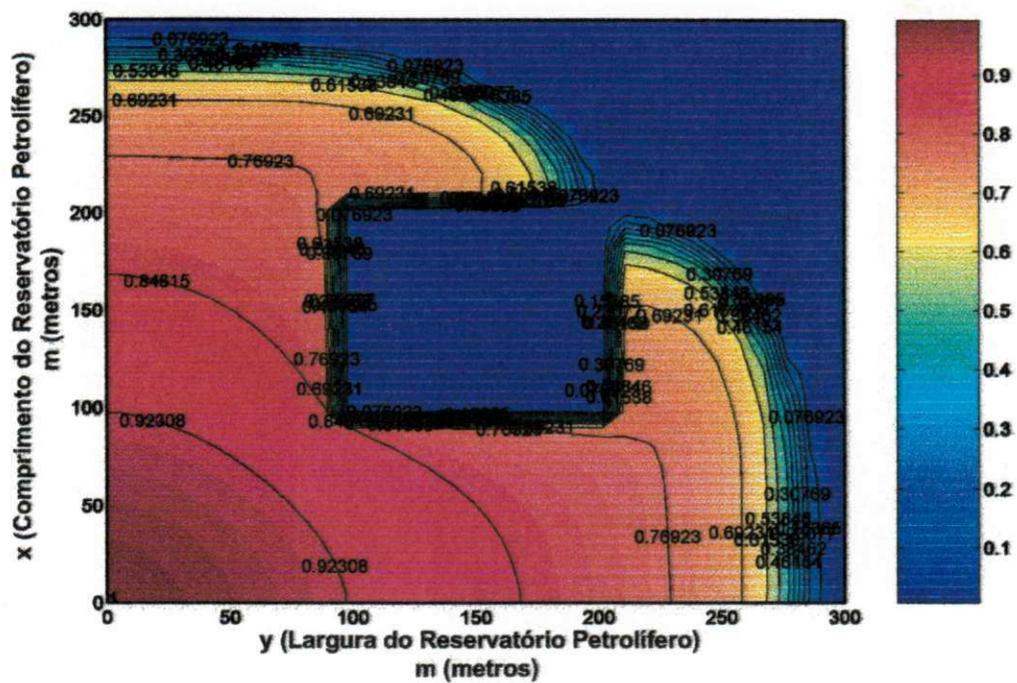
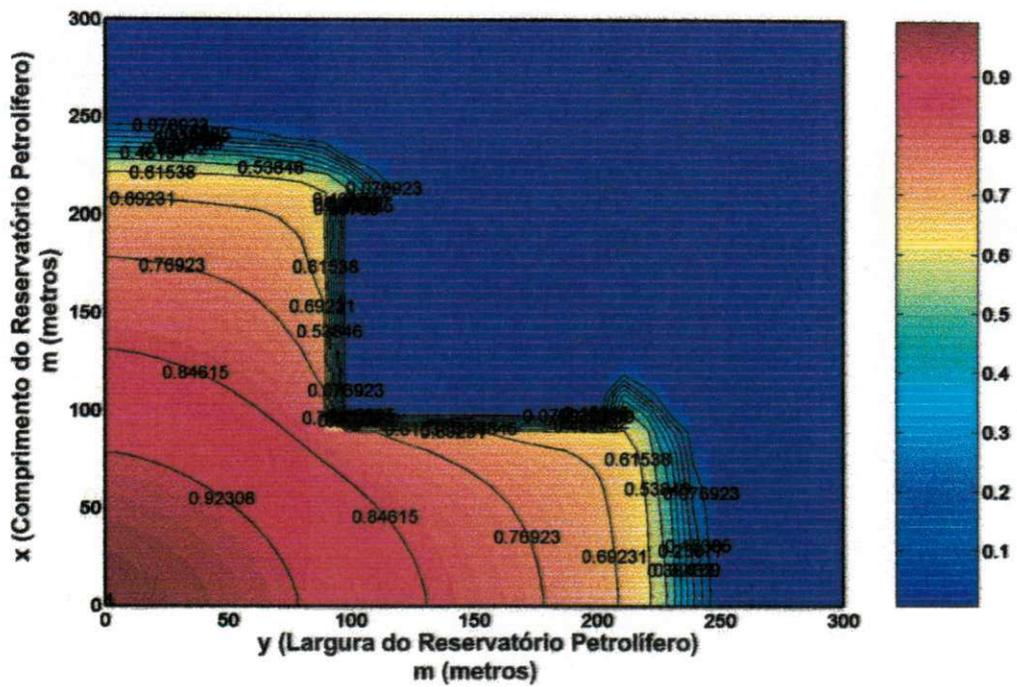


Figura 4.11 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 1000$, respectivamente após 400 dias e 600 dias.

Ao se analisar a frente de avanço de água no reservatório nos tempos de injeção iguais 400 e 600 dias sobre as Figuras 4.11 a 4.12 onde são apresentados os resultados obtidos com relação à permeabilidade absoluta (K_1/K_2) com valores iguais a 10 e 2, respectivamente. Estes resultados mostram um comportamento semelhante de remoção de óleo frente ao avanço de água quando comparado com os resultados observados no mesmo período (400 e 600 dias) nas Figuras 4.14 e 4.15 . Entretanto, devido à menor diferença de permeabilidade, pode ser observada uma menor invasão de água para os CASO 2 ($K_1/K_2 = 1000$), CASO 3 ($K_1/K_2 = 10$) e CASO 4 ($K_1/K_2 = 2$).

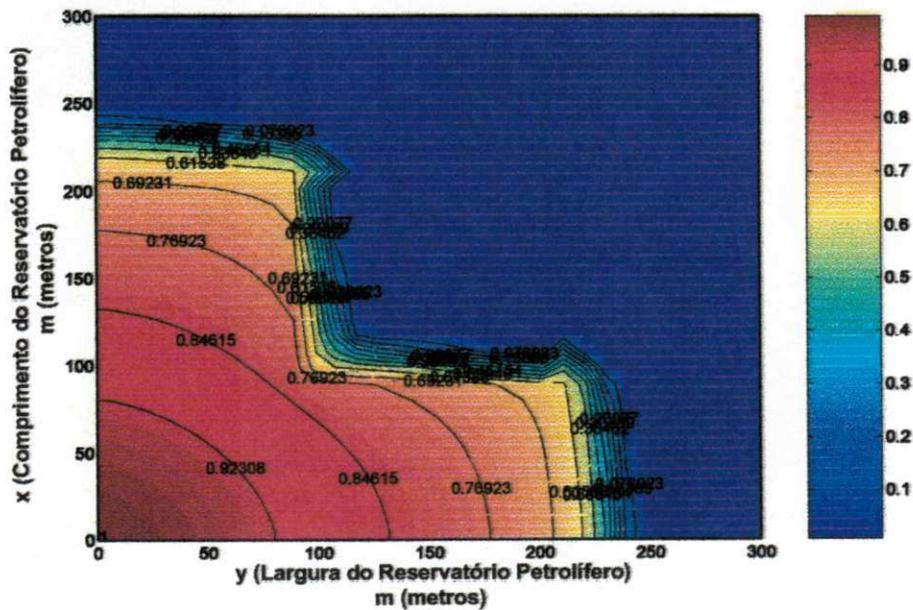


Figura 4.12 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 10$, após 400 dias.

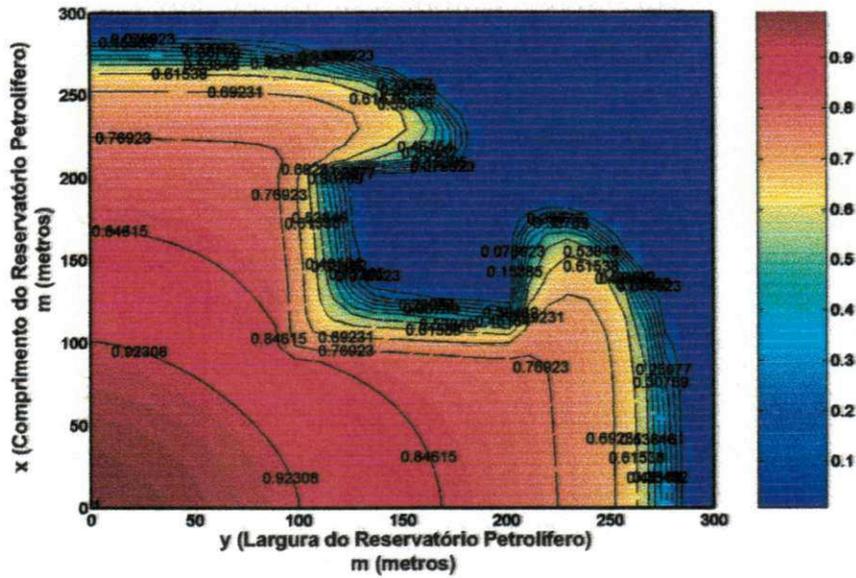


Figura 4.13 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 10$, após 600 dias.

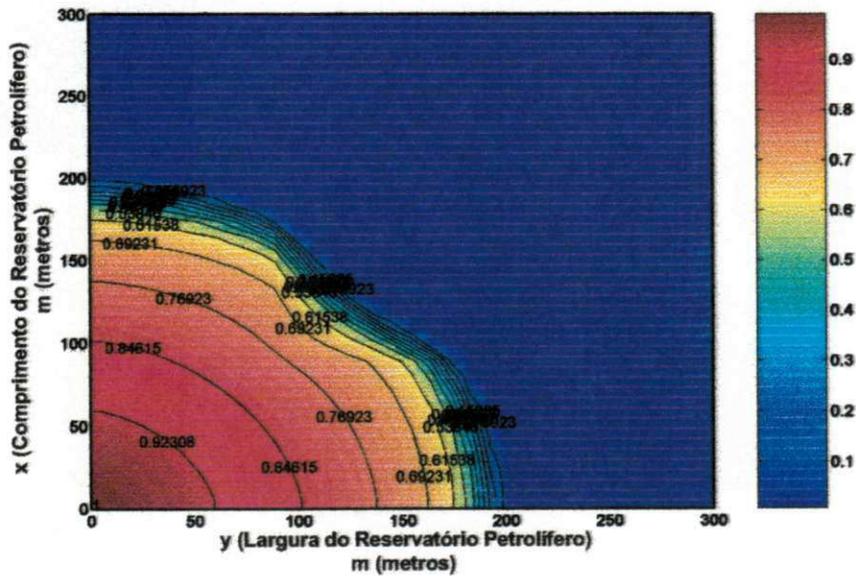


Figura 4.14 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 2$, após 400 dias.

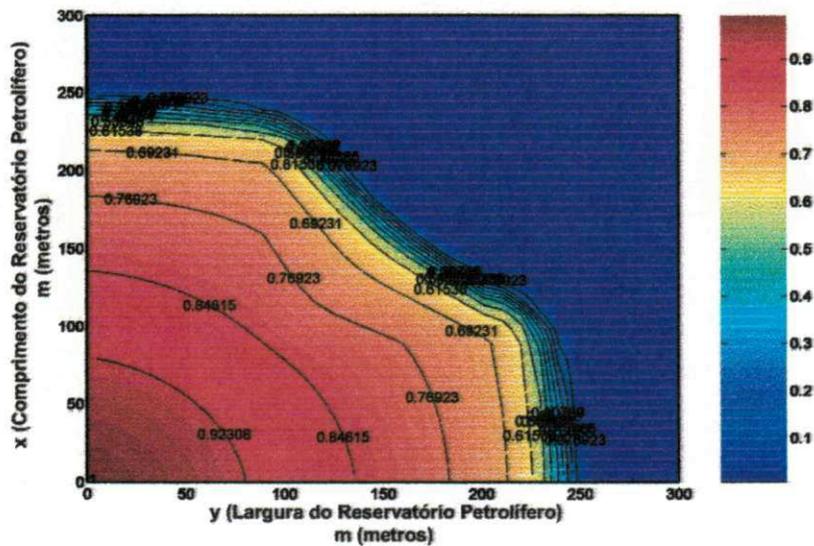


Figura 4.15 - Evolução da saturação de água após injeção de água no reservatório petrolíferos usando uma malha de cinco pontos com razão de permeabilidade absoluta igual $K_1/K_2 = 2$, após 600 dias.

A Figura 4.16 apresenta a distribuição da permeabilidade absoluta no meio poroso que foi utilizada para efetuar a simulação do CASO 3. É possível observar uma aleatoriedade nesta distribuição o que permitiu a representação mais próxima da realidade da rocha-reservatório. Para se avaliar numericamente este caso foi mantido a mesma distribuição da permeabilidade sobre o domínio de estudo ou meio poroso.

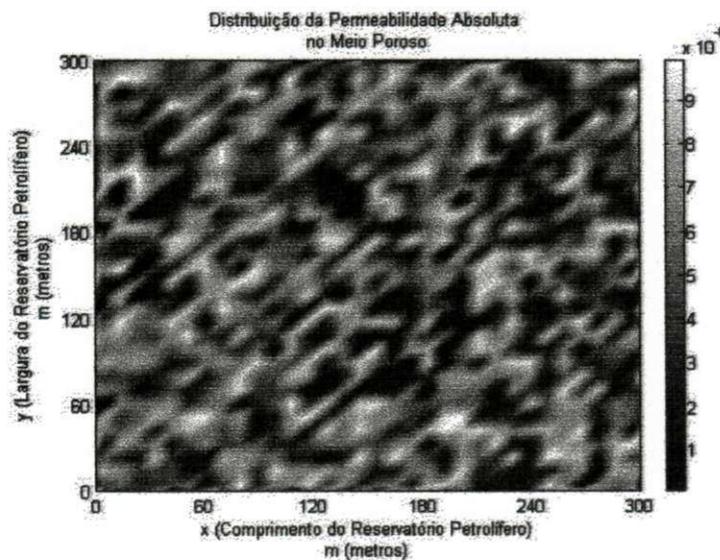
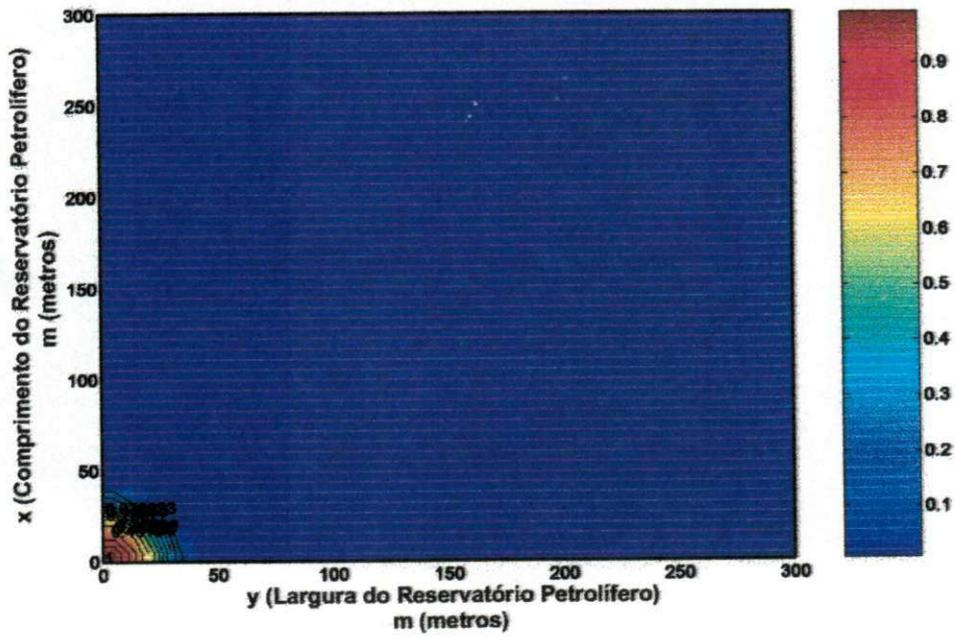
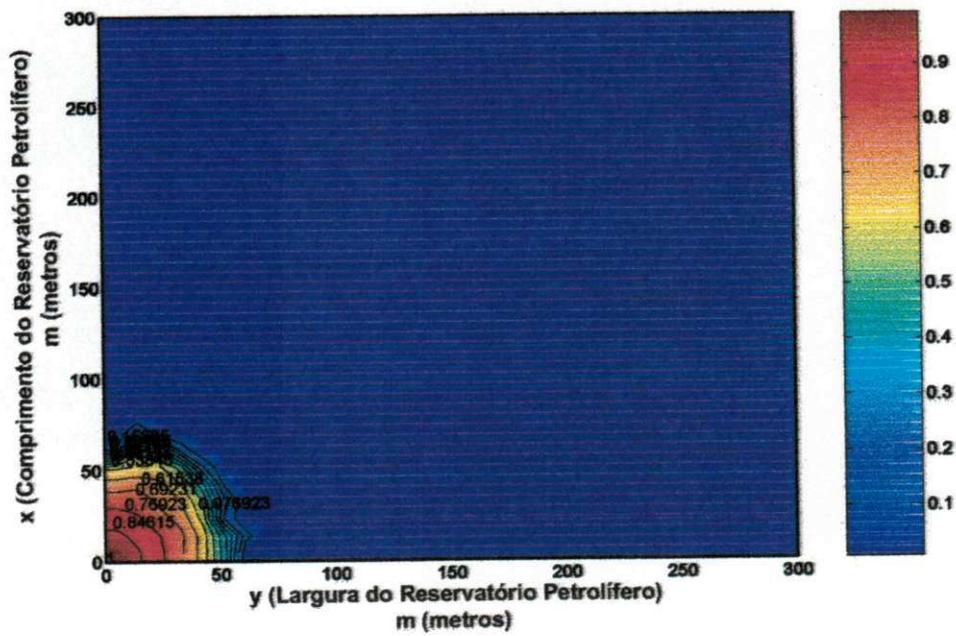


Figura 4.16 - Distribuição da permeabilidade absoluta sobre a rocha-reservatório utilizada na simulação do CASO 3 (ver distribuição de permeabilidade em anexo).

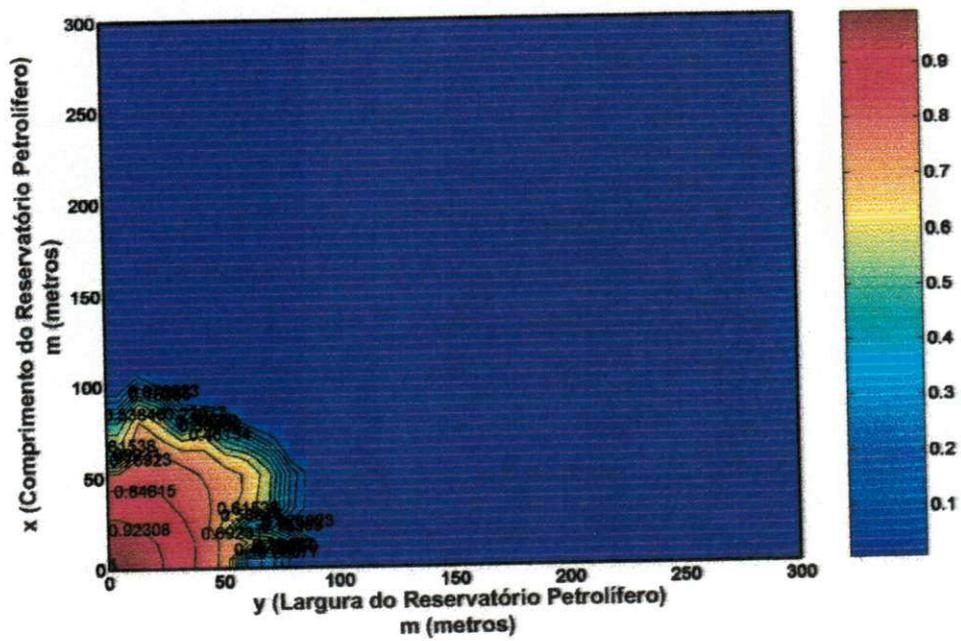
Na Figura 4.17 estão representadas as isosuperfícies da saturação de água durante a frente de avanço de água na rocha-reservatório promovendo, assim, o deslocamento do óleo em direção ao poço produtor. De uma maneira geral, se percebe um comportamento semelhante aos casos apresentados e discutidos anteriormente, onde a água se propaga radialmente no meio poroso a partir do poço de injeção. Todavia, à medida que a água avança no meio poroso fica evidente um comportamento desordenado e aleatório com o tempo de injeção. Observa-se igualmente que uma boa parte do óleo é deixada para trás na forma de óleo residual, representados por pequenas ilhas de óleo nas regiões praticamente saturadas com água. De acordo com Rosa et al. (2001) cerca de 15 a 40% do volume de poros é preenchido com óleo residual. Estes autores relatam igualmente que a maior parte do óleo não recuperado após a injeção de água é deixada na forma de gotas microscópicas de óleo residual. Uma possível explicação para este fato seria que todas as forças capilares atingiram o equilíbrio, logo o caminho de fluxo de água foi estabelecido através do espaço poroso menor e a injeção de água contínua não pode desalojar o óleo aprisionado nos poros. Rosa et al. (2001) relatam ainda que as forças dinâmicas da água fluindo do poço injetor em direção ao poço produtor tenderão a mover a gota de óleo na direção do fluxo de água, mas esta força exerce um diferencial de pressão pequeno considerando a curta distância de um comprimento do poro e ela não pode deslocar o óleo para fora.



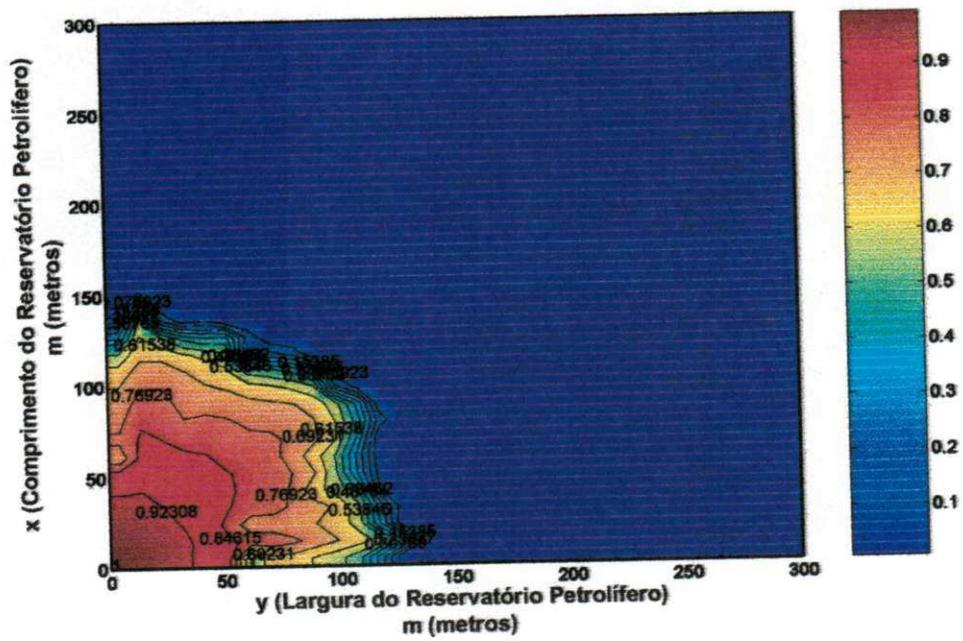
(a) 10dias



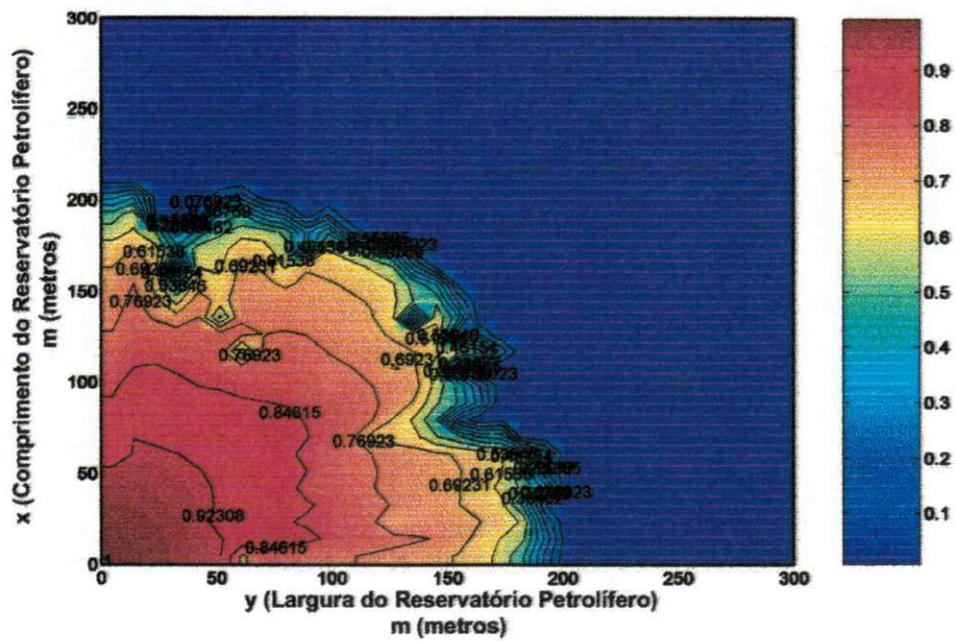
(b) 50dias



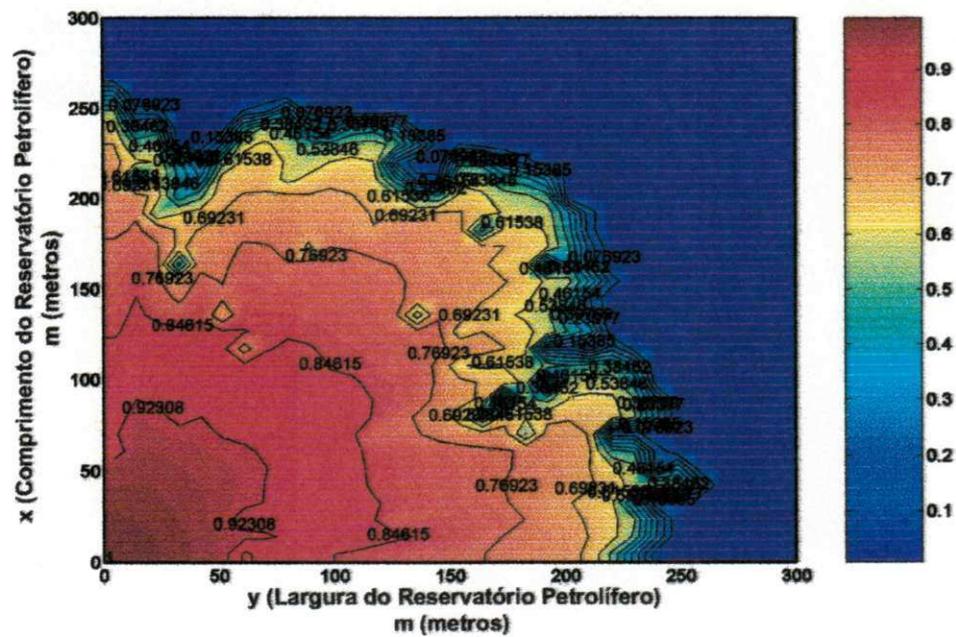
(c) 100dias



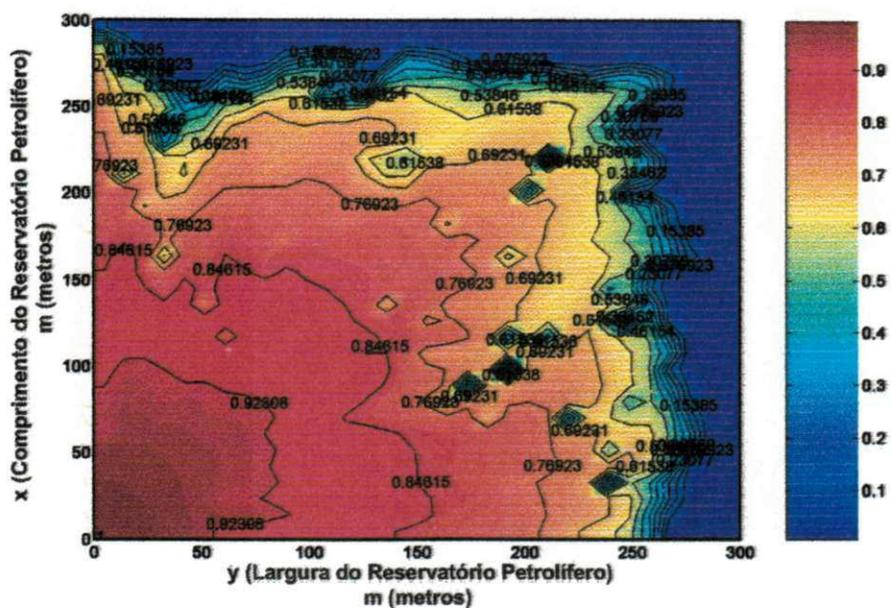
(d) 200dias



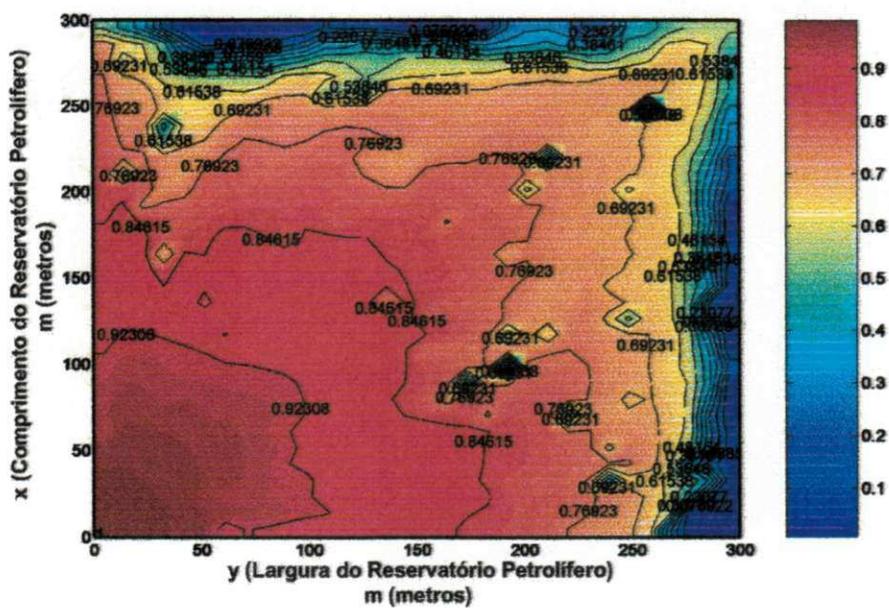
(e) 400dias



(f) 600dias



(g) 800dias



(h) 1000dias

Figura 4.17 - Isosuperfícies de saturação de água com razão de permeabilidade absoluta randômica após diferentes dias de injeção.

Como em qualquer esquema de produção de petróleo a distribuição mais adequada dos poços de produção no reservatório, visando aumentar a produção de petróleo, existe uma área total definida a qual está sujeita à influência da injeção. Como foi adotado no presente trabalho o esquema de cinco pontos (“five-spot”) essa área total corresponde à área da malha base, ou seja, um quadrado. Segundo Rosa et al. (2001) se fosse considerado que não existam fatores que interfiram na frente de avanço de água no reservatório e o tempo de atuação fosse infinito, esta área total seria integralmente varrida pela água injetada e a recuperação do petróleo seria proveniente de toda essa área.

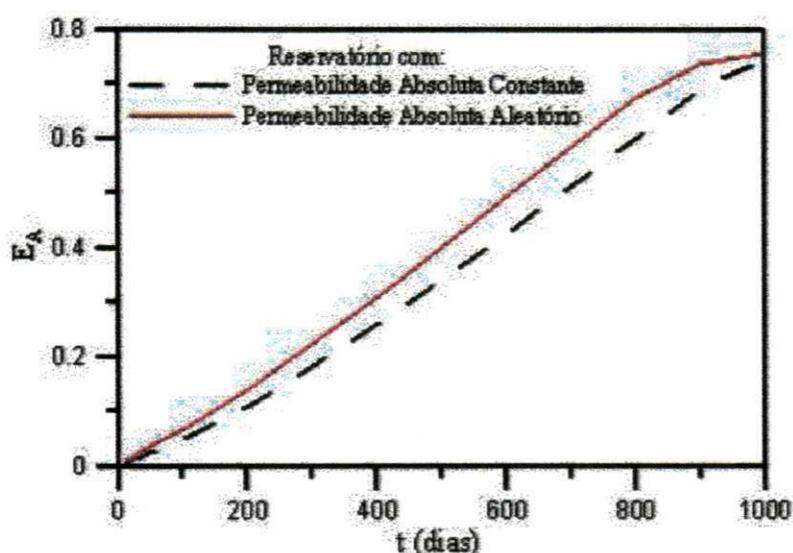


Figura 4.18 - Eficiência de varrido horizontal versus o tempo de injeção de água em reservatórios com permeabilidade constante e randômica.

Como na prática esta situação não é atingida emprega-se o conceito de eficiência de avanço de água em reservatório petrolífero (eficiência de varrido horizontal), E_A , definido como sendo a razão entre a área invadida pelo fluido injetado e a área total do meio poroso. Com o intuito de averiguar esta eficiência nos CASOS 1 e 3 foram plotadas as curvas da eficiência de avanço de água em função do tempo de injeção sobre a Figur 4.18. O confronto das áreas invadidas pela água no reservatório com permeabilidade constante (CASO 1) e aleatória (CASO 3), mostrou que o caso 3 apresentou uma melhor eficiência de avanço de água (ver, Figura 4.18). Ao se avaliar mais detalhadamente esta figura juntamente com as Figuras 4.4 e 4.17 foi possível

constatar, que em aproximadamente 800 dias de injeção de água no meio poroso, toda água injetada permaneceu no reservatório dando em contrapartida a mesma quantidade de óleo produzido. Entre o período de 800 e 1000 dias tem início a etapa da injeção em que só uma parte da água injetada consegue deslocar o óleo no reservatório, o qual é denominado de “breakthrough”. Após esta etapa a quantidade de óleo produzida é decrescente enquanto que a de água é crescente. Segundo Rosa et al. (2001) ao continuar com a injeção de água o comportamento das curvas ilustradas na Figura 4.18 tenderá a se tornar uma constante o que corresponderia a um declínio de produção do reservatório.

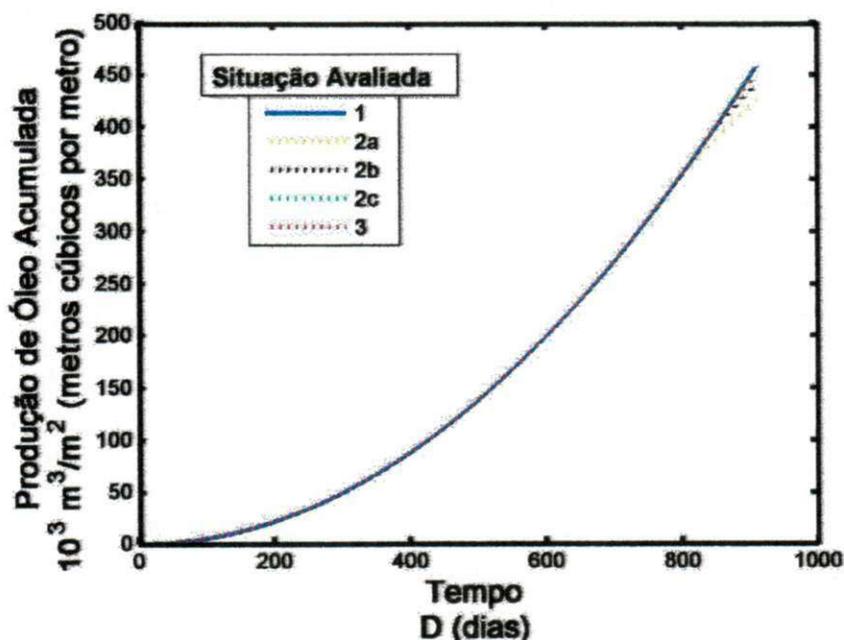


Figura 4.19 - Produção acumulada de óleo para uma injeção contínua de água $Q_{inj} = 3,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

As curvas de produção acumulada de óleo em função do tempo de injeção de água para as três situações avaliadas, conforme mencionadas na Tabela 3.1 estão representadas na Figura 4.19. É possível verificar um aumento progressivo da quantidade de óleo produzido e que é percebido que no período de 0 a 800 dias não há modificações visíveis da curva de produção quando comparadas às situações avaliadas. Este fato é decorrente da água que está sendo injetada não ter atingido o poço produtor, conforme pode ser observado nas figuras de distribuição de saturação de

água no meio poroso nas três situações de estudos, verem Figuras 4.4 e 4.17. Após este período verificam-se uma mudança no comportamento das curvas de produção acumulada, Figuras 4.20 que representa um detalhe (ampliação) da Figura 4.19 no período de 800 a 900 dias. Este comportamento é uma consequência do aumento da saturação de água no poço injetor, como pode ser constatado na Figura 4.4 e 4.17(h). Ainda nestas figuras pode-se observar que o declínio de produção acumulada de óleo na situação 3 é mais proeminente do que nas outras duas situações. Isto pode ser explicado pela distribuição da permeabilidade absoluta no meio poroso que se aproxima da formação geológica de um reservatório petrolífero.

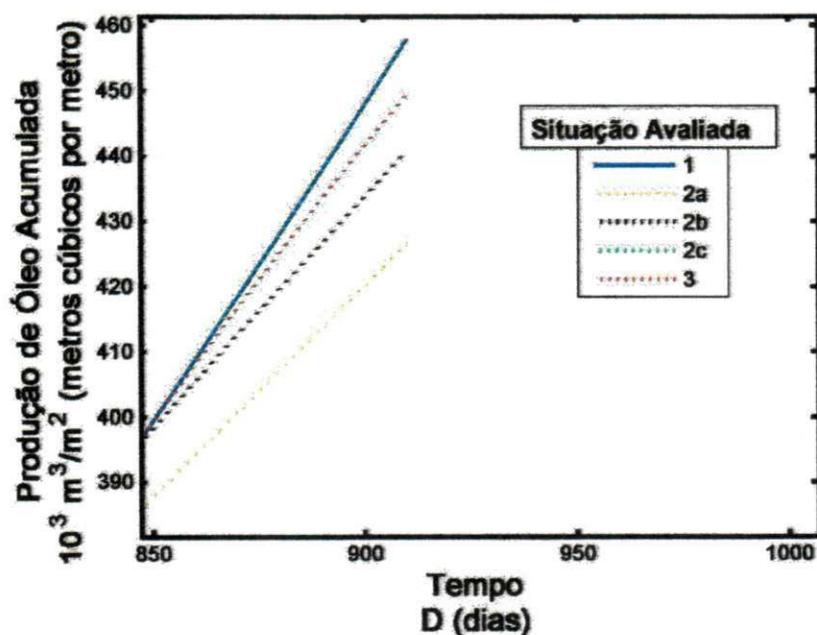
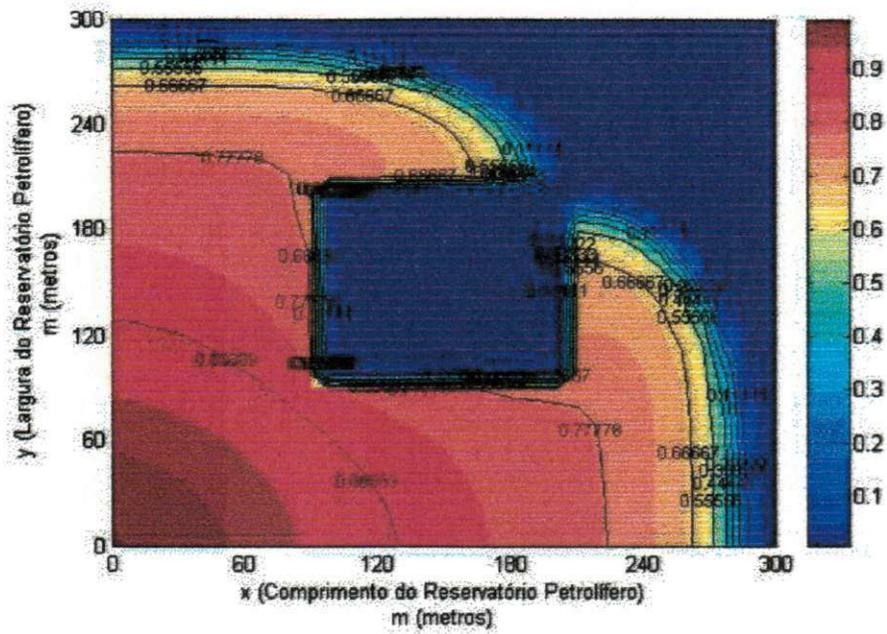
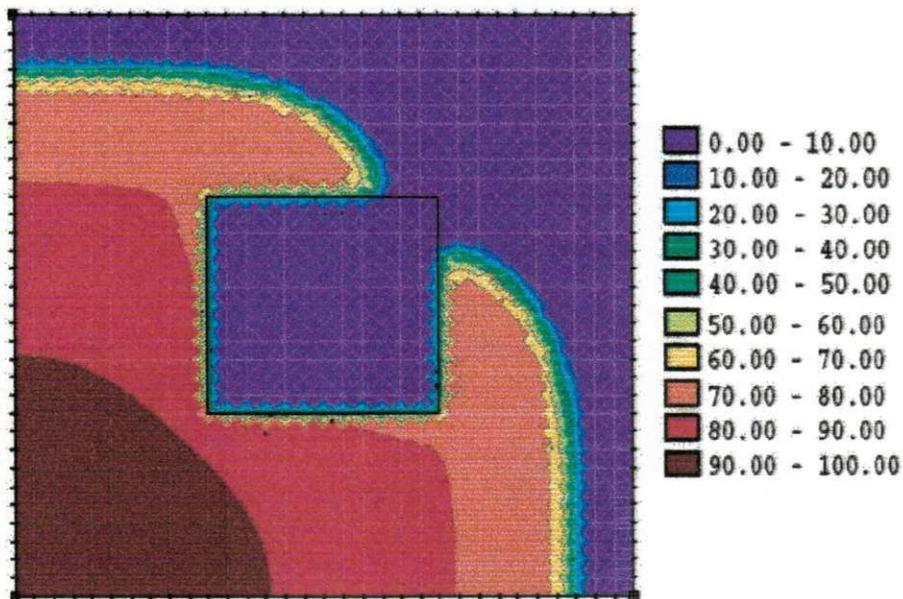


Figura 4.20 - Produção acumulada de óleo para uma injeção contínua de água $Q_{inj} = 3,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.



(a) Presente Trabalho - 600 dias.



(b)) Wendland et al. (2001) - 800 dias.

Figura 4.21 - Isosuperfícies de saturação de água com razão de permeabilidade absoluta $K_1/K_2 = 1000$, para (a) o presente trabalho e (b) Wendland et al. (2001).

A comparação dos resultados obtidos no presente trabalho e o de Wendland et al.

(2001) (ver Figura 4.21), os quais estudaram o mesmo tipo de problema, mostraram que as isoáreas de saturação de água apresentaram comportamentos semelhantes ao longo do reservatório e com regiões de saturação de água no meio poroso dentro do mesmo intervalo de valores. Todavia, houve uma perceptível diferença no tempo de injeção para se atingir condições de saturação. Este fato pode estar relacionado com os seguintes fatos:

- Ao termo difusivo que fora levado em consideração no presente modelo e desconsiderado no trabalho de Wendland et al. (2001);
- Wendland et al. (2001) não levaram também em consideração os efeitos das pressões capilares;
- Ao tratamento do acoplamento pressão-velocidade, ver pagina do Capítulo 2.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Perspectivas

5.1 Conclusões

Nesta dissertação foi desenvolvido um modelo matemático capaz de prever o escoamento bifásico água/óleo em um meio poroso heterogêneo que leva em consideração o escoamento simultâneo das duas fases presente no reservatório. Com os resultados numéricos da simulação deste problema pode-se concluir que:

- Os resultados da frente de avanço de saturação de água apresentados demonstra a aplicabilidade do método desenvolvido em problema de escoamento bifásico em meio poroso homogêneo e heterogêneo, mesmo em presença de fortes heterogeneidades.
- A distribuição randômica da permeabilidade absoluta permitiu prever o avanço da saturação de água que se aproxima de um caso real de recuperação de óleo em um reservatório petrolífero.
- Os resultados da simulação, para o caso onde as permeabilidades absolutas no meio poroso foram distribuídas de forma aleatória, mostraram a presença de óleo residual que permaneceu aprisionado nos poros do reservatório, o qual pôde ser assinalado por pequenas ilhas de óleo nas regiões praticamente saturadas com água.
- Ao se analisar as curvas de eficiência de varrido horizontal em função do tempo de injeção de água foi possível constatar que para tempos inferiores a 800 dias de injeção de água no meio poroso toda água injetada permaneceu no reservatório dando em contrapartida a mesma quantidade de óleo produzido.
- Ao se comparar os resultados do presente trabalho para a situação 3 com os de Wendland et al. (2001) foi observada uma boa concordância nas distribuições de saturações água-óleo. Todavia, apresentou uma forte discrepância no tempo de injeção de água com relação a frente de avanço de água.



5.2 Perspectivas

- Modificar os parâmetros físico-químicos dos fluidos visando avaliar o seu efeito da frente de avanço de água em reservatórios petrolíferos;
- Avaliar a influência de diferentes distribuições de permeabilidade absoluta no meio poroso;
- Implementar ao modelo matemático uma correlação entre a permeabilidade absoluta e a porosidade do meio poroso;
- Considerar o efeito da gravidade no modelo de escoamento e verificar a influencia no processo de recuperação de óleo em reservatório petrolífero;
- Introduzir a fase gasosa no modelo de escoamento em meio poroso e estuda seus efeitos no processo;
- Avaliar o efeito da geometria do reservatório na produção de petróleo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, E.; DOUGLAS, J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D.; PEREIR, F. Three-phase immiscible displacement in heterogeneous petroleum reservoirs. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 73, p. 2 – 20, 2006. 46
- ABREU, E. C. D. **Simulação numérica de escoamentos trifásicos água – óleo – gás em reservatórios de petróleo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2003. 40, 46, 54, 55
- ALLEN, M. B.; BEHIE, G. A.; TRANGENSTEIN, J. A. **Multiphase Flow in Porous Media: Mechanics, mathematics, and numerics**. Berlin: Springer - Verlag, 1988. (Lecture Notes in Engineering, 34). 21, 23, 26, 30, 34, 37, 38, 48
- ALLEN, M. B.; FURTADO, F. Computational methods for porous-media flows. 2004. 39
- ANDRADE, P. L. de. **Escoamento em Reservatórios Petrolíferos com Injeção de Ar**. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2003. 46
- BARBOSA, E. S. **Injeção de Água com Taxas Alternadas em Reservatórios Petrolíferos**. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2004. Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor de Petróleo e Gás (PRH-25/ANP). 46
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena**. New York: Wiler International Edition, 1960. 33
- BORTOLI, A. L. de. **Introdução à dinâmica de Fluidos Computacional**. Rio Grande do Sul: Editora da Universidade/UFRGS, 2000. 56
- CHAVENT, G.; JAFFRÉ, J. **Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation: Single Phase, Multiphase, and Multicomponent Flows through Porous Media**. Amsterdam: North-Holland, 1986. 376 p. (of Studies in Mathematics and Applications, v. 17). 21, 22, 23, 26, 34, 35, 40
- CORRÊA, M.; LOULA, A.; GARCIA, E. Métodos de diferenças finitas de direções alternadas implícitos para modelagem de Águas subterrâneas. In: **Tema**

Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional. Uberlândia-MG: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2004. v. 5, n. 1, p. 65 – 76. 103

COUTINHO, B. G. **Solução Numérica de Problemas de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas.** Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2002. 45

CUNHA, M. C. D. C.; PULINO, P.; FERNANDES, M. R. Introdução à simulação de fluxo em meios porosos: Métodos de elementos finitos. In: **XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC.** Santos – SP: CNMAC, 1999. 37

DOUGLAS, J. J.; FURTADO, F.; PEREIRA, F. On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs. **Computational Geosciences**, v. 1, p. 155 – 190, 1997. 45

FORTUNA, A. D. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações.** São Paulo: Edusp, 2000. 55, 56, 103

FURTADO, F.; PEREIRA, F. Crossover from nonlinearity controlled to heterogeneity controlled mixing in two-phase porous media flows. **Computational Geosciences**, v. 7, n. 2, p. 115 – 135, 2003. 45

GOLUB, G. H.; LOAD, C. F. V. **Matrix Computations.** 3. ed. Baltimore and London: John Hopkins University Press, 1996. 103

MALISKA, C. R. **Transfêrência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional Fundamentos e Coordenadas Generalizadas.** Rio de Janeiro: LTC, 1995. 55, 56

MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J. Wave structure in wagg recovery. In: **Society of Petroleum Engineers Inc.** Houston, Texas: [s.n.], 1999. 46

_____. Theory of three-phase flow applied to water-alternating-gas enhanced oil recovery. In: **HYPERBOLIC PROBLEMS: THEORY, NUMERICS, APPLICATIONS**, 2001. Basel: Birkhäuser Verlag, 2001. (International Series of Numerical Mathematics, v. 141), p. 693–702. Disponível em: <<http://www.ams.sunysb.edu/plohr/preprints.html>>. Acesso em: 21 Agosto 2004. 46

MASSARANI, G. **Fluidodinâmica em Sistemas Particulados**. 2. ed. Rio de Janeiro: E-Papers Serviços Editoriais, 2002. 28

MEZZOMO, R. F. **Pravap Coordena Tecnologias que Viabilizam Recuperação em Reservatórios**. 2000. Disponível em:
<<http://www.dep.fem.unicamp.br/boletim/bolnovembro/artiboPravap.htm>>.
Acesso em: 7 Setembro 2004. 21, 22

MOTA, J. C. D. **Solução Fundamentais para Escoamento Térmico de Fluidos Multifásicos em Meios Porosos**. 101 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Junho 1998. 46

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation**. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. 23, 26, 34, 37, 38, 40, 45, 55, 103

PLOHR, B. J.; MARCHESIN, D.; BEDRIKOVETSKY, P.; KRAUSE, P. Modeling hysteresis in porous media flow via relaxation. **Computation Geosciences**, Netherlands, n. 5, p. 225–256, 2001. 46

PLOHR, B. J.; MARCHESIN, D.; BEDRIKOVETSKY, P.; ALTOÉ F, J. E.; SOUZA, A. J. D. Hysteresis in three-phase porous media flow. In: **European Conference on the Mathematics of Oil Recovery**. Freiberg, Germany: Stony Brook AMS, 2002. Disponível em:
<<http://www.ams.sunysb.edu/plohr/preprints.html>>. Acesso em: 21 Agosto 2004. 47

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. D. S.; XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatório de Petróleo**. Núcleo Banhia: Universidade Corporativa, 2001. 22, 24, 26, 39, 48

SANTOS, A. H. P. D. **Simulação Composicional para Transporte de Hidrocarbonetos em Aquíferos**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 22, 35, 37, 38, 39, 45

SCHEIDEGGER, A. E. **The physics of flow through porous media**. 3. ed. Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1974. 24

SISSON, L. E.; PITTS, D. R. **Fenômenos de Transporte**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988. 33

SMOLLER, J. **Shock Waves and Reaction Diffusion Equations**. New York: Springer - Verlag, 1994. 22

SOUZA, A. J. D.; MARCHESIN, D.; BEDRIKOVETSKY, P.; KRAUSE, P. A simple model for three-phase flow with hysteresis. In: **VI Workshop on Partial Differential Equations - Part II**. Rio de Janeiro: Matemática Contemporânea, 1999. v. 19, p. 153 – 185. 47

SOUZA, A. J. D.; MOTA, J. C. D.; MARCHESIN, D. Riemann solutions for model combustion in two-phase flow in porous media. **International Series of Numerical Mathematics**, v. 141, p. 293 – 302, 2001. 46

SOUZA, A. J. D.; MOTA, J. C. D.; MARCHESIN, D.; TEIXEIRA, P. W. A simplified oxidation model for two-phase flow in porous media. **RETERM - Revista de Engenharia Térmica**, v. 2, p. 9 – 14, 2002. 46

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001. 21, 48

THOMAS, J. W. **Numerical Partial Differential Equation: Finite Difference Methods**. New York: Springer - Verlag, 1998. (Texts in Applied Mathematics (TAM), v. 22). 55

_____. **Numerical Partial Differential Equation: Conservation Laws and Elliptic Equation**. New York: Springer - Verlag, 1999. (Texts in Applied Mathematics (TAM), v. 33). 55, 56

WENDLAND, E.; FLENSBERG, D. Multiphase flow simulation in heterogeneous porous media using a hybrid fvm-fem scheme. In: **Tema Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional**. São José do Rio Preto: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2003. v. 4, n. 2, p. 277–286. 40, 45

WENDLAND, E.; RISSO, V. F.; SCHIOZER, D. J. Simulação de escoamento bi-fásico em meio poroso heterogêneo. In: **XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**. Uberlândia-MG: COBEM, 2001. v. 7, n. 16, p. 224 – 231. 6, 7, 10, 40, 45, 49, 52, 53, 54, 76

WITELSKI, T.; BOWEN, M. Adi schemes for higher-order nonlinear diffusion equations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 45, p. 331 – 351, 2003. 103

APÊNDICE A

Derivada Substativa e Teorema da Divergência

Dada uma função tensorial arbitraria $\mathcal{T}(X, t)$, $X \in \Omega_t$, sendo Ω_t a região do espaço ocupada pelo fluido no instante t . Então, a derivada substativa da integral de \mathcal{T} , ou seja:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{T} d\Omega$$

Como os limites de integração são fixos, isto é, são constituído das mesmas partículas, então, pode-se derivar dentro da integral, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{T} d\Omega = \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} (\mathcal{T} d\Omega) \quad (\text{A.1})$$

pois, os elementos $d\Omega$, de volume material, e $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X(t), t)$ variam somente com o tempo, então aplicando a regra da cadeia, têm-se:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{T} d\Omega) = \frac{d\mathcal{T}}{dt} d\Omega + \mathcal{T} \frac{d(d\Omega)}{dt} = \dot{\mathcal{T}} d\Omega + \mathcal{T} \frac{d(d\Omega)}{dt} \quad (\text{A.2})$$

Seja $\Omega = \Omega(t)$ o volume material da região ocupada, no instante t , pelas partículas do fluido que, no instante t_0 , ocupam a região Ω_{t_0} . Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \oint_{\partial\Omega_t} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega \quad (\text{A.3})$$

Esta Equação (A.3) representa a taxa de variação de volume material ou de expansão. O lado direito não representa fluxo, pois se está trabalhando com domínio material. O termo $(\vec{U} \cdot \vec{n}) dS$ representa o deslocamento por unidade de tempo da superfície infinitesimal compostas pelas partículas mais externas do domínio.

O valor médio de $\nabla \cdot \vec{U}$ sobre Ω_t é definido por:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega \quad (\text{A.4})$$

É uma consequência da continuidade do divergente que $(\nabla \cdot \vec{U})$ realmente assuma esse valor em algum ponto P em Ω_t . Obtém-se então:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega &= (\nabla \cdot \vec{U})_P \\ \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} (\nabla \cdot \vec{U})_P \\ \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega &= (\nabla \cdot \vec{U})\end{aligned}\tag{A.5}$$

Dividindo-se a Equação (A.3) por Ω e fazendo o limite quando Ω tende a zero e utilizando-se a Equação (A.5), obtém-se:

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot \vec{U}) d\Omega \\ \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) &= (\nabla \cdot \vec{U})\end{aligned}\tag{A.6}$$

com esta Equação (A.6) é possível interpretar fisicamente a divergência do campo do vetor velocidade \vec{U} , como sendo igual a taxa de dilatação relativa de um elemento de volume ao longo de sua trajetória.

Ao substituir a Equação (A.6) na Equação (A.2), têm-se:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{T}(X, t) d\Omega) = \dot{\mathcal{T}} d\Omega + \mathcal{T} \nabla \cdot \vec{U} d\Omega\tag{A.7}$$

logo, substituindo a Equação (A.7) na Equação (A.1), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{T} d\Omega = \int_{\Omega_t} [\dot{\mathcal{T}} + \mathcal{T} \nabla \cdot \vec{U}] d\Omega\tag{A.8}$$

Esta Equação (A.8) representa o transporte da grandeza \mathcal{T} pelo volume substancial ou material Ω_t , a qual é denominada de **teorema do transporte de Reynolds**.

Outra expressão para esse **teorema do transporte de Reynolds** é obtido uti-

lizando a relação entre as derivadas local e substantiva e a identidade,

$$\dot{\mathcal{T}} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \vec{U} \nabla \cdot \mathcal{T} \text{ (derivada total)} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathcal{T} \vec{U}) = \vec{U} \nabla \cdot \mathcal{T} + \mathcal{T} \nabla \cdot \vec{U} \text{ (Identidade)} \quad (\text{A.10})$$

Aplicando as relações (A.9) e (A.10) em (A.8), obtem-se outra expressão desse teorema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{T} d\Omega &= \int_{\Omega_t} \left[\vec{U} \nabla \cdot \mathcal{T} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mathcal{T} \nabla \cdot \vec{U} \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{T} \vec{U}) \right] d\Omega, \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot (\mathcal{T} \vec{U}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aplicando, o Teorema da Divergência na Equação (A.11) o qual diz que o fluxo de um campo vetorial F através de uma superfície S fechada e orientada, no sentido do campo de versores normais exteriores da superfície \vec{n} , é igual à integral de $\nabla \cdot F$ sobre a região Ω_t limitada pela superfície, ou seja:

$$\oint_{\partial\Omega_t} F \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot F) d\Omega$$

obtem-se então outra expressão para o **teorema do transporte de Reynolds**, dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{T} d\Omega = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega_t} (\mathcal{T} \vec{U}) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.12})$$

esta expressão mostra que a taxa de variação da integral de \mathcal{T} em um volume substantivo Ω_t , é igual a taxa de variação da integral de \mathcal{T} em um volume fixo Ω , que é a configuração instantanea de Ω_t , mais o fluxo de \mathcal{T} que sai pela superfície de controle $\partial\Omega_t$, na direção \vec{n} .

APÊNDICE B

Método Implícito de Direções Alternadas

O método Método Implícito de Direções Alternadas (ADI - Alternating Direction Implicit) foi desenvolvido por Peaceman e Rachford em 1956, surgiu como uma alternativa ao método de Cranck-Nicolson para resolução de problema bidimensional e tridimensional (PEACEMAN, 1977). É um método iterativo muito utilizada para resolver sistemas de equações não-linear dependentes do tempo (WITELSKI e BOWEN, 2003; CORRÊA *et al.*, 2004).

Uma das principais vantagens deste método consiste em usa apenas uma variável espacial na forma implícita em cada meio espaço de tempo, o que leva a uma eficiente solução numérica. Uma grande utilização deste método está no processamento paralelo, onde se utilizar mais de um processador para realizar os cálculos. Na qual há formas de implementação que distribuem os cálculos das direções x e y no caso bidimensional entre diferentes processadores como forma de aumentar a velocidade de cálculo.

B.1 Metodologia Numérica do Método ADI

A técnica tem como fundamento a avaliação alternada das derivadas espaciais com o tempo. A cada evolução no tempo ocorre em dois meios passos, ou seja, o intervalo de tempo é dividido ao meio. No primeiro intervalo, uma das duas derivadas parciais é escrita na forma explícita (calculada no nível de tempo atual). Já no segundo intervalo da variável temporal é análogo ao primeiro intervalo, exceto que agora a derivada explícita passa a ser a implícita e vice-versa. Originado a cada meio passo de tempo uma matriz tridiagonal, oriundas da discretização, reduzindo assim o custo computacional da solução numérica (GOLUB e LOAD, 1996; FORTUNA, 2000).

Para ilustrar aplicação do método ADI, utilizando-se a equação transiente de condução de calor bidimensional (B.1)

$$c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) \quad (\text{B.1})$$

onde ρ é a massa específica do fluido, θ a temperatura, k a condutividade térmica e c_p o calor específico à pressão constante.

A solução numérica da Equação diferencial parcial (B.1) é obtida através da técnica dos volumes finitos na qual, consiste em integra as equações no interior de volumes elementares, de forma arbitrária, bem como a possibilidade de aplicá-la diretamente sobre malhas com espaçamento não-uniforme é uma das razões que explicam sua popularidade.

O volume escolhido para a integração da Equação (B.1) é um retângulo, onde os pontos são indentificados na Figura B.1.

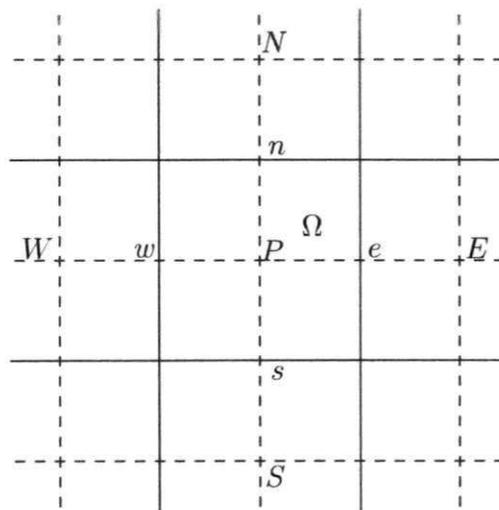


Figura B.1 - Identificação dos pontos w , e , P , s e n no volume elementar Ω .

Integrando a Equação (B.1) no volume de controle Ω e no tempo, obtém-se:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] d\Omega dt \quad (\text{B.2})$$

Decompondo a Equação (B.2) em dois subintervalo temporal com o objetivo de utiliza a metodologia ADI. Daí no primeiro intervalo temporal tem-se

$$\int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = \int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] d\Omega dt \quad (\text{B.3a})$$

e no segundo intervalo temporal

$$\int_{t_{j+\frac{1}{2}}}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = \int_{t_{j+\frac{1}{2}}}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) \right] d\Omega dt \quad (\text{B.3b})$$

Na Equação (B.3a) será aplicada em relação as variaveis espacial na direção x uma implementação implícita e na direção y uma aproximação explícita obtendo assim

$$\int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \Big|^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) \Big|^n \right] d\Omega \quad (\text{B.4a})$$

enquanto na Equação (B.3b) é aplicada um método implícito na direção y e expícito na direção x obtendo

$$\int_{t_{j+\frac{1}{2}}}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \Big|^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) \Big|^{n+1} \right] d\Omega \quad (\text{B.4b})$$

Resolvendo o lado esquerdo das Equações (B.4a) e (B.4b), utilizando o teorema do valor médio para integrais definidas obtém-se

$$\int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = (\Delta x)(\Delta y) c_p \left[(\rho\theta)_P^{n+\frac{1}{2}} - (\rho\theta)_P^n \right] \quad (\text{B.5a})$$

$$\int_{t_{j+\frac{1}{2}}}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} c_p \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} d\Omega dt = (\Delta x)(\Delta y) c_p \left[(\rho\theta)_P^{n+1} - (\rho\theta)_P^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.5b})$$

Quanto à integral das variaveis espaciais presente nas Equações (B.4a) e (B.4b) são resolvidas e, as derivadas espaciais são aproximadas por diferença central, e substituindo os resultados (B.5a) e (B.5b), e reagrupando os termos semelhante,

obtemos para o primeiro intervalo de tempo

$$a_w \theta_W^{n+\frac{1}{2}} + a_p \theta_P^{n+\frac{1}{2}} + a_e \theta_E^{n+\frac{1}{2}} = b \quad (\text{B.6a})$$

onde $\sigma_y = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, $\sigma_x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\gamma = \frac{\Delta t}{2c_p \Delta x \Delta y}$, $a_w = -\gamma \sigma_x k_w^{j+\frac{1}{2}}$, $a_p = 1 + \gamma \sigma_x (k_e^{j+\frac{1}{2}} + k_w^{j+\frac{1}{2}})$, $a_e = -\gamma \sigma_x k_e^{j+\frac{1}{2}}$ e $b = \gamma \sigma_y k_s^j \theta_S^j + (1 - \gamma \sigma_y (k_j^j + k_s^j)) \theta_P^j + \gamma \sigma_y k_j^j \theta_N^j$ e no segundo intervalo de maneira análoga ao caso anterior, obém-se:

$$a_s \theta_S^{n+1} + a_p \theta_P^{j+1} + a_n \theta_N^{j+1} = b \quad (\text{B.6b})$$

onde $a_s = -\gamma \sigma_y k_s^{n+\frac{1}{2}}$, $a_p = 1 + \gamma \sigma_y (k_s^{j+1} + k_n^{j+1})$, $a_n = -\gamma \sigma_y k_n^{j+1}$ e $b = \gamma \sigma_x k_w^{j+\frac{1}{2}} \theta_W^{j+\frac{1}{2}} + (1 - \gamma \sigma_x (k_w^{j+\frac{1}{2}} + k_e^{j+\frac{1}{2}})) \theta_P^{j+\frac{1}{2}} + \gamma \sigma_x k_e^{j+\frac{1}{2}} \theta_E^{n+\frac{1}{2}}$

Definindo as condições de contorno adequada junto com a condição inicial completa a formulação do modelo matemático, dai temos no primeiro intervalo de tempo, resolvendo um sistema tridiagonal, obtermos os valores intermediários, que alguns autores chamam preditores. Usando estes valores intermediário e novamente resolvendo um sistema tridiagonal, teremos os valores corrigidos no final do subintervalo de comprimento Δt .

ANEXO A

Permeabilidade Absoluta do Meio Poroso

TABELA A.1 - Permeabilidade absoluta.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
y_1	$6,9513 \cdot 10^{-14}$	$5,8001 \cdot 10^{-14}$	$3,6638 \cdot 10^{-14}$	$1,1512 \cdot 10^{-13}$	$1,1375 \cdot 10^{-14}$	$1,2372 \cdot 10^{-13}$	$3,7447 \cdot 10^{-14}$	$1,2477 \cdot 10^{-13}$	$9,6756 \cdot 10^{-14}$
y_2	$2,2029 \cdot 10^{-14}$	$2,7911 \cdot 10^{-15}$	$1,6156 \cdot 10^{-13}$	$1,9491 \cdot 10^{-13}$	$1,8603 \cdot 10^{-13}$	$8,4993 \cdot 10^{-14}$	$7,0106 \cdot 10^{-14}$	$2,2112 \cdot 10^{-14}$	$1,5958 \cdot 10^{-13}$
y_3	$2,3607 \cdot 10^{-14}$	$1,5836 \cdot 10^{-13}$	$1,599 \cdot 10^{-13}$	$1,0007 \cdot 10^{-13}$	$1,0404 \cdot 10^{-13}$	$1,8121 \cdot 10^{-13}$	$5,4569 \cdot 10^{-15}$	$1,562 \cdot 10^{-13}$	$3,9014 \cdot 10^{-14}$
y_4	$1,4114 \cdot 10^{-13}$	$7,5371 \cdot 10^{-14}$	$2,6982 \cdot 10^{-15}$	$1,5724 \cdot 10^{-13}$	$1,7459 \cdot 10^{-13}$	$1,9304 \cdot 10^{-13}$	$1,2673 \cdot 10^{-13}$	$1,8137 \cdot 10^{-14}$	$2,0773 \cdot 10^{-14}$
y_5	$1,4846 \cdot 10^{-13}$	$5,6621 \cdot 10^{-14}$	$6,4332 \cdot 10^{-14}$	$1,2658 \cdot 10^{-13}$	$1,4481 \cdot 10^{-13}$	$5,7096 \cdot 10^{-14}$	$5,376 \cdot 10^{-14}$	$6,6657 \cdot 10^{-14}$	$5,5643 \cdot 10^{-15}$
y_6	$2,1795 \cdot 10^{-14}$	$1,9567 \cdot 10^{-13}$	$3,4398 \cdot 10^{-14}$	$2,8596 \cdot 10^{-14}$	$1,7094 \cdot 10^{-14}$	$1,504 \cdot 10^{-13}$	$1,4073 \cdot 10^{-13}$	$1,6733 \cdot 10^{-13}$	$1,1477 \cdot 10^{-13}$
y_7	$1,8831 \cdot 10^{-13}$	$1,0418 \cdot 10^{-13}$	$7,3482 \cdot 10^{-14}$	$1,9595 \cdot 10^{-13}$	$1,4028 \cdot 10^{-13}$	$1,9496 \cdot 10^{-13}$	$1,9314 \cdot 10^{-13}$	$1,8734 \cdot 10^{-13}$	$1,6193 \cdot 10^{-13}$
y_8	$8,5157 \cdot 10^{-14}$	$6,967 \cdot 10^{-14}$	$2,3339 \cdot 10^{-15}$	$1,5337 \cdot 10^{-13}$	$1,0225 \cdot 10^{-13}$	$1,7173 \cdot 10^{-14}$	$1,3015 \cdot 10^{-13}$	$4,0125 \cdot 10^{-14}$	$1,4795 \cdot 10^{-13}$
y_9	$1,2276 \cdot 10^{-13}$	$8,9033 \cdot 10^{-14}$	$1,3321 \cdot 10^{-14}$	$1,8463 \cdot 10^{-13}$	$1,427 \cdot 10^{-13}$	$1,5628 \cdot 10^{-13}$	$1,6094 \cdot 10^{-13}$	$1,2887 \cdot 10^{-13}$	$2,4263 \cdot 10^{-14}$
y_{10}	$2,1216 \cdot 10^{-14}$	$1,8523 \cdot 10^{-13}$	$5,4668 \cdot 10^{-14}$	$3,0714 \cdot 10^{-14}$	$1,7631 \cdot 10^{-13}$	$7,026 \cdot 10^{-14}$	$1,4403 \cdot 10^{-13}$	$1,4393 \cdot 10^{-13}$	$1,252 \cdot 10^{-13}$
y_{11}	$1,9339 \cdot 10^{-14}$	$3,7557 \cdot 10^{-14}$	$8,0903 \cdot 10^{-14}$	$1,3956 \cdot 10^{-13}$	$7,8234 \cdot 10^{-14}$	$1,3987 \cdot 10^{-13}$	$1,8402 \cdot 10^{-13}$	$1,7577 \cdot 10^{-13}$	$2,198 \cdot 10^{-14}$
y_{12}	$1,6005 \cdot 10^{-13}$	$7,2521 \cdot 10^{-14}$	$1,4209 \cdot 10^{-13}$	$6,3773 \cdot 10^{-14}$	$1,7179 \cdot 10^{-13}$	$2,5319 \cdot 10^{-14}$	$9,378 \cdot 10^{-14}$	$6,569 \cdot 10^{-14}$	$1,9404 \cdot 10^{-13}$
y_{13}	$1,5708 \cdot 10^{-13}$	$1,565 \cdot 10^{-14}$	$1,4937 \cdot 10^{-13}$	$1,1932 \cdot 10^{-13}$	$1,4941 \cdot 10^{-13}$	$4,4992 \cdot 10^{-14}$	$2,0436 \cdot 10^{-14}$	$1,457 \cdot 10^{-13}$	$1,1392 \cdot 10^{-13}$
y_{14}	$1,7022 \cdot 10^{-13}$	$8,9405 \cdot 10^{-15}$	$3,1415 \cdot 10^{-14}$	$4,6552 \cdot 10^{-14}$	$1,9699 \cdot 10^{-13}$	$7,7489 \cdot 10^{-14}$	$3,6288 \cdot 10^{-14}$	$1,5605 \cdot 10^{-13}$	$2,7187 \cdot 10^{-14}$
y_{15}	$1,217 \cdot 10^{-14}$	$9,5806 \cdot 10^{-14}$	$1,2847 \cdot 10^{-13}$	$1,1486 \cdot 10^{-13}$	$5,5632 \cdot 10^{-14}$	$1,5063 \cdot 10^{-13}$	$8,9133 \cdot 10^{-14}$	$7,6483 \cdot 10^{-14}$	$7,7658 \cdot 10^{-14}$
y_{16}	$8,3887 \cdot 10^{-14}$	$1,6658 \cdot 10^{-13}$	$8,1133 \cdot 10^{-14}$	$1,6938 \cdot 10^{-13}$	$1,3573 \cdot 10^{-13}$	$1,9247 \cdot 10^{-13}$	$2,8572 \cdot 10^{-14}$	$1,3911 \cdot 10^{-13}$	$1,5695 \cdot 10^{-13}$
y_{17}	$1,4853 \cdot 10^{-13}$	$5,261 \cdot 10^{-14}$	$1,4234 \cdot 10^{-13}$	$1,0204 \cdot 10^{-13}$	$7,3704 \cdot 10^{-14}$	$8,6781 \cdot 10^{-14}$	$1,6054 \cdot 10^{-13}$	$1,6701 \cdot 10^{-13}$	$7,5251 \cdot 10^{-14}$
y_{18}	$1,9277 \cdot 10^{-13}$	$4,2983 \cdot 10^{-14}$	$1,4426 \cdot 10^{-13}$	$5,7493 \cdot 10^{-15}$	$2,4929 \cdot 10^{-14}$	$6,5192 \cdot 10^{-14}$	$1,4658 \cdot 10^{-13}$	$1,1573 \cdot 10^{-13}$	$7,7544 \cdot 10^{-14}$
y_{19}	$2,0762 \cdot 10^{-14}$	$5,0138 \cdot 10^{-14}$	$4,5507 \cdot 10^{-14}$	$1,0139 \cdot 10^{-13}$	$1,1402 \cdot 10^{-13}$	$5,9453 \cdot 10^{-14}$	$6,5343 \cdot 10^{-14}$	$9,2546 \cdot 10^{-15}$	$1,1601 \cdot 10^{-13}$
y_{20}	$7,0763 \cdot 10^{-14}$	$3,1434 \cdot 10^{-14}$	$3,6475 \cdot 10^{-14}$	$9,6309 \cdot 10^{-14}$	$8,149 \cdot 10^{-14}$	$3,2172 \cdot 10^{-14}$	$1,9294 \cdot 10^{-13}$	$1,6657 \cdot 10^{-13}$	$3,9554 \cdot 10^{-14}$

(continua)

TABELA A.1 - (continuação)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
y_{21}	$1,4631 \cdot 10^{-13}$	$6,5285 \cdot 10^{-14}$	$1,7228 \cdot 10^{-13}$	$1,4658 \cdot 10^{-13}$	$1,1624 \cdot 10^{-14}$	$9,3487 \cdot 10^{-15}$	$1,3413 \cdot 10^{-13}$	$1,1583 \cdot 10^{-13}$	$1,901 \cdot 10^{-13}$
y_{22}	$6,9158 \cdot 10^{-14}$	$1,5882 \cdot 10^{-13}$	$1,9307 \cdot 10^{-13}$	$9,4778 \cdot 10^{-14}$	$1,5511 \cdot 10^{-13}$	$1,7146 \cdot 10^{-13}$	$1,5332 \cdot 10^{-13}$	$1,0107 \cdot 10^{-13}$	$4,59 \cdot 10^{-14}$
y_{23}	$1,1187 \cdot 10^{-13}$	$1,1238 \cdot 10^{-13}$	$1,8467 \cdot 10^{-13}$	$1,1955 \cdot 10^{-14}$	$2,6051 \cdot 10^{-14}$	$8,2217 \cdot 10^{-14}$	$8,6244 \cdot 10^{-14}$	$9,4432 \cdot 10^{-14}$	$4,3023 \cdot 10^{-14}$
y_{24}	$1,3275 \cdot 10^{-13}$	$1,3631 \cdot 10^{-13}$	$1,922 \cdot 10^{-14}$	$9,6901 \cdot 10^{-14}$	$1,4008 \cdot 10^{-14}$	$1,6401 \cdot 10^{-13}$	$1,5062 \cdot 10^{-13}$	$1,4734 \cdot 10^{-13}$	$1,6594 \cdot 10^{-13}$
y_{25}	$1,6176 \cdot 10^{-13}$	$1,4679 \cdot 10^{-13}$	$4,8119 \cdot 10^{-14}$	$1,0325 \cdot 10^{-13}$	$9,1118 \cdot 10^{-14}$	$7,0634 \cdot 10^{-14}$	$4,9733 \cdot 10^{-14}$	$3,2573 \cdot 10^{-14}$	$1,435 \cdot 10^{-13}$
y_{26}	$1,4011 \cdot 10^{-13}$	$4,2197 \cdot 10^{-14}$	$1,917 \cdot 10^{-13}$	$1,694 \cdot 10^{-13}$	$8,8628 \cdot 10^{-14}$	$8,8003 \cdot 10^{-14}$	$1,0015 \cdot 10^{-13}$	$1,3473 \cdot 10^{-14}$	$1,7614 \cdot 10^{-13}$
y_{27}	$6,4884 \cdot 10^{-14}$	$1,6107 \cdot 10^{-13}$	$1,0148 \cdot 10^{-13}$	$3,3003 \cdot 10^{-14}$	$1,8204 \cdot 10^{-13}$	$1,1265 \cdot 10^{-13}$	$1,3862 \cdot 10^{-13}$	$5,832 \cdot 10^{-14}$	$1,0065 \cdot 10^{-13}$
y_{28}	$1,2242 \cdot 10^{-13}$	$6,3022 \cdot 10^{-14}$	$3,0423 \cdot 10^{-14}$	$9,9231 \cdot 10^{-14}$	$1,3757 \cdot 10^{-13}$	$3,4818 \cdot 10^{-14}$	$2,7556 \cdot 10^{-15}$	$3,2718 \cdot 10^{-14}$	$8,9399 \cdot 10^{-14}$
y_{29}	$1,1192 \cdot 10^{-13}$	$9,2204 \cdot 10^{-14}$	$1,0236 \cdot 10^{-13}$	$1,1458 \cdot 10^{-13}$	$1,553 \cdot 10^{-13}$	$1,1349 \cdot 10^{-13}$	$3,7101 \cdot 10^{-14}$	$5,9778 \cdot 10^{-14}$	$1,7205 \cdot 10^{-13}$
y_{30}	$1,7513 \cdot 10^{-13}$	$6,73 \cdot 10^{-14}$	$1,5655 \cdot 10^{-13}$	$8,5239 \cdot 10^{-14}$	$5,2291 \cdot 10^{-14}$	$1,4098 \cdot 10^{-13}$	$1,1499 \cdot 10^{-13}$	$1,5766 \cdot 10^{-13}$	$5,4277 \cdot 10^{-14}$
y_{31}	$1,4585 \cdot 10^{-13}$	$1,3748 \cdot 10^{-13}$	$2,9436 \cdot 10^{-14}$	$8,2368 \cdot 10^{-14}$	$6,1219 \cdot 10^{-14}$	$7,7332 \cdot 10^{-14}$	$1,625 \cdot 10^{-13}$	$1,6972 \cdot 10^{-13}$	$1,7695 \cdot 10^{-13}$
y_{32}	$1,1562 \cdot 10^{-13}$	$1,9319 \cdot 10^{-13}$	$9,9369 \cdot 10^{-14}$	$6,1215 \cdot 10^{-14}$	$1,7001 \cdot 10^{-13}$	$1,6354 \cdot 10^{-13}$	$5,0221 \cdot 10^{-14}$	$3,4183 \cdot 10^{-14}$	$2,7151 \cdot 10^{-14}$
y_{33}	$1,7344 \cdot 10^{-13}$	$6,4079 \cdot 10^{-14}$	$1,3609 \cdot 10^{-13}$	$7,3162 \cdot 10^{-14}$	$1,5386 \cdot 10^{-13}$	$6,4853 \cdot 10^{-14}$	$1,3165 \cdot 10^{-13}$	$1,5106 \cdot 10^{-13}$	$7,5294 \cdot 10^{-14}$
y_{34}	$1,1121 \cdot 10^{-13}$	$3,352 \cdot 10^{-14}$	$1,8221 \cdot 10^{-13}$	$1,0025 \cdot 10^{-13}$	$2,5616 \cdot 10^{-14}$	$1,2788 \cdot 10^{-13}$	$1,2456 \cdot 10^{-13}$	$1,813 \cdot 10^{-13}$	$8,3705 \cdot 10^{-14}$

(conclusão)

TABELA A.2 - Permeabilidade absoluta.

	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈
Y ₁	1,0815 10 ⁻¹³	1,6593 10 ⁻¹³	5,7792 10 ⁻¹⁴	1,4405 10 ⁻¹³	7,0152 10 ⁻¹⁴	3,2351 10 ⁻¹⁶	1,6894 10 ⁻¹³	1,8488 10 ⁻¹⁴	1,7698 10 ⁻¹³
Y ₂	1,5111 10 ⁻¹³	1,3037 10 ⁻¹³	4,3998 10 ⁻¹⁴	1,9207 10 ⁻¹³	1,6276 10 ⁻¹⁵	4,6974 10 ⁻¹⁴	1,1346 10 ⁻¹³	6,2466 10 ⁻¹⁴	3,5767 10 ⁻¹⁴
Y ₃	9,971 10 ⁻¹⁵	1,2904 10 ⁻¹³	1,0824 10 ⁻¹³	1,5407 10 ⁻¹³	4,2903 10 ⁻¹⁴	1,5699 10 ⁻¹⁴	2,8156 10 ⁻¹⁴	1,014 10 ⁻¹³	1,0837 10 ⁻¹³
Y ₄	6,9456 10 ⁻¹⁴	1,4742 10 ⁻¹³	1,7054 10 ⁻¹³	4,4099 10 ⁻¹⁴	7,8467 10 ⁻¹⁴	1,9655 10 ⁻¹³	1,6182 10 ⁻¹⁴	9,9277 10 ⁻¹⁴	1,9271 10 ⁻¹³
Y ₅	1,1534 10 ⁻¹³	1,8703 10 ⁻¹⁴	9,0116 10 ⁻¹⁴	1,3736 10 ⁻¹³	1,9186 10 ⁻¹³	1,8501 10 ⁻¹³	1,0131 10 ⁻¹³	5,0569 10 ⁻¹⁴	9,1421 10 ⁻¹⁴
Y ₆	1,8801 10 ⁻¹³	1,8798 10 ⁻¹⁴	1,4065 10 ⁻¹³	1,4101 10 ⁻¹³	1,282 10 ⁻¹³	1,9491 10 ⁻¹³	7,2379 10 ⁻¹⁴	7,0804 10 ⁻¹⁴	1,1389 10 ⁻¹³
Y ₇	6,8908 10 ⁻¹⁴	1,7956 10 ⁻¹³	6,5031 10 ⁻¹⁴	2,948 10 ⁻¹⁴	7,919 10 ⁻¹⁴	1,2462 10 ⁻¹³	8,7822 10 ⁻¹⁴	1,9534 10 ⁻¹³	8,6279 10 ⁻¹⁴
Y ₈	1,3379 10 ⁻¹³	1,5346 10 ⁻¹³	8,2064 10 ⁻¹⁴	6,5274 10 ⁻¹⁴	9,7467 10 ⁻¹⁴	1,8723 10 ⁻¹⁴	6,5382 10 ⁻¹⁴	8,556 10 ⁻¹⁴	5,4014 10 ⁻¹⁴
Y ₉	4,5561 10 ⁻¹⁵	2,9574 10 ⁻¹⁴	3,758 10 ⁻¹⁴	3,9247 10 ⁻¹⁴	1,8525 10 ⁻¹³	1,9334 10 ⁻¹³	2,3824 10 ⁻¹⁵	1,9408 10 ⁻¹³	8,3937 10 ⁻¹⁴
Y ₁₀	1,6119 10 ⁻¹³	2,2438 10 ⁻¹⁴	1,6406 10 ⁻¹³	6,7798 10 ⁻¹⁵	1,0395 10 ⁻¹³	2,6671 10 ⁻¹⁴	5,5496 10 ⁻¹⁴	1,2366 10 ⁻¹³	6,4916 10 ⁻¹⁵
Y ₁₁	1,3799 10 ⁻¹³	4,377 10 ⁻¹⁴	1,7147 10 ⁻¹³	7,3891 10 ⁻¹⁴	8,8933 10 ⁻¹⁴	3,1791 10 ⁻¹⁵	1,7558 10 ⁻¹⁴	1,1961 10 ⁻¹³	1,7322 10 ⁻¹⁴
Y ₁₂	1,9543 10 ⁻¹³	1,409 10 ⁻¹³	1,2195 10 ⁻¹³	1,4398 10 ⁻¹³	1,5872 10 ⁻¹³	1,942 10 ⁻¹³	1,8624 10 ⁻¹³	3,1769 10 ⁻¹⁴	1,7675 10 ⁻¹³
Y ₁₃	9,5175 10 ⁻¹⁴	6,7557 10 ⁻¹⁴	2,2925 10 ⁻¹⁴	7,247 10 ⁻¹⁴	1,0654 10 ⁻¹³	1,3271 10 ⁻¹³	1,1626 10 ⁻¹³	9,2384 10 ⁻¹⁴	7,8361 10 ⁻¹⁴
Y ₁₄	1,1625 10 ⁻¹³	4,6157 10 ⁻¹⁴	1,2005 10 ⁻¹³	1,9443 10 ⁻¹³	1,361 10 ⁻¹³	5,226 10 ⁻¹⁴	1,3139 10 ⁻¹³	1,6526 10 ⁻¹³	8,7139 10 ⁻¹⁴
Y ₁₅	1,8357 10 ⁻¹³	1,2919 10 ⁻¹³	8,6124 10 ⁻¹⁴	9,8509 10 ⁻¹⁴	1,9512 10 ⁻¹³	2,9979 10 ⁻¹⁴	8,3497 10 ⁻¹⁴	1,2697 10 ⁻¹⁴	1,748 10 ⁻¹³
Y ₁₆	2,7791 10 ⁻¹⁴	5,1602 10 ⁻¹⁴	8,5434 10 ⁻¹⁴	9,0271 10 ⁻¹⁴	1,4951 10 ⁻¹³	9,3131 10 ⁻¹⁴	1,6467 10 ⁻¹⁴	5,6725 10 ⁻¹⁴	1,4307 10 ⁻¹³
Y ₁₇	2,8447 10 ⁻¹⁴	8,8748 10 ⁻¹⁴	1,2498 10 ⁻¹³	1,1332 10 ⁻¹³	9,5832 10 ⁻¹⁴	1,0846 10 ⁻¹³	3,4177 10 ⁻¹⁴	1,2389 10 ⁻¹³	9,016 10 ⁻¹⁴
Y ₁₈	1,4195 10 ⁻¹³	1,2844 10 ⁻¹³	1,1766 10 ⁻¹³	1,8573 10 ⁻¹³	6,3515 10 ⁻¹⁴	1,7163 10 ⁻¹³	3,0045 10 ⁻¹⁴	3,8922 10 ⁻¹⁴	1,6091 10 ⁻¹³
Y ₁₉	1,5377 10 ⁻¹³	3,5963 10 ⁻¹⁴	6,635 10 ⁻¹⁴	4,9019 10 ⁻¹⁴	1,645 10 ⁻¹³	7,2568 10 ⁻¹⁴	4,585 10 ⁻¹⁴	1,7252 10 ⁻¹³	1,2548 10 ⁻¹³
Y ₂₀	3,6099 10 ⁻¹⁴	9,2145 10 ⁻¹⁴	4,1624 10 ⁻¹⁴	1,3638 10 ⁻¹³	1,675 10 ⁻¹⁴	8,1553 10 ⁻¹⁴	1,4635 10 ⁻¹³	2,9072 10 ⁻¹⁴	1,6561 10 ⁻¹³

(continua)

TABELA A.2 - (continuação)

	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈
Y₂₁	1,5502 10 ⁻¹³	1,0517 10 ⁻¹³	8,6985 10 ⁻¹⁴	8,8208 10 ⁻¹⁴	1,6665 10 ⁻¹³	7,9472 10 ⁻¹⁴	1,6719 10 ⁻¹³	1,6966 10 ⁻¹³	3,9036 10 ⁻¹⁴
Y₂₂	5,0875 10 ⁻¹⁵	1,2164 10 ⁻¹³	5,2966 10 ⁻¹⁴	7,0995 10 ⁻¹⁴	1,494 10 ⁻¹³	1,0472 10 ⁻¹³	1,5435 10 ⁻¹³	1,9018 10 ⁻¹³	1,5939 10 ⁻¹³
Y₂₃	8,0414 10 ⁻¹⁴	8,0765 10 ⁻¹⁴	1,1214 10 ⁻¹³	1,0037 10 ⁻¹³	5,9643 10 ⁻¹⁴	1,8935 10 ⁻¹⁵	1,0048 10 ⁻¹³	1,8247 10 ⁻¹⁴	1,8218 10 ⁻¹³
Y₂₄	1,7891 10 ⁻¹³	8,1129 10 ⁻¹⁴	2,4627 10 ⁻¹⁴	3,759 10 ⁻¹⁴	1,518 10 ⁻¹³	1,6981 10 ⁻¹³	1,8864 10 ⁻¹³	2,8967 10 ⁻¹⁴	1,4676 10 ⁻¹³
Y₂₅	6,5224 10 ⁻¹⁴	1,3394 10 ⁻¹³	1,457 10 ⁻¹³	8,2191 10 ⁻¹⁴	1,2904 10 ⁻¹³	7,4719 10 ⁻¹⁴	7,9874 10 ⁻¹⁴	8,9525 10 ⁻¹⁴	7,2185 10 ⁻¹⁴
Y₂₆	1,815 10 ⁻¹³	1,8366 10 ⁻¹³	1,6755 10 ⁻¹³	1,8368 10 ⁻¹³	6,2265 10 ⁻¹⁴	3,8432 10 ⁻¹⁴	1,0906 10 ⁻¹³	1,4942 10 ⁻¹³	3,9542 10 ⁻¹⁵
Y₂₇	1,3612 10 ⁻¹³	8,7519 10 ⁻¹⁵	1,9392 10 ⁻¹³	9,6845 10 ⁻¹⁴	1,2871 10 ⁻¹³	1,2561 10 ⁻¹³	8,0344 10 ⁻¹⁴	1,2143 10 ⁻¹³	1,8237 10 ⁻¹³
Y₂₈	1,8804 10 ⁻¹³	1,8225 10 ⁻¹³	1,2245 10 ⁻¹³	1,4108 10 ⁻¹³	7,5981 10 ⁻¹⁴	5,7299 10 ⁻¹⁴	3,7598 10 ⁻¹⁴	2,6781 10 ⁻¹⁴	2,187 10 ⁻¹⁴
Y₂₉	1,6945 10 ⁻¹³	8,1925 10 ⁻¹⁴	1,0948 10 ⁻¹³	1,958 10 ⁻¹³	6,626 10 ⁻¹⁴	1,8513 10 ⁻¹³	4,8579 10 ⁻¹⁴	5,9807 10 ⁻¹⁴	2,2454 10 ⁻¹⁴
Y₃₀	1,6225 10 ⁻¹³	5,567 10 ⁻¹⁶	1,1767 10 ⁻¹³	1,251 10 ⁻¹³	1,3228 10 ⁻¹⁵	1,1129 10 ⁻¹³	1,8389 10 ⁻¹³	8,1979 10 ⁻¹⁴	3,8342 10 ⁻¹⁶
Y₃₁	9,4229 10 ⁻¹⁴	6,6448 10 ⁻¹⁴	1,751 10 ⁻¹³	3,3172 10 ⁻¹⁵	9,3921 10 ⁻¹⁴	5,9185 10 ⁻¹⁴	2,1078 10 ⁻¹⁴	1,2828 10 ⁻¹³	3,331 10 ⁻¹⁵
Y₃₂	7,6326 10 ⁻¹⁴	4,4129 10 ⁻¹⁴	1,8558 10 ⁻¹³	1,0176 10 ⁻¹³	1,5768 10 ⁻¹³	6,8675 10 ⁻¹⁴	1,989 10 ⁻¹⁵	1,6475 10 ⁻¹³	4,9844 10 ⁻¹⁴
Y₃₃	4,8039 10 ⁻¹⁴	1,1431 10 ⁻¹³	1,6141 10 ⁻¹³	7,9984 10 ⁻¹⁴	9,122 10 ⁻¹⁴	1,5673 10 ⁻¹³	2,6924 10 ⁻¹⁴	7,2379 10 ⁻¹⁴	7,5476 10 ⁻¹⁴
Y₃₄	1,1829 10 ⁻¹³	1,5374 10 ⁻¹³	2,8796 10 ⁻¹⁴	4,91 10 ⁻¹⁴	1,0441 10 ⁻¹³	2,4979 10 ⁻¹⁴	9,1229 10 ⁻¹⁴	2,5335 10 ⁻¹⁴	3,4453 10 ⁻¹⁴

(conclusão)

TABELA A.3 - Permeabilidade absoluta.

	X ₁₉	X ₂₀	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	X ₂₄	X ₂₅	X ₂₆	X ₂₇
Y ₁	8,5021 10 ⁻¹⁴	1,8941 10 ⁻¹³	3,692 10 ⁻¹⁴	8,2983 10 ⁻¹⁴	1,377 10 ⁻¹³	8,8244 10 ⁻¹⁴	8,6935 10 ⁻¹⁵	1,5698 10 ⁻¹³	4,5064 10 ⁻¹⁴
Y ₂	9,0542 10 ⁻¹⁴	2,0029 10 ⁻¹⁴	3,205 10 ⁻¹⁴	1,1939 10 ⁻¹³	1,8113 10 ⁻¹³	6,6699 10 ⁻¹⁵	4,3703 10 ⁻¹⁵	7,9659 10 ⁻¹⁴	5,3282 10 ⁻¹⁴
Y ₃	6,8697 10 ⁻¹⁴	8,9347 10 ⁻¹⁴	2,5381 10 ⁻¹⁴	1,0027 10 ⁻¹³	6,0833 10 ⁻¹⁴	1,4217 10 ⁻¹³	4,1129 10 ⁻¹⁴	1,4985 10 ⁻¹³	1,6651 10 ⁻¹³
Y ₄	1,4778 10 ⁻¹³	1,8807 10 ⁻¹³	1,2614 10 ⁻¹³	1,8743 10 ⁻¹⁴	1,4037 10 ⁻¹³	5,1439 10 ⁻¹⁴	1,7432 10 ⁻¹⁴	1,7582 10 ⁻¹⁴	2,5961 10 ⁻¹⁴
Y ₅	2,6359 10 ⁻¹⁴	7,9909 10 ⁻¹⁵	1,819 10 ⁻¹³	1,1277 10 ⁻¹³	1,358 10 ⁻¹⁴	1,1448 10 ⁻¹³	6,3428 10 ⁻¹⁴	1,7532 10 ⁻¹³	1,9007 10 ⁻¹³
Y ₆	1,1778 10 ⁻¹³	9,2941 10 ⁻¹⁴	3,6001 10 ⁻¹⁴	1,2166 10 ⁻¹³	1,7159 10 ⁻¹³	2,3443 10 ⁻¹⁵	5,7925 10 ⁻¹⁵	1,81 10 ⁻¹³	1,9043 10 ⁻¹³
Y ₇	1,1959 10 ⁻¹³	1,7544 10 ⁻¹³	1,0264 10 ⁻¹³	1,3957 10 ⁻¹³	1,4109 10 ⁻¹³	1,3497 10 ⁻¹³	1,9426 10 ⁻¹³	1,2334 10 ⁻¹³	5,5159 10 ⁻¹⁴
Y ₈	2,567 10 ⁻¹⁴	4,2908 10 ⁻¹⁴	4,5723 10 ⁻¹⁴	6,5395 10 ⁻¹⁴	1,7427 10 ⁻¹³	2,4094 10 ⁻¹⁴	1,6395 10 ⁻¹³	9,4543 10 ⁻¹⁴	3,2902 10 ⁻¹⁴
Y ₉	8,0634 10 ⁻¹⁴	1,3011 10 ⁻¹³	1,4632 10 ⁻¹³	1,1937 10 ⁻¹³	1,005 10 ⁻¹³	2,4787 10 ⁻¹⁴	1,4778 10 ⁻¹³	1,7681 10 ⁻¹³	1,6624 10 ⁻¹³
Y ₁₀	6,0463 10 ⁻¹⁵	1,0276 10 ⁻¹³	1,1758 10 ⁻¹⁴	1,2656 10 ⁻¹³	1,3825 10 ⁻¹³	1,0765 10 ⁻¹³	1,1067 10 ⁻¹³	7,6488 10 ⁻¹⁴	1,6101 10 ⁻¹³
Y ₁₁	1,4377 10 ⁻¹³	9,5701 10 ⁻¹⁴	9,2244 10 ⁻¹⁴	3,4064 10 ⁻¹⁴	1,468 10 ⁻¹³	1,5077 10 ⁻¹³	1,7284 10 ⁻¹³	5,3618 10 ⁻¹⁴	9,1297 10 ⁻¹⁴
Y ₁₂	9,3834 10 ⁻¹⁴	1,5239 10 ⁻¹³	2,6902 10 ⁻¹⁴	7,2971 10 ⁻¹⁴	5,9794 10 ⁻¹⁴	1,9186 10 ⁻¹⁵	2,2206 10 ⁻¹⁴	9,5333 10 ⁻¹⁴	1,1042 10 ⁻¹³
Y ₁₃	1,788 10 ⁻¹³	9,5271 10 ⁻¹⁴	1,8436 10 ⁻¹³	7,0214 10 ⁻¹⁴	1,0162 10 ⁻¹³	1,4788 10 ⁻¹⁴	5,7259 10 ⁻¹⁴	6,5889 10 ⁻¹⁴	1,3921 10 ⁻¹³
Y ₁₄	4,869 10 ⁻¹⁴	1,5575 10 ⁻¹³	1,2407 10 ⁻¹³	7,5602 10 ⁻¹⁴	9,0073 10 ⁻¹⁴	6,4766 10 ⁻¹⁵	1,896 10 ⁻¹³	4,3994 10 ⁻¹⁵	9,0649 10 ⁻¹⁴
Y ₁₅	1,041 10 ⁻¹³	7,0903 10 ⁻¹⁴	9,8364 10 ⁻¹⁴	9,0218 10 ⁻¹⁴	6,5023 10 ⁻¹⁴	4,8986 10 ⁻¹⁴	1,59 10 ⁻¹³	9,3246 10 ⁻¹⁴	6,3626 10 ⁻¹⁴
Y ₁₆	7,8249 10 ⁻¹⁴	4,3667 10 ⁻¹⁴	1,137 10 ⁻¹³	6,0377 10 ⁻¹⁴	1,032 10 ⁻¹³	6,1788 10 ⁻¹⁴	1,5843 10 ⁻¹³	1,5497 10 ⁻¹³	1,4367 10 ⁻¹³
Y ₁₇	9,167 10 ⁻¹⁴	1,5909 10 ⁻¹³	1,9606 10 ⁻¹³	1,4031 10 ⁻¹³	3,0445 10 ⁻¹⁴	1,7914 10 ⁻¹³	8,9644 10 ⁻¹⁴	1,3708 10 ⁻¹³	4,9748 10 ⁻¹⁴
Y ₁₈	5,0095 10 ⁻¹⁴	1,8301 10 ⁻¹³	1,0692 10 ⁻¹⁴	1,238 10 ⁻¹³	1,8744 10 ⁻¹³	1,5234 10 ⁻¹³	1,7515 10 ⁻¹⁵	2,3438 10 ⁻¹⁴	1,5966 10 ⁻¹⁴
Y ₁₉	1,9465 10 ⁻¹³	1,5415 10 ⁻¹³	9,7446 10 ⁻¹⁴	1,3611 10 ⁻¹³	1,6023 10 ⁻¹³	1,8905 10 ⁻¹³	1,361 10 ⁻¹⁴	1,4692 10 ⁻¹³	1,8691 10 ⁻¹³
Y ₂₀	8,2963 10 ⁻¹⁴	1,2385 10 ⁻¹³	1,9552 10 ⁻¹⁴	2,9766 10 ⁻¹⁴	3,5609 10 ⁻¹⁴	1,5368 10 ⁻¹³	2,4308 10 ⁻¹⁴	5,7362 10 ⁻¹⁴	4,682 10 ⁻¹⁴

(continua)

TABELA A.3 - (continuação)

	X ₁₉	X ₂₀	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	X ₂₄	X ₂₅	X ₂₆	X ₂₇
Y₂₁	6, 2863 10 ⁻¹⁴	1, 6035 10 ⁻¹³	6, 1525 10 ⁻¹⁴	1, 8186 10 ⁻¹³	1, 9308 10 ⁻¹³	1, 0732 10 ⁻¹³	6, 1762 10 ⁻¹⁴	9, 6928 10 ⁻¹⁵	4, 645 10 ⁻¹⁴
Y₂₂	1, 4978 10 ⁻¹³	1, 2125 10 ⁻¹³	1, 532 10 ⁻¹³	1, 2532 10 ⁻¹³	1, 8623 10 ⁻¹³	1, 1949 10 ⁻¹³	3, 4343 10 ⁻¹⁴	1, 8565 10 ⁻¹⁴	3, 0263 10 ⁻¹⁴
Y₂₃	1, 2822 10 ⁻¹³	8, 1732 10 ⁻¹⁴	1, 4149 10 ⁻¹³	5, 6193 10 ⁻¹⁴	5, 7267 10 ⁻¹⁶	4, 7086 10 ⁻¹⁴	1, 9967 10 ⁻¹⁴	1, 3816 10 ⁻¹³	1, 8631 10 ⁻¹³
Y₂₄	5, 7761 10 ⁻¹⁴	1, 5342 10 ⁻¹³	6, 7384 10 ⁻¹⁴	1, 309 10 ⁻¹³	7, 4179 10 ⁻¹⁵	2, 7526 10 ⁻¹⁴	5, 7284 10 ⁻¹⁵	5, 1095 10 ⁻¹⁴	8, 1344 10 ⁻¹⁵
Y₂₅	8, 005 10 ⁻¹⁴	1, 6394 10 ⁻¹⁴	1, 6723 10 ⁻¹³	1, 4808 10 ⁻¹³	5, 9646 10 ⁻¹⁴	2, 8877 10 ⁻¹⁵	7, 1166 10 ⁻¹⁴	1, 4201 10 ⁻¹³	9, 6504 10 ⁻¹⁴
Y₂₆	1, 7733 10 ⁻¹³	4, 7291 10 ⁻¹⁴	6, 6307 10 ⁻¹⁴	2, 1406 10 ⁻¹⁴	8, 019 10 ⁻¹⁴	1, 5199 10 ⁻¹³	1, 4542 10 ⁻¹⁵	1, 8531 10 ⁻¹³	1, 8881 10 ⁻¹³
Y₂₇	5, 9705 10 ⁻¹⁴	2, 7252 10 ⁻¹⁴	4, 3409 10 ⁻¹⁴	6, 7834 10 ⁻¹⁴	8, 4827 10 ⁻¹⁴	5, 397 10 ⁻¹⁴	1, 1432 10 ⁻¹³	1, 0433 10 ⁻¹⁴	2, 4128 10 ⁻¹⁴
Y₂₈	1, 3192 10 ⁻¹³	9, 6745 10 ⁻¹⁴	5, 1472 10 ⁻¹⁴	1, 7337 10 ⁻¹³	1, 8439 10 ⁻¹³	4, 6173 10 ⁻¹⁴	1, 8225 10 ⁻¹³	6, 6114 10 ⁻¹⁴	1, 0459 10 ⁻¹³
Y₂₉	1, 522 10 ⁻¹³	1, 2548 10 ⁻¹³	1, 5226 10 ⁻¹³	1, 2545 10 ⁻¹⁴	7, 0556 10 ⁻¹⁴	1, 0985 10 ⁻¹³	3, 9782 10 ⁻¹⁴	6, 8026 10 ⁻¹⁴	2, 5266 10 ⁻¹⁴
Y₃₀	1, 3549 10 ⁻¹³	1, 6745 10 ⁻¹³	1, 7732 10 ⁻¹³	1, 4525 10 ⁻¹³	7, 7733 10 ⁻¹⁴	1, 636 10 ⁻¹³	1, 8406 10 ⁻¹³	1, 2295 10 ⁻¹³	1, 9263 10 ⁻¹³
Y₃₁	1, 4599 10 ⁻¹³	1, 8605 10 ⁻¹³	1, 1442 10 ⁻¹³	5, 0059 10 ⁻¹⁴	1, 4769 10 ⁻¹³	8, 9284 10 ⁻¹⁵	1, 2152 10 ⁻¹³	1, 0943 10 ⁻¹³	1, 6151 10 ⁻¹³
Y₃₂	3, 7967 10 ⁻¹⁴	1, 5641 10 ⁻¹³	5, 6715 10 ⁻¹⁴	9, 519 10 ⁻¹⁴	1, 7698 10 ⁻¹⁴	1, 0484 10 ⁻¹³	1, 2003 10 ⁻¹³	4, 9933 10 ⁻¹⁴	6, 995 10 ⁻¹⁴
Y₃₃	1, 3599 10 ⁻¹³	6, 5005 10 ⁻¹⁴	4, 6004 10 ⁻¹⁴	1, 4119 10 ⁻¹³	9, 6925 10 ⁻¹⁴	1, 8882 10 ⁻¹³	8, 1105 10 ⁻¹⁴	9, 6135 10 ⁻¹⁴	3, 0382 10 ⁻¹⁴
Y₃₄	2, 4894 10 ⁻¹⁴	3, 9871 10 ⁻¹⁴	1, 591 10 ⁻¹³	1, 1943 10 ⁻¹³	1, 3666 10 ⁻¹³	1, 4134 10 ⁻¹³	7, 4414 10 ⁻¹⁴	7, 4557 10 ⁻¹⁴	1, 9685 10 ⁻¹³

(conclusão)

TABELA A.4 - Permeabilidade absoluta.

	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
y_1	$1,1094 \cdot 10^{-13}$	$6,8524 \cdot 10^{-14}$	$1,4556 \cdot 10^{-13}$	$6,6324 \cdot 10^{-14}$	$1,8954 \cdot 10^{-13}$	$7,4443 \cdot 10^{-14}$	$1,1919 \cdot 10^{-13}$
y_2	$9,5025 \cdot 10^{-14}$	$1,4286 \cdot 10^{-13}$	$1,4131 \cdot 10^{-13}$	$4,990410^{-15}$	$1,3346 \cdot 10^{-13}$	$3,3587 \cdot 10^{-15}$	$1,9627 \cdot 10^{-13}$
y_3	$1,0903 \cdot 10^{-13}$	$4,6918 \cdot 10^{-14}$	$1,7886 \cdot 10^{-13}$	$1,7439 \cdot 10^{-13}$	$9,3437 \cdot 10^{-14}$	$1,8893 \cdot 10^{-13}$	$7,4205 \cdot 10^{-14}$
y_4	$1,7346 \cdot 10^{-13}$	$6,0024 \cdot 10^{-15}$	$2,002 \cdot 10^{-14}$	$1,6626 \cdot 10^{-13}$	$1,3936 \cdot 10^{-13}$	$5,3033 \cdot 10^{-14}$	$1,7965 \cdot 10^{-13}$
y_5	$6,8094 \cdot 10^{-14}$	$1,0624 \cdot 10^{-13}$	$2,9512 \cdot 10^{-15}$	$6,583 \cdot 10^{-14}$	$1,8901 \cdot 10^{-13}$	$1,4833 \cdot 10^{-13}$	$1,1892 \cdot 10^{-13}$
y_6	$1,2302 \cdot 10^{-13}$	$1,705 \cdot 10^{-13}$	$1,4208 \cdot 10^{-13}$	$1,7743 \cdot 10^{-13}$	$3,5373 \cdot 10^{-14}$	$1,6207 \cdot 10^{-13}$	$1,5976 \cdot 10^{-13}$
y_7	$1,1257 \cdot 10^{-13}$	$1,5004 \cdot 10^{-13}$	$1,512 \cdot 10^{-13}$	$4,2215 \cdot 10^{-14}$	$8,7991 \cdot 10^{-14}$	$1,8049 \cdot 10^{-13}$	$6,1554 \cdot 10^{-14}$
y_8	$1,592 \cdot 10^{-14}$	$8,1651 \cdot 10^{-14}$	$1,8723 \cdot 10^{-13}$	$3,8899 \cdot 10^{-14}$	$1,0636 \cdot 10^{-13}$	$1,4038 \cdot 10^{-13}$	$7,3446 \cdot 10^{-14}$
y_9	$1,9559 \cdot 10^{-13}$	$1,6017 \cdot 10^{-13}$	$1,3197 \cdot 10^{-14}$	$1,4936 \cdot 10^{-13}$	$6,6023 \cdot 10^{-14}$	$1,1114 \cdot 10^{-13}$	$1,2965 \cdot 10^{-13}$
y_{10}	$1,9495 \cdot 10^{-13}$	$1,8593 \cdot 10^{-14}$	$1,7612 \cdot 10^{-13}$	$6,5364 \cdot 10^{-14}$	$9,0095 \cdot 10^{-15}$	$1,0694 \cdot 10^{-13}$	$9,5253 \cdot 10^{-14}$
y_{11}	$1,4897 \cdot 10^{-14}$	$1,1296 \cdot 10^{-13}$	$1,777 \cdot 10^{-13}$	$1,8694 \cdot 10^{-13}$	$8,0152 \cdot 10^{-14}$	$1,1975 \cdot 10^{-13}$	$1,6515 \cdot 10^{-13}$
y_{12}	$8,9082 \cdot 10^{-15}$	$1,4743 \cdot 10^{-13}$	$1,453 \cdot 10^{-13}$	$5,8978 \cdot 10^{-14}$	$6,8504 \cdot 10^{-14}$	$1,1174 \cdot 10^{-13}$	$1,3173 \cdot 10^{-13}$
y_{13}	$6,2214 \cdot 10^{-14}$	$7,7961 \cdot 10^{-14}$	$9,4837 \cdot 10^{-14}$	$2,6243 \cdot 10^{-15}$	$7,2473 \cdot 10^{-15}$	$1,2305 \cdot 10^{-13}$	$1,8129 \cdot 10^{-13}$
y_{14}	$6,1098 \cdot 10^{-14}$	$1,3384 \cdot 10^{-13}$	$2,2033 \cdot 10^{-14}$	$1,7141 \cdot 10^{-13}$	$1,1632 \cdot 10^{-14}$	$1,2612 \cdot 10^{-13}$	$5,5606 \cdot 10^{-14}$
y_{15}	$1,1504 \cdot 10^{-13}$	$1,628 \cdot 10^{-13}$	$1,7786 \cdot 10^{-13}$	$1,9611 \cdot 10^{-13}$	$2,3448 \cdot 10^{-14}$	$1,2871 \cdot 10^{-13}$	$1,5936 \cdot 10^{-13}$
y_{16}	$1,2052 \cdot 10^{-13}$	$7,7385 \cdot 10^{-14}$	$1,833 \cdot 10^{-13}$	$7,7989 \cdot 10^{-14}$	$1,7545 \cdot 10^{-13}$	$8,3578 \cdot 10^{-14}$	$8,3323 \cdot 10^{-14}$
y_{17}	$9,0969 \cdot 10^{-14}$	$3,8831 \cdot 10^{-14}$	$1,6004 \cdot 10^{-13}$	$6,2543 \cdot 10^{-14}$	$1,8351 \cdot 10^{-13}$	$2,1247 \cdot 10^{-14}$	$1,3425 \cdot 10^{-13}$
y_{18}	$5,1729 \cdot 10^{-14}$	$1,1537 \cdot 10^{-13}$	$1,2661 \cdot 10^{-13}$	$3,4646 \cdot 10^{-15}$	$6,2026 \cdot 10^{-14}$	$1,9598 \cdot 10^{-13}$	$1,3065 \cdot 10^{-13}$
y_{19}	$8,0155 \cdot 10^{-15}$	$1,2985 \cdot 10^{-13}$	$1,3411 \cdot 10^{-13}$	$1,9107 \cdot 10^{-13}$	$1,9549 \cdot 10^{-13}$	$9,5222 \cdot 10^{-14}$	$1,8499 \cdot 10^{-13}$
y_{20}	$1,0564 \cdot 10^{-13}$	$1,2614 \cdot 10^{-13}$	$3,8875 \cdot 10^{-14}$	$1,6645 \cdot 10^{-13}$	$9,4902 \cdot 10^{-14}$	$1,7922 \cdot 10^{-13}$	$1,9182 \cdot 10^{-13}$

(continua)

TABELA A.4 - (continuação)

	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
Y_{21}	$4,7202 \cdot 10^{-14}$	$5,5831 \cdot 10^{-14}$	$1,3196 \cdot 10^{-14}$	$1,7141 \cdot 10^{-13}$	$5,6792 \cdot 10^{-14}$	$2,2195 \cdot 10^{-14}$	$1,2584 \cdot 10^{-13}$
Y_{22}	$1,0825 \cdot 10^{-13}$	$4,294 \cdot 10^{-14}$	$8,5009 \cdot 10^{-14}$	$2,9781 \cdot 10^{-14}$	$1,1146 \cdot 10^{-13}$	$1,3501 \cdot 10^{-13}$	$3,6515 \cdot 10^{-14}$
Y_{23}	$1,0338 \cdot 10^{-13}$	$4,0562 \cdot 10^{-14}$	$5,8823 \cdot 10^{-14}$	$1,2318 \cdot 10^{-14}$	$1,3434 \cdot 10^{-14}$	$1,6524 \cdot 10^{-13}$	$3,6564 \cdot 10^{-14}$
Y_{24}	$1,6985 \cdot 10^{-13}$	$4,2427 \cdot 10^{-14}$	$4,4192 \cdot 10^{-14}$	$1,4883 \cdot 10^{-13}$	$1,1458 \cdot 10^{-13}$	$4,6122 \cdot 10^{-14}$	$1,3037 \cdot 10^{-13}$
Y_{25}	$1,3053 \cdot 10^{-14}$	$1,5771 \cdot 10^{-13}$	$1,1302 \cdot 10^{-13}$	$1,2429 \cdot 10^{-13}$	$1,2384 \cdot 10^{-13}$	$4,8643 \cdot 10^{-14}$	$8,6512 \cdot 10^{-14}$
Y_{26}	$2,4445 \cdot 10^{-14}$	$1,6832 \cdot 10^{-14}$	$1,2442 \cdot 10^{-13}$	$8,5467 \cdot 10^{-14}$	$1,3356 \cdot 10^{-13}$	$1,6315 \cdot 10^{-13}$	$1,2882 \cdot 10^{-13}$
Y_{27}	$1,9527 \cdot 10^{-13}$	$1,6028 \cdot 10^{-13}$	$5,4187 \cdot 10^{-14}$	$3,4723 \cdot 10^{-14}$	$8,4449 \cdot 10^{-15}$	$5,32 \cdot 10^{-14}$	$1,683 \cdot 10^{-13}$
Y_{28}	$6,7924 \cdot 10^{-14}$	$1,1699 \cdot 10^{-14}$	$1,4697 \cdot 10^{-13}$	$3,5594 \cdot 10^{-14}$	$1,8048 \cdot 10^{-13}$	$1,3659 \cdot 10^{-13}$	$1,6076 \cdot 10^{-13}$
Y_{29}	$1,926 \cdot 10^{-13}$	$7,3672 \cdot 10^{-14}$	$2,6188 \cdot 10^{-14}$	$6,3621 \cdot 10^{-14}$	$4,4105 \cdot 10^{-15}$	$1,8517 \cdot 10^{-14}$	$6,0021 \cdot 10^{-14}$
Y_{30}	$1,1183 \cdot 10^{-13}$	$1,2464 \cdot 10^{-13}$	$1,6744 \cdot 10^{-13}$	$3,779 \cdot 10^{-14}$	$1,3171 \cdot 10^{-14}$	$6,3288 \cdot 10^{-14}$	$8,7741 \cdot 10^{-14}$
Y_{31}	$1,7056 \cdot 10^{-13}$	$1,5047 \cdot 10^{-13}$	$1,024 \cdot 10^{-13}$	$1,3578 \cdot 10^{-13}$	$5,867 \cdot 10^{-14}$	$1,3283 \cdot 10^{-13}$	$1,5641 \cdot 10^{-13}$
Y_{32}	$1,6698 \cdot 10^{-13}$	$1,1139 \cdot 10^{-13}$	$3,8427 \cdot 10^{-14}$	$8,6502 \cdot 10^{-14}$	$1,4015 \cdot 10^{-13}$	$7,131 \cdot 10^{-14}$	$1,0988 \cdot 10^{-13}$
Y_{33}	$7,525 \cdot 10^{-14}$	$1,0338 \cdot 10^{-13}$	$5,0116 \cdot 10^{-14}$	$5,8594 \cdot 10^{-14}$	$1,4203 \cdot 10^{-14}$	$9,8466 \cdot 10^{-14}$	$1,7742 \cdot 10^{-13}$
Y_{34}	$1,6091 \cdot 10^{-13}$	$4,9654 \cdot 10^{-14}$	$6,8007 \cdot 10^{-14}$	$1,4868 \cdot 10^{-14}$	$5,0737 \cdot 10^{-14}$	$1,1873 \cdot 10^{-13}$	$1,7464 \cdot 10^{-13}$

(conclusão)