



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Lineker Matheus Silva Avelino

**Cosmologia no séc. XXI: um estudo na linha de 21 cm  
via Ciência do Radiotelescópio BINGO**

Campina Grande - PB  
2021



Lineker Matheus Silva Avelino

# **Cosmologia no séc. XXI: um estudo na linha de 21 cm via Ciência do Radiotelescópio BINGO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento as exigências desta, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de Concentração:** Física de Partículas, Cosmologia e Gravitação.

Orientador: Professor Dr. Luciano Barosi de Lemos

Campina Grande - PB  
2021

A948c Avelino, Lineker Matheus Silva.  
Cosmologia no séc. XXI: um estudo na linha de 21 cm via  
Ciência do Radiotelescópio BINGO / Lineker Matheus Silva  
Avelino. – Campina Grande, 2021.  
83 f.: il. : color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.  
"Orientação: Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos".  
Referências.

1. Radiotelescópio BINGO. 2. Baryon Acoustic Oscillations.  
3. Radiação de 21 cm. 4. Hidrogênio Neutro. 5. Simulações  
Computacionais. I. Lemos, Luciano Barosi de. II. Título.

CDU 681.758(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PÓS-GRADUACAO EM FÍSICA

Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 31  
DE AGOSTO DE 2021

Aos trinta e um dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **LINEKER MATEUS SILVA AVELINO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Luciano Barosi de Lemos** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **João Rafael Lucio dos Santos** – Doutor em Física, o professor **Carlos Alex Souza da Silva** – Doutor em Física, sendo os dois primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro integrante do corpo docente do Instituto Federal da Paraíba. **HORA DE INÍCIO: 14h00 – LOCAL: Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFGC decorrente do corona vírus.** Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Luciano Barosi de Lemos**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **LINEKER MATEUS SILVA AVELINO**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado "**Cosmologia no séc. XXI: um estudo na linha de 21 cm via Ciência do Radiotelescópio BINGO**". Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 31 de agosto de 2021.

**Hélio Pereira de Oliveira**

Secretário

**Luciano Barosi de Lemos**  
Presidente da Comissão e Orientador

**João Rafael Lucio dos Santos**  
Examinador Interno

**Carlos Alex Souza da Silva**  
Examinador Externo

**Lineker Mateus Silva Avelino**  
Candidato(a)

**João Rafael Lucio dos Santos**  
Coordenador do Programa

## 2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **LINEKER MATEUS SILVA AVELINO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuem credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS ALEX SOUZA DA SILVA, Usuário Externo**, em 31/08/2021, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **LINEKER MATHEUS SILVA AVELINO, Usuário Externo**, em 13/09/2021, às 12:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **LUCIANO BAROSI DE LEMOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 28/09/2021, às 09:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR (A)**, em 04/10/2021, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1710871** e o código CRC **A4AE3A85**.

# Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Dr. Luciano Barosi de Lemos, pela sua orientação, muita paciência, sermões, por seu grande exemplo profissional; e, por todo aprendizado que me foi passado (teórico e computacional) dos quais se tornou possível a realização e conclusão desta dissertação. Aos professores que constituíram a banca, por se disponibilizarem a avaliar este trabalho; acrescentando correções, observações e sugestões para a sua melhoria.

À CAPES pelo suporte financeiro que para mim foi, sem dúvida, um fator determinante para a continuação dos meus estudos. À instituição UFCG. À Unidade Acadêmica de Física, pela oportunidade de me desenvolver profissionalmente, pelo acolhimento e por toda a convivência com os professores e os colegas da pós-graduação.

À minha mãe, Maria José da Silva, por está sempre presente, e, as minhas irmãs. Aos meus amigos; em particular, Luilton, Luellen, Jefferson e Willyane, por todo o apoio e que sempre ouviram minhas ideias malucas e me ajudaram com outras. Estes fizeram parte da minha história com bons momentos que sempre guardarei na memória.

E, por fim, à todos que de alguma forma direta ou indiretamente me ajudaram em algum momento de necessidade.





# Resumo

A energia escura é a componente responsável pela expansão acelerada do Universo e a que mais contribui para o seu conteúdo energético. Uma forma de estudá-la é através de sondas cosmológicas, tais como: Type Ia Supernovae, Cosmic Microwave Background e Baryon Acoustic Oscillations. O estudo das medições das Baryon Acoustic Oscillations, por sua vez, pode ser realizado pelo mapeamento por intensidade da radiação de 21 cm do átomo de hidrogênio neutro frio. Este é o principal objetivo científico do radiotelescópio BINGO, em construção no Estado da Paraíba, Brasil. Desta forma, nossa motivação para a produção desta dissertação é o estudo e a compreensão da Cosmologia de 21 cm, para o entendimento dos métodos necessários para as restrições dos parâmetros cosmológicos, tais como: a constante de Hubble e a equação de estado da energia escura. Temos como objetivo prático a realização de simulações computacionais usando a linguagem Python, para construirmos mapas e espectros de potência do hidrogênio neutro, com ênfase na metodologia tomográfica, na faixa de redshift, que também será utilizada pelo BINGO.

Palavras-chave: Radiotelescópio BINGO. Baryon Acoustic Oscillations. Radiação de 21 cm. Hidrogênio neutro. Simulações computacionais.



# Abstract

The dark energy is the component responsible for the accelerated expansion of the Universe and it's the greatest contributor to its energy content. A path to study it is through cosmological probes, such as: Type Ia Supernovae, Cosmic Microwave Background and Baryon Acoustic Oscillations. The study of Baryon Acoustic Oscillations measurements, in turn, can be performed by intensity mapping of the 21 cm radiation of cold neutral hydrogen atom. This is the main scientific objective of the BINGO radio telescope, under construction in the State of Paraíba, Brazil. Thus, the main objective of this dissertation is the study and to understand the 21 cm Cosmology, besides, we intend to understand the methods necessary to restrict the cosmological parameters, such as: the Hubble constant and the dark energy equation of state. Moreover, as a practical objective, we intend to perform computer simulations using Python language. Such simulations can be used to build maps and power spectra of the neutral hydrogen, with an emphasis on tomographic methodology, in the redshift range, which will also be relevant for BINGO.

Keywords: BINGO radio telescope. Baryon Acoustic Oscillations. 21 cm radiation. Neutral hydrogen. Computer simulations.



# Lista de Ilustrações

Figura 1 - Desenho ilustrativo do radiotelescópio BINGO .....	5
Figura 2 - Diagrama de um receptor do BINGO .....	6
Figura 3 - Imagem obtida usando a técnica de IM .....	7
Figura 4 - Imagens da instalação do Uirapuru .....	7
Figura 5 - Fluxograma do pipeline de simulação da missão BINGO .....	9
Figura 6 - Mapa de hidrogênio resultante do código FLASK .....	10
Figura 7 - Contaminantes galácticos e extragalácticos .....	11
Figura 8 - Espectro de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível .....	13
Figura 9 - Átomo de hidrogênio no referencial do elétron em repouso .....	21
Figura 10 - Separação hiperfina no estado fundamental do hidrogênio .....	23
Figura 11 - Dois diagramas esquemáticos da estrutura hiperfina .....	24
Figura 12 - Gráfico das galáxias e o diagrama de Hubble .....	25
Figura 13 - Ilustrações de um universo com curvatura positiva, plana e negativa .....	26
Figura 14 - Evolução de um universo com: constante cosmológica, $\Lambda$ CDM e matéria .....	30
Figura 15 - Medidas de distâncias cosmológicas .....	31
Figura 16 - Gráfico do módulo de distância para SNe Ia .....	33
Figura 17 - Distribuição energética das componentes do Universo .....	34
Figura 18 - Evolução das componentes do Universo .....	35
Figura 19 - Parametrização dos parâmetros $w_0$ e $w_a$ da energia escura .....	36
Figura 20 - Ilustração da evolução do Universo .....	37
Figura 21 - Mapas da medida de anisotropia da temperatura da CMB .....	38
Figura 22 - Ilustração da função de correlação de dois pontos .....	42
Figura 23 - Gráfico do espectro de potência da CMB .....	43
Figura 24 - Perturbação de densidade esférica .....	46
Figura 25 - Anéis de bárions e ilustração do conceito de BAOs .....	46
Figura 26 - Espectro de potência linear da matéria em diferentes redshifts .....	49
Figura 27 - Função de correlação com BAP .....	50
Figura 28 - Ilustração das fases do sinal de 21 cm .....	52
Figura 29 - Mapa das anisotropias de temperatura da CMB e da máscara da galáxia .....	57
Figura 30 - Mapa da CMB com a remoção dos contaminantes galácticos .....	58
Figura 31 - Espectro de potência a partir do mapa mascarado .....	58
Figura 32 - Espectro de potência com a correção do feixe .....	58
Figura 33 - Espectro de potência extraído do mapa mascarado junto com feixe corrigido .....	59
Figura 34 - Mapa de poeira do céu simulado na frequência do BINGO .....	60
Figura 35 - Mapa do síncrotron do céu simulado na frequência do BINGO .....	60
Figura 36 - Mapa da AME do céu simulado na frequência do BINGO .....	61
Figura 37 - Mapa da emissão free-free do céu simulado na frequência do BINGO .....	61

Figura 38 - Mapa da CMB do céu simulado na frequência do BINGO .....	61
Figura 39 - Mapa completo dos Foreground do céu simulado na frequência do BINGO .....	62
Figura 40 - Espectro de potência para os diferentes componentes do foregrounds .....	62
Figura 41 - Espectro de potência 3D do hidrogênio neutro no $z$ do BINGO .....	62

# Lista de Tabelas

Tabela 1 - Parâmetros do telescópio BINGO .....	6
Tabela 2 - Parâmetros dos instrumentos na pesquisa da linha do hidrogênio .....	8
Tabela 3 - Propriedades do modelo de referência .....	29
Tabela 4 - Horizonte sonoro das BAOs medido pelo WMAP e Planck .....	47





# Lista de abreviaturas e siglas

BAOs - *Baryon Acoustic Oscillations*  
BINGO - *Baryonic acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations*  
BOSS - *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*  
CHIME - *Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment*  
CMB - *Cosmic Microwave Background*  
COBE - *Cosmic Background Explore*  
CORE - *Cosmological Reionization Experiment*  
EDGES - *Experiment to Detect the Global EoR Signature*  
EoR - *Epoch of Reionization*  
FAST - *Five hundred meter Aperture Spherical Telescope*  
FLRW - *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*  
FRB - *Fast Radio Bursts*  
HERA - *The Hydrogen Epoch of Reionization Array*  
HIRAX - *The Hydrogen Intensity and Real-time Analysis eXperiment*  
IM - *Intensity Mapping*  
LSS - *Large Scale Structures*  
NASA - *National Aeronautics and Space Administration*  
QED - *Quantum Electrodynamics*  
RFI - *Radio Frequency Interference*  
SDSS - *Sloan Digital Sky Survey*  
SKA - *Square Kilometre Array*  
SNe Ia - *Type Ia Supernovae*  
SSR - *Statistical Standard Rulers*  
TOD - *Time Ordered Datasets*  
WMAP - *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*  
 $\Lambda$ CDM - *Lambda Cold Dark Matter*



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>COSMOLOGIA OBSERVACIONAL: O BINGO E O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO REAL</b>	<b>5</b>
2.1	Projeto Radiotelescópio BINGO	5
2.1.1	O instrumento	5
2.1.2	Pipeline	9
2.1.3	Removendo ruído de um sinal espectral	10
2.2	Mecânica Quântica Relativística	12
2.2.1	Equação de Klein-Gordon	14
2.2.2	Equação de Dirac	15
2.3	Acoplamento ao Campo Eletromagnético e Perturbações	18
2.3.1	Acoplamento spin-órbita	21
2.3.2	Transição hiperfina	22
<b>3</b>	<b>COSMOLOGIA HOMOGÊNEA (FLRW): MODELO <math>\Lambda</math>CDM E PARÂMETROS COSMOLÓGICOS</b>	<b>25</b>
3.1	Medidas Cosmológicas	25
3.1.1	Equação de Friedmann e modelo de referência	26
3.1.2	Idade do Universo	29
3.1.3	Distâncias do Universo	30
3.2	Supernovas Tipo IA	32
3.3	Energia Escura	33
<b>4</b>	<b>UNIVERSO FORA DE EQUILÍBRIO: A EVOLUÇÃO DO UNIVERSO E A COSMOLOGIA DE 21 CM</b>	<b>37</b>
4.1	Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas	37
4.1.1	Recombinação, desacoplamento e espalhamento de fótons	38
4.1.2	Flutuações de temperatura e espectro de potência da CMB	41
4.2	Oscilações Acústicas Bariônicas	44
4.3	Espectro de Potência da Matéria	47
4.4	Hidrogênio Neutro	50
4.4.1	Temperatura de spin e temperatura de brilho	51
4.4.2	Espectro de potência angular de 21 cm	53
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES</b>	<b>57</b>
5.1	Mapas da CMB e Espectro de Potência	57

5.2	Sinal Cosmológico do Hidrogênio Neutro .....	59
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES .....</b>	<b>69</b>
	Apêndice A - Perturbações Cosmológicas .....	71
	A.1 Métrica e o Espaço-Tempo Perturbado .....	71
	A.2 Decomposição SVT .....	72
	Apêndice B - Equações de Boltzmann .....	73
	B.1 Equação de Boltzmann Perturbada para Fótons .....	75
	B.2 Equação de Boltzmann Perturbada para CDM .....	77
	B.3 Equação de Boltzmann Perturbada para Bárions .....	78
	B.4 Equação de Boltzmann Perturbada para Neutrinos .....	80
	Apêndice C - Aspectos Computacionais .....	81

# 1 Introdução

No início do século XX, com os resultados dos trabalhos de Slipher <sup>1</sup>, Humason <sup>2</sup> e Hubble <sup>3</sup>, ficou bastante claro que o Universo não era estático, mas sim, dinâmico. Com os estudos e observações astronômicas do redshift  $z$  <sup>4</sup> de várias galáxias, Hubble desenvolveu a relação empírica entre a velocidade de afastamento de uma galáxia e a distância entre a Terra e a galáxia. Essa relação é chamada de **lei de Hubble**. Esses resultados observacionais, junto com os trabalhos teóricos de Einstein <sup>5</sup>, Friedmann <sup>6</sup>, Lemaître <sup>7</sup>, entre outros, mostram que as galáxias estão se afastando uma das outras e de nós (Via Láctea) [1], [2], [3].

Na década de 1990, foi confirmado que o Universo não só está se expandindo mas que está fazendo isto de forma acelerada [4]. Uma das hipóteses mais aceitas para esse fenômeno é que o espaço está permeado com um tipo de energia que não emite radiação eletromagnética; mas que, exerce um efeito de "antigravidade" que produz uma repulsão universal entre todos os corpos. Essa nova componente energética, invisível e imaterial é chamada de **energia escura**.

A aceleração da expansão do Universo é a assinatura da existência da energia escura. Desta forma, a Física por trás desta componente tem conexões com as observações astrofísicas, a evolução do Universo e o seu destino final. Portanto, um dos principais desafios da Cosmologia do século XXI é o entendimento da natureza e da dinâmica do setor escuro, com foco principal na determinação das propriedades da energia escura. Tais propriedades desta componente podem ser obtidas por meio de uma descrição precisa da história da expansão do Universo.

Neste contexto, nos três primeiros minutos após o Big Bang, o Universo era constituído por um plasma de fótons e bárions fortemente acoplados por meio do espalhamento Thomson [5], [6]. Junto com esse plasma havia, também, a matéria escura que influenciava gravitacionalmente a evolução do Universo, nesta época a componente dominante era a radiação. Em seguida, o Universo passou por uma mudança de fase da radiação para a matéria, o que resultou na CMB (*Cosmic Microwave Background*). Esta última é originada no processo pelo qual a

---

<sup>1</sup> Vesto Melvin Slipher (1875-1969), astrônomo estadunidense que descobriu que algumas galáxias se afastavam de nós à grandes velocidades; e, mediu pela primeira vez a velocidade radial de uma galáxia.

<sup>2</sup> Milton La Salle Humason (1891-1972), astrônomo estadunidense. Foi um ex-condutor de mulas que se tornou assistente de Hubble no telescópio Hooker no Observatório do Monte Wilson.

<sup>3</sup> Edwin Powell Hubble (1889-1953), astrônomo norte-americano. A ele se atribuem as evidências observacionais da existência de inúmeras galáxias semelhante a Via Láctea, a **lei de Hubble** e outras contribuições para a Astronomia e Cosmologia. Em 1990, a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) lançou um satélite artificial não tripulado para o estudo das estruturas do Universo via observação de diferentes comprimentos de ondas; este observatório orbital foi nomeado de **Telescópio Espacial Hubble**.

<sup>4</sup> Deslocamento espectral para o vermelho; ou, aumento do comprimento de onda da luz de uma fonte que se afasta do observador.

<sup>5</sup> Albert Einstein (1879-1955) foi um físico teórico alemão. Conhecido mundialmente por desenvolver a Teoria da Relatividade Geral que junto com a Mecânica Quântica formam a base da Física Moderna.

<sup>6</sup> Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925), matemático e cosmólogo russo, contribuiu para a Cosmologia com as formulações matemáticas para o estudo da estrutura e expansão do Universo.

<sup>7</sup> Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966) foi um padre católico, astrônomo, cosmólogo e físico belga. Recriou o modelo do Universo em expansão a partir das equações da Teoria da Relatividade Geral, ficou conhecido pela formulação da teoria da origem do Universo a partir de um átomo primordial, o **Big Bang**.

matéria bariônica passa de um plasma ionizado para um gás de átomos neutros. Depois do desacoplamento da radiação com a matéria, o Universo irá passar agora por um período onde a componente dominante é a matéria.

É a partir desta época escura pós-recombinação, conhecida como a Era das Trevas, que surgem as BAOs (*Baryon Acoustic Oscillations*). Elas são oscilações no espectro de potência da radiação da matéria devido as oscilações coerentes no fluido fóton-bárion. Em suma, as BAOs são uma assinatura na distribuição de matéria; onde, se apresentam como um excesso de galáxias separados por uma ordem de 150 Mpc <sup>8</sup> [7].

Até o momento, as BAOs só foram detectadas por grandes levantamentos de  $z$  das galáxias na banda de onda óptica. Para medi-las é necessário identificar a distribuição bariônica em larga escala; em outras palavras, as flutuações em larga escala na distribuição de hidrogênio neutro, sendo este o elemento mais abundante (em matéria normal) no Universo. As medições dessa escala de distância podem ser usadas para sondar a geometria do Universo e restringir seu conteúdo de matéria.

Quando o Universo era dominado pela matéria tornou-se possível a formação de estrelas, galáxias e das LSS (*Large Scale Structures*). Mas, após bilhões de anos, a matéria foi diluída devido a expansão do Universo e a energia escura passou a ser a componente dominante. Evidências da energia escura seguem com as restrições das medições de alguns parâmetros cosmológicos, tais como: de SNe Ia (*Type Ia Supernovae*), anisotropia da CMB e das BAOs no agrupamento de galáxias [4].

Além disso, as BAOs nos fornecem uma nova classe de régua padrão, que são objetos de tamanhos conhecidos em um único  $z$ , ou, uma população de objetos em  $z$  diferentes cujo tamanho muda de forma conhecida. Desta forma, sendo uma régua padrão definida pelo seu horizonte sonoro, as BAOs nos permitem medir a expansão do Universo em função de  $z$ , restringindo os parâmetros cosmológicos, como por exemplo, a equação de estado da energia escura. Elas podem ser rastreadas em frequências de rádio via diversas linhas espectrais, incluindo a de 21 cm do hidrogênio neutro.

Essa radiação, com comprimento de onda de 21 cm, ocorre na separação hiperfina no estado fundamental do átomo de hidrogênio neutro [8]. Ela surge em aglomerados densos de hidrogênio frio (não ionizado) que atingem a densidade crítica mas não possuem uma quantidade mínima de massa para a formação de estrelas [9]. O processo pelo qual o hidrogênio neutro emite um fóton de 21 cm com uma frequência associada de 1420 MHz é chamado de transição spin-flip <sup>9</sup> (ou hiperfina). Esta frequência é uma das quantidades mais precisamente conhecidas na Astrofísica, tendo sido medida com grande precisão a partir de estudos de masers <sup>10</sup> de hidrogênio.

As medições do fundo de radiação de 21 cm são diretamente dependentes da evolução térmica do IGM (*Intergalactic Medium*) e dos estágios iniciais da formação da estrutura do Universo [10].

<sup>8</sup> Por conversão, 1 Mpc =  $3,086 \times 10^{22}$  m.

<sup>9</sup> Em Mecânica Quântica, o termo spin associa-se às possíveis orientações que partículas subatômicas carregadas (próton, elétron e alguns núcleos atômicos) podem apresentar quando são imersas em um campo magnético.

<sup>10</sup> Dispositivo que produz ondas eletromagnéticas coerentes através da amplificação de emissão estimulada.

Ela foi teoricamente prevista por Hulst <sup>11</sup> em 1942 e detectada pela primeira vez por Ewen <sup>12</sup> e Purcell <sup>13</sup> em 1951. A detecção do sinal de 21 cm é de grande interesse para a Cosmologia observacional; pois, além de permitir medir as curvas de rotação de galáxias em Astrofísica, ela também fornece informações sobre a história do Universo.

Com o atual avanço tecnológico na Cosmologia observacional e com um grande número de projetos de pesquisas e observações astronômicas, como por exemplos: o FAST; o CHIME; o HERA; o SDSS; o EDGES; e, futuramente, o BINGO; entre outros. Teremos um amplo conhecimento teórico estatístico e observacional das distâncias extra-galácticas. Salientamos ainda que, estamos pela primeira vez investigando com grande precisão a história da expansão cósmica além do Universo local [6], [10], [11].

Em destaque dos projetos mencionados, o BINGO, cuja configuração é semelhante ao que foi usada nos estudos da CMB, tem como proposta ser o primeiro telescópio do mundo a operar em uma faixa de frequência cujo objetivo é a detecção e o estudo das BAOs pelo uso da técnica de mapeamento por intensidade, IM (*Intensity Mapping*), da linha de 21 cm [3], [7], [12], [13]. Com esta técnica de IM, inicialmente usada para estudos da EoR (*Epoch of Reionization*), principalmente com flutuações de 21 cm [14], é possível mapear estruturas em grandes escalas em um baixo valor de  $z$  onde a energia escura se torna a componente dominante [15]. Mapeando, assim, a distribuição tridimensional do hidrogênio neutro e medindo sua temperatura de brilho.

Ainda, o IM da radiação de 21 cm é uma nova abordagem que tem como foco medir o espectro de potência das flutuações cosmológicas. Uma vez que, apenas as observações da CMB não são capazes de restringir a equação de estado da energia escura, mas sim, uma combinação desta com os resultados das medições das BAOs, que são compatíveis com os dados CMB do satélite Planck. Teremos então, restrições mais rígidas em qualquer extensão do modelo de concordância [16].

Esta dissertação apresentará uma pesquisa realizada com base na literatura disponível sobre os trabalhos teóricos e experimentais na área de Cosmologia observacional no século XXI. Seguido por um trabalho operacional e computacional realizado pelos nossos experimentos, tendo em foco o entendimento e a utilização das ferramentas necessárias para extrair informações cosmológicas via ciência usada no radiotelescópio BINGO.

No capítulo 2 veremos a elaboração do radiotelescópio BINGO <sup>14</sup>, suas características técnicas e instrumentais, objetivos de pesquisa, a apresentação de uma simulação já realizada e informações sobre outros projetos que estão na mesma linha de pesquisa do BINGO. Ainda, uma breve noção do processo de separação, ou recuperação, de um sinal espectral. Um resumo

<sup>11</sup> Hendrik Christoffel van de Hulst (1918-2000) foi um astrônomo, astrofísico e matemático holandês. Após os estudos da linha de 21 cm do hidrogênio interestelar, contribuiu na área da radioastronomia para mapear o hidrogênio neutro em nossa galáxia.

<sup>12</sup> Harold Irving Ewen (1922-2015) foi um rádio astrônomo americano conhecido por sua detecção da linha de 21 cm de hidrogênio interestelar.

<sup>13</sup> Edward Mills Purcell (1912-1997), físico americano, conhecido pelo desenvolvimento de novos métodos de medições magnéticas nucleares finas.

<sup>14</sup> O andamento atualizado do projeto até a data de publicação desta dissertação.

da Mecânica Quântica Relativística necessário para o estudo do átomo de hidrogênio real; como também, o acoplamento e as perturbações que dão fundamentos para a linha de 21 cm.

No capítulo 3 serão apresentadas as medidas cosmológicas pelo modelo  $\Lambda$ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*), o uso da equação de Friedmann para o estudo do comportamento de um universo em expansão. As pesquisas das equipes de observação de SNe Ia, e, como estas podem ser usadas como velas padrão. Fechando este capítulo, apresentaremos um resumo histórico sobre a energia escura, como chegamos ao modelo cosmológico atual com a adição desta componente, e, também, a parametrização de seus parâmetros.

No capítulo 4 falaremos sobre a evolução do Universo, que é traduzido pela sua história térmica; a Física do desacoplamento e espalhamento de fótons, o processo do qual se origina a radiação CMB. Veremos o cálculo das flutuações de temperatura via função de correlação de dois pontos, e assim, como obter o espectro de potência da CMB. A formação das BAOs e como ela pode ser usada para os estudos dos parâmetros cosmológicos. Ainda, como podemos calcular as perturbações no espaço de Fourier no regime linear, e desta, gerarmos o espectro de potência da matéria. Apresentaremos, também, o principal foco de estudo da Cosmologia de 21 cm, que trata-se de determinar a temperatura de spin e a temperatura de brilho do hidrogênio neutro, bem como, a relação entre elas. Em seguida, apresentaremos a obtenção do espectro de potência do hidrogênio neutro, dado pela teoria linear.

Concluimos esta dissertação com o capítulo 5, onde, mostraremos os resultados das nossas simulações feitas em linguagem de programação Python. Destas, temos a reprodução dos mapas dos foregrounds e do sinal cosmológico do hidrogênio neutro, além de seus espectros de potência dentro da ciência usada no BINGO.

No capítulo 6 apresentaremos nossa conclusão e algumas considerações finais, seguido por apêndices sobre perturbações cosmológicas, equações de Boltzmann e os aspectos computacionais referentes as simulações.



## 2 Cosmologia Observacional: O BINGO e o Átomo de Hidrogênio Real

### 2.1 Projeto Radiotelescópio BINGO

O BINGO (*Baryonic acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations*) é um projeto internacional que conta com a colaboração de pesquisadores e universidades do Brasil, China, França, Reino Unido, África do Sul e Alemanha [17]. Trata-se da construção, em andamento com o apoio local da UFCG, do primeiro radiotelescópio de grande porte no nordeste brasileiro. Localizado na Serra do Urubu, um terreno próximo à zona rural do município de Aguiar, PB. Ele irá observar os sinais cosmológicos no setor escuro do Universo, em uma faixa do redshift de  $z = 0,13$  até  $z = 0,45$  e na frequência de emissão entre 980 MHz à 1260 MHz.

O BINGO será um novo instrumento projetado especificamente para nos fornecer uma visão do Universo em  $z < 0,5$ , onde irá investigar as BAOs (*Baryon Acoustic Oscillations*) através da linha de 21 cm do átomo de hidrogênio neutro frio. Após um ano de integração ele permitirá uma medição da escala acústica com 2,4% de incerteza e da equação de estado da energia escura com 16% de incerteza.

#### 2.1.1 O instrumento

O seu design (Fig.1) consiste em um espelho primário - um paraboloide com 40 m de diâmetro, ele receberá a radiação vinda do espaço que irá convergir para um segundo espelho - um hiperboloide com 34 m de diâmetro pendurado em uma estrutura vertical. Em seguida, os raios serão enviados para um plano focal constituído por um conjunto de cornetas, conectadas aos receptores com dupla polarização (Fig.2).



Figura 1 – Desenho ilustrativo do radiotelescópio BINGO com o sistema óptico do tipo Crossed-Dracone. Fonte: Colaboração BINGO, [12].

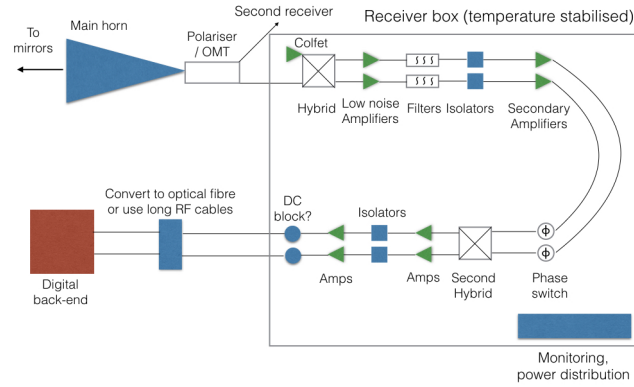


Figura 2 – Diagrama de um receptor do BINGO. Fonte: Colaboração BINGO, [3], [18].

Os requisitos iniciais para a escolha do local da construção do telescópio foram [7]: um ambiente com baixa RFI (*Radio Frequency Interference*), que seja distante de grandes cidades, que apresente uma topografia que pode suportar os dois espelhos, que tenha acesso fácil dos pesquisadores e equipes técnicas e sem restrições ambientais na estrutura do telescópio.

O BINGO será um telescópio de trânsito fixo, que utilizará a rotação da Terra para observar e realizar pesquisas em uma área do céu de 6.000 graus quadrados com resolução angular de 40 arcmin. Na primeira fase do projeto serão construídas 28 cornetas, cada uma delas com um diâmetro de 1,7 m e comprimento de aproximadamente 4,9 m, fixadas em conjunto em uma torre de aproximadamente 13 m de altura. Informações complementares estão na tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do telescópio BINGO. Fonte: [12], [13].

Descrição	Valor
Diâmetros dos espelhos (m)	40 - 30
Resolução angular (deg)	$\approx 0,67$
Comprimento focal (m)	63,2
Faixa de frequências (MHz)	980 - 1260
Largura do canal	9,33
Faixa de redshift - $z$	0,127 - 0,449
Número de cornetas - $n_f$	28 - 56
Área do telescópio (m <sup>2</sup> )	1602
Área efetiva do telescópio (m <sup>2</sup> )	1120
Ângulo sólido p/pixel (rqs deg) - $\Omega_{pix}$	0,35
Campo de visão (deg <sup>2</sup> )	$\approx 27$
Varredura $\Omega_{sur}$ (deg <sup>2</sup> )	$\approx 6070$
Temperatura do sistema $T_{sys}$ (K)	$\approx 70$
Duração da missão na Fase 1 (anos)	5

A técnica escolhida pelo projeto BINGO para as observações das BAOs será o IM (*Intensity Mapping*) (Fig.3). Trata-se de realizar observações de grandes áreas do céu com baixa resolução

e, com isso, inferir os contrastes de densidade pelas medições das flutuações no brilho e o  $z$  de um grande número de galáxias.

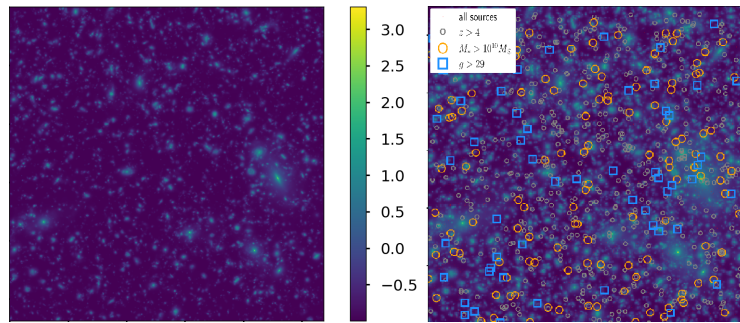


Figura 3 – Imagem obtida usando a técnica de IM. Esquerda: filamento de matéria escura, imagem com largura de 2, 8 arcmin, 15 vezes menor que a do BINGO. Direita: regiões em  $z > 4$  (círculo escuro), objetos com massa maiores do que  $10^{10}$  massas solares (círculo laranja), regiões de magnitude  $g > 9$  (quadrado azul). Imagem produzida em Python.

A técnica de IM mede o campo de intensidade total e a temperatura de brilho a partir da emissão de 21 cm. Ela é bastante apropriada no estudo de fontes de emissão fraca que não podem ser detectadas individualmente [14]. Portanto, é um ótimo método para sondar LSS (*Large Scale Structures*), como também, para uma abordagem de menor custo em IM de BAOs.

Além de seu objetivo principal, espera-se que o BINGO também possa contribuir com a detecção das FRB (*Fast Radio Bursts*) que, são fenômenos brilhantes e muito rápidos (milissegundos de duração), cuja origem ainda é desconhecida. A possibilidade é de detectar uma FRB a uma taxa de 4-5 dias. O BINGO pretende, também, contribuir para a ciência galáctica, para os estudos de pulsares, estudos das massas de neutrinos, entre outros. O projeto ainda envolve aspectos culturais e educacionais, via atividades de divulgação científica.

Atualmente, foi instalado na UFCG um laboratório observacional, o **Uirapuru**. Esse será uma corneta auxiliar (outrigger) do BINGO (Fig.4), que tem como principal finalidade contribuir para os estudos das FRB.



Figura 4 – Imagens da instalação do Uirapuru na UFCG. Laboratório observacional constituído por uma das cornetas (outrigger) do BINGO. Fonte: Colaboração BINGO.

Outros projetos, além do BINGO, que estão interessados em detecção de espectro de potência do hidrogênio neutro e na linha de 21 cm, são mostrados na tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros dos instrumentos na pesquisa da linha do hidrogênio neutro.

Fonte: [7], [14].

Instrumento	Frequência (MHz)	Faixa de $z$	Local
HERA	50 - 250	5 - 27	África do Sul
SKA-LOW	50 - 350	3 - 7	Austrália
FAST	70 - $3 \times 10^3$	0, 5 - 0, 8	China
CHIME	400 - 800	0, 8 - 2, 5	Canadá
HIRAX	400 - 800	0, 8 - 2, 5	África do Sul
SKA-MID	350 - $14 \times 10^3$	0 - 3	África do Sul
EDGES	50 - 200	15 - 20	Austrália

Informações adicionais dos instrumentos citados na tabela 2:

- HERA (*The Hydrogen Epoch of Reionization Array*) - é otimizado para detectar e caracterizar a EoR (*Epoch of Reionization*) e a Cosmic Dawn.
- SKA-LOW (*Square Kilometre Array*) - incorpora duas submatrizes, cada uma consistindo de 500 estações de 256 antenas do tipo dipolo, com o objetivo científico de estudar a EoR.
- FAST (*Five hundred meter Aperture Spherical Telescope*) - tem como objetivo a detecção de FRBs, moléculas interestelares, sinais de comunicação interestelar e IM de hidrogênio.
- CHIME (*Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment*) - apresenta objetivos científicos na mesma linha do BINGO e do FAST; e ainda, também poderá contribuir para estudos de ondas gravitacionais. Assim como o BINGO, o CHIME não tem partes móveis; em vez de cornetas ele apresenta espelhos cilíndricos de 20 m  $\times$  100 m de comprimento.
- HIRAX (*The Hydrogen Intensity and Real-time Analysis eXperiment*) - é composto por uma matriz de 1024 radiotelescópios de 6 m cada, para mapear BAOs e restringir modelos de energia escura e matéria escura.
- SKA-MID trata-se de uma segunda submatriz do SKA, com adição de 130 novas antenas. Entretanto, no momento este projeto está cancelado.
- EDGES (*Experiment to Detect the Global EoR Signature*) - tem como alvo a assinatura do hidrogênio durante a EoR. Ele é composto por: um conjunto de instrumentos de banda baixa separados por uma distância de 150 m e operando na frequência de 50 MHz à 100 MHz, ambos com uma antena de 2 m  $\times$  1 m do tipo dipolo acopladas a uma cadeia receptora e a um espectrômetro digital; e, um segundo conjunto de instrumentos com configurações semelhantes ao do primeiro conjunto, porém, operando na faixa de 90 MHz à 200 MHz.

O sinal global de 21 cm poderá ser potencialmente medido por medições de temperatura absoluta [9]. Desta forma, a temperatura de brilho idealizada observada do céu, na frequência  $\nu$  e na direção  $\hat{n}$ , é dada por [12], [13]

$$T_{sky}(\nu, \hat{n}) = T_{gal}(\nu, \hat{n}) + T_{eg}(\nu, \hat{n}) + T_{CMB}(\nu, \hat{n}) + T_{atm}(\nu, \hat{n}) + T_{pol}(\nu, \hat{n}) + T_{cosmo}(\nu, \hat{n}), \quad (2.1)$$

onde  $T_{gal}$  é a radiação galáctica difusa,  $T_{eg}$  é a emissão de fontes extragalácticas (FRB por exemplo),  $T_{CMB}$  é a temperatura do CMB (*Cosmic Microwave Background*),  $T_{atm}$  é a emissão da atmosfera,  $T_{pol}$  é a temperatura de poeira polarizada e  $T_{cosmo}$  é a temperatura da emissão do sinal cosmológico.

Apenas o último termo da Eq.(2.1) é de interesse para o BINGO, os demais são ruídos indesejados. Sendo assim, a observação e medição cosmológica de hidrogênio neutro é bastante complicada; pois, tem-se como um grande desafio a necessidade de remover a emissão brilhante dos Foreground <sup>1</sup> que são muito maiores do que o sinal de 21 cm desejado [11].

## 2.1.2 Pipeline

Em uma das simulações mais atualizadas do funcionamento do BINGO <sup>2</sup>, foi implementado um conjunto de rotinas e procedimentos computacionais, um pipeline de simulação de ponta a ponta (Fig.5). Esse pipeline tem como finalidade fazer uso de um simulador de missão para testar a confiabilidade de um sinal cosmológico extraído de dados observacionais, e, otimizar parâmetros construtivos, operacionais e o próprio processo de análise de dados.

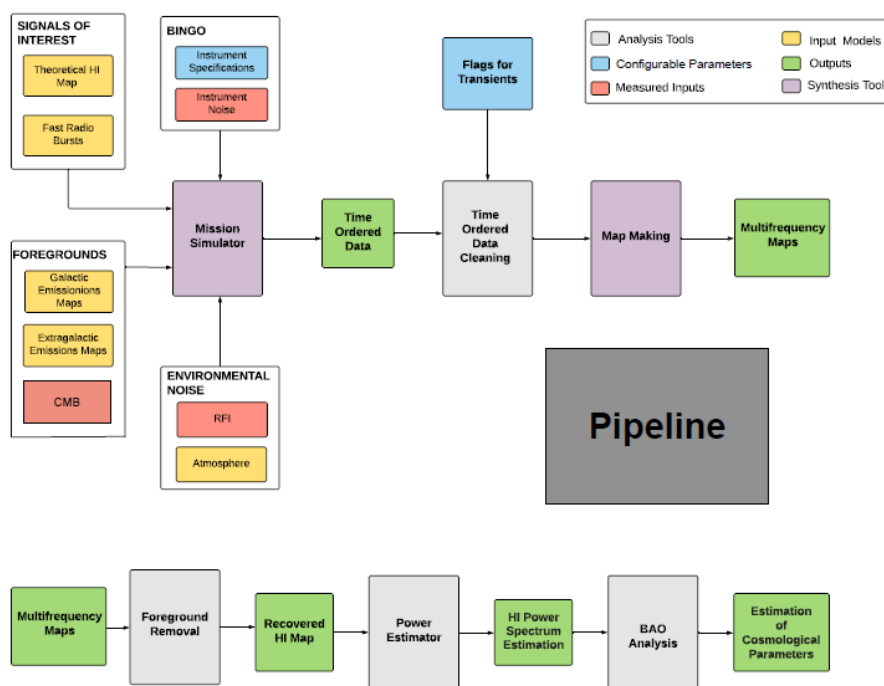


Figura 5 – Fluxograma do pipeline de simulação da missão BINGO. Em azul, as especificações do instrumento e os parâmetros editáveis: forma do feixe, número de cornetas, tempo de observação, frequência de Joelho, número de canais, etc. Em vermelho estão os parâmetros que já foram medidos: o módulo de ruído do instrumento e a temperatura CMB. Em amarelo: os módulos dos modelos e observações conhecidos para produzir mapas de emissões usados como entrada nas simulações. Fonte: [13].

A entrada é composta por diferentes emissões do céu, produzidos por modelos teóricos ou por observações, características de experimentos, ruídos inerentes ao próprio instrumento

<sup>1</sup> Primeiros planos galácticos.

<sup>2</sup> Ver referência [13].

e contaminação do ambiente. Na saída, após processar todas as informações de entrada, são produzidos os conjuntos de dados, os TOD (*Time Ordered Datasets*), que podem ser transformados em mapas multi-frequência de temperatura que simulam o sinal captado pelo instrumento durante um determinado período de operação.

Em seguida, o conjunto de mapas (os dados de saída) produzidos pela simulação passam por um processo de separação de componentes por meio de um algoritmo, removendo as contribuições de emissões mais brilhantes do que a do hidrogênio. Consequentemente, recuperando apenas o componente do sinal cosmológico desejado para a detecção das BAOs.

Os mapas sintéticos de hidrogênio neutro usados neste pipeline foram produzidos com o pacote FLASK (*Full-sky Lognormal Astro-fields Simulation Kit*), capaz de gerar simulações rápidas do céu completo de observáveis LSS cosmológicos, anisotropias de temperatura CMB, convergência de lentes fracas e campos de cisalhamento. O FLASK usa como entrada os espectros de potência angular  $C_l^{ij}$  do hidrogênio neutro, em  $z < 0,5$ , calculados para cada um dos campos  $i$  e  $j$ , para produzir realizações tomográficas bidimensionais (camadas esféricas ao redor do observador).

Assumindo uma distribuição log-normal, é usado o código UCL-CL (*University College London*) desenvolvido pela equipe University College London. O UCL-CL trata-se de uma biblioteca para calcular a função de correlação de potência angular de dois pontos de vários campos cosmológicos relacionados aos levantamentos LSS. Ao fim do processo, o FLASK pode aplicar funções de seleção e ruído aos campos de intensidade gerados e produzir um mapa de hidrogênio (Fig.6).

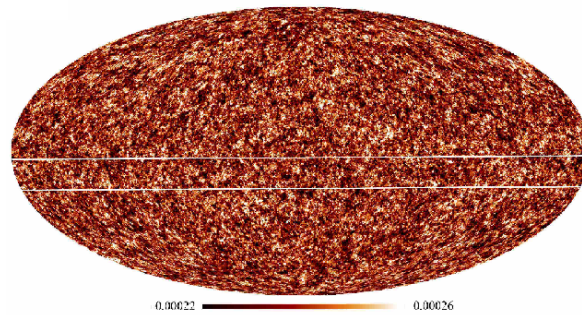


Figura 6 – Mapa de hidrogênio resultante do código FLASK a 1,1 GHz. O BINGO irá observar a faixa definida pelas linhas horizontais. Fonte: [13].

### 2.1.3 Removendo ruído de um sinal espectral

O maior desafio nas observações cosmológicas de hidrogênio neutro é a remoção dos Foregrounds, que são da ordem de  $10^4$  vezes maiores do que o sinal cosmológico de 21 cm [13]. A emissão de nossa própria galáxia domina o céu com uma amplitude de 4 à 5 ordens de magnitude, maior do que se deseja observar. Como um exemplo, podemos observar o modelo de Foreground usado no pipeline de teste LOFAR-EoR (*Low Frequency Array-Epoch of Reionization*) (Fig.7).

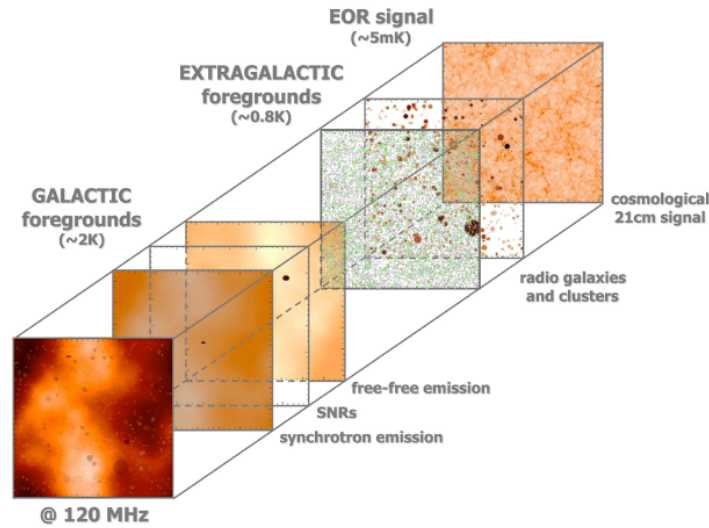


Figura 7 – Contaminantes galácticos e extragalácticos simulados da radiação de 21 cm para o  $z$  da EoR. Mapa produzido pelo IM do hidrogênio em 120 MHz. Fonte: [19].

As componentes dominantes na faixa de operação do BINGO são: a radiação síncrotron produzida por elétrons em movimento espiral no campo magnético galáctico; e, a radiação por bremsstrahlung térmico na faixa de rádio, emitida pela interação entre elétrons e íons em um gás ionizado à uma temperatura  $T \approx 10^4$  K. O sinal medido pelo BINGO será um composto das emissões cosmológicas, astrofísicas e dos ruídos sistemáticos do instrumento referentes ao térmico e o  $1/f$  do ruído com PSD (*Power Spectrum Density*). Desta forma, se faz necessário um processo de separação das componentes, ou, recuperação de um sinal específico.

Para tal processo, visando extrair o sinal de interesse do sinal medido, podemos modular os dados de observação na frequência  $\nu$  e pixel  $p$  como um mapa observado da seguinte forma [3]

$$x_\nu(p) = b_\nu(p) * \left( \sum_j a_{\nu j}(p) s_{\text{cosmo},\nu}(p) \right) + n_\nu(p), \quad (2.2)$$

em que  $b_\nu(p)$  é o modelo do feixe do instrumento; o sinal  $*$  representa a convolução; a quantidade entre parênteses é o mapa de emissão do céu que representa a superposição de diferentes componentes  $j$ , onde o somatório gera uma matriz de combinação do coeficiente  $a_{\nu j}(p)$  e o sinal cosmológico de interesse  $s_{\text{cosmo},\nu}(p)$ ; e,  $n_\nu(p)$  é o mapa de ruído.

Uma ferramenta de separação de componentes é o método GNILC (*Generalized Needlet Internal Linear Combination*). Esse método não paramétrico permite separar as emissões em rádio que compõem um sinal medido pelo IM, e com isto, recuperar o sinal cosmológico. Assim, para um conjunto de dados  $x_\nu(p)$  com as medidas de intensidade, ou de temperatura, teremos

$$x_\nu(p) = s_\nu(p) + n_\nu(p), \quad (2.3)$$

onde  $s_\nu(p)$  será o mapa do sinal cosmológico e  $n_\nu(p)$  será o mapa da soma das emissões astrofísicas mais o ruído dos componentes instrumentais.

O número de componentes que representam os dados de observação (dimensão do espaço gerador) está limitada ao número de canais  $n_{ch}$  do experimento. Com isso, a Eq.(2.3) pode ser representada na forma vetorial  $1 \times n_{ch}$ , tal que

$$\vec{x}(p) = \vec{s}(p) + \vec{n}(p). \quad (2.4)$$

O sinal a ser recuperado pode ser estimado por

$$\hat{s} = \mathbf{W} \vec{x}(p), \quad (2.5)$$

com  $\mathbf{W}$  sendo uma matriz de peso  $n_{ch} \times n_{ch}$ . Ela minimiza a variância total do vetor estimado  $\hat{s}$  sob a condição  $\mathbf{W}\mathbf{S} = \mathbf{S}$ , de modo que

$$\mathbf{W} = \mathbf{S} \left( \mathbf{S}^T \mathbf{R}(p)^{-1} \mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{R}(p)^{-1}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a estimativa de hidrogênio mais a matriz que contém o ruído. Além disso,  $\mathbf{R}(p)$  é a matriz de covariância de dados com dimensões  $n_{ch} \times n_{ch}$ , definida por

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{R}_{Hi}(p) + \mathbf{R}_n(p), \quad (2.7)$$

sendo  $\mathbf{R}_{Hi}(p)$  a matriz de covariância do hidrogênio e  $\mathbf{R}_n(p)$  a matriz de covariância do ruído. Desta forma, teremos, respectivamente:

$$\mathbf{R}_{Hi}(p) = \langle \vec{s}(p) \cdot \vec{s}(p)^T \rangle, \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{R}_n(p) = \langle \vec{n}(p) \cdot \vec{n}(p)^T \rangle. \quad (2.9)$$

Ao estimar a matriz  $\mathbf{S}$  é possível recuperar o sinal desejado. Para tal, deve-se usar um espectro de potência teórico de hidrogênio para determinar a razão local entre o sinal cosmológico e o sinal total observado.

## 2.2 Mecânica Quântica Relativística

A estrutura dos átomos pode ser muito bem descrita e entendida pela teoria da mecânica quântica. Em 1913, Bohr <sup>3</sup> elaborou um modelo para o átomo de hidrogênio que combinava os trabalhos de Planck <sup>4</sup>, Einstein e Rutherford <sup>5</sup>. A teoria semi-clássica de Bohr não era

<sup>3</sup> Niels Henrik David Bohr (1885-1962), foi um físico dinamarquês, desenvolveu o modelo atômico que descreve os níveis de energia dos elétrons como sendo discretos (e não contínuos). Seus trabalhos foram de fundamental importância para o desenvolvimento da Mecânica Quântica.

<sup>4</sup> Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947), físico alemão, a ele se atribui a descoberta dos quanta de energia. Em algumas literaturas é chamado de "pai da Física Quântica".

<sup>5</sup> Ernest Rutherford (1871-1937), físico inglês nascido na Nova Zelândia. Na literatura é chamado de "pai da Física Nuclear". De suas descobertas experimentais mais importantes estão as partículas positivas denominadas de prótons, o conceito de meia-vida radioativa e que a radioatividade causa a transmutação de um elemento químico em outro.



suficientemente geral para descrever mais do que as características de um átomo simples com apenas um elétron; mas, ela fornecia um modelo que poderia ser facilmente visualizado. Tal modelo permitia prever a posição das linhas do espectro do hidrogênio (Fig.8).

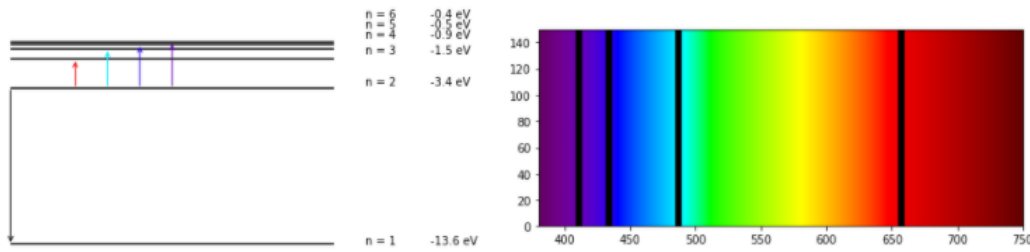


Figura 8 – Espectro de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível. Imagem produzida em Python.

No modelo atômico de Bohr, a quantização do momento angular orbital  $L$  de um elétron de massa  $m_e$  e carga elementar  $e$ , com velocidade  $v$  em um raio de órbita  $r$  é

$$L = m_e v r = \frac{n\hbar}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.10)$$

em que  $\hbar = h/2\pi$  é a constante reduzida de Planck e  $n$  é o número quântico principal relacionado aos níveis de energia

$$E_n = -\frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{E_0}{n^2}, \quad (2.11)$$

onde  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ . Essas quantizações de momento angular, raios de órbitas e níveis de energias estão fundamentadas nos postulados de Bohr <sup>6</sup>. Há duas formas de relacionar a mecânica quântica com a relatividade restrita, são: a equação de Klein-Gordon, quadrática no tempo e aplicável as partículas de spin 0 (campos escalares); e, a equação de Dirac, linear no tempo e aplicável as partículas de spin 1/2.

Historicamente, a equação de Klein-Gordon foi considerada por Schrödinger <sup>7</sup> pouco antes dele postular sua própria equação, não relativística, mas acabou descartando-a por causa de problemas com estados de energias negativas e probabilidade negativa. Após 1927, considerando a teoria relativística da radiação e dos elétrons, Dirac <sup>8</sup> focou em elaborar uma equação de onda que fosse linear no tempo junto com a restrição de massa relativística [20]. Além disso, Dirac introduziu uma interpretação física para energias negativas e evitando as densidades de probabilidades negativas associadas à equação de Klein-Gordon.

<sup>6</sup> Postulados de Bohr: **1º** os elétrons se movem em certas órbitas (estados estacionários) sem irradiar energia; **2º** os átomos irradiam apenas quando um elétron sofre uma transição de órbitas; **3º** no limite de grandes órbitas e altas energias, os resultados quânticos devem coincidir com os resultados clássicos (princípio de correspondência).

<sup>7</sup> Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961), um físico teórico austríaco que em 1928 publicou seis artigos que estabeleceram os fundamentos da Mecânica Ondulatória.

<sup>8</sup> Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) foi um físico teórico britânico. Sua formulação da Mecânica Quântica relativística o levou a prever, em 1930, a existência do pósitron.

### 2.2.1 Equação de Klein-Gordon

Dada a equação clássica de conservação de energia para o movimento de uma partícula de massa  $m$  e momento  $p$ , movendo-se em um potencial  $V$  que não depende do tempo  $t$ , temos

$$E\Psi = \hat{H}\Psi, \quad (2.12)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (2.13)$$

A teoria quântica se baseia em duas construções: funções de ondas e operadores. O estado de um sistema é representado por uma função de onda  $\Psi$ , e os observáveis (quantidades mensuráveis) por operadores matemáticos. Dada a energia  $E$  como um operador que apresenta uma derivada temporal; e, da álgebra CCR (*Canonical Commutation Relations*), onde consideramos os operadores posição  $\hat{x}$  e momento  $\hat{p}$ , teremos:

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{x} \mapsto x \quad \text{e} \quad \hat{p} \mapsto \frac{\hbar}{i} \nabla.$$

Se esses operadores diferenciais operarem em uma função de onda  $\Psi = \psi(x, y, z, t)$ , da Eq.(2.12) obteremos a seguinte equação diferencial:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi, \quad (2.14)$$

chamada de **equação de Schrödinger**, não relativística, em que  $\nabla^2$  é o Laplaciano.

Agora, a relatividade trata o tempo e o espaço de formas semelhantes. Desta forma, as derivadas temporais e espaciais devem ser da mesma ordem (simetria). Tomando a relação relativística entre energia, massa e momento derivada por Einstein, temos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.15)$$

com  $c$  simbolizando a velocidade da luz. Em termos de operadores  $E$  e  $p$ , onde aplicamos a Eq.(2.15) em uma função  $\Psi = \psi(\vec{x}, t)$ , obtemos a **equação de Klein-Gordon**:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = \left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0, \quad (2.16)$$

ou, de forma mais simples,

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0, \quad (2.17)$$

em que

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.18)$$

é chamado de operador D'Alembertiano no espaço de Minkowski, que é um invariante relativístico, ou seja, é o mesmo em todos os referenciais inerciais porque se transforma como um escalar [21].

Uma característica importante da equação de Klein-Gordon é que ela se aplica aos campos escalares; estes descrevem uma partícula livre, com spin 0, cuja solução é

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i(Et - px)}, \quad (2.19)$$

e suas derivadas são tais que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -E^2 \psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -p^2 \psi.$$

Com isso, ao considerarmos as unidades naturais onde  $\hbar = c = 1$ , escrevemos a Eq.(2.17) como sendo

$$-E^2 \Psi + p^2 \Psi = -m^2 \Psi \Rightarrow$$

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.20)$$

Há dois grandes problemas nesse resultado. O primeiro nos diz que é possível ter estados de energia positivos e negativos, este último foi interpretado como um resultado não-físico. O segundo, diz respeito a derivada temporal de segunda ordem que leva a uma densidade de probabilidade negativa, o que na época foi considerado um absurdo. Podemos ver isso da seguinte forma: dada a corrente de probabilidade  $J$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= -i\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + i\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} = i \left( \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que  $\Psi^*$  é a conjugada complexa da função  $\Psi$ , e

$$\rho = i \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right). \quad (2.22)$$

A Eq.(2.22) é chamada de equação de conservação de probabilidade. Como podemos ver, não é possível interpretar  $\Psi$  na equação de Klein-Gordon como uma função de onda.

## 2.2.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac aplica-se a um campo de spin 1/2 (elétrons) e coloca as partes temporais e espaciais da equação de Schrödinger em derivadas de primeira ordem. Inicialmente, dada a equação de Schrödinger, Eq.(2.14), o operador Hamiltoniano é escolhido de tal forma que os requisitos da relatividade restrita possam ser satisfeitos. Desta forma, supondo uma partícula que tenha massa de repouso  $m$ , temos que

$$\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2, \quad (2.23)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são matrizes constantes  $4 \times 4$  que atuam em  $\Psi$ . Assim, teremos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [c\alpha \cdot (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2] \Psi. \quad (2.24)$$

Ainda, é exigido que as matrizes  $\alpha$  e  $\beta$  satisfaçam as condições:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1,$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker da relação de anticomutação. Podemos reescrever a Eq.(2.24) como

$$i\hbar \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c\alpha_i}{\beta} \nabla \right) \Psi - mc^2 \Psi = i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - mc^2 \Psi = 0, \quad (2.25)$$

sendo  $\gamma^\mu$  as matrizes de Dirac. Novamente, considerando  $\hbar = c = 1$  e  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ; e então, obtemos a **equação de Dirac**:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi = 0. \quad (2.26)$$

Por simetria, e com a matriz  $\gamma^\mu$  satisfazendo a algebra de Clifford, podemos definir:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i \quad \text{e} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},$$

em que  $g^{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski (inversa). Uma representação explícita das matrizes de Dirac é:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainda, temos o spinor adjunto de  $\Psi$  como sendo

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.27)$$

e com um escalar de Lorentz,  $\bar{\Psi}\Psi$ , escrevemos a Lagrangiana da equação de Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.28)$$

Agora,  $\Psi$  deve ser um spinor de quatro componentes sobre o qual as matrizes de Dirac podem atuar. Tal spinor é um campo de valor complexo que descreve uma partícula de spin  $1/2$ ; e, teremos como solução da equação de Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^1(x) \\ \boldsymbol{\mu}^2(x) \\ \boldsymbol{\nu}^1(x) \\ \boldsymbol{\nu}^2(x) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

onde os dois novos componentes  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\nu}$  são um conjunto de spinores de base independentes de  $\Psi$ ; tal que, em base canônica:

$$\boldsymbol{\mu}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos considerar agora o espaço momento, onde a única derivada espacial é convertida em momento. A expansão de Fourier do campo de Dirac nos dá

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \psi(k) e^{-ik_\mu x^\mu} d^4k. \quad (2.30)$$

Usando essa expressão na equação de Dirac, Eq.(2.26), teremos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int [\boldsymbol{\gamma}^\nu k_\nu \psi(k) - m\psi(k)] e^{-ik_\nu x^\nu} d^4k = 0. \quad (2.31)$$

A parte entre colchetes, o integrando, deve ser zero. Portanto, combinando as matrizes  $\boldsymbol{\gamma}^0$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^1$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^2$  e  $\boldsymbol{\gamma}^3$ , junto com a solução da Eq.(2.29), obtemos

$$\boldsymbol{\gamma}^\nu k_\nu \psi(k) - m\psi(k) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}} \\ \vec{k} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}} & -(k_0 + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.32)$$

Chamemos essa primeira matriz de  $\mathbf{K}$  e lembrando da relação de anticomutação:  $\{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}$ , temos que

$$\det(\mathbf{K}) = -(k_0 - m)(k_0 + m) + (\vec{k} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}})^2 = -k_0^2 + m^2 + \vec{k}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \omega_k. \quad (2.33)$$

Essa é mais uma maneira de escrever a relação relativística entre energia, massa e momento, onde  $\vec{k} = \vec{p}$ , e  $k_0 = p_0 = E$ . Lembrando que a energia em termo de frequência é  $E = \hbar\omega$ , com  $\hbar = 1$ , logo, temos  $E = \omega_k$ .

Entretanto, aqui ainda temos as energias negativas assim como na notação de Klein-Gordon. Contudo, iremos interpretar as soluções de energia positiva ( $\omega_k > 0$ ) correspondendo a partículas com energia positiva, e as soluções de energia negativa ( $\omega_k < 0$ ) correspondendo a antipartículas com energia positiva. Portanto, obtemos

$$\psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{partícula} \\ \text{antipartícula} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  é um spinor de dois componentes que representa uma partícula, enquanto  $\boldsymbol{\nu}$  é um spinor de dois componentes que representa uma antipartícula.

## 2.3 Acoplamento ao Campo Eletromagnético e Perturbações

Durante o século XIX, os resultados dos trabalhos experimentais de Oersted<sup>9</sup> e Faraday<sup>10</sup> mostraram a relação existente entre o campo elétrico e o campo magnético, ou seja, o campo eletromagnético. Em 1865, Maxwell<sup>11</sup> demonstrou que uma perturbação eletromagnética poderia se propagar no espaço vazio com velocidade da luz e que esta era, provavelmente, uma onda eletromagnética [22]. Além disso, os princípios básicos de todo o eletromagnetismo, a representação quantitativa das leis do campo e sua estrutura, podem ser descritos por um conjunto de quatro equações chamadas de **Equações de Maxwell**, cuja suas formas são:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right); \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{B}$  é o campo magnético,  $\rho$  é a densidade de carga,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente,  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo e  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade do vácuo.

O acoplamento do elétron de Dirac com um campo de Maxwell pode ser analisado pela teoria chamada QED (*Quantum Electrodynamics*), [20], [21]. No qual, trabalhamos com um potencial 4-vetor

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (2.36)$$

<sup>9</sup> Hans Christian Oersted (1777-1851), físico e químico dinamarquês. Em 1820, descobriu que uma agulha magnética é desviada quando colocada nas proximidades de um condutor com uma corrente elétrica.

<sup>10</sup> Michael Faraday (1791-1867) foi um físico e químico britânico. Seus trabalhos experimentais contribuíram significativamente para o eletromagnetismo, ótica e eletroquímica.

<sup>11</sup> James Clerk Maxwell (1831-1879), físico e matemático britânico. Destaca-se pela formulação final da teoria do eletromagnetismo, que reúne a eletricidade, o magnetismo e a óptica.

onde  $\phi$  é um potencial escalar e  $\vec{A}$  é um potencial vetorial. Com isso, escrevemos os campos elétrico e magnético das seguintes formas:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.37)$$

Podemos alterar esses potenciais pela transformação de calibre:

$$\phi \mapsto \phi - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \nabla \Lambda(x),$$

em que  $\Lambda$  é uma função de posição e de tempo. Sendo assim, as equações de Maxwell homogêneas e não homogêneas serão, respectivamente,

$$\partial^\lambda \mathbf{F}^{\mu\nu} + \partial^\nu \mathbf{F}^{\lambda\mu} + \partial^\mu \mathbf{F}^{\nu\lambda} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - J^\nu = 0, \quad (2.38)$$

onde temos que  $\mathbf{F}^{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell, ou, tensor campo eletromagnético

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Tal tensor é anti-simétrico, ou seja,  $\mathbf{F}^{\mu\nu} = -\mathbf{F}^{\nu\mu}$ . Portanto, derivamos as equações de Maxwell pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (2.40)$$

Ao usarmos a corrente de elétrons como fonte para o campo de Maxwell, a Lagrangiana da interação de uma partícula com carga elétrica  $e$  com o campo eletromagnético é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu. \quad (2.41)$$

Agora, devemos introduzir uma derivada covariante que respeite as equações de Maxwell. Tal derivada, chamada acoplamento mínimo, será

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

Desta forma, com as equações (2.28), (2.40) e (2.41), construímos a Lagrangiana total que descreve o campo eletromagnético e as interações com um campo de Dirac, como sendo

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

com suas soluções sendo:

$$\psi(x) \mapsto e^{ie\Lambda(x)} \psi(x) \quad \text{e} \quad \bar{\psi}(x) \mapsto e^{-ie\Lambda(x)} \bar{\psi}(x).$$

No limite de pequenas velocidades, em comparação com a velocidade da luz, a equação de Dirac se reduz a uma versão modificada da equação de Schrödinger. Portanto, a equação de movimento de Dirac, na presença de um potencial eletromagnético, é definida como:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( -i\nabla - e\vec{A} \right) + \beta m + eA^0 \right] \Psi, \quad (2.43)$$

lembrando que  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$  são matrizes. Na correção da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio, definimos  $\vec{B}$  nulo e  $A^0$  como sendo o potencial de Coulomb. Assim, temos

$$E\Psi = \hat{H}\Psi = \left[ \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] \Psi. \quad (2.44)$$

Portanto, dado o Laplaciano  $\nabla^2$  em coordenadas esféricas, e, o vetor posição  $\vec{r} = r(x, y, z)$ , da equação de Schrödinger, Eq.(2.14), teremos como solução geral

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.45)$$

onde  $n$ ,  $l$  e  $m$  são os números quânticos associados, respectivamente, aos níveis de energia, ao momento angular, e à quantização do momento angular na componente  $z$ <sup>12</sup> (efeitos magnéticos); que assumem valores discretos:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots, (n - 1) \\ m &= -l, (-l + 1), \dots, 0, 1, 2, \dots, +l. \end{aligned}$$

O primeiro termo da Eq.(2.45) é a parte radial, cuja forma explícita é

$$R_{nl}(r) = \frac{c_0}{r} \left( \frac{r}{an} \right)^{l+1} e^{-r/an}, \quad (2.46)$$

onde  $a$  é o raio de Bohr e  $c_0$  é uma constante de normalização:

$$c_0 = \sqrt{\frac{2^{2l+3}}{an(2l+2)!}}. \quad (2.47)$$

O segundo termo da Eq.(2.45) é a parte angular, ou, os harmônicos esféricos que são escritos explicitamente como

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos(\theta)), \quad (2.48)$$

onde  $\epsilon = (-1)^m$ , e  $P_l^m$  é o polinômio de Legendre:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x), \quad (2.49)$$

<sup>12</sup> Atenção, não confundir este  $z$  representando uma coordenada no plano cartesiano com o  $z$  usado para representar o redshift ao longo deste trabalho.



e  $P_l(x)$  é gerado pela seguinte formula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l. \quad (2.50)$$

Se estivermos interessados no átomo de hidrogênio neutro [8], seu estado fundamental é totalmente degenerado. Assim, sendo  $n = 1, l = 0$  e  $m = 0$ ; a Eq.(2.46) e a Eq.(2.48) serão, respectivamente,

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a} \quad \text{e} \quad Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Existem várias correções quânticas à equação de Schrödinger, todas elas podem ser consideradas como pequenas perturbações no átomo de hidrogênio.

### 2.3.1 Acoplamento spin-órbita

O efeito spin-órbita resulta do desdobramento das linhas espectrais. Consideremos um modelo simples do átomo de hidrogênio de Bohr. No referencial do elétron em repouso (Fig.9) o próton se move em uma órbita circular em torno dele, comportando-se como uma espira percorrida por uma corrente elétrica que produz um campo magnético  $\vec{B}$  sobre o elétron, que pode ser expresso em função do momento angular  $\vec{L}$  da seguinte forma:

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{m_e c^2 r^3} \vec{L} e. \quad (2.51)$$

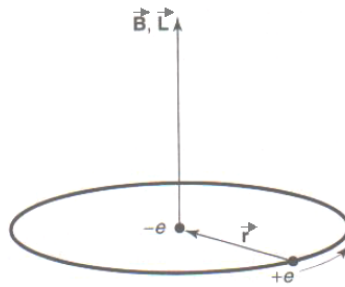


Figura 9 – Átomo de hidrogênio no referencial do elétron em repouso. Fonte: [8]

Agora, uma partícula carregada girando constitui um dipolo magnético. Seu momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  é proporcional ao seu momento angular de spin  $\vec{S}$ , logo

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S}, \quad (2.52)$$

em que  $\gamma$  é a constante chamada de razão giromagnética. O elétron está girando devido a um torque  $\vec{\mu} \times \vec{B}$ . Ainda, em relação ao momento de dipolo magnético do elétron, temos que

$$\vec{\mu}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{S}_e. \quad (2.53)$$

A energia potencial de um momento magnético na presença de um campo magnético depende da orientação relativa entre eles. Desta forma, o Hamiltoniano será dado por

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2.54)$$

Portanto, substituindo a Eq.(2.51) e a Eq.(2.53) na Eq.(2.54), obtemos

$$\hat{H}_{so} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B} = \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} \vec{S}_e \cdot \vec{L}_e. \quad (2.55)$$

Este é o Hamiltoniano no caso perturbado com o acoplamento spin-órbita. Notamos que a Eq.(2.55) está multiplicada por um fator igual a 1/2, chamado de precessão de Thomas (precessão do spin). Isso se deve ao fato de que o modelo com o elétron em repouso (no centro) não é um sistema inercial, ele acelera conforme o elétron orbita em torno do núcleo.

O acoplamento spin-órbita é um dos mecanismos que se dá a **estrutura fina**, uma constante de acoplamento para QED [21]. Em relação a energia de Bohr, a estrutura fina é uma pequena perturbação dada por

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,036}, \quad (2.56)$$

em que  $\alpha$  é uma constante adimensional e terá o mesmo valor para todos os observáveis em qualquer referencial.

### 2.3.2 Transição hiperfina

Neste momento, estamos interessados na correção causada pela interação do campo magnético do próton no elétron. De forma análoga a Eq.(2.53). Um dipolo magnético do tipo

$$\vec{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p} \vec{S}_p \quad (2.57)$$

produz um campo

$$\vec{B} = \frac{\vec{\mu}_0}{4\pi r^3} [3(\vec{\mu}_p \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}_p] + \frac{2\vec{\mu}_0}{3} \vec{\mu}_p \delta^3(\vec{r}). \quad (2.58)$$

O Hamiltoniano será expresso como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{hf} &= -\vec{\mu}_p \cdot \vec{B} \\ &= \frac{\vec{\mu}_0 g_p e^2}{m_p m_e} \left\{ \frac{[3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - (\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)]}{8\pi r^3} + \frac{1}{3} (\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e) \delta^3(\vec{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Este é o Hamiltoniano para o caso da **separação hiperfina**, no estado fundamental do átomo de hidrogênio, com a interação dos momentos magnéticos do próton e do elétron. Ou seja, na transição de um elétron do estado tripleto para o estado singleto (Fig.10) [11].

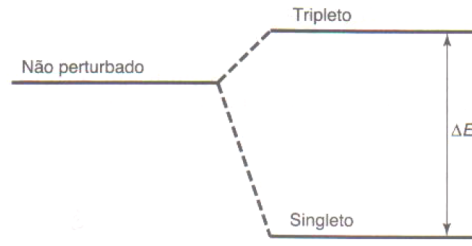


Figura 10 – Separação hiperfina no estado fundamental do hidrogênio. Fonte: [8].

Agora, podemos obter a energia do estado fundamental pelo valor esperado do Hamiltoniano. Dada a função de onda do átomo de hidrogênio  $\Psi_{100}(r, \theta, \phi)$ , segue-se que

$$\begin{aligned}
 E_{hf} &= \langle \Psi_{nlm} | \hat{H}_{hf} | \Psi_{n'l'm'} \rangle \\
 &= \frac{\vec{\mu}_0 g_p e^2}{m_p m_e} \left\{ \frac{1}{8\pi} \left\langle \frac{[3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - (\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)]}{r^3} \right\rangle + \frac{1}{3} \langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle |\psi_0|^2 \right\}. \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

A função de onda é esfericamente simétrica, portanto, o primeiro valor esperado da Eq.(2.60) é zero; e, sendo  $|\psi_0|^2 = 1/\pi a^3$ , obtemos

$$E_{hf} = \frac{\vec{\mu}_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle. \quad (2.61)$$

Essa última expressão é chamada de **acoplamento spin-spin**, pois, ela envolve o produto escalar de dois spins. Porém, ambos os momentos angulares de spin  $\vec{S}_p$  e  $\vec{S}_e$  não são conservados individualmente e não comutam com o Hamiltoniano. Portanto, dado o spin total  $\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_e$ , isso implica em

$$\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e = \frac{1}{2} (S^2 - S_p^2 - S_e^2), \quad (2.62)$$

onde  $S^2$ ,  $S_p^2$ , e  $S_e^2$  são conservados e comutam entre si, e com  $\hat{H}$ . Além disso, temos o momento angular intrínseco

$$|S| = \sqrt{s(s+1)} \hbar. \quad (2.63)$$

Então, com os spins do elétron e do próton sendo  $s = 1/2$ , temos  $S_p^2 = S_e^2 = (3/4) \hbar^2$ . Já no estado tripleto,  $s = 1$ , temos  $S^2 = 2\hbar^2$  e no estado singlete,  $s = 0$ , temos  $S^2 = 0$ . Sendo assim, a Eq.(2.62) nos dá:

$$\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e = \begin{cases} \frac{1}{4} \hbar^2, & \text{para } s = 1 \\ -\frac{3}{4} \hbar^2, & \text{para } s = 0 \end{cases}.$$

Agora, lembrando que  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , e substituindo  $e^2$  da equação do raio de Bohr, a Eq.(2.61) torna-se:

$$E_{hf} = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \{(\text{triplete}), (\text{singlete})\}. \quad (2.64)$$

Por fim, dado o fator  $g$  explícito do próton:  $g_p = 5,59$ . Determinamos a variação de energia entre os estados tripleto e singlete, substituindo os valores das constantes, obtemos

$$\Delta E = E_{hf} \left(\frac{1}{4}\right) - E_{hf} \left(-\frac{3}{4}\right) = 5,8826 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (2.65)$$

A frequência de um fóton emitida na transição do estado tripleto para o singlete é

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1421,4 \text{ MHz}. \quad (2.66)$$

Essa frequência é uma das quantidades mais precisamente conhecidas em Astrofísica. Assim, o comprimento de onda do fóton correspondente a essa frequência é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0,2109 \text{ m} = 21 \text{ cm}. \quad (2.67)$$

Essa é a famosa **linha de 21 centímetros** (Fig.11). Trata-se de uma das formas mais generalizadas e onipresentes de radiação no Universo. No espectro das ondas eletromagnéticas ela se encontra na região de micro-onda.

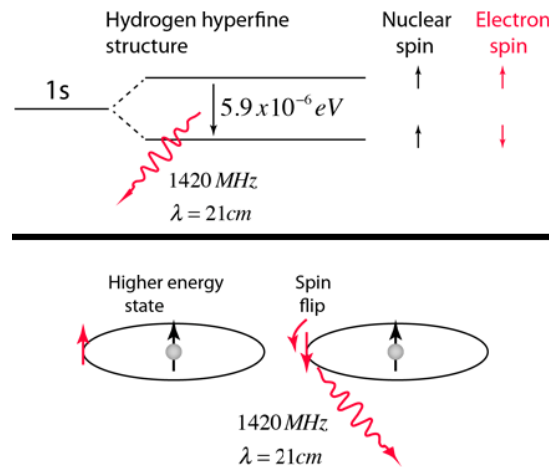


Figura 11 – Dois diagramas esquemáticos da estrutura hiperfina do estado fundamental do átomo de hidrogênio. Fonte: [23].

# 3 Cosmologia Homogênea (FLRW): Modelo $\Lambda$ CDM e Parâmetros Cosmológicos

## 3.1 Medidas Cosmológicas

A princípio, acreditava-se que o Universo fosse estático. Mas, em 1929, Hubble concluiu que a velocidade  $v$  de afastamento de uma galáxia é proporcional à distância  $r$  entre ela e a Terra (Fig.12) [2]. Essa lei de Hubble é expressada matematicamente como

$$v = H_0 r, \quad (3.1)$$

onde  $H_0$  é a constante de Hubble que representa a taxa de expansão do Universo. Esta constante é expressa com um termo adimensional  $h$ <sup>1</sup> usualmente parametrizada como

$$H_0 = 100h \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.2)$$

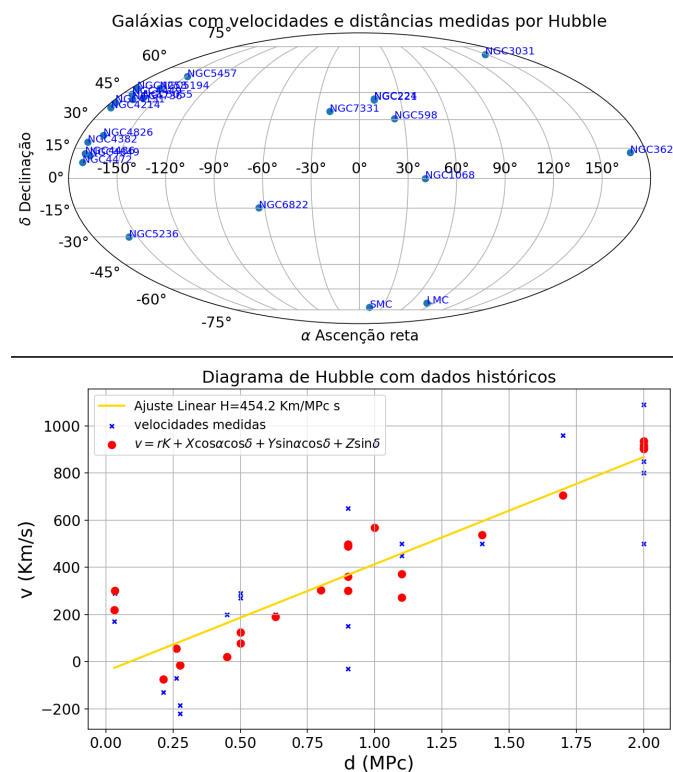


Figura 12 – Imagem superior: gráfico das galáxias com os dados originais das observações feita por Hubble. Imagem inferior: reprodução do diagrama feito por Hubble das velocidades aparentes das galáxias em função de suas distâncias. Gráficos reproduzidos em Python.

<sup>1</sup> É de suma importância a determinação do seu valor mais exato possível para que se possa elaborar um Modelo Cosmológico mais aprimorado.

A Cosmologia é basicamente a ciência que estuda as propriedades físicas globais do Universo e toda sua dinâmica. O estudo matemático e observacional desta ciência mostra que a única força que atua de forma significativa entre os corpos astronômicos é a gravidade; e, portanto, ela é a força dominante em grandes escalas, ao nível de aglomerados de galáxias [5].

Neste regime é assumido o **princípio cosmológico**; em que, para grandes escalas ( $\geq 100$  Mpc) o Universo é homogêneo e isotrópico [3], [24]. Por homogeneidade a geometria (a métrica) é a mesma em qualquer ponto do Universo; e, por isotropia não há nenhuma direção preferencial. Em suma, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores.

O modelo cosmológico de concordância considerado atualmente é o  $\Lambda$ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*), onde  $\Lambda$  é uma constante cosmológica que está relacionada à energia escura. Esta constante foi introduzida nas equações da Teoria da Relatividade Geral pelo próprio Einstein para representar uma força de repulsão desconhecida <sup>2</sup>. Tal modelo apresenta em sua estrutura: energia escura, matéria escura fria, matéria bariônica (prótons e nêutrons) e radiação (fótons fornecidos pelo CMB e neutrinos relativísticos). Ainda, além do princípio cosmológico, o Universo é assumido como sendo espacialmente plano, [25].

### 3.1.1 Equação de Friedmann e modelo de referência

Inicialmente, sendo o Universo descrito por uma equação métrica FLRW (*Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + S_k(r)^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.3)$$

considerando a velocidade da luz  $c = 1$  e

$$S_k(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0); & \text{para } k = +1 \\ r; & \text{para } k = 0 \\ R_0 \sinh(r/R_0); & \text{para } k = -1 \end{cases}, \quad (3.4)$$

sendo  $k$  a curvatura do espaço (Fig.13), e o elemento de ângulo sólido

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.5)$$

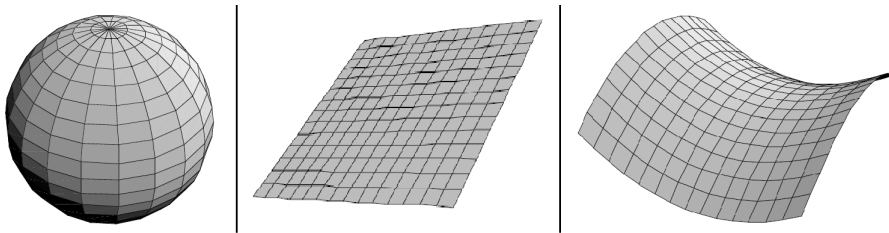


Figura 13 – Ilustrações de um universo com, respectivamente, a curvatura espacial positiva ( $k = +1$ ), plana ( $k = 0$ ) e negativa ( $k = -1$ ). Fonte: [21].

<sup>2</sup> Em 1932, Einstein rejeitou publicamente a constante cosmológica, chamando-a de "o maior erro científico da minha vida". Mas, no final da década de 1990, os estudos de supernovas mostraram que ele estava certo.

Temos que, em coordenadas esféricas e para  $k = 0$ , a métrica  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$  é definida como

$$ds^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow$$

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) a(t)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Agora, a equação de Einstein que governa a dinâmica e evolução gravitacional do Universo é

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} R + \Lambda_0 \mathbf{g}_{\mu\nu} = \kappa \mathbf{T}_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{R}_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci,  $\Lambda_0$  é uma constante associada a energia escura,  $\mathbf{T}_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento e  $\kappa$  é uma constante. Nesta última expressão, Eq.(3.7), o primeiro membro nos dá a geometria do espaço-tempo com a adição da energia escura e o segundo membro nos informa o conteúdo da matéria do Universo. Em outras palavras, a matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz à matéria como se mover.

A conexão afim; ou, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\sigma\lambda} (\partial_\mu \mathbf{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \mathbf{g}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \mathbf{g}_{\mu\nu}). \quad (3.8)$$

Segue-se o tensor de Ricci, definido a partir do tensor de curvatura de Riemann

$$\mathbf{R}_{\sigma\mu} = \mathbf{g}^{\nu\lambda} \mathbf{R}_{\lambda\sigma\nu\mu} = R_{\sigma\nu\mu}^\nu = \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\nu + \Gamma_{\sigma\mu}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\nu - \Gamma_{\sigma\nu}^\eta \Gamma_{\eta\mu}^\nu. \quad (3.9)$$

Com isso, teremos:

$$R_{tt} = -3 \frac{\ddot{a}}{a},$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2},$$

$$R_{\theta\theta} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2,$$

$$R_{\phi\phi} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2(\theta),$$

onde  $\dot{a} = da/dt$  e  $\ddot{a} = d^2a/dt^2$ . Assim, por contração, obtemos o escalar de Ricci

$$R = \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (3.10)$$

Para modelar o comportamento em larga escala do Universo de forma que a equação de Einstein seja satisfeita, devemos modelar a matéria e a energia do Universo por meio de um

fluido perfeito. Portanto, o tensor energia-momento de um fluido perfeito é descrito, em parte, por uma densidade de matéria  $\rho$  e uma pressão  $P$ , tal que

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Desta forma, Substituindo as componentes temporais dos tensores na equação de Einstein, Eq.(3.7), teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{tt}R + \Lambda_0\mathbf{g}_{tt} &= \kappa\mathbf{T}_{tt} \Rightarrow \\ 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{k}{a^2}\right) - \Lambda_0 &= \kappa\rho \Rightarrow \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \kappa\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_0}{3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Essa última expressão é chamada de **Equação de Friedmann**, desenvolvida por Friedmann em 1922. Ela consiste em uma solução geral homogênea e isotrópica para a equação de Einstein.

O fator de escala  $a$  é uma função das densidades e pressões das componentes que compõem o Universo [4]. Em um universo homogêneo e isotrópico com a densidade de energia  $\varepsilon = \rho c^2$ , em que  $\Lambda_0$  está incluído em  $\rho$ , a Eq.(3.12) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}, \quad (3.13)$$

onde  $\kappa = 8\pi G/3$ ,  $G$  é a constante gravitacional da lei de Newton e  $R_0$  é o raio da esfera do Universo em expansão, ou, em contração. Agora, sendo a densidade de energia de uma componente específica dada por

$$\varepsilon_x = \varepsilon_i a^{-3(1+w_i)}, \quad (3.14)$$

com  $w_i$  representando a equação de estado da componente. Ainda, fazendo  $H(t) = \dot{a}/a$ , para um universo com vários componentes a Eq.(3.13) se torna

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \varepsilon_i a^{-3(1+w_i)} + H_0^2 \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}, \quad (3.15)$$

em que

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2 (\Omega_0 - 1);$$

e sendo  $\varepsilon_i$  a densidade de energia contribuída por todas as componentes do Universo e  $\Omega_0$  um parâmetro de densidade. Dividindo todos os termos da Eq.(3.15) por  $H_0^2$ , considerando a densidade crítica na forma

$$\varepsilon_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}, \quad (3.16)$$



teremos:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c} a^{-3(1+w_i)} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}. \quad (3.17)$$

Nosso Universo apresenta uma contribuição de radiação  $w = 1/3$ , de matéria  $w = 0$  e de uma constante cosmológica  $w = -1$ . Desta forma, da Eq.(3.14), o Universo contém um conteúdo energético de: radiação  $\varepsilon_r/a^4$ ; matéria  $\varepsilon_m/a^3$ ; e, constante cosmológica  $\varepsilon_\Lambda$ . Portanto, a equação de Friedmann será descrita como

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}, \quad (3.18)$$

onde  $\Omega_r = \varepsilon_r/\varepsilon_c$ ,  $\Omega_m = \varepsilon_m/\varepsilon_c$ ,  $\Omega_\Lambda = \varepsilon_\Lambda/\varepsilon_c$  e  $\Omega_0 = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ . O modelo de referência é adotado como um bom ajuste aos dados observacionais atuais. Assim, os valores dos parâmetros de densidade e outras propriedades são mostrados na tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades do modelo de referência. Fonte: [25], [26].

Parâmetros de densidade $\Omega$ :	
Fótons $\Omega_\gamma = 5,35 \times 10^{-5}$	Matéria bariônica $\Omega_b = 0,049$
Neutrinos $\Omega_\nu = 3,65 \times 10^{-5}$	Matéria escura (não-bariônica) $\Omega_{dm} = 0,266$
Radiação total $\Omega_r = 9,0 \times 10^{-5}$	Matéria total $\Omega_m = 0,315$
Igualdade radiação-matéria: $a_{r,m} = 2,9 \times 10^{-4}$ ; $t_{r,m} = 5,0 \times 10^4$ anos	
Igualdade matéria-lambda: $a_{m,\lambda} = 7,7 \times 10^{-1}$ ; $t_{m,\lambda} = 10,2 \times 10^9$ anos	
Hoje: $a_0 = 1$ ; $t_0 = 13,71 \times 10^9$ anos	
Parâmetro de densidade de curvatura espacial $\Omega_k = 0,001$	
Parâmetro de densidade da constante cosmológica: $\Omega_\Lambda = 0,689$	
Constante de Hubble: $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ; $h = 0,674$	
Temperatura da CMB: $T_0 = 2,725 \text{ K}$	

### 3.1.2 Idade do Universo

Agora, lembrando que  $H(t) = (1/a) (da/dt)$ , escrevemos a Eq.(3.18) como

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = a^2 H_0^2 \left[ \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \right]. \quad (3.19)$$

Por separação de variáveis e integrando, usando os valores da tabela 3, obtemos

$$\int_0^{t_0} dt = \frac{1}{H_0} \int_0^{a_0=1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_r}{a^2} + \frac{\Omega_m}{a} + \Omega_\Lambda a^2 + (1 - \Omega_0)}} da \Rightarrow$$

$$t_0 = 13,71 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (3.20)$$

Sendo assim, pelo modelo de referência a idade atual do Universo é aproximadamente  $t_0 = 13,71 \text{ G}$  anos (ou seja, 13,71 bilhões de anos). Aqui é interessante observarmos que a época

de separação da matéria com a constante cosmológica ocorreu aproximadamente em  $t_{m,\Lambda} = 10,2$  G anos após o Big Bang. Então, a constante cosmológica,  $\Lambda$ , tem sido a componente dominante do Universo nos últimos 3,51 bilhões de anos [25].

Poderíamos considerar, também, um modelo de um universo no qual a densidade de energia é contribuída apenas pela constante cosmológica; neste caso, ele seria mais velho, com aproximadamente  $t_0 = 21,84$  G anos. Outro modelo seria um universo dominado pela matéria, onde ele seria mais jovem, com aproximadamente  $t_0 = 7,72$  G anos. Porém, dados observacionais mostram que vivemos em um universo onde a radiação era dominante no seu início, seguido por um período em que a matéria era dominante e seguido por um período, atual, onde a constante cosmológica domina. Portanto, nosso Universo se enquadra melhor em um modelo  $\Lambda$ CDM (Fig.14).

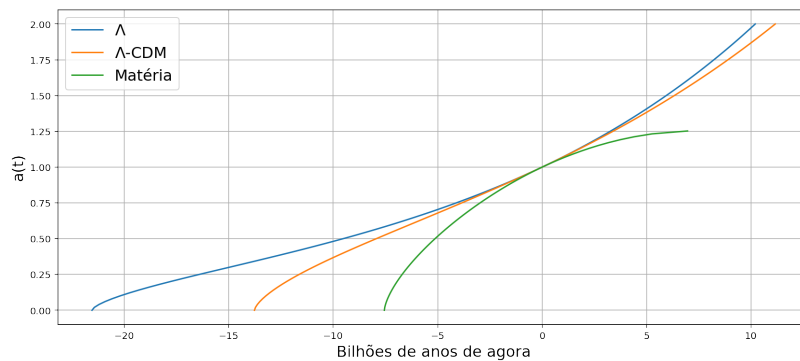


Figura 14 – Evolução de um universo com: constante cosmológica (azul); modelo  $\Lambda$ CDM (laranja); e, matéria (verde). O tempo 0 (zero) se refere a hoje; o tempo negativo ao passado; e, o tempo positivo ao comportamento futuro do Universo para cada modelo. Imagem produzida em Python.

### 3.1.3 Distâncias do Universo

Medições em Cosmologia são difíceis de serem realizadas. Além disso, temos outro problema: a princípio não sabemos com exatidão o quão grandes são os objetos extragalácticos e, também, o quão brilhantes eles são. Esses objetos observados são pequenos e pouco brilhantes mas dentro da nossa galáxia? Ou, se eles são grandes e bastante brilhantes mas fora da nossa galáxia? [6].

As observações astronômicas dependem de duas técnicas básicas: medição do fluxo de objetos e medição dos ângulos no céu. Há dois tipos de distâncias que podemos medir: a distância da luminosidade  $d_L$ , relacionada ao fluxo  $f$  medido de uma **vela padrão** (objeto cuja a luminosidade  $L$  é conhecida), dada por

$$d_L = \left( \frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}, \quad (3.21)$$

e a distância de diâmetro angular  $d_A$ , relacionada ao tamanho angular  $\delta\theta$  entre as extremidades

de uma **régua padrão** (objeto cujo o comprimento  $l$  é conhecido), dada por

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta}. \quad (3.22)$$

Ainda, o fator de escala  $a$  é uma função crescente no tempo. Além disso, o fator de escala se relaciona com o redshift da seguinte forma:

$$a = \frac{1}{1+z}. \quad (3.23)$$

Assim, torna-se conveniente usar  $z$  como um substituto do tempo  $t$ . Com isso, definimos a distância comóvel adimensional como sendo [4], [9]

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz, \quad (3.24)$$

em que

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2}, \quad (3.25)$$

onde  $\Omega_k = 1 - \Omega_0$ . Pelo princípio cosmológico, as expressões de distâncias são dadas em termos da distância de deslocamento  $r(z)$ . Portanto, da Eq.(3.3), podemos reescrever a Eq.(3.21) e a Eq.(3.22), respectivamente, na forma:

$$d_L(z) = r(z) (1+z) = \frac{(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \sinh \left[ \sqrt{\Omega_k} \chi(z) \right], \quad (3.26)$$

e

$$d_A(z) = \frac{r(z)}{1+z} = \frac{1}{(1+z) H_0 \sqrt{\Omega_k}} \sinh \left[ \sqrt{\Omega_k} \chi(z) \right]. \quad (3.27)$$

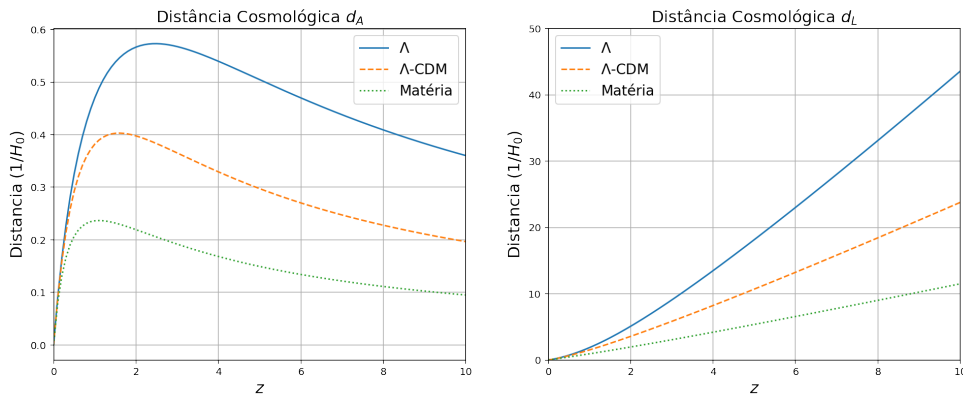


Figura 15 – Medidas de distâncias cosmológicas. Esquerda: distância de diâmetro angular de uma régua padrão  $d_A$  em função de  $z$ . Direita: distância de luminosidade de uma vela padrão  $d_L$  em função de  $z$ . Imagem produzida em Python.

As equações (3.26) e (3.27) são as medidas de distâncias cosmológicas de uma vela padrão e uma régua padrão, em função do redshift observado  $z$  (Fig.15). Em unidades da distância de Hubble,  $c/H_0$ , elas se relacionam da seguinte maneira:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (3.28)$$

## 3.2 Supernovas Tipo Ia

Nos anos de 1990, duas equipes de observação de supernovas <sup>3</sup> usaram os melhores telescópios da época para trabalharem em conjunto para descobrir e acompanhar as supernovas e as SNe Ia (*Type Ia Supernovae*) [4]. Estas primeiras são explosões estelares energéticas resultadas do colapso do núcleo de uma estrela massiva morrendo.

As SNe Ia, por sua vez, ocorrem quando uma estrela anã branca em rotação acrescenta matéria se fundindo com outra anã branca ou acumulando gás de uma companheira estelar próxima. Desta forma, elas excedem o limite de massa de Chandrasekhar <sup>4</sup>, entram em colapso e explodem. Dada uma galáxia específica, uma SNe Ia ocorre a cada 100 anos, em média [25]. As SNe Ia são usadas como velas padrão desde a década de 1970. Através dos seus estudos, Zwicky <sup>5</sup> observou que elas apresentam luminosidades aproximadamente uniformes.

Atualmente, as análises dessas velas padrão se concentram em contabilizar uma série de incertezas sistemáticas. Com o aumento de SNe Ia observadas e a diminuição dos erros estatísticos, as incertezas sistemáticas diminuem e, com isso, aumentam a exatidão das medições de energia escura, como também, o valor da constante de Hubble  $H_0$ . Um exemplo para a determinação da constante  $H_0$  foi o uso das velas padrão da classe de Cefeidas <sup>6</sup>, com os dados delas o HST (*Hubble Space Telescope*) determinou o valor de  $H_0 = 75 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Entretanto, há um problema, as Cefeidas só podem ser estudadas até  $d_L = 30 \text{ Mpc}$ ; e, como sabemos, nesta escala não podemos considerar o Universo como sendo homogêneo e isotrópico.

Nos últimos anos, as SNe Ia são as velas padrão escolhidas para estudos cosmológicos. Elas são objetos altamente luminosos, podendo ter um valor de  $L = 3,0 \times 10^9 L_\odot$  até  $L = 5,0 \times 10^9 L_\odot$ , sendo observadas a longas distâncias. Portanto, úteis para medir distâncias cosmológicas. Observacionalmente, considerando a Eq.(3.21), o fluxo  $f$  é quantificado logarithmicamente à magnitude aparente  $m$ , tal que:

$$m = -2,5 \log_{10} \left( \frac{f}{f_x} \right), \quad (3.29)$$

<sup>3</sup> O **Supernova Cosmology Project** liderado pelo astrofísico estadunidense Saul Perlmutter; e, o **High-Z Supernova Search Team** liderado pelo astrofísico estadunidense Brian Schmidt.

<sup>4</sup> Massa máxima na qual uma estrela anã branca pode ser sustentada contra sua própria gravidade. Tal que, a massa de Chandrasekhar  $M_C \approx 1,4 M_\odot$ , onde  $M_\odot = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$  é a massa do Sol.

<sup>5</sup> Fritz Zwicky (1898-1974) foi um astrônomo suíço. Contribuiu para a Astronomia teórica e observacional com investigação sobre as galáxias e à produção de catálogos das mesmas.

<sup>6</sup> São estrelas supergigantes com o valor de  $L = 400 L_\odot$  até  $L = 40.000 L_\odot$ , onde  $L_\odot = 3,85 \times 10^{26} \text{ W}$  é a luminosidade do Sol. Uma grande contribuição para as medições de distâncias cósmicas foi feita por Henrietta Leavitt (1868-1921) que, descobriu a relação período/luminosidade das Cefeidas.

com  $f_x = 2,53 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$  sendo o fluxo de referência. Enquanto que, a luminosidade  $L$  está relacionada à magnitude absoluta  $M$  do objeto, tal que:

$$M = -2,5 \log_{10} \left( \frac{L}{L_x} \right), \quad (3.30)$$

com  $L_x = 78,7 L_{\odot}$  sendo a luminosidade de referência. Desta forma, da Eq.(3.29) e Eq.(3.30) temos a relação:

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (3.31)$$

onde a quantidade  $\mu = m - M$  é conhecida como o módulo de distância.

A partir de medidas de amostra de SNe Ia observadas pelas colaborações SNLS (*SuperNova Legacy Survey*), SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), entre outros [27], podemos reproduzir um diagrama de Hubble em função de  $z$  junto com o módulo de distância (Fig.16).

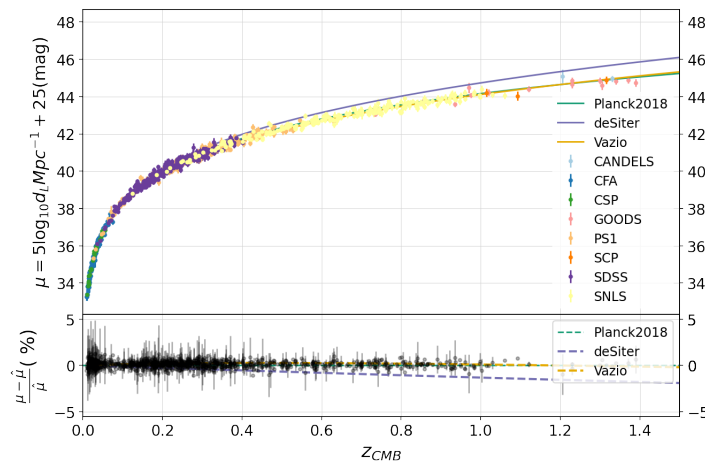


Figura 16 – Gráfico do módulo de distância produzido pela combinação de amostras de SNe Ia. Imagem produzida em Python.

### 3.3 Energia Escura

A energia escura é a componente que fornece a maior parte do conteúdo energético do Universo. A saber, o Universo é formado por: 5% de matéria normal, 27% de matéria escura e 68% de energia escura (Fig.17). A matéria normal, ou bariônica (especificamente prótons e nêutrons), são partículas compostas por três quarks. Enquanto que, a matéria escura constitui a maior parte da matéria encontrada no Universo, tal componente não é luminosa e não emite radiação eletromagnética, mas interage gravitacionalmente com as demais componentes do Universo.

Os principais candidatos para serem a energia escura são: a constante cosmológica, campos escalares e modificações da teoria da gravidade de Einstein. Dentre esses, a constante cosmológica  $\Lambda$ , que representa a energia do vácuo na equação de Einstein, é a mais conhecida. A densidade

de energia do vácuo é imutável no tempo, espacialmente suave e está de acordo com dados existentes.

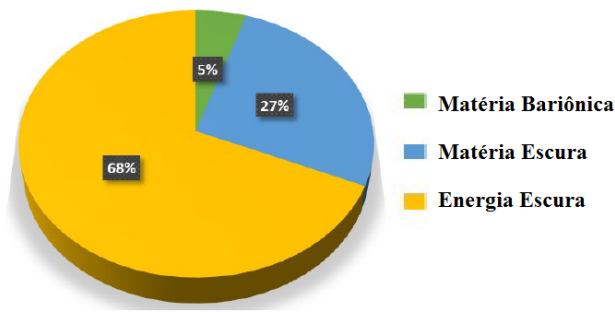


Figura 17 – Distribuição energética das componentes do Universo. Fonte: Colaboração Planck.

No início da década de 1980 foi implantado na Cosmologia um mecanismo teórico chamado inflação, cuja principal característica é acelerar a taxa de expansão de modo que o Universo pareça plano em tempos tardios [4]. Ainda, até próximo do final do século XX, se achava que apenas a matéria e uma pequena quantidade de radiação compreendia a densidade de energia do Universo. Entretanto, a descoberta de aglomerados maciços de galáxias com valores altos de  $z$  criou problemas para um universo plano dominado apenas pela matéria. Além disso, medidas do agrupamento de galáxias indicou forte preferência por um universo de baixa densidade de matéria e apontou para um modelo com  $\Lambda$  contribuindo para a geometria espacial plana.

No final de 1990, as equipes de pesquisa de SNe Ia <sup>7</sup> tiveram em seus resultados a concordância de que essas supernovas estavam mais distantes do que o esperado em um universo apenas com matéria, e, que a taxa de expansão do Universo está aumentando. A descoberta do Universo em aceleração derrubou o modelo de um universo material e apontou para um novo modelo cosmológico dominado por uma componente de pressão negativa. Essa componente foi nomeado de **energia escura** pelo cosmólogo Turner <sup>8</sup>. Foram as observações das SNe Ia em  $z < 1$  que confirmaram, em 1998, a hipótese de que a expansão do Universo está acelerando (Fig.18).

Nas últimas duas décadas houveram vários estudos para medir as propriedades dessa componente, e, a busca por modelos que permitem uma equação de estado que evolui no tempo. No modelo  $\Lambda$ CDM, a atual aceleração do Universo é explicada pela introdução de uma constante cosmológica. Supõe-se ainda que, a energia escura seja um fluido ideal homogêneo, as restrições baseadas em estudos atuais apresentam um valor para sua equação de estado de  $w = -1,03 \pm 0,03$  [19]. Na equação de Friedmann ela é encontrada pela relação:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_{\Lambda}. \quad (3.32)$$

<sup>7</sup> O Supernova Cosmology Project e o High-Z Supernova Search Team.

<sup>8</sup> Michael Stanley Turner, nascido em 1949. É um teórico cosmólogo que cunhou o termo energia escura. Além disso, ajudou a estabelecer o campo interdisciplinar que combina cosmologia e física de partículas elementares para entender a origem e evolução do Universo. Contribuiu para a Cosmologia inflacionária, a formação de estruturas, partículas de matéria escura e para a teoria da nucleossíntese do Big Bang.

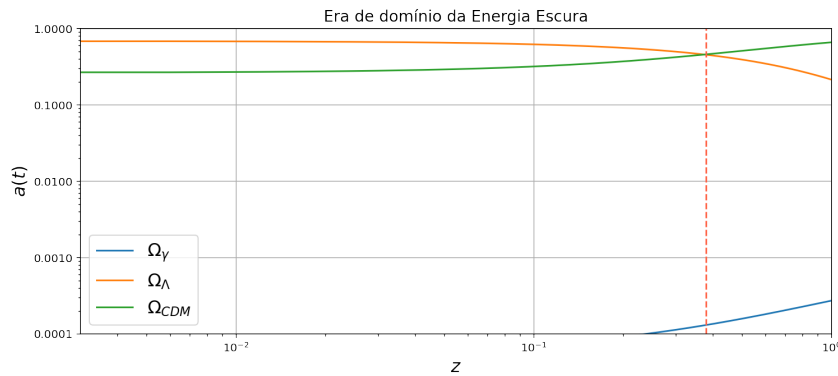


Figura 18 – Evolução das componentes do Universo. Parâmetro de densidade da radiação na forma de fótons  $\Omega_\gamma$ , parâmetro de densidade da energia escura  $\Omega_\Lambda$  e parâmetro de densidade da matéria escura fria  $\Omega_{CDM}$ , em  $z < 1$ , pelos dados das SNe Ia. A linha tracejada vertical indica o momento em que a energia escura passa a ser a componente dominante do Universo, em  $a \approx 7,7 \times 10^{-1}$  e  $z \approx 0,29$ . Imagem produzida em Python.

Pelo efeito desta componente,  $\Lambda$ , a taxa de expansão do Universo pode ser reescrita como

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda f(z) + \Omega_k (1+z)^2}, \quad (3.33)$$

onde  $f(z)$  é a densidade adimensional da energia escura, e, sua evolução é dada por

$$f(z) = (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}. \quad (3.34)$$

A equação de estado define a razão entre a pressão e a densidade de energia, tal que:

$$w = \frac{P_\Lambda}{\rho_\Lambda}. \quad (3.35)$$

Sua parametrização descreve os efeitos da energia escura em quantidades observáveis. Assumindo que tal componente seja espacialmente suave, seu único grau de liberdade é a densidade  $\rho_\Lambda$  ou  $w$  [4]. O primeiro pode ser construído com a expressão

$$\rho_\Lambda(z) = \frac{3}{8\pi G} \left[ \frac{1}{(dr/dz)^2} - H_0^2 \Omega_m (1+z)^3 \right]. \quad (3.36)$$

A parametrização de  $w$  da evolução linear em função de  $z$  pode ser sondada de uma forma fenomenológica, com a aproximação de Limber, ela é dada por [12]

$$w(z) = w_0 + w_a \left( \frac{z}{1+z} \right). \quad (3.37)$$

Portanto, a maior parte da Cosmologia moderna está focada na busca de restringir os intervalos de  $f(z)$  ou  $w(z)$  [6]. Para tal, temos as medições diretas da taxa de Hubble e as demais medições de distâncias cosmológicas.

Temos ainda que, a combinação BINGO + Planck melhora consideravelmente as restrições da equação de estado da energia escura (Fig.19). Os instrumentos de pesquisa em Cosmologia no século XXI prometem medir as BAOs via detecção do sinal de 21 cm do hidrogênio neutro

dentro das galáxias em  $z < 5$ . Conseqüentemente, com isso pretende-se obter uma restrição ainda mais precisa dos modelos de energia escura.

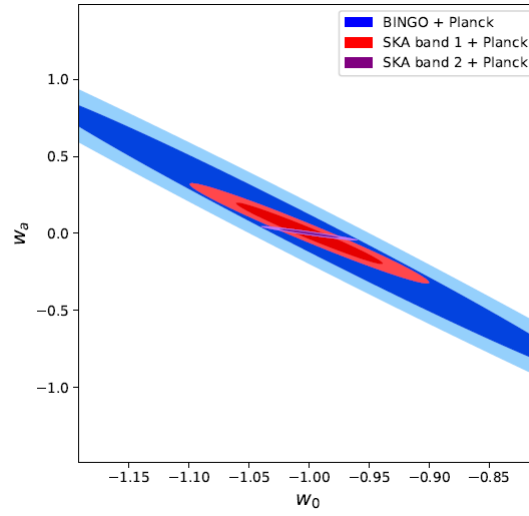


Figura 19 – Parametrização dos parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  da energia escura. Comparação entre BINGO, SKA Banda 1 e SKA Banda 2 para as restrições com o nível de confiança de 68% e 95% para a parametrização CPL em combinação com Planck. Fonte: [12].



# 4 Universo Fora de Equilíbrio: A Evolução do Universo e a Cosmologia de 21 cm

## 4.1 Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas

Inicialmente, logo após o Big Bang, o Universo se apresentava em um estado quente, denso e quase homogêneo. Nos primeiros centésimos de segundo sua temperatura era tão elevada que nenhum componente bariônico, ou núcleos atômicos, poderiam se manter unidos. Neste instante inicial era encontrada uma quantidade aproximadamente equivalente de pósitrons, elétrons e vários tipos de neutrinos que passavam por um processo extremamente rápido de criação e aniquilação [5].

Seguido do processo de inflação que é, pelo modelo  $\Lambda$ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*), a responsável por produzir as perturbações primordiais [3], o Universo continuou a se expandir (Fig.20) e se resfriar a uma temperatura baixa o suficiente para possibilitar as reações nucleares entre partículas elementares. Assim, elétrons e pósitrons começaram a se aniquilar, com a energia deste processo sendo transferida para os fótons. Posteriormente, pela fusão nuclear, prótons e nêutrons formaram o núcleo do hidrogênio. Esse breve momento de sucessivos processos de fusões nucleares para formarem núcleos mais pesados é chamado de **nucleossíntese**.

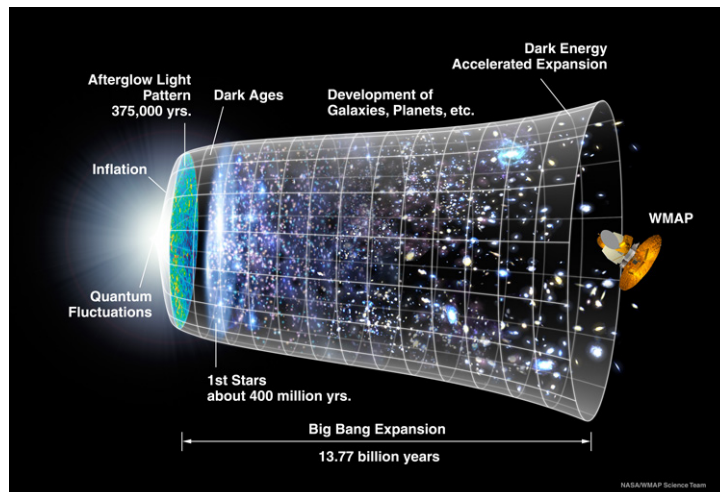


Figura 20 – Ilustração da evolução do Universo. Fonte: Resultados do WMAP, [28].

O processo pelo qual a matéria bariônica passa de um plasma ionizado para um gás de átomos neutros dá origem a radiação CMB (*Cosmic Microwave Background*). Trata-se de um corpo negro quase perfeito com uma temperatura média de  $T_{CMB} = 2,725$  K. É dessa radiação que provém a maior parte da luz do Universo, e não das estrelas, em comprimentos de ondas

fora da luz visível [25]. Ela foi prevista teoricamente por Gamow <sup>1</sup>, Alpher <sup>2</sup> e Herman <sup>3</sup> em 1948 e descoberta experimentalmente por Penzias <sup>4</sup> e Wilson <sup>5</sup> em 1965.

As primeiras detecções das anisotropias do CMB foram feitas pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explore*) no início dos anos 1990, seguido pelo mapeamento em maior resolução do WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) e do satélite Planck [29] (Fig.21). Desde a sua descoberta, as anisotropias de temperatura da CMB tornaram-se uma das formas mais eficientes para estudar a Física do Universo primitivo.

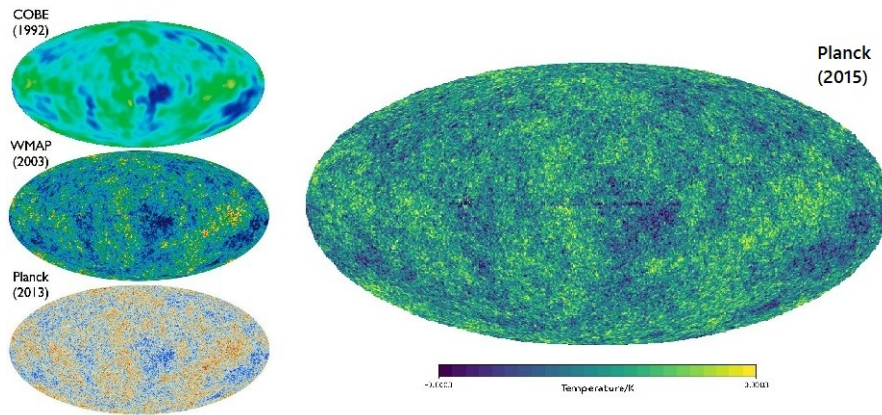


Figura 21 – Mapas da medida de anisotropia da temperatura da CMB. Fonte: NASA/COBE/DMR; NASA/WMAP science team; ESA and the Planck collaboration.

#### 4.1.1 Recombinação, desacoplamento e espalhamento de fótons

O processo pelo qual resulta na radiação CMB pode ser estudado em três momentos: a época da recombinação, o desacoplamento, e, a época do último espalhamento de fótons.

No primeiro momento havia uma proporção de 1,6 bilhões de fótons para cada bárion, o que indica uma alta probabilidade de um fóton colidir com um hidrogênio. Um próton  $p^+$  e um elétron  $e^-$  sofrem uma recombinação radiativa (acoplamento de Coulomb) formando um hidrogênio  $Hi$  e um fóton  $\gamma$  com excesso de energia [4], [9], [30] através da relação



<sup>1</sup> George Anthony Gamov (1904-1968), físico estadunidense nascido na Ucrânia. Desenvolveu uma teoria cosmológica na qual todos os elementos químicos teriam sido formados no Universo primordial por reações de fusão nuclear, contrariando a teoria do Estado estacionário. Gamow é mais conhecido por propor, junto com Alpher e Herman, a existência de uma radiação cósmica de fundo.

<sup>2</sup> Ralph Asher Alpher (1921-2007), foi um físico e cosmólogo estadunidense. Além da predição da radiação de fundo, com Gamow e Herman, Alpher contribuiu com grande parte da matemática para os trabalhos teóricos de Gamow; também, publicou o trabalho denominado Alpher-Bethe-Gamov.

<sup>3</sup> Robert Herman (1914-1997) foi um físico estadunidense. Mas conhecido pelo trabalho matemático em conjunto com Alpher no modelo que predisse a radiação cósmica de fundo em micro-ondas.

<sup>4</sup> Arno Allan Penzias, nascido em 1933 na cidade de Munique na Alemanha. É um físico estadunidense que descobriu a radiação cósmica de fundo em micro-ondas juntamente com Wilson.

<sup>5</sup> Robert Woodrow Wilson, nascido em 1936. É um físico radioastrônomo estadunidense, foi laureado com o Nobel de Física em 1978, juntamente com Penzias, pela descoberta da radiação cósmica de fundo.

Dado que fótons, elétrons, prótons e hidrogênio estejam todos em equilíbrio térmico. O grau de ionização do conteúdo bariônico do Universo é dado pela ionização fracionária

$$X = \frac{n_p}{n_p + n_{Hi}} = \frac{n_p}{n_b} = \frac{n_e}{n_b}, \quad (4.2)$$

onde  $n_p$ ,  $n_{Hi}$ ,  $n_e$  e  $n_b$  são, respectivamente, o número de prótons, o número de átomos de hidrogênio, o número de elétrons livres e o número de bárions. Em seguida, no momento em que o Universo estava totalmente ionizado,  $X = 1$ , os fótons interagem principalmente com os elétrons via espalhamento de Thomson

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-. \quad (4.3)$$

Nessa interação ocorre uma transferência de energia e momento entre fótons e elétrons. Então, a taxa de espalhamento de um fóton com velocidade  $c$  é

$$\Gamma = \frac{c}{\lambda} = n_e \sigma_e c, \quad (4.4)$$

em que  $\sigma_e = 6,65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$  é a secção transversal para o espalhamento Thomson. Agora, o número de partículas de um tipo específico  $x$  com massa  $m_x$  em equilíbrio cinético na temperatura  $T$  e com momento  $p$ , é determinado por:

$$n_x(p)dp = g_x \frac{4\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{[(E-\mu_x)/k_B T] \pm 1}} dp, \quad (4.5)$$

onde  $g_x$  é a densidade de estados,  $\mu_x$  é o potencial químico,  $h$  é a constante de Plank,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e os sinais de mais (+) e de menos (-) denotam, respectivamente, uma distribuição de Fermi-Dirac e uma distribuição de Bose-Einstein.

Para os fótons temos  $E = pc = hf$ ,  $g_\gamma = 2$  e  $\mu_\gamma = 0$ ; integrando sob o intervalo de todas as frequências, obtemos:

$$n_\gamma = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^2}{e^{(hf/k_B T)} - 1} df = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \quad (4.6)$$

No momento da recombinação, Eq.(4.1), os bárions tinham energia  $m_b c^2 \gg k_B T$ , e portanto, velocidades térmicas não-relativísticas. Sendo

$$E \approx m_b c^2 + \frac{1}{2} m_b v^2 = m_b c^2 + \frac{p^2}{2m_b}, \quad (4.7)$$

pela distribuição de Boltzmann e integrando sob o intervalo de todos os momentos das partículas, a Eq.(4.5) para os bárions será dada por:

$$\begin{aligned} n_b &= g_b \frac{4\pi}{h^3} e^{(-m_b c^2 + \mu_b)/k_B T} \int_0^\infty e^{(-p^2/2m_b k_B T)} p^2 dp \\ &= g_b \left( \frac{m_b k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{(-m_b c^2 + \mu_b)/k_B T}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Em geral, partículas com massa tem  $\mu_x \neq 0$ . Em um equilíbrio químico a soma dos potenciais químicos é igual nos dois lados da Eq.(4.1); ou seja,  $\mu_{Hi} + \mu_\gamma = \mu_p + \mu_e$ . Desta forma, com  $\mu_\gamma = 0$ , podemos obter uma relação de números de átomos de hidrogênio, prótons e elétrons como sendo

$$n_{Hi} = n_p n_e \Rightarrow$$

$$\frac{n_{Hi}}{n_p n_e} = \frac{g_{Hi}}{g_p g_e} \left( \frac{m_{Hi}}{m_p m_e} \right)^{3/2} \left( \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} e^{[(m_p + m_e - m_{Hi})c^2/k_B T]}, \quad (4.9)$$

mas, temos que  $m_e \ll m_p$ ,  $g_p = g_e = 2$  e  $g_{Hi} = 4$ . Com isso, teremos

$$\frac{n_{Hi}}{n_p n_e} = \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} e^{Q/k_B T}, \quad (4.10)$$

onde  $Q = (m_p + m_e - m_{Hi})c^2$ . A expressão Eq.(4.10) é chamada de **equação de Saha**, ela nos dá uma aproximação da evolução de um sistema saindo do equilíbrio.

Até momentos antes do desacoplamento, o Universo tinha  $m_{Hi} = m_p + m_e \Rightarrow m_{Hi} \approx m_p$  e uma carga total neutra  $n_p = n_e$ . Sendo assim, da Eq.(4.2), observamos que

$$n_{Hi} = \frac{(1 - X_e)}{X_e} n_p, \quad (4.11)$$

sendo  $X_e$  a fração ionizada de elétrons. Podemos, ainda, definir a razão bárion-fóton  $\eta$  por:

$$\eta = \frac{n_p}{X_e n_\gamma} \Rightarrow$$

$$n_p = \eta X_e \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3. \quad (4.12)$$

Portanto, substituindo  $n_{Hi}$  da Eq.(4.11) e  $n_p$  da Eq.(4.12) na Eq.(4.10), reescrevemos a equação de Saha da seguinte forma:

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = 4\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{k_B T_{rec}}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{Q/k_B T_{rec}}. \quad (4.13)$$

Pelas escalas cosmológicas a recombinação foi um processo relativamente rápido. Então, considerando  $X_e = 1/2$ ;  $\eta = 6,08 \times 10^{-10}$ ;  $k_B = 8,61 \times 10^{-5}$  eV;  $m_e c^2 = 5,11 \times 10^5$  eV; a energia mínima de ionização do hidrogênio sendo  $Q = 13,6$  eV; e, com os valores das demais constantes. A partir disso, ao resolvermos numericamente a Eq.(4.13), obtemos a temperatura do Universo na época da recombinação:  $T_{rec} \approx 3746$  K.

Em um segundo momento ocorreu o desacoplamento dos fótons. Aqui, temos a taxa de espalhamento de fótons em função de  $z$  sendo

$$\Gamma(z) = X_e(z) (1 + z)^3 n_b \sigma_e c, \quad (4.14)$$

e o parâmetro de Hubble dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3}. \quad (4.15)$$

Segue-se que, a taxa de espalhamento de fótons passa a ser menor que o parâmetro de Hubble,  $\Gamma < H$ ; assim, os elétrons são diluídos pela expansão do Universo mais rapidamente do que os fótons podem interagir com eles [25]. A chave para entender a história térmica do Universo está na competição entre a taxa de interação das partículas e a taxa de expansão do Universo. Desta forma, as partículas mantêm o equilíbrio até o momento em que  $\Gamma > H$ .

Então, em um terceiro momento, os fótons sofrem seu último espalhamento a partir de um elétron e se propagam livremente formando a CMB, com isso, o Universo se torna transparente. Esse desacoplamento ocorreu em  $z \approx 1100$ . Uma pequena fração de elétrons livres,  $X_e \approx 10^{-4}$ , se propagam pela CMB mantendo o equilíbrio térmico com o campo de radiação do IGM (*Intergalactic Medium*) devido a troca de energia com os fótons da CMB por meio do espalhamento Compton [10], [31]. Logo após a recombinação, a fração de elétrons livres diminui rapidamente. Porém, o espalhamento Compton mantém a temperatura dos elétrons aproximadamente igual a temperatura de radiação até  $z \approx 200$ .

O último espalhamento de fótons sucedeu em um instante seguinte ao desacoplamento, ou seja, praticamente no mesmo  $z$ . Esses três momentos que descrevem a era da qual surgiu a radiação CMB ocorreram quando a matéria era a componente dominante do Universo.

#### 4.1.2 Flutuações de temperatura e espectro de potência da CMB

A Física da CMB ocorre no Universo primordial, onde a energia escura tem pouca influência. Contudo, esta última ainda afeta a escala angular em que as flutuações CMB são observadas, ou seja, a localização horizontal dos picos do seu espectro de potência angular. Em um universo espacialmente plano a CMB restringe uma combinação degenerada de  $\Omega_m$  e  $w$  <sup>6</sup>.

Agora, os fótons da CMB não são originados de uma fonte localizada, mas sim, de toda a região celeste e de uma distância finita. Sendo assim, consideremos a última superfície de espalhamento dos fótons CMB, em  $z \approx 1100$ , na forma de uma esfera. As flutuações de temperatura da CMB, expandidas em harmônicos esféricos, são dadas por [4], [25]:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.16)$$

em que  $a_{lm}$  são coeficientes complexos e  $Y_l^m(\theta, \phi)$  são as funções harmônicas esféricas. Esta última expressão descreve a distribuição de pontos quentes e frios nas anisotropias da CMB.

As flutuações de temperatura surgem do efeito gravitacional das flutuações de densidade da matéria escura, sendo esta a principal contribuinte das interações gravitacionais. O potencial gravitacional espacialmente variável  $\delta\Phi$  é expressa pela equação de poisson

$$\nabla^2(\delta\Phi) = \frac{4\pi G}{c^2} \delta\varepsilon, \quad (4.17)$$

<sup>6</sup> Parâmetro que representa a equação de estado da energia escura.

em que  $\delta\varepsilon$  é a densidade de energia da matéria escura e  $G$  é a constante gravitacional da lei de Newton. Na observação da última superfície de espalhamento, os pontos frios (com redshift) correspondem aos mínimos em  $\delta\Phi$  e os pontos quentes (com blueshift <sup>7</sup>) correspondem aos máximos em  $\delta\Phi$ . Desta forma, temos que

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}. \quad (4.18)$$

Em suma, as flutuações de temperatura em grandes escalas angulares nos fornecem um mapa das flutuações do potencial gravitacional presentes no momento do último espalhamento de fótons. A criação  $\delta T/T$  por  $\delta\Phi$  é chamada de **efeito Sachs-Wolfe**; e, a região onde as flutuações de temperatura são constantes é chamada de **platô de Sachs-Wolfe**.

A propriedade estatística mais importante da Eq.(4.16) é a função de correlação  $C(\theta)$ . Um mapa da CMB descreve a variação da sua temperatura. Considerando dois pontos  $\delta T$  na superfície de espalhamento e em função da direção  $\hat{n}$  em relação a um observador; ambos esses pontos separados por um ângulo  $\theta$  pela relação  $\cos(\theta) = \hat{n} \cdot \hat{n}'$  (Fig.22). Desta forma, a média do produto sobre todos os pontos nos dá

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \cdot \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos(\theta)}. \quad (4.19)$$

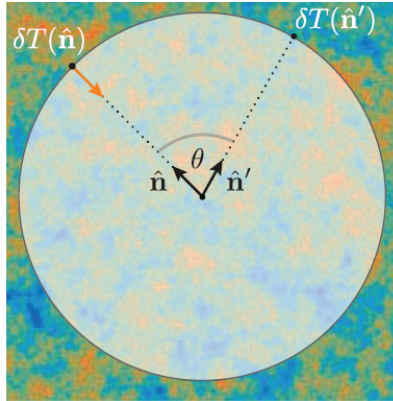


Figura 22 – Ilustração da função de correlação de dois pontos da anisotropia de temperatura da CMB,  $\delta T(\hat{n})$ . Fonte: [31].

Após a recombinação, os fótons que fluem em direção ao referencial têm sua energia inalterada pelo espalhamento Thomson. Podemos considerar a seguinte relação:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \Theta(\eta, \vec{r}, \hat{n}), \quad (4.20)$$

onde  $\eta$  é o tempo conforme e  $\vec{r}$  é a posição em relação a um referencial na Terra. Ainda, guardando em mente a normalização que garante a ortonormalidade:

$$\int Y_l^m(\hat{n}) Y_{l'}^{m'}(\hat{n}')^* d^2\hat{n} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.21)$$

<sup>7</sup> Deslocamento espectral para o azul; ou, diminuição do comprimento de onda da luz de uma fonte que se aproxima do observador.

com a funao delta de Kronecker sendo

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

Se as condioes iniciais sao estatisticamente isotr3picas, devemos esperar que essas correlaoes dependam apenas da orientaao relativa  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Sendo assim, a inversa da expansao da funao  $\Theta(\hat{n})$  pode ser escrita como

$$a_{lm} = \int Y_l^m(\hat{n})^* \Theta(\hat{n}) d^2\hat{n}. \quad (4.22)$$

Sao as condioes iniciais para perturbaoes cosmol3gicas que sao variaveis reais para as quais a inflaao prediz um espectro de potencia. Portanto, devemos introduzir uma nova funao, tal que, para perturbaoes gaussianas, teremos

$$\langle a_{lm} \rangle = 0, \quad \text{e} \quad \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \langle a_{lm} \cdot a_{lm}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{TT}, \quad (4.23)$$

onde essa nova funao  $C_l^{TT}$  forma o espectro de potencia do CMB [32], (Fig.23).

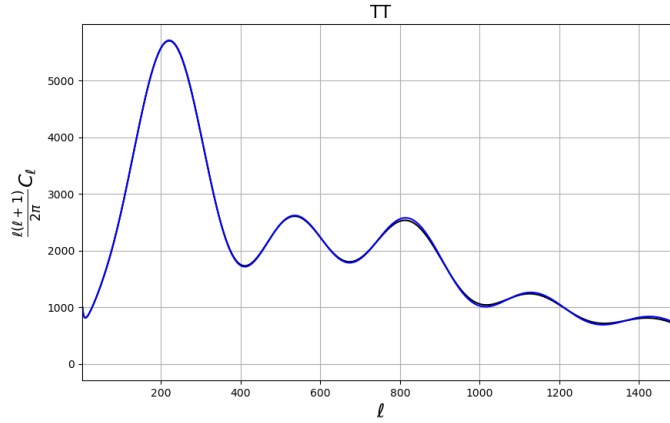


Figura 23 – Espectro de potencia da CMB, grafico da funao de correlaao de dois pontos produzida pelo c3digo CAMB (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*). Imagem produzida em Python.

Agora, ao introduzirmos a transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} C_l^{TT} &= \langle |a_{lm}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int Y_l^m(\hat{n}) Y_l^{m'}(\hat{n}') d^2\hat{n} d^2\hat{n}' \\ &\quad \times \int \int \langle \Theta(\vec{k}, \hat{n}) \cdot \Theta(\vec{k}', \hat{n}') \rangle e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-i\vec{k}'\vec{r}} d^3k d^3k'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sabendo que

$$\langle \Theta(\vec{k}, \hat{n}) \cdot \Theta(\vec{k}', \hat{n}')^* \rangle = \langle \alpha(\vec{k}) \cdot \alpha(\vec{k}')^* \rangle \Theta(k, \hat{n}) \Theta(k', \hat{n}')^*, \quad (4.25)$$

onde  $\alpha(\vec{k})$  são os modos primordiais. Assumindo perturbações Gaussianas, obtemos

$$\langle \alpha(\vec{k}) \cdot \alpha(\vec{k}')^* \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P_\chi(k), \quad (4.26)$$

em que  $P_\chi(k)$  é a distribuição do espectro de potência adimensional da perturbação primordial. Combinando a Eq.(4.25) e Eq.(4.26) na Eq.(4.24), teremos a função de correlação de dois pontos do espectro de potência na forma

$$\begin{aligned} C_l^{TT} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \Theta(k, \hat{n}) \Theta(k', \hat{n}')^* \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P_\chi(k) e^{i(k-\vec{k}')\vec{r}} d^3k d^3k' \\ &= \frac{2}{\pi} \int |\Theta_l(\vec{k}, \hat{n})|^2 P_\chi(k) k^2 dk \\ &= 4\pi \int \frac{|\Theta_l(\vec{k}, \hat{n})|^2 \Delta_\chi^2(k)}{k} dk, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde

$$\Delta_\chi^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_\chi(k). \quad (4.28)$$

Ainda, para  $l$  muito grande podemos fazer a aproximação  $\Theta_l(\vec{k}, \hat{n}) \approx J_l(kr)$  [29], que é a função esférica de Bessel e  $r$  é o raio da esfera. Então, temos que

$$C_l^{TT} = 4\pi \int \frac{J_l^2(kr) \Delta_\chi^2(k)}{k} dk, \quad (4.29)$$

onde  $\Delta_\chi^2$  é a densidade de flutuação do número de onda  $k$ . Em observações de galáxias, o espectro de potência da CMB difere da matéria. As perturbações em  $l \lesssim 100$  originam a anisotropia da  $T_{CMB}$ . Os momentos angulares da expansão de Fourier da anisotropia da  $T_{CMB}$  podem ser definidos por uma função  $F_l$ . Então, o espectro de potência angular, diretamente observável em função de  $z$ , é dado por [31]

$$C_l^{TT}(z, z') = 4\pi \int \frac{P_\chi(k) F_l(k, z) F_l(k, z')}{k} dk, \quad (4.30)$$

onde  $P_\chi$  é o espectro de potência da perturbação de curvatura primordial e  $F_l(k, z)$  é uma função de distribuição da função de transferência multipolar.

## 4.2 Oscilações Acústicas Bariônicas

Em um momento anterior a recombinação e ao desacoplamento, o Universo era um plasma quente composto por matéria bariônica, matéria escura e luz, formando um único fluido fóton-bárion em equilíbrio térmico. A constituição desse fluido e da densidade da matéria escura (não bariônica) não eram homogêneas, o que criava algumas regiões mais densas do que outras. Esse fluido se movia sob a influência gravitacional da matéria escura e "caia" em direção ao centro de um poço de potencial. Pela variação da gravidade dessas regiões ele foi se agrupando, se comprimindo e se aquecendo; e, como consequência do aumento da pressão e da densidade, o



fluido se expandia para fora, emitindo radiação. Com a diminuição da pressão ele voltava a sofrer a influência da gravidade da matéria escura e todo este processo se repetia novamente [3], [25].

Devido a força de atração da gravidade e a força de repulsão da pressão da radiação, surgiram oscilações na matéria escura que criaram ondas que se propagaram pelo espaço e transportaram consigo bárions e fótons. Essas oscilações são chamadas de oscilações acústicas. Após a recombinação, a força de arrasto da radiação diminuiu e os bárions continuaram a "cair" nos poços de potencial [10]. Desta forma, os fótons continuaram a viajar pelo espaço, enquanto que a matéria bariônica praticamente permaneceu no local da separação devido a expansão do Universo (Fig.24).

Portanto, foi se formando uma configuração de anel (numa visão 2D) com excesso de matéria bariônica nas bordas e com matéria escura dentro dele (Fig.25). Estas são as BAOs (*Baryon Acoustic Oscillations*), que são oscilações no espectro de potência da radiação da matéria devido as oscilações no fluido fóton-bárion. Elas se manifestam como um excesso de galáxias separados por uma ordem de 150 Mpc [13], essa distribuição de galáxias é a impressão das oscilações acústicas produzidas no final da fase do CMB e vista após a EoR (*Epoch of Reionization*) em  $z < 5$  [7].

As BAOs são um tipo de SSR (*Statistical Standard Rulers*) onde o agrupamento de galáxias pode ter uma escala preferida que, quando observada em diferentes  $z$  pode ser usada para restringir a distância do diâmetro angular. A idéia de usar as BAOs para aprender mais sobre os parâmetros cosmológicos foi inicialmente proposta por Daniel J. Eisenstein *et al.* (1998) [6], onde ele escreve [33]:

Detection of acoustic oscillations in the matter power spectrum would be a triumph for cosmology, since it would confirm the standard thermal history and the gravitational instability paradigm. Moreover, because the matter power spectrum displays these oscillations in a different manner than does the CMB, we would gain new leverage on cosmological parameters. (EISENSTEIN, 1998, p.59).

Agora, a distância do horizonte sonoro  $r(s)$  das BAOs pode ser determinada como

$$\begin{aligned} r(s) &= \int_0^{t_0} \frac{c(s)}{a(t)} dt = \int_0^{a_0} \frac{c(s)}{a_0 \dot{a}} da = \frac{c(s)}{a_0} \int_0^z \frac{1}{a(z)H(z)(1+z)} dz \\ &= \frac{c(s)}{a_0} \int_0^z \frac{1}{H(z)} dz. \end{aligned} \quad (4.31)$$

No momento da última dispersão do fluido fóton-bárion, os bárions eram pouco contaminantes no espaço. Portanto, se quisermos considerar a velocidade do som no fluido, podemos fazer uma aproximação deste como sendo igual a velocidade de um gás de fótons puro, ou seja:  $c(s) = c/\sqrt{3}$  [4], [10], [25].

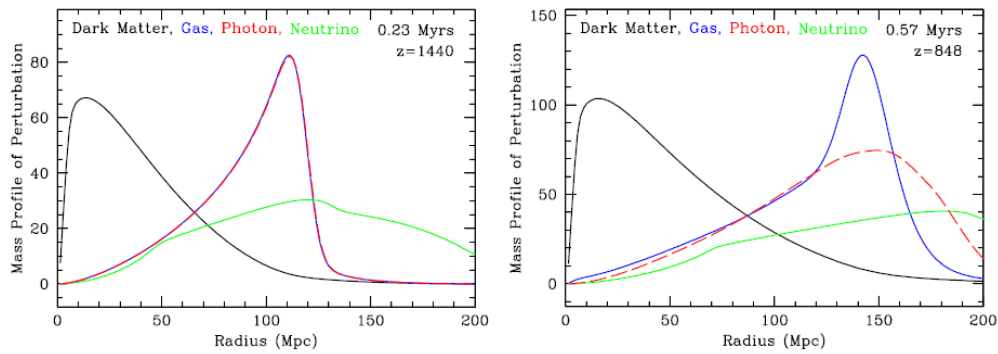


Figura 24 – Perturbação de densidade esférica. Esquerda: época da recombinação com o gás bariônico acoplado aos fótons, e, a matéria escura interagindo gravitacionalmente. Direita: momento após o desacoplamento da matéria bariônica e dos fótons, as perturbações de matéria escura não se acoplaram às da radiação e da matéria bariônica, permanecendo praticamente no ponto de origem. Fonte: [6].

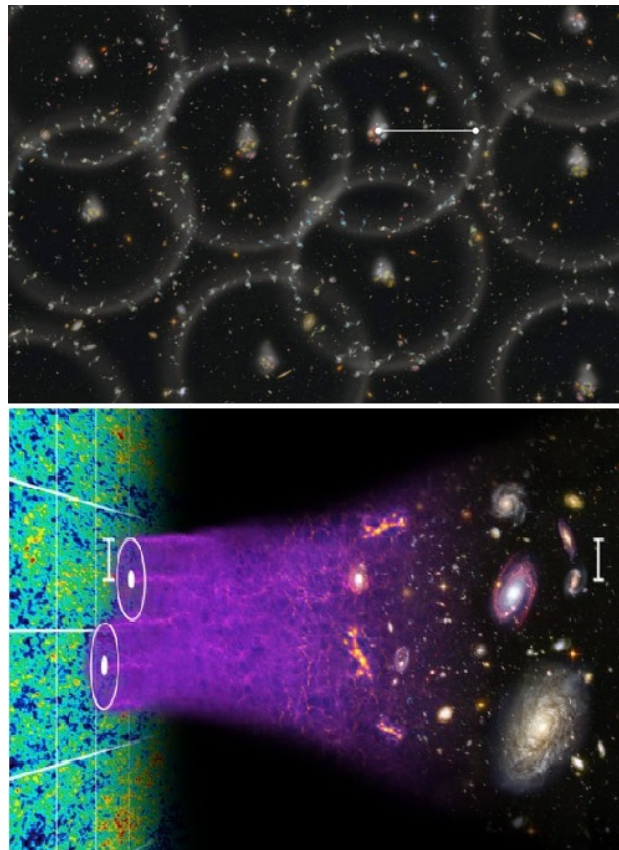


Figura 25 – Superior: anéis de bárions com raio de aproximadamente 150 Mpc formados pela densidade de matéria bariônica em torno dos aglomerados iniciais de matéria escura. Inferior: ilustração do conceito de BAOs. Fonte: Projeto BOSS, [34].

O horizonte sonoro das BAOs,  $r(s)$ , pode ser usado como uma régua padrão, valores mostrados na tabela 4. A medição da extensão angular das BAOs junto com  $r(s)$  nos permite determinar a distância do diâmetro angular de um agrupamento de galáxias na direção transversal; sendo assim, em termos de  $z$  teremos:

$$d_A(z) = \frac{r(s)_\perp}{\Delta\theta(s)(1+z)}, \quad (4.32)$$

e na direção radial, o parâmetro de Hubble:

$$H(z) = \frac{\Delta(z)}{r(s)_\parallel}, \quad (4.33)$$

onde  $\Delta\theta(s)$  é o valor aproximado do tamanho angular e  $\Delta(z)$  é a diferença entre os redshifts da parte da frente e da parte de trás da galáxia observada.

Tabela 4 - Horizonte sonoro das BAOs medido pelo WMAP e Planck. Fonte: [3], [4], [35].

WMAP 2013	$r(s) = 148,49 \pm 1,23$ Mpc
Planck + BAOs 2018	$r(s) = 147,16 \pm 0,48$ Mpc
Planck 2015	$r(s) = 144,60 \pm 0,50$ Mpc

Uma vantagem de se trabalhar com as BAOs é que elas fornecem medidas de  $d_A(z)$  e  $H(z)$  usando uma Física quase completamente linear; o que, não é o caso das SNe Ia. Essas últimas envolvem explosões estelares altamente complexas, não lineares e ainda pouco compreendidas [6].

Portanto, seu horizonte sonoro nos fornece uma régua padrão para distâncias cosmológica, permitindo assim, estimar com maior precisão os parâmetros do modelo  $\Lambda$ CDM. Além disso, podemos fazer uso da técnica de IM (*Intensity Mapping*) nas medições das BAOs e, com isso, restringir as características da energia escura [9].

### 4.3 Espectro de Potência da Matéria

Após o Universo ter aproximadamente 400 mil anos de idade, começou a época da Idade das Trevas. Aqui, o Universo deixa de ser ionizado, a pressão sobre os bárions diminui e quase toda a matéria bariônica se encontra na forma de hidrogênio neutro. Durante a Idade das Trevas Cósmica, quando o Universo era menor, ele apresenta flutuações na densidade de energia em pequenas escalas [3]. O mecanismo físico que descreve a formação das oscilações acústicas pode ser simplificado como:

$$\ddot{\delta} + (\text{Pressão} - \text{Gravidade})\delta = 0, \quad (4.34)$$

onde  $\delta$  é um contraste que denota a flutuação de densidade adimensional, tal que

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \rho(t)}{\rho(t)}. \quad (4.35)$$

Dado que nesse período o Universo era dominado pela matéria, logo após a recombinação as estruturas cósmicas cresceram devido as instabilidades gravitacionais. As regiões superdensas, com uma densidade de massa  $\rho_m$ , se expandiram de forma aproximadamente esférica com um raio  $R(t)$  a uma taxa menor do que a expansão do Universo [25]. Desta forma, a equação do movimento para um ponto na superfície da esfera pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_m - \frac{4\pi}{3}G\rho_m\delta, \quad (4.36)$$

e pela conservação de massa, temos que

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\ddot{\delta} - \frac{2\dot{a}}{3a}\dot{\delta}. \quad (4.37)$$

No modelo  $\Lambda$ CDM, para  $\delta = 0$  teremos  $\ddot{a}/a = -(4\pi G\rho_m/3)$ . Assumindo pequenas flutuações na densidade da matéria e em escalas de comprimento muito menores do que o raio de Hubble, as flutuações de densidade crescem com a gravidade. Portanto, relacionando a Eq.(4.36) com a Eq.(4.37), a evolução temporal das flutuações é definida por [4], [6]:

$$\frac{\partial^2 \delta(\vec{k})}{\partial t^2} + 2H(z)\frac{\partial \delta(\vec{k})}{\partial t} - 4\pi\rho_m\delta(\vec{k}) = 0. \quad (4.38)$$

A energia escura atua no segundo termo da Eq.(4.38) afetando  $H(z)$  e no terceiro termo afetando  $\rho_m$ . Agora, dada uma região com volume  $V$  que se expande junto com o Universo, no regime de perturbações lineares, podemos expandir as variáveis de perturbações no espaço de Fourier como uma soma de ondas planas. A flutuação de densidade pode ser expressa como:

$$\delta(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \delta(\vec{k})e^{-i\vec{r}\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k})e^{-i\vec{r}\vec{k}} d^3k, \quad (4.39)$$

sendo  $\delta(\vec{k})$  as componentes de Fourier, ou os modos  $k$  de Fourier, dadas por

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3r. \quad (4.40)$$

Pela função de correlação de dois pontos para a transformada de Fourier [32], assumindo a homogeneidade estatística, temos que

$$\begin{aligned} \langle \delta(\vec{k}) \cdot \delta(\vec{k}')^* \rangle &= \int \int \langle \delta(\vec{r}) \cdot \delta(\vec{r}') \rangle e^{-i\vec{k}\vec{r}} e^{i\vec{k}'\vec{r}'} d^3r d^3r' \\ &= \int \int \xi(\vec{r}' - \vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} e^{i\vec{k}'\vec{r}'} d^3r d^3r', \end{aligned} \quad (4.41)$$

e fazendo a mudança de variável:  $\vec{x} = \vec{r}' - \vec{r}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \delta(\vec{k}) \cdot \delta(\vec{k}')^* \rangle &= \int e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} d^3r \int \xi(\vec{x}) e^{i\vec{k}'\vec{x}} d^3x \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P(k), \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde denotaremos ao longo do trabalho  $P(|\vec{k}|) = P(k)$ . A Eq.(4.42) define completamente as propriedades estatísticas das condições iniciais no Universo primordial, e, do contraste de densidade  $\delta$  que é um campo aleatório gaussiano homogêneo e isotrópico [10], [30].

Em escalas lineares, no período de dominação da matéria, as flutuações de densidade de matéria podem ser escritas como funções separáveis, de forma que

$$\delta(\vec{k}, z) = D(z)\delta(\vec{k}), \quad (4.43)$$

em que  $D(z)$  é a função de crescimento das flutuações que depende do Modelo Cosmológico. Assim, a correlação entre os modos será dada por:

$$\langle \delta(\vec{k}, z) \cdot \delta(\vec{k}', z')^* \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') D(z) D(z')^* P(k). \quad (4.44)$$

Ao realizar a transformada de Fourier, quebramos a função em um número infinito de ondas senoidais, cada uma correspondente ao modo  $k = 2\pi/\lambda$ . Logo, embora as flutuações sejam pequenas, quase gaussianas, a densidade  $\delta(\vec{k})$  pode ser caracterizada com precisão pelo espectro de potência da matéria  $P(k)$ . Portanto,  $P(k)$  é o valor esperado, ou, a média do quadrado da amplitude dos modos de Fourier da perturbação de densidade em um determinado número de onda  $k$ , tal que:

$$P(k) = \langle |\delta(\vec{k})|^2 \rangle. \quad (4.45)$$

As BAOs podem ser vistas como oscilações no espectro de potência da matéria (Fig.26). Na teoria linear, haverá uma mudança nesse espectro ao utilizarmos diferentes valores de  $z$ ; desta forma, ao aumentarmos o valor de  $z$  iremos observar um deslocamento da curva de  $P(k)$  para baixo.

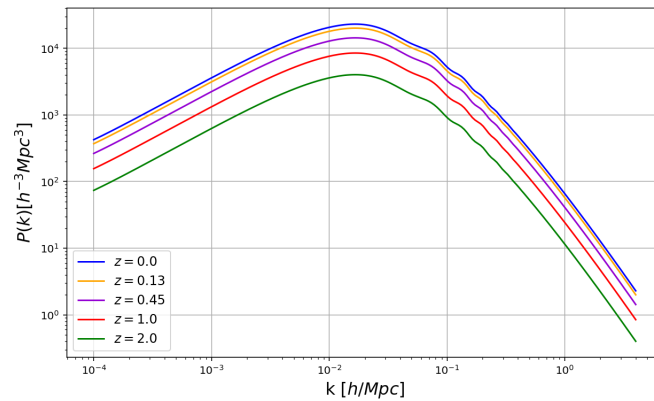


Figura 26 – Espectro de potência linear da matéria em diferentes redshifts. Os espectros foram gerados usando o código CAMB com os valores disponíveis do Planck 2018, usando a combinação TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO. Imagem produzida em Python.

Ainda, podemos extrair uma escala estatística de um agrupamento de galáxias por meio de uma função de correlação  $\xi(r)$ <sup>8</sup>. Um pico (ou uma queda) acústica de bárions nessa função

<sup>8</sup> Onde denotamos  $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$ ; uma vez que, pela isotropia estatística, a função de correlação não depende da direção, o que implica que ela possui simetria esférica.

induzirá oscilações acústicas no espectro de potência  $P(k)$  (esférico), formando um par de Fourier:

$$P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(r)r^2 e^{-ikr} dr. \quad (4.46)$$

A função de correlação quantifica o excesso de agrupamento em uma determinada escala em relação a uma distribuição uniforme com a mesma densidade média. Desta forma, o espectro de potência  $P(k)$  é a transformada de Fourier da função de correlação  $\xi(r)$  de dois pontos e, portanto, uma estatística de dois pontos.

A Cosmologia contemporânea tem como área de pesquisa a extração de BAOs do espectro de potência da matéria. Para tal, a escolha do alvo para a realização de levantamento de BAOs é de grande importância, por exemplo, as pesquisas em aglomerados de LRG (*Luminous Red Galaxies*) (Fig.27).

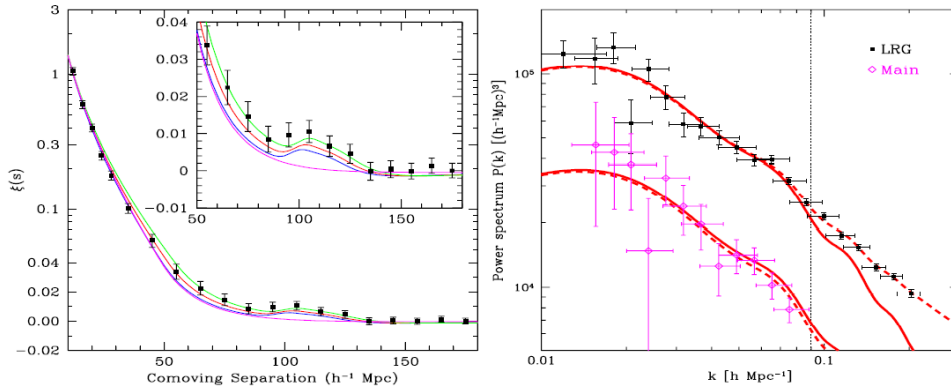


Figura 27 – Esquerda: função de correlação com BAP (*Baryon Acoustic Peak*) no agrupamento da amostra de galáxia do SDSS LRG. Direita: BAOs nos espectros de potência do SDSS; o BAP da figura da esquerda agora se torna uma série de oscilações no espectro de potência da matéria da amostra do SDSS; o espectro de potência é calculado para a amostra principal do SDSS (curva inferior) e a amostra LRG (curva superior). Fonte: [6].

## 4.4 Hidrogênio Neutro

A Cosmologia de 21 cm faz uso da Radioastronomia para o estudo da Física no período pós-recombinação,  $z < 1100$ , onde encontramos o hidrogênio neutro, até o final da EoR,  $z \approx 5$ , onde encontramos o hidrogênio quase que totalmente ionizado. Como mostrado ao longo do trabalho, estamos interessados no átomo de hidrogênio neutro frio, que emite a radiação de 21 cm via transição spin-flip<sup>9</sup>. O período mais antigo do sinal de 21 cm ocorre após o desacoplamento térmico da matéria bariônica com a CMB.

O sinal de 21 cm depende da Física de diferentes escalas, desde a Física atômica do hidrogênio, passando pela Astrofísica da formação de estrelas, até a Física das estruturas cosmológicas.

<sup>9</sup> Ou hiperfina, ver Fig.11.

Por ser a espécie atômica mais comum presente no Universo, o hidrogênio é um marcador útil das propriedades locais de um gás. Estima-se que sua produção se iniciou nos primeiros três minutos do Universo, se apresentando na forma ionizada, molecular e neutra, com esta última sendo formada após  $z = 1100$ .

#### 4.4.1 Temperatura de spin e temperatura de brilho

Da distribuição de Boltzmann podemos calcular o número de partículas com energia  $E$ , de forma que

$$n_x(E) = g(E)e^{-E/k_B T}. \quad (4.47)$$

Desta forma, dada a razão dos números de átomos de hidrogênio neutro no estado singleto  $n_0$  e no estado tripleto  $n_1$ , da separação hiperfina. Temos que:

$$\frac{n_1}{n_0} = \left(\frac{g_1}{g_0}\right) e^{-T_\star/T_S}, \quad (4.48)$$

onde  $g_1/g_0 = 3$  é a razão das densidades de estados de degeneração dos dois níveis (singleto e tripleto);  $T_\star = hc/k_B \lambda_{21cm} = 0,068$  K; e,  $T_S$  é a temperatura de spin, que é a temperatura de excitação da radiação de 21 cm. Esta última quantidade define os números relativos de ocupação dos dois níveis hiperfinos do hidrogênio neutro. A detecção do sinal de 21 cm é diretamente dependente à  $T_S$  que, por sua vez, é determinada basicamente por três processos [9]: absorção ou emissão de fótons de 21 cm do fundo de rádio ou de fótons CMB; colisões com átomos de hidrogênio e elétrons; e, o espalhamento de fótons  $Ly\alpha$  (*Lyman-alpha*) que causam o spin-flip. Sendo assim, é basicamente a competição entre o CMB e as colisões de partículas que define  $T_S$ .

O acoplamento colisional é a colisão entre partículas diferentes que pode ocorrer de três formas: colisões entre dois átomos de hidrogênio; um hidrogênio e um elétron; ou, um hidrogênio e um próton. Essas são as colisões que induzem o spin-flip no hidrogênio neutro, dominando as emissões de 21 cm em um período em que a densidade deste elemento ainda era alta.

Após a recombinação, inicia-se uma fase neutra do IGM caracterizada por uma temperatura cinética do gás  $T_K$ . É nessa fase que surge o sinal de 21 cm. A temperatura de brilho do sinal de 21 cm é expressa em função de quatro variáveis, de forma que:

$$T_b = T_b(T_K, X_{Hi}, J_\alpha, n_{Hi}), \quad (4.49)$$

onde  $X_{Hi}$  é a fração de ionização volumétrica de hidrogênio e  $J_\alpha$  é o fluxo específico avaliado na frequência de  $Ly\alpha$ . A grandeza  $T_b$  é uma medida de intensidade de rádio. Uma característica importante desta grandeza é que, sua dependência de cada uma dessas quantidades na Eq.(4.49) satura em algum momento durante a evolução do Universo (Fig.28).

Em um período após a recombinação,  $1100 \gtrsim z \gtrsim 200$ , o espalhamento Compton matem o acoplamento térmico dos elétrons livres e do gás da CMB, então  $T_K = T_\gamma$ . Pelo acoplamento colisional temos  $T_S = T_\gamma$  e espera-se que  $T_b = 0$ . Portanto, não há detecção de 21 cm. Em  $200 \gtrsim z \gtrsim 40$  temos  $T_K < T_\gamma$ . Devido a expansão cósmica que conduziu um desacoplamento

entre a temperatura de spin e a temperatura da radiação CMB, temos que  $T_S < T_\gamma$ , o que leva ao valor  $T_b < 0$  e um sinal de absorção de 21 cm [11].

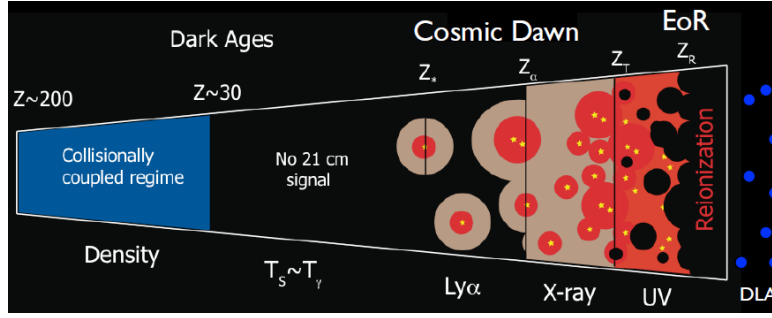


Figura 28 – Ilustração das fases do sinal de 21 cm na evolução do Universo. Fonte: [9].

Conforme o gás se expandiu e se esfriou, sua densidade diminuiu e o acoplamento colisional também diminuiu significativamente. Com isso, em  $z \lesssim 30$ , teremos  $T_S \approx T_\gamma$  e um sinal de 21 cm quase invisível [10]. Em seguida, a gravidade impulsionou a formação dos primeiros objetos luminosos (estrelas e galáxias); e, pelo espalhamento dos fótons  $Ly\alpha$ , ocorreu o acoplamento entre a excitação dos estados de spin de 21 cm e a temperatura do gás.

Posteriormente, além dos fótons  $Ly\alpha$ , as primeiras estrelas também passam a emitir raios-X. Com a temperatura de spin acoplada ao gás frio, temos novamente  $T_S \approx T_K < T_\gamma$  e um sinal de 21 cm passa a ser visível em absorção. Em seguida, com o aumento de formação de estrelas, ocorre a saturação do acoplamento de  $Ly\alpha$ .

As estrelas também passam a emitir radiação UV (*Ultraviolet*) e acontece que  $T_S \approx T_K \gg T_\gamma$ ; então, é visto um sinal de 21 cm em emissão. As flutuações da  $T_b$  são originadas por flutuações na ionização, densidade e temperatura do gás. Na EoR, momento em  $20 \gtrsim z \gtrsim 5$ , ocorre um processo que balanceia fótons ionizantes em aglomerados de galáxias e recombinações de matéria bariônica.

O sinal de 21 cm é dominado pelas flutuações de ionização de hidrogênio neutro. Em suma, podemos relacionar a temperatura de spin  $T_S$  com a temperatura de brilho  $T_b$  da seguinte forma:

$$T_S < T_b \Rightarrow \text{sinal de 21 cm em absorção}$$

$$T_S > T_b \Rightarrow \text{sinal de 21 cm em emissão}$$

$$T_S = T_b \Rightarrow \text{não há sinal de 21 cm}$$

Adotando a linha de 21 cm como uma sonda astrofísica, teremos dois tipos de fontes de rádio. A primeira é a CMB, onde  $T_{CMB} = T_b$  e com isto a linha de 21 cm é vista como uma distorção espectral no corpo negro da CMB. As oscilações de sua temperatura são pequenas, da ordem de  $\delta T_{CMB} \approx 10^{-5}$ ; assim, a CMB é uma fonte de brilho praticamente uniforme.

A segunda é uma fonte de ponto alto de rádio como plano de fundo, um quasar, por exemplo. Aqui vemos  $T_b \gg T_S$ , e portanto, o gás é visto em absorção contra a fonte. O surgimento de linhas originadas da absorção de regiões com aglomerados de gás neutro em diferentes distâncias da fonte nos dá a **floresta de 21 cm**; em analogia à floresta de  $Ly\alpha$  (visível em  $z \lesssim 6$ ) que,



são linhas de absorção onipresentes vistas em espectros de alta resolução de quasares distantes, ou, de galáxias devido a nuvens de gás hidrogênio ao longo da linha de visão [4].

Após a EoR, apenas 1% dos bárions estão na forma de hidrogênio neutro. Portanto, a temperatura média de brilho observada da linha de 21 cm da emissão de hidrogênio neutro em  $z < 0,5$ , correspondente ao final do período da EoR, é caracterizada por [36]:

$$\bar{T}_{Hi}(z) = \left( \frac{\hbar c^3}{k_B} \frac{3A_{21}}{16\nu^2 M_{Hi}} \right) \left( \frac{\rho_{Hi}(z)}{1+z} \right) \frac{dl}{dv}, \quad (4.50)$$

onde  $A_{21}$  é o coeficiente de emissão espontânea da transição de 21 cm;  $\nu$  é a frequência dessa emissão (Eq.(2.58));  $M_{Hi}$  é a massa do átomo de hidrogênio neutro;  $\rho_{Hi}$  é a sua densidade média em função de  $z$  que, em termos do parâmetro de densidade de massa comovente do hidrogênio (que depende da luminosidade do hidrogênio), é dado por:

$$\Omega_{Hi}(z) = \frac{8\pi G \rho_{Hi}}{3H_0^2}; \quad (4.51)$$

e, temos que a distância da linha de visão é

$$\frac{dl}{dv} = \frac{(1+z)^3}{H(z)}. \quad (4.52)$$

Desta forma, podemos reescrever a Eq.(4.50) como [12], [13], [37], [38]

$$\bar{T}_{Hi}(z) = 0,18 \Omega_{Hi}(z) h \frac{(1+z)^2}{E(z)} \text{ K}, \quad (4.53)$$

em que  $h$  é um valor associado a constante de Hubble, Eq.(3.2), e  $E(z)$  é dado pela Eq.(3.25). A temperatura média das flutuações do sinal do hidrogênio neutro é de 100  $\mu\text{K}$ .

#### 4.4.2 Espectro de potência angular de 21 cm

O espectro de potência de 21 cm (logo, do hidrogênio neutro) é uma quantidade estatística tridimensional observada em função de  $z$  e medida a partir de mapas do céu. As flutuações deste sinal surgem das variações espaciais dos campos de radiação  $Ly\alpha$ , raios-X e UV. Dado que as perturbações na temperatura de 21 cm observadas são devido as flutuações na densidade do hidrogênio neutro. Então, as flutuações na temperatura de brilho de 21 cm em uma dada direção  $\hat{n}$  serão [18], [36]:

$$\delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) = \bar{T}_{21}(z) \delta_{Hi}(\chi(z)\hat{n}, z), \quad (4.54)$$

onde  $\chi(z)$  é a distância comóvel dada pela Eq.(3.24) e

$$\delta_{Hi} = \frac{\delta \rho_{Hi}}{\rho_{Hi}}. \quad (4.55)$$

Da transformada de Fourier, seguida da expansão em harmônicos esféricos, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_{Hi}(\chi(z)\hat{n}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_{Hi}(\vec{k}, z) e^{-i\chi(z)\hat{n}\vec{k}} d^3k \\
&= \sum_{l,m} \frac{4\pi i^l}{(2\pi)^3} \int \delta_{Hi}(\vec{k}, z) J_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{k})^* d^3k.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Assim, substituindo a Eq.(4.56) na Eq.(4.54), teremos:

$$\delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) = 4\pi \bar{T}_{21}(z) \sum_{l,m} \frac{i^l}{(2\pi)^3} \int \delta_{Hi}(\vec{k}, z) J_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{k})^* d^3k. \tag{4.57}$$

Agora, considerando um intervalo de redshift  $\Delta z = z_{max} - z_{min}$ . Fazemos uma projeção no céu  $\delta T(\hat{n})$  usando a projeção normalizada, ou, a função janela  $W(z)$ , da seguinte forma

$$\delta T(\hat{n}) = \int_{\Delta z} W(z) \delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) dz, \tag{4.58}$$

sendo

$$W(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z}, & \text{se } z_{min} \leq z \leq z_{max} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{4.59}$$

A função janela nos dá uma "máscara" para relacionar as flutuações ao campo de densidade; e, fornece informações sobre a detecção do sinal de 21 cm. Desta forma, com a Eq.(4.57) substituída na Eq.(4.58), temos que

$$\begin{aligned}
\delta T(\hat{n}) &= \sum_{l,m} \frac{4\pi i^l}{(2\pi)^3} \int \int_{\Delta z} W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{Hi}(\vec{k}, z) J_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{k})^* d^3k dz \\
&= \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

em que  $a_{lm}$  são os coeficientes dos harmônicos esféricos. Portanto, o espectro de potência angular é definido como

$$\begin{aligned}
C_l &= \langle |a_{lm}|^2 \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi^2)^2} \int \int d^3k d^3k' \int_{\Delta z, \Delta z'} K(\vec{k}, z) K(\vec{k}', z')^* \langle \delta_{Hi}(\vec{k}, z) \cdot \delta_{Hi}(\vec{k}', z')^* \rangle dz dz',
\end{aligned} \tag{4.61}$$

onde denotamos

$$K(\vec{k}, z) = i^l W(z) \bar{T}_{21}(z) J_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{k})^*. \tag{4.62}$$

Ainda, temos a definição do espectro de potência linear dado por:

$$\begin{aligned}
P_{21}(k, z) &= \langle \delta_{Hi}(\vec{k}, z) \cdot \delta_{Hi}(\vec{k}, z')^* \rangle \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') b_{Hi}^2(\vec{k}, z) D(z) D(z')^* P_{cdm}(k),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

onde  $D(z)$  é o fator de crescimento para perturbações de matéria escura, de forma que  $D(0) = 1$ ;  $b_{Hi}^2(\vec{k}, z) = b_{Hi}(\vec{k}, z) b_{Hi}(\vec{k}, z')$  é o viés que dá a fração da matéria total de um aglomerado de galáxias correspondente à matéria bariônica; e,  $P_{cdm}(z)$  é o espectro de potência da matéria escura fria. Desta forma, substituindo a Eq.(4.63) na Eq.(4.61), obtemos

$$\begin{aligned}
C_l &= \frac{2}{\pi} b_{Hi}^2(\vec{k}, z) \int_{\Delta z} W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) dz \int_{\Delta z'} W(z)^* \bar{T}_{21}(z')^* D(z')^* dz' \\
&\times \int \int P_{cdm}(k) J_l(\chi(z)k) J_l(\chi(z')k) Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{k})^* \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') d^3k d^3k' \\
&= \frac{2}{\pi} b_{Hi}^2(\vec{k}, z) \int_{\Delta z} W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) dz \int_{\Delta z'} W(z)^* \bar{T}_{21}(z')^* D(z')^* dz' \\
&\times \int k^2 P_{cdm}(k) J_l(\chi(z)k) J_l(\chi(z')k) dk.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Para  $l$  grande podemos usar a aproximação Limber, a qual nos dá o calculo da integral

$$\frac{2}{\pi} \int k^2 P_{cdm}(k) J_l(\chi(z)k) J_l(\chi(z')k) dk = P_{cdm} \left( \frac{l+1/2}{\chi(z)} \right) \frac{\delta(\chi(z) - \chi(z'))}{\chi^2(z)}. \tag{4.65}$$

Finalmente, da relação de distância comóvel  $cdz' = H_0 E(z) d\chi(z)$ , podemos obter o espectro de potência angular de 21 cm da seguinte forma:

$$C_l = \frac{H_0}{c} b_{Hi}^2(\vec{k}, z) \int_{\Delta z} E(z) \left[ \frac{W(x) \bar{T}_{21}(z) D(z)}{\chi(z)} \right]^2 P_{cdm} \left( \frac{l+1/2}{\chi(z)} \right) dz. \tag{4.66}$$

Esse espectro é geralmente representado na forma:

$$D_l = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l. \tag{4.67}$$

Em 3D, o espectro de potência pode ser escrito como [36]:

$$[\Delta T_{Hi}(k, z)]^2 = \bar{T}(z)^2 b(k, z)^2 \frac{k^3 P_{cdm}(k, z)}{2\pi^2}. \tag{4.68}$$

Temos ainda que, o espectro de potência angular cruzado entre as janelas de redshift pode ser calculado como [37]

$$C_l^{WW'} = 4\pi \int \frac{P_R(k) \Delta_{T_b, l}^W(k) \Delta_{T_b, l}^{W'}(k)}{k} dk, \tag{4.69}$$

sendo  $P_R(k)$  o espectro de potência adimensional da perturbação da curvatura primordial, e

$$\Delta_{T_b,l}^W(k) = \frac{\Delta_{T_b,l}^W(\vec{k})}{R(\vec{k})}, \quad (4.70)$$

é a função de transferência.

## 5 Simulações

A seguir, mostraremos os resultados obtidos em nossas simulações feitas em Python. Utilizando os parâmetros publicados pela colaboração Planck <sup>1</sup>, ajustamos os parâmetros cosmológicos para uma estimativa teórica do espectro de potência da CMB, com o uso do código CAMB (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*). Consideramos os valores usados como sendo a nossa Cosmologia fiducial, a partir da qual podemos observar quais seriam os possíveis efeitos de variações dos parâmetros cosmológicos.

Em seguida, trabalhamos com o sinal cosmológico de 21 cm do hidrogênio neutro, simulando os mapas do céu e os espectros de potência. Com todo esses procedimentos sendo realizados dentro da ciência do BINGO.

### 5.1 Mapas da CMB e Espectro de Potência

Os mapas são projeções cartográficas da distribuição das temperaturas médias em cada coordenada do céu. Fazemos o download dos mapas necessários que estão em um formato binário FITs e que contém informações sobre a pixelização de uma esfera a partir de cadeias de um determinado tamanho (2048 no presente caso). Feito isto, reproduzimos os mapas das anisotropias de temperatura da CMB e da máscara da galáxia (Fig.29).

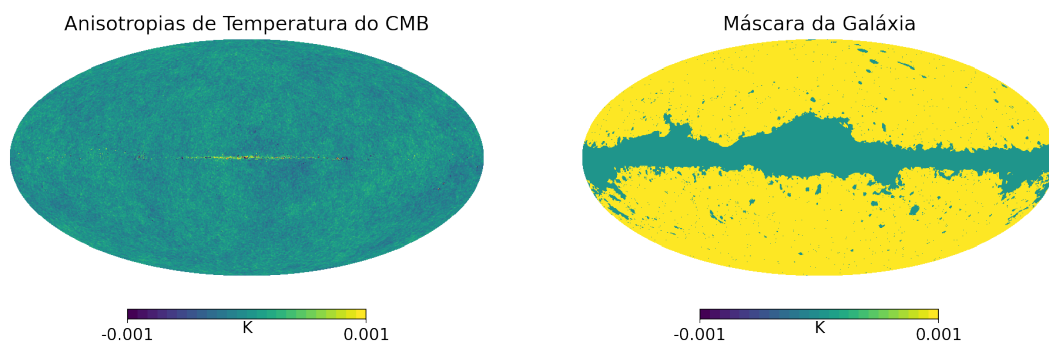


Figura 29 – Esquerda: mapa das anisotropias de temperatura da CMB, é possível ver um excesso de intensidade na região equatorial, o que corresponde ao plano galáctico. Direita: mapa da máscara do Planck para as influências da galáxia. Valores disponíveis no Planck 2018, usando a combinação TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO. Imagem produzida em Python.

Em seguida, mascaramos a galáxia, ou seja, analisamos apenas os dados não contaminados (Fig.30). Esta é uma operação booleana entre dois arrays. A partir do mapa mascarado, realizando a rotina Anafast, podemos fazer a expansão em harmônicos esféricos e determinar os coeficientes. Por padrão, a rotina Anafast retorna  $C_l$ 's, mas os resultados publicados são os  $D_l$ 's. Assim, obtemos o espectro de potência a partir do mapa (Fig.31).

<sup>1</sup> Ver referência [26].

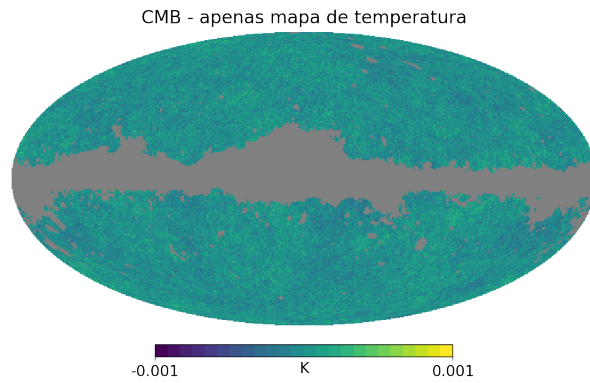


Figura 30 – Mapa das anisotropias de temperatura da CMB com a remoção dos contaminantes galácticos. Imagem produzida em Python.

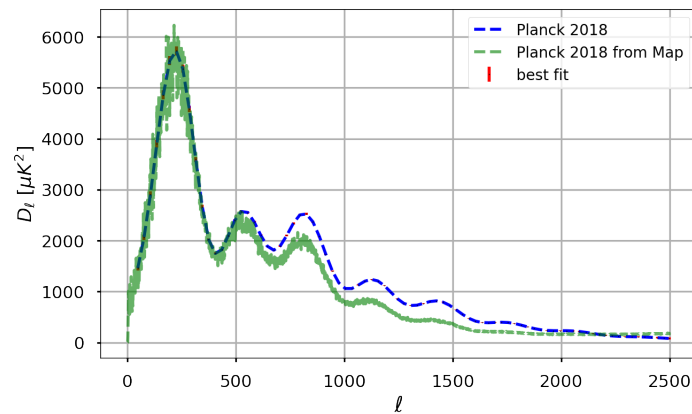


Figura 31 – Espectro de potência a partir do mapa mascarado, realizado com a rotina Anafast. Os gráficos estão bem ajustáveis para os valores de  $l < 500$ . Gráfico produzido em Python.

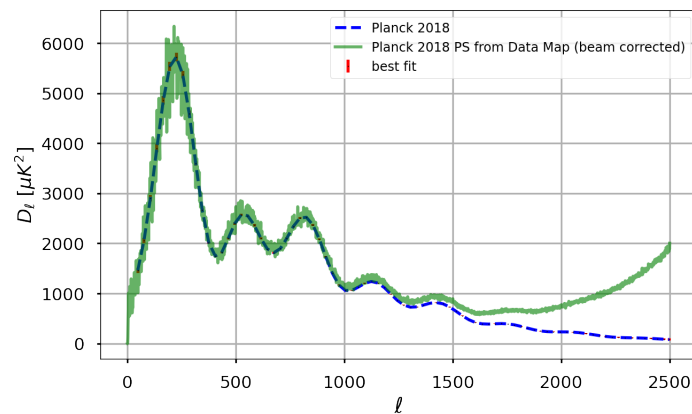


Figura 32 – Espectro de potência a partir do mapa mascarado com a correção do feixe, realizado com o feixe gaussiano do healpy com argumento angular em radianos. Os gráficos estão bem ajustáveis para o valor de  $l \approx 1000$ , para valores maiores, os gráficos estão fora de ajuste devido à máscara da galáxia. Gráfico produzido em Python.

Devido ao feixe utilizado pelo satélite Planck, que não é compensado nos mapas da CMB, os dados extraídos do mapa apresentam amplitudes menores para  $l$ 's grandes, ou seja, para pequenos ângulos. Conhecendo o feixe, sabemos que a medição é a convolução dele com o mapa real e então podemos corrigir o mapa, removendo o efeito do feixe.

Os mapas celestes têm diferentes resoluções angulares, dependendo dos dados, por exemplo: Temperatura CMB e mapas de polarização de poeira térmica são fornecidos com resolução FWHM de 5 arcmin. Desta forma, podemos considerar o feixe efetivo do Planck como um feixe circular gaussiano de 5 arcmin gerado pelo healpy, que possui funções específicas para a suavização, isto significa remover o feixe no espaço de Fourier (Fig.32). Portanto, teremos a representação do espectro de potência angular  $C_l$  em função de  $l$  (Fig.33).

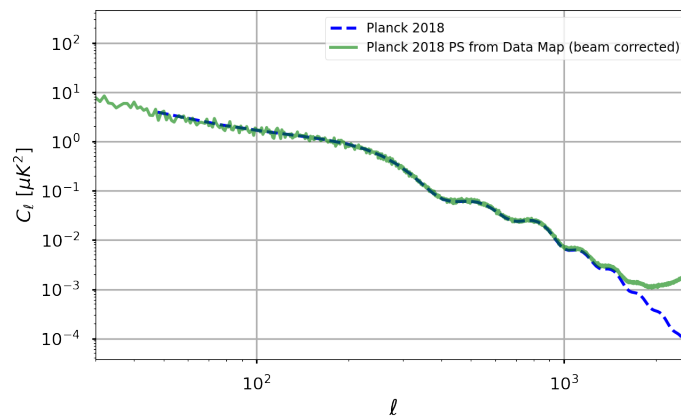


Figura 33 – Espectro de potência extraído do mapa mascarado da CMB junto com o mapa com o feixe corrigido. Gráfico produzido em Python.

## 5.2 Sinal Cosmológico do Hidrogênio Neutro

Utilizamos os parâmetros usados no BINGO: faixa de frequência mínima de 980 MHz à 1260 MHz, número de bins = 30, e um feixe de 40 arcmin. Realizamos a simulação do céu, com o pacote pysm3, dos Foreground: poeira (Fig.34), radiação síncrotron (Fig.35), o AME (*Anomalous Microwave Emission*)<sup>2</sup> (Fig.36), a emissão free-free<sup>3</sup> (Fig.37) e a CMB (Fig.38).

Somando os Foreground, reproduzimos o mapa completo (Fig.39). Em seguida, obtemos o espectro de potência dos foreground (Fig.40). Sabendo que a temperatura média do sinal de 21 cm do hidrogênio neutro é de 100  $\mu$ K, ou seja, da ordem de  $10^{-1}$  mK, podemos compará-la com a ordem dos Foreground.

Após definimos os valores dos parâmetros do BINGO, assumimos os valores de  $z = 0, 13$ ,  $z = 0, 22$ ,  $z = 0, 33$  e  $z = 0, 45$ ; com número de onda  $k_{max} = 1$  e  $k_{min} = 0.001$ . Definimos a frequência do hidrogênio neutro e calculamos a temperatura média de brilho para 21 cm,

<sup>2</sup> É a radiação galáctica difusa produzido pela rápida rotação dos dipolos elétricos associados aos menores grãos de pó no meio interestelar, detectada em frequências entre 10 GHz e 60 GHz.

<sup>3</sup> Também chamada de radiação por bremsstrahlung.

Eq.(4.53)<sup>4</sup>. Com esse procedimento, geramos o gráfico do espectro de potência linear 3D do hidrogênio neutro, Eq.(4.68), (Fig.41).

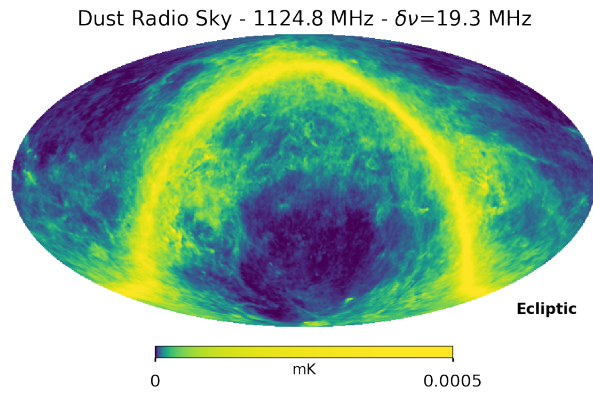


Figura 34 – Mapa de poeira do céu simulado na frequência central do BINGO, com temperatura da ordem de  $10^{-4}$  mK. Imagem reproduzida em Python.

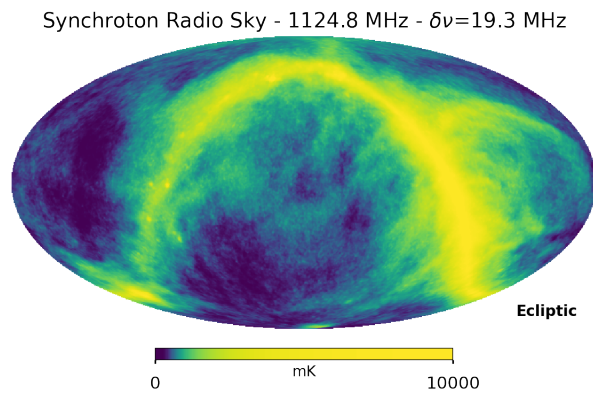


Figura 35 – Mapa do síncrotron do céu simulado na frequência central do BINGO, com temperatura da ordem de  $10^4$  mK. Imagem reproduzida em Python.

<sup>4</sup> Os detalhes técnicos estão mostrados no apêndice C.



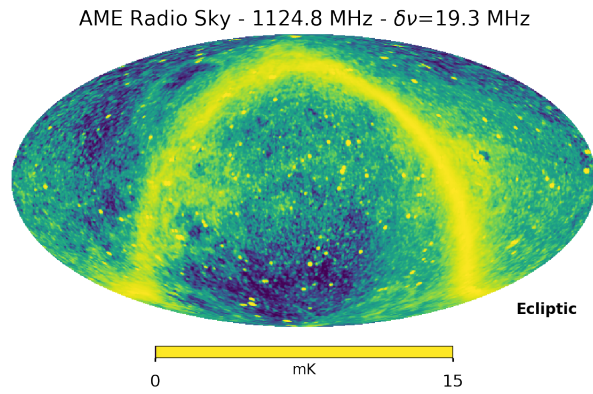


Figura 36 – Mapa da AME do céu simulado na frequência central do BINGO, com temperatura da ordem de  $10^1$  mK. Imagem reproduzida em Python.

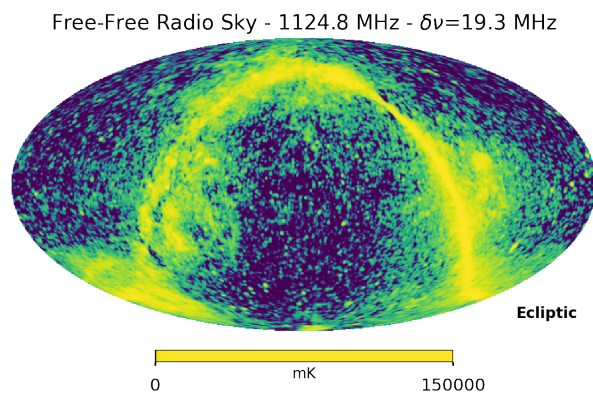


Figura 37 – Mapa da emissão free-free do céu simulado na frequência central do BINGO, com temperatura da ordem de  $10^5$  mK. Imagem reproduzida em Python.

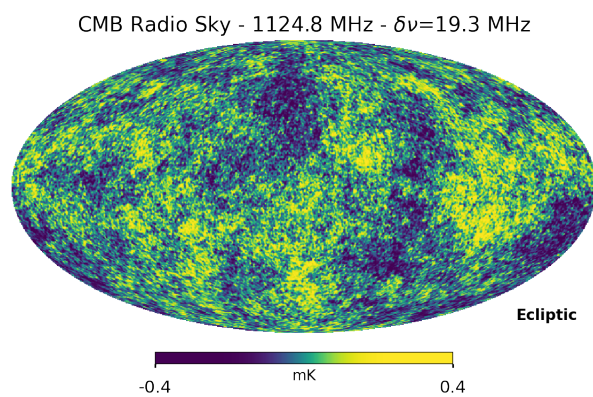


Figura 38 – Mapa da CMB do céu simulado na frequência central do BINGO, com temperatura da ordem de  $10^{-1}$  mK. Imagem reproduzida em Python.

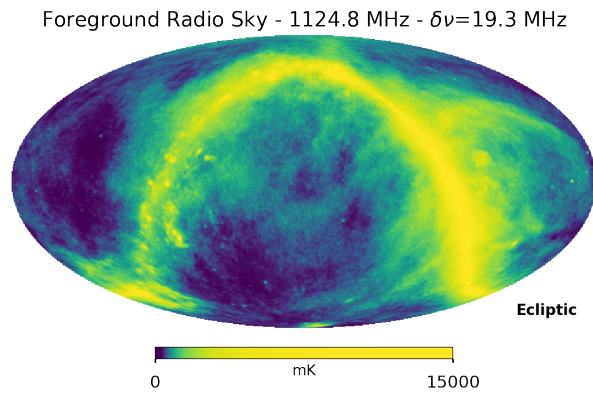


Figura 39 – Mapa completo dos Foreground do céu simulado na frequência central do BINGO. Imagem reproduzida em Python.

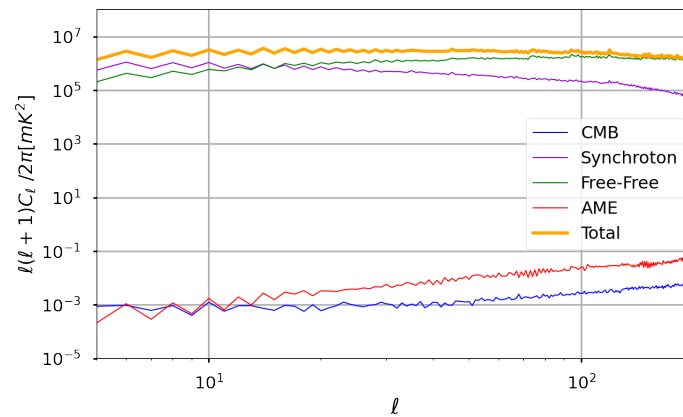


Figura 40 – Espectro de potência angular do sinal cosmológico para as diferentes componentes do foreground, na frequência do BINGO. O sinal do hidrogênio neutro tem magnitude aproximadamente igual ao da CMB e da AME. Gráfico produzido em Python.

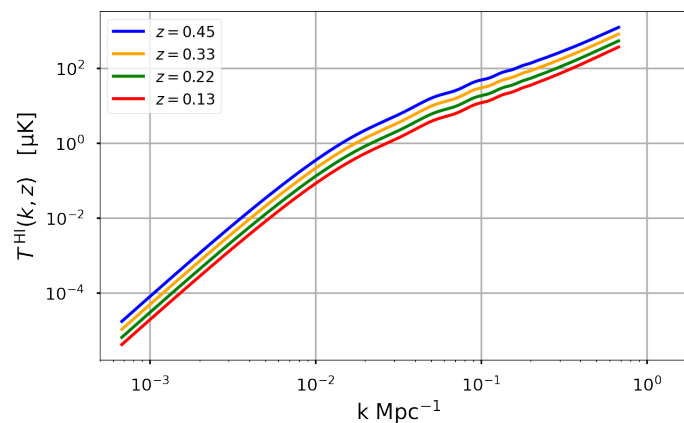


Figura 41 – Espectro de potência 3D do hidrogênio neutro para quatro valores diferentes de  $z$  trabalhados no BINGO. As BAOs são visíveis na região próxima de  $k = 10^{-1}$ , onde elas se apresentam no gráfico como uma oscilação no espectro, mas são menos de 10% do sinal total. Gráfico produzido em Python.

## 6 Conclusões

A pesquisa apresentada nesta dissertação, com base na literatura disponível sobre os trabalhos teóricos e observacionais na Cosmologia do século XXI, mostrou as ferramentas necessárias para a compreensão e o estudo das BAOs, pela detecção do espectro da radiação da linha de 21 cm do átomo de hidrogênio neutro. Sendo este o principal objetivo científico do radiotelescópio BINGO, em fase de construção no estado da Paraíba, Brasil, que irá operar em uma região do Universo em  $z < 0,5$ . É esperado que o BINGO entre em fase de operação no final de 2022.

Como vimos, a Física da radiação de 21 cm é de grande interesse para a Cosmologia moderna, no estudo das restrições de alguns dos parâmetros cosmológicos, tais como: a constante de Hubble  $H_0$  e a equação de estado da energia escura  $w$ . Para tal, a técnica de IM de 21 cm se mostrou a melhor forma para fazer medições das BAOs, e, conseqüentemente, para a construção de um mapa 3D da distribuição total de matéria do Universo. Assim, fornecendo dados cosmológicos independentes que, em combinação com os resultados do Planck, levarão as restrições mais precisas dos parâmetros cosmológicos; como também, um grande avanço para a ciência da Cosmologia de 21 cm.

Para uma visão mais geral sobre o trabalho de IM de 21 cm para a detecção das BAOs, simulações da missão BINGO, remoção dos contaminantes dos Foregrounds, informações mais detalhadas sobre as realizações do projeto BINGO e suas perspectivas futuras, o leitor interessado pode verificar tudo isso em uma série de papers que foram publicados recentemente pelo **The BINGO Project** <sup>1</sup>.

Tivemos como motivação principal para este trabalho, a realização de um estudo de como observar o Universo na linha de 21 cm. Portanto, com o uso da linguagem de programação Python, realizamos simulações dos mapas do céu com o sinal cosmológico do hidrogênio neutro e com os parâmetros usados pelo BINGO.

Obtivemos o mapa completo dos Foreground (Fig.39), seguido dos seus espectros de potência angular (Fig.40). Nessas imagens, podemos notar claramente que a radiação síncrotron e a emissão free-free são as componentes dominantes na faixa de operação do BINGO. Sendo assim, remover esses Foreground será um dos principais desafios do BINGO para se obter o sinal de 21 cm desejado. Por fim, reproduzimos também o espectro de potência 3D do hidrogênio neutro no intervalo de  $z$  do BINGO (Fig.41); do qual, observamos as BAOs em um certo intervalo de  $k$ .

Os gráficos reproduzidos em nossas simulações cobrem, resumidamente, o conteúdo de quase todos os trabalhos que estão sendo publicados na linha de pesquisa de 21 cm. Portanto, podemos concluir que esta dissertação abordou os principais pontos de interesse para a Cosmologia moderna do século XXI, e, para a Cosmologia de 21 cm. Esperamos, então, que nosso trabalho contribua para as pesquisas desta área.

Como perspectivas para trabalhos futuros. Poderemos nos aprofundar mais na Física das

---

<sup>1</sup> arXiv: 2107.01633 à 2107.01639.

perturbações cosmológicas, considerando todas as correções, obtendo a perturbação fracionária para a temperatura de brilho do hidrogênio neutro, tal expressão é totalmente relativística e cada termo dela corresponde a um efeito físico diferente. Aperfeiçoar nossos conhecimentos técnicos na parte computacional, e, poder reproduzir os futuros resultados reais do BINGO.

# Referências

- [1] A. LIDDLE, *An Introduction to modern cosmology*. Institute for Astronomy, University of Edinburgh, Abbreviate to ‘UK’: Wiley, 3<sup>a</sup> ed., 2015.
- [2] A. N. DAMINELI, *Hubble - A expansão do Universo*. São Paulo: Odysseus, 1<sup>a</sup> ed., 2003.
- [3] E. J. de MERÍCIA, “Simulações do processo de separação de componentes e recuperação do sinal de 21 cm do hi aplicadas ao radiotelescópio bingo,” Master’s thesis, Instituto nacional de pesquisas espaciais, São José dos Campos, 2019.
- [4] D. HUTERER and D. L. SHAFER, “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 81, no. 1, p. 016901, 2018. arXiv:1709.01091.
- [5] S. L. WEINBERG, *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*. New York: Basic Books (AZ), 2<sup>a</sup> ed., 1993.
- [6] B. A. BASSETT, “Baryon acoustic oscillations,” *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches, Edited by Pilar Ruiz-Lapuente*, vol. 1, p. 246, Oct 2009. arXiv:0910.5224.
- [7] C. A. WUENSCHÉ and T. B. COLLABORATION, “The bingo telescope: a new instrument exploring the new 21 cm cosmology window,” *Journal of Physics: Conference Series*, Jul 2019. arXiv:1803.01644.
- [8] D. J. GRIFFITHS, *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2<sup>a</sup> ed., 2011.
- [9] J. R. PRITCHARD and A. LOEB, “21-cm cosmology in the 21st century,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 75, p. 086901, Jul 2012. arXiv:1109.6012.
- [10] S. R. FURLANETTO, “Physical cosmology from the 21-cm line,” *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, vol. 1, pp. 3–1 to 3–19, Sep 2019. arXiv:1909.12430.
- [11] J. O. BURNS *et al.*, “Dark cosmology: Investigating dark matter & exotic physics in the dark ages using the redshifted 21-cm global spectrum,” *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, Feb 2009. arXiv:1902.06147.
- [12] E. ABDALLA *et al.*, “The bingo project i: Baryon acoustic oscillations from integrated neutral gas observations,” Jul 2021. arXiv:2107.01633.
- [13] V. LICCARDO *et al.*, “The bingo project iv: Simulations for mission performance assessment and preliminary component separation steps,” Jul 2021. arXiv:2107.01636.
- [14] E. D. KOVETZ *et al.*, “Line-intensity mapping: 2017 status report,” *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, Sep 2017. arXiv:1709.09066.

- [15] C. A. WUENSCHÉ *et al.*, “Baryon acoustic oscillations from integrated neutral gas observations: Broadband corrugated horn construction and testing,” *Instrumentation and Methods for Astrophysics*, Nov 2019. arXiv:1911.13188.
- [16] R. BATTYÉ *et al.*, “Update on the bingo 21cm intensity mapping experiment,” *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, Oct 2016. arXiv:1610.06826.
- [17] B. T. COLLABORATION, “Bingo portal,” 2021. Disponível em: <<https://bingotelescope.org>>.
- [18] C. A. WUENSCHÉ *et al.*, “The bingo project ii: Instrument description,” Jul 2021. arXiv:2107.01634.
- [19] V. JELIC, “Cosmological 21cm experiments: Searching for a needle in a haystack,” vol. 1, p. 28, Aug 2010. arXiv:1008.4356.
- [20] M. KAKU, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. New York: Oxford University Press, 1<sup>a</sup> ed., 1993.
- [21] D. MCMAHON, *Quantum Field Theory Demystified*. New York: McGraw-Hill Education, 1<sup>a</sup> ed., 2008.
- [22] A. EINSTEIN and L. INFELD, *A Evolução da Física*. Rio de Janeiro: Zahar, 1<sup>a</sup> ed., 2008.
- [23] HYPERPHYSICS, “The hydrogen 21-cm line,” 2016. Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/h21.html>>.
- [24] R. LARANJEIRA, “Estudo dos espectros de potências cosmológicas linear da matéria e angular de 21-cm,” Master’s thesis, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2021.
- [25] B. RYDEN, *Introduction to cosmology*. New York: Pearson Education, 2<sup>a</sup> ed., 2003.
- [26] N. AGHANIM *et al.*, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameter,” *Astron. Astrophys*, vol. 641, p. A6, Set 2020. arXiv:1807.06209.
- [27] A. CONLEY *et al.*, “Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey,” *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 192, p. 1, Jan 2011. arXiv: 1104.1443.
- [28] NASA, “Timeline of the universe,” 2012. Disponível em: <<http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>>.
- [29] P. Callin, “How to calculate the cmb spectrum,” vol. 1, Jun 2006. arXiv:astro-ph/0606683.
- [30] D. BAUMANN, “Primordial cosmology,” *PoS*, vol. TASI201776, p. 009, Jul 2018. arXiv:1807.03098.

- [31] A. LEWIS and A. CHALLINOR, “The 21cm angular-power spectrum from the dark ages,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 083005, Oct 2007. arXiv:astro-ph/0702600.
- [32] O. PIATTELA *et al.*, *Lecture Notes in Cosmology*. Espírito Santo: Springer, 1<sup>a</sup> ed., 2018.
- [33] D. J. EISENSTEIN *et al.*, “Cosmic complementarity:  $H_0$  and  $\omega_m$  from combining cosmic microwave background experiments and redshift surveys,” *The Astrophysical Journal*, vol. 504, pp. L57–L60, Sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/311582>>.
- [34] SDSSIII, “Boss: Dark energy and the geometry of space,” 2013. Disponível em: <<http://www.sdss3.org/surveys/boss.php>>.
- [35] G. E. ADDISON *et al.*, “Elucidating lcdm: Impact of baryon acoustic oscillation measurements on the hubble constant discrepancy,” *Astrophys. J.*, vol. 853, p. 119, Jan 2018. arXiv:1707.06547.
- [36] R. A. BATTYE *et al.*, “Hi intensity mapping : a single dish approach,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 434, pp. 1239–1256, Set 2013. arXiv:1209.0343.
- [37] A. HALL *et al.*, “Testing general relativity with 21 cm intensity mapping,” *Physical Review D*, vol. 87, p. 064026, Mar 2013. arXiv:1212.0728.
- [38] A. R. MARINS, “Observações na linha de 21cm do hidrogênio: Um ajuste fenomenológico para extração das oscilações acústicas de bárions do espectro de potência angular,” Master’s thesis, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2018.
- [39] G. de BARROS, “Perturbações das equações de einstein-boltzmann com aplicação a flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo,” Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.





# Apêndices



# APÊNDICE A – Perturbações Cosmológicas

O princípio cosmologia é confiável apenas em grandes escalas. Porém, nos estudos das formações de estruturas como galáxias, que ocorrem em escalas menores que 100 Mpc, não podemos mais usar a suposição de que o Universo é homogêneo e isotrópico. Assumimos a partir daqui que sua curvatura é  $k = 0$ , pela forte evidência observacional de que o Universo é espacialmente plano; e, também, usaremos as unidades naturais  $\hbar = c = 1$ .

## A.1 Métrica e o Espaço-Tempo Perturbado

A métrica FLRW escrita com o uso do tempo conforme  $\eta$ , é tal que [29]

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -a(\eta)^2 \left[ d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (\text{A.1})$$

onde estamos fazendo o uso da transformação métrica:

$$a(t) = \frac{dt}{d\eta} \quad \text{e} \quad x^\mu = (\eta, r, \theta, \phi). \quad (\text{A.2})$$

Assim, o tensor métrico do elemento de linha será

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Esta métrica descreve o espaço-tempo variável. No entanto, estamos considerando desvios da homogeneidade e isotropia; e, o espaço-tempo físico real é uma variedade descrita pela métrica  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ . As equações de Einstein acoplam perturbações no tensor energia; com isso, haverá correções de primeira ordem nas equações de Einstein e nas descrições dos fluidos pelo tensor energia momento [38], de forma que

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{g}_{\mu\nu}(\eta) + \delta\mathbf{g}_{\mu\nu}(\eta, x) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{G}_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{\mathbf{G}}_{\mu\nu}(\eta) + \delta\mathbf{G}_{\mu\nu}(\eta, x) \\ \mathbf{T}_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{\mathbf{T}}_{\mu\nu}(\eta) + \delta\mathbf{T}_{\mu\nu}(\eta, x) \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Dito isto, temos que a perturbação da equação de Einstein em primeira ordem, no tempo conforme, é expressa como

$$\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} + 3 \left( \frac{\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}{a^2} \right) \delta\mathbf{g} - \mu\nu = 8\pi G \left( \delta\mathbf{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \delta\mathbf{T} \right). \quad (\text{A.5})$$

em que  $\mathcal{H}$  é a constante de Hubble em tempo conforme, tal que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = aH \quad \text{e} \quad \mathcal{H}' = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta}. \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Decomposição SVT

Agora, a contribuição perturbativa  $\delta\mathbf{g}_{\mu\nu}$  é um tensor simétrico composto por 10 equações linearmente independentes e divididas em três categorias: escalares  $\Psi$ , vetoriais  $C_i$  e tensoriais  $\gamma_{ij}$ . Esta ferramenta é chamada de decomposição SVT (*Scale-Vector-Tensor*), usada para estudar a evolução das perturbações.

As perturbações causadas pela não homogeneidade na densidade de energia, que originam as estruturas via instabilidade gravitacional, são os **modos escalares**:

$$\delta\mathbf{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \begin{bmatrix} 2\Psi & \partial_i B \\ \partial_i B & -2(\Phi\delta_{ij} - \partial_i\partial_j E) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

aqui,  $B$  é um divergente escalar, e,  $\Phi$  e  $E$  são escalares do qual  $\delta\mathbf{g}_{ij}$  tem dependência. As perturbações relacionadas aos movimentos rotacionais do fluido cosmológico, que geram campos magnéticos, são os **modos vetoriais**:

$$\delta\mathbf{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \begin{bmatrix} 0 & S_i \\ S_i & \partial_i F_i + \partial_i F_j \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

sendo  $S_i$  e  $F_i$  um 3-vetor de divergência nula. Ainda, as perturbações que produzem as ondas gravitacionais são os **modos tensoriais**:

$$\delta\mathbf{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{ij} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

onde  $D_{ij}$  é o tensor simétrico com propriedades de divergência nula. Desta forma, definimos a métrica como sendo

$$\begin{aligned} ds^2 = & a(\eta)^2 [(1 + 2\Psi) d\eta^2 + 2(\partial_i B + S_i) dx^i d\eta - (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \\ & + (2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + D_{ij}) dx^i dx^j]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para as perturbações escalares, iremos trabalhar a métrica com o calibre Newtoniano conforme <sup>1</sup>, sendo  $B = E = 0$ , onde teremos [30], [37]

$$ds^2 = a(\eta)^2 [(1 + 2\Psi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad (\text{A.11})$$

onde  $\Psi$  e  $\Phi$  são potenciais métricos que governam o movimento da matéria e da luz, respectivamente. No caso da perturbação  $\Psi \approx \Phi$ , teremos a generalização do potencial gravitacional Newtoniano.

---

<sup>1</sup> Gauge Newtoniana conforme.

## APÊNDICE B – Equações de Boltzmann

Um corpo que absorve toda a radiação incidente é chamado de **corpo negro ideal**. Em 1879, Stefan <sup>1</sup> descobriu uma relação empírica entre a potência irradiada por unidade de área  $R$  por um corpo negro e a temperatura absoluta  $T$ , tal que

$$R = \sigma T^4, \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\sigma = 5,6705 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$  a constante de Boltzmann. Cinco anos mais tarde, Boltzmann <sup>2</sup> chegou ao mesmo resultado a partir das leis da termodinâmica clássica; e por isso, a Eq.(B.1) é chamada de **lei de Stefan-Boltzmann**.

As equações de Boltzmann descrevem a evolução da função de distribuição de partículas no espaço de fase. Elas são complementares as equações de Einstein, e assim, nos fornecem informações sobre as propriedades dos componentes que compõem o Universo. Dada uma distribuição de partículas  $f$ , a equação de Boltzmann pode ser escrita de forma simplificada como [24], [32]

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (\text{B.2})$$

onde  $C[f]$  é o termo colisional, sendo  $f$  um funcional que descreve as interações entre as partículas que constituem o sistema. A distribuição de uma partícula é uma função do tempo  $t$ , da posição da partícula  $x$  e do seu momento  $p$  <sup>3</sup>. Portanto, a derivada temporal total é dada por

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \nabla_x f + \frac{dp}{dt} \cdot \nabla_p f = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \vec{F} \cdot \nabla_p f \\ &= \hat{L}(f), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

em que  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula,  $\vec{F}$  é a força que atua sobre a partícula e  $\hat{L}$  é o **operador de Liouville**. Para o caso em que não há interações, então

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (\text{B.4})$$

A equação de Boltzmann sem colisão é uma consequência direta do teorema de Liouville, tal que

$$\frac{d\rho(x_i, p_i, t)}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (\text{B.5})$$

<sup>1</sup> Josef Stefan (1835-1893), foi um físico e matemático austro-esloveno. Em 1879, estabeleceu que a radiação total de um corpo negro é proporcional à quarta potência de sua temperatura.

<sup>2</sup> Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), físico austríaco considerado o fundador da mecânica estatística por ter sido o primeiro a apresentar uma interpretação estatística para a segunda lei da termodinâmica. Também, explicou teoricamente a observação experimental de Stefan.

<sup>3</sup> Por conveniência estamos assumindo a escrita:  $\hat{x} \mapsto x$  e  $\hat{p} \mapsto p$ .

com  $\rho(x_i, p_i, t)$  sendo a função de distribuição de N-partículas:

$$\rho(x_i, p_i, t) d^N x d^N p,$$

denotando a probabilidade de encontrar o sistema de  $N$  partículas em um volume  $d^N x d^N p$  do espaço de fase centrado em  $(x_i, p_i)$ .

Na GR (*General Relativity*), a função de distribuição é expressa em covariante

$$f = f(x^\mu, P^\mu), \quad \text{com} \quad P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (\text{B.6})$$

A derivada total é efetuada em relação a um parâmetro afim  $\lambda$ . Desta forma, temos que

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} P^\mu - \frac{\partial f}{\partial P^i} \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho = \hat{L}_{rel}(f), \quad (\text{B.7})$$

onde  $\hat{L}_{rel}$  é operador relativístico de Liouville e  $P^i$  é o momento espacial. Agora, as equações de Boltzmann perturbadas para fótons, neutrinos sem massa, matéria escura e bárions, podem ser usadas para rastrear a evolução de pequenas flutuações e acoplá-los às equações de Einstein. De forma geral, e simplificada, a equação de Boltzmann perturbada é dada por

$$f(\eta, x, p) = \bar{f}(\eta, p) + \mathcal{F}(\eta, x, p), \quad (\text{B.8})$$

em que o primeiro termo diz respeito a uma contribuição de fundo e o segundo termo diz respeito a uma perturbação. No espaço de fase, temos que

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \eta} P^0 + \frac{\partial f}{\partial x^i} P^i + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{dp^i}{d\lambda}. \quad (\text{B.9})$$

Nesta última expressão, o termo  $\partial f / \partial x^i$  é de primeira ordem e quebra a homogeneidade. De forma análoga,  $\partial f / \partial p^i$  quebra a isotropia. Podemos escrever a **equação de Boltzmann perturbada de primeira ordem** da seguinte maneira:

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{P^i}{P^0} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{d\eta} = \frac{1}{P^0} C[f], \quad (\text{B.10})$$

onde  $P^i/P^0$  é o termo de velocidade e  $dp/d\eta$  é o termo de força.

O termo velocidade deve estar na ordem zero; já o termo força é explicitado por meio da equação geodésica e depende das perturbações métricas. O único termo colisional que consideramos está relacionado ao espalhamento Thomson e será de interesse apenas para fótons e elétrons livres. Por simplicidade, denotaremos

$$\frac{df}{dt} = P^0 \frac{df}{d\eta} \quad \text{e} \quad P^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Desta forma, reescrevemos a Eq.(B.10) como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} \quad (\text{B.11})$$

## B.1 Equação de Boltzmann Perturbada para Fótons

Da Eq.(B.11), a equação de Boltzmann da distribuição de fótons será dada pela derivada total de  $f_\gamma$ , ela tem a dependência na direção  $\hat{n}^i$  que é uma correção de no mínimo de primeira ordem. Assim, temos que [24], [38]

$$\frac{df_\gamma}{dt} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial f_\gamma}{\partial x^i} - p \frac{\partial f_\gamma}{\partial p} \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right). \quad (\text{B.12})$$

Agora, perturbando a própria função de distribuição, podemos escrever o termo de ordem zero como sendo

$$\frac{df_\gamma}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{\delta E}{E} = \frac{\delta T}{T} = \Theta, \quad (\text{B.13})$$

onde  $\Theta$  é um termo dependente da posição e do momento, ela quantifica a perturbação na temperatura da radiação e contém informações da anisotropia e da não homogeneidade. Dado uma perturbação de primeira ordem na temperatura  $T$  dos fótons, a função de distribuição de Bose-Einstein será

$$f_\gamma(t, \vec{x}, p, \hat{n}) = \frac{1}{e^{[p/T(t)(1+\Theta(t, \vec{x}, \hat{n}))]} - 1}, \quad (\text{B.14})$$

em que  $\Theta$  não depende de  $p$ , pois, a principal interação neste caso é devido o espalhamento Compton, onde esta quantidade permanece inalterada. Ainda, a expansão de Taylor da função de distribuição nos dá

$$f_\gamma(t, \vec{x}, \hat{n}) \approx f_\gamma(t, p) + \left( -\frac{\partial f_\gamma}{\partial E} E \right) \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}) = f_\gamma(t, p) - p \Theta \frac{\partial f_\gamma}{\partial p}. \quad (\text{B.15})$$

Desta forma, da Eq.(B.12), teremos a equação de Boltzmann de primeira ordem definida da seguinte forma

$$\frac{df_\gamma}{dt} = -p \frac{\partial f_\gamma}{\partial p} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (\text{B.16})$$

Aqui, os dois primeiros termos da Eq.(B.16) estão relacionados as anisotropias e os dois últimos termos estão relacionados aos efeitos gravitacionais da métrica. Para completar a equação de Boltzmann, iremos encontrar o termo de colisão  $C[f]$ . Considerando o período em que os fótons estavam interagindo com os bárions via espalhamento Compton, a interação de um dado fóton com momento próprio  $p$  com um elétron com momento  $q$  é esquematizado como

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightleftharpoons e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}'). \quad (\text{B.17})$$

O termo de colisão será dado por

$$\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{2p(2\pi)^2} \left[ \int E_e(q)^{-1} d^3q \int E_e(q')^{-1} d^3q' \int E_\gamma(p)^{-1} d^3p \right] |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \\
&\quad \times [f_e(q')f_\gamma(p') - f_e(q)f_\gamma(p)] \delta [E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(q')] \\
&= \frac{\pi}{4m_e^2 p (2\pi)^3} \left[ \int f_e(q) d^3q \int (p')^{-1} d^3p' \right] |\mathcal{M}|^2 [f_\gamma(p') - f_\gamma(p)] \\
&\quad \times \left[ \delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right], \tag{B.18}
\end{aligned}$$

em que a função delta de Dirac garante a conservação de energia-momento; as quantidades  $E_\gamma(p)$  e  $E_e(q)$  são, respectivamente, as energias relativísticas e não-relativísticas; o termo  $|\mathcal{M}|^2$  é a amplitude de espalhamento, considerada como a probabilidade de ocorrer uma interação. Este último está relacionada com a seção de choque de Thomson  $\sigma_T$  da seguinte forma:

$$|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2. \tag{B.19}$$

Além disso, uma perturbação que representa o desvio do monopolo, como sendo a média angular da anisotropia da temperatura da radiação, pode ser representada por

$$\Theta_0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}) d\Omega'. \tag{B.20}$$

Com tudo isso, obtemos o termo de colisão dos fótons devido ao espalhamento Compton não relativístico:

$$C[f(\vec{p})] = -n_e \sigma_T p \frac{\partial f_\gamma}{\partial p} [\Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}) + \hat{n} \cdot \vec{v}_b], \tag{B.21}$$

onde  $\vec{v}_b$  é o campo de velocidade dos bárions. No caso que estamos trabalhando aqui, o campo de velocidade dos elétrons é praticamente igual ao campo de velocidade dos prótons e dos bárions; isso se deve ao forte acoplamento por causa do espalhamento Coulomb entre essas componentes. Portanto, temos que:

$$\vec{v}_e \approx \vec{v}_p \approx \vec{v}_b = \frac{1}{n_e (2\pi)^3} \int f_e(t, \vec{x}, \vec{q}) \frac{\vec{q}}{E(\vec{q})} d^3q. \tag{B.22}$$

onde  $n_e$  é a densidade do número de elétrons. Ao fazermos a relação da Eq.(B.16) com a Eq(B.21), obtemos

$$a \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \hat{n}^i \nabla \Theta + \hat{n}^i \nabla \Psi + a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = n_e \sigma_T a [\Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}) + \hat{n} \cdot \vec{v}_b]. \tag{B.23}$$

Por fim, expandindo em modos de Fourier dos campos escalares, e em tempo conforme, obtemos a **equação de Boltzmann perturbada para os fótons**:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + ik\mu\Psi + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = n_e \sigma_T a [\Theta_0(\eta, \vec{x}) - \Theta(\eta, \vec{x}, \hat{k}) + \mu v_b], \tag{B.24}$$

sendo  $\mu$  o cosseno entre o vetor de onda  $\vec{k}$  e a direção dos fótons  $\hat{n}$ .



## B.2 Equação de Boltzmann Perturbada para CDM

A equação de Boltzmann perturbada para CDM (*Cold Dark Matter*) é dado pela derivada total de  $f_{cdm}$  [39], da seguinte forma:

$$\frac{df_{cdm}}{dt} = \frac{\partial f_{cdm}}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial f_{cdm}}{\partial x^i} - p \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} \left( \frac{p}{E} H + \frac{p}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{n}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right), \quad (\text{B.25})$$

onde  $H$  é a constante de Hubble;  $\Psi$  e  $\Phi$  são dois potenciais presentes nas perturbações métricas;  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$  a energia não-relativística; e,  $a$  é o fator de escala. A dependência de  $f_{cdm}$  na direção  $\hat{n}^i$  deve ser no mínimo de primeira ordem. Sabendo que a matéria escura não interage com outros componentes do Universo, o termo de colisão será nulo. Multiplicando todos os termos da Eq.(B.25) por  $d^3p/(2\pi)^3$ , para matéria não-relativística, teremos

$$\begin{aligned} \frac{df_{cdm}}{dt} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \int f_{cdm} d^3p + \frac{1}{a(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{p}{E} f_{cdm} \hat{n}^i d^3p - \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} d^3p \\ &\quad - \frac{1}{a(2\pi)^3} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int p \hat{n}^i \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} d^3p = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

O último termo da Eq.(B.26) pode ser desprezado porque a integral direcional de  $\hat{n}^i$  só é diferente de zero em primeira ordem e, a integral multiplica uma derivada de  $\Psi$  que também é de primeira ordem. Portanto, escrevemos

$$\frac{\partial n_{cdm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_{cdm} v_{cdm})}{\partial x^i} + 3n_{cdm} \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{B.27})$$

Aqui, fizemos as substituições da densidade numérica

$$n_{cdm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{cdm} d^3p; \quad (\text{B.28})$$

do campo de velocidade

$$v_{cdm} = \frac{1}{n_{cdm} (2\pi)^3} \int \frac{p}{E} f_{cdm} \hat{n}^i d^3p; \quad (\text{B.29})$$

e

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} d^3p = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p \frac{f_{cdm}}{\partial p} d^3p = -3n_{cdm}. \quad (\text{B.30})$$

Agora, expandindo a densidade numérica como

$$n_{cdm} = \bar{n}_{cdm} [1 + \delta_{cdm}(\vec{x}, t)], \quad (\text{B.31})$$

onde  $\delta_{cdm}(\vec{x}, t)$  é um fator de primeira ordem que representa o contraste da densidade numérica. Ainda, dado a equação de ordem zero:

$$\frac{\bar{n}_{cdm}}{\partial t} + 3\bar{n}_{cdm} H = 0. \quad (\text{B.32})$$

Reescrevemos a Eq.(B.27) como

$$\frac{\partial \delta_{cdm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_{cdm}}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.33})$$

Nesta última expressão temos duas variáveis de perturbação da matéria escura fria:  $\delta_{cdm}$  e  $v_{cdm}$ . Precisamos de mais uma equação para calcular essas duas variáveis. Para tal, multiplicamos a Eq.(B.25) por

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{p}{E} \hat{n}^i d^3p$$

e efetuamos a integração, que nos dá:

$$\begin{aligned} \frac{df_{cdm}}{dt} &= \frac{\partial (n_{cdm} v_{cdm}^j)}{\partial t} + \frac{1}{a(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{p^2}{E^2} f_{cdm} \hat{n}^i \hat{n}^j d^3p - \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{p^3}{E^2} \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} \hat{n}^i d^3p \\ &\quad - \frac{1}{a(2\pi)^3} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{p^2}{E} \hat{n}^i \hat{n}^j \frac{\partial f_{cdm}}{\partial E} d^3p = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Aqui, iremos desconsiderar o segundo e o terceiro termo devido a ordem  $p^2/E^2$ . Para o quarto termo, utilizamos a relação

$$\int \hat{n}^i \hat{n}^j d\Omega = \delta^{ij} \frac{4\pi}{3}. \quad (\text{B.35})$$

Assim, o primeiro momento da equação de Boltzmann é

$$\frac{\partial (n_{cdm} v_{cdm}^j)}{\partial t} + 4H n_{cdm} v_{cdm}^j + \frac{n_{cdm}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{\partial v_{cdm}^j}{\partial t} + H v_{cdm}^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (\text{B.36})$$

Por fim, em função do tempo conforme  $\eta$  e passando para o espaço de Fourier, a Eq.(B.33) e a Eq.(B.36) serão, respectivamente:

$$\dot{\delta}_{cdm} + ik v_{cdm} + 3\dot{\Phi} = 0, \quad (\text{B.37})$$

e

$$\dot{v}_{cdm} + \mathcal{H} v_{cdm} + ik \dot{\Psi} = 0. \quad (\text{B.38})$$

Essas, Eq.(B.37) e Eq.(B.38), são as **equações de Boltzmann perturbadas para o CDM**.

### B.3 Equação de Boltzmann Perturbada para Bárions

Sabendo que elétrons e prótons estão fortemente acoplados via espalhamento Coulomb, temos que [24]

$$\rho_b = \rho_e = \rho_p = \bar{\rho}_p [1 + \delta_p(\vec{x}, t)], \quad (\text{B.39})$$

e consideramos:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_e = \vec{v}_p \quad \text{e} \quad n_b = n_e = n_p.$$

Os bárions também interagem com os fótons via espalhamento Compton; com isso, teremos a adição de mais um termo de colisão. Desta forma, As equações de Boltzmann será [39]

$$\frac{df_e(\vec{x}, \vec{q}, t)}{dt} = C_{ep}[f_e(\vec{q})] + C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})], \quad (\text{B.40})$$

e

$$\frac{df_p(\vec{x}, \vec{Q}, t)}{dt} = C_{pe}[f_p(\vec{Q})] + C_{p\gamma}[f_p(\vec{Q})]. \quad (\text{B.41})$$

De forma semelhante ao procedimento matemático feito para o CDM, obtemos a equação

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_e v_i)}{\partial x^i} + 3n_e \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int C_{ep}[f_e(\vec{q})] d^3q + \frac{1}{(2\pi)^3} \int C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] d^3q. \quad (\text{B.42})$$

O número de elétrons é conservado, pois, o termo de colisão estará comparando o número total de elétrons criados com o total de elétrons aniquilados; e, como a integral está sendo efetuada em todos os momentos, o lado direito da Eq.(B.42) será zero. A equação perturbada tem a mesma cara da equação para CDM; onde, procedendo de forma análoga, obtemos

$$\dot{\delta}_b + ikv_b + 3\dot{\Phi} = 0. \quad (\text{B.43})$$

Agora, para calcular o primeiro momento da equação de Boltzmann, multiplicamos a Eq.(B.40) por  $\vec{q}/E$  e a Eq.(B.41) por  $\vec{Q}/E$ . Integrando sobre o momento, teremos

$$\frac{\partial (n_e v_e^j)}{\partial t} + 4H n_e v_e^j + \frac{n_e}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{q^j}{E(\vec{q})} (C_{ep}[f_e(\vec{q})] + C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})]) d^3q, \quad (\text{B.44})$$

e

$$\frac{\partial (n_p v_p^j)}{\partial t} + 4H n_p v_p^j + \frac{n_p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{Q^j}{E(\vec{Q})} (C_{pe}[f_p(\vec{Q})] + C_{p\gamma}[f_p(\vec{Q})]) d^3Q. \quad (\text{B.45})$$

Os bárions são não relativísticos, então podemos fazer a aproximação  $E \sim m$  e devemos lembrar que  $n_b = n_e = n_p$ . Multiplicamos a Eq.(B.44) por  $m_e$  e a Eq.(B.45) por  $m_p$ , efetuamos a soma das duas, o que nos dá:

$$\begin{aligned} (m_e + m_p) \left[ \frac{\partial (n_b v_b^j)}{\partial t} + 4H n_b v_b^j + \frac{n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int q^j C_{ep}[f_e(\vec{q})] d^3q \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int Q^j C_{pe}[f_p(\vec{Q})] d^3Q + \frac{1}{(2\pi)^3} \int q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] d^3q. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

A relação das duas primeiras integrais do lado direito dá zero. Sabendo que  $m_p \gg m_e$ , reescrevemos a Eq.(B.46) como

$$m_p \left[ \frac{\partial (n_b v_e^j)}{\partial t} + 4H n_b v_e^j + \frac{n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int q^j C_{e\gamma} [f_e(\vec{q})] d^3 q. \quad (\text{B.47})$$

Então, dividindo por  $\bar{\rho}_b = m_p \bar{n}_b$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_b^j}{\partial t} + H v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} &= \frac{1}{\bar{\rho}_b (2\pi)^3} \int q^j C_{e\gamma} [f_e(\vec{q})] d^3 q \\ &= -\frac{n_e \sigma_T}{\bar{\rho}_b} \left[ \frac{\bar{\rho}_\gamma}{\pi} \int \hat{n}^j (\hat{n} \cdot \vec{v}_b) d\Omega + \frac{1}{(2\pi)^3} \int p^2 \hat{n}^j \Theta \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} d^3 p \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Finalmente, passando para o espaço de Fourier, obtemos

$$\dot{v}_b + \mathcal{H} v_b + ik\Psi = \frac{\dot{\tau}}{\bar{\rho}_b} \left( \frac{4}{3} v_b \bar{\rho}_\gamma - \frac{i}{(2\pi)^3} \int p^2 \Theta \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} d^3 p \right). \quad (\text{B.49})$$

Portanto, a Eq.(B.43) e a Eq.(B.49) constituem as **equações de Boltzmann perturbada para bárions**.

## B.4 Equação de Boltzmann Perturbada para Neutrinos

Aqui, tomamos  $\mathcal{N}$  para representar a anisotropia da temperatura dos neutrinos. Esta quantidade assemelha-se com a dos fótons, diferenciando apenas pelo fato de que ela ocorre via interação fraca. Desta forma, o termo de colisão será nulo e, de forma análoga a Eq.(B.24), teremos a **equação de Boltzmann perturbada para os neutrinos sem massa** como sendo

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \eta} + ik\mu \mathcal{N} + ik\mu \Psi + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{B.50})$$

Para os neutrinos massivos, o termo não nulo da equação de Boltzmann será dado pela Eq.(B.12). Porém, agora serão considerados os termos de segunda ordem ou superiores; pois, diferente dos bárions, os neutrinos são partículas relativísticas.

# APÊNDICE C – Aspectos Computacionais

- Pacotes importantes:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sp
import pysm3
import wget
import healpy as hp
from glob import glob
import camb
from camb import model, initialpower
from astropy.cosmology import FlatLambdaCDM
from astropy.cosmology import Planck18
```

Um guia para o NumPy: <https://numpy.org/>

Matplotlib - um ambiente gráfico 2D: <https://matplotlib.org/>

SciPy - ferramentas científicas de código aberto para Python: <https://www.scipy.org/>

PySM - gera simulações de céu: <https://github.com/galsci/pysm>

Healpy - lida com dados pixelados na esfera: <https://github.com/healpy/healpy>

CAMB - código para Anisotropias no CMB: <https://github.com/cmbant/CAMB>

Astropy - pacote com ferramentas necessárias para Astronomia e Astrofísica:

<https://github.com/astropy/astropy>

Dados do dataset Pantheon para Supernovas: <https://github.com/dscolnic/Pantheon>

- URLs dos dados do Plank, dos mapas e máscara:

```
planck_url = 'https://irsa.ipac.caltech.edu/data/Planck/release_3/'
```

```
map_url = 'all-sky-maps/maps/component-maps/cmb/COM_CMB-IQU-commander_2048_R3.00_full.fits'
```

```
mask_url = 'ancillary-data/masks/COM_Mask_CMB-common-Mask-Int_2048_R3.00.fits'
```

- URLs para os  $C_l$ 's binados, completos e teóricos:

```
cll_binned_url = 'ancillary-data/cosmoparams/COM_PowerSpect_CMB-TT-binned_R3.01.txt'
```

```
cll_complete_url = 'ancillary-data/cosmoparams/COM_PowerSpect_CMB-TT-full_R3.01.txt'
```

```
cll_theoretical_url = '/ancillary-data/cosmoparams/COM_PowerSpect_CMB-base-plik-HM-TTTEEE-lowl-lowE-lensing-minimum-theory_R3.01.txt'
```

- Para os parâmetros cosmológicos do modelo de concordância:

```

LCDM_params_url = 'ancillary-data/cosmoparams/COM_PowerSpect_CMB-base-plik
                  HM-TTTEEE-lowl-lowE-lensing-minimum_R3.01.txt'

H0 = Planck18.H0.value
hh = Planck18.h
ombh2 = Planck18.Ob0 * hh**2
omch2 = Planck18.Odm0 * hh**2
mnu = Planck18.m_nu.value.max()
omk = Planck18.Ok0
tau = float(LCDM_params[LCDM_params['param']== 'tau']['value'][0])
ns = float(LCDM_params[LCDM_params['param']== 'ns']['value'][0])
r_ratio = float(LCDM_params[LCDM_params['param']== 'r']['value'][0])
As = 10**(-10)*np.exp(float(LCDM_params[LCDM_params['param']== 'logA']['value']
                             [0]))

```

- Definindo parâmetros do BINGO para as simulações:

```

BINGO_f_min = 980* u.MHz
BINGO_f_max = 1260* u.MHz
Nbin = 30
BINGO_bins = np.linspace(BINGO_f_min, BINGO_f_max, Nbin)
BINGO_FWHM = 40*u.arcminute
freq_central = BINGO_bins[15]
bandwidth = BINGO_bins[16]-BINGO_bins[14]
NBINS = 11
NSIDE = 256
freq_i, freq_f, nbins = freq_central-bandwidth/2, freq_central+bandwidth/2, NBINS
bandpass_frequencies = np.linspace(freq_i, freq_f, NBINS)
sky = pysm3.Sky(nside=NSIDE, preset_strings=['d1'])
map_band = sky.get_emission(bandpass_frequencies)
map_RaDec = pysm3.apply_smoothing_and_coord_transform(map_band,
                                                       rot=hp.Rotator(coord="GE"),
                                                       fwhm=BINGO_FWHM)

```

- Para o espectro de potência do hidrogênio neutro:

```

Om0 = Planck18.Odm0 + Planck18.Ob0
HI_nu = 1420.405751768
def z_HI(nu):
    val = HI_nu/nu.value - 1.0
    return val
def freq_HI(zz):
    return HI_nu/(1+zz)

```

---

```

def lambda_HI(zz):
    return speed_of_light/(freq_HI(zz)*pow(10,6))
def r(zz):
    Args:
        zz: redshift
    Returns:
        comoving distance, Mpc
    return Planck18.comoving_distance([zz]).value[0]
def k_max(zz, Dmax):
    Args:
        zz: redshift
        Dmax: dishsize, m
    Returns:
        maximum wavevector, Mpc
    Dmax = Dmax*1*u.m.to(u.Mpc)
    return (2*np.pi*Dmax)/(r(zz)*lambda_HI(zz)*u.m.to(u.Mpc))
def Om_HI(zz):
    omega = 2.7E-4 + 1.0E-4*zz-8.0E-5*zz**2
    return omega
def b_HI(zz):
    bias = 0.96 + 0.36*zz + 0.17*zz**2
    return bias
def Ez(zz):
    return np.sqrt(1-Om0+Om0*pow(1+zz,3))
def T_HI(zz):
    val = 188*hh*((1+zz)**2)*Om_HI(zz)*Ez(zz)
    return val
def P_HI(PK, zz):
    return pow(b_HI(zz),2)*pow(T_HI(zz),2)*PK
BINGO_zbins = z_HI(BINGO_bins)
kmax = 1
kmin = 0.001

```