



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

INFLAÇÃO COSMOLÓGICA NÃO-COMUTATIVA

LEANDRO ARAÚJO DINIZ

CAMPINA GRANDE

- Março 2019 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Inflação Cosmológica Não-Comutativa

Leandro Araújo Diniz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

CAMPINA GRANDE

- Março 2019 -

D585i Diniz, Leandro Araújo.
 Inflação cosmológica não-comutativa / Leandro Araújo Diniz. –
 Campina Grande, 2021.
 42 f. : il. color.

 Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
 Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
 "Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
 Referências.

 1. Cosmologia Não-Comutativa. 2. Cosmologia Inflacionária.
 3. Teoria Quântica de Campos Não-Comutativo. I. Brito, Francisco de
 Assis de. II. Título.

CDU 524.83(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

LEANDRO ARAÚJO DINIZ

INFLAÇÃO COSMOLÓGICA NÃO-COMUTATIVA

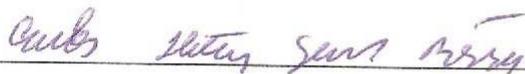
Dissertação aprovada em 01/03/2019

BANCA EXAMINADORA



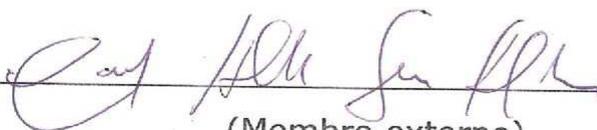
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa
Programa de Pós-graduação em Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida
Departamento de Ciências Exatas – UFPB

*“Os ideais que iluminaram o meu
caminho são a bondade, a beleza
e a verdade..”*

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus. O que seria de mim sem a fé que tenho Nele, que iluminou e ainda ilumina o meu caminho durante esta árdua trajetória com muitas bênçãos, e que vem me amparando nos momentos mais difíceis e por não permitir desistir nas horas de turbulências e desespero;

Ao meu orientador Francisco de Assis de Brito, por ter me aceitado como orientando, por ter me proposto esse desafio ao qual me fez crescer mais, academicamente falando e por ter acreditado em meu potencial;

Aos meus pais: Marcone Batista Diniz e Maria do Céu Araújo Diniz, por terem feito inúmeros sacrifícios para que eu e meus irmãos tivéssemos condições para estudar;

À minha namorada Anny Caroliny Alves Lyra, que sempre torceu, apoiou, incentivou, e esteve ao meu lado nesses momentos, sendo muitas vezes o meu porto seguro e inspiração;

A todos os meus amigos e colegas de curso que de alguma forma, cada um com seu modo específico, contribuíram para o meu amadurecimento na pesquisa;

A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande por contribuírem para a minha formação de mestre;

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física;

À banca examinadora por terem aceitado e dividiram comigo este momento tão importante e esperado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

À minha família.

Lista de Figuras

2.1	Mapa das anisotropias da RCF, formado a partir de dados da missão COBE de 1989. (Fonte: NASA Goddard Space Flight Center)	5
2.2	A distribuição da densidade de energia de um espectro de corpo negro, dada pela equação 2.3. A maior parte da energia é constituída por fótons de energia $hf \pm k_B T$. (Fonte: [1]).	6
2.3	Gráfico da relação velocidade-distância entre nebulosas extra-galácticas do trabalho original de Edwin Hubble no qual obteve-se o <i>redshift</i> das galáxias distantes. Com este trabalho, Hubble descobriu que o Universo estava em expansão.	7
2.4	O sistema de coordenadas comóveis cresce juntamente com a expansão, de modo que qualquer objeto permaneça com valores fixos de coordenadas. Fonte: Gnixon. Centre of Theoretical Cosmology	11
2.5	Na geometria plana, os ângulos do triângulo somam 180° . Fonte: abyssoregon.edu	14
2.6	Na geometria esférica, a soma dos ângulos do triângulo ultrapassam 180° . Fonte: abyssoregon.edu	15
2.7	Na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos do triângulo é menor que 180° . Fonte: abyssoregon.edu	16
2.8	Representação artística do universo observável em escala logarítmica, com o sistema solar no centro da figura. Fonte: NASA.org	16
2.9	Um fóton atravessa uma distância dr entre duas galáxias A e B.	19

2.10	Gráfico de tempo por densidade. Podemos ver que a densidade da radiação caiu mais rápido que a densidade da matéria à medida que o Universo cresceu. Traçando as curvas das densidades que observamos hoje, vemos que a radiação deve ter dominado a matéria nos primeiros momentos do Universo - isto é, na parte azul, antes do ponto de cruzamento. Fonte: Universidade de Oregon	23
2.11	As três possíveis evoluções para o Universo. A linha do meio corresponde ao valor para um Universo plano, ou $k = 0$ onde a taxa de expansão se aproxima de zero em um futuro infinito. Os casos para $k = +1$, o Universo se recolapsa, formando outro Big Bang, já um universo aberto $k = -1$, o Universo se expande para sempre até congelar. Podemos perceber que, para épocas mais antigas, era difícil prever qual era o destino do Universo, pois as linhas eram muito próximas.	24
3.1	A hipótese inflacionária de Alan Guth diz que o espaço-tempo expandiu cerca de $t = 10^{35} s$ após o big bang em um mecanismo ainda não totalmente claro, chamado de inflação. O raio cósmico expandiu de um fator de 10^{-50} para um fator de 10^{40} em um curto espaço de tempo. (Fonte: Palestra de Andrei Lindle, 2005)	33
3.2	As linhas horizontais coloridas são $\omega = -1, -1/3, 1/3$. $\theta = 2, 2.10^{-14}$, e são escolhidos valores localizando o mínimo nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores do gráfico descrevem $\beta = \frac{3^{1/4}}{64\sqrt{2\pi}} = 10^{-16}$, já as linhas superiores graficadas representam $\beta = \frac{3^{1/4}\theta}{64.2^{3/4}\pi\sigma} = 0.8.10^{-16}$. (Fonte: BAROSI, 2008)	36
3.3	As linhas horizontais coloridas são $\beta = 10^{-16}$, e são escolhidos valores para θ a fim de localizar o mínimo para ω nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores do gráfico descrevem $\theta = \frac{64\sqrt{2\pi}}{3^{1/4}} = 2, 2.10^{-14}$, já as linhas superiores do gráfico representam $\beta = \frac{64.2^{3/4}\pi}{3^{1/4}\theta} = 1, 1.10^{-16}$. O mínimo encontrado é para $\sigma_c = \frac{\theta}{32\pi}$. (Fonte: BAROSI, 2008)	36

Lista de Siglas

RCF - Radiação Cós mica de Fundo

COBE - *Cosmic Background Explorer*

TQC - *Teoria Quântica de Campos*

TQCNC - *Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa*

MQNC - *Mecânica Quântica Não-Comutativa*

MPC - *Modelo Padrão da Cosmologia*

Sumário

Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Siglas	x
1 Introdução	1
2 Princípios da Cosmologia Moderna	3
2.1 Cosmologia Observacional	3
2.1.1 O Princípio Cosmológico	3
2.1.2 Homogeneidade e Isotropia	4
2.1.3 A Radiação Cósmica de Fundo	5
2.1.4 A Expansão do Universo	7
2.2 Cosmologia Newtoniana	8
2.2.1 As Equações de Friedmann	9
2.2.2 A Equação de Fluido	11
2.2.3 A Equação da Aceleração	13
2.3 A geometria do Universo	13
2.3.1 Geometria plana	14
2.3.2 Geometria esférica	14
2.3.3 Geometria hiperbólica	15
2.3.4 Universos observáveis e infinitos	15
2.4 Parâmetros Cosmológicos Simples	16
2.4.1 Lei de Hubble	17
2.4.2 Expansão e Redshift	18

2.4.3	Equação de Estado	19
2.4.4	A evolução do parâmetro de curvatura	23
3	Processos Cosmológicos de Cenários Não-Comutativos	26
3.1	Teoria Quântica de Campos Não-Comutativos	26
3.1.1	Espaço-tempo não-comutativo	27
3.2	Termodinâmica de Gases Não-Comutativos	28
3.2.1	Equações de Estado para Cenários inflacionários	31
3.3	Inflação cosmológica	32
3.4	Teoria Inflacionária: a matéria não-comutativa para cenários cosmológicos .	33
3.5	Teoria inflacionária por matéria não-comutativa	34
3.5.1	Os parâmetros σ , θ e β	34
3.5.2	Cenário Inflacionário com θ fixo	35
4	Considerações Finais	38
	Referências Bibliográficas	40

Resumo

Nos últimos anos, vem crescendo o interesse de estudos que abordam a geometria não-comutativa aplicada ao espaço-tempo em alguns cenários cosmológicos. Esta dissertação busca apresentar uma introdução a respeito de alguns aspectos sobre cosmologia não-comutativa, em particular, iremos apresentar alguns trabalhos recentes que abordam tópicos de cosmologia inflacionária, teoria quântica de campos não-comutativa sobre termodinâmica de gases não-comutativos. Na era da inflação cosmológica, o Universo apresenta condições termodinâmicas que podem ser averiguadas através do arcabouço teórico da TQCNC. Um gás não-comutativo diluído a uma alta temperatura $T = 10^{14} GeV \simeq 10^{27} K$ descrita pelas quantidades $\omega(\sigma, \theta, \beta)$ preenchia o Universo nesta época. Trabalhos recentes investigaram alguns possíveis cenários inflacionários do Universo primordial decorrentes da análise da equação de estado $\omega(\sigma, \theta, \beta) = p/\rho$ e pela modificação dos parâmetros σ , θ e β , analisaram o comportamento do gás quando o Universo entrou na fase de expansão acelerada.

Palavras-chave: Cosmologia não-comutativa, Cosmologia Inflacionária, Teoria Quântica de Campos não-comutativa.

Abstract

In recent years, there has been growing interest in studies that address noncommutative geometry applied to space-time in some cosmological scenarios. This dissertation seeks to present an introduction to some aspects of noncommutative cosmology, in particular, we will present some recent works that address topics of inflationary cosmology, noncommutative quantum field theory and Thermodynamics of noncommutative gas. In the era of cosmological inflation, the Universe presents thermodynamic conditions that can be ascertained through the theoretical framework of TQCNC. A noncommutative gas diluted to a high temperature $T = 10^{14} GeV \simeq 10^{27} K$ described by the quantities $\omega(\sigma, \theta, \beta)$ filled the Universe at this epoch. Recent works have investigated some possible inflationary scenarios of the primordial Universe arising from the analysis of the state equation $p/\rho = \omega(\sigma, \theta, \beta)$ and by modifying the parameters σ , θ and β , analyzed the behavior of the gas when the Universe entered the accelerated expansion phase.

Keywords: Noncommutative Cosmology, Inflationary Cosmology, Noncommutative Quantum Field Theory.

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia é a ciência que estuda o Universo como um todo, sua origem, sua dinâmica, evolução e composição.

Atualmente, existem uma série de trabalhos que investigam cenários cosmológicos diversos. Um destes cenários ocorreu no Universo primordial, especificamente no período chamado inflação cosmológica, quando o Universo tinha uma idade de aproximadamente $t \sim 10^{-37} s$ e possuía um raio comóvel consideravelmente pequeno. Neste período, ocorreram as chamadas flutuações quânticas que geraram inhomogeneidades na radiação cósmica de fundo. As propriedades físicas deste pequeno Universo possui propriedades que só podem ser estudadas através de parâmetros da teoria quântica de campos não-comutativa.

Este trabalho aborda alguns aspectos clássicos que envolvem processos não-comutativos. Para isto, fizemos uma introdução que se estende desde os princípios da cosmologia moderna à análise de cenários inflacionários. Também foram feitas algumas análises de parâmetros de não-comutatividade fixos, presos a pequenas distâncias físicas. Sendo assim, serão abordados os possíveis cenários inflacionários decorrentes de β , σ e θ . O parâmetro β , é relacionado ao inverso da temperatura de um gás não-comutativo, enquanto o parâmetro σ está associado ao alcance da não-comutatividade. E por fim o parâmetro θ está relacionado a um gás não-comutativo de forma diretamente proporcional.

O objetivo desta dissertação é estudar o comportamento de cenário cosmológico decorrente do espaço tempo não-comutativo. Para isto, analisaremos a inflação cósmica sob cenários geométricos de mesma natureza, podendo ocorrer em escalas próximas à de Planck, o que pode ser investigado a partir da teoria quântica de campos e dos princípios da termodinâmica.

A referida dissertação apresenta a seguinte estrutura:

No capítulo 2, fazemos uma detalhada revisão sobre os princípios da cosmologia moderna, partindo de aspectos da cosmologia observacional oriundos da astronomia, como a homogeneidade e isotropia. Além disso, tratamos de aspectos da Cosmologia Newtoniana, usando as equações de Friedmann para descrever a expansão do Universo. Trataremos também da geometria apresentada pelo Universo, decorrente dos diferentes tipos de curvatura espacial, as quais podem ser: plana, hiperbólica ou esférica. Serão abordadas ainda algumas soluções destas equações, além de alguns parâmetros cosmológicos simples.

No capítulo 3, serão apresentados alguns processos cosmológicos em cenário não-comutativo, à luz da teoria quântica de campos, termodinâmica de gases não-comutativos, e teoria inflacionária aplicada a alguns parâmetros cosmológicos. Aqui serão investigadas implicações cosmológicas e o estudo de cenários da era da inflação cósmica em espaço-tempo não-comutativo.

No quarto e último capítulo, serão apresentadas nossas conclusões.

Capítulo 2

Princípios da Cosmologia Moderna

2.1 Cosmologia Observacional

Para estudar a evolução e a origem do Universo, a cosmologia recorre a dados observacionais que são oriundos da astronomia. Hoje, com a evolução e aperfeiçoamento dos instrumentos de observação do Universo, é possível observar o Universo em diversos comprimentos de onda, desde o visível, raios gama, raios-x, microondas, ultravioleta e infravermelho, abrangendo todo o espectro eletromagnético.

Os avanços da astronomia - mais especificamente com o advento de telescópios espaciais e terrestres de alta precisão - também possibilitaram abrir mais janelas de observação do cosmos. Hoje também é possível capturar raios cósmicos de altas energias, neutrinos e ondas gravitacionais.

Hoje a cosmologia busca, entre outras coisas, entender a evolução do Universo e desvendar o que são a energia escura e a matéria escura, que juntas compõem 95% da massa-energia do Universo. Este material é distribuído no Universo obedecendo um dos pilares da cosmologia moderna: o Princípio Cosmológico [1].

2.1.1 O Princípio Cosmológico

O sustentáculo da cosmologia moderna é a ideia de que o lugar onde ocupamos no Universo não é um lugar privilegiado, ou seja, considerando uma escala suficientemente grande, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores, não importando onde eles estejam. Este é o chamado *Princípio Cosmológico*.

Historicamente, a ideia que nossa posição no Universo é privilegiada foi mantida por

muito tempo. Por milhares de anos, a humanidade acreditou ser o centro do Universo, até meados de 1500 quando Nicoláu Copérnico estabeleceu a visão heliocêntrica, considerando o Sol, e não a Terra, como o centro do Universo para aquela época, contrariando o modelo geocêntrico de Ptolomeu.

Desde então, novas descobertas foram feitas, e o horizonte observacional foi aumentando exponencialmente. Descobrimos que existem outras galáxias além da nossa e este fato fez surgir o Princípio Cosmológico, desenvolvido pelo matemático e cosmólogo Hermann Bondi [1].

Dentre muitas implicações na cosmologia, com o Princípio Cosmológico foi possível, por exemplo, elaborar diversos modelos cosmológicos. Apesar de sua importância, o Princípio não é 100% exato, como veremos a seguir.

2.1.2 Homogeneidade e Isotropia

O Princípio Cosmológico possui duas implicações observacionais: a *homogeneidade* e a *isotropia*. A primeira nos diz que o Universo se parece o mesmo para qualquer observador em qualquer lugar, enquanto a segunda diz que o Universo se parece o mesmo em qualquer direção.

Como já foi dito, o Princípio Cosmológico não é exato e existem locais no Universo que não obedecem à isotropia, por exemplo. Estas anomalias são chamadas de anisotropias e elas foram responsáveis pela formação de estruturas em larga escala como estrelas, galáxias e aglomerados [2].

Observacionalmente, as primeiras anisotropias foram descobertas pelo Satélite COBE em 1989, quando observava a chamada radiação cósmica de fundo.

Outra consequência da homogeneidade de isotropia surgiu entre 1922 [3] e 1924 [4] quando Alexander Friedmann montou um conjunto de equações derivadas da teoria da relatividade geral, e que descrevem um universo homogêneo e isotrópico. Isto implicou na chamada *Teoria do Big Bang*, que afirma que toda a estrutura atual do Universo (incluindo o espaço e o tempo), estava aglomerada em uma singularidade. Esta teoria foi reforçada observacionalmente por Edwin Hubble em 1929 [5] com a descoberta de recessão das galáxias. O Big Bang é a melhor descrição que temos hoje sobre o Universo.

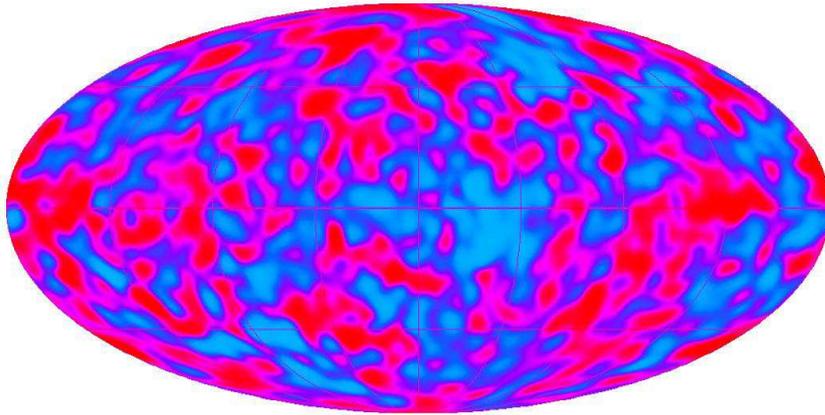


Figura 2.1: Mapa das anisotropias da RCF, formado a partir de dados da missão COBE de 1989. (Fonte: NASA Goddard Space Flight Center)

2.1.3 A Radiação Cósmica de Fundo

A radiação cósmica de fundo (RCF) é o registro fóssil de um tempo onde o Universo era denso e quente, a chamada *Era da Recombinação*, há cerca de 380.000 anos após o *big bang*. Muito antes dessa época, em $t_P \sim 10^{-43}s$, no chamado *tempo de Planck*, o Universo era uma sopa de plasma dominada pela radiação. Em $t \sim 10^{-37}s$, o Universo então passou por uma expansão acelerada *Inflação Cósmica* [9] na qual veremos com mais detalhes no Cap.3.

Logo após esfriar e gerar condições para formar os primeiros átomos [8], os fótons se desprenderam deles e se espalharam pelo Universo, formando então a chamada Radiação Cósmica de Fundo [10].

O Modelo Padrão da Cosmologia está baseado na RCF. Esta radiação foi prevista inicialmente por Alpher et al. (1948) [7] e foi descoberta e confirmada experimentalmente por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson em 1965 [11].

Sabe-se que partículas interagem umas com as outras, a distribuição de sua energia é descrita pela termodinâmica. Cada partícula possui um espectro característico. Os fótons, que são bósons, possui uma distribuição característica. Os fótons oriundos da época da recombinação atingem a Terra em todas as direções e é estruturada a forma de um corpo-negro com a seguinte temperatura:

$$T = 2,725 \pm 0,001K \tag{2.1}$$

Estes fótons tem duas possíveis polarizações e cada uma ocupada por um dado N,

obedecendo a função de Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2.2)$$

onde $B_\nu(T)$ é brilho por unidade de frequência ν , h é a constante de Planck, k_B é a constante de Boltzman e c é a velocidade da luz no vácuo.

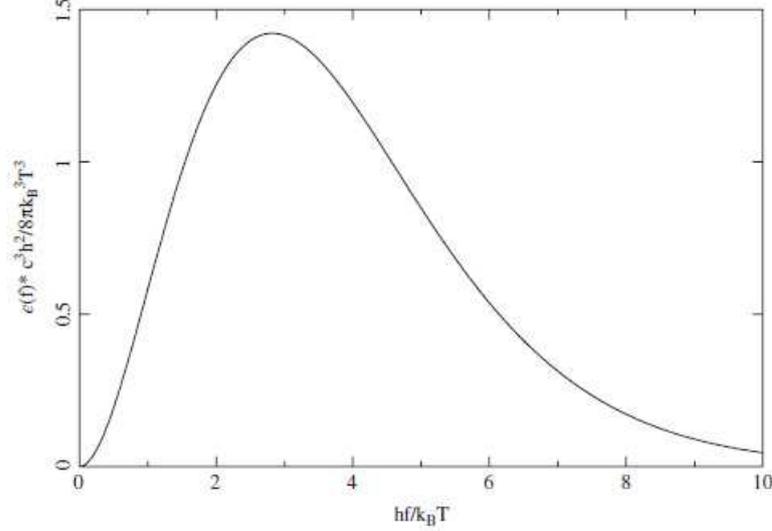


Figura 2.2: A distribuição da densidade de energia de um espectro de corpo negro, dada pela equação 2.3. A maior parte da energia é constituída por fótons de energia $hf \pm k_B T$. (Fonte: [1]).

Uma vez que fótons possuem pouca energia ($E = hf$) e comprimentos de onda grande, eles irão ocupar um grande volume. Para este caso, a densidade de energia em um intervalo de frequência df sobre f pode ser mostrada da seguinte forma:

$$\epsilon(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2.3)$$

A equação acima nos mostra como a energia é distribuída ao longo de diferentes frequências. Nós podemos ver na figura 2.2 que o pico de distribuição está em $f_{pico} \approx 2.8k_B T/h$, o que corresponde a $E_{pico} = hf_{pico} \approx 2.8k_B T/h$. Isso significa que a radiação é dominada por fótons com energia na ordem de $k_B T$, e sua distribuição é de $E_{medio} \approx k_B T$.

De modo geral, as anisotropias da RCF, bem como as anomalias de temperatura deram origem às estruturas em larga escala do Universo hoje, como os aglomerados de galáxias, aglomerados globulares, entre outras.

2.1.4 A Expansão do Universo

A descoberta chave da cosmologia observacional foi o fato de que quase todas as estruturas no Universo parecem se mover uma em relação às outras, e quanto mais longe algumas estiverem, mais rápida a sua velocidade de recessão será.

Esse estudo foi desenvolvido primeiramente por Vesto Slipher em 1912, e foi aplicado por, Edwin Hubble, em 1929 ao analisar os espectros de galáxias. Hubble notou que o espectro das galáxias mais distantes tinham um certo desvio para o vermelho (*redshift*). Ele se baseou no efeito Doppler aplicado nas ondas eletromagnéticas (luz).

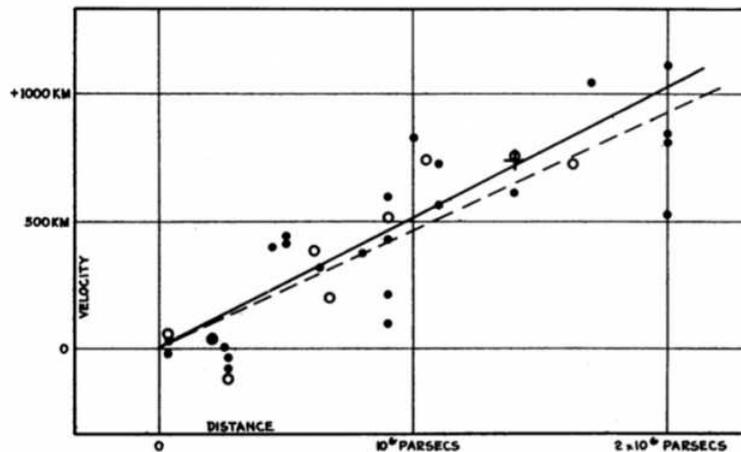


Figura 2.3: Gráfico da relação velocidade-distância entre nebulosas extra-galácticas do trabalho original de Edwin Hubble no qual obteve-se o *redshift* das galáxias distantes. Com este trabalho, Hubble descobriu que o Universo estava em expansão.

Se as galáxias estiverem se movendo na nossa direção, as ondas se contraem, o que aumenta a sua frequência e as raias do espectro se desviam para o azul (*blueshift*). Se ocorrer o inverso, ou seja, se a galáxia se distanciar, sua frequência diminui, o que faz com que as raias se desviem para o lado vermelho do espectro (*redshift*).

Hoje sabe-se que todas as galáxias estão se afastando de nós¹. Devido a este fato, convencionou-se usar a terminologia padrão *redshift* z , que é definido por:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (2.4)$$

onde λ_{obs} é o comprimento de onda observado e λ_{em} é o comprimento de onda emitido. Se um objeto próximo estiver se afastando a uma velocidade v , o *redshift* será:

¹algumas galáxias relativamente próximas umas das outras estão se atraindo pela gravidade.

$$z = \frac{v}{c}, \quad (2.5)$$

onde c é a velocidade da luz.

Hubble percebeu que suas observações mostraram que a velocidade de recessão era proporcional à distância de um dado objeto em relação a nós:

$$v = H_0 r(t), \quad (2.6)$$

onde H_0 é a constante de proporcionalidade, conhecida como *constante de Hubble*.

A equação (2.6) é conhecida como a Lei de Hubble na forma reduzida. Ela descreve bem o comportamento médio das galáxias e nos dá uma imagem do Universo, na qual galáxias próximas têm velocidades relativas, dependendo de sua distância em relação à outra. Hoje há muitos esforços para definir um valor exato para a constante de Hubble, mas ainda não há um consenso, como veremos na seção dos Parâmetros Cosmológicos Simples.

Uma das conclusões da descoberta de Hubble foi, já que as galáxias estão se afastando umas das outras e suas velocidades estão aumentando a medida que elas se afastam mais, todo o espaço já foi unido em um único ponto. Este ponto ou singularidade deu origem ao espaço, tempo e tudo que conhecemos, em um evento chamado de *Big Bang*.

2.2 Cosmologia Newtoniana

Embora as equações fundamentais da Cosmologia sejam obtidas normalmente através das equações de Einstein para um fluido perfeito, aqui por razões pedagógicas mostraremos como obter tais equações, como por exemplo a equação de Friedmann via formalismo Newtoniano levando em conta uma série de analogias conforme discutiremos a seguir. A discussão inicial em torno da cosmologia parte das equações de Friedmann, nas quais descrevem a expansão do Universo, que por sua vez partem da Gravitação Newtoniana, bem como quando são derivadas das equações da relatividade geral. Este arcabouço teórico matemático afirma que massa atrai massa pela razão direta dos quadrados das distância:

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (2.7)$$

onde G é a constante gravitacional.

A força exercida significa que existe uma energia potencial dada por:

$$V = \frac{-GMm}{r}, \quad (2.8)$$

que é análogo ao potencial elétrico das cargas na força elétrica, porém diferente no fato de que a força da gravidade é apenas atrativa, enquanto a força elétrica pode ser atrativa e repulsiva.

2.2.1 As Equações de Friedmann

As equações de Friedmann descrevem a expansão do Universo e são consideradas as mais importantes da cosmologia.

Para derivar a equação de Friedmann, precisamos calcular a energia potencial gravitacional de uma partícula teste, e então usar o princípio da conservação de energia.

Considerando um observador que esteja sob uma expansão uniforme média, com densidade de massa ρ , e, considerando que o Universo parece o mesmo em qualquer lugar (homogeneidade), nós podemos considerar qualquer ponto como centro. Considerando agora uma partícula com uma distância r e com massa m e usando o teorema de Newton, esta partícula sentirá uma força do material de menor raio.

Este material tem uma massa total dada por:

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}, \quad (2.9)$$

com uma força:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow F = \frac{4\pi G\rho mr}{3}, \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.9) na (2.8), a partícula terá uma energia potencial gravitacional de:

$$V = \frac{-GMm}{r} \rightarrow V = \frac{-4\pi Gm\rho r^2}{3}, \quad (2.11)$$

A energia cinética, portanto, é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad (2.12)$$

onde r é a posição e o ponto é a derivada com relação ao tempo t .

A equação (2.12) descreve como a separação de r , que pode ser derivada do princípio de conservação de energia para uma partícula, é dado por:

$$U = T + V, \quad (2.13)$$

onde U é uma constante.

Substituindo a equação (2.11) e a (2.12) na (2.13), temos:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho mr^2}{3}, \quad (2.14)$$

Esta equação nos dá condição da separação r entre as duas partículas.

Aplicando o princípio da homogeneidade, podemos usar o argumento em ambas as partículas. É preciso, portanto, usar um sistema de coordenadas diferente chamado de *coordenadas comóveis*².

Uma vez que a expansão é uniforme, a relação entre a real distância \vec{r} e a distância comóvel \vec{x} , pode ser escrita como:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.15)$$

onde $a(t)$ é conhecido como *fator de escala do Universo*. Ele mede a taxa de expansão do espaço. Ele nos diz como separações físicas crescem com o tempo. Por exemplo, entre os tempos T_1 e T_2 , o fator de escala dobra de valor, ou seja, o Universo está se expandindo em um fator de escala 2, e levará o dobro de tempo para a luz, por exemplo, sair de uma galáxia a outra [1].

Substituindo a equação (2.15) na equação (2.14), e lembrando que $\dot{x} = 0$ é definido como um objeto fixo em coordenadas comóveis, temos:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi G\rho a^2x^2m}{3}, \quad (2.16)$$

multiplicando cada lado da equação (2.16) por $\frac{2}{ma^2x^2}$ e reorganizando os termos, temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.17)$$

onde $kc^2 = -2U/mx^2$ e k pode ser independente de x , desde que os outros termos na equação também sejam, caso a homogeneidade não seja mantida.

²O sistema de coordenada, no qual o Universo não expande, é conhecido como *coordenadas Físicas*.

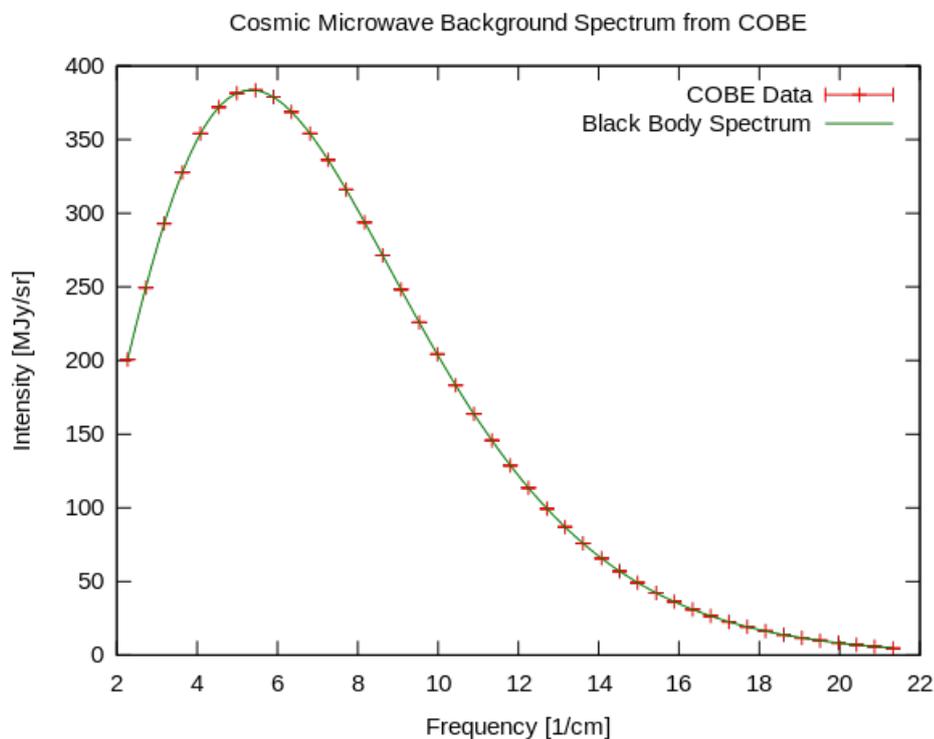


Figura 2.4: O sistema de coordenadas comóveis cresce juntamente com a expansão, de modo que qualquer objeto permaneça com valores fixos de coordenadas. Fonte: Gnixon. Centre of Theoretical Cosmology

A equação (2.17) é a forma padrão da *equação de Friedmann*.

A constante k pode ser reescrita da seguinte forma:

$$k = \frac{-2U}{mc^2x^2} \quad (2.18)$$

onde a energia total U é conservada, e a separação comóvel x é fixa. Como já foi dito, k é apenas uma constante que não muda se o espaço e o tempo se modificarem. A constante também obedece a lei do inverso do quadrado da distância.

Outro fator relevante é que k também nos diz sobre a geometria do Universo³, como será abordado mais detalhadamente na próxima seção.

2.2.2 A Equação de Fluido

Existem diferentes tipos de matéria que podem constituir nosso universo. Elas possuem diferentes pressões e que podem levar a diferentes evoluções da densidade ρ . A

³Muitas vezes chamada de curvatura do espaço-tempo

densidade da matéria do Universo é uma propriedade relevante no estudo da cosmologia. A equação de Friedmann torna-se inútil se não considerarmos como esta densidade evolui com o passar do tempo.

Existe uma variável que mede a quantidade de pressão p , no qual é chamada de *equação de Fluido*.

A equação de fluido pode ser derivada considerando a primeira lei de termodinâmica:

$$dE + pdV = TdS \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é a mesma aplicada para um gás em uma esfera de raio a .

Usando $E = mc^2$, a energia será dada por:

$$E = \frac{4\pi}{3}a^3\rho c^2 \quad (2.20)$$

Usando a regra da cadeia e considerando uma taxa de energia no tempo dt , temos:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2 \quad (2.21)$$

Aplicado ao volume, temos:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} \quad (2.22)$$

Assumindo uma expansão adiabática reversível $dS = 0$, na equação (2.19) e rearranjando os termos, temos:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (2.23)$$

onde o $\dot{\rho}$ é a derivada primeira da densidade. Esta quantidade é chamada de *equação do fluido*. Os dois termos contribuem para a mudança de densidade. O primeiro, ρ , corresponde à diluição da densidade devido ao volume que foi adicionado, enquanto o segundo termo, p , corresponde à força de energia devido à pressão do material que se modifica a medida que o volume do Universo for crescendo.

A suposição usual na cosmologia é a que existe uma pressão única associada com cada densidade, de modo que $p \equiv p(\rho)$, que é conhecida como *equação de estado*, na qual será abordada detalhadamente na última seção deste capítulo.

2.2.3 A Equação da Aceleração

As equações de fluido e de Friedmann nos dão ainda uma terceira equação, que independe das duas primeiras, mas que descreve a aceleração do fator de escala. Derivando a equação (2.17) em relação ao tempo, temos:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3}. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.23) na equação (2.24) e cancelando o fator de escala $2\dot{a}/a$ em cada termo, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.25)$$

Usando a equação (2.17) novamente, chegaremos à seguinte equação:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (2.26)$$

A equação acima é conhecida como a *equação da aceleração*. Podemos perceber que, qualquer material e qualquer pressão faz com que a força gravitacional cresça, e isso irá desacelerar a expansão cósmica.

A equação da aceleração não é uma característica da constante k que aparece na equação de Friedmann, ela se anula na derivação.

2.3 A geometria do Universo

A cosmologia Newtoniana, abordada na seção anterior, mediu a energia por partícula. Se considerarmos a teoria da relatividade geral, podemos dizer que a equação de Friedmann (2.17) mede a curvatura do espaço-tempo. Como já foi apresentado, existem diferentes geometrias para diferentes valores da constante k que aparece na equação de Friedmann (2.17).

A geometria mais simples na qual pode ser descrita com as propriedades de homogeneidade e isotropia do Universo é a *geometria plana*. Ela aplica as regras normais da geometria Euclidiana. O valor de k nos dá três possibilidades para as geometrias do Universo, que pode ser positiva ($k = 1$), negativa ($k = -1$) e zero ($k = 0$), correspondendo a universos fechados (esféricos), abertos (hiperbólicos) e planos, respectivamente.

2.3.1 Geometria plana

Dentro do estudo da geometria cosmológica, existe uma geometria espacial de curvatura zero, que é chamada de *geometria plana*. Nesta geometria, três pontos no Universo formam um triângulo cujos ângulos internos somam 180° como mostra a figura 2.5. Um círculo de raio r neste tipo de geometria, tem circunferência, $2\pi r$.

Um universo, considerando esse tipo de geometria, deve ser infinito em extensão, caso contrário, ele violará o princípio cosmológico.

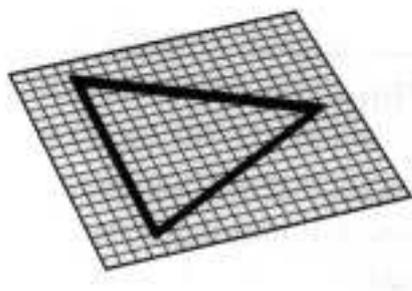


Figura 2.5: Na geometria plana, os ângulos do triângulo somam 180° . Fonte: abyssoregon.edu

2.3.2 Geometria esférica

No final do século 19, o matemático Bernhard Riemann demonstrou que o axioma final de Euclides era uma escolha arbitrária, e isto poderia levar a outros resultados. Um deles foi a chamada *geometria não-euclidiana*, que serviram de base matemática para a teoria da relatividade geral.

Sabemos que uma esfera perfeita é aquela que se parece a partir de qualquer ponto em sua superfície, ou seja, as condições de isotropia são satisfeitas. Diferentemente de uma geometria plana, a superfície esférica é perfeitamente finita em extensão, e sua área pode ser dada por $4\pi r^2$. É possível perceber que uma esfera não tem bordas ou fronteiras. É como o planeta Terra: se alguém sair do Polo Norte e seguir em linha reta, ele retornará ao mesmo ponto.

Na geometria esférica, quando desenhamos três pontos na superfície da esfera, estes pontos formam um triângulo com ângulos que ultrapassam 180° em sua soma, como é visto na figura 2.6. Um universo com curvatura esférica é considerado um universo fechado,

com $k > 0$. Se um feixe de luz for emitido de um certo ponto, neste tipo de Universo, o feixe irá seguir o espaço curvado e fechado e retornará ao mesmo ponto de onde foi emitido.

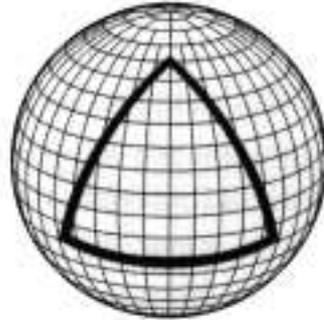


Figura 2.6: Na geometria esférica, a soma dos ângulos do triângulo ultrapassam 180° .
Fonte: abyssoregon.edu

2.3.3 Geometria hiperbólica

O terceiro e último tipo de geometria é aquela cuja curvatura é negativa, ou $k < 0$ e é chamada de geometria hiperbólica. Neste tipo de geometria, a soma dos ângulos que formam um triângulo é um valor menor que 180° e uma circunferência de um círculo é maior que $2\pi r$.

A forma desta geometria é geralmente representada como uma superfície de uma sela de cavalo como mostra a figura 2.7. Um universo com geometria hiperbólica é conhecido como *universo aberto*. Dois feixes de luz emitidos paralelamente, neste tipo de universo, nunca se encontrarão. Um universo desse tipo deve ser infinito em extensão, como no caso de um universo plano.

2.3.4 Universos observáveis e infinitos

Quando nos referimos a universos infinitos, como ocorre nos casos planos e abertos, estamos falando sobre um universo que é infinito em tamanho e que cresce em todas as direções até a eternidade. Além disso, um universo infinito também pode se expandir - as distâncias entre seus objetos ainda pode aumentar.

Como na matemática, onde existem infinitos maiores do que outros, podem haver também infinitos tipos de universos infinitos, e estes podem se multiplicar.

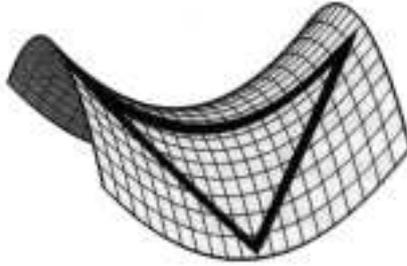


Figura 2.7: Na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos do triângulo é menor que 180° .

Fonte: abyssoregon.edu

Estas conjecturas infinitas são apenas modelos. Os cosmólogos atuais ainda não sabem se o nosso Universo é finito ou não. O que se conhece atualmente é aquilo que se pode observar, o que é chamado de *universo observável*. Hoje sabe-se que a distância comóvel da Terra até a borda do universo observável é de 14,26 gigaparsecs ou 46,6 bilhões de anos luz em qualquer direção. O Universo observável é uma esfera de 93 bilhões de anos luz de diâmetro [12]. Estes valores consideram a expansão do espaço-tempo.



Figura 2.8: Representação artística do universo observável em escala logarítmica, com o sistema solar no centro da figura. Fonte: NASA.org

2.4 Parâmetros Cosmológicos Simples

Dentro da cosmologia, um modelo cosmológico é uma descrição teórica do Universo. Ele nos fornece uma estimativa de como o Universo evoluiu com o tempo, desde o seu início.

O principal modelo cosmológico usado na atualidade é chamado de *Modelo Padrão*

da *Cosmologia*. Existem certas quantidades de parâmetros físicos observacionais dentro do MPC que fornece uma imagem do Universo, estes parâmetros são chamados de *parâmetros cosmológicos*.

Como já vimos, a equação de Friedmann (2.17) e a equação de fluido (2.23), nos diz como a densidade de massa $\rho(t)$ evolui com o tempo.

Nesta seção, serão abordados algumas soluções simples destas equações, além de algumas parâmetros cosmológicos simples.

2.4.1 Lei de Hubble

Como vimos, em 1929, Edwin Hubble descobriu uma relação entre a velocidade de recessão das galáxias, dada por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e a sua distância r . Podemos ainda escrever esta relação como:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (2.27)$$

A partir da lei de Hubble, podemos identificar a constante de proporcionalidade:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.28)$$

sendo o valor medido hoje para o tempo cosmológico atual escrito como H_0 . A constante de Hubble⁴ hoje possui um valor positivo, o que nos leva a um universo que se expande, ao invés de se contrair.

Utilizando uma notação mais compacta, podemos ainda escrever

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é conhecido como parâmetro de Hubble, e descreve a taxa de expansão cósmica como uma função do tempo, sendo a 'constante de Hubble' o valor para o tempo presente.

⁴Há uma ressalva no termo "constante". H pode ser constante em espaço devido ao princípio cosmológico, porém ela não é constante no tempo, e seu valor muda a medida que o Universo evolui.

2.4.2 Expansão e Redshift

Como já vimos, o *redshift* das linhas espectrais foi a evidência observacional usada para corroborar o fato de que o Universo está em expansão. Além disso, o *redshift* também pode ser relacionado com o fator de escala. De acordo com a Lei de Hubble, a velocidade de recessão dv de dois objetos separados por uma pequena distância dr (como mostrado na figura 2.9) é:

$$dv = H dr = \frac{\dot{a}}{a} dr. \quad (2.30)$$

A relação de Doppler nos diz que o comprimento de onda entre um emissor e um receptor é dado por:

$$d\lambda \equiv \lambda_r - \lambda_e, \quad (2.31)$$

onde λ_r é o comprimento de onda do receptor, e λ_e é o comprimento de onda do emissor.

Sabendo que os objetos estão próximos, podemos aplicar a Lei de Doppler:

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{dv}{c}, \quad (2.32)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e $d\lambda$ se torna positivo a medida que o comprimento de onda cresce.

O tempo entre a emissão e recepção do sinal é dado pelo tempo de viagem da luz, dado por $dt = dr/c$. Aplicando esta relação nas equações (2.30) e (2.32), podemos chegar a seguinte relação:

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}, \quad (2.33)$$

Integrando a equação (2.33), temos que:

$$\ln \lambda = \ln a + \text{constante}, \quad (2.34)$$

ou seja, $\lambda \propto a$, onde λ , para este caso é o comprimento de onda medido para qualquer tempo.

Este resultado nos diz que, a medida que o espaço se expande, os comprimentos de luz ficam mais longos de forma proporcional (efeito Doppler). Isto significa que, a medida que o espaço-tempo se estica, os comprimentos de onda fazem o mesmo, e quanto maior

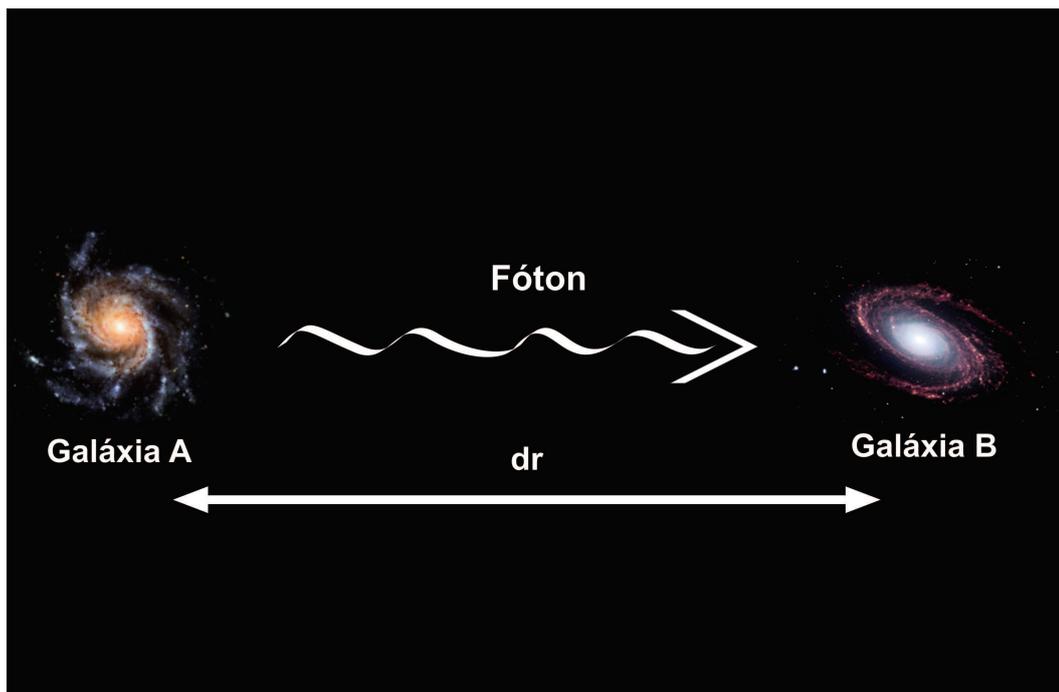


Figura 2.9: Um fóton atravessa uma distância dr entre duas galáxias A e B.

for a expansão, maior será o desvio para o vermelho, isto é, quanto maior o valor do *redshift*, mais antigo será o universo.

Aplicando o fator de escala à equação (2.4), temos:

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (2.35)$$

Isto significa que um dado *redshift* pode nos informar qual era a época e qual era o tamanho do Universo quando a luz foi emitida, considerando a expansão do espaço-tempo. Por exemplo, se um dado comprimento de onda for dobrado, o Universo tinha metade do tamanho quando a luz foi emitida [1].

2.4.3 Equação de Estado

Em cosmologia, a *equação de estado* é caracterizada pelo número adimensional ω , que relaciona a densidade de massa ρ e a pressão p . De forma matemática, temos:

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (2.36)$$

Considerando o Universo como um fluido perfeito e aplicando a equação de estado ao fator de escala, podemos determinar o estado termodinâmico do Universo em qual-

quer época, e descobrir qual fluido dominava o Universo. As soluções da equação (2.36) dependem da natureza do fluido do Universo. O termo ω pode assumir diversos valores, dependendo do fluido em questão, por exemplo, os fótons da radiação cósmica de fundo possuem ($\omega = \frac{1}{3}$), a poeira ou matéria ($\omega = 0$), o fluido rígido ($\omega = 1$) e a constante cosmológica ($\omega = -1$). Abordaremos agora as soluções clássicas para os três tipos de fluidos nos quais dominavam o Universo em épocas diferentes: a matéria e radiação, e a mistura de ambos.

Matéria

Quando usamos o termo matéria, cosmologicamente falando, estamos nos referindo à "matéria não relativística"⁵, ou seja, qualquer material que exerça uma pressão nula ($p = 0$).

Partindo da equação de Friedmann, podemos chegar a uma equação de fluido para a matéria, também chamada de *equação da continuidade*:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + (p) = 0 \quad (2.37)$$

Tomando $p = 0$, temos:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \rightarrow \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0, \quad (2.38)$$

Integrando, temos que ρa^3 é constante, isto é:

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (2.39)$$

A equação (2.39) nos diz que a densidade do Universo cai em relação ao volume do Universo, que cresce com o fator de escala.

Tomando ρ_0 como a densidade para o tempo atual, temos:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (2.40)$$

Assumindo um Universo plano $k = 0$, podemos calcular como o fator de escala a varia com o tempo, usando a equação de Friedmann. Substituindo a equação (2.17) na (2.40), podemos chegar a:

⁵Muitas vezes os termos "pó" ou "poeira" são usados para se referir à matéria no Universo

$$\dot{a} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{a}. \quad (2.41)$$

Fixando o valor do fator $\omega = 2/3$ e considerando o fator de escala $a = 1$ para o tempo atual $t = t_0$, a solução completa do fator de escala para a matéria será:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.42)$$

A densidade, para este caso, será:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (2.43)$$

A taxa de expansão $H(t)$ para esta solução cai com o tempo, e é dada por:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (2.44)$$

Nesta solução, o Universo expande para sempre, entretanto, a taxa de expansão se torna infinitamente lenta a medida que voltamos no tempo cósmico.

Radiação

Radiação é todo fluido que se move com a velocidade da luz ou com velocidades relativísticas (próximas a velocidade da luz) como os neutrinos, a equação de estado e os fótons. A energia cinética destas partículas leva a uma pressão de radiação, que pode ser mostrada como sendo $p = \rho c^2/3$.

Para um universo dominado pela radiação, a equação de fluido se torna:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \quad (2.45)$$

Integrando a equação (2.45), chegamos a um valor semelhante ao que foi feito para o caso do universo dominado pela matéria equação (2.39):

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}. \quad (2.46)$$

A equação de estado, para este caso se torna:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.47)$$

já a densidade será:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (2.48)$$

Estas soluções nos dizem que o Universo se expande mais lentamente se a radiação dominar do que se a matéria o fizer, e isto é devido a uma desaceleração extra compensada pela pressão.

Estas soluções devem ser examinadas com mais cautela, uma vez que ela possui efeitos relativísticos, pois consideram comprimentos de onda da luz. Como visto na equação (2.46), a pressão cai com a quarta potência do fator de escala, três partes são o volume tridimensional que já examinamos na matéria, já a quarta parte do alongamento do comprimento de onda da luz, provocado pelo efeito Doppler.

Como vimos, este alongamento é proporcional a a . A energia de radiação é proporcional à sua frequência, ou $E = hf$. Em termos termodinâmicos, o Universo realiza trabalho dado por $p dV$ quando ele se expande, fazendo com que a pressão atue como uma variável considerável na evolução do fator de escala e que também determina o estado da densidade do Universo.

Misturas

Vimos os fluidos de matéria e radiação separadamente. Agora, vamos considerá-los como um mistura de matéria-radiação. Temos então:

$$\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}. \quad (2.49)$$

Usando as taxas de expansão já vistas neste capítulo, podemos encontrar uma das soluções mais simples para este caso de densidade, considerando apenas uma componente dominante.

Por exemplo, se considerarmos a radiação dominante, então chegaremos a:

$$a(t) \propto t^{1/2}; \rho \propto \frac{1}{t^2}; \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}}. \quad (2.50)$$

Podemos observar que a densidade de matéria cai mais devagar que a radiação. Isto significa que a radiação dominante não pode durar para sempre e é instável. A era dominada pela radiação no nosso universo foi desde a radiação até 47.000 anos depois do Big Bang[13].

Para um universo dominado pela matéria, temos as seguintes soluções:

$$a(t) \propto t^{2/3}; \rho \propto \frac{1}{t^2}; \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}}. \quad (2.51)$$

Neste caso, a matéria dominante é uma situação mais estável. A era dominada pela radiação, no nosso universo, durou entre 47.000 a 9.8 bilhões de anos após o Big Bang [13].

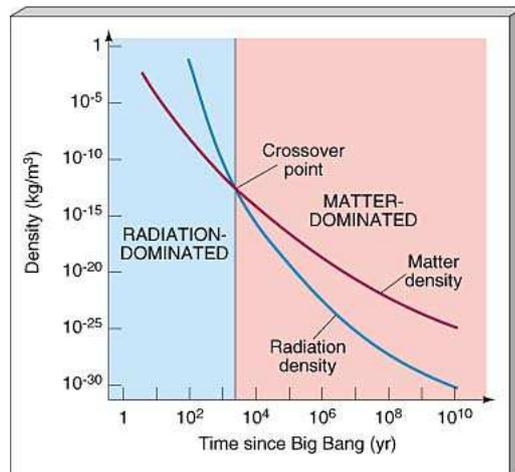


Figura 2.10: Gráfico de tempo por densidade. Podemos ver que a densidade da radiação caiu mais rápido que a densidade da matéria à medida que o Universo cresceu. Traçando as curvas das densidades que observamos hoje, vemos que a radiação deve ter dominado a matéria nos primeiros momentos do Universo - isto é, na parte azul, antes do ponto de cruzamento. Fonte: Universidade de Oregon

2.4.4 A evolução do parâmetro de curvatura

Analisaremos agora as soluções mais simples para universos hiperbólicos e esféricos, ou seja, para os casos em $k \neq 0$.

Assumindo um Universo dominado pela matéria não-relativística, a constante k nas equações de Friedmann é zero, o que faz com que o Universo evolua para sempre, com um fator de escala $a \propto t^{2/3}$. Mas, se quisermos saber para os casos em que $k \neq 0$, devemos analisar se a expansão do Universo para.

A equação de Friedmann é dada por:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.52)$$

Considerando o caso $k = -1$ (universos hiperbólicos). Isto nos permite estudar o comportamento do Universo em um tempo mais recente, pois o termo k/a^2 cai mais devagar com a expansão do que $\rho_{mat} \propto 1/a^3$.

Desta forma, o fator de escala a se torna maior que na solução de um universo dominado pela matéria, pois, com k sendo desconsiderado, o termo k/a^2 deverá vir a dominar. Com isso, a equação de Friedmann se torna:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}. \quad (2.53)$$

Cancelando os termos a^2 , a solução será $a \propto t$, e a expansão do Universo se tornará mais rápida. A velocidade não tenderá a zero para tempos mais recentes, ao invés disso, ela se torna constante, o que é muitas vezes conhecido como *expansão livre*.

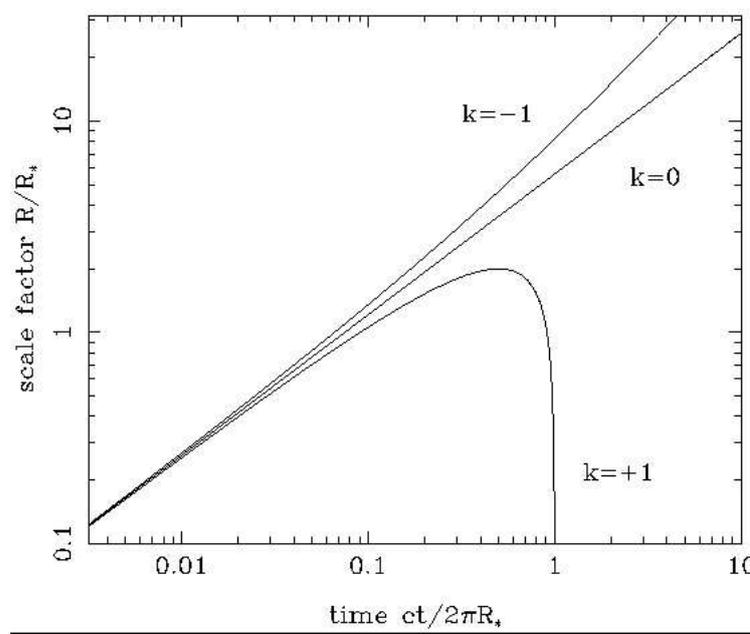


Figura 2.11: As três possíveis evoluções para o Universo. A linha do meio corresponde ao valor para um Universo plano, ou $k = 0$ onde a taxa de expansão se aproxima de zero em um futuro infinito. Os casos para $k = +1$, o Universo se recolapsa, formando outro Big Bang, já um universo aberto $k = -1$, o Universo se expande para sempre até congelar. Podemos perceber que, para épocas mais antigas, era difícil prever qual era o destino do Universo, pois as linhas eram muito próximas.

Para o caso de k ser positivo ou fechado (para os casos de universos esféricos, com $k = +1$), a constante de Hubble pode ser zero, pois os dois termos do lado direito da

equação de Friedmann se cancelam. Na prática, para um universo desse tipo, a expansão irá parar em algum momento no tempo, e a atração gravitacional fará com que o Universo se recolapse, o que a cosmologia chama de *Big Crunch* ou *Grande Colapso*.

Na figura 2.11, podemos ver estas três situações ilustradas em um gráfico.

No Cap.3, analisaremos os processos cosmológicos de campos não-comutativos, além de estudarmos mais a fundo a teoria inflacionária, incluindo as equações de estado.

Capítulo 3

Processos Cosmológicos de Cenários Não-Comutativos

Neste capítulo, iremos discutir um dos cenários decorrentes do espaço-tempo não-comutativo. Em particular, analisaremos a inflação cósmica - que foi estudada de forma introdutória no capítulo 2 - sob cenários geométricos não-comutativos. Teoricamente, a inflação cósmica pode ocorrer em escalas de energia próximas a escala de Planck, e isto implica que ela pode ser investigada sob cenários não-comutativos, dentro da teoria quântica de campos.

3.1 Teoria Quântica de Campos Não-Comutativos

Teorias quânticas de campo (TQC) formuladas em espaços não-comutativos, também chamadas de teorias quânticas de campo não-comutativos (TQCNC)[14], têm implicações fenomenológicas interessantes que têm sido objeto de numerosas investigações nos últimos anos como a quebra de simetria de Lorentz [18], análises de assimetria de matéria-antimatéria e implicações cosmológicas [15], em especial, o estudo de cenários da era da inflação cósmica em espaço-tempo não-comutativo [16], que é o objeto de investigação deste trabalho.

No campo quântico, novas teorias voltadas ao conceito de espaço-alvo estão ganhando mais atenção e interesse de estudo, como mostrado em [17, 18, 19, 20, 21]. Observa-se que, quando tratamos de campos não-comutativos, foi proposto um formalismo que descreve uma analogia com as principais idéias fundamentais da mecânica quântica

não comutativa (MQNC), sugerindo a substituição entre as relações não comutativas e as coordenadas do espaço-tempo relacionadas entre esses campos.

Temos por objetivo, nessa seção, demonstrar uma revisão da teoria quântica não comutativa. Conceitos aqui estudados serão apresentados e analisados em espaço-tempo não-comutativos e espaço-tempo não-comutativos para dimensões(3+1).

3.1.1 Espaço-tempo não-comutativo

Na mecânica quântica, em fases iniciais, noções de princípios em espaço-tempo não-comutativos já haviam sido propostas [22]. A MQNC impõe relações de não-comutação entre as coordenadas do espaço-tempo. Nestas coordenadas x^μ são substituídos por operadores hermitianos \hat{x}^μ da álgebra não-comutativa, correspondendo as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu}\bar{\theta} \equiv i\bar{\theta}^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \quad (3.2)$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_\nu^\mu, \quad (3.3)$$

onde θ é conhecido como parâmetro não-comutativo com dimensão de área, e $\epsilon^{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica real. A não-comutatividade do espaço-tempo causa efeitos em sua estrutura geométrica, uma vez que o espaço-tempo cessa sua continuidade e se torna discreta, ocasionando a substituição da noção de ponto por uma área mínima, conhecida como célula de Planck. Implicando em um conjunto de incertezas em suas coordenadas

$$\Delta\hat{x}^\mu\Delta\hat{x}^\nu \geq \frac{1}{2}|\bar{\theta}^{\mu\nu}|. \quad (3.4)$$

Note que a teoria comutativa usual é obtida para o limite $\hat{\theta} \rightarrow 0$. Observamos que em [19] e [23, 24, 25], temos as coordenadas não-comutativas relacionadas a coordenadas usuais por deformação:

$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\mu\nu}p_\nu, \quad (3.5)$$

$$\hat{p}^\mu = p^\mu. \quad (3.6)$$

Pode-se notar que a deformação apresentada acima são aplicadas às coordenadas, sendo os graus de liberdade do sistema. Com isso, na teoria quântica de campos, esses graus de liberdade são definidos em todos os pontos do espaço-tempo, onde introduzirá a não-comutatividade nesses campos gerando um espaço-alvo não-comutativo.

3.2 Termodinâmica de Gases Não-Comutativos

Em se tratando de gases não-comutativos aplicados a termodinâmica, pode-se perceber que em [17], utiliza-se do formalismo grande-canônico da Mecânica Estatística como ponto de partida para assim estudar essas propriedades. Pode-se ver que o grande-potencial termodinâmico encontra-se associado à energia e ao número de partículas, conseqüentemente, obtendo-se outras variáveis da termodinâmica, como pressão, temperatura, densidade de partícula e entropia.

Fazendo uma análise da aplicabilidade da Mecânica Estatística, percebe-se que o *ensemble* grande canônico está ligado a um sistema em contato com um reservatório térmico de partículas de potencial químico e temperaturas fixas respectivamente.

Ao observarmos o sistema inicial do Universo S, associando o mesmo a um reservatório R de energia térmica E_0 e um número total de partículas N_0 , fundamentado no postulado da mecânica estatística, temos a probabilidade de encontrar um sistema em um estado microscópico particular j , com uma energia E_j e o número de partículas N_j . Logo definimos a probabilidade:

$$P_i = c\Omega_R(E_o - E_j, N_o - N_j), \quad (3.7)$$

onde c é uma constante e $\Omega_R(E, N)$, é o número de estados microscópicos possíveis. Expandindo em séries de Taylor, ficamos com a seguinte expressão:

$$\ln P_j = const. + \left(\frac{\delta \ln \Omega_R}{\delta E} \right)_{\epsilon_0, N_0} (-E_j) + \left(\frac{\delta \ln \Omega_R}{\delta N} \right)_{E_0, N_0} (-N_j) \dots \quad (3.8)$$

Agora, da mecânica estatística, observa-se que através do postulado de entropia, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\delta \ln \Omega_R}{\delta E} = \frac{1}{k_B T} \quad e \quad \frac{\delta \ln \Omega_R}{\delta N} = -\frac{\mu}{k_B T} \quad (3.9)$$

onde T e μ representam a temperatura e o potencial químico do universo primordial respectivamente. Diante disso, sabendo que o reservatório é grande, abandonamos os termos de segunda ordem da equação (3.8). Ficamos com a expressão:

$$\ln P_j = \text{const.} - \frac{(E_j)}{K_B T} + \frac{\mu N_j}{K_B T} \quad (3.10)$$

ou melhor,

$$P_j = \frac{1}{\Xi} \exp(-\beta E_j + \beta \mu N_j) \quad (3.11)$$

E a grande função de partição Ξ é dada por:

$$\Xi = \sum_j \exp(-\beta E_j + \beta \mu N_j) \quad (3.12)$$

Tomando a Hamiltoniana do Oscilador Harmônico Simples [26]

$$H = \sum_{\vec{n} \neq 0} \omega_{\vec{n}} \{ \Lambda_{\vec{n}}^1 \Lambda_{\vec{n}}^{1\dagger} \Lambda_{\vec{n}}^1 + \Lambda_{\vec{n}}^2 \Lambda_{\vec{n}}^{2\dagger} \Lambda_{\vec{n}}^2 \} \quad (3.13)$$

e aplicando este Hamiltoniano em (3.12), ficamos com:

$$\Xi = \prod_{k \neq 0} \sum_{m, n=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1 - \mu)n} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2 - \mu)m} = \prod_{k \neq 0} \left(\frac{1}{1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}} \right) \left(\frac{1}{1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}} \right), \quad (3.14)$$

onde, desconsideramos o modo zero, pelo fato de estar apenas associados aos modos translacionais. Onde $z = e^{\beta \mu}$, é a fugacidade e μ o potencial químico.

No entanto, na termodinâmica, suas grandezas estão associadas a:

$$\ln \Xi = - \sum_{k \neq 0} [\ln(1 - z e^{\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}) + \ln(1 - z e^{\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2})]. \quad (3.15)$$

Nosso objetivo de interesse, até então, está relacionado à energia interna U , ao número de partículas N , e a pressão p , dados por:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.16)$$

$$p = \frac{1}{\beta V} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.17)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.18)$$

onde a densidade de energia é definida como $\rho = U/V$. Podemos notar que a equação de estado $\rho(p)$ e a equação de Friedmann (2.17), descrevem a evolução do Universo preenchido por um gás, como foi visto no Cap.2.

No limite termodinâmico, os somatórios se transformam em integrais, e dada a complexidade desse problema para um gás do campo não-comutativo, torna-se difícil resolver. Então, consideramos um limite para um gás diluído de alta temperatura ($z \ll 1$). Neste regime, reescrevemos a equação (3.15) expandindo em séries de potências da seguinte forma:

$$\ln \Xi = z \sum_{k \neq 0} (e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{1}{k}} + e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{2}{k}}). \quad (3.19)$$

Nessa situação estamos trabalhando com um campo de gases não-comutativos formados por N osciladores harmônicos em $V \approx R^3$. Nota-se que o somatório é substituído por uma integral no limite termodinâmico em $V \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$), daí ficamos com:

$$\sum_{k \neq 0} \rightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (3.20)$$

Logo obtemos o seguinte resultado:

$$\ln \Xi = zV \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{1}{k}} + e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{2}{k}}) = \frac{zV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 (e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{1}{k}} + e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda \frac{2}{k}}) \quad (3.21)$$

em que,

$$\Lambda^1(k) = \sqrt{1 + \left(\frac{k\theta(k)}{8\pi}\right)^2} + \frac{k\theta(k)}{8\pi}, \quad (3.22)$$

$$\Lambda^2(k) = \sqrt{1 + \left(\frac{k\theta(k)}{8\pi}\right)^2} - \frac{k\theta(k)}{8\pi}, \quad (3.23)$$

e:

$$\theta(k) = \theta e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2}. \quad (3.24)$$

Ao expandirmos a integral (3.21) em séries de potência de θ e β , pode-se calcular analiticamente alguns níveis de aproximação, caso contrário seria difícil calcular por causa da dependência não-trivial de $\Lambda^1(k)$ e $\Lambda^2(k)$ com o parâmetro θ .

3.2.1 Equações de Estado para Cenários inflacionários

No Cap.2, vimos a equação de estado $p = \omega\rho$. Neste item, iremos analisar estas equações a fim de encontrar prováveis cenários inflacionários. Em princípio, devemos primeiramente obter quantidades termodinâmicas da densidade de energia ρ e a pressão p vistas em (3.16) e (3.17), respectivamente[17]. Utilizando a expressão encontrada anteriormente (3.21), e expandindo como série de potência de quarta ordem nos parâmetros θ e β , obtemos:

$$\rho = z \left(\frac{12}{\beta^4} - \frac{3\theta^4}{262144\pi^4\sigma^8} - \frac{15\beta\theta^2}{256\pi^{3/2}\sigma^7} + \frac{\theta^2}{64\pi^2\sigma^6} \right), \quad (3.25)$$

$$p = z \left[\frac{4}{\beta^4} + \theta \left(\frac{15\beta}{512\pi^{3/2}\sigma^7} - \frac{1}{64\pi^2\sigma^6} \right) \right], \quad (3.26)$$

Além disto, aplicaremos a densidade de partículas $n = N/V$, encontrada na equação (3.18) e também a entropia molar s escrita como

$$n = z \left[\frac{4}{\beta^3} + \theta^2 \left(\frac{15\beta^2}{512\pi^{3/2}\sigma^7} - \frac{\beta}{64\pi^2\sigma^6} \right) \right], \quad (3.27)$$

$$s = \frac{160\beta^8\theta^2 - 105\sqrt{\pi}\beta^7\theta^2\sigma + 144\beta^6\theta^2\sigma^2 - 30\sqrt{\pi}\beta^5\theta^2\sigma^3 + 2^{14}\pi^2\theta^{10}}{30\sqrt{\pi}\beta^9\theta^2\sigma^3 - 16\beta^8\theta^2\sigma^4 + 2^{12}\pi^2\beta^4\sigma^{10}} \quad (3.28)$$

Através desta aproximação, encontramos a quantidade $\omega(\sigma, \theta, \beta) = p/\rho$ tornando-se:

$$\omega(\sigma, \theta, \beta) = \frac{1}{3} + \frac{\beta^4}{3} \left(\frac{\theta^4}{2^{20}\pi^4\sigma^8} - \frac{\theta^2}{2^6 3\pi^2\sigma^6} \right). \quad (3.29)$$

Vale salientar que para um dado σ suficientemente grande, e para θ e β suficientemente pequenos, encontramos $\omega(\sigma, \theta, \beta) = \frac{1}{3}$, correspondente ao regime de um gás de

radiação. Onde apresentará um sinal negativo que aparece na frente do terceiro termo da equação (3.29). Nesse caso encontramos regiões de parâmetros $-1 \leq \omega < -1/3$, correspondendo a uma expansão inflacionária de um universo preenchido por um gás não-comutativo.

3.3 Inflação cosmológica

Em 1981, Guth [27], propôs uma teoria de condições iniciais que ficou conhecida como *Teoria da Inflação*. Nesse modelo, temos o campo escalar denominado *inflaton*, onde é o percussor da inflação.

A teoria da inflação foi desenvolvida para explicar alguns problemas do MPC, como por exemplo, o problema do horizonte, no qual diz que o Universo deveria ter um certo grau de inhomogeneidade, uma vez que as regiões da radiação cósmica de fundo não poderiam estar conectadas durante a era da recombinação.

Segundo a teoria, a expansão acelerada do Universo, que ocorreu entre $t = 10^{-36}s$ e $t = 10^{-32}s$ após o *Big Bang* foi provocada pelo *inflaton*, que atua como uma constante cosmológica e encontra-se inicialmente presa no mínimo potencial. Quando este mínimo é abandonado devido ao processo de tunelamento quântico, pode-se dizer que encerra-se o período de inflação. Este evento ficou conhecido como *old inflaton* onde o mesmo não se consolidou, constatando que não era possível a inflação ocorrer em todos os pontos do Universo, simultaneamente, mas em regiões específicas que, ou são completamente ausente de matéria, ou possuem uma distribuição de matéria inhomogênea e anisotrópica [28]. Todo este cenário ocorreu em velocidade acima da luz e o raio comóvel do Universo se expandiu exponencialmente, como mostra a figura (3.1).

Outro modelo que também não foi consolidado, ficou conhecido como *new inflaton*, devido ao equilíbrio termodinâmico com outros campos de matéria não serem alcançados pelo *inflaton* em nenhum modelo efetivo, tornando-se as transições de fases cosmológicas inviáveis. No entanto, é ainda muito significativo nos modelos de inflação com uma lenta rolagem do *inflation*, pois é aqui que as estruturas de grandes escalas originadas das perturbações de densidade são geradas [29]

No mesmo período que A. Guth publicou sua teoria, V. Slukhanov e G. Chibisov mostraram que a origem microscópica de grandes estruturas do Universo poderia ser

explicada por meio da teoria quântica de perturbações do Universo primordial. Portanto, explicar a origem das estruturas do Universo não foi um problema que estimulou a ideia da inflação, pelo menos no início [30].

Esta ideia estimulou a produção de vários trabalhos, investigando a origem das estruturas de larga escala. O período inflacionário era de fundamental importância. Trabalhos desenvolvidos atualmente sobre inflação tem essa característica como ponto central para análise [31, 32, 33]

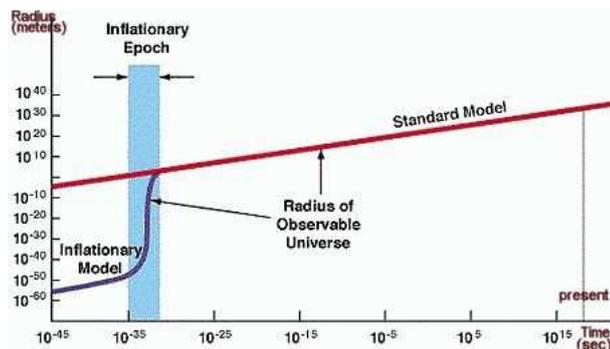


Figura 3.1: A hipótese inflacionária de Alan Guth diz que o espaço-tempo expandiu cerca de $t = 10^{35}s$ após o big bang em um mecanismo ainda não totalmente claro, chamado de inflação. O raio cósmico expandiu de um fator de 10^{-50} para um fator de 10^{40} em um curto espaço de tempo. (Fonte: Palestra de Andrei Lindle, 2005)

3.4 Teoria Inflacionária: a matéria não-comutativa para cenários cosmológicos

Com a desaceleração da expansão apresentada pelo Universo, surgem problemas no MPC. Mas, se aceitarmos que:

$$\ddot{a} > 0 \tag{3.30}$$

representa a passagem do Universo por uma fase acelerada, esta condição mostra que o raio de Hubble (aH^{-1}) decresce no período de inflação, pois $\dot{a}(= aH)$ aumenta durante a inflação. Nota-se que, da parte temporal da equação de Einstein $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-k}{6}(\rho + 3p)$ teremos a condição:

$$\rho + 3p < 0 \quad (3.31)$$

infringindo a condição de energia forte.

Essas duas condições citadas anteriormente, podem ser executadas naturalmente, desde que se considere que o Universo atinja uma fase em que a energia de vácuo seja dominante, com $\omega_r = -1$.

Pode-se ver que

$$H^2 \simeq \frac{k}{3}\rho\Lambda \simeq cte \quad (3.32)$$

em que o raio de Hubble nesse período apresenta distâncias constantes. A equação mostra em sua solução, o crescimento exponencial do fator de escala no tempo:

$$a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (3.33)$$

3.5 Teoria inflacionária por matéria não-comutativa

Nesta seção, iremos estudar um dos possíveis cenários inflacionários para o Universo. Para tal, veremos um Universo Primordial formado por um gás não-comutativo, seguindo a seção inicial deste capítulo. Para este estudo, os cenários inflacionários devem possuir algumas características e exigências especiais. Uma das primeiras exigências é ver se o gás pode obedecer ao regime $-1 \leq \omega < -\frac{1}{3}$.

Consideramos um universo preenchido com um gás não-comutativo diluído a uma alta temperatura descrita pelas quantidades $\omega(\sigma, \theta, \beta)$ visto na equação (3.29), sendo rotulados por três parâmetros, i.e. σ , θ e β que podem ser fixos ou variáveis. Para que a inflação ocorra, é necessário que $\omega < -\frac{1}{3}$. Iremos impôr a condição $-1 \leq \omega$ descartando a possibilidade de cosmologias tipo *Phanton*[34] por causa de sua não-unitariedade.

3.5.1 Os parâmetros σ , θ e β

Vamos agora descrever e analisar os parâmetros σ , θ e β . Inicialmente, o parâmetro θ está relacionado a um gás não-comutativo de forma diretamente proporcional. Neste caso, queremos dizer que, quanto maior for a nossa estimativa para esse parâmetro, maior

também será a intensidade da não-comutatividade. Já o parâmetro σ está associado ao alcance da não-comutatividade.

Por fim, o parâmetro β , está relacionado ao inverso da temperatura de um gás não-comutativo. Com base nestas informações, analisaremos a seguir alguns cenários inflacionários.

3.5.2 Cenário Inflacionário com θ fixo

Agora, estudaremos o parâmetro de não-comutatividade fixo, em pequenas distâncias físicas. Através disso, analisaremos os possíveis cenários inflacionários decorrentes de β e σ . Com essas informações em mãos, poderemos obter a era da radiação clássica com $\sigma \rightarrow \infty$.

Para esses casos, foram investigados dois possíveis cenários; primeiro o caso de β constante e no segundo caso, β variando através de uma expansão adiabática.

Temperatura constante

Primeiramente, assumiremos β fixo, tal que:

$$\sigma \approx \frac{1}{\rho^{\frac{1}{6}}} \quad (3.34)$$

e, em seguida, veremos a equação (3.25)

Daqui, a densidade de energia ρ apresentará valores muito altos nos primórdios do Universo devido ao alcance de σ ser muito pequeno [17]. As condições a um campo não-comutativo apresentará uma grande influência a comutatividade. Observamos também que à medida que o Universo se expande, a densidade de energia ρ diminuirá, onde ocorrerá passagens do gás para o estado denominado de radiação $\omega(\sigma, \theta, \beta) = \frac{1}{3}$. Após isso, o gás entrará em um processo ficando em um regime acelerado, podendo ser visto na curva mais baixa delimitada pela região sombreada apresentada na figura (3.2) .

Depois disso, o gás alcançará o processo de radiação novamente para o caso de σ ser suficientemente grande, observar a equação (3.29).

Seria esse o acontecimento esperado que ocorreria em um modelo inflacionário qualquer. Porém, há um diferencial indispensável no contexto acima: é o caso da temperatura ($\frac{1}{\beta}$) e σ se encontrarem fixos.

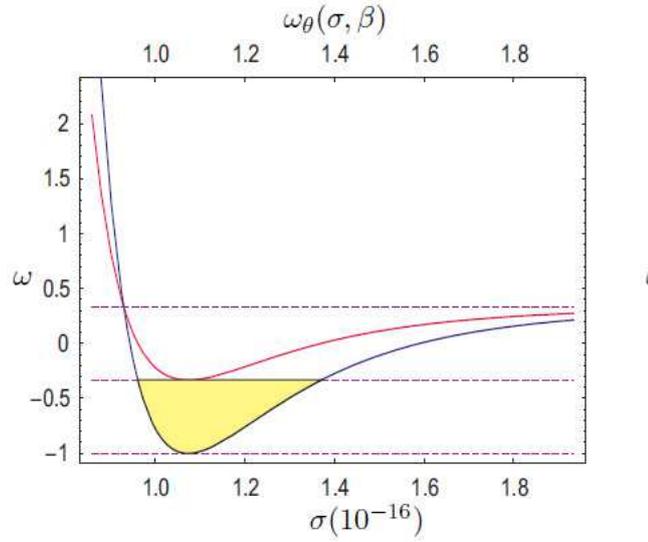


Figura 3.2: As linhas horizontais coloridas são $\omega = -1, -1/3, 1/3$. $\theta = 2, 2 \cdot 10^{-14}$, e são escolhidos valores localizando o mínimo nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores do gráfico descrevem $\beta = \frac{3^{1/4}}{64\sqrt{2\pi}} = 10^{-16}$, já as linhas superiores graficadas representam $\beta = \frac{3^{1/4}\theta}{64 \cdot 2^{3/4}\pi\sigma} = 0.8 \cdot 10^{-16}$. (Fonte: BAROSI, 2008)

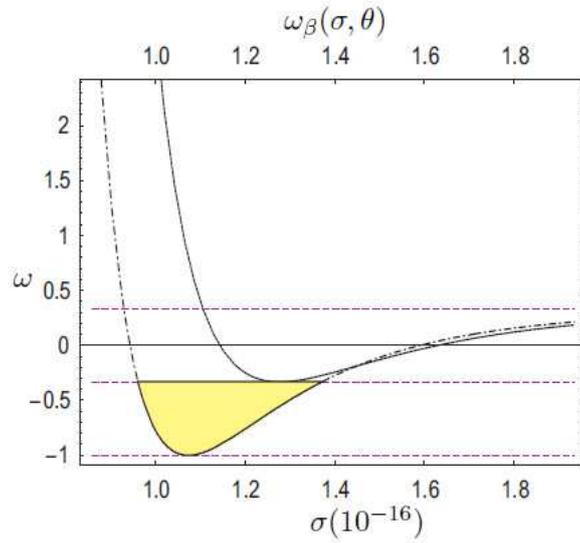


Figura 3.3: As linhas horizontais coloridas são $\beta = 10^{-16}$, e são escolhidos valores para θ a fim de localizar o mínimo para ω nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores do gráfico descrevem $\theta = \frac{64\sqrt{2\pi}}{3^{1/4}} = 2, 2 \cdot 10^{-14}$, já as linhas superiores do gráfico representam $\beta = \frac{64 \cdot 2^{3/4}\pi}{3^{1/4}\theta} = 1, 1 \cdot 10^{-16}$. O mínimo encontrado é para $\sigma_c = \frac{\theta}{32\pi}$. (Fonte: BAROSI, 2008)

Esse contexto não demonstra mudanças na temperatura provenientes das mudanças de fase do Universo inflacionário, mas, é característica de uma inflação considerada morna, como podemos ver nas referências [35] e [36] onde os pontos críticos (i.e., $\omega = -1$), $\theta_c = 64\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\theta$ na equação (3.29) assumem o mínimo em:

$$\omega_{min}(\sigma, \beta) = \frac{1}{3} - \frac{64\beta^4}{27\sigma^4} \quad (3.35)$$

Demais cenários podem ser encontrados na referência [17].

Capítulo 4

Considerações Finais

Atualmente, diversos trabalhos investigam cenários e modelos cosmológicos decorrentes de problemas da cosmologia que interligam a invariância de Lorentz com a Teoria Quântica de Campos e que remetem ao estudo de campos não-comutativos. Um destes problemas parte das inomogeneidades da radiação cósmica de fundo, que podem ter sido causadas por flutuações ocorridas no gás da inflação cósmica.

Esta dissertação objetivou-se em realizar uma introdução sobre cosmologia não-comutativa, apresentando alguns cenários do universo primordial, mais especificamente em $t \sim 10^{-37}s$, na era da inflação cosmológica, através do estudo de campos quânticos não-comutativos que geram tais cenários.

Cenários de não-comutatividade ocorrem apenas na escala de Planck, em um regime de altas temperaturas (que são características presentes no espaço-tempo na era da inflação cósmica), e que requerem uma modificação nas equações termodinâmicas e o estudo da teoria quântica de campos não comutativa.

O gás não-comutativo de altas temperaturas do fluido do Universo nesta época foi investigado em [17] através da análise de possíveis comportamentos dos parâmetros de não comutatividade θ , β e σ no estudo da termodinâmica não-comutativa para este gás. Limites das altas temperaturas também foram estudados e foram encontradas na equação de estado $p/\rho = \omega(\sigma, \theta, \beta)$ relações entre não-comutatividade, pressão p e densidade ρ .

O intervalo de parâmetro $-1 \leq \omega < -1/3$, corresponde a uma expansão acelerada de um universo preenchido por um gás não-comutativo, o que corresponde, por sua vez, ao cenário inflacionário.

Fixando o parâmetro θ , observou-se que σ tornou-se muito pequeno, e o gás passou

para um estado dominado pela radiação, e, em seguida, σ aumenta novamente, tornando a comutatividade desprezível.

Estes resultados mostram, portanto, que a formulação da não-comutatividade torna-se um arcabouço teórico relevante e adequada para investigar estágios iniciais do Universo primordial. Ademais, todos estes resultados nos mostram valores referentes à não-comutatividade. Assim, como observamos o comportamento dos parâmetros de acordo com as situações investigadas anteriormente. Esta dissertação representou uma metodologia que servirá de inspiração para a continuação de novos estudos e análises, a qual pretendo executar.

Referências Bibliográficas

- [1] LIDDLE, A. R. **An Introduction To Modern Cosmology**. Ed. John Wiley. 2003.
- [2] CERVANTES-COTA, J. L., SMOOT, G. **Cosmology today - a brief review**. AIP Conference Proceedings vol. 1396, p 28. 2011.
- [3] FRIEDMANN, A. **Über die Krümmung des Raumes**, Zeitschrift für Physik A, 10 (1): 377-386, 1922.
- [4] FRIEDMANN, A. **Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes**, Zeitschrift für Physik A, 21 (1): 326-332, 1924.
- [5] HUBBLE, E. P., **A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae**. Proceedings of the National Academy, 1929, p. 168-173.
- [6] HAUSER, M. G. et al **The COBE Diffuse Infrared Background Experiment Search for the Cosmic Infrared Background. I. Limits and Detections**. The Astrophysical Journal, v. 508, p. 25-43, nov. 1998.
- [7] ALPHER, R. A., HERMAN, R., GAMOW, G. A., **Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe**. Physical Review, 1948, vol. 74, p. 1198.
- [8] BRANDERNBERGER, R. H. **Formation of Structure in the Universe**. ed. M. Novello. Set. 1995.
- [9] GUTH, A. H. **The Inflationary Universe: The Quest for a New Theory of Cosmic Origins**. Basic Books. pp. 233-234, 1979
- [10] PEEBLES, P. J. E. **Recombination of the Primeval Plasma**. Astrophysical Journal, vol. 153, p.1, Jul. 1968.

- [11] PENZIAS, A. A., WILSON, R. W., **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s** . The Astrophysical Journal, v.142, 1965.
- [12] LINEWEAVER, C., TAMARA, M. D. **Misconceptions about the Big Bang**. Scientific American, 2005.
- [13] BARBARA, L. **Introduction to Cosmology**, rqn. 6.33, 6.41, 2006.
- [14] DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. **Noncommutative field theory**, Reviews of Modern Physics, v. 73, n. 4, p. 977, 2001.
- [15] BRITO, Francisco A.; LIMA, Elisama EM. **Exploring the thermodynamics of noncommutative scalar fields**, International Journal of Modern Physics A, v. 31, n. 11, p. 1650057, 2016.
- [16] TSUJIKAWA, S.; MAARTENS, R.; BRANDENBERGER, R. **Non-commutative inflation and the CMB**, Physics Letters B, v. 574, n. 3-4, p. 141-148, 2003.
- [17] BAROSI, L., BRITO, F. A., QUEIROZ, A. R.; **Noncommutative field gas driven inflation**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2008, 2008.
- [18] CARMONA, J. M. et al. **Noncommutativity in field space and Lorentz invariance violation**. Physics Letters B, v. 565, p. 222-228, 2003.
- [19] CARMONA, J. M. et al. **Quantum theory of noncommutative fields**. Journal of High Energy Physics, v. 2003, n. 03, p. 058, 2003.
- [20] BALACHANDRAN, A. P. et al. **Quantum fields with noncommutative target spaces**. Physical Review D, v. 77, n. 10, p. 105032, 2008.
- [21] BALACHANDRAN, A. P.; PINZUL, A.; QUEIROZ, A. R. **Twisted Poincaré invariance, noncommutative gauge theories and UV-IR mixing**. Physics Letters B, v. 668, n. 3, p. 241-245, 2008.
- [22] SNYDER, Hartland S. **Quantized space-time**. Physical Review, v. 71, n. 1, p. 38, 1947.
- [23] GROSSE, H. **On the construction of Möller operators for the nonlinear Schrödinger equation**. Physics Letters B, v. 86, n. 3-4, p. 267-271, 1979.

- [24] ZAMOŁODCHIKOV, Alexander B.; ZAMOŁODCHIKOV, Alexey B. **Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models.** In: Yang-Baxter Equation In Integrable Systems. 1990. p. 82-120.
- [25] FADDEEV, L. D. **Quantum completely integrable models in field theory.** Sov. Sci. Rev. C 1 (1980) 107-155.
- [26] BARCELOS, Neto; J.; **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana.** 1ª edição; Editora Livraria da Física.
- [27] GUTH, A. H. **Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems.** Physical Review D, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- [28] HAWKING, S. W. SW Hawking, MOSS, I.G., STEWART J.M., Phys. Rev. v. 261. (1982)
- [29] LINDE, A. D. AD Linde, Lect. Notes Phys. 738, 1 (2008). **Lect. Notes Phys.**, v. 738, p. 1, 2008.
- [30] MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. V. **Quantum fluctuations and a nonsingular universe.** JETP Lett., v. 33, p. 532-535, 1981.
- [31] HAWKING, S. W. **Phys Lett B 115: 295. Starobinsky AA (1982)** Phys Lett B, v. 117, p. 175, 1982
- [32] STAROBINSKY, A. A. **Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations.** Phys. Lett. B, v. 117, p. 175, 1982
- [33] BARDEEN, J. M.; STEMHARDT, P. J.; TURNER, M. S. **Phys Rev D28 (1983) 679, R Brandenberger, R Kahn and WH Press.** Phys Rev D, v. 28, p. 1809, 1983.
- [34] CAPOZZIELLO, S.; NOJIRI, S.i; ODINTSOV, S. D. **Unified phantom cosmology: Inflation, dark energy and dark matter under the same standard.** Physics Letters B, v. 632, n. 5-6, p. 597-604, 2006.
- [35] BERERA, A. **Warm inflation.** Physical Review Letters, v. 75, n. 18, p. 3218, 1995.
- [36] BERERA, A. **The warm inflationary universe.** Contemporary Physics, v. 47, n. 1, p. 33-49, 2006.