UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Partículas Vetoriais Massivas com Carga em Teoria de Campos

Celson Augusto Izidorio Agripino

CAMPINA GRANDE

- Novembro de 2011 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Partículas Vetoriais Massivas com Carga em Teoria de Campos

Celson Augusto Izidorio Agripino

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Novembro 2011 -

A279p Agripino, Celson Augusto Izidorio.
Partículas vetoriais massivas com carga em teoria de campos / Celson Augusto Izidorio Agripino. – Campina Grande, 2011.
41 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.
"Orientação: Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva”.
Referências.

1. Física de Partículas. 2. Teoria de Campos. 3. Partículas Vetoriais. I. Silva, Rômulo Rodrigues da. II. Título.

CDU 539.12(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

CELSON AUGUSTO IZIDORIO AGRIPINO

O ESTUDO DE PARTÍCULAS VETORIAIS MASSIVAS COM CARGA EM TEORIA DE CAMPOS

Dissertação aprovada em 24/11/2011

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Rodrigues da Silva

(Presidente)
Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Unidade Acadêmica de Física – UFCG

Marcos Antonio Anacleto

(Membro interno)
Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG

(Membro externo)
Prof^{a}. Dr^{a}. Morgana Lígia de Farias Freire
Departamento de Física - UEPB

“O Universo está cheio de coisas mágicas, pacientemente aguardando que nossa inteligência fique mais aguçada.”

Eden Phillpots

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Rômulo Rodrigues da Silva, pela sua orientação e competência na condução deste trabalho.

- Aos professores da Unidade Acadêmica de Física, em particular, aos Prof. Francisco de Assis de Brito e Fabio Leal de Melo Dahia pelo seu constante incentivo e pela sua dedicação ao curso.

- Aos meus familiares pelo irrestrito apoio, paciência e incentivo.

- Ao brilhante grupo de HÁDRONS: Fernando José de Almeida Gama e Emanuel Cunha, pelas frutíferas discussões e resultados alcançados.

- Aos colegas da Pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a nossa permanência no curso.

- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a quantização do campo vetorial massivo, em especial os mésons vetoriais D_s^{*+} e D_s^{*-}, interagindo através da troca dos mésons ϕ, η e σ, usando a teoria relativística de campo médio. Foram obtidos as regras de quantização dessa teoria, o operador de número e finalmente foi obtido o operador hamiltoniano. Este último apresenta um espectro não-relativístico de energia negativa. A mudança no espectro de energia negativa para energia positiva foi realizada via troca no sinal da lagrangiana, por outro lado, a obtenção do espectro não-relativístico continua sendo um resultado surpreendente.

ABSTRACT

In this work we study the quantization of massive vector meson's field D_s^{*+} and D_s^{*-} interacting through the mesons exchange ϕ, η and σ, using the relativistic mean field theory. We obtained the rules of quantization of this theory, the number operator and the Hamiltonian operator. This one shows a non-relativistic spectrum with negative values. For fix of this problem of the energy gives negative values, we change the signal of the Lagrangian, on the other hand, the non-relativistic spectrum remains a surprising result.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

As interações fundamentais da física, são formuladas em termos da teoria quântica de campos, que é uma teoria que une a Relatividade e a Mecânica Quântica em uma única teoria. Infelizmente das quatro interações fundamentais, a gravitação é a única interação que até o momento não foi quantizada. A Teoria Quântica de Campos tem se mantido ao longo dos anos como uma das ferramentas mais importantes na compreensão do mundo microscópico. Os últimos anos têm visto um florescimento de desenvolvimentos e aplicações que vão muito além do escopo original [1].

Entendemos por campo uma função definida em todos os pontos do espaço. Por ser definido sobre um conjunto contínuo de pontos, um único campo incorpora um número infinito de graus de liberdade. A proposta da Teoria Quântica de Campos é quantizar esses objetos matemáticos, assim como a Mecânica Quântica trata de quantizar as grandezas físicas relacionadas ao movimento de um número finito de partículas. A forma de fazer isso é escrever os observáveis em termos de operadores que aumentam ou diminuem o número de certas quantidades discretas no sistema, conhecidos como quanta de excitação. Tais quantidades são identificadas como partículas elementares cujas propriedades (como massa, carga elétrica e spin) se refletem nas propriedades do campo. Como toda a informação sobre o número e estado das partículas pode ser resumida na descrição do estado do campo, o formalismo da Teoria de Campos é ideal para tratar sistemas de muitas partículas e une a teoria da Relatividade com a Mecânica Quântica, possibilitando o estudo de vários processos, como a criação e aniquilação de partículas.

Outra aplicação da quantização de um campo é a obtenção do espectro de energia e da obtenção de observáveis termodinâmicos desse sistema, através de uma formulação mais fundamental. Até o momento, já foram realizados vários tipos de quantização, como a do campo de Schrödinger, campo de Klein-Gordon, campo de Maxwell e para os campos das interações forte e fraca [2]. A quantização do campo gravitacional ainda permanece um problema em aberto [3]. A quantização do campo vetorial com massa é apresentado em vários livros de teoria de campos, como: Itzykson e Zunber [4], Greiner e Reinhardt [5], Gomes [6], porém não foi explorado pelos autores Gomes, Itzykson e Zunber, a obtenção da hamiltoniana da teoria, que é um dos operadores mais importante da teoria de campos, pois define as propriedades das partículas geradas pelo vácuo. Por outro lado, Greiner e Reinhardt [5] chegam a obter este resultado, mas a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação não possui um fator de energia que está presente nos outros cálculos e além disso eles não calcularam o Operador de Número. Deste modo, ainda não há na literatura um processo de quantização do campo vetorial com massa que tenha obtido simultaneamente o operador de número e o operador hamiltoniano.

Campos vetoriais com massa possuem um papel muito importante na descrição moderna das interações fracas através dos bósons de gauge W^+, W^- e Z^0. O caráter massivo desses bósons está diretamente relacionado ao curto alcance da interação fraca [6]. Atualmente, os mésons vetoriais massivos estão no centro da discursão sobre a existência de estados moleculares hadrônicos, em que se propõe que dois mésons vetoriais podem interagir. Em especial a partícula Y(4140) gerada no decaimento $B^+ \longrightarrow J/\psi\phi K^+$, que pode ser interpretada como um estado ligado dos mésons vetoriais D_s^{*+} e D_s^{*-}. Uma outra aplicação recente para o uso de mésons vetoriais vem da teoria que propõem que a matéria escura seja um sistema de campo vetorial com massa [7].

Neste trabalho usamos a Teoria Relativística de Campo Médio, desenvolvida inicialmente em 1974 por Dirk Walecka, com o objetivo de estudar a matéria nuclear, em que a interação dos nucleons foi tratada via troca dos mésons sigma e ômega.

Nosso objetivo consiste em estudar a regra de quantização do campo vetorial massivo, em especial a matéria de mésons $D_s^{*+}\bar{D}_s^{*-}$ em uma abordagem de troca de mésons σ, η e ϕ, usando a Teoria Relativística de Campo Médio, obtendo assim a quantização para o campo vetorial D_s^* submetido a um campo interagente, onde extraímos as devidas regras de quantização, o Operador de Número e o Operador Hamiltoninano do sistema.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2, apresentamos uma breve descrição da matéria escura e um breve estudo sobre a Y(4140). No Capítulo 3, apresentamos o formalismo teórico para a matéria de mésons $D_s^{*+} - \bar{D}_s^{*-}$. No Capítulo 4, apresentamos os resultados e discussões sobre o nosso sistema, e no último Capítulo, apresentamos a conclusão do trabalho.

Capítulo 2

Matéria Escura e a Partícula Y(4140)

2.1 Matéria Escura

De acordo com o modelo cosmológico [8] cerca de 30% da densidade de energia em nosso universo é composto de matéria e os outros 70% é composto de energia escura. Destes 30% de matéria, apenas 5% são compostas de matéria ordinária, que é constituída de partículas oriundas do Modelo Padrão (Ver Figura 2.1), a exemplo dos elétrons, bósons de Gauge, fótons e dos hádrons. Os hádrons são partículas constituídas a base de quarks e são divididas em dois tipos: bárions e mésons. Os bárions mais conhecidos são os prótons e nêutrons, que são os principais constituintes dos átomos, por outro lado, os mésons funcionam como espécie de "cola" para manter prótons e nêutrons confinados no núcleo atômico. O Modelo Padrão é a teoria que descreve os blocos constituintes fundamentais da natureza através das partículas elementares e das interações fundamentais. Neste modelo as partículas de matéria são divididas em três grupos, denominados famílias ou gerações de partículas.

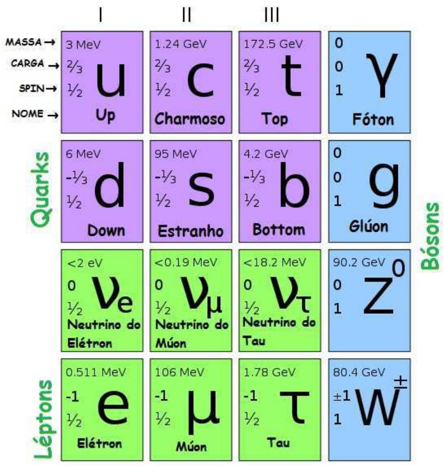

Figura 2.1: Modelo Padrão da física de partículas.

Os outros 25% da densidade de energia deve ser na forma de matéria não bariônica, conhecida simplesmente como Matéria Escura. A Matéria Escura foi proposta para explicar alguns fenômenos gravitacionais, a exemplo das velocidades de rotação das galáxias espirais que são excessivas: não há matéria visível no interior da órbita das estrelas capaz de mantê-las em órbita tão veloz, a exceto se houvesse alguma matéria extra as estrelas escapariam e a galáxia se desintegraria. As observações indicam a existência de uma densidade uniforme de massa ao largo de toda a galáxia, até as extremidades dos seus braços: A Matéria Escura. A matéria escura não interage significativamente com a radiação, isto significa que esta deve ser eletricamente neutra. Estudos detalhados sobre a dinâmica de aglomerados de galáxias indicam que as partículas de matéria escura também é fria, no sentido de que suas velocidades são altamente não-relativista [9]. Atualmente, existem duas candidatas para a matéria escura: os áxions e partículas massivas interagindo fracamente (WIMP - Weakly Interacting Massive Particles) [7]. Os áxions, são partículas leves e com spin nulo, que são tornadas geradas pela quebra espontânea de simetria que apareceu pela primeira vez em um modelo que foi proposto para explicar por que efeitos não perturbativos da interação forte não violam invariância CP (Carga e Paridade). As WIMPs são um tipo especulado de partículas que não sentem a força eletromagnética nem a força nuclear forte. Porém, sentem a força nuclear fraca e também a força gravitacional, que pela teoria da relatividade atua sobre qualquer partícula massiva.

2.2 A Partícula Y(4140)

Os cientistas do experimento CDF (Collider Detector at Fermilab - Detector de colisões do Fermilab) do departamento de energia do "Fermi National Accelerator Laboratory", anunciaram em março de 2009 terem encontrado evidências de uma partícula inesperada cujas curiosas características podem revelar novas formas de como os quarks se combinam para formar a matéria. Usando exclusivamente o decaimento $B^+ \to J/\psi\ \phi\ K^+$, a CDF Collaboration observou uma estrutura estreita com massa próxima do $J/\psi\ \phi$ [10, 11, 12]. Esta partícula foi chamada de Y(4140), refletindo a sua massa medida de 4140 MeV.

A partícula Y(4140) parece desrespeitar as regras do CQM e só pode ser entendida como uma estrutura $c\bar{c}s\bar{s}$, ou seja, um tetraquark. Outras interpretações, como já vimos na introdução, são: um exótico charmonium híbrido ou um estado molecular $D_s^{*+}D_s^{*-}$. Não está claro exatamente de que a partícula Y(4140) é feita. A Figura 2.2 mostra a produção da Y(4140).

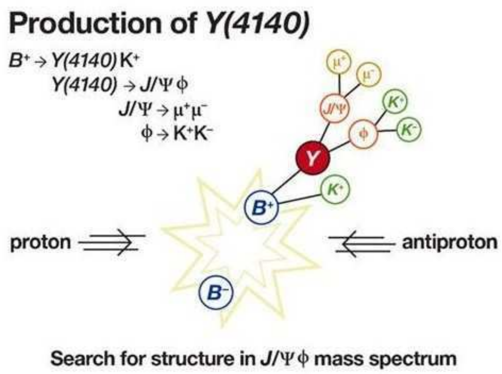

Figura 2.2: Produção da Y(4140) [10]

A partícula Y(4140) é o mais novo membro de uma família de partículas de semelhantes características incomuns observadas nos últimos anos por pesquisadores no Tevatron do Fermilab, bem como no laboratório KEK (High Energy Accelerator Research Organization - Organização de Pesquisas com Acelerador de Altas Energias), do Japão e no DOE SLAC National Accelerator Laboratory, da Califórnia[10].

A Figura (2.3) mostra a distribuição do ajuste da massa invariante de $J/\psi\ \phi$ [10, 12]. A massa invariante da Y 4140 (M_Y) é obtida de acordo com a equação:

$$M_Y = \Delta M + M_{J/\psi}.$$

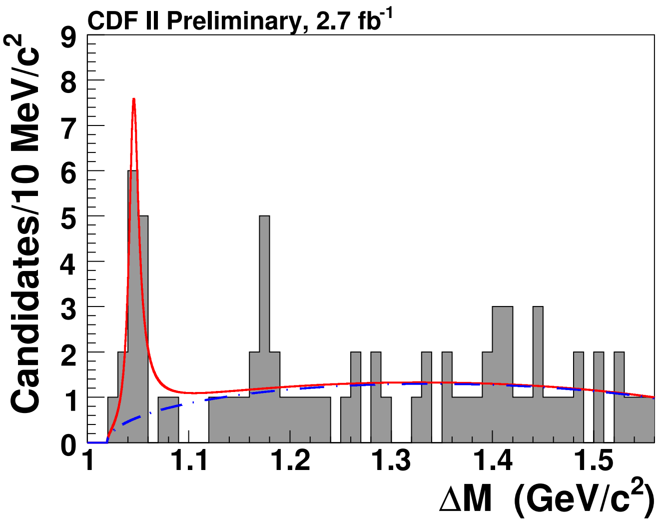

Figura 2.3: Distribuição do ajuste da massa invariante de $J/\psi\ \phi$ [12].

Capítulo 3

Formalismo Teórico

3.1 O Modelo $D_s^{*+}D_s^{*-}$

A densidade lagrangeana para o sistema $D_s^{*+}D_s^{*-}$, interagindo com o méson escalar σ, o méson pseudo-escalar η e o méson vetorial ϕ, foi originalmente prosposta por X.Liu [11]. Neste trabalho consideramos a densidade lagrangeana $\mathcal{L} \longrightarrow -\mathcal{L}$ com o objetivo de tornar a energia das partículas de spin $j_z = \pm 1$ positivas, escrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}F^{+}_{\mu\nu}F^{\mu\nu -} - m_D^2 D_\mu D^{\dagger\mu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi_\mu\phi^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) \\
& + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) + \frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2 - g_{_{DD\sigma}}(\sigma D^{\dagger\mu}D_\mu) \\
& - i g_{_{DD\phi}}[(\partial_\mu D^{\nu\dagger})D_\nu - D^{\nu\dagger}(\partial_\mu D_\nu)]\phi^\mu - 4 i f_{_{DD\phi}} D^{\nu\dagger}D^\mu(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu) \\
& + g_{_{DD\eta}}\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\eta\left[(D^{\mu\dagger}\partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu\dagger})D^\beta)\right]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

onde usamos a notação $D_s^{*-} = D$ e $D_s^{*+} = D^\dagger$.

As equações de movimento para os campos gerados pela lagrangeana da Equação (3.1), são:

$$\partial_\mu(\partial^\mu\sigma) + {m_\sigma}^2\sigma = g_{_{DD\sigma}}D^\mu D^\dagger_\mu, \tag{3.2}$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\eta + m_\eta^2\eta = g_{_{DD\eta}}\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu[(D^{\mu\dagger}\partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu\dagger})D^\beta)], \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu - m_\phi^2 \phi^\nu &= 4if_{_{DD\phi}} \partial_\mu (D^{\nu\dagger} D^\mu - D^{\mu\dagger} D^\nu) \\
&\quad -ig_{_{DD\phi}} [(\partial^\nu D^{\mu\dagger}) D_\mu - D^{\mu\dagger} (\partial^\nu D_\mu)],
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu D^\nu + m_D^2 D^\nu &= 2ig_{_{DD\phi}} (\partial_\mu D^\nu) \phi^\mu - g_{_{DD\sigma}} (\sigma D^\nu) \\
&\quad -4if_{_{DD\phi}} D^\mu (\partial_\mu \Phi^\nu - \partial^\nu \phi_\mu) + 2\frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} [\partial^\rho \eta (\partial^\alpha D^\beta)].
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Para a obtenção das Eqs.(3.4) e (3.5) aplicamos o gauge de Lorentz $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ e $\partial_\mu D^\mu = 0$. A Equação (3.5) pode ser reescrita em termos de uma derivada covariante através da transformação:

$$
\partial_\mu^{'} = \partial_\mu - ig_{_{DD\phi}} \phi_\mu, \tag{3.6}
$$

resultando em uma equação do tipo Klein -Gordon livre, escrita como

$$
\partial_\mu^{\prime} \partial^{\prime\mu} D^\nu + m_{ef}^2 D^\nu = 0, \tag{3.7}
$$

onde

$$
m_{ef}^2 = m_{_D}^2 + g_{_{DD\phi}}^2 \phi_\mu \phi^\mu + g_{_{DD\sigma}} \sigma. \tag{3.8}
$$

Para resolvermos as Equações (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), devemos utilizar a aproximação relativística de campo médio [13], que considera as flutuações quânticas dos campos dos mésons desprezíveis. Assim, considerando que os campos médios são estáticos, uniformes e desconsiderando efeitos hidrodinâmicos, $\left\langle \vec{\Phi} \right\rangle = 0$, podemos substituir os operadores de campos por seus valores médios, tal que temos

$$
\begin{gathered}
\sigma \to \langle \sigma \rangle \\
\Phi^0 \to \langle \phi^0 \rangle \\
\eta \to \langle \eta \rangle
\end{gathered}
$$

Desse modo, as equações de movimento (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), passam a ser escritas como

$$
\langle \sigma \rangle = \frac{g_{_{DD\sigma}} \left\langle D^\mu D_\mu^\dagger \right\rangle}{m_\sigma^2}, \tag{3.9}
$$

$$\langle\eta\rangle = \frac{g_{_{DD\eta}}\left\langle\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial^{\nu}(D^{\dagger\mu}\partial^{\alpha}D^{\beta} - (\partial^{\alpha}D^{\dagger\mu})D^{\beta})]\right\rangle}{\sqrt{6}m_{\eta}^{2}} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}\left\langle\phi^{0}\right\rangle = & \frac{-4if_{_{DD\phi}}\left\langle[(\partial_{\mu}(D^{0\dagger})D^{\mu} - (D^{\mu\dagger}D^{0}))]\right\rangle}{m_{\phi}^{2}} \\ & + \frac{g_{_{DD\Phi}}\left\langle i[(\partial^{0}D^{\dagger\mu})D_{\mu} - D^{\dagger\mu}(\partial^{0}D_{\mu})]\right\rangle}{m_{\phi}^{2}};\end{aligned} \tag{3.11}$$

e finalmente para Eq.(3.5),

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}D^{\nu} - 2ig_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^{0}\right\rangle(\partial_{0}D^{\nu}) + [m_{_D}^{2} + g_{_{DD\sigma}}\langle\sigma\rangle]D^{\nu} = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Para resolvermos a equação de movimento Eq.(3.12), consideramos como solução de teste, a solução de onda plana

$$D^{\nu}(x) = \in^{\nu}(k,\lambda)a_{_{\vec{k},E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-Et)}. \tag{3.13}$$

Substituindo a Eq.(3.13) na Eq.(3.12), temos

$$E_{\pm}(\vec{k}) = -g_{_{DD\phi}}\langle\phi\rangle \pm q^{o}(\vec{k}), \tag{3.14}$$

onde

$$q^{o}(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^{2} + m_{ef}^{2}}, \tag{3.15}$$

sendo que m_{ef}^{2} está definida na Eq.(3.8).

É interessante observar que se $\langle\phi^{0}\rangle = 0$, $\langle\sigma\rangle = 0$ e $\langle\eta\rangle = 0$, obtemos os autoestados de partículas livres relativísticas [3, 6].

Para o campo do méson D^{ν} as soluções encontradas podem ser escritas em termos da superposição dos estados de partículas e antipartículas normalizadas, na seguinte forma:

$$D^{\nu}(\vec{x},t) = e^{ig_{DD\phi}\langle\phi\rangle t}\int\frac{d^{3}\vec{k}}{2q^{o}(\vec{k})}\sum_{\beta=1}^{3}\epsilon^{\nu}(k,\beta)\left[a_{\beta}(\vec{k})f_{k}(x) + b_{\beta}{}^{\dagger}(\vec{k})f_{k}^{*}(x)\right], \tag{3.16}$$

onde $f_{k}(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}$ onde: $kx = q^{o}(\vec{k})x^{0} - \vec{k}\cdot\vec{x}$.

Os vetores de polarização são introduzidos para garantir a condição do gauge de Lorentz, ou seja,

$$\partial_\nu D^\nu = 0. \tag{3.17}$$

Portanto, devemos ter como solução geral

$$\sum_{\beta=1}^{3} \in^\nu (k,\beta) k_\nu = 0, \tag{3.18}$$

onde os vetores de polarização obedecem a álgebra contida no Apêndice A.

A quantização do sistema [14] é obtida com as regras de comutação canônica (ver Apêndice B), fornecendo

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), {b_{\beta'}}^\dagger(-\vec{k}')\right] = 2(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle - q^0(\vec{k}))\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{3.19}$$

$$\left[a_\beta(\vec{k}), {a_{\beta'}}^\dagger(\vec{k'})\right] = 2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q^0(\vec{k})\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{3.20}$$

$$\left[a_\beta^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')\right] = -2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle e^{-2iq_0X_0}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{3.21}$$

e

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = 2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle e^{2iq_0X_0}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \tag{3.22}$$

As Equações (3.21) e (3.22) apresentam um grande problema para a construção do vácuo da teoria, que é tradicionalmente definido em teoria de campos na forma:

$$a_{(\vec{k})} \left|0\right\rangle = b_{(\vec{k})} \left|0\right\rangle = \left|ZERO\right\rangle. \tag{3.23}$$

Seguindo a definição de vácuo dada na eq.(3.23), é fácil mostrar que os comutadores dados nas eqs.(3.21) e (3.22) devem obedecer a seguinte relação:

$$\left\langle 0\right| \left[{a_\beta}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')\right] \left|0\right\rangle = 0 \tag{3.24}$$

$$\left\langle 0\right| \left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] \left|0\right\rangle = 0 \tag{3.25}$$

Assim, podemos verificar que a única possibilidade das equações (3.24) e (3.25) serem satisfeitas devemos ter

$$\left\langle \phi^0 \right\rangle = 0 \tag{3.26}$$

3.2 O Operador Número de partículas

O Operador Número de Partículas N, é um dos operadores mais importantes da teoria de campos, definido por:

$$N^{\nu} = \int d^3x J_0^{\nu}(\vec{x}), \tag{3.27}$$

onde

$$J_0^{\nu}(x) = -i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu})}D^{\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu\dagger})}D^{\nu\dagger}\right] \tag{3.28}$$

que é chamada de densidade vetorial de partículas.

Usando a Equação (3.16) e as regras de quantização, o operador N pode ser escrito em termos dos operadores a_{λ} e $b_{\lambda'}$ (Ver Apêndice C):

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2q_0(\vec{p})}\left[a_1^{\dagger}(\vec{p})a_1(\vec{p}) - b_1(\vec{p})b_1^{\dagger}(\vec{p})\right] + \int \frac{d^3\vec{p}}{2q_0(\vec{p})}\left[a_2^{\dagger}(\vec{p})a_2(\vec{p}) - b_2(\vec{p})b_2^{\dagger}(\vec{p})\right] \\ &+ \int \frac{d^3\vec{p}}{2q_0(\vec{p})}\left[\frac{|\vec{p}|^2 + q_0^2}{m_{eff}^2}\right]\left[a_3^{\dagger}(\vec{p})a_3(\vec{p}) - b_3(\vec{p})b_3^{\dagger}(\vec{p})\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

O operador número possui as seguintes relações de comutação:

$$[a_{\lambda}(\vec{p}), N] = a_{\lambda}(\vec{p}), \tag{3.30}$$

$$\left[a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), N\right] = -a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), \tag{3.31}$$

$$[b_{\lambda}(\vec{p}), N] = -b_{\lambda}(\vec{p}) \tag{3.32}$$

e

$$\left[b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), N\right] = b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}) \tag{3.33}$$

com $\lambda = 1, 2$.

Sabendo que o estado de vácuo da teoria é definido como $a(\vec{k})\,|0\rangle = b(\vec{k})\,|0\rangle = |ZERO\rangle$, podemos estabelecer a regra para criar um méson vetorial D_s^* e $D_s^{*\dagger}$ como:

$$a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k})\,|0\rangle = \left|D_s^*(\lambda, \vec{k})\right\rangle, \tag{3.34}$$

e

$$b^{\dagger}_{\lambda}(\vec{k})\left|0\right\rangle = \left|D^{*\dagger}_{s}(\lambda,\vec{k})\right\rangle. \tag{3.35}$$

As relações de comutação acima indicam que os operadores $a^{\dagger}_{\lambda}(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p})$ e $b_{\lambda}(\vec{p})b^{\dagger}_{\lambda'}(\vec{p})$ estão associados ao número de partículas e antipartículas, respectivamente, no sistema físico. Assim,

$$N_{a^{\dagger}_{1}a_{1}}\left|D^{\dagger}(\lambda,\vec{k})\right\rangle = n_{1}\left|D^{\dagger}(\lambda,\vec{k})\right\rangle \tag{3.36}$$

$$N_{a^{\dagger}_{2}a_{2}}\left|D^{\dagger}(\lambda,\vec{k})\right\rangle = n_{2}\left|D^{\dagger}(\lambda,\vec{k})\right\rangle \tag{3.37}$$

$$N_{b^{\dagger}_{1}b_{1}}\left|D(\lambda,\vec{k})\right\rangle = m_{1}\left|D(\lambda,\vec{k})\right\rangle \tag{3.38}$$

$$N_{b^{\dagger}_{2}b_{2}}\left|D(\lambda,\vec{k})\right\rangle = m_{2}\left|D(\lambda,\vec{k})\right\rangle \tag{3.39}$$

com $n_1 = n_2 = +1$ para partículas e $m_1 = m_2 = -1$ para antipartículas.

3.3 O Operador Hamiltoniano

A densidade hamiltoniana para o caso em que os campos σ, η e ϕ são estáticos é expressa na forma:

$$\mathcal{H} = \Pi^{D}_{0}\partial^{0}D^{\nu} + \Pi^{D^{\dagger}}_{0}\partial^{0}D^{\nu\dagger} - \mathcal{L}, \tag{3.40}$$

onde os momentos canonicamente conjugados a D^{ν} e $D^{\nu\dagger}$ são :

$$\Pi^{D^{\nu}}(x) = -\partial^{0}D^{\nu\dagger} - ig_{_{DD\phi}}\left\langle\phi\right\rangle D^{\nu\dagger} \tag{3.41}$$

e

$$\Pi^{D^{\nu\dagger}}(x) = -\partial^{0}D^{\nu} + ig_{_{DD\phi}}\left\langle\phi\right\rangle D^{\nu}. \tag{3.42}$$

Com as Equações (3.41) e (3.42), podemos expressar o operador hamiltonianano na seguinte forma (Ver Apêndice D):

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^{3}\vec{p}}{4q^{2}_{0}(\vec{p})}p^{2}\left[a^{\dagger}_{1}(\vec{p})a_{1}(\vec{p}) + b_{1}(\vec{p})b^{\dagger}_{1}(\vec{p})\right] + \int \frac{d^{3}\vec{p}}{4q^{2}_{0}(\vec{p})}p^{2}\left[a^{\dagger}_{2}(\vec{p})a_{2}(\vec{p}) + b_{2}(\vec{p})b^{\dagger}_{2}(\vec{p})\right] \\ &+ \int d^{3}\vec{p}\left[\frac{3|\vec{p}|^{2}}{8m^{2}_{ef}} + \frac{q^{2}_{0}}{4m^{2}_{ef}} - \frac{(m^{2}_{D} + g_{_{DD\sigma}}\left\langle\sigma\right\rangle)}{4q^{2}_{0}}\right]\left[a^{\dagger}_{3}(\vec{p})a_{3}(\vec{p}) + b_{3}(\vec{p})b^{\dagger}_{3}(\vec{p})\right] \\ &+ \int d^{3}x\left(\frac{1}{2}m^{2}_{\sigma}\left\langle\sigma\right\rangle^{2} + \frac{1}{2}m^{2}_{\eta}\left\langle\eta\right\rangle\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Assim como fizemos com o operador número de partículas, considerando apenas a parte transversal ($\lambda = 1, 2$), o operador hamiltoniano possui as seguintes relações de comutação com os operadores a_λ e b_λ,

$$[a_\lambda, H] = \frac{p^2}{2q_0} a_\lambda(\vec{p}), \tag{3.44}$$

$$\left[a_\lambda^\dagger, H\right] = -\frac{p^2}{2q_0} a_\lambda^\dagger(\vec{p}), \tag{3.45}$$

$$[b_\lambda, H] = \frac{p^2}{2q_0} b_\lambda(\vec{p}) \tag{3.46}$$

e

$$\left[b_\lambda^\dagger, H\right] = -\frac{p^2}{2q_0} b_\lambda^\dagger(\vec{p}) \tag{3.47}$$

com $\lambda = 1, 2$.

As Equações (3.44) e (3.46) nos leva a existência do estado $|0\rangle$, que é um auto-estado de H com autovalor zero, e é chamado de estado de vácuo. Portanto deve satisfazer as equações:

$$a_\lambda(\vec{p}) |0\rangle = |ZERO\rangle \tag{3.48}$$

e

$$b_\lambda(\vec{p}) |0\rangle = |ZERO\rangle . \tag{3.49}$$

Consideremos agora as Equações (3.34) e (3.35), onde os estados $\left|D^\dagger(\lambda, \vec{k})\right\rangle$ e $\left|D(\lambda, \vec{k})\right\rangle$ são auto-estados de H, cujos respectivos autovalores são:

$$H |\vec{p}, \lambda\rangle = \frac{p^2}{2q_0(\vec{p})} |\vec{p}, \lambda\rangle \tag{3.50}$$

e

$$H \left|\vec{k}, \lambda\right\rangle = \frac{k^2}{2q_0(\vec{k})} \left|\vec{k}, \lambda\right\rangle \tag{3.51}$$

com $\lambda = 1, 2$. E para $\lambda = 3$, temos

$$H |\vec{p}, 3\rangle = -\left[\frac{3|\vec{p}^2|}{8m_{ef}^2} + \frac{q_0^2}{4m_{ef}^2} - \frac{(m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)}{4q_0^2}\right] |\vec{p}, 3\rangle \tag{3.52}$$

$$H\left|\vec{k},3\right\rangle = -\left[\frac{3|\vec{k}^2|}{8m_{ef}^2} + \frac{q_0^2}{4m_{ef}^2} - \frac{(m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)}{4q_0^2}\right]\left|\vec{k},3\right\rangle \tag{3.53}$$

As Equações (3.50) e (3.51) nos leva a interpretar $a_\lambda^\dagger$ e $b_\lambda^\dagger$ como operadores que criam partículas e antipartículas, respectivamente.

Analisando as equações (3.50) e (3.51), obtemos a expressão da energia do sistema na forma:

$$E(p) = \frac{\vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m_{ef}^2}} \tag{3.54}$$

enquanto a componente (3) está relacionada a energia negativa.

Analisando a equação (3.54), notamos que no limite de de baixas velocidades ($|\vec{p}| << m_{ef}$), obtemos:

$$E(p) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_{ef}} \tag{3.55}$$

que é a expressão newtoniana para a energia para o sistema com interação. E para o limite de altas velocidades ($|\vec{p}| >> m$), obtemos:

$$E(p) = \frac{|\vec{p}|}{2} \tag{3.56}$$

que é a expressão ultra-relativística multiplicada por um fator 1/2.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho utilizamos a densidade lagrangeana originalmente proposta por X. Liu, para descrever o sistema $D_s^{*+}D_s^{*-}$. Porém, para obtermos o Operador Hamiltoniano definido positivo, tivemos que realizar uma transformação na densidade lagrangeana ($\mathcal{L} \longrightarrow -\mathcal{L}$), processo que leva as mesmas equações de movimento para os campos, uma vez a densidade lagrangeana deve ser um invariante sobre a operação de inversão de sinal.

De posse das equações de movimento, devemos saber qual campo deve ser quantizado e quais são os campos de interação, para isto reescrevemos a Equação (3.5) em termos de uma derivada covariante, obtendo assim, uma equação do tipo Klein-Gordon livre para o campo do méson D, o que indica que este deve ser o campo a ser quantizado. Os outros campos, para os mésons σ, η e ϕ, atuam como campos mediadores. Sabendo o campo a ser quantizado, e utilizando a teoria relativística de campo médio, obtemos uma solução para o campo do méson D em termos da superposição de estados de partículas e antipartículas. Esta solução deve ser consistente com o gauge de Lorentz, pois o spin associado a um campo vetorial com massa é igual a um.

Para quantizar a teoria, promovemos $D^{\nu}(\vec{x}, t)$ e o seu momento conjugado $\Pi(\vec{x}, t)$ a operadores e sujeito as regras de quantização canônica. E assim, obtemos os comutadores entre os operadores a, $a^{\dagger}$, b e $b^{\dagger}$, onde observamos que a quantização do campo D_s^* só é consistente para o caso da componente do campo vetorial $\langle \Phi^0 \rangle$ ser igual a zero. Esse resultado é muito importante, pois na Ref. [15] os autores mostram que o campo vetorial desempenha um importante papel na formação de estado ligados. Também observamos que o Operador Hamiltoniano apresenta um espectro de energia positiva para as componentes transversais, e um espectro de energia negativa para as componentes longitudinais, que é um resultado não físico, pois em teoria de campos tanto as partículas quanto as antipartículas devem ter energia positiva. Nós interpretamos essa falha de nossa teoria como uma manifestação que a componente longitudinal deve sofrer a influência de partículas de spin zero não consideradas neste trabalho.

Apêndice A

Os Vetores de Polarização

No Capítulo 3 nos deparamos com os chamados vetores de polarização, de grande importância na descrição dos campos vetoriais. Mostra-se em seguida um melhor entendimento, sobre estes vetores, e uma noção de como estes vetores são definidos para os casos massivos. Para a construção dos vetores de polarização $\in_\nu (k, \lambda)$ deve-se impor a condição de normalização:

$$\in_\nu (\vec{k}, \lambda) \in^\nu (\vec{k}, \lambda') = -\delta^{\lambda\lambda'}. \tag{A.1}$$

O gauge de Lorentz para as polarizações $\in^{(\lambda)}$, com $\lambda = 1, 2, 3$:

$$\in^{(\lambda)\nu}(k, \lambda) k_\nu = 0. \tag{A.2}$$

Em nosso modelo, observa-se que a estrutura é de um campo vetorial massivo, então escolhemos os vetores de polarização transversais que são dados por

$$\in^{(\lambda)\nu} = (0, \vec{e}^{\lambda}). \tag{A.3}$$

Para $\lambda = 1, 2$ ficamos

$$\in^\nu (k, 1) = (0, \vec{e}(k, 1)), \tag{A.4}$$

e:

$$\in^\nu (k, 2) = (0, \vec{e}(k, 2)). \tag{A.5}$$

Substituindo as Equações (A.4) e (A.5) em (A.2) obtemos:

$$\vec{e}(k, 1).\vec{k} = \vec{e}(k, 2) \cdot \vec{k} = 0. \tag{A.6}$$

Para $\lambda = 3$, temos que a componente longitudinal é

$$\in^{(3)\nu} = (0, \vec{e}^{(\lambda)}). \tag{A.7}$$

Façamos

$$\in^{(3)\nu} = (A, \vec{B}), \tag{A.8}$$

e assim podemos afirmar que

$$\in^{(\lambda)\nu} \in_{\nu}^{(3)} = -\vec{e}^{\lambda} \cdot \vec{B}, \tag{A.9}$$

e de (A.2)

$$\vec{e}^{\lambda} \cdot \vec{k} = 0. \tag{A.10}$$

De (A.2) e (A.9), temos que

$$A \cdot \vec{k_0} = \vec{B}.\vec{k}, \tag{A.11}$$

e definindo:

$$\vec{B} = w \cdot \vec{k}. \tag{A.12}$$

Substituindo (A.12) em (A.11) temos

$$A \cdot \vec{k_0} = w \cdot \vec{k}^2 \tag{A.13}$$

De (B.79) temos que

$$\in^{(3)\nu} \in_{\nu}^{(3)} = -1 \tag{A.14}$$

Então

$$A^2 - \vec{B}^2 = -1. \tag{A.15}$$

Fazendo (A.13) em (A.15) temos

$$A^2 - w^2 \vec{k}^2 = -1 \tag{A.16}$$

Daí

$$\frac{w^2 \vec{k}^2}{k_o^2} - w^2 \vec{k}^2 = -1, \tag{A.17}$$

$$w^2 \left(\frac{|\vec{k}|^2}{k_0^2} - \vec{k}^2 \right) = -1, \tag{A.18}$$

$$\frac{w^2|\vec{k}|^2}{k_0^2}\left(|\vec{k}|^2 - k_0^2\right) = -1. \tag{A.19}$$

Substituindo o resultado de (3.15) em (A.19)

$$\frac{w^2|\vec{k}|^2}{k_0^2}\left(-{m_{ef}}^2\right) = -1 \tag{A.20}$$

Daí

$$w|\vec{k}|m_{ef} = k_0 \tag{A.21}$$

Portanto

$$w = \frac{k_0}{|\vec{k}|}\frac{1}{m_{ef}} \tag{A.22}$$

Substituindo o resultado de (C.22) em (A.12) temos

$$\vec{B} = \frac{k_0}{|\vec{k}|}\frac{\vec{k}}{m_{ef}} \tag{A.23}$$

Então

$$\vec{B} = \frac{k_0}{m_{ef}}\hat{k} \tag{A.24}$$

Substituindo o resultado de (A.24) em (A.11) temos

$$A = \frac{(k_0/m_{ef})\hat{k}\cdot\vec{k}}{k_0}, \tag{A.25}$$

Então

$$A = \frac{\hat{k}\cdot\vec{k}}{m_{ef}} \tag{A.26}$$

Substituindo os resultados de (A.24) e (A.26) em (B.74), temos

$$\in^{(3)\nu} = \left(\frac{|\vec{k}|}{m_{ef}}, \frac{k_0}{m_e f}\hat{k}\right). \tag{A.27}$$

que pode também ser escrita da seguinte forma

$$\in^{\nu}(k,3) = \left(\frac{|\vec{k}|}{m_{ef}}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\frac{q^o(\vec{k})}{m_{ef}}\right). \tag{A.28}$$

Para $\sigma = \eta = 0$, este resultado reproduz a teoria já conhecida.

Apêndice B

Operadores de Criação e Aniquilação

Em teoria de campos a segunda quantização para os campos bosônicos, trata os campos como operadores de modo que o campo e o seu momento conjugado satisfazem relações de comutação. Assim, para o méson D^*, representado pelo campo D^ν, temos as seguintes relações de comutação [6, 3].

$$\Big[D^\nu(\vec{x},t), D^{\nu'}(\vec{y},t)\Big] = \Big[\Pi^\nu(\vec{x},t), \Pi^{\nu'}(\vec{y},t)\Big] = 0 \tag{B.1}$$

e

$$\Big[\Pi^\nu(\vec{x},t), D^{\nu'}(\vec{y},t)\Big] = -i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{B.2}$$

A Eq. (B.2) nos leva em

$$\Big[(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\vec{x},t), D^{\nu'}(\vec{y},t)\Big] = -i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{B.3}$$

Dos comutadores acima, obtemos a quantização do sistema, onde os momentos canonicamente conjugados a $D^{*\nu}(x)$ e $D^{*\nu\dagger}(x)$ são:

$$\Pi_0^{D^\nu}(x) = -\partial^0 D^{\nu\dagger} - ig_{_{DD\phi}}\big\langle\phi^0\big\rangle^2 D^{\nu\dagger}, \tag{B.4}$$

e

$$\Pi_0^{D^{\nu\dagger}}(x) = -\partial^0 D^{\nu} + ig_{_{DD\phi}}\big\langle\Phi^0\big\rangle^2 D^{\nu}. \tag{B.5}$$

Para resolvermos a equação de movimento Eq.(3.12) apresentada no Capítulo 3, consideramos como solução de teste, a solução de onda plana

$$D^\nu(x) = \in^\nu(k,\lambda)a_{_{\vec{k},E}}e^{i(\vec{k}\vec{x}-Et)}, \tag{B.6}$$

que como já vimos, fornece dois valores para a energia

$$E_{\pm}(\vec{k}) = -g_{_{DD\phi}} \langle \phi \rangle \pm q^{o}(\vec{k}), \tag{B.7}$$

onde,

$$q^{o}(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^{2} + m_{ef}^{2}}. \tag{B.8}$$

Da condição de normalização:

$$\left\langle \vec{x}' \mid \vec{k}' \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \in^{\nu} (\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}.\vec{x}}, \tag{B.9}$$

temos:

$$\left\langle \vec{x}' \mid D^{\nu}(E, \vec{k}) \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \in^{\nu} (\vec{k}, \lambda) e^{-ik_{\nu}x^{\nu}}. \tag{B.10}$$

Usando a notação $kx \equiv k^{0}x^{0} - \vec{k}.\vec{x}$, podemos construir a função de onda normalizada que contém as duas possibilidades de energia [6]

$$D^{\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^{4}k \sum_{\lambda=1}^{3} \in^{\nu} (\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} \widetilde{\xi}(x), \tag{B.11}$$

com $\widetilde{\xi}(x) = \delta[(k^{0} - E_{+})(k^{0} - E_{-})]\chi(k)$, sendo $\chi(k)$ dada por:

$$\chi(k) = \theta(k^{0})\chi^{+}(k) + \theta(-k^{0})\chi^{-}(k).$$

Da relação

$$\delta\left[(k^{0} - E_{+})(k^{0} - E_{-})\right]\chi(k) = \frac{1}{E_{+} - E_{-}}\left[\delta(k^{0} - E_{+})\chi^{+}(k) + \delta(k^{0} - E_{-})\chi^{-}(k)\right],$$

e integrando a Eq. (B.11) em k_{0}, o campo D^{ν} pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} D^{\nu}(x,t) \;=\; & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^{3}\vec{k} \sum_{\lambda=1}^{3} \in^{\nu} (k, \lambda) \times \\ & \left[\frac{\chi^{+}(k)}{E_{+} - E_{-}} e^{-i(E_{+}t - \vec{k}.\vec{x})} + \frac{\chi^{-}(k)}{E_{+} - E_{-}} e^{-i(E_{-}t - \vec{k}.\vec{x})}\right]. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Usando $E_{\pm}(\vec{k}) = -g_{_{DD\phi}} \langle \phi \rangle \pm q^{o}(\vec{k})$ e substituindo $\vec{k} = \vec{q}$ no primeiro termo e $\vec{k} = -\vec{q}$ no segundo termo da integral, podemos reescrever a Eq. (B.12) como:

$$D^{\nu}(\vec{x}, t) = e^{ig_{_{DD\phi}}\langle\phi\rangle t} \int \frac{d^{3}\vec{k}}{2q^{o}(\vec{k})} \sum_{\beta=1}^{3} \in^{\nu} (k, \lambda) \left[a_{\beta}(\vec{k}) f_{q}(x) + {b_{\beta}}^{\dagger}(\vec{k}) f_{q}^{*}(x)\right]. \tag{B.13}$$

onde,

$$f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{B.14}$$

Definindo a função de onda

$$\widetilde{D^{\nu}}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^{3} \in^{\nu} (k,\lambda) \left[a_{\lambda}(\vec{k}) f_q(x) + b_{\lambda}{}^{\dagger}(\vec{k}) f_q^*(x)\right], \tag{B.15}$$

podemos escrever a (B.13) na forma

$$D^{\nu}(\vec{x},t) = e^{ig_{DD\phi}\langle\phi\rangle t}\widetilde{D^{\nu}}(\vec{x},t). \tag{B.16}$$

Tomando a ortogonalidade em (B.13), temos

$$\begin{aligned} \in_{\nu} (k,^{\beta})D^{\nu}(x,t) &= e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^{3} \in_{\nu} (\vec{k},^{\beta}) \in^{\nu} (\vec{k},^{\lambda}) \times \\ & \left[a_{\lambda}(\vec{k}) f_q(x) + b_{\lambda}{}^{\dagger}(\vec{k}) f_q^*(x)\right], \end{aligned} \tag{B.17}$$

ou

$$\in_{\nu} (k,^{\beta})D^{\nu}(x,t) = -e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a^{\beta}(\vec{k}) f_q(x) + b^{\beta\dagger}(\vec{k}) f_q^*(x)\right] \tag{B.18}$$

Substituindo (B.14) em (B.18) temos:

$$\in_{\nu} (k,\beta)D^{\nu}(x,t) = -e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_{\beta}(\vec{k}) \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} + b_{\beta}{}^{\dagger}(\vec{k}) \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}}\right], \tag{B.19}$$

multiplicando os dois lados da Eq.(B.19) por $\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx}$ temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu} (k,\beta)D^{\nu}(x,t) &= -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \times \\ & \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_{\beta}(\vec{k}) \int \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} + \right. \\ & \left. b_{\beta}{}^{\dagger}(\vec{k}) \int \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx}\right], \end{aligned} \tag{B.20}$$

Fazendo $Y = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu} (k,\beta)D^{\nu}(x,t)$, podemos escrever (B.20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y &= -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_{\beta}(\vec{k}) \delta^3(\vec{k'} - \vec{k}) e^{i(k_0' - k_0)x_0} + \right. \\ & \left. b_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}) \delta^3\ (\vec{k'} + \vec{k}) e^{i(k_0' + k_0)x_0}\right] \end{aligned} \tag{B.21}$$

ou

$$Y = \frac{-e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}}{2q^0(\vec{k'})}\left[a_\beta(\vec{k'}) + b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}\right]. \tag{B.22}$$

Devemos extrair $a_\beta(\vec{k'})$ e $b_\beta(-\vec{k}')$, multiplicamos então os membros de (B.22) por $e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}$. Então temos:

$$Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = \frac{-e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}}{2q^0(\vec{k'})}e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}\left[a_\beta(\vec{k'}) + b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}\right], \tag{B.23}$$

e

$$Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = \frac{-1}{2q^0(\vec{k'})}\left[a_\beta(\vec{k'}) + b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}\right]. \tag{B.24}$$

Aplicando ∂_0 nos membros da Equação (B.24) temos

$$\partial_0 Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} = -\partial_0\frac{1}{2q^0(\vec{k'})}\left[a_\beta(\vec{k'}) + b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}\right], \tag{B.25}$$

como $k_o = q^0(\vec{k'})$ então (B.25) fica

$$\partial_0 e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}Y = -ib_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}. \tag{B.26}$$

Vamos agora determinar o primeiro membro da Eq. (B.26)

$$\begin{aligned}\partial_0 e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}Y &= e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\times\\ &\quad\left[-ig_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle D^\nu + ik_0D^\nu + \partial_0D^\nu\right],\end{aligned} \tag{B.27}$$

Fazendo $k_o = q^0(\vec{k'})$ e substituindo o valor encontrado de (B.27) em (B.26) temos

$$\begin{aligned}-ib_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} &= e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\times\\ &\quad\left[-ig_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle D^\nu + iq_0(k')D^\nu + \partial_0D^\nu\right]\end{aligned} \tag{B.28}$$

ou

$$\begin{aligned}b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}') &= e^{-2ik_0x_0}e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\times\\ &\quad\left[g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle D^\nu - q_0(k')D^\nu + i\partial_0D^\nu\right],\end{aligned} \tag{B.29}$$

podemos escrever (B.29) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}') &= e^{2ik_0x_0}e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\times\\ &\quad\left[g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle D^\nu - q_0(k')D^\nu + i\partial_0D^\nu\right].\end{aligned} \tag{B.30}$$

Fazendo (B.30) em (B.24) temos

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta) D^\nu(x,t) e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} &= \frac{-a_\beta(\vec{k'})}{2q^0(\vec{k'})} + \frac{e^{-2ik_0x_0}}{2q^0(\vec{k'})} e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \times \\ & \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta) \times \\ & [g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle D^\nu \\ & -q_0(\vec{k'})D^\nu + i\partial_0 D^\nu] e^{2ik_0x_0} \qquad \text{(B.31)}\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}a_\beta(\vec{k'}) &= -e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta) \times \\ & \left[g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle D^\nu + q_0(\vec{k'})D^\nu + i\partial_0 D^\nu\right]. \qquad \text{(B.32)}\end{aligned}$$

De (B.30) e (B.32) concluimos que:

$$\begin{aligned}a_\beta{}^\dagger(\vec{k'}) &= -e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta) \times \qquad \text{(B.33)} \\ & \left[g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle D^{\nu\dagger} + q_0(\vec{k'})D^{\nu\dagger} - i\partial_0 D^{\nu\dagger}\right],\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}b_\beta(-\vec{k}') &= e^{2ik_0x_0} e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta) \times \\ & \left[g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle D^{\nu\dagger} - q_0(\vec{k'})D^\nu - i\partial_0 D^{\nu\dagger}\right]. \qquad \text{(B.34)}\end{aligned}$$

De posse dos valores de $b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')$; $b_\beta(-\vec{k}')$; $a_\beta(\vec{k'})$ e $a_\beta{}^\dagger(\vec{k'})$ devemos obter as regras de comutação

$$[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})]; [a_\beta(\vec{k}), b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}')]; [b_\beta(-\vec{k}), a_\beta(\vec{k'})];$$

$$[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')]; [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})]; [b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')]; [a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')].$$

onde obtemos as soluções para nosso modelo são

$$\left[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = \left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = \left[b_\beta{}^\dagger(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = 0, \qquad \text{(B.35)}$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = 2(g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle - q^0(\vec{k}))\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \qquad \text{(B.36)}$$

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})\right] = 2(g_{_{DD\phi}} \left\langle\phi^0\right\rangle + q^0(\vec{k}))\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{B.37}$$

$$\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k'})\right] = -2\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle\right)e^{-2iq_0X_0}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{B.38}$$

e

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = 2\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle\right)e^{2iq_0X_0}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \tag{B.39}$$

De posse das relações de comutação [6, 3]

$$[D^\nu(\vec{x},t), D^{\nu'\dagger}(\vec{y},t)] = [\partial_{_0}D^\nu(\vec{x},t), \partial_{_0}D^{\nu'\dagger}(\vec{y},t)] = 0, \tag{B.40}$$

$$[D^\nu(\vec{x},t), \partial_{_0}D^{\nu'\dagger}(\vec{y},t)] = -i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{B.41}$$

e

$$[\partial_{_0}D^\nu(\vec{x},t), D^{\nu'}(\vec{y},t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{B.42}$$

Vamos mostrar os resultados de (B.35), (B.36), (B.37), (B.38) e (B.39) respectivamente:

$$\begin{aligned}
\left[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}{}^+(-\vec{k'})\right] &= \left[\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\right)D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle - q_0(\vec{k'})\right)D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'}\right] \\
&\quad \left(-e^{-ig_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\right) \\
&\quad \left(e^{-ig_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik'x'}\in_{\nu'}(k',\beta')\right)e^{-2iq_0x_0},
\end{aligned} \tag{B.43}$$

e

$$\begin{aligned}
\left[a_\beta(\vec{k}), b^+_{\beta'}(-\vec{k'})\right] &= \left(-e^{-2ig_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_\nu(k,\beta)\right)\left(\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik'x'}\in_{\nu'}(k',\beta')\right) \\
&\quad e^{-2iq_0x_0}\left\{\left[\left(g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\right)D^\nu, \left(g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle - q_0(\vec{k'})\right)D^{\nu'}\right] + \right. \\
&\quad \left[\left(g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\right)D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'}\right] + \\
&\quad \left[i\partial_0 D^\nu, \left(-q_0(\vec{k'}) + g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle\right)D^{\nu'}\right] + \\
&\quad \left.\left[i\partial_0 D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{B.44}$$

Como:

$$\left[D^\nu, \partial_0 D^{\nu'}\right] = -\left[\partial_0 D^\nu, D^{\nu'}\right], \tag{B.45}$$

Portanto,

$$\left[a_\beta(\vec{k}), {b'_\beta}^\dagger(-\vec{k}')\right] = 0, \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] &= \Big[\Big(g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\Big) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \Big(g_{DD\phi}\left\langle\phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k'})\Big) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'}\Big] \\ &\left(-e^{-ig_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \\ &\left(-e^{-ig_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right),\end{aligned} \tag{B.47}$$

e

$$\begin{aligned}\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] &= e^{-2ig_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right)\left(e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) \\ &\Big\{\Big[\Big(g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\Big) D^\nu, \Big(g_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k'})\Big) D^{\nu'}\Big] + \\ &\Big[\Big(g_{DD^\dagger\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle + q_0(\vec{k})\Big) D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'}\Big] + \\ &\Big[i\partial_0 D^\nu, \Big(q_0(\vec{k'}) + g_{DD^\dagger\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle\Big) D^{\nu'}\Big] + \\ &\Big[i\partial_0 D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{B.48}$$

Como:

$$\left[D^\nu, \partial_0 D^{\nu'}\right] = -\left[\partial_0 D^\nu, D^{\nu'}\right], \tag{B.49}$$

então,

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = 0, \tag{B.50}$$

$$\begin{aligned}\left[{b_\beta}^\dagger(-\vec{k}), {b_{\beta'}}^\dagger(-\vec{k}')\right] &= \Big[\Big(g_{DD^\dagger\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle - q_0(\vec{k})\Big) D^\nu + \\ &i\partial_0 D^\nu, \Big(g_{DD^\dagger\phi}\langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k'})\Big) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'}\Big] \\ &\left(-e^{-ig_{DD^\dagger\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \\ &\left(-e^{-ig_{DD^\dagger\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) \\ &e^{-2iq_0X_0}e^{-2iq_0X_0},\end{aligned} \tag{B.51}$$

e

$$
\begin{aligned}
\left[b^{\dagger}_{\beta}(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^{\dagger}(-\vec{k}')\right] &= e^{-2ig_{DD^{\dagger}\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}\times \\
&\int\frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{ikx}\in_{\nu}(k,\beta)\right)\left(e^{ik'x'}\in_{\nu'}(k',\beta')\right) \\
&e^{-4iq_0X_0}\left\{\left[\left(g_{_{DD^{\dagger}\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle-q_0(\vec{k})\right)D^{\nu},\left(g_{_{DD^{\dagger}\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle-q_0(\vec{k'})\right)D^{\nu'}\right]+\right. \\
&\left[\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle-q_0(\vec{k})\right)D^{\nu},i\partial_0D^{\nu'}\right]+ \\
&\left[i\partial_0D^{\nu},\left(-q_0(\vec{k'})+g_{_{DD^{\dagger}\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle\right)D^{\nu'}\right]+ \\
&\left.\left[i\partial_0D^{\nu},i\partial_0D^{\nu'}\right]\right\}. \qquad \text{(B.52)}
\end{aligned}
$$

Como

$$
\left[D^{\nu},\partial_0D^{\nu'}\right]=-\left[\partial_0D^{\nu},D^{\nu'}\right], \qquad \text{(B.53)}
$$

então:

$$
\left[b_{\beta}{}^{\dagger}(-\vec{k}),b_{\beta'}{}^{\dagger}(-\vec{k}')\right]=0, \qquad \text{(B.54)}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_{\beta}(-\vec{k}),b_{\beta'}{}^{\dagger}(-\vec{k}')\right] &= \left[\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\Phi^0\right\rangle-q_0(\vec{k})\right)D^{\nu\dagger}+i\partial_0D^{\nu\dagger},\right. \\
&\left.\left(g_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle-q_0(\vec{k'})\right)D^{\nu'}+i\partial_0D^{\nu'}\right] \\
&\left(e^{ig_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikx}\in_{\nu}(k,\beta)\right) \\
&\left(e^{-ig_{DD\phi}\left\langle\Phi^0\right\rangle t}\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik'x'}\in_{\nu'}(k',\beta')\right) \\
&e^{2iq_0x_0}e^{-2iq_0x_0}, \qquad \text{(B.55)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_{\beta}(-\vec{k}),b_{\beta'}{}^{\dagger}(-\vec{k}')\right] &= \left(\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(k_0x_0-\vec{k}\vec{x})}\in_{\nu}(k,\beta)\right)\times \\
&\left(\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i(k_0x_0-\vec{k'}\vec{x'})}\in_{\nu'}(k',\beta')\right) \\
&\left\{\left(ig_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle-iq_0(\vec{k})\right)+\left(i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right)+\right. \\
&\left.\left(-ig_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle+iq_0(\vec{k'})\right)+\left(-i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right)\right\}, \text{(B.56)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_{\beta}(-\vec{k}),b_{\beta'}{}^{\dagger}(-\vec{k}')\right] &= \left(\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i(\vec{k}\vec{x})}\in_{\nu}(k,\beta)\right) \\
&\left(\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i(\vec{k'}\vec{x'})}\in_{\nu'}(k',\beta')\right) \\
&\left(-2g_{_{DD\phi}}\left\langle\phi^0\right\rangle+2q_0(\vec{k})\right)\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}), \qquad \text{(B.57)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i(\vec{k}\vec{x})} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{i(\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) \\ &\quad \left(-2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + 2q_0(\vec{k})\right) \delta^{\nu\nu'}, \end{aligned} \tag{B.58}$$

$$\begin{aligned}\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta') \\ &\quad \left(-2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + 2q_0(\vec{k})\right) \delta^{\nu\nu'}, \end{aligned} \tag{B.59}$$

e

$$\begin{aligned}\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] &= \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta') \delta^{\nu\nu'} \left(-2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + 2q_0(\vec{k})\right) \\ &\quad \delta^3(\vec{k}-\vec{k}'). \end{aligned} \tag{B.60}$$

Portanto,

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = 2\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle - q_0(\vec{k})\right) \delta^{\beta\beta'} \delta^3(\vec{k}-\vec{k}'), \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k}')\right] &= \left[\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k}')\right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \right. \\ &\quad \left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k}')\right) D^{\nu'\dagger} - i\partial_0 D^{\nu'\dagger}] \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi}\left\langle \phi^0 \right\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \\ &\quad \left(-e^{ig_{DD\phi}\left\langle \phi^0 \right\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right), \end{aligned} \tag{B.62}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k}')\right] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(k_0x_0-\vec{k}\vec{x})} \in_\nu (k,\beta)\right) \\ &\quad \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k_0x_0-\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) \\ &\quad \left\{\left(-ig_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle - iq_0(\vec{k})\right) + \left(i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right) + \right. \\ &\quad \left. \left(ig_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + iq_0(\vec{k}')\right) + \left(i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right)\right\}, \end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k}')\right] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) \\ &\quad \left(-2g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle - 2q_0(\vec{k})\right) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), \end{aligned} \tag{B.64}$$

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})\right] = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k'})\vec{x}} \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta') \left(-2g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle - 2q_0(\vec{k})\right)\delta^{\nu\nu'}, \tag{B.65}$$

e

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})\right] = \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta')\delta^{\nu\nu'} \left(-2g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle - 2q_0(\vec{k'})\right)\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \tag{B.66}$$

Logo:

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})\right] = 2\left(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + q_0(\vec{k})\right)\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{B.67}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = & \Big[(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + q_0(\vec{k})\Big) D^{\nu\dagger} - i\partial_0 D^{\nu\dagger}, \\ & \left(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k'})\right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'}] \\ & \left(-e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \\ & \left(e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}\int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{-2ik_o x_0}, \end{aligned} \tag{B.68}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = & -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{-2iq_0 X_0} \\ & \Big\{\Big[\left(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + q_0(\vec{k})\right) D^{\nu\dagger}, \left(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k'})\right) D^{\nu'}\Big] + \\ & \Big[\left(g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + q_0(\vec{k})\right) D^{\nu\dagger}, i\partial_0 D^{\nu'}\Big] + \\ & \Big[-i\partial_0 D^{\nu\dagger}, \left(-q_0(\vec{k'}) + g_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle\right) D^{\nu'}\Big] + \\ & \Big[-i\partial_0 D^{\nu\dagger}, i\partial_0 D^{\nu'}\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{B.69}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k}')\right] = & -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{-2iq_0 X_0} \\ & \Big\{\left(ig_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + iq_0(\vec{k})\right)\left(-i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) + \\ & \left(-ig_{_{DD\phi}} \langle\phi^0\rangle + iq_0(\vec{k})\right)\left(i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{B.70}$$

$$
\begin{aligned}
\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(\vec{k'})\right] &= -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{-2iq_0X_0} \\
&\quad \left\{ \left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) + \left(q_0(\vec{k})\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) \right. \\
&\quad \left. \left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) - \left(q_0(\vec{k})\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) \right\}, \qquad \text{(B.71)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k'})\right] &= -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k-k')\vec{x}} \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta') e^{-2iq_0X_0} \\
&\quad 2\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle\right) \delta^{\nu\nu'}. \qquad \text{(B.72)}
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\left[a_\beta{}^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}{}^\dagger(-\vec{k'})\right] = -2\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle\right) e^{-2iq_0X_0} \delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \qquad \text{(B.73)}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] &= [\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k})\right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \\
&\quad \left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle - q_0(\vec{k'})\right) D^{\nu'\dagger} - i\partial_0 D^{\nu'\dagger}] \\
&\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi}\left\langle \phi^0 \right\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \\
&\quad \left(e^{-ig_{DD\phi}\left\langle \phi^0 \right\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{2ik_ox_0}, \qquad \text{(B.74)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] &= -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{-ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{2iq_0x_0} \\
&\quad \left\{ \left[\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k})\right) D^\nu, \left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k'})\right) D^{\nu'\dagger} \right] + \right. \\
&\quad \left[\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle + q_0(\vec{k})\right) D^\nu, -i\partial_0 D^{\nu'\dagger} \right] + \\
&\quad \left[i\partial_0 D^\nu, \left(-q_0(\vec{k'}) + g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle\right) D^{\nu'\dagger} \right] + \\
&\quad \left. \left[i\partial_0 D^{\nu\dagger}, -i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \qquad \text{(B.75)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] &= -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{-ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{2iq_0x_0} \\
&\quad \left\{ \left(-ig_{DD\phi} \left\langle \phi^0 \right\rangle - iq_0(\vec{k})\right) \left(-i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) + \right. \\
&\quad \left. \left(ig_{DD\phi} \left\langle \phi^0 \right\rangle + iq_0(\vec{k})\right) \left(i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right) \right\}, \qquad \text{(B.76)}
\end{aligned}
$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = -\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x'}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ikx} \in_\nu (k,\beta)\right) \left(e^{-ik'x'} \in_{\nu'} (k',\beta')\right) e^{2iq_0x_0}$$
$$\Big\{-g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) - q_0(\vec{k})\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})$$
$$-g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) + q_0(\vec{k})\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\Big\}, \qquad \text{(B.77)}$$

e

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k'-k)\vec{x}} \in_\nu (k,\beta) \in_{\nu'} (k',\beta') e^{2iq_0x_0}$$
$$2\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle\right) \delta^{\nu\nu'}, \qquad \text{(B.78)}$$

então,

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k'})\right] = 2\left(g_{_{DD\phi}} \left\langle \phi^0 \right\rangle\right) e^{2iq_0x_0} \delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \qquad \text{(B.79)}$$

Apêndice C

Determinação do Operador Número

O operador número é definido por [6]

$$N^{\nu} = \int d^3x J_0(x) \tag{C.1}$$

onde a corrente $J^{\nu}(x)$ é dada por

$$J_0^{\nu}(x) = -i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu})}D^{\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu\dagger})}D^{\nu\dagger}\right] \tag{C.2}$$

As derivadas do primeiro e do segundo termo da corrente são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} D^{\nu})} = (\partial^{\mu}D^{\nu\dagger}) - (\partial^{\nu}D^{\mu\dagger}) + ig_{_{DD\phi}}D^{\nu\dagger}\langle\phi^{\mu}\rangle \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} D^{\nu\dagger})} = (\partial^{\mu}D^{\nu}) - (\partial^{\nu}D^{\mu}) - ig_{_{DD\phi}}D^{\nu}\langle\phi^{\mu}\rangle \tag{C.4}$$

Substituindo as Eqs. (C.3) e (C.4) em (C.2), temos que a expressão da corrente fica escrita como

$$\begin{aligned} J^{\nu}(x) &= -i\left\{(\partial^{\mu}D^{\nu\dagger})D^{\nu} - (\partial^{\nu}D^{\mu\dagger})D^{\nu} + ig_{_{DD\phi}}D^{\nu\dagger}D^{\nu}\langle\phi^{\mu}\rangle\right. \\ &\quad -(\partial^{\mu}D^{\nu})D^{\nu\dagger} + (\partial^{\nu}D^{\mu})D^{\nu\dagger} + ig_{_{DD\phi}}D^{\nu}D^{\nu\dagger}\langle\phi^{\mu}\rangle \end{aligned} \tag{C.5}$$

Que fica

$$\begin{aligned} J^{\nu}(x) &= -i\left\{(\partial^{\mu}D^{\nu\dagger})D^{\nu} - (\partial^{\nu}D^{\mu\dagger})D^{\nu} - (\partial^{\mu}D^{\nu})D^{\nu\dagger} + (\partial^{\nu}D^{\mu})D^{\nu\dagger}\right. \\ &\quad \left. +2ig_{_{DD\phi}}D^{\nu}D^{\nu\dagger}\langle\phi^{\mu}\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

A componente $J^0(x)$ é portanto

$$J^0(x) = -i\left\{(\partial^0 D^{\nu\dagger})D^{\nu} - (\partial^{\nu} D^{0\dagger})D^{\nu} - (\partial^0 D^{\nu})D^{\nu\dagger} - (\partial^{\nu} D^0)D^{\nu\dagger}\right. \qquad (C.7)$$

Em termos da função de onda da Eq.(B.16), $D^{\nu}(\vec{x},t) = e^{ig_{DD+\phi}\langle\phi\rangle t}\widetilde{D^{\nu}}(\vec{x},t)$, temos que a componente $J_0(x)$ pode ser escrita como

$$J_0(x) = -i\left[-(\partial_0\tilde{D}^{\nu})\tilde{D}^{\nu\dagger} + (\partial_0\tilde{D}^{\nu\dagger})\tilde{D}^{\nu}\right]. \qquad (C.8)$$

Substituindo (C.8) em (C.1) temos

$$N^{\nu} = \int d^3xi\left[-(\partial_0\tilde{D}^{\nu\dagger})\tilde{D}^{\nu} + (\partial_0\tilde{D}^{\nu})\tilde{D}^{\nu\dagger}\right], \qquad (C.9)$$

$$N^{\nu} = \int d^3x\left[-i(\partial_0\tilde{D}^{\nu\dagger})\tilde{D}^{\nu}\right] + \int d^3x\left[+i(\partial_0\tilde{D}^{\nu})\tilde{D}^{\nu\dagger}\right]. \qquad (C.10)$$

Definindo

$$\hat{N}_1^{\nu} = -i\int d^3x(\partial_0\tilde{D^{\nu\dagger}})\tilde{D}^{\nu}, \qquad (C.11)$$

$$\hat{N_1^{\nu\dagger}} = i\int d^3x(\partial_0\tilde{D}^{\nu})\tilde{D^{\nu\dagger}}, \qquad (C.12)$$

O operador N pode é escrito como

$$N = \hat{N}_1^{\nu} + \hat{N_1^{\nu\dagger}}. \qquad (C.13)$$

Substituindo a função de onda $\widetilde{D}^{\nu'}(\vec{x},t)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, onde

$$f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}, \qquad (C.14)$$

$$\widetilde{D}^{\nu'}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{k'}}{2q^0(\vec{k'})}\sum_{\lambda=1}^{3} \in^{\nu'}(k',\lambda')$$
$$\left[a_{\lambda'}(\vec{k'})f_{q'}(x) + b_{\lambda'}{}^{\dagger}(\vec{k'})f^*_{q'}(x)\right]. \qquad (C.15)$$

Inserindo (C.14) em (C.15) e o resultado em (C.9) temos que

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^\nu &= i\int d^3x\left\{\int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})}\sum_{\lambda=1}^{3}\in^\nu(k,\lambda)\right.\\ &\quad\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k})\partial_0 f_q^*(x)+b_\lambda(\vec{k})\partial_0 f_q(x)\right]\\ &\quad\int\frac{d^3\vec{k'}}{2q^0(\vec{k'})}\sum_{\lambda=1}^{3}\in^{\nu'}(k',\lambda')\\ &\quad\left.\left[a_{\lambda'}(\vec{k'})f_{q'}(x)+b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})f_{q'}^*(x)\right]\right\} \qquad (C.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^\nu &= \int\frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})}\sum_{\lambda=1}^{3}\in^\nu(k,\lambda)\\ &\quad\sum_{\lambda=1}^{3}\in^{\nu'}(k',\lambda')\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})-b_\lambda(\vec{k})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})\right]. \qquad (C.17)\end{aligned}$$

Fazendo

$$T_{\lambda\lambda'}^\nu=\in^\nu(k,\lambda)\in^{\nu'}(k',\lambda') \qquad (C.18)$$

Substituindo (C.18) em (C.17) temos

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^\nu &= \int\frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3}T_{\lambda\lambda'}^\nu\\ &\quad\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})-b_\lambda(\vec{k})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})\right]. \qquad (C.19)\end{aligned}$$

obtendo os estados $T_{\lambda\lambda'}^\nu$, então temos que para $\lambda,\lambda'=1,2,3$ e $\nu=0,1,2,3$

$$\hat{N}^0 = \int\frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})}\left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2}\right)\left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k})-b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right] \qquad (C.20)$$

$$\begin{aligned}\hat{N}^1 &= \int\frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})}\left\{(\in_x)^2\right.\\ &\quad\left[a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k})-b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k})\right]+\\ &\quad(\in_x)^2\left[a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k})-b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k})\right]+\\ &\quad\left.(q_o/m_{ef}k_x)^2\left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k})+b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right]\right\} \qquad (C.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N^2} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{(\in_y)^2\right. \\
&\left[a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) - b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&(\in_y)^2 \left[a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) - b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left.(q_o/m_{ef}k_y)^2 \left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) - b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right]\right\} \qquad \text{(C.22)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N^3} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{(\in_z)^2\right. \\
&\left[a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) - b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&(\in_z)^2 \left[a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) - b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left.(q_o/m_{ef}k_z)^2 \left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) - b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right]\right\} \qquad \text{(C.23)}
\end{aligned}$$

O número de partículas é dado por $\hat{N_1^\nu} = \hat{N^0} + \hat{N^1} + \hat{N^2} + \hat{N^3}$. Então

$$\begin{aligned}
\hat{N_1^\nu} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{ \left[\left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} \right) + (q_o/m_{ef}k_x)^2 + (q_o/m_{ef}k_y)^2 + (q_o/m_{ef}k_z)^2 \right] \right. \\
&\left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) - b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left((\in_x^2) + (\in_y^2) + (\in_z^2)\right) \left[a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) - b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left.\left((\in_x^2) + (\in_y^2) + (\in_z^2)\right) \left[a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) - b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k})\right]\right\} \qquad \text{(C.24)}
\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}
\hat{N_1^{\nu\dagger}} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left\{ \left[\left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} \right) + (q_o/m_{ef}k_x)^2 + (q_o/m_{ef}k_y)^2 + (q_o/m_{ef}k_z)^2 \right] \right. \\
&\left[a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) - b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left((\in_x^2) + (\in_y^2) + (\in_z^2)\right) \left[a_1(\vec{k})a_1^\dagger(\vec{k}) - b_1^\dagger(\vec{k})b_1(\vec{k})\right] + \\
&\left.\left((\in_x^2) + (\in_y^2) + (\in_z^2)\right) \left[a_2(\vec{k})a_2^\dagger(\vec{k}) - b_2^\dagger(\vec{k})b_2(\vec{k})\right]\right\} \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

Inserindo (C.24) e (C.25) em (C.13) temos

$$\begin{aligned}
N &= \int \frac{d^3(\vec{k})}{2q_0(\vec{k})} \left\{ \left[\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} + \frac{q_o^2(\vec{k})}{m_{ef}^2} \right] \left[a_3{}^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) - b_3(\vec{k})b_3{}^\dagger(\vec{k})\right] + \right. \\
&\left[a_2{}^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) - b_2(\vec{k})b_2{}^\dagger(\vec{k})\right] + \\
&\left.\left[a_1{}^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) - b_1(\vec{k})b_1{}^\dagger(\vec{k})\right]\right\}. \qquad \text{(C.26)}
\end{aligned}$$

Apêndice D

Determinação da Hamiltoniana

A densidade hamiltoniana para no caso em que os campos σ, η e ϕ são estáticos, é dada por

$$\mathcal{H} = \Pi_0^D \partial^0 D^\nu + \Pi_0^{D^\dagger} \partial^0 D^{\nu\dagger} - \mathcal{L}, \tag{D.1}$$

onde os momentos canônicamente conjugados a D^ν e $D^{\nu\dagger}$ são:

$$\Pi_0^D = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^\nu)} = \partial_0 D^{\nu\dagger} + i g_{_{DD\phi}} \langle\phi\rangle D^{\nu\dagger} \tag{D.2}$$

$$\Pi_0^D = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu\dagger})} = \partial_0 D^\nu - i g_{_{DD\phi}} \langle\phi\rangle D^\nu. \tag{D.3}$$

A lagrangeana para os campos σ, η e ϕ estáticos, é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial_0 D_\nu - \partial_\nu D_0)(\partial^0 D^{\nu\dagger} - \partial^\nu D^{0\dagger}) + (\partial_i D_\nu - \partial_\nu D_i)(\partial^i D^{\nu\dagger} - \partial^\nu D^{i\dagger})\right] \\
&\quad - m_D^2 (D_0 D^{0\dagger} + D_i D^{i\dagger}) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle^2 + \frac{1}{2} m_\eta^2 \langle\eta\rangle^2 \\
&\quad - g_{_{DD\sigma}} \langle\sigma\rangle (D_0 D^{0\dagger} + D_i D^{i\dagger}).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Aplicando as Equações (D.2), (D.3) e (D.4) em (D.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{3}{2}(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\partial^0 D^\nu) - \frac{1}{2}(\partial_0 D^i)(\partial^0 D^{i\dagger}) + (m_D^2 + g_{_{DD\sigma}} \langle\sigma\rangle)(D^i D_i^\dagger) \\
&\quad - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle^2 - \frac{1}{2} m_\eta^2 \langle\eta\rangle^2 .
\end{aligned} \tag{D.5}$$

O operador Hamiltoniano pode ser obtido através da equação:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \tag{D.6}$$

Assim, inserindo a equção (D.5) na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{2}\int d^3x(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\partial^0 D^{\nu}) - \frac{1}{2}\int d^3x(\partial_0 D_i)(\partial^0 D^{i\dagger}) \\ &+(m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)\int d^3x(D^i D_i^\dagger) - \int {}^3x\left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\langle\sigma\rangle^2 - \frac{1}{2}m_\eta^2\langle\eta\rangle^2\right). \end{aligned} \tag{D.7}$$

Agora devemos calcular todas as integrais da Equação (D.7),

$$\frac{3}{2}\int d^3x(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\partial^0 D^{\nu}) = -\frac{3}{8}\int d^3\vec{p}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon^{(\lambda)\nu}\epsilon^{\lambda')\nu}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right], \tag{D.8}$$

$$\frac{1}{2}\int d^3x(\partial_0 D_i)(\partial^0 D^{i\dagger}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{8}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon_i^{(\lambda)}\epsilon_i^{(\lambda')}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right], \tag{D.9}$$

e

$$\int d^3x(D^i D_i^\dagger) = \int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2(\vec{p})}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon^{(\lambda)i}\epsilon_i^{(\lambda')}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right]. \tag{D.10}$$

Usando as Equações (D.8), (D.9) e (D.10) podemos escrever a Equação (D.7) na forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{8}\int d^3\vec{p}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon^{(\lambda)\nu}\epsilon^{\lambda')\nu}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right] \\ &- \int \frac{d^3\vec{p}}{8}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon_i^{(\lambda)}\epsilon_i^{(\lambda')}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right] \\ &+(m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)\int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2(\vec{p})}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\lambda'=1}^{3}\epsilon^{(\lambda)i}\epsilon_i^{(\lambda')}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{p})a_{\lambda'}(\vec{p}) + b_\lambda(\vec{p})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{p})\right] \\ &- \int {}^3x\left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\langle\sigma\rangle^2 - \frac{1}{2}m_\eta^2\langle\eta\rangle^2\right). \end{aligned} \tag{D.11}$$

De posse dos vetores de polarização, podemos escrever

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2}\left[q_0^2 - (m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)\right]\left[a_1^\dagger(\vec{p})a_1(\vec{p}) + b_1(\vec{p})b_1^\dagger(\vec{p})\right] \\ &+ \int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2}\left[q_0^2 - (m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)\right]\left[a_2^\dagger(\vec{p})a_2(\vec{p}) + b_2(\vec{p})b_2^\dagger(\vec{p})\right] \\ &+ \int d^3\vec{p}\left[\frac{3|\vec{p}|^2}{8m_{ef}^2} + \frac{2q_0^2}{8m_{ef}^2} - \frac{(m_D^2 + g_{DD\sigma}\langle\sigma\rangle)}{4q_0^2}\right]\left[a_3^\dagger(\vec{p})a_3(\vec{p}) + b_3(\vec{p})b_3^\dagger(\vec{p})\right] \\ &- \int {}^3x\left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\langle\sigma\rangle^2 - \frac{1}{2}m_\eta^2\langle\eta\rangle^2\right). \end{aligned} \tag{D.12}$$

Usando a Equação (3.15), temos:

$$q_0^2 - (m_D^2 + g_{_{DD\sigma}} \langle\sigma\rangle) = p^2 + m_{ef}^2 - m_{ef}^2 = p^2. \tag{D.13}$$

Portanto, podemos expressar o operador hamiltoniano da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2(\vec{p})} p^2 \left[a_1^\dagger(\vec{p})a_1(\vec{p}) + b_1(\vec{p})b_1^\dagger(\vec{p})\right] + \int \frac{d^3\vec{p}}{4q_0^2(\vec{p})} p^2 \left[a_2^\dagger(\vec{p})a_2(\vec{p}) + b_2(\vec{p})b_2^\dagger(\vec{p})\right] \\ &+ \int d^3\vec{p} \left[\frac{3|\vec{p}|^2}{8m_{ef}^2} + \frac{q_0^2}{4m_{ef}^2} - \frac{(m_D^2 + g_{_{DD\sigma}} \langle\sigma\rangle)}{4q_0^2}\right] \left[a_3^\dagger(\vec{p})a_3(\vec{p}) + b_3(\vec{p})b_3^\dagger(\vec{p})\right] \\ &+ \int d^3x \left(\frac{1}{2}m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle^2 + \frac{1}{2}m_\eta^2 \langle\eta\rangle\right). \end{aligned} \tag{D.14}$$

Bibliografia

[1] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison Wesley, Reading, Mass (1995).

[2] W. Greiner, Quantum Mechanics: An Introduction, Springer, Germany (2001).

[3] M. Kaku, Quantum Field Theory: a modern introduction, Oxford, New York (1993).

[4] J. Itzykson, Z. Jean-Bernard. Quantum Field Theory, Mcgraw-Hill, New York, (1980).

[5] W. Greiner,J.Reinhart, Field Quantization, Springer-Verlag, Germany (1996).

[6] M. O. C. Gomes, Teoria Quântica dos Campos, Edusp, São Paulo, (2002).

[7] Nelson, Ann E., and Scholtz, J. Phys. Rev. [arXiv:1105.2812v2 [hep-ph]].

[8] Carrol, Sean. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison Wesley, (2004).

[9] Weinberg, Steven. Cosmology, Oxford, (2008).

[10] T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **102**, 242002 (2009) [arXiv:0903.2229 [hep-ex]].

[11] X. Liu and H. W. Ke, Phys. Rev. D **80**, 034009 (2009) [arXiv:0907.1349 [hep-ph]].

[12] T. Aaltonen *et al.* [The CDF Collaboration], arXiv:1101.6058 [hep-ex].

[13] B. D. Serot, Walecka, John D., “Advances in Nuclear Physics”. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.

[14] CUNHA, Emanuel. Quantização do campo vetorial D_s^*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, (2011).

[15] Y. R. Liu, M. Oka, M. Takizawa, X. Liu, W. Z. Deng and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **82** (2010) 014011 [arXiv:1005.2262 [hep-ph]].

[16] N. Mahajan, Phys. Lett. B **679**, 228 (2009) [arXiv:0903.3107 [hep-ph]].

[17] W. Chen and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **83**, 034010 (2011) [arXiv:1010.3397 [hep-ph]].

[18] G. J. Ding, Eur. Phys. J. C **64**, 297 (2009) [arXiv:0904.1782 [hep-ph]].