



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Jéferson André Sales Fortunato

**Vínculos observacionais para modelos de
energia escura através de Cronômetros
Cósmicos, SNIa, BAO e FRB**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

18 de janeiro de 2022

Jéferson André Sales Fortunato

**Vínculos observacionais para modelos de energia escura
através de Cronômetros Cósmicos, SNIa, BAO e FRB**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos e coorientação do Prof. Dr. Marcelo Vargas dos Santos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. João Rafael Lúcio Santos

Coorientador: Professor Dr. Marcelo Vargas Dos Santos

Campina Grande, Paraíba, Brasil

18 de janeiro de 2022

F745v Fortunato, Jéferson André Sales.

Vínculos observacionais para modelos de energia escura através de cronômetros cósmicos, SNIa, BAO e FRB / Jéferson André Sales Fortunato. – Campina Grande, 2021.

114 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio Santos; Coorientação: Prof. Dr. Marcelo Vargas dos Santos".

Referências.

1. Cosmologia Observacional. 2. SNIa. 3. Condução de Calor. 4. CC. 5. BAO. 6. CMB. 7. FRB. 8. BINGO. 9. Expansão Acelerada. 10. Parâmetros Cosmológicos. 11. Campos Escalares. I. Santos, João Rafael Lúcio. II. Santos, Marcelo Vargas dos. III. Título.

CDU 536.24(043)

Jéferson André Sales Fortunato

**Vínculos observacionais para modelos de energia escura através de
Cronômetros Cósmicos, SNIa, BAO e FRB**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos e coorientação do Prof. Dr. Marcelo Vargas dos Santos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado em 25 de março de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

**Professor Dr. João Rafael Lúcio
Santos**
Orientador

**Professor Dr. Marcelo Vargas Dos
Santos**
Coorientador

**Professor Dr. Amilcar Rabelo de
Queiroz**
Examinador Interno

**Professor Dr. Pedro Henrique Ribeiro
da Silva Moraes**
Examinador Externo

Campina Grande, Paraíba, Brasil
18 de janeiro de 2022



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 25
DE MARÇO DE 2021

Aos vinte e cinco dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **JÉFERSON ANDRÉ SALES FORTUNATO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **João Rafael Lucio dos Santos** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Marcelo Vargas dos Santos** (Co-orientador) – Doutor em Física, o professor **Amilcar Rabelo de Queiroz** – Doutor em Física, o professor **Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes** – Doutor em Física, sendo os três primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o quarto, pós-doutor do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG) da Universidade de São Paulo (USP). HORA DE INÍCIO: **10h00** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFCG decorrente do corona vírus**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **João Rafael Lucio dos Santos**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **JÉFERSON ANDRÉ SALES FORTUNATO**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado “**Vínculos observacionais para modelos de energia escura através de Cronômetros Cósmicos, SNIa, BAO e FRB**”. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 25 de março de 2021.

Hélio Pereira de Oliveira
Secretário

João Rafael Lucio dos Santos
Presidente da Comissão e Orientador

Marcelo Vargas dos Santos
Co-orientador

Amilcar Rabelo de Queiroz

Examinador Interno

Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Examinador Externo

Jéferson André Sales Fortunato

Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos

Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **JÉFERSON ANDRÉ SALES FORTUNATO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **Jéferson André Sales Fortuanto, Usuário Externo**, em 25/03/2021, às 20:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCELO VARGAS DOS SANTOS, PROFESSOR MAGISTERIO SUPERIOR -VISITANTE**, em 26/03/2021, às 10:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes, Usuário Externo**, em 29/03/2021, às 09:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **AMILCAR RABELO DE QUEIROZ, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 01/09/2021, às 15:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR (A)**, em 01/09/2021, às 15:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1359849** e o código CRC **81FED983**.

Dedico esta dissertação ao infinito que desabrocha ao fechar os olhos. Aos sonhos mais loucos. Às madrugadas mais cheirosas. Aos encantos dos seres do mar.

Agradecimentos

- Primeiramente à UFCG e à Unidade Acadêmica de Física, que me acolheram carinhosamente desde o primeiro dia.
- Agradeço enormemente ao meu orientador, Prof. Dr. João Rafael, por toda paciência, disponibilidade e dedicação durante a construção desta dissertação de mestrado. Levarei comigo, ao longo de minha carreira acadêmica, o exemplo de sua extrema competência, objetividade, empatia, profissionalismo e espírito coletivo.
- Ao meu coorientador Prof. Dr. Marcelo Vargas, pela disponibilidade, sinceridade, por ter me apresentado ao mundo da programação em física, e por todos os conselhos dados. Também levarei comigo, seu exemplo de excelente profissional e a inspiração de sua sagacidade para muitas ideias.
- A todos os outros professores do PPGF que influenciaram diretamente o meu desenvolvimento acadêmico ao longo desse mestrado.
- Aos funcionários e às funcionárias da UAF, que tive a oportunidade de conhecer durante esses dois anos, em especial Dona Dalva, Dona Helena e Seu Hélio.
- Aos meus colegas e minhas colegas de pós-graduação. Aos meus amigos da sala 106, por todas as conversas, cafés no comunista, picolés em Dona Dalva e goteiras consertadas.
- Aos meus familiares por todo suporte e incentivo. Em especial às mulheres da minha família: mainha, vovó e minha irmã, por sempre acreditarem em mim.
- À minha companheira, Izadora Vieira, por todo seu amor, apoio e confiança. Pela presença nos meus momentos mais felizes dos últimos anos e por ter transformado todos os meus dias em primavera.
- Aos meus amigos e às minhas amigas, que estão ou não mais estão presentes na minha vida. Por todos os dias em que sair juntos numa sexta-feira sem fim era uma opção extremamente cogitada. Pelas conversas, pelo suporte subjetivo. Pelo encontro com a Rainha da Floresta. Em especial à minha grande amiga Izabel Marjorie, por todos os momentos bons que dividimos e ficarão guardados na minha memória.
- A todos e todas que contribuíram direta ou indiretamente para a construção deste trabalho. Em especial à minha excelente terapeuta Ângela Belém.
- À CAPES pelo suporte financeiro.

*“O cadinho na chama revela o oculto
e a chama ilumina tal qual candeeiro
revelando o mistério velado da vida
que é a busca do iniciado sorrateiro.
(Jonas R. Sanches)*

Resumo

Desde a descoberta de que o Universo se expande de forma acelerada, na década de 90, diversas tentativas tem sido realizadas com o intuito de explicar a natureza do mecanismo que causa essa aceleração. Até o momento, as observações cosmológicas concordam com o modelo cosmológico Λ CDM, que ficou conhecido como o modelo padrão para a cosmologia. Nesse modelo, atribui-se como causa para a expansão acelerada do Cosmos, uma componente energética chamada de energia escura – ou do inglês, dark energy –, que consiste em um fluido de pressão negativa. Contudo, esse modelo ainda é incipiente para explicar de forma satisfatória esse mecanismo, impelindo pesquisadores a buscar por modelos alternativos que possam ser usados para o mesmo fim. Dentre as alternativas ao modelo padrão, estão os modelos que descrevem a dinâmica do Universo através de campos escalares, conhecidos por modelos de quintessência. Nesta pesquisa, discutimos tanto o modelo padrão quanto modelos cosmológicos alternativos e como as observações cosmológicas podem ser usadas para estimar os parâmetros livres desses modelos. Também revisitamos o Formalismo de Primeira Ordem, que pode ser usado para gerar modelos cosmológicos alternativos a partir de uma parametrização das equações de Friedmann. Em seguida, apresentamos uma nova abordagem analítica para propor novos modelos cosmológicos mais realistas no contexto de quintessência com a presença de matéria. Por fim, usamos alguns dos conjuntos de dados observacionais mais recentes para realizar inferência estatística em cosmologia.

Palavras-chave: Cosmologia observacional; SNIa; CC; BAO; CMB; FRB; BINGO; expansão acelerada; parâmetros cosmológicos; campos escalares.

Abstract

Since the discovery that the Universe expands at an accelerated rate, in the 90's, several attempts have been made in order to explain the nature of the mechanism that causes this acceleration. So far, cosmological observations agree with the Λ CDM model, which has become known as the standard model for cosmology. In this model, it is attributed as a cause for the accelerated expansion of the Cosmos, an energetic component called dark energy, which consists of a negative pressure fluid. However, this model is still incipient to explain this mechanism satisfactorily, prompting researchers to look for alternative models that can be used for the same purpose. Among the alternatives to the standard model, there are models that describe the dynamics of the Universe through scalar fields, known as quintessence models. In this research, we discuss both the standard model and alternative cosmological models and how cosmological observations can be used to estimate the free parameters of these models. We also revisit First Order Formalism, which can be used to generate alternative cosmological models from a parameterization of Friedmann's equations. Then, we present a new analytical approach to propose new and more realistic cosmological models in the context of quintessence with the presence of matter. Finally, we use some of the most recent observational datasets to perform statistical inference in cosmology.

Keywords: Observational cosmology; SNIa; CC; BAO; CMB; FRB; BINGO; accelerated expansion; cosmological parameters; scalar fields.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Um disco de bronze com detalhes em ouro, considerado a representação registrada mais antiga de objetos astronômicos, datado em 1600 A.E.C.. Fonte: Pásztor (2015) [3].	30
Figura 2 – Gravura rupestre por indígenas norte-americanos datada de 1006 anos E.C. encontrada no estado do Arizona, que possivelmente é uma representação da supernova SN 1006. Fonte: Hamacher (2014) [4].	30
Figura 3 – Ilustração das três gerações de sondas espaciais projetadas para estudar a CMB e a evolução na resolução angular das anisotropias medidas por cada uma delas. Fonte: NASA/JPL-Caltech/ESA (2013) [11]	32
Figura 4 – Imagem contendo três supernovas distantes capturadas pelo telescópio espacial Hubble, que foram usadas para compor o conjunto de dados que levou a descoberta da expansão acelerada do Universo. Fonte: NASA (1998) [15]	33
Figura 5 – Telescópio principal usado nas observações do experimento Sloan Digital Sky Survey. Fonte: Fermilab Visual Media Services (2014) [19].	34
Figura 6 – O maior mapa 3d do Universo, construído ao combinar dados do SDSS e eBOSS. Fonte: Imagem adaptada de [20].	34
Figura 7 – Radiotelescópio Parkes, construído na Austrália com um prato de 64 m, que foi fundamental para a descoberta das FRB. Fonte: Dyer (2012) [25].	35
Figura 8 – O radiotelescópio BINGO, que será fundamental para o desenvolvimento da cosmologia moderna na próxima década. Essa é uma representação gráfica, criada por Graciele A. de Oliveira, do possível design futuro do instrumento. Fonte: Jornal da USP (2019) [36].	36
Figura 9 – Potencial do modelo ϕ^4	45
Figura 10 – Solução kink em azul, e antikink em amarelo para o modelo ϕ^4	45
Figura 11 – Densidade de energia do modelo ϕ^4	46
Figura 12 – Modo zero associado ao modelo ϕ^4	46
Figura 13 – Potencial do modelo ϕ^4 invertido.	46
Figura 14 – Solução lump em azul e solução anti-lump em amarelo para o modelo ϕ^4 invertido.	46
Figura 15 – Densidade de energia que caracteriza o modelo ϕ^4 invertido.	47
Figura 16 – Modo zero associado ao modelo ϕ^4 invertido, que evidencia sua instabilidade.	47
Figura 17 – Uma fotografia do Big Bang. Radiação Cósmica de Fundo. Fonte: ESA/Planck Collaboration (2014) [9]	49

Figura 18 – Mapa da distribuição de galáxias em largas escalas. Fonte: 2df galaxy redshift survey [51].	49
Figura 19 – Três superfícies com valores diferentes para o parâmetro de curvatura k : na primeira, onde $k = 0$, linhas paralelas permanecem paralelas indefinidamente; na segunda, $k = 1$, linhas paralelas eventualmente se encontram; por fim, na terceira, $k = -1$, as linhas paralelas nunca se encontram. Imagem adaptada de [54].	52
Figura 20 – Uma representação do efeito de alongamento do comprimento de onda da radiação ao se propagar através de um espaço em expansão. Fonte: Palma (2013) [58].	55
Figura 21 – Representação artística da escala característica (linha branca) proveniente das Oscilações Acústicas de Bárions e de como ela influencia a distribuição de galáxias em largas escalas. Fonte: Zosia Rostomian (LBNL), SDSS-III (2013) [36].	61
Figura 22 – Imagem da supernova SN 1006 observada em diferentes comprimentos de onda por diversos telescópios terrestres e espaciais. Fonte: ESO (2013) [70].	62
Figura 23 – Representação artística do Universo inteiro em escala logarítmica, tendo como centro o sistema solar. Essa imagem serve para ilustrar como percebemos a radiação oriunda da CMB a partir da superfície de último espalhamento. Fonte: Imagem adaptada de Budassi (2012) [72].	64
Figura 24 – O espectro de potência da CMB inferido a partir dos dados do instrumento Planck. Os pontos vermelhos representam as medidas realizadas pela sonda e a linha verde é a previsão teórica traçada usando o modelo Λ CDM. Fonte: Plack collaboration (2014) [73].	65
Figura 25 – Imagem da Pequena Nuvem de Magalhães capturada pelo telescópio VISTA (Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy), que é uma galáxia visível a olho nu no céu noturno. Foi alvo do telescópio Parks e permitiu a descoberta do primeiro sinal de FRB. Fonte: ESO (2017) [85]	66
Figura 26 – Essa foi a primeira FRB detectada, atualmente conhecida por FRB 010724. O pulso teve uma medida de dispersão de $375 \text{ cm}^{-3}pc$ e foi tão forte que provocou a diferença na linha de base do ruído observada no painel superior, que é a soma de todas as frequências medidas. O painel inferior mostra o pulso em função da frequência e do tempo. As linhas horizontais representam dados corrompidos. Fonte: Petroff et al. apud Lorimer et al. (2019) [82]	67

Figura 27 – Gráfico contendo informações da medida de dispersão de pulsares, fontes transientes de radio rotacionais (RRATs) – que é um tipo específico de pulsar –, pulsares localizados na Grande e na Pequena Nuvem de Magalhães (SMC/LMC) e as FRB publicadas. Os objetos acima da linha horizontal ($DM/DM_{max} > 1$) são ditos fontes extragaláticas. Fonte: Petroff et al. (2019) [82].	68
Figura 28 – Resultado da inferência estatística para o modelo Λ CDM plano, apresentados com 68,3% e 95,4% de confiança estatística.	86
Figura 29 – Vínculos entre os parâmetros livres do modelo w CDM plano inferidos a partir de dados de supernovas, oscilações acústicas de bárions e cronômetros cósmicos. Resultados exibidos com 68,3% e 95,4% de confiança estatística.	87
Figura 30 – Resultado para os vínculos entre os parâmetros livres do modelo CPL plano representados com 2 níveis de confiança estatística.	88
Figura 31 – Resultados da estimativa com barras de erro.	89
Figura 32 – Regra de Bayes. Usa-se esse método ara calcular a probabilidade de A dado B . Fonte: Matt Buck (2009) [130]	99
Figura 33 – Cronômetros cosmológicos, dados de $H(z)$	104
Figura 34 – Resultado da inferência estatística. Para gerar as cadeias de Markov foram usados um conjunto de 100 caminhantes aleatórios e 10000 interações.	106

Lista de tabelas

Tabela 1	– Componentes do Universo escritas em termos de w	56
Tabela 2	– 41 medidas de $H(z)$ usadas nas inferências estatísticas.	80
Tabela 3	– 17 medidas não-correlacionadas de BAO usadas nas inferências estatísticas.	81
Tabela 4	– Tempo médio, em horas, entre cada detecção de FRBs para os radiotelescópios considerados.	81
Tabela 5	– Resultados numéricos das inferências estatísticas realizadas para os modelos considerados. Para tal, foram usados três conjuntos de dados diferentes. Os valores inferidos são exibidos com 95,4% de confiança estatística.	83
Tabela 6	– Valores de $H(z)$ inferidos por [86] ao assumir que foram medidos pelo radiotelescópio CHIME com as incertezas multiplicadas pelos erros dos radiotelescópios BINGO e ASKAP.	84
Tabela 7	– Resultado da inferência estatística sobre os parâmetros do modelo Λ CDM plano. Através dessas barras de erros, percebe-se que o radiotelescópio BINGO é um proeminente instrumento a ser usado para detecção de FRB, mesmo que seu foco principal sejam as BAO.	85
Tabela 8	– Os valores de $\Delta\chi^2(m, \beta)$ que definem as regiões de confiança estatística.	98

Lista de abreviaturas e siglas

UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UAF	Unidade Acadêmica de Física
PPGF	Programa de Pós-Graduação em Física
CCT	Centro de Ciências e Tecnologia
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
SN Ia	Supernovas do Tipo Ia
Λ CDM	Lambda Cold Dark Matter
CC	Cronômetros Cósmicos
BAO	Baryon Acoustic Oscillations
CMB	Cosmic Radiation Background
FRB	Fast Radio Burst
BINGO	Baryon Acoustic Oscillations in Neutral Gas Observations
E.C.	Era Comum
A.E.C.	Antes da Era Comum
SN	Supernova
NASA	National Aeronautics and Space Administration
JPL-Caltech	Jet Propulsion Laboratory - Caltech
ESA	European Space Agency
SDSS	Sloan Digital Sky Survey
eBOSS	Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey
USP	Universidade de São Paulo
LBNL	Lawrence Berkeley National Laboratory
ESO	European Southern Observatory

VISTA	Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy
RRATs	Rotating Radio Transient
SMC	Small Magellanic Cloud
LMC	Large Magellanic Cloud
DM	Dispersion Measure
w CDM	w Cold Dark Matter
CPL	Chevallier-Polarski-Linder
CHIME	Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment
ASKAP	Australian Square Kilometer Array Pathfinder
BPS	Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
COBE	Cosmic Background Explorer
RCF	Radiação C3smica de Fundo
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe
CCD	Charge-Coupled Device
2dFGRS	2dF Galaxy Redshift Survey
EHT	Event Horizon Telescope
LIGO	Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
WIMPs	Weakly Interacting Massive Particles
ALI	Algoritmo Linearmente Invariante
CERN	Conseil Europ3een Pour la Recherche Nucl3eaire

Lista de símbolos

Ga	Giga-anos
cm	Centímetros
Mpc	Megaparsec
km	Quilômetros
s	Segundos
m	Metros
K	Kelvin
β	Letra grega Beta minúscula
γ	Letra grega Gamma minúscula
ϕ	Letra grega Phi minúscula
Λ	Letra grega Lambda maiúscula
λ	Letra grega Lambda minúscula
χ	Letra grega Chi minúscula
ρ	Letra grega Rho minúscula
θ	Letra grega Theta minúscula
Ω	Letra grega Ômega maiúscula
ω	Letra grega Ômega minúscula
Σ	Letra grega Sigma maiúscula
σ	Letra grega Sigma minúscula
μ	Letra grega Mu minúscula
ν	Letra grega Nu minúscula
δ	Letra grega Delta minúscula
Δ	Letra grega Delta maiúscula

ϵ	Letra grega Épsilon minúscula
η	Letra grega Eta minúscula
∂	Símbolo para derivada parcial
∞	Símbolo para infinito

Sumário

1	INTRODUÇÃO	29
2	TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	39
2.1	Teoria de Campos para um Campo Escalar real	39
2.2	O método BPS	41
2.3	Estabilidade linear	42
2.4	Carga topológica	43
2.5	Defeitos topológicos	44
2.6	Defeitos não-topológicos	46
3	COSMOLOGIA PADRÃO	49
3.1	Gravitação a partir da formulação lagrangiana	49
3.2	A dinâmica do Universo	51
3.2.1	Evolução do campo escalar	54
3.3	O desvio para o vermelho	55
3.4	Componentes características do Universo	55
4	COSMOLOGIA OBSERVACIONAL	59
4.1	Cronômetros cósmicos	59
4.2	Oscilações acústicas de bárions	60
4.3	Supernovas do tipo Ia	61
4.4	Radiação cósmica de fundo	63
4.5	Rajadas rápidas de rádio	65
4.6	Combinando observáveis	68
5	PARAMETRIZAÇÕES FENOMENOLÓGICAS	71
5.1	Parametrizações da equação de estado	71
5.1.1	A constante cosmológica	71
5.1.2	Modelo $wCDM$	72
5.1.3	Parametrização CPL	72
5.2	Formalismo de primeira ordem	72
5.2.1	Aplicação para espaço plano	72
5.2.2	Aplicação para espaço com curvatura	74
5.2.3	Aplicação para energia escura + matéria (poeira)	75
5.2.4	Novo método analítico	77
6	TESTES COSMOLÓGICOS	79

6.1	Dados	79
6.2	Resultados usando SNIa, BAO e CC	82
6.2.1	Λ CDM plano	82
6.2.2	w CDM	82
6.2.3	CPL plano	83
6.3	Resultados usando 4 dados de $H(z)$	83
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	91
	 APÊNDICES	 95
	APÊNDICE A – MÉTODOS ESTATÍSTICOS	97
A.1	O método qui-quadrado	97
A.2	O método de Bayes	98
A.3	Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC)	100
A.3.1	Algoritmo de Metropolis-Hastings	101
A.4	Algoritmo MCMC linearmente invariante	102
A.4.1	Inferência bayesiana em cosmologia	104
	 REFERÊNCIAS	 107

1 Introdução

Cosmologia é o estudo do universo em si, da sua história, evolução, composição e sua dinâmica [1]. Se trata de um ramo muito antigo do conhecimento, que remonta às primeiras tentativas dos seres humanos explicarem o mundo ao seu redor – cf. figuras 1 e 2 –, e da busca pelas respostas das perguntas fundamentais: "de onde viemos?"; "o que somos?" e "para onde vamos?". A cosmologia moderna, pautada no método científico, ainda tem como objetivo responder essas mesmas perguntas. No entanto, as respostas mudaram drasticamente ao longo dos milênios, pois elas são determinadas a partir da nossa percepção do Cosmos [2], em outras palavras, nosso entendimento acerca da realidade depende do quanto podemos observar a natureza usando nossos próprios olhos ou através de instrumentos – eg. telescópios e radiotelescópios. Durante a maior parte da história dos humanos, essas observações foram feitas sem o uso de instrumentos. Com o advento de novas tecnologias que permitiram o aprimoramento das ferramentas usadas em observações astronômicas, estabeleceu-se um novo campo de estudo: a Cosmologia Observacional, que eliminou qualquer resquício de caráter puramente especulativo da cosmologia e tornou-a uma ciência de precisão. Atualmente, dispomos de enormes volumes de dados coletados por diferentes técnicas ao redor do mundo acerca de diversas propriedades de fenômenos e objetos cósmicos, que podem ser usados para ajudar pesquisadores a contar a história da evolução do Universo. Ainda não se tem as respostas das perguntas anteriores, porém as novas perguntas que fazemos são igualmente intrigantes: "como o Big Bang aconteceu?"; "o que veio antes do Big Bang?"; "do que o Universo é feito?"; "terá o Universo um fim e como será?"; etc.

A cosmologia moderna surge a partir do desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral (RG), publicada por Albert Einstein em 1915 – e confirmada diversas vezes por experimentos distintos ao longo do último século –, que foi fundamental para o estudo de novos modelos cosmológicos para estudar o Cosmos. Ao lidar com esses modelos, é necessário especificar alguns parâmetros através da teoria. Para verificar qual modelo melhor descreve o Universo ao qual pertencemos, precisa-se verificar observacionalmente os valores desses parâmetros. Quanto mais restritiva e acurada for a determinação, melhor e mais precisa será a descrição fornecida por esse modelo. No decorrer das últimas décadas, inúmeras observações permitiram tanto refinar e aprofundar nosso conhecimento acerca do nosso Universo, como conhecer fenômenos jamais observados antes. Incluindo evidências, coletadas por vários experimentos distintos, de que o Universo é preenchido por componentes *escuras*: matéria escura e energia escura, cujas explicações teóricas representam alguns dos maiores desafios da física moderna. O alvorecer da cosmologia observacional se deu a partir de observações realizadas por instrumentos ópticos [5], mas



Figura 1 – Um disco de bronze com detalhes em ouro, considerado a representação registrada mais antiga de objetos astronômicos, datado em 1600 A.E.C.. Fonte: Pásztor (2015) [3].



Figura 2 – Gravura rupestre por indígenas norte-americanos datada de 1006 anos E.C. encontrada no estado do Arizona, que possivelmente é uma representação da supernova SN 1006. Fonte: Hamacher (2014) [4].

as observações baseadas na região rádio do espectro eletromagnético mostraram-se as maiores contribuintes para o desenvolvimento da cosmologia. A seguir, estão descritos os experimentos – ou colaborações – realizados durante os últimos 30 anos, que lograram destaque na história da cosmologia observacional.

- **COBE, WMAP e PLANCK:**

A história da cosmologia foi profundamente transformada após a descoberta, em 1965 por Arno Penzias e Robert Wilson, da *Radiação Cósmica de Fundo* (RCF) – ou Cosmic Microwave Background (CMB), como é amplamente conhecida –, que representa a radiação emitida pelo Universo nos seus primeiros milhares de anos após o Big Bang, na época da *recombinação* – cf. capítulo 4. Medir experimentalmente o espectro e estrutura da CMB, que evoluiu para galáxias e aglomerados de galáxias, é necessário para provar a origem dessa radiação de fundo e testar modelos cosmológicos contra observações experimentais. Essa é uma tarefa difícil, pois exige medidas com *radiômetros*¹ extremamente precisos de forma que os ruídos oriundos de fontes terrestres sejam eliminados. Essa façanha histórica foi realizada inicialmente por balões de altas altitudes e posteriormente por sondas espaciais [5, 6].

Três experimentos distintos – cf. figura 3 – foram de grande importância para o estudo da CMB:

- *Cosmic Background Explorer* (COBE) foi o primeiro, uma sonda lançada em 1989 pela Agência Espacial Norte-Americana (NASA), construída com o

¹ Instrumento que realiza medidas em qualquer faixa do espectro eletromagnético.

propósito de estudar o Big Bang e a subsequente formação de galáxias, como também as estruturas em larga escala. Ela foi projetada para acomodar três instrumentos que possibilitaram grandes descobertas, dentre elas [7]: que o espectro da CMB é semelhante ao espectro da radiação de corpo negro com temperatura de aproximadamente $2.7K$ e a presença de anisotropias no mapa da CMB – detectadas com baixa resolução angular.

- *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) foi lançada em 2001 pela NASA, equipada com dois telescópios, ambos contendo radiômetros de alta precisão, dispostos em direções diametralmente opostas entre si, de maneira que, ao girar, a sonda pudesse mapear o céu inteiro a partir de um ponto privilegiado localizado a aproximadamente 1.5 milhões de quilômetros da Terra. Esse experimento durou 9 anos e atingiu uma sensibilidade 45 vezes maior que a do COBE produzindo um mapa das anisotropias da CMB com alta resolução angular. Com essa sonda, foi possível restringir com precisão significativa, e em concordância com outras observações, o valor de diversos parâmetros cosmológicos do modelo Λ CDM², que permitiu estimar a idade e a curvatura do Universo, sendo $t_0 = 13.772 \pm 0.059 \text{ Ga}$ e $\Omega_k = -0.0027^{+0.0039}_{-0.0038}$ respectivamente, como também a constante de Hubble em $H_0 = 69.32 \pm 0.80 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Além disso, calculou-se as proporções de matéria bariônica, matéria escura e energia escura, juntamente com possíveis confirmações da teoria inflacionária e da nucleossíntese primordial [5, 6, 8].
- *Planck* foi a terceira geração de sondas espaciais usadas para estudar a radiação cósmica de fundo. Lançada em 2009 pela Agência Espacial Europeia (ESA), com o principal objetivo de caracterizar as anisotropias da CMB, e também localizada em um ponto estratégico a partir da Terra, a sonda foi projetada para suportar um telescópio de larga abertura e 74 detectores altamente sensíveis para varrer o céu em diferentes frequências, capaz de realizar uma rotação com período de uma revolução por minuto. A missão Planck durou quatro anos, mapeando o céu inteiro duas vezes ao ano. Até então, as melhores medidas das anisotropias da CMB nas escalas relevantes para a cosmologia foram realizadas por essa sonda. Além disso, mais uma vez o modelo Λ CDM manteve-se em concordância com as observações e os resultados das estimativas para seus parâmetros foram aprimoradas [9, 5, 6, 10].

- **High-Z Supernova Search Team e Supernova Cosmology Project:**

O destino do Universo pode ser estudado a partir de medidas do *desvio para o vermelho* e o do brilho de supernovas distantes – cf. capítulo 4 –, pois elas fornecem

² Conferir os capítulos 4 e 5 para mais detalhes sobre esse modelo.

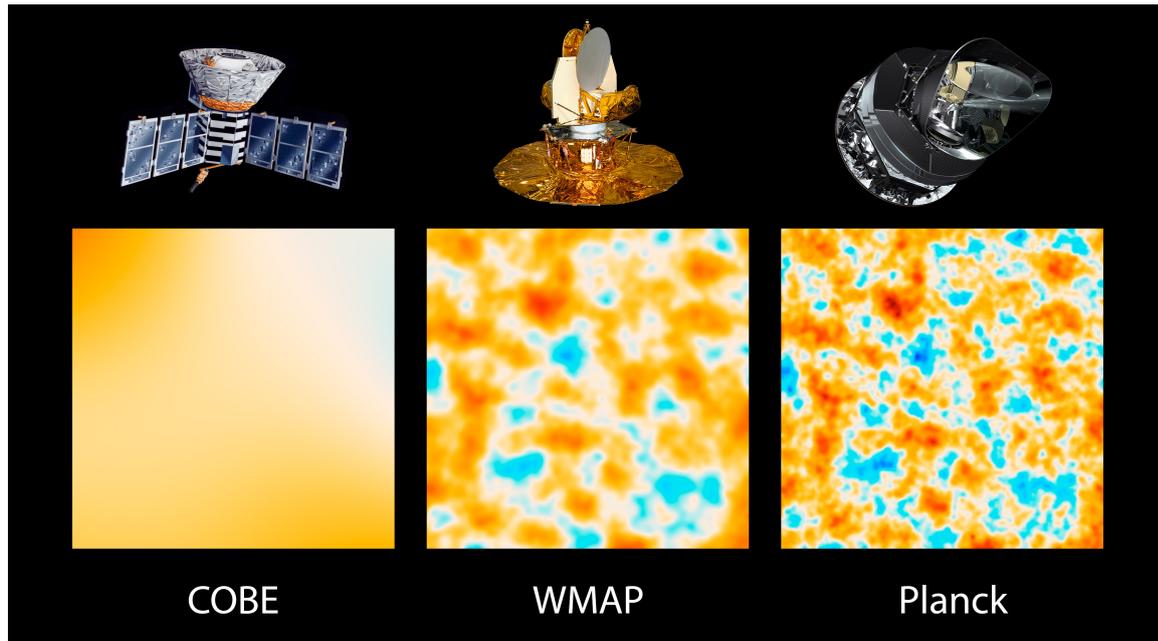


Figura 3 – Ilustração das três gerações de sondas espaciais projetadas para estudar a CMB e a evolução na resolução angular das anisotropias medidas por cada uma delas. Fonte: NASA/JPL-Caltech/ESA (2013) [11]

um registro das mudanças na taxa de expansão do Cosmos ao longo dos últimos bilhões de anos. No final da década de 90, duas colaborações internacionais – High-Z Supernova Search Team e Supernova Cosmology Project – formadas com o objetivo de descobrir e monitorar supernovas do tipo Ia, ao utilizar dados coletados por diversos telescópios terrestres e espaciais – figura 4 –, foram capazes de revelar a surpreendente descoberta de que o Universo encontra-se em expansão acelerada. Sendo assim, a partir das evidências observacionais, todos os modelos que consideravam um Universo sem a presença de uma *constante cosmológica* positiva – usada para descrever o mecanismo que causa tal aceleração, amplamente conhecido como energia escura – foram descartados [12, 13, 14].

- **Sloan Digital Sky Survey:**

Iniciado no ano 2000, com o objetivo inicial de mapear grande áreas do céu para realizar imagens e fazer levantamentos espectrográficos de objetos celestes, o SDSS continua ativo e liberando dados para o público em geral recursivamente desde de 2003. Esse experimento dispõe de um telescópio com um espelho de 2.5 m – cf. figura 5 – equipado com uma câmera CCD – sigla em inglês para Dispositivo de Carga Acoplada – para varrer o céu em diferentes comprimentos de onda. As medidas de galáxias e outros observáveis em larga escala são fundamentais para testar modelos cosmológicos. Os mapas gerados pelo SDSS revelaram tanto que o Universo é dominado por *matéria escura* e *energia escura* – onde a primeira trata-se de uma componente material que interage apenas gravitacionalmente com as

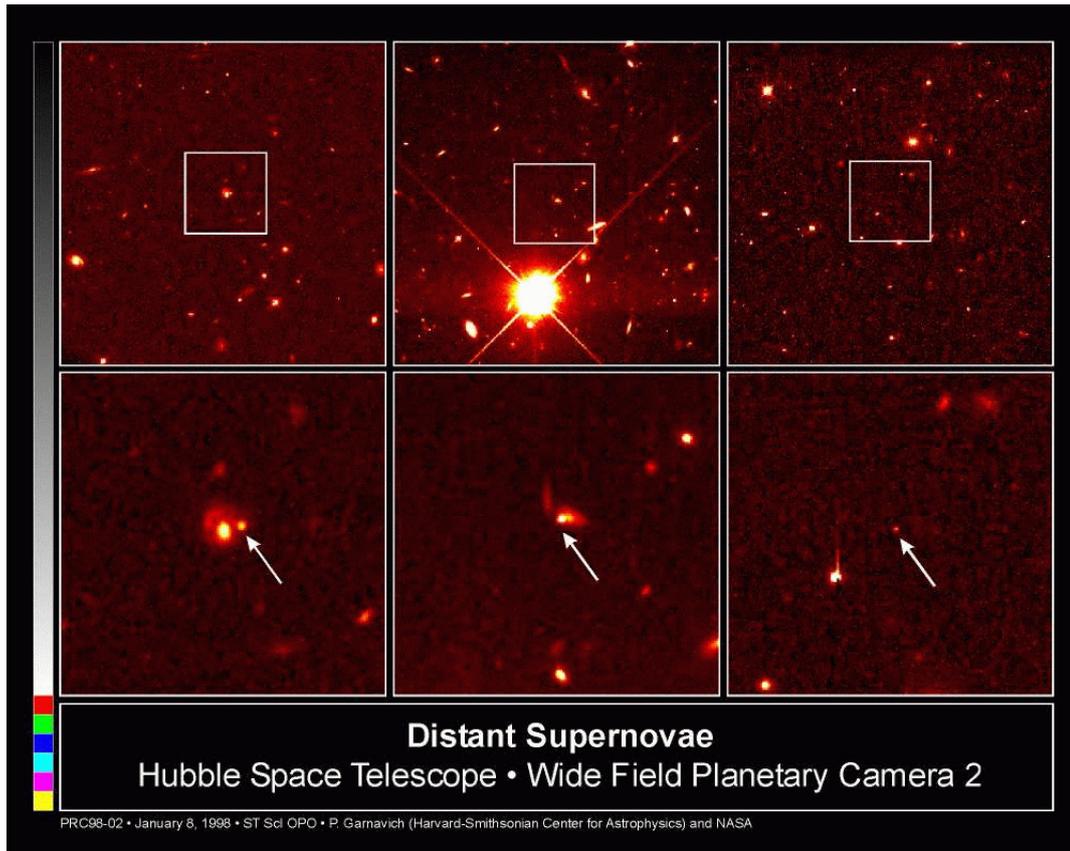


Figura 4 – Imagem contendo três supernovas distantes capturadas pelo telescópio espacial Hubble, que foram usadas para compor o conjunto de dados que levou a descoberta da expansão acelerada do Universo. Fonte: NASA (1998) [15]

outras constituintes do Universo, e que ainda não foi detectada experimentalmente –, como também que oscilações esféricas no plasma primordial foram as principais causas para o padrão atual de densidade na distribuição de galáxias no Universo observável. Essa marca deixada pelas *oscilações acústicas de bárions* foram detectadas de forma inédita pela primeira fase do SDSS – e também por outro experimento contemporâneo, o 2dFGRS –, usando medidas de mais de um milhão de galáxias. Além disso, combinando os dados do SDSS com os do eBOSS – *Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* –, que é uma das missões do experimento principal, foi possível montar o maior mapa em três dimensões do Universo até então, cobrindo aproximadamente 11 bilhões de anos de evolução cósmica – figura 6 – [16, 17, 18].

- **Parkes Observatory:**

O observatório Parkes, localizado na Austrália e construído em 1961, continua em funcionamento atualmente – figura 7. Foi projetado com um prato de 64 m de diâmetro, que recebeu diversas modificações e aprimoramentos desde então para continuar sendo um instrumento de alto impacto científico. Ao longo de seus mais de meio século de história, esse radiotelescópio foi responsável por inúmeros resultados, como: a detecção do campo magnético da Via Láctea; descoberta de diversos pulsares



Figura 5 – Telescópio principal usado nas observações do experimento Sloan Digital Sky Survey. Fonte: Fermilab Visual Media Services (2014) [19].

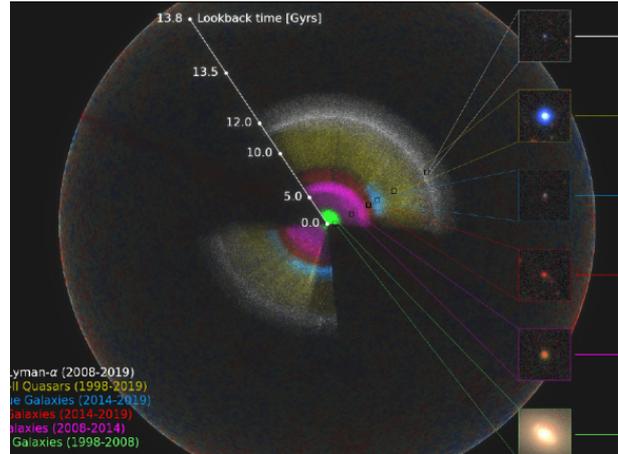


Figura 6 – O maior mapa 3d do Universo, construído ao combinar dados do SDSS e eBOSS. Fonte: Imagem adaptada de [20].

e quasares; dar suporte a NASA para a transmissão ao vivo da primeira caminhada lunar em 1969, como também no recebimento de sinais da sonda Voyager I; a identificação dos remanescentes de várias supernovas, incluindo a SN1006. Além disso, ao reprocessar arquivos de medidas de pulsares feitos pelo Parkes, em 2007 Duncan Lorimer e seus colaboradores descobriram as *Rajadas Rápidas de Rádio* – ou FRB, para o termo em inglês Fast Radio Bursts –, que serão abordadas no capítulo 4. Esse fenômeno que consiste em pulsos extremamente rápidos e com alta energia no espectro do rádio tem grande potencial para serem usados como provas cosmológicas, pois estudos recentes mostram que é possível traçar a evolução da taxa de expansão do Universo através das FRB [21, 22, 23, 24].

Além dos experimentos descritos acima, vários outros foram/são muito importantes para a cosmologia, como: o *Event Horizon Telescope* (EHT), que produziu a primeira imagem direta de um buraco negro super-massivo, permitindo testar a Relatividade Geral de Einstein a partir dela; e o *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO), que realizou a primeira detecção de uma *onda gravitacional* – previsão da Relatividade Geral –, que pode ser usada para estudar a taxa de aceleração da expansão do Universo [26, 27, 28]. Apesar dos grandes avanços alcançados pela cosmologia nas últimas décadas, ainda há várias questões importantes a serem resolvidas. Dentre elas, estão [18, 29, 30]:

- Caso a matéria escura não seja detectada diretamente nas próximas duas décadas, deveria-se procurar outras teorias?;
- Como buracos negros super-massivos – que são objetos astrofísicos extremamente densos com campos gravitacionais muito intensos e que são fundamentais para



Figura 7 – Radiotelescópio Parkes, construído na Austrália com um prato de 64 m, que foi fundamental para a descoberta das FRB. Fonte: Dyer (2012) [25].

entender a formação de galáxias e suas propriedades observacionais – se formaram no Universo primordial?;

- A inflação – que foi um período no qual considera-se um campo escalar para explicar a expansão extremamente rápida do fluido primordial nos primeiros instantes do Universo – é a teoria correta para explicar os primeiros momentos após o Big Bang?;
- Como ocorreu a transição do período da evolução cósmica dominado pela matéria bariônica para o dominado pela energia escura?;
- Há sinais de violações da teoria da Relatividade Geral?.

Dessa forma, novos instrumentos devem ser pensados e construídos para que novos experimentos possam ser realizados e fornecerem dados cosmológicos suficientes para buscar respostas para as questões que ainda permanecem sem resposta.

Atualmente, há diversos instrumentos em desenvolvimento ou em estágio avançado de construção, dentre eles está o radiotelescópio **BINGO** – sigla para Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations –, que está sendo construído no interior da Paraíba na Serra do Urubu, local escolhido tanto pela topologia do terreno favorecer o design do telescópio – figura 8 – como também por ser afastada de grandes cidades e, conseqüentemente, com pouca interferência de rádio. Com o objetivo principal de fazer a primeira detecção das Oscilações Acústicas de Bárions no comprimento de onda do rádio, o BINGO será construído com dois espelhos parabólicos estáticos, um de 40 e outro de 30 metros, respectivamente. Também contará com aproximadamente

50 receptores – estimativa otimista para sua versão final, uma vez que inicialmente o projeto contará com 28 receptores – para captar e interpretar os sinais refletidos pelos espelhos. Esse radiotelescópio fará um mapa do céu ao observar a linha de 21 *cm* do hidrogênio neutro, que é uma forma extremamente promissora de estudar a evolução cósmica. Tais medidas poderão: fornecer mapas das regiões ionizadas durante a *era da reionização* – quando a formação de objetos astronômicos nas primeiras centenas de milhares de anos após o Big Bang ionizaram o Universo –; permitir estudar propriedades do meio intergaláctico, como também das primeiras estrelas e galáxias; possivelmente fornecer informação sobre as condições iniciais do período da inflação cósmica; e também permitir estimar de forma ainda mais precisa os parâmetros cosmológicos para modelos energia escura. Além disso, o BINGO poderá realizar medidas de FRB, com uma taxa de detecção muito competitiva em relação a outros experimentos já em execução ou em igualmente em construção, tornando-o um auspicioso instrumento de alta tecnologia e grande impacto científico [31, 32, 33, 34, 35].

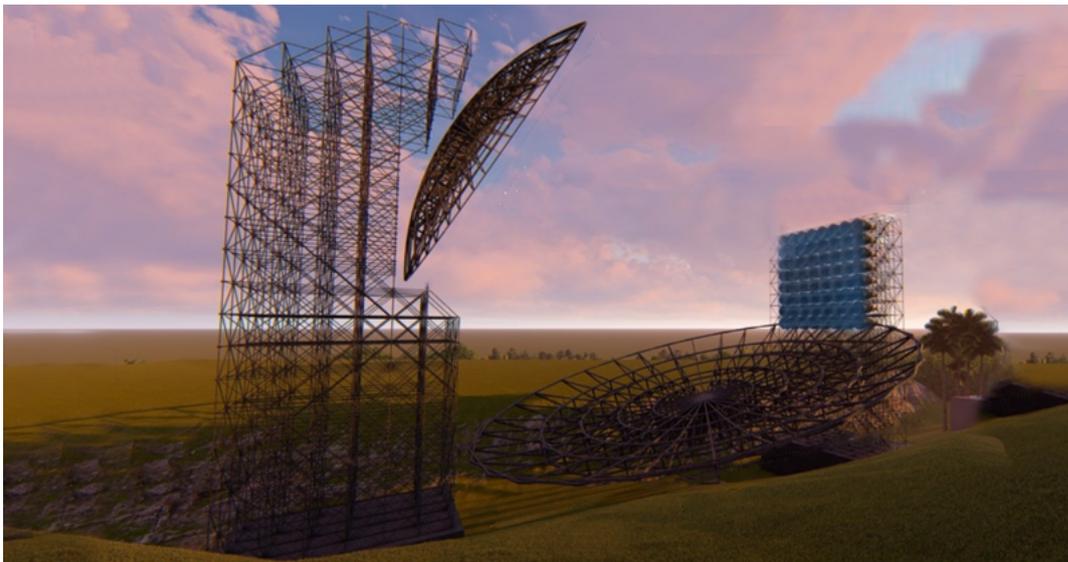


Figura 8 – O radiotelescópio BINGO, que será fundamental para o desenvolvimento da cosmologia moderna na próxima década. Essa é uma representação gráfica, criada por Graciele A. de Oliveira, do possível design futuro do instrumento. Fonte: Jornal da USP (2019) [36].

Nesse sentido, esta dissertação tem o objetivo de apresentar como a cosmologia moderna tenta responder algumas das perguntas fundamentais que atravessam a história da ciência executada durante as últimas décadas, a partir da perspectiva da teoria de campos e da cosmologia observacional. Com esse intuito, no capítulo 2, faremos uma introdução ao arcabouço teórico utilizado na teoria clássica de campos para um campo escalar real com uma dimensão espacial e uma temporal, para através dessas técnicas, derivarmos as equações de campo da Relatividade Geral de Einstein no capítulo 3. Nesse capítulo, serão expostos elementos da dinâmica do Universo e como explicar teoricamente a sua evolução usando as equações de Friedmann, como também algumas propriedades

do modelo Λ CDM. No capítulo 4, serão examinadas algumas das principais observações cosmológicas usadas para estudar modelos cosmológicos e como a combinação de diferentes observações são importantes para estimar parâmetros cosmológicos de maneira mais precisa e, conseqüentemente, para compreensão da evolução do Cosmos. No capítulo 5, expomos algumas parametrizações fenomenológicas que são usadas para definir modelos cosmológicos e apresentamos uma revisão do *Formalismo de Primeira Ordem*, capaz de gerar modelos cosmológicos alternativos aos que já existem na literatura. Além disso, apresentaremos uma nova metodologia analítica para propor novos modelos cosmológicos em contextos mais realistas. No capítulo 6, por fim, usamos tudo que foi exposto até então para realizarmos testes cosmológicos, usando os seguintes conjuntos de dados, coletados a partir de diferentes instrumentos e técnicas distintas: 41 medidas do *Parâmetro de Hubble*; 17 medidas não-correlacionadas de observáveis relacionados a *Oscilações Acústicas de Bárions*; 1048 medidas de *Supernovas do tipo Ia*, através do conjunto de dados *Pantheon*; e 4 medidas do Parâmetro de Hubble simuladas através de dados de *Rajadas Rápidas de Rádio*.

2 Teoria Clássica de Campos

De maneira geral, um *campo* é entendido como uma quantidade física que possui infinitos graus de liberdade com um valor definido em cada ponto do espaço e do tempo: (\vec{x}, t) . Enquanto a mecânica clássica aplicada a sistemas discretos lida com um número finito de coordenadas generalizadas – ou graus de liberdade –, $q_a(t)$ (onde $a = 1, 2, \dots, n$), descritos por equações diferenciais ordinárias. Em teoria de campos estuda-se a dinâmica dos campos

$$\phi_a(\vec{x}, t), \quad (2.1)$$

que são descritos por equações diferenciais parciais, nos quais tanto a quanto \vec{x} são considerados como índices. Campos são adequados para descrever sistemas contínuos, que ocorrem naturalmente na física, como por exemplo: ondas em um meio elástico; o campo gravitacional newtoniano; os campos elétrico e magnético, entre outras [37, 38, 39]. Nessa dissertação, o campo escalar desempenha um papel protagonista, uma vez que serão estudados modelos de cosmológicos nos quais a energia escura é mimetizada por um campo escalar. Portanto, uma breve revisão da Teoria Clássica de Campos e algumas aplicações é extremamente bem-vindas.

2.1 Teoria de Campos para um Campo Escalar real

Nesta seção considera-se um campo escalar real com uma dimensão espacial e uma temporal $\phi(x, t)$, ou seja, $(1 + 1)$ dimensões. A dinâmica desse campo é dada por uma função \mathcal{L} , chamada *densidade lagrangiana*,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.2)$$

que depende do campo $\phi(\vec{x}, t)$, da derivada temporal $\dot{\phi}(\vec{x}, t)$ e do gradiente do campo $\nabla\phi(\vec{x}, t)$. Em teoria de campos [38] as variáveis dependentes – ou graus de liberdade do sistema – são tratadas como pontos no espaço. Dessa forma, pode-se integrar a densidade lagrangiana sobre todo espaço – uma soma sobre os graus de liberdade – obtendo a *lagrangiana* do sistema

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dx^3. \quad (2.3)$$

A ação é a integral de L no tempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L} dx^3 = \int \mathcal{L} dx^4. \quad (2.4)$$

A equação de movimento para o campo $\phi(x, t)$ – ou equação de Euler-Lagrange – é encontrada a partir da minimização da ação [37, 39], que incorpora o princípio de Hamilton, ao variar a dinâmica do sistema fixando os pontos extremos entre os instantes t_1 e t_2 impondo $\delta S = 0$:

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.5)$$

onde $\ddot{\phi} = \partial^2/\partial t^2$ e $\phi'' = \partial^2/\partial x^2$.

Ao lidar com campos estáticos, a eq.(2.5) torna-se

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.6)$$

Para resolvê-la, usa-se o chamado *método da quadratura*, que consiste em reduzir a equação anterior à uma equação diferencial de primeira ordem. Para isso, deve-se multiplicar a eq.(2.6) por dx/dt em ambos os lados:

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d}{dx} V(\phi); \quad (2.7)$$

e em seguida integrar. Com isso, obtém-se

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + C, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V + 2C}, \quad (2.9)$$

onde C é uma constante determinada pelas condições de contorno. Para que as soluções da eq.(2.6) tenham sentido físico [40] é necessário que o campo possua energia finita, ou seja, nos extremos do potencial tem-se que $V'(\phi) = 0$.

Da formulação *hamiltoniana* para teoria de campos, sabe-se que a integral em todo o espaço da *densidade hamiltoniana*, associada ao campo $\phi(x, t)$, tem como resultado uma

expressão equivalente a energia total do sistema (c.f. [39]). Dessa forma, pode-se escrever

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V \right]. \quad (2.10)$$

Para que o resultado da eq.(2.10) seja finito [41] as soluções do campo devem satisfazer algumas condições de contorno. Nota-se que o primeiro termo do integrando da eq.(2.10) – conhecido por energia gradiente [40] – é por definição positivo. Ao supor que o segundo termo – a energia potencial – também seja positivo, é preciso impor que as soluções sejam funções suaves e diferenciáveis na região entre os mínimos, de maneira que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \Rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Com isso [40, 42], para que cada uma das energias gradiente e potencial sejam finitas independentemente, o termo potencial deve ser nulo nos extremos. Desse modo, supõe-se que existam soluções $\bar{\phi}_1$ e $\bar{\phi}_2$ tais que $V(\bar{\phi}_1) = V(\bar{\phi}_2) = 0$, de forma que as soluções estáticas encaminhem-se assintoticamente para um dos mínimos do potencial através dos limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \Rightarrow \bar{\phi}_1; \quad (2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) \Rightarrow \bar{\phi}_2. \quad (2.13)$$

Portanto, para que a integral da eq.(2.10) convirja, é necessário assumir que $C = 0$. Assim,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.14)$$

2.2 O método BPS

Pode-se obter a equação anterior através de um procedimento análogo, conhecido por *Método BPS*, desenvolvido independentemente por Bogomol'nyi [43] e por Prasad e Sommerfield [44]. O desenvolvimento do método fundamenta-se no estudo da energia da solução estática para potenciais não-negativos [40]. De maneira geral, sabe-se que a energia das soluções estáticas para o campo é dada pela eq.(2.10). Pode-se escrevê-la, após completar um quadrado perfeito, da seguinte forma:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \right] dx. \quad (2.15)$$

Como o primeiro termo da equação anterior é sempre positivo, tem-se como condição necessária para a minimização da energia deste sistema

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V}, \quad (2.16)$$

que é idêntica a eq.(2.14) [45]. Isso implica que a energia mínima é dada por

$$E = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2V} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) dx. \quad (2.17)$$

Em seguida, supõe-se que existe uma função $W(\phi)$, chamada *superpotencial*, de forma que

$$V = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.18)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$. Ao substituir a eq.(2.18) na eq.(2.17), obtém-se a chamada *energia BPS*

$$E_{BPS} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \right| = |W[\phi(x \Rightarrow +\infty)] - W[\phi(x \Rightarrow -\infty)]| = |\Delta W|, \quad (2.19)$$

que representa o menor valor da energia e é validada quando a seguinte relação é satisfeita

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.20)$$

Dessa forma, segundo [40], é possível calcular a energia das soluções a partir da função superpotencial através dos limites assintóticos do campo escalar sem necessariamente conhecer a forma explícita das soluções.

2.3 Estabilidade linear

Investiga-se a estabilidade linear das soluções clássicas ao considerar pequenas flutuações em torno da solução estática $\phi_0(x)$, supondo a seguinte solução perturbada:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \eta(x, t), \quad (2.21)$$

onde $\eta(x, t)$ descreve a perturbação. Presume-se que a flutuação é pequena, de maneira que se possa considerar apenas as contribuições lineares em η . Assim, ao substituir a solução acima na equação de movimento – eq.(2.5) –, e depois expandindo o termo potencial em série de Taylor ao redor de η pequeno, obtém-se, em primeira ordem em η :

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (2.22)$$

Como a solução estática só depende de x , considera-se a seguinte forma para a perturbação

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}(x) \cos(w_n t), \quad (2.23)$$

que tem como resultado uma equação do tipo Schrodinger independente do tempo:

$$H\bar{\eta}(x) = w_n^2 \bar{\eta}(x), \quad (2.24)$$

sendo

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, as soluções estáticas serão linearmente estáveis se a equação (2.24) possuir apenas autovalores positivos, de outro modo, o argumento do cosseno tornaria-se imaginário, o que violaria a suposição de que a perturbação seria pequena, pois esta cresceria exponencialmente com o tempo [40, 46].

Independente da forma explícita do potencial, a eq.(2.24) sempre terá o chamado *modo zero* com autovalor nulo, sendo este o estado de menor energia, que garante a estabilidade das soluções. Para demonstrar a existência desse estado, para o caso estático, diferencia-se (2.5) em relação a x , obtendo:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0, \quad (2.26)$$

que é uma equação de autovalores com autovalor nulo. Pode-se representar a autofunção $d\phi/dx$ por η_0 . Sendo assim, se $\eta_0(x)$ não apresenta nodos, significa que todos os outros estados possuem valores positivos, pois uma função de onda que não possui nodos equivale ao estado fundamental de um sistema [40, 46].

2.4 Carga topológica

A relação entre simetrias e leis de conservação em teoria de campos é verificada pelo *Teorema de Noether*. Esse teorema afirma que toda simetria contínua em um sistema está associada a uma *corrente conservada* $j^\mu(x)$, que implica em uma *carga conservada* Q . Em outras palavras, pode-se caracterizar as soluções do campo $\phi(x, t)$ através da presença de uma corrente topológica conservada, desde que as soluções tendam aos valores de mínimo nos extremos, ou seja, que obedecem as relações $\phi(x \Rightarrow -\infty) \Rightarrow \bar{\phi}_1$ e $\phi(x \Rightarrow +\infty) \Rightarrow \bar{\phi}_2$,

onde $V(\bar{\phi}_1) = V(\bar{\phi}_2) = 0$ [37, 47, 41]. Pode-se definir a corrente topológica da seguinte maneira

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W, \quad (2.27)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é antissimétrico, ou seja, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10}$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$, para $\mu, \nu = 0, 1$. Definir a corrente em termos de W é mais adequado do que em termos do próprio campo ϕ [48], pois evita que a carga seja mal definida quando as soluções divergem assintoticamente. Dessa forma [45], a assimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ implica na conservação da corrente topológica, isto é, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Isso permite calcular a carga topológica associada à corrente através da integral, em todo o espaço, da componente j^0 , que é entendida como a densidade de corrente e é numericamente igual a energia – conhecida por energia BPS –,

$$Q = \int j^0 dx = [W_\phi(x \Rightarrow +\infty) - W_\phi(x \Rightarrow -\infty)] = E_{BPS}, \quad (2.28)$$

para campos estáticos. Assim, pode-se identificar dois tipos de soluções, chamadas de *defeitos*: os defeitos topológicos com carga topológica diferente de zero, pois conectam mínimos distintos, $\bar{\phi}_1 \neq \bar{\phi}_2$; e defeitos não-topológicos, que possuem carga topológica nula, pois conectam o mesmo valor de mínimo em ambos os extremos. Soluções do tipo *kink* e do tipo *lump* são exemplos de defeitos topológicos e não-topológicos, respectivamente.

2.5 Defeitos topológicos

Esse tipo de defeito, também chamado de *kink* – as soluções negativas são chamadas de *antikink* –, surge em teorias clássicas de campos escalares reais unidimensionais. Caracterizam-se por: possuírem energia finita e estabilidade definida pela presença de uma carga topológica, proveniente de uma corrente conservada. Essas soluções se comportam de maneira diferente a medida que afastam-se, em direções opostas, da origem. De forma que conectam assintoticamente valores distintos do campo, $\phi(x \Rightarrow \infty) \neq \phi(x \Rightarrow -\infty)$. Quando esses defeitos são imersos em mais de uma dimensão espacial, tornam-se extensas estruturas planas, chamadas *paredes de domínio*, e suas energias transformam-se em densidades de energia [40, 47]. Para exemplificar, considera-se o modelo ϕ^4 , um dos mais simples que implica a formação de defeitos topológicos e é de grande interesse para diversas áreas da física, como matéria condensada e cosmologia. De forma simplificada, essa teoria é caracterizada pelo seguinte potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2, \quad (2.29)$$

representado na figura 9. Percebe-se que a solução possui dois mínimos degenerados em $\phi^\pm = \pm 1$, que identificam os vácuos clássicos do campo. As soluções estáticas devem satisfazer a eq.(2.5), sendo escritas como – cf. figura 10:

$$\phi(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.30)$$

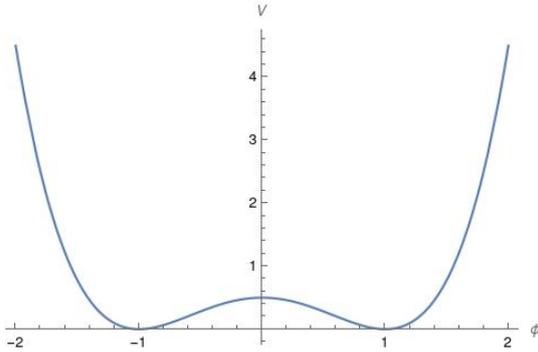


Figura 9 – Potencial do modelo ϕ^4 .

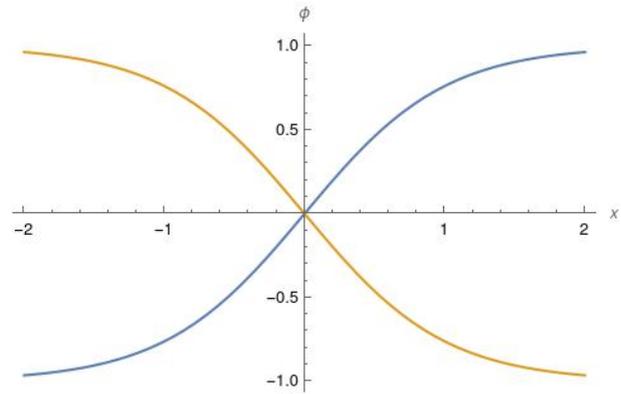


Figura 10 – Solução kink em azul, e antikink em amarelo para o modelo ϕ^4 .

A energia do modelo ϕ^4 é dada pela eq.(2.10), na qual o potencial tende a zero nos extremos, resultando em:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^4(x) dx = \frac{4}{3}, \quad (2.31)$$

onde a densidade de energia do defeito é dada por $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$ – figura 11. Nota-se que a densidade de energia concentra-se em uma região finita e distribuída de forma simétrica em relação à origem. Pode-se encontrar esse mesmo valor para a energia do kink ao definir a função potencial, integrando a eq.(2.20), obtendo:

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3. \quad (2.32)$$

Em seguida ao aplicar $W(\phi)$ no método BPS, tem-se como resultado,

$$E = |W(\phi = 1) - W(\phi = -1)| = \frac{4}{3}. \quad (2.33)$$

Ao verificar o modo zero da solução, pode-se inferir sobre sua estabilidade – figura 12:

$$\eta_0(x) = \frac{d(\tanh(x))}{dx} = \text{sech}^2(x). \quad (2.34)$$

Percebe-se que o modo zero não possui nós, o que garante a estabilidade da solução, pois, qualquer outro estado ligado existente deve possuir obrigatoriamente energia positiva.

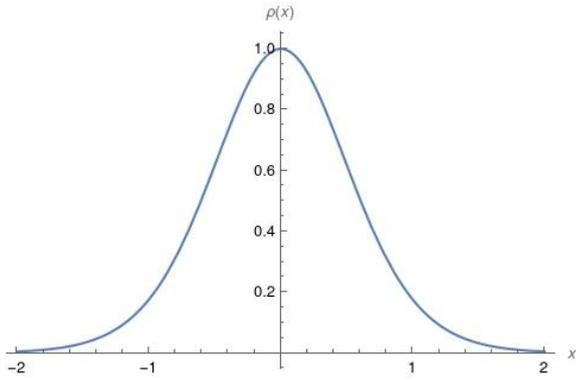


Figura 11 – Densidade de energia do modelo ϕ^4 .

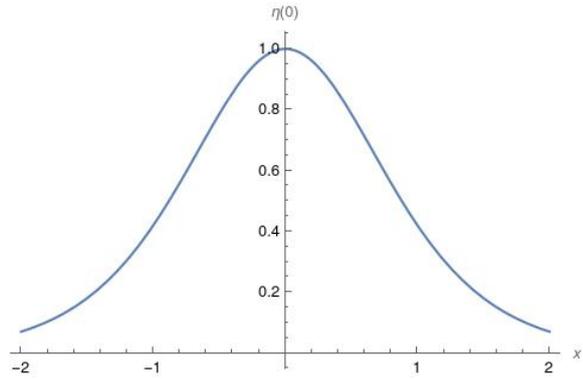


Figura 12 – Modo zero associado ao modelo ϕ^4 .

2.6 Defeitos não-topológicos

Ao contrário dos defeitos do tipo kink [40], os defeitos não-topológicos – ou defeitos tipo *lumps*, são estruturas instáveis, que apresentam carga topológica nula, visto que sua forma característica conecta a uma mesma configuração do campo. Como exemplo, considera-se o modelo ϕ^4 invertido, definido pelo potencial – cf. figura 13:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4. \quad (2.35)$$

As soluções estáticas que satisfazem a equação de movimento são dadas por:

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.36)$$

que podem ser vistas na figura 14

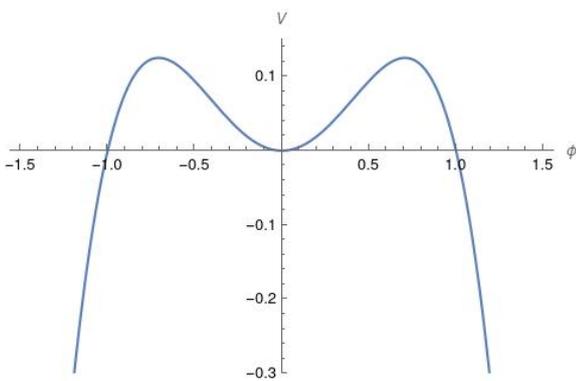


Figura 13 – Potencial do modelo ϕ^4 invertido.

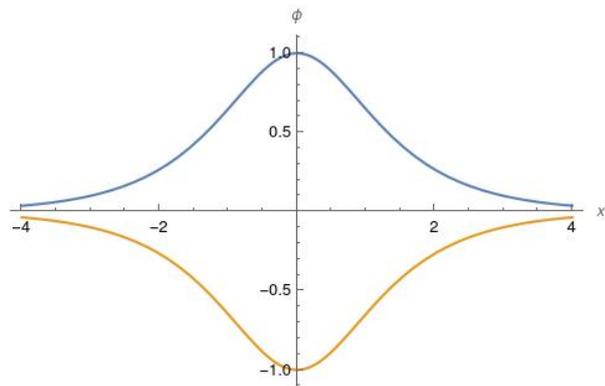


Figura 14 – Solução lump em azul e solução anti-lump em amarelo para o modelo ϕ^4 invertido.

A energia deste modelo possui a forma:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(x) \tanh^2(x) dx = \frac{2}{3}, \quad (2.37)$$

sendo o integrando sua densidade de energia – cf. figura 15. Nota-se que que essa densidade é nula no centro, e tem seu valor máximo nos pontos $x = \pm \text{arctanh}(\sqrt{2}/2)$. Isso indica a presença de estrutura interna nos lumps. A estabilidade é verificada a partir do modo zero, o qual é expresso como:

$$\eta_0 = \frac{d(\text{sech}(x))}{dx} = -\text{sech}(x) \tanh(x), \quad (2.38)$$

que caracteriza a instabilidade desse defeito, pois implica em autovalores negativos na eq.(2.24) – figura 16.

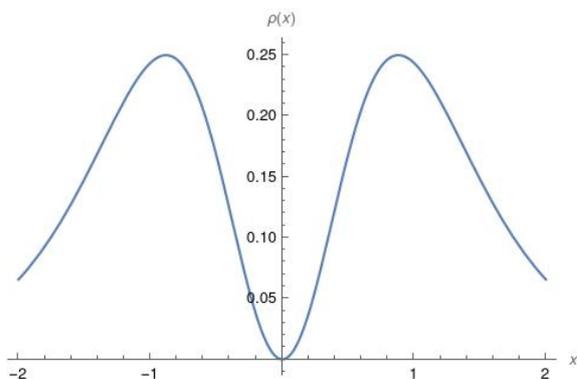


Figura 15 – Densidade de energia que caracteriza o modelo ϕ^4 invertido.

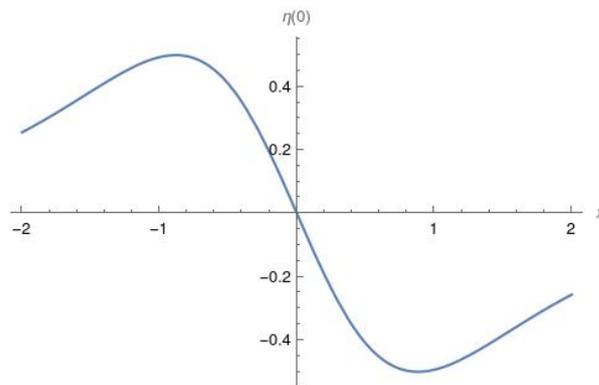


Figura 16 – Modo zero associado ao modelo ϕ^4 invertido, que evidencia sua instabilidade.

A teoria de campos é muito importante para a cosmologia de diversas maneiras. De fato, campos escalares que geram estruturas estáveis como os defeitos topológicos são de grande interesse para o estudo da evolução cósmica. A presença de defeitos como paredes de domínio são amplamente estudadas no contexto cosmológico, pois podem ter surgido quando o Universo – em seus momentos iniciais – passou por diversas transições de fase, deixando rastros dessas estruturas [49]. No próximo capítulo, usaremos as ferramentas discutidas acima para derivar as equações de campo da Relatividade Geral e em seguida definir modelos cosmológicos que pressupõe que a energia escura pode ser descrita através de campos escalares, denominados inflatons.

3 Cosmologia padrão

O estudo da evolução do universo fundamenta-se em uma simples premissa, conhecida como *Princípio Cosmológico*, a qual afirma que em largas escalas o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico, ou seja, aparenta ser idêntico em todos os pontos do espaço e em qualquer direção ao ser observado. Dessa forma, pode-se afirmar – em alusão a Nicolau Copérnico – que o planeta Terra não está em uma posição privilegiada no Cosmos [50, 49]. Há duas grandes evidências que sustentam o Princípio Cosmológico, são elas:

- A *Radiação Cósmica de Fundo*¹, que é uma comprovação de que o Universo era um fluido composto de fótons, aproximadamente uniforme, extremamente quente e denso a cerca de 14 bilhões de anos atrás – figura 17;
- A distribuição de galáxias em larga escala – aproximadamente 3×10^8 anos-luz –, como sugerem pesquisas que mediram as distâncias de centenas de milhares de galáxias – figura 18.

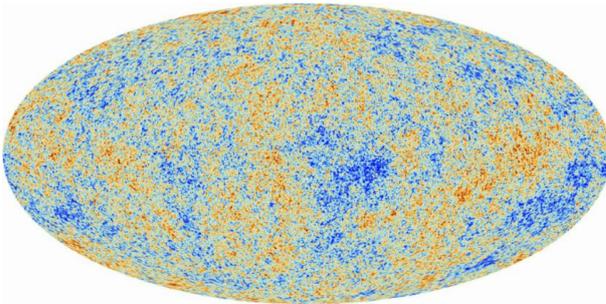


Figura 17 – Uma fotografia do Big Bang. Radiação Cósmica de Fundo. Fonte: ESA/Planck Collaboration (2014) [9]

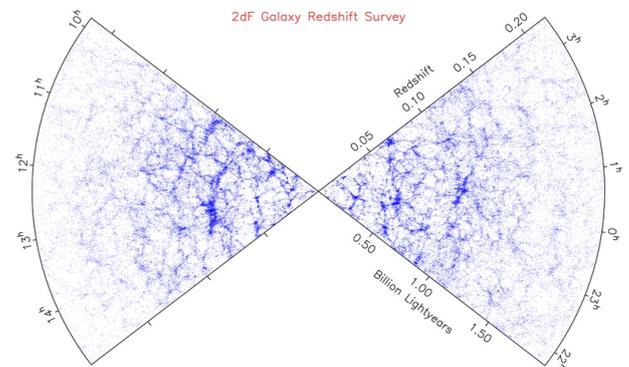


Figura 18 – Mapa da distribuição de galáxias em largas escalas. Fonte: 2df galaxy redshift survey [51].

3.1 Gravitação a partir da formulação lagrangiana

Como a Relatividade Geral é um dos pilares da cosmologia moderna, é necessário derivar as equações de campo de Einstein. Uma forma de obtê-las é através do princípio

¹ Conferir capítulo 4

variacional. Como visto no capítulo anterior, a ação é uma integral sobre o espaço-tempo de uma densidade lagrangiana:

$$S = \int \mathcal{L}_H d^4x. \quad (3.1)$$

A densidade lagrangiana pode ser escrita como $\sqrt{-g}$ vezes um escalar, onde g é o determinante do tensor métrico. Esse escalar é definido de tal forma que envolva ao menos derivadas de segunda ordem não nulas da métrica. Sabe-se que o *tensor de Rieamann* é composto justamente por derivadas de segunda ordem da métrica, contudo, o único escalar independente que se pode construir a partir desse tensor é o *escalar de Ricci* R [52]. David Hilbert, descobriu em 1915, que a escolha mais simples para uma densidade lagrangiana seria, então,

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R. \quad (3.2)$$

No contexto em que a energia escura do Universo é descrita por um campo escalar ϕ , faz-se necessário a inclusão de um termo adicional escolhido como uma densidade lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$, resulta na ação:

$$S = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right) d^4x. \quad (3.3)$$

Ao estabelecer que a variação da ação em relação a métrica é constante, obtém-se::

$$\delta S = \int \left[(\delta\sqrt{-g}) \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right) \right] d^4x. \quad (3.4)$$

Como $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, pode-se reescrever a eq.(3.4) da seguinte forma:

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu} \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g} \frac{\delta R}{4} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} \right] d^4x. \quad (3.5)$$

Para dar continuidade a esse cálculo, faz-se as seguintes considerações:

- Sabe-se que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, dessa maneira pode-se escrever

$$\int -\sqrt{-g} \frac{\delta R}{4} = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right], \quad (3.6)$$

onde o segundo termo dentro dos colchetes é nulo, devido a condições de contorno;

- Ao variar a densidade lagrangiana em relação ao tensor métrico, tem-se:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Ao substituir as equações (3.6) e (3.7) na eq.(3.5) reagrupando os termos semelhantes, obtêm-se:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4 x. \quad (3.8)$$

Entretanto, como publicado por Albert Einstein em 1915,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

que estabelece uma relação entre a geometria e a matéria do Universo, o lado esquerdo da eq.(3.9) está associado a configuração geométrica do espaço-tempo e o lado direito com o conteúdo de matéria. Tem-se que $k = 8\pi G/c^4$, porém nessa abordagem, considera-se o sistema de unidades, no qual $4\pi G = c = 1$, o que implica em $k = 2$, sendo assim,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2 T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Dessa forma, ao substituir a eq.(3.10) na eq.(3.8), a seguinte condição deve ser obedecida:

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = T_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

que é o *tensor energia-momento*. Em outras palavras, o princípio variacional aplicado à ação (3.3), que é comumente chamada de *ação de Einstein-Hilbert*, resulta nas equações de campo da Relatividade Geral:

$$G_{\mu\nu} = 2 T_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein.

3.2 A dinâmica do Universo

Sabe-se que dos princípios da relatividade de Einstein [53], o espaço e o tempo integram-se em uma estrutura quadridimensional, o espaço-tempo. Para descrever a dinâmica do Universo, primeiramente, é necessário enunciar como calcula-se a distância entre dois pontos no espaço-tempo a partir de um elemento de linha apropriado. Usa-se, então, a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que é adequada para qualquer espaço-tempo consistente com o princípio cosmológico, ao postular que o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico, mas evoluindo com o tempo [49, 52]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 dl^2, \quad (3.13)$$

onde: t é o *tempo cósmico*, que representa o tempo medido por um observador que vê o Universo se expandindo uniformemente a sua volta; $a(t)$ é o *fator de escala*, que é um termo introduzido para descrever a expansão ou contração do Universo com o tempo; e dl^2 representa o elemento de linha em um espaço de três dimensões com curvatura constante. Em coordenadas esféricas, essa métrica tridimensional tem a seguinte forma:

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.14)$$

Sendo k determinado pela geometria espacial do Universo – figura 19:

$$k = \begin{cases} +1, & \text{esférica} \\ 0, & \text{plana} \\ -1, & \text{hiperbólica.} \end{cases}$$

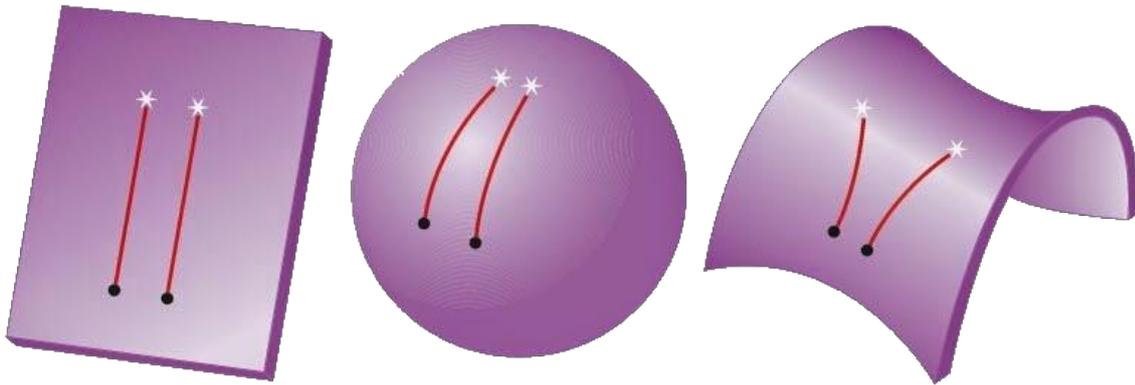


Figura 19 – Três superfícies com valores diferentes para o parâmetro de curvatura k : na primeira, onde $k = 0$, linhas paralelas permanecem paralelas indefinidamente; na segunda, $k = 1$, linhas paralelas eventualmente se encontram; por fim, na terceira, $k = -1$, as linhas paralelas nunca se encontram. Imagem adaptada de [54].

Para obter as equações que descrevem a dinâmica do Universo, aplica-se a métrica FLRW nas equações de campo da gravitação de Einstein. A partir do elemento de linha, têm-se as componentes do tensor métrico, \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1; \\ g_{11} &= \frac{-a^2}{(1 - r^2k)}; \\ g_{22} &= -a^2 r^2; \\ g_{33} &= -a^2 r^2 \text{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Com isso, pode-se calcular os *símbolos de Cristoffel* não-nulos e conseqüentemente obter as componentes não-nulas do *tensor de Ricci*, cujas relações explícitas são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}; \\ R_{ij} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

com $i, j = 1, 2, 3$. Calcula-se, em seguida, o escalar de Ricci, que é a segunda contração do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\ &= -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sendo assim, escreve-se explicitamente as componentes temporal e espacial do tensor de Einstein da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right); \\ G_{ij} &= \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considera-se que a matéria e energia do Universo sejam descritas por um fluido perfeito que, por sua vez, incorpora o princípio cosmológico – tal qual a métrica. O tensor energia-momento para um fluido dessa natureza é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

onde ρ e p são respectivamente a densidade de energia e pressão totais, com U sendo a quadri-velocidade,

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (3.20)$$

Dessa forma [52], pode-se reescrever o tensor energia-momento, seguindo:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & g_{ij}p & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Com isso, usa-se as equações (3.12) e (3.18) para escrever:

$$\begin{aligned} H^2 &\equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2}; \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2} \sum_i (\rho_i + 3p_i), \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde considera-se que, tanto a pressão quanto a densidade de energia totais podem ser decompostas em termos das respectivas componentes do Universo, que serão apresentadas numa seção posterior. Essas são as *equações de Friedmann*. A primeira, caracteriza a taxa de expansão do fator de escala, em função da densidade de energia, através do *parâmetro de Hubble* H . Enquanto que, a segunda equação expressa a taxa de aceleração do fator de escala em função da densidade de energia e pressão totais do Universo.

3.2.1 Evolução do campo escalar

Ao considerar uma lagrangiana do tipo (2.2) na equação (3.11), pode-se escrever expressões para a densidade de energia e pressão associadas ao campo escalar [55]:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi); \\ p_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Com elas, reescreve-se a primeira equação de Friedmann (3.22) em termos do campo e do seu potencial:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2}. \quad (3.24)$$

A partir dessa equação pode-se escrever uma forma explícita para o potencial:

$$V(\phi) = \frac{3H^2}{2} + \frac{\dot{H}}{2} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.25)$$

Ao variar a ação (3.3) em termos do campo escalar, encontra-se a equação de movimento associada ao campo, também conhecida como *equação de Klein-Gordon*, cuja forma é:

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}H + V(\phi) = 0. \quad (3.26)$$

3.3 O desvio para o vermelho

Na década de 20, o astrônomo Edwin Hubble descobriu – juntamente com seus colaboradores Vesto Slipher e Milton Humason – que o comprimento de onda λ_0 das linhas de emissão de galáxias distantes é maior do que o comprimento de onda esperado para os elementos que as compõe quando medidos em um referencial inercial. Isso pode ser explicado a partir da suposição de que o Universo se expande, de maneira que, provoca um alongamento proporcional ao fator de escala no comprimento de onda da radiação ao deslocar-se entre o ponto de emissão e o de observação. Esse efeito ficou conhecido como *desvio para o vermelho cosmológico* z , ou *redshift* em inglês. Introduzido através da seguinte relação:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (3.27)$$

onde $z = 0$ refere-se ao redshift correspondente ao estágio de evolução atual do Cosmos, $a(t)$ e $a(t_0)$ são os fatores de escala no momento da emissão t e da observação t_0 . Para um Universo em expansão, tem-se $a(t_0) > a(t)$ e $z > 0$, que representa um desvio para o vermelho – figura 20. Já para um Universo em contração, tem-se $a(t_0) < a(t)$ e $z < 0$, ou seja, um desvio para o azul [56, 57].

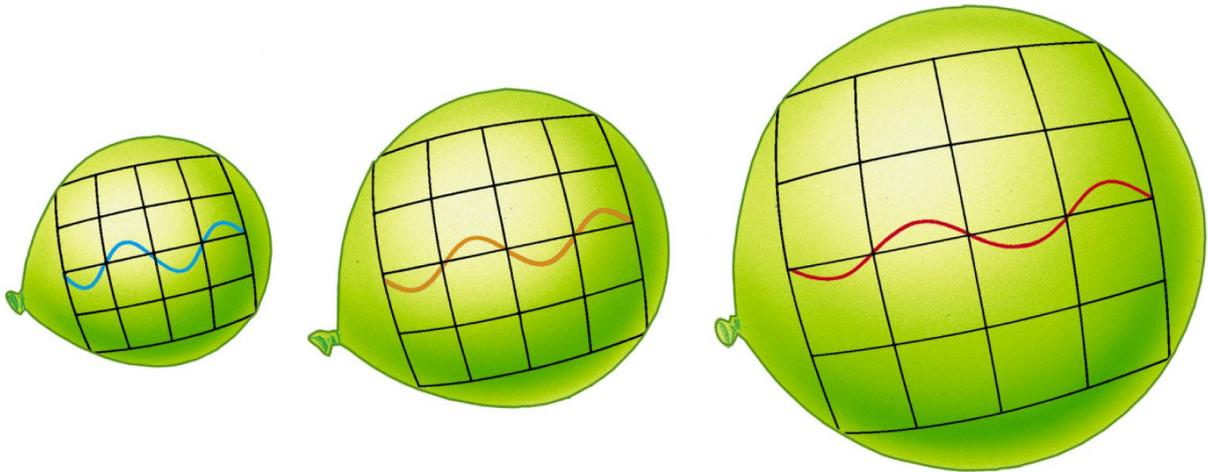


Figura 20 – Uma representação do efeito de alongamento do comprimento de onda da radiação ao se propagar através de um espaço em expansão. Fonte: Palma (2013) [58].

3.4 Componentes características do Universo

Pode-se combinar as equações de Friedmann para escrever uma equação de continuidade para a pressão e densidade de energia totais, dada por:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.28)$$

Essa expressão reflete a conservação do tensor energia-momento [59]. Sendo assim [53], para resolver o sistema – composto pela equação (3.28) e a primeira equação de Friedmann – é necessário fechar o sistema com uma relação entre a pressão e densidade de energia de todos os constituintes do Cosmos a serem considerados, chamada de equação de estado. Para a maioria dos fluidos perfeitos relevantes em cosmologia, essa equação tem a seguinte forma [52]:

$$p = w\rho, \quad (3.29)$$

onde w é o parâmetro adimensional da equação de estado.

De acordo com o modelo cosmológico padrão Λ CDM – sigla para Λ Cold Dark Matter –, que é o mais aceito até então para descrever os parâmetros cosmológicos observacionais [53, 59], o Universo é constituído por:

- **Matéria bariônica:** Composta por matéria não-relativística. É o ingrediente necessário para a formação de planetas, estrelas, galáxias e nuvens de gás. Sua pressão pode ser desconsiderada, $p = 0$, e sua densidade de energia decai da seguinte forma: $\rho \propto a^{-3}$ [60, 61];
- **Matéria escura:** Componente com pressão nula e sua densidade de energia evolui de maneira similar a da matéria bariônica. É capaz de aglomerar estruturas e explicar diversas observações astrofísicas. De acordo com o modelo considerado, as prováveis partículas responsáveis por essa constituinte são as *partículas massivas de interação fraca* – termo traduzido da sigla em inglês *WIMPs* –, pois interagem com as componentes restantes apenas gravitacionalmente [59, 61];
- **Radiação:** Usada para descrever fótons e outras partículas relativísticas com $p = \rho/3$. Nesse caso a densidade de energia decai com $\rho \propto a^{-4}$ [53, 60];
- **Energia escura:** A evidência observacional de que o Universo se expande de forma acelerada pode indicar a presença de uma constante cosmológica com $p = -\rho$ [53, 60].

Essas componentes estão descritas em termos do parâmetro adimensional da equação de estado na tabela 1.

Componente	w
Matéria Bariônica	0
Radiação	1/3
Energia escura	-1

Tabela 1 – Componentes do Universo escritas em termos de w .

Ao definir o parâmetro adimensional de densidade [60, 59, 62]:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad (3.30)$$

onde $\rho_{crit} \equiv 3H^2/2$ é a condição necessária para se representar um Universo espacialmente plano, pode-se reescrever a primeira equação de Friedmann para modelos que descrevem a energia escura com equação de estado constante – em termos de redshift – pela seguinte relação

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{x0}(1+z)^{3(1+w)} \right], \quad (3.31)$$

sendo Ω_{r0} o parâmetro adimensional de densidade associado à radiação, Ω_{m0} corresponde ao parâmetro adimensional de densidade total de matéria – bárions e matéria escura –, Ω_{k0} o parâmetro adimensional de densidade de curvatura do Universo e Ω_{x0} está associado a energia escura. O subíndice 0 indica que são os valores atuais para os parâmetros. Consequentemente [61], pode-se inferir que o Universo passou por três épocas distintas ao longo de sua evolução: a primeira, sendo dominada por matéria ultra-relativística na forma de radiação; a segunda foi a era da matéria, que consistiu num período dominado pela matéria bariônica e a matéria escura; e atualmente, o Universo encontra-se em uma era dominada pela energia escura, que é uma componente com pressão negativa e produz a expansão acelerada do Cosmos.

4 Cosmologia observacional

Ao introduzir um modelo cosmológico, assumindo que a Teoria da Relatividade Geral é a teoria correta para a estrutura do espaço-tempo e usando uma métrica adequada, é necessário escrever uma forma para as equações de Friedmann em termos de determinados parâmetros, que descrevem as propriedades do nosso Universo. Para avaliar um modelo, precisa-se de dados observacionais para verificar se a teoria é uma boa aproximação para as observações. Dessa forma, quanto mais observações independentes de observáveis diferentes forem realizadas, maior será a restrição dos valores dos parâmetros e mais acurada será a determinação se a teoria é boa ou não. O advento tecnológico que tivemos ao longo das últimas décadas permitiu que o conjunto de observações coletadas até então corroborassem para estabelecer um modelo teórico de altíssima precisão para o Universo observável, conhecido como Λ CDM. Embora seja a teoria que melhor explica os observáveis, ainda há alguns problemas que ela não consegue resolver. Por isso, a busca por mais dados observacionais é necessária para refinar teorias e encontrar as soluções para mistérios persistentes, como a natureza da energia escura e da matéria escura, por exemplo. A seguir discutimos as principais observações cosmológicas usadas para inferir parâmetros cosmológicos.

4.1 Cronômetros cósmicos

Essa abordagem, introduzida em [63], se baseia na medida da diferença de idades Δt entre pares de antigas galáxias espirais, que se formaram em épocas semelhantes, separadas por uma distância Δz . Esse tipo de galáxia é escolhido pois contém pouca quantidade de poeira estelar permitindo que seja mais fácil obter seus espectros luminosos [59]. A partir desse método, estima-se o valor do parâmetro de Hubble através da seguinte relação:

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \simeq -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Portanto, se essas galáxias são observadas em tempos remotos, pode-se usar a evolução das idades de suas estrelas como um relógio cronometrado com a evolução do tempo cósmico. A principal vantagem desse método reside no fato de que as medidas das idades relativas entre as galáxias dt evitam erros sistemáticos que interferem na medida das idades absolutas de cada galáxia individualmente. Além disso, nesse procedimento, o parâmetro de Hubble é inferido independentemente de um modelo cosmológico [64].

4.2 Oscilações acústicas de bárions

Sabe-se que, nos primeiros milhares de anos, o Universo consistia em um fluido primordial composto por matéria bariônica e radiação – neutrinos, matéria escura, bárions e fótons – fortemente acoplados. Flutuações na densidade dessas componentes evoluem individualmente de formas distintas. Um pouco antes da época do desacoplamento entre bárions e fótons, a interação entre a força gravitacional da matéria e a pressão da radiação produziram ondas sonoras esféricas nas regiões mais densas do fluido primordial, a elas dá-se o nome de *Oscilações Acústicas de Bárions* – ou *BAO*, da sigla em inglês para *Baryon Accoustic Oscillations*. A medida que o Universo esfriou devido a expansão – período que é chamado de *recombinação* –, os primeiros átomos de hidrogênio puderam ser formados, fazendo com que as ondas no fluido primordial congelassem e os fótons se desacoplassem dos bárions deixando rastros como anisotropias na radiação cósmica de fundo e excessos de densidade na distribuição de matéria do Cosmos. Com isso, instantes após o desacoplamento – período conhecido como época de arraste, com redshift z_d –, a gravidade fez a matéria se aglutinar no centro dessas oscilações e num raio de aproximadamente $150Mpc$ ao seu redor – estruturas como galáxias tendem a se formar nesses locais onde a densidade de matéria é maior. Esse raio, r_d , é definido como uma escala característica, conhecida como *horizonte acústico* – figura 21 –, que representa a distância máxima percorrida pelas oscilações acústicas de bárions e permite calcular distâncias cósmicas. Sendo assim, o horizonte acústico é dado por:

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (4.2)$$

onde $c_s = 3^{-1/2} \left[1 + \frac{3}{4}\rho_b(z)/\rho_r(z)\right]^{-1/2}$ é a velocidade das ondas sonoras no fluido primordial em termos de redshift [53, 59, 65, 66].

Uma das principais técnicas para medir distâncias como também a taxa de expansão do Universo usa a assinatura das BAO nos padrões de aglomerados de galáxias distribuídos em largas escalas [67]. Para isso é necessário medir a escala característica tanto na direção transversal à linha de visada a partir do número de pares de galáxias observados em uma dada separação angular $\Delta\theta$, quanto ao longo da direção radial sendo percebida como um aumento no número de pares de galáxias em uma separação Δz . Essas duas escalas fornecem informação sobre *distância diametral* D_A , sendo:

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0\sqrt{|\Omega_k|}} \text{senn} \left[|\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (4.3)$$

Com $\text{senn}(x) \equiv \text{sen}(x)$, x , $\text{senh}(x)$, para $\Omega_k < 0$, $\Omega_k = 0$ e $\Omega_k > 0$, respectivamente. Tem-se também que $E(z) \equiv H(z)/H_0$. É necessário um grande volume de dados observacionais

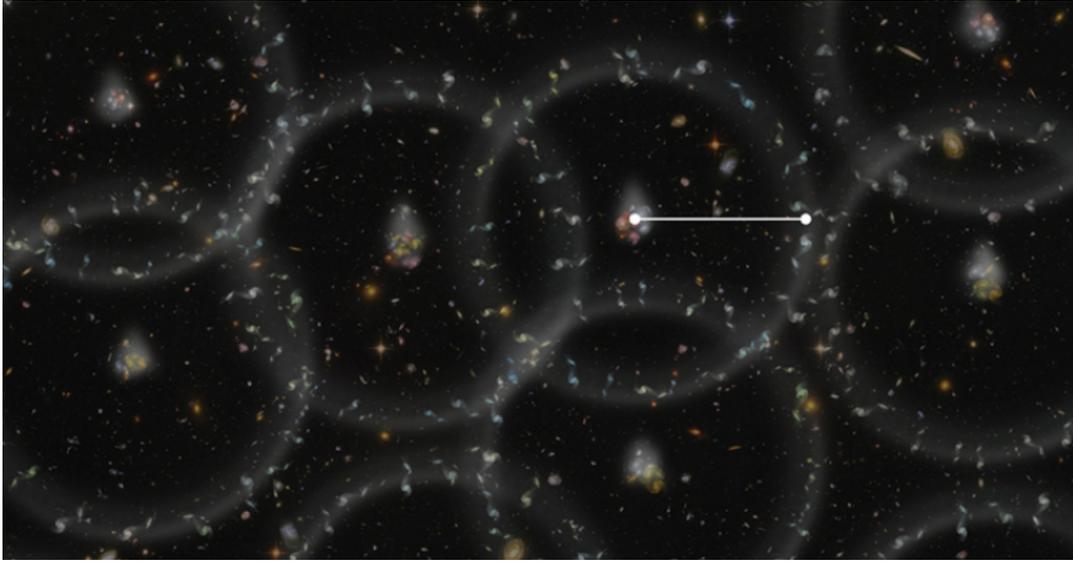


Figura 21 – Representação artística da escala característica (linha branca) proveniente das Oscilações Acústicas de Bárions e de como ela influencia a distribuição de galáxias em largas escalas. Fonte: Zosia Rostomian (LBNL), SDSS-III (2013) [36].

para avaliar D_A e $H(z)$ separadamente. Se o experimento considerado permite apenas medir os sinais de BAO a partir de uma média angular dos padrões de aglomerados de galáxias, pode-se definir uma distância efetiva D_V [64, 67]:

$$D_V(z) = \left[D_m^2(z) \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (4.4)$$

onde $D_m = (1 + z)D_A(z)$, que representa a *distância diametral angular*.

Vários experimentos já mediram com precisão as assinaturas de BAO em aglomerados de galáxias em largas escalas [64]. Para que essas observações sejam realizadas [68], usa-se um modelo cosmológico de referência para orientar a compressão dos dados de forma que os ângulos e redshifts medidos sejam representados em termos das distâncias angulares e da escala característica das BAO.

4.3 Supernovas do tipo Ia

Uma supernova é uma explosão de grandes proporções que acontece nos estágios finais da evolução de uma estrela. Esses eventos cósmicos são bastante comuns e observados em diversos tipos de galáxias. As supernovas do tipo Ia – ou SNIa –, ocorrem em sistemas binários de estrelas, nos quais uma delas é uma *anã branca*, que subtrai matéria da segunda estrela. Nesse processo, a anã branca, após acumular matéria suficiente, explode produzindo uma supernova e despejando seu conteúdo envoltório pelo Cosmos – figura 22. A alta luminosidade das supernovas permite que sejam facilmente detectadas experimentalmente.

As observações dessas explosões foram primordiais para a descoberta de que o Universo expande aceleradamente [55, 59, 64, 65, 69].

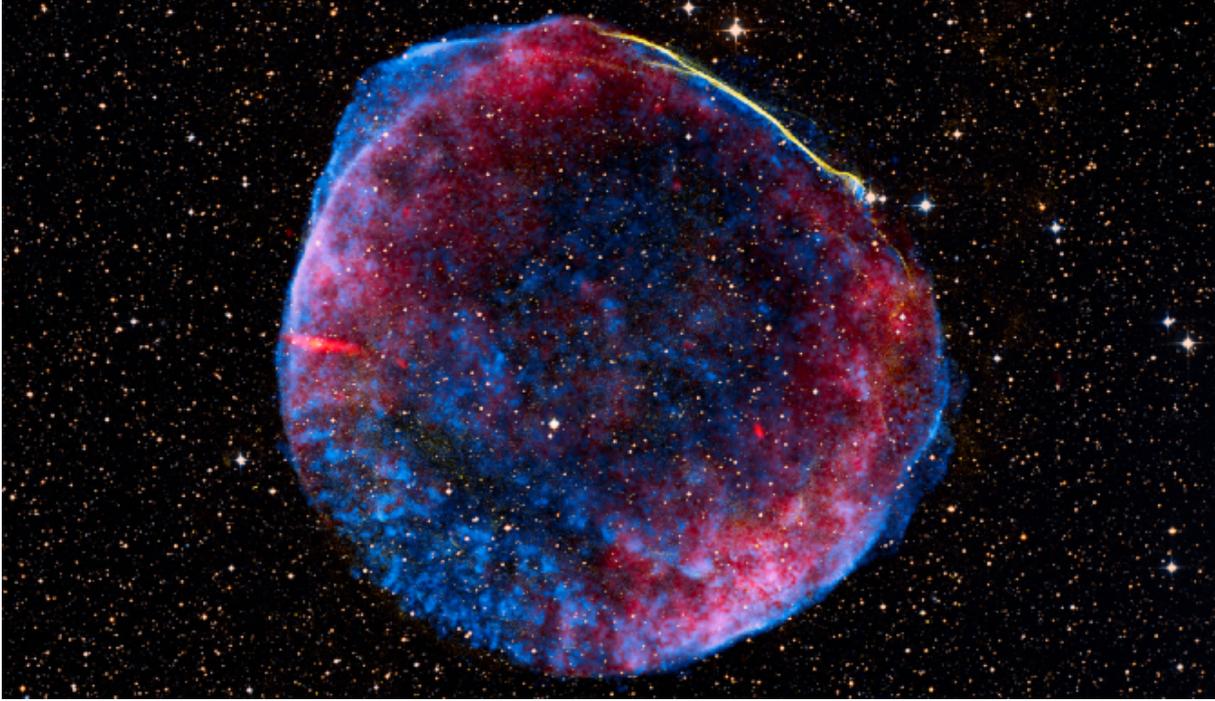


Figura 22 – Imagem da supernova SN 1006 observada em diferentes comprimentos de onda por diversos telescópios terrestres e espaciais. Fonte: ESO (2013) [70].

As supernovas permitem que distâncias relativas sejam aferidas a partir da *distância de luminosidade* D_L , que se relaciona com os parâmetros cosmológicos através da seguinte expressão [59]:

$$D_L(z) = D_m(z)(1 + z). \quad (4.5)$$

Outra quantidade importante é o *módulo de distância* μ dado por:

$$\mu = m_B - M + \alpha X_1 + \beta C, \quad (4.6)$$

onde m_B é um termo de normalização associado ao pico de magnitude do fluxo luminoso, α , β e M são parâmetros que dependem da galáxia na qual a supernova foi observada. Além disso, X_1 e C referem-se aos desvios relacionados à curva de luz e cor da supernova em seu brilho máximo, respectivamente. A distância de luminosidade se relaciona com o módulo de distância através de

$$\mu = 5 \log_{10} D_L + 25. \quad (4.7)$$

4.4 Radiação cósmica de fundo

A radiação cósmica de fundo é o céu mais antigo que pode-se observar através dos experimentos realizados até então. Ela nos permite imaginar como o Universo era quando tinha apenas 300 mil anos de idade, quando os fótons, após desacoplarem da matéria bariônica – ou, em termos de redshift, $z \simeq 1090$ – puderam viajar pelo Cosmos ininterruptamente até nós. Esse evento pode ser observado como uma radiação distribuída em uma superfície esférica cercado qualquer observador no Universo. Chamada de *superfície de último espalhamento* – cf. figura 23 –, refere-se a região no espaço gerada quando a taxa de *espalhamento Thomson* entre os fótons e elétrons passou a ser menor que a taxa de expansão do Universo, permitindo o desacoplamento dos fótons. A radiação detectada a partir dessa superfície, é conhecida por CMB, que é a sigla para o termo traduzido para o inglês, *cosmic microwave background*, que foi desviada para o espectro das micro-ondas devido a expansão do Universo. Pode-se usá-la para testar modelos cosmológicos, estudar a natureza da energia escura, verificar a homogeneidade do Universo e determinar suas propriedades em larga escala. Embora a CMB seja altamente uniforme e isotrópica, ela apresenta pequenas anisotropias e inhomogeneidades em sua temperatura. A maneira mais comum de se representar essas anisotropias é através da função de correlação de dois pontos da distribuição de temperatura dessa radiação. De forma que pode-se expandir essa função em harmônicos esféricos – que é ideal para modelar uma função distribuída na superfície de uma esfera – sendo possível produzir o mapa das anisotropias da CMB [53, 59, 71].

Uma maneira alternativa de expressar os dados da CMB é através do *espectro de potência*, que é a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos da distribuição de temperatura sobre a superfície de último espalhamento – figura 24. Esse espectro é representado em termos das flutuações de temperatura, de uma escala angular e dos momentos de multipolo – usados para definir os harmônicos esféricos. Cada pico no espectro de potência pode ser interpretado fisicamente à luz do modelo Λ CDM. Eles contém informações sobre a geometria do Universo, como também uma evidência indireta da existência da energia escura e das flutuações provenientes do período inflacionário. É possível expressar os dados da radiação cósmica de fundo de maneira mais sucinta através dos chamados *parâmetros de deslocamento*: l_A e R . A escala acústica l_A caracteriza o espectro de potência da CMB na direção transversa à linha de visada, que produz uma variação no espaçamento dos picos. O parâmetro R , por sua vez, é caracterizado na direção da linha de visada, influenciando a altura dos picos [74, 75, 76, 77]. Os parâmetros de deslocamento são definidos da seguinte maneira [78]:

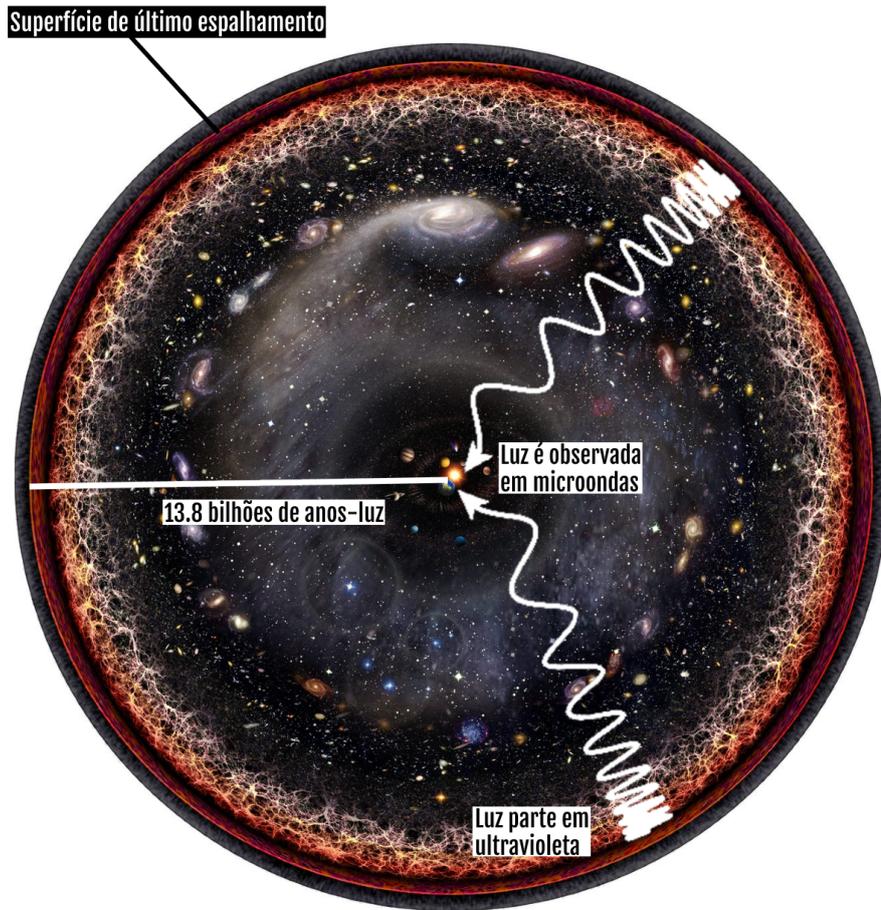


Figura 23 – Representação artística do Universo inteiro em escala logarítmica, tendo como centro o sistema solar. Essa imagem serve para ilustrar como percebemos a radiação oriunda da CMB a partir da superfície de último espalhamento. Fonte: Imagem adaptada de Budassi (2012) [72].

$$l_A = (1 + z_*) \frac{\pi D_A(z_*)}{r_s(z_*)}; \quad (4.8)$$

$$R(z_*) \equiv \frac{(1 + z_*) D_A(z_*) \sqrt{\Omega_m H_0^2}}{c}. \quad (4.9)$$

Sendo z_* o redshift à época do desacoplamento e r_s é o horizonte acústico escrito em termos do fator de escala, dado por:

$$r_s(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{da}{a^2 E(a) \sqrt{3(1 + \frac{3\Omega_b h^2}{4\Omega_\gamma h^2} a)}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{3}{4\Omega_\gamma h^2} = 31500 (T_{CMB}/2.7K)^{-4}, \quad T_{CMB} = 2.7255K. \quad (4.11)$$

As quantidades Ω_b e Ω_γ representam os parâmetros adimensionais relacionados a densidade

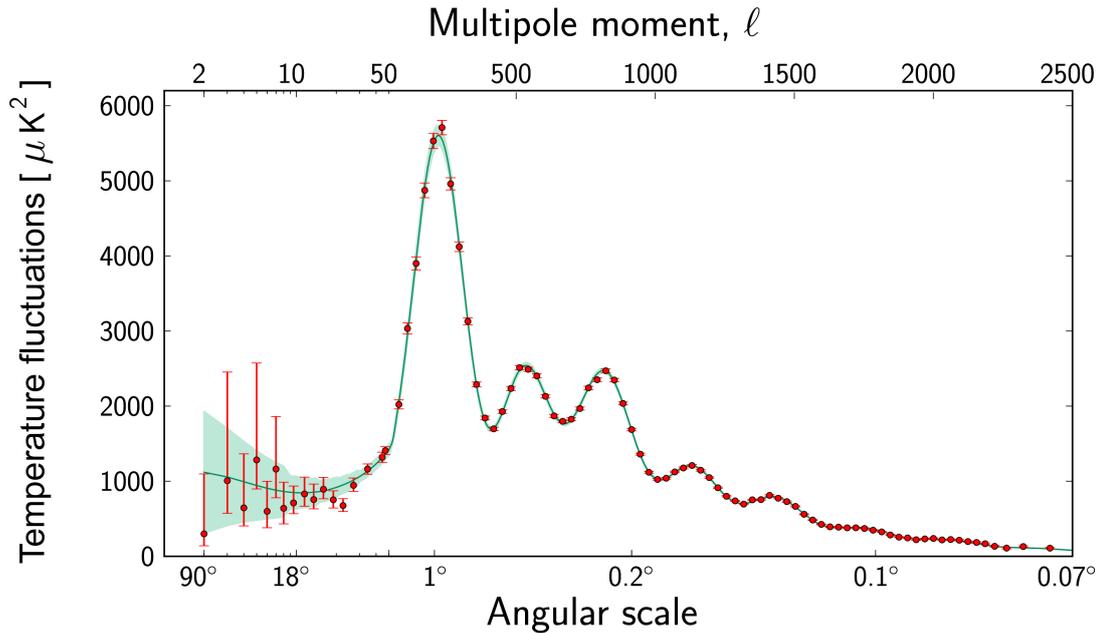


Figura 24 – O espectro de potência da CMB inferido a partir dos dados do instrumento Planck. Os pontos vermelhos representam as medidas realizadas pela sonda e a linha verde é a previsão teórica traçada usando o modelo Λ CDM. Fonte: Plack collaboration (2014) [73].

de bárions e fótons, respectivamente, e h é o parâmetro de Hubble reduzido que equivale a $h = H_0/100 \text{ s Mpc km}^{-1}$.

4.5 Rajadas rápidas de rádio

Desde a descoberta de que o Universo se encontra em expansão acelerada, várias observações cosmológicas, tais quais as citadas acima – CMB, BAO, SNIa, cronômetros cósmicos – têm sido usadas para estimar parâmetros cosmológicos. Até então, essas observações reforçam o modelo Λ CDM como o melhor modelo teórico para explicar as observações cosmológicas. Contudo, a natureza da energia escura ainda é um mistério, conduzindo a investigação de novos modelos cosmológicos. Recentemente, as *Rajadas rápidas de rádio* – ou *FRBs* do inglês *fast radio bursts* –, que são caracterizadas por pulsos brilhantes e extremamente rápidos, com duração de poucos milissegundos, na frequência de rádio, surgiram como um novo fenômeno capaz de ser usado para estimar parâmetros cosmológicos [79, 80, 81].

Pulsos de curta duração têm sido amplamente estudados desde início dos anos 70, com a descoberta dos *pulsares*, que são feixes periódicos (ou não) no espectro do rádio, em grande maioria provenientes de estrelas de nêutrons – subproduto de supernovas – em alta

rotação em torno do próprio eixo (aproximadamente 700 vezes por segundo). Ao longo das décadas subseqüentes, dada essa característica periódica, as pesquisas e instrumentos passaram a focar na busca de sinais recorrentes. Até o momento mais de 2500 fontes desses sinais foram descobertas. No ano de 2007, ao revisar dados de observações da *Pequena Nuvem de Magalhães* – figura 25 – em busca de pulsares pelo telescópio Parkes, Duncan Lorimer e sua equipe descobriram um sinal único, com alta dispersão e intenso brilho. Por vários anos esse pulso ficou conhecido como *Lorimer Burst* – figura 26 –, por ser o único com essas características. No entanto, na última década, diversos eventos semelhantes foram detectados estabelecendo um novo tipo de fenômeno astrofísico altamente promissor para a cosmologia, as FRB. Elas são parecidas com os pulsares usuais, porém a densidade de fluxo delas é aproximadamente dez bilhões de vezes maior e seu espectro é muito diferente dos de outras fontes de rádio [82, 83, 84].



Figura 25 – Imagem da Pequena Nuvem de Magalhães capturada pelo telescópio VISTA (Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy), que é uma galáxia visível a olho nu no céu noturno. Foi alvo do telescópio Parkes e permitiu a descoberta do primeiro sinal de FRB. Fonte: ESO (2017) [85]

Uma das principais características das FRBs é que elas possuem uma grande *medida de dispersão* (DM), que pode ser usada para determinar seu redshift. A medida de dispersão, no referencial da FRB emitida, pode ser determinada teoricamente através

da integral da densidade de elétrons livres n_e ao longo da linha de visada a partir da fonte até o observador, cuja relação é:

$$DM = \int_0^d n_e dl, \quad (4.12)$$

com dl sendo o caminho da luz. A medida de dispersão observada (DM_{obs}) inclui contribuições da fonte do sinal (DM_f), da galáxia na qual a FRB foi emitida (DM_{gh}), do meio intergalático (DM_{mig}) e da Via Láctea (DM_{vl}). Expressa-se essa relação da seguinte forma [86, 87]:

$$DM = DM_{vl} + DM_{mig} + \frac{DM_{gh} + DM_f}{1 + z}. \quad (4.13)$$

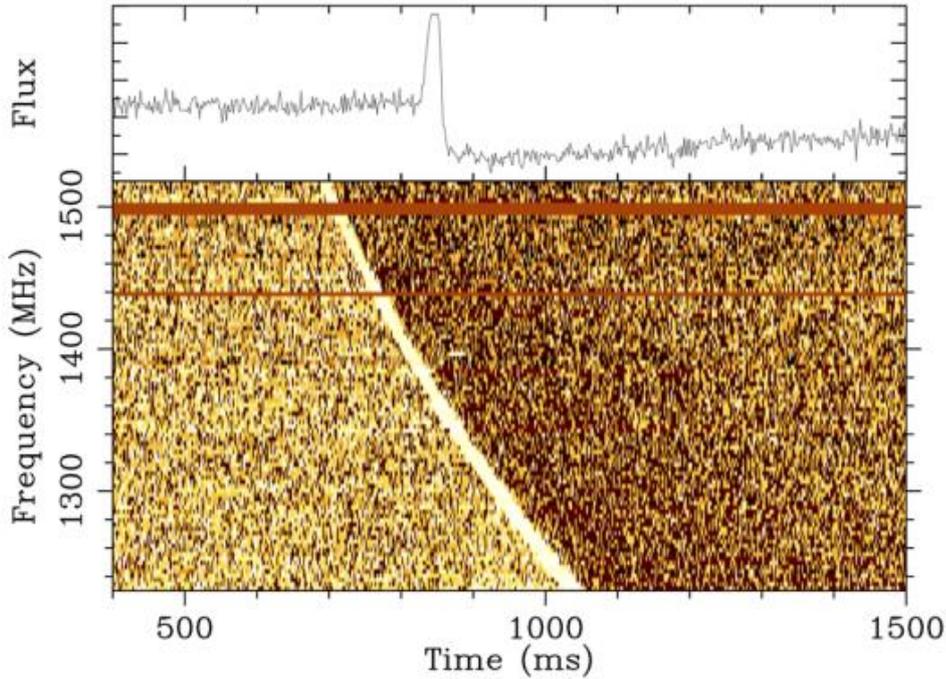


Figura 26 – Essa foi a primeira FRB detectada, atualmente conhecida por FRB 010724. O pulso teve uma medida de dispersão de $375 \text{ cm}^{-3}pc$ e foi tão forte que provocou a diferença na linha de base do ruído observada no painel superior, que é a soma de todas as frequências medidas. O painel inferior mostra o pulso em função da frequência e do tempo. As linhas horizontais representam dados corrompidos. Fonte: Petroff et al. apud Lorimer et al. (2019) [82]

Dessas componentes relacionadas a medida de dispersão observada na equação acima, apenas DM_{mig} contém informação sobre o parâmetro de Hubble. Nesse sentido, os pesquisadores em [86] desenvolveram um método para medir $H(z)$ a partir de dados de FRBs. Para isso é necessário um grande catálogo de FRBs com fontes conhecidas. Até o momento, foram detectadas mais de 100 FRBs, porém apenas 6 delas tiveram suas fontes localizadas. Dentre elas, apenas uma tem origem na nossa galáxia [88]. A quantidade

detectada até o momento desses eventos cobre uma grande faixa de medida de dispersão, duração de pulso, densidade de fluxo do pico do sinal, e da frequência de rádio – cf. figura 27. Como $H(z)$ está diretamente associado a expansão do Universo, pode-se usar FRBs para estimar parâmetros cosmológicos e, conseqüentemente, estudar a natureza da energia escura.

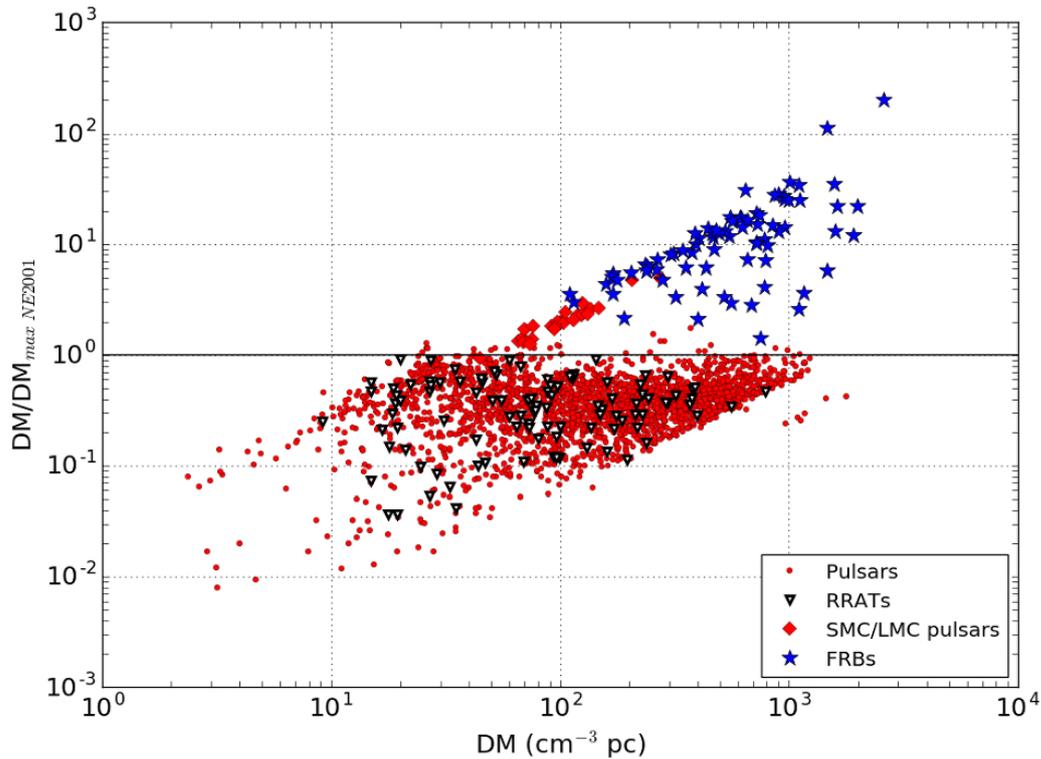


Figura 27 – Gráfico contendo informações da medida de dispersão de pulsares, fontes transientes de radio rotacionais (RRATs) – que é um tipo específico de pulsar –, pulsares localizados na Grande e na Pequena Nuvem de Magalhães (SMC/LMC) e as FRB publicadas. Os objetos acima da linha horizontal ($DM/DM_{max} > 1$) são ditos fontes extragaláticas. Fonte: Petroff et al. (2019) [82].

4.6 Combinando observáveis

Como detalhado no Apêndice A1, para lidar com um problema de inferência estatística em cosmologia é necessário considerar um modelo cosmológico e uma *função de verossimilhança* para o conjunto de dados associados ao observável usado para estimar os parâmetros do modelo. Esses parâmetros podem ser classificados em quatro categorias [89]:

- **Parâmetros que descrevem a dinâmica do modelo cosmológico:** usados para representar o conteúdo material e energético do Universo e a evolução da sua expansão, como também relacionam redshift com as distâncias comóveis. O

parâmetro de de Hubble e os parâmetros adimensionais de densidade são exemplos dessa categoria;

- **Parâmetros que descrevem as condições iniciais das flutuações:** são usados para descrever o tipo das condições iniciais na era inflacionária. Essas flutuações podem ou não ter se distribuído homoganeamente no fluido primordial;
- **Parâmetros indesejáveis:** esses parâmetros geralmente estão relacionados a incertezas nos processos de medida dos observáveis. Seus valores não são de total interesse para a inferência estatística, porém suas incertezas devem ser levadas em consideração para determinar corretamente os parâmetros de interesse. Por exemplo, em alguns casos, ao estimar os parâmetros adimensionais de densidade de matéria e de energia escura do Universo, o parâmetro de Hubble é tratado como um parâmetro indesejável;
- **Parâmetros que descrevem nova física:** são responsáveis por fornecer informações sobre a presença de diversos efeitos que podem aparecer na análise de dados, por exemplo: a detecção de cordas cósmicas, a massa de neutrinos, topologia não-trivial do Universo, dimensões extras, propriedades da energia escura, etc. Vale ressaltar que esses parâmetros são altamente dependentes do modelo considerado.

Ao definir uma função gaussiana para representar a distribuição de probabilidade para cada parâmetro do modelo cosmológico em questão – cf. A1 –, pode-se combinar observáveis independentes através do produto de suas funções de verossimilhança [65]. Esse resultado é melhor apreciado ao escrever essas funções em termos do *método qui-quadrado* [89], sendo $\chi^2 \equiv -2\log L$, onde L é a distribuição de probabilidade conhecida como *verossimilhança*, com isso combinam-se os observáveis pela soma dos resultados independentes:

$$\chi_{total}^2 = \chi_H^2 + \chi_{SN}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{CMB}^2, \quad (4.14)$$

onde essa equação varia de acordo com a quantidade e a forma das observações consideradas. A vantagem de combinar diferentes observações reside no fato de que cada uma delas possui *regiões degeneradas* – direções no espaço de parâmetros que não são bem vinculadas pelos dados –, sendo assim, ao combiná-las contorna-se esse problema e dissipa-se a degenerescência vinculando de forma mais eficaz os parâmetros. Isso é diretamente observado nas curvas de confiança estatística. Ao combinar observações [65], reduz-se consideravelmente as regiões de credibilidade, de forma que o resultado final é igual a interseção das regiões de cada um individualmente.

5 Parametrizações fenomenológicas

5.1 Parametrizações da equação de estado

5.1.1 A constante cosmológica

Quando Einstein publicou a Teoria Geral da Relatividade em 1915 [53], ainda não se sabia da existência de outras galáxias além da *Via Láctea* e do fato de que o Universo se encontrava-se em expansão. Para ele, o Universo deveria ser estático. Isso o levou a introduzir um termo em suas equações de campo, que ficou conhecido como *constante cosmológica*, representado pela letra grega Λ . Com a descoberta de que o Universo se expandia, a partir dos estudos de Edwin Hubble em 1929, esse termo pôde ser descartado. Contudo [56], em 1998 dois grupos de pesquisadores constataram independentemente, através de dados de supernova do tipo Ia, que o Universo se expande de forma acelerada. A causa para essa aceleração ficou conhecida como *energia escura*, que se distingue das outras componentes do Cosmos por ter pressão negativa. Com isso, a constante cosmológica voltou a ser considerada, pois consiste na explicação mais simples para a energia escura como sendo produzida a partir da energia quântica do vácuo.

Uma das formas de interpretar a energia escura é considerando-a como uma das componentes do Universo através da constante cosmológica Λ como um fluido de densidade ρ_Λ e pressão p_Λ de forma que sua equação de estado seja constante [60]. Sendo assim, a partir da definição $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/2$, pode-se reescrever a equação de Friedmann como

$$H^2 = \frac{2}{3} \sum \rho_i + \frac{2}{3} \rho_\Lambda - \frac{k}{a^2}, \quad (5.1)$$

de forma que, para um estágio de evolução do Universo no qual o termo associado a radiação possa ser descartado, tem-se:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0} \right]. \quad (5.2)$$

Além disso, pode-se verificar a pressão efetiva da constante cosmológica a partir de sua equação de continuidade associada, ou seja,

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0. \quad (5.3)$$

De maneira que, sendo ρ_Λ constante por definição, tem-se que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e assim $w = -1$.

5.1.2 Modelo $wCDM$

Ao invés de fixar o valor $w = -1$ na equação (3.31), pode-se permitir que o parâmetro da equação de estado possua outros valores. Nesse caso, se $w > -1$ a densidade de energia escura diminui com o tempo e caso $w < -1$ a densidade aumenta com o tempo. Esse modelo é conhecido como $wCDM$ e é descrito por [62, 65]:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{x0}(1+z)^{3(1+w)} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{x0})(1+z)^2 \right]. \quad (5.4)$$

5.1.3 Parametrização CPL

Também conhecido por modelo w_0w_aCDM , a parametrização *Chevallier-Polarski-Linder* (CPL), permite que a equação de estado associada a energia escura varie com o tempo a medida que o Universo evolui ao considerar a seguinte forma para o parâmetro adimensional da equação de estado – introduzida por [90]:

$$w = w_0 + \frac{w_a z}{(1+z)}, \quad (5.5)$$

onde w_0 e w_a são números reais, que representam o parâmetro da equação de estado atual do Universo e sua evolução temporal, respectivamente. Sendo assim, pode-se descrever esse modelo através da relação:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{x0}(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} \exp\left(\frac{-3w_a z}{(1+z)}\right) + \Omega_{k0}(1+z)^2 \right]. \quad (5.6)$$

5.2 Formalismo de primeira ordem

Apesar de a constante cosmológica ser uma boa candidata para explicar a expansão acelerada do Cosmos [91], quando comparam-se os valores para a energia quântica do vácuo obtidos por dados cosmológicos com os calculados pela física de partículas, obtém-se uma discrepância que expõe a necessidade de considerar outros modelos para a energia escura. O *Formalismo de Primeira Ordem* é uma abordagem para lidar com esses modelos alternativos que descrevem a dinâmica do Universo através de campos escalares, conhecidos como modelos de *quintessência* ou ϕCDM .

5.2.1 Aplicação para espaço plano

O procedimento realizado por [92], para o caso mais simples – parâmetro de curvatura nulo –, consiste em reescrever o parâmetro de Hubble em termos do campo

escalar ao definir uma função $W(\phi)$, de forma que:

$$H = -W(\phi), \quad (5.7)$$

a qual é uma equação de primeira ordem para o fator de escala. Com isso, a derivada temporal do parâmetro de Hubble pode ser escrita como

$$\dot{H} = -W_\phi \dot{\phi}, \quad (5.8)$$

que também consiste em uma equação de primeira ordem, onde o subíndice em W representa derivada com respeito a ϕ . A equação anterior leva diretamente ao seguinte vínculo

$$\dot{\phi} = W_\phi. \quad (5.9)$$

Ao escolher a forma de W , juntamente com as equações (5.7) e (5.9), pode-se resolver as equações de Friedmann e calcular a evolução do parâmetro de Hubble através de equações de primeira ordem.

Com as definições acima, reescreve-se a equação (3.25) da seguinte maneira:

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{W_\phi^2}{2}. \quad (5.10)$$

Para que esses resultados sejam consistentes com a equação de movimento associada ao campo, o seguinte vínculo deve ser satisfeito:

$$V_\phi = 3WW_\phi - W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (5.11)$$

Além disso, esse formalismo fornece o seguinte conjunto de equações relacionadas a dinâmica do campo:

$$\rho_\phi = \frac{3}{2}W^2; \quad (5.12)$$

$$p_\phi = W_\phi^2 - \frac{3}{2}W^2; \quad (5.13)$$

$$w_\phi = \frac{2W_\phi^2}{3W^2} - 1, \quad (5.14)$$

que, por sua vez, estão associadas a densidade de energia, pressão e ao parâmetro da equação de estado do campo. Define-se também o parâmetro de aceleração \bar{q} , que é extremamente relevante no estudo da energia escura [93], que possui a seguinte forma:

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \rightarrow \bar{q} = 1 - \left(\frac{W_\phi}{W}\right)^2, \quad (5.15)$$

que, em termos do parâmetro da equação de estado, pode ser escrito como

$$\bar{q} = -\frac{1}{2}(1 + 3w_\phi). \quad (5.16)$$

É importante notar que o parâmetro de Hubble poderia ser definido como $H = W(\phi)$ resultando em $\dot{\phi} = -W_\phi$, sem nenhuma perda de generalidade, uma vez que o potencial não depende do sinal de W .

5.2.2 Aplicação para espaço com curvatura

Para um caso mais geral, em que o espaço-tempo apresenta curvatura, deve-se resolver o sistema de equações composto pela equação do movimento associada ao campo e pelas equações de Friedmann com $k \neq 0$. Para isso, revisando o método contido em [94], define-se $H = W$ e

$$\dot{\phi} = Z, \quad (5.17)$$

sendo $Z = Z(\phi)$ uma função arbitrária. Como consequência dessa definição, tem-se:

$$\frac{k}{a^2} = Z(W_\phi + Z). \quad (5.18)$$

Dessa forma, as soluções para espaço com curvatura devem obedecer a seguinte condição: $Z \neq -W_\phi$.

A partir das escolhas acima para H e $\dot{\phi}$, pode-se reescrever a equação (3.25) como:

$$V = \frac{3}{2}(W^2 + W_\phi Z) + Z^2. \quad (5.19)$$

Com isso, resolve-se as equações de Friedmann e para que esses resultados sejam coerentes com a equação de movimento relacionada ao campo, o seguinte vínculo – conhecido como *equação de consistência* – deve ser satisfeito:

$$2(WW_\phi + ZZ_\phi) + W_{\phi\phi}Z + W_\phi Z_\phi + 2WZ = 0, \quad (5.20)$$

que reduz a arbitrariedade de $W(\phi)$ e $Z(\phi)$ [94]. Por fim, esse formalismo fornece as equações relacionadas a densidade de energia e pressão, ao parâmetro da equação de estado e ao parâmetro de aceleração:

$$\rho_\phi = \frac{3}{2} (Z^2 + W^2 + W_\phi Z); \quad (5.21)$$

$$p_\phi = \frac{3}{2} (W^2 + W_\phi Z) - \frac{Z^2}{2}; \quad (5.22)$$

$$w_\phi = \frac{3(W^2 + W_\phi Z) - Z}{3(Z^2 + W^2 + W_\phi Z)}; \quad (5.23)$$

$$\bar{q} = 1 + \frac{W_\phi Z}{W^2}. \quad (5.24)$$

5.2.3 Aplicação para energia escura + matéria (poeira)

Para uma descrição mais realista do Universo, é necessário considerar – além de energia escura – a presença de matéria não-relativística em forma de poeira, que pode representar tanto matéria bariônica usual, como também matéria escura. Essa é uma proposta razoável, uma vez que, o processo de formação de galáxias e aglomerados de galáxias é melhor representado ao considerar cenários que consideram a presença de matéria escura. Seguiremos o procedimento metodológico detalhado pelos autores em [95]. Nessa abordagem, devido a pequena contribuição à densidade de energia total do Universo, as componentes associadas a radiação e a curvatura serão desconsideradas. Com isso, escreve-se a densidade de energia total como $\rho = \rho_e + \rho_m$, onde ρ_e e ρ_m representam as densidades de energia escura e material, respectivamente. Considera-se que $\rho_m(a) = \bar{\rho}/a^3$, sendo $\bar{\rho}$ uma constante real positiva, que descreve a densidade de energia da matéria não-relativística atualmente ($a = 1$). Assume-se que essa componente, chamada também de poeira, se estende homogeneamente e isotropicamente pelo Universo [94]. Assim, ao admitir que o campo escalar associado a energia escura é descrito pela dinâmica padrão apresentada no capítulo 3, reescreve-se as equações de Friedmann da seguinte maneira:

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V + \frac{2}{3}\frac{\bar{\rho}}{a^3}; \quad (5.25)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \frac{\bar{\rho}}{a^3}. \quad (5.26)$$

Semelhante ao que já foi feito anteriormente, deve-se escolher uma forma – dependente do campo escalar – para H , e conseqüentemente obter a forma de $\dot{\phi}$, para resolver o sistema de equações composto pela equação de movimento relacionada ao campo e as respectivas equações de Friedmann. Prosseguindo com método descrito em [95], define-se as seguintes escolhas para H e $\dot{\phi}$:

$$H = W + \alpha\bar{\rho}Z; \quad (5.27)$$

$$\dot{\phi} = -W_\phi - \beta\bar{\rho}Z_\phi, \quad (5.28)$$

com α e β constantes e, nesse caso, $\alpha \neq \beta$.

Ao combinar as equações de Friedmann com as equações (5.27) e (5.28), obtém-se o potencial associado ao campo com os parâmetros determinados pelo formalismo:

$$V = \frac{3}{2}(W + \alpha\bar{\rho}Z)^2 - \frac{1}{2}(W_\phi + \beta\bar{\rho}Z_\phi)[W_\phi + (2\alpha - \beta)\bar{\rho}Z_\phi]. \quad (5.29)$$

A presença do termo de matéria [94] conduz a novas interações, que são determinadas pelas funções $W(\phi)$, $Z(\phi)$ e suas derivadas, de maneira que qualquer solução para o modelo deve respeitar a seguinte equação de consistência:

$$W_\phi Z_{\phi\phi} + W_{\phi\phi} Z_\phi + 2\beta\bar{\rho}Z_\phi Z_{\phi\phi} - 3\alpha\bar{\rho}Z Z_\phi - 3W Z_\phi = 0. \quad (5.30)$$

Pode-se também escrever o parâmetro de aceleração como:

$$\bar{q} = 1 - \frac{(W_\phi + \alpha\bar{\rho}Z_\phi)(W_\phi + \beta\bar{\rho}Z_\phi)}{(W + \alpha\bar{\rho}Z)^2}. \quad (5.31)$$

No sentido de ilustrar os resultados de [94, 95] descritos acima, os autores consideram – por simplicidade – o caso no qual $\alpha = 0$ e $Z = 0$. Com isso, a equação (5.30) se reduz a $2(1 + \beta\bar{\rho})W_{\phi\phi} - 2W$, que tem como uma das possíveis soluções $W = A \cosh(B\phi)$, com A e B constantes, sendo $B = \pm\sqrt{3/2(1 + \beta\bar{\rho})}$. Assim, o potencial associado a esse modelo é escrito da seguinte forma:

$$V = \frac{3}{4}A^2 \left[(1 + \beta\bar{\rho}) \cosh^2(B\phi) + (1 + \beta\bar{\rho}) \right]. \quad (5.32)$$

Como resultado, pode-se encontrar a forma da evolução temporal do campo escalar associado a energia escura:

$$\phi(t) = \frac{1}{B} \ln \left[\tanh \left(\frac{3}{4}At \right) \right], \quad (5.33)$$

de maneira que, o fator de escala é escrito como

$$a(t) = \left[-\frac{2}{3\beta A^2} \sinh^2 \left(\frac{3}{2}At \right) \right]^{1/3}. \quad (5.34)$$

Por fim, o parâmetro de Hubble tem a seguinte forma

$$H(t) = A \tanh^{-1} \left(\frac{3}{2} At \right). \quad (5.35)$$

Vale ressaltar que esse modelo é idêntico ao Λ CDM plano. Ao realizar algumas manipulações algébricas usando a equação (5.34), pode-se reescrever o parâmetro de Hubble como:

$$H(z)^2 = -\frac{2}{3\beta}(1+z)^3 + A^2, \quad (5.36)$$

que ao comparar com a relação (5.2), descartando o termo de curvatura, tem-se que $H_0^2 \Omega_{m0} = -2/3\beta$ e $H_0^2(1 - \Omega_{m0}) = A^2$.

5.2.4 Novo método analítico

Apresentamos agora uma nova abordagem para lidar com modelos de quintessência que consideram a presença de matéria. Essa metodologia, que pode ser interpretada como uma generalização do método apresentado nas seções anteriores, consiste em reescrever o parâmetro de Hubble de forma conveniente e impor uma forma para a derivada temporal do campo escalar. Assim, todo tratamento é executado em termos de equações de primeira ordem e de maneira extremamente mais concisa do que no Formalismo de Primeira Ordem, permitindo gerar toda uma nova família de modelos cosmológicos a partir da escolha adequada para duas funções, que definiremos em seguida. Inicia-se o procedimento reescrevendo o parâmetro de Hubble e a derivada temporal do campo em termos da componente de poeira:

$$H = \bar{\rho}^{1/2} Z(\phi); \quad (5.37)$$

$$\dot{\phi} = -\bar{\rho}^{1/2} W_\phi, \quad (5.38)$$

com $Z(\phi)$ sendo uma função arbitrária. Essa definição leva ao seguinte vínculo:

$$Z_\phi W_\phi = W_\phi^2 + \frac{1}{a^3}. \quad (5.39)$$

A partir da definição do parâmetro de Hubble em termos do fator de escala, $H = \frac{d}{dt} \log(a)$, pode-se escrever a seguinte relação:

$$a = e^{\int Z dt}, \quad (5.40)$$

de maneira que ao impor a definição a seguir:

$$\int Z dt = \log(G^{-1}(\phi)), \quad (5.41)$$

sendo $G^{-1}(\phi) = a$, rescreve-se a equação (5.39) como:

$$Z_\phi W_\phi = W_\phi^2 + G^3. \quad (5.42)$$

Com isso,

$$G^3 = -W_\phi(W_\phi - Z_\phi). \quad (5.43)$$

A vantagem desse método reside no fato de que para obter novos modelos cosmológicos basta, desde que a equação de primeira ordem (5.37) seja satisfeita, escolher uma forma para $W(\phi)$ ou para $Z(\phi)$. Sendo possível obter diretamente da equação (5.43) o fator de escala, que juntamente com o parâmetro de Hubble permite escrever outros parâmetros que podem ser testados diante a observações cosmológicas.

6 Testes cosmológicos

Um dos principais objetivos desta pesquisa é realizar inferência estatística para estimar parâmetros cosmológicos e verificar como são correlacionados para testar alguns modelos alternativos ao modelo padrão da cosmologia. Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos. Foram realizados diversos testes cosmológicos para estimar os parâmetros dos modelos apresentados no capítulo anterior usando diferentes conjuntos de dados de observáveis distintos. Da mesma forma, foram realizados testes cosmológicos usando dados de $H(z)$ medidos por [86] – a partir de um catálogo de 500 dados simulados de FRBs – para comparar a performance de futuros radiotelescópios no que diz respeito a detecção de FRBs. Deste modo, pretendemos avaliar se esses experimentos poderão fornecer dados suficientes para estabelecer vínculos em parâmetros cosmológicos.

6.1 Dados

Como o parâmetro de Hubble está diretamente associado à taxa expansão do Universo, desta forma, pode-se usá-lo estudar possíveis alternativas ao modelo cosmológico padrão. Para realizarmos as inferências estatísticas sobre os modelos cosmológicos considerados, usamos os seguintes conjuntos de dados: 41 medidas de $H(z)$ – tabela 2 – inferidas a partir do método dos Cronômetros Cósmicos, compilados por [96] ao combinar dois conjuntos de dados diferentes; 17 medidas não-correlacionadas de Oscilações Acústicas de Bárions – cf. tabela 3 –, selecionadas por [97]; e utilizamos os dados do *Pantheon*, que consiste na maior coleção de Supernovas do tipo Ia já realizada, contendo 1048 medidas cobrindo a faixa de redshift $0 < z < 2.3$ [98]. Também foram usadas 4 medidas de $H(z)$ – $H(z)$, $H(0.65) = 97.89 \pm 5.87 \text{ km/s/Mpc}$, $H(1.21) = 140.46 \pm 7.57 \text{ km/s/Mpc}$, $H(1.79) = 183.14 \pm 9.79 \text{ km/s/Mpc}$, $H(2.37) = 225.88 \pm 12.11 \text{ km/s/Mpc}$ – obtidas através de 500 dados simulados de FRBs por [86]. Esse segundo conjunto de dados foi usado para fazer uma breve estimativa acerca da performance de futuras detecções de FRBs por radiotelescópios que estão em construção ou em fase inicial de operação, ao usar as taxas de detecção fornecidas pela tabela 4 adaptada de [31]. Essas taxas correspondem aos seguintes instrumentos: Australian Square Kilometre Array Pathfinder (ASKAP); Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment (CHIME); e Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations (BINGO), respectivamente.

Para executar a inferência estatística e estimar os parâmetros livres θ dos modelos cosmológicos usando ambos os conjuntos de dados citados acima, foi usada a função

z	$H(z)$	σ_H	Referência	z	$H(z)$	σ_H	Referência
0.070	69	19.6	[99]	0.480	97	62	[107]
0.090	69	12	[100]	0.570	92.900	7.855	[108]
0.120	68.6	26.2	[99]	0.593	104	13	[101]
0.170	83	8	[100]	0.6	87.9	6.1	[106]
0.179	75	4	[101]	0.680	92	8	[101]
0.199	75	5	[101]	0.73	97.3	7.0	[106]
0.200	72.9	29.6	[99]	0.781	105	12	[101]
0.240	79.69	6.65	[102]	0.875	125	17	[101]
0.270	77	14	[100]	0.880	90	40	[107]
0.280	88.8	36.6	[99]	0.900	117	23	[100]
0.300	81.7	6.22	[103]	1.037	154	20	[101]
0.350	82.7	8.4	[104]	1.300	168	17	[100]
0.352	83	14	[101]	1.363	160	22.6	[109]
0.3802	83	13.5	[105]	1.430	177	18	[100]
0.400	95	17	[100]	1.530	140	14	[100]
0.4004	77	10.2	[105]	1.750	202	40	[100]
0.4247	87.1	11.2	[105]	1.965	186.5	50.4	[109]
0.430	86.45	3.68	[102]	2.300	224	8	[110]
0.440	82.6	7.8	[106]	2.34	222	7	[111]
0.4497	92.8	12.9	[105]	2.36	226	8	[112]
0.4783	80.9	9	[105]				

Tabela 2 – 41 medidas de $H(z)$ usadas nas inferências estatísticas.

qui-quadrado ¹ χ_H^2 , cuja forma é:

$$\chi_H^2 = \sum_i \left[\frac{H(z_i, H_0, \theta) - H_{obs,i}}{\sigma_{H,i}} \right]^2, \quad (6.1)$$

onde $H(z_i, H_0, \theta)$ representa o parâmetro de Hubble medido no redshift z_i previsto pelos modelos considerados, $H_{obs,i}$ são os valores medidos empiricamente pelos instrumentos e $\sigma_{H,i}$ seus respectivos erros. Para os resultados associados as 4 dados de $H(z)$ a partir de FRB, que serão exibidos mais adiante, a função χ_H^2 foi marginalizada sobre H_0 de acordo com o procedimento detalhado em [113], ao mesmo tempo que consideramos todos os valores de H_0 como gaussianos. Ao usar as 17 medidas não-correlacionadas de BAO, seguimos a metodologia descrita por [97]. De maneira que usamos a seguinte forma para o qui-quadrado:

$$\chi_{BAO}^2 = \sum_{i,j} (B_i^{teo} - B_j^{obs})(C^{-1})_{ij}(B_j^{teo} - B_i^{obs}), \quad (6.2)$$

com B_i^{teo} sendo os valores previstos pelos modelos teóricos para as distâncias calculadas usando as escalas características de BAO e B_i^{obs} as quantidades observadas e $(C^{-1})_{ij}$ a

¹ Conferir apêndice A

z	Parâmetro	Valor	σ_H	Referência
0.106	r_d/D_V	0.336	0.015	[116]
0.15	$D_V(r_{d,fid}/r_d)$	664	25.0	[117]
0.275	r_d/D_V	0.1390	0.0037	[118]
0.32	$D_V(r_{d,fid}/r_d)$	1264	25	[119]
0.44	r_d/D_V	0.0870	0.0042	[106]
0.54	D_A/r_d	9.212	0.41	[120]
0.57	D_V/r_d	13.67	0.22	[121]
0.6	r_d/D_V	0.0672	0.0031	[106]
0.697	$D_A(r_{d,fid}/r_d)$	1499	77	[122]
0.72	$D_V(r_{d,fid}/r_d)$	2353	63	[123]
0.73	r_d/D_V	0.0593	0.0020	[106]
0.81	r_A/r_d	10.75	0.43	[124]
0.874	$D_A(r_{d,fid}/r_d)$	1680	109	[122]
1.48	$D_H\dot{r}_d$	13.23	0.47	[125]
1.52	$D_V(r_{d,fid}/r_d)$	3843	147.0	[126]
2.3	$H\dot{r}_d$	34188	1188	[110]
2.34	$D_H\dot{r}_d$	8.86	0.29	[127]

Tabela 3 – 17 medidas não-correlacionadas de BAO usadas nas inferências estatísticas.

matriz de covariância inversa dos dados. O qui-quadrado para as distâncias calculadas através das SNIa é dado por:

$$\chi_{SN}^2 = \sum_i \left[\frac{\mu(z_i, H_0, \theta) - \mu_i}{\sigma_\mu^2} \right]^2, \quad (6.3)$$

sendo $\mu(z_i, H_0, \theta)$ os valores teóricos, μ_i os valores observados e σ_μ^2 o erro associado as medidas. Para minimizarmos a função χ_H^2 e estimarmos os vínculos entre os parâmetros livres, foram usadas as *cadeias de Markov via Monte Carlo* – ou do inglês, *Markov chain Monte Carlo (MCMC)* – através do algoritmo *MCMC linearmente invariante* implementado na linguagem de programação *Python* por [114] e também usamos o método de *Nested Sampling* através do pacote em Python de código aberto *Polychord*, implementado por [115].

Instrumento	Tempo entre detecções de FRBs
CHIME	0.6
BINGO	4.0
ASKAP	42.7

Tabela 4 – Tempo médio, em horas, entre cada detecção de FRBs para os radiotelescópios considerados.

6.2 Resultados usando SNIa, BAO e CC

6.2.1 Λ CDM plano

Este é o modelo cosmológico mais favorecido pelos dados observacionais até então na literatura. Para realizarmos a inferência estatística, foi usado o seguinte conjunto de parâmetros livres $\theta = \{H_0, \Omega_m, r_d, (r_d/r_{d, fid})\}$, onde $(r_d/r_{d, fid})$ representa a razão entre o horizonte acústico calculado pelo modelo em questão e o horizonte acústico dado pelo modelo fiducial usado para processar as medidas observacionais. Esse parâmetro é utilizado para calibrar alguns dos dados de BAO na tabela 3. Os resultados numéricos são exibidos na tabela 5. Os valores estimados para os parâmetros estão relativamente próximos aos calculados pela colaboração Planck [128]. Percebe-se uma discrepância entre os valores inferidos para o parâmetro de Hubble ao usar os conjuntos de dados separadamente. Essa discrepância é conhecida como a *tensão da constante de Hubble*, que pode sugerir erros sistemáticos que afetam as medidas observacionais ou uma assinatura de nova física além do modelo Λ CDM. O resultado para o vínculo entre os parâmetros é exposto na figura 28 com as incertezas em 68,3% e 95,4% de confiança estatística. É possível verificar que os dados de SNIa do Pantheon não trazem muita informação sobre H_0 , visto que encontra-se em uma região do espaço de parâmetros altamente degenerada e ortogonal aos outros vínculos, porém mais sensível à Ω_m . Ao combinar os três conjuntos de dados, nota-se que os vínculos são consideravelmente restringidos, permitindo uma inferência mais precisa para os parâmetros.

6.2.2 w CDM

Para a análise do modelo w CDM, foi usado o seguinte conjunto de parâmetros livres: $\theta = \{H_0, \Omega_m, w, r_d, (r_d/r_{d, fid})\}$. Os resultados numéricos podem ser conferidos na tabela 5. Nas nossas análises, encontramos um valor para o parâmetro da equação de estado w extremamente próximo ao exposto pelos resultados mais recentes da colaboração Planck [128], o que corrobora fortemente para a suposição de uma constante cosmológica. Através dos vínculos mostrados na figura 29 – com 68,3% e 95,4% de confiança estatística – é possível perceber novamente como os dados de supernovas não são informativos acerca do parâmetro de Hubble e são mais sensíveis a densidade de matéria. O que acontece com os dados de BAO e dos cronômetros cósmicos é justamente o contrário. São altamente sensíveis a H_0 , porém não vinculam bem Ω_m . Ao realizar a inferência com os dados combinados, diminui-se notavelmente a região degenerada entre os parâmetros, vinculando muito bem os seus valores. O resultado para o horizonte acústico está em concordância com a previsão teórica e os dados já calculados e apresentados na literatura. Percebe-se também que os parâmetros w e Ω_m não são satisfatoriamente vinculados pelos dados de BAO e CC. No entanto, ao combiná-los com os dados do Pantheon – que mostram uma forte correlação negativa –, quebra-se a degenerescência entre os parâmetros.

6.2.3 CPL plano

O modelo CPL considera o cenário no qual a energia escura varia com o redshift. Para realizar nossos testes cosmológicos, foram usados os seguintes parâmetros livres $\theta = \{H_0, \Omega_m, w_0, w_a, r_d, (r_d/r_{d,fid})\}$. Os resultados numéricos na tabela 5 indicam que esse modelo, embora permita estimar razoavelmente bem os parâmetros, possui consideráveis limitações em relação aos modelos com menos complexidade. Pela figura 30, nota-se que há planos com alta degeneração e forte correlação negativa entre os parâmetros inferidos a partir dos dados de forma independente. Contudo, considerando a inferência conjunta dos dados, pode-se restringir bastante a região vinculada pelos parâmetros. Além disso, é notável a correlação negativa no plano $w_0 - \Omega_m$ ao considerar os vínculos individuais de cada conjunto de observáveis, o que praticamente desaparece ao combinar os dados.

Modelo	Parâmetros	PAN	CC	BAO	PAN + CC + BAO
Λ CDM	$H_0[km/s/Mpc]$	75.67 ± 17.3	69.38 ± 1.82	69.38 ± 4.79	68.15 ± 1.13
	Ω_m	0.286 ± 0.012	0.265 ± 0.020	0.288 ± 0.016	0.281 ± 0.009
	$r_d[Mpc]$	151.0 ± 31.0	149.3 ± 36.2	147.5 ± 11.3	150.4 ± 2.7
	$r_d/r_{d,fid}$	0.992 ± 0.061	1.004 ± 0.072	0.998 ± 0.093	1.016 ± 0.017
w CDM	$H_0[km/s/Mpc]$	74.59 ± 16.59	68.41 ± 3.01	67.98 ± 4.82	68.16 ± 3.01
	Ω_m	0.307 ± 0.024	0.267 ± 0.026	0.284 ± 0.023	0.281 ± 0.008
	w	-1.074 ± 0.057	-0.937 ± 0.124	-0.919 ± 0.104	-1.005 ± 0.033
	$r_d[Mpc]$	151.7 ± 33.3	151.2 ± 38.4	148.8 ± 10.1	150.5 ± 1.7
	$r_d/r_{d,fid}$	1.003 ± 0.067	1.005 ± 0.066	1.003 ± 0.071	1.015 ± 0.028
CPL	$H_0[km/s/Mpc]$	74.16 ± 15.75	67.88 ± 6.24	65.24 ± 5.58	68.41 ± 1.13
	Ω_m	0.313 ± 0.097	0.275 ± 0.078	0.324 ± 0.071	0.216 ± 0.052
	w_0	-1.222 ± 0.163	-0.766 ± 0.542	-0.399 ± 0.523	-0.996 ± 0.068
	w_a	0.240 ± 1.230	-0.826 ± 1.882	-2.242 ± 2.546	0.741 ± 0.318
	$r_d[Mpc]$	145.5 ± 30.4	149.0 ± 33.17	148.0 ± 11.0	150.5 ± 2.5
	$r_d/r_{d,fid}$	1.001 ± 0.062	1.005 ± 0.068	1.000 ± 0.071	1.013 ± 0.019

Tabela 5 – Resultados numéricos das inferências estatísticas realizadas para os modelos considerados. Para tal, foram usados três conjuntos de dados diferentes. Os valores inferidos são exibidos com 95,4% de confiança estatística.

6.3 Resultados usando 4 dados de $H(z)$

Nesta seção serão expostos os resultados de uma breve estimativa que realizamos acerca do erro associado a medidas hipotéticas de três instrumentos que poderão ser usados

para detectar FRBs em um futuro próximo, pois já estão em fase inicial de operação ou em construção. Para isso, foram usadas 4 medidas de $H(z)$ descritas na seção 6.1, inferidas a partir de dados simulados de FRBs por Yang et al. (2020) em [86], considerando um modelo cosmológico de referência – *fiducial* – com os seguintes parâmetros: $\Omega_m = 0.308$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ e $h = 0.678$. Da teoria da probabilidade, sabe-se que o erro associado a uma medida é proporcional a $1/\sqrt{n}$, com n sendo o número de amostras. Nesse sentido, para estimarmos os valores dos parâmetros cosmológicos usando esse conjunto de dados, foi necessário assumir que as 500 FRBs simuladas foram medidas pelo instrumento CHIME. Em seguida, usamos os erros relacionados as medidas dos radiotelescópios BINGO e ASKAP², que podem ser inferidos a partir das taxas da tabela 4, sendo possível reconstruir as medidas de $H(z)$, exibidas na tabela 6.

$H(z)$	CHIME	BINGO	ASKAP
$H(0.65) = 97.89$	± 5.87	± 13.50	± 49.30
$H(1.21) = 140.6$	± 7.57	± 17.41	± 63.89
$H(1.79) = 183.14$	± 9.79	± 22.52	± 82.24
$H(2.37) = 225.88$	± 12.11	± 27.85	± 101.71

Tabela 6 – Valores de $H(z)$ inferidos por [86] ao assumir que foram medidos pelo radiotelescópio CHIME com as incertezas multiplicadas pelos erros dos radiotelescópios BINGO e ASKAP.

Com os dados da tabela acima, foi realizada uma inferência estatística para estimar os parâmetros do modelo Λ CDM plano. É possível perceber que mesmo com poucos dados, foi possível fazer uma boa estimativa para os parâmetros. Isso reflete a possibilidade promissora que os dados de FRBs localizadas oferecem ao serem usadas como mais uma observação extragaláctica para impor vínculos a parâmetros de modelos cosmológicos. Os resultados da inferência estão expostos com 68,3% de confiança estatística – tabela 7 e figura 31 – e concordam com o modelo fiducial. Contudo, é notável que o erro do ASKAP é muito grande em relação aos outros instrumentos e o BINGO surge como um ótimo instrumento capaz de fornecer dados suficientes para a realização de inferências estatísticas mais robustas, principalmente combinadas com outras observações cosmológicas.

² 2.6 e 8.3 vezes maior quando comparados com o do CHIME.

Parâmetro	CHIME	BINGO	ASKAP
Ω_m	0.24 ± 0.08	0.24 ± 0.21	0.24 ± 0.69
h	0.74 ± 0.09	0.74 ± 0.21	0.7 ± 0.8

Tabela 7 – Resultado da inferência estatística sobre os parâmetros do modelo Λ CDM plano. Através dessas barras de erros, percebe-se que o radiotelescópio BINGO é um proeminente instrumento a ser usado para detecção de FRB, mesmo que seu foco principal sejam as BAO.

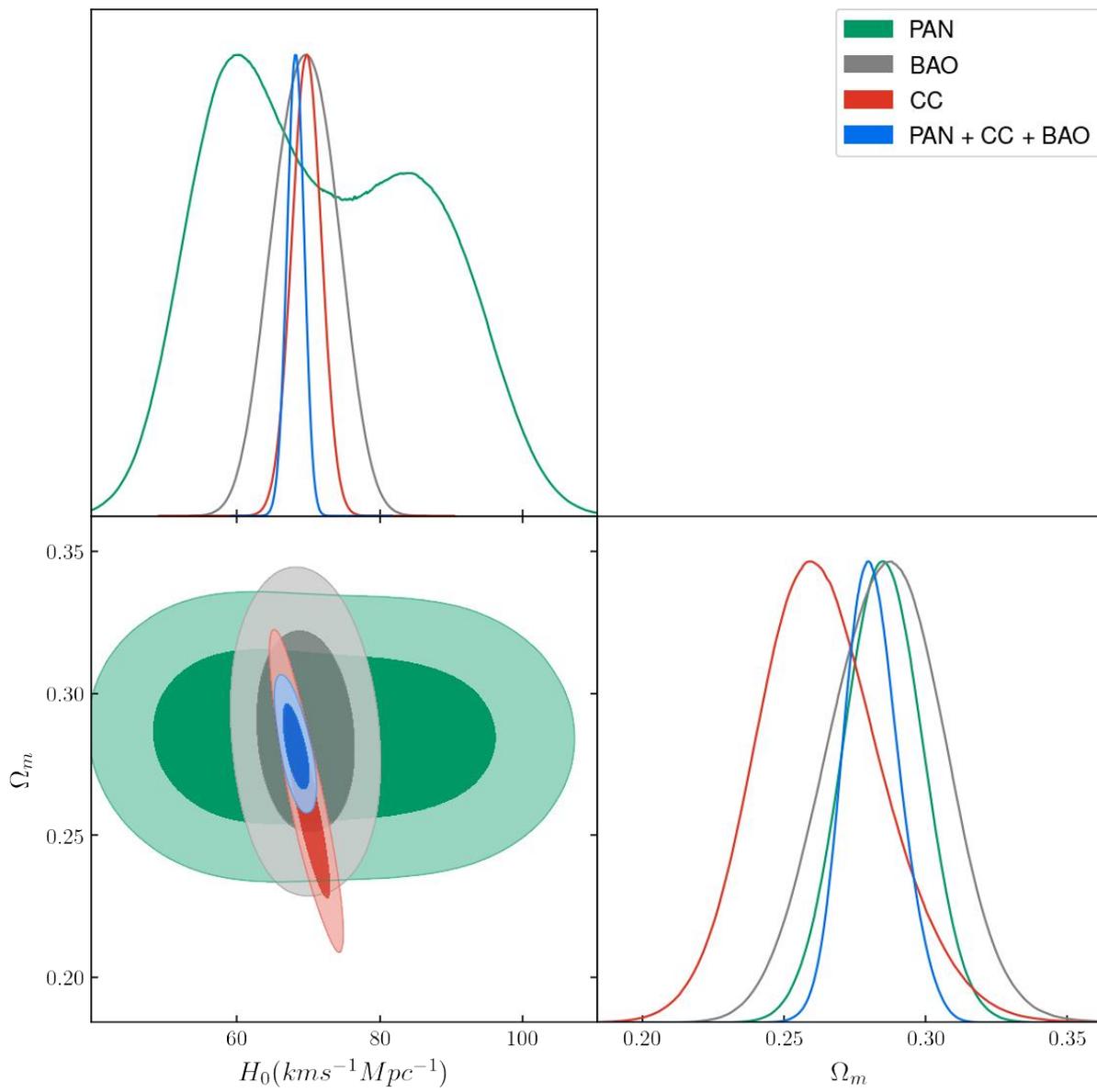


Figura 28 – Resultado da inferência estatística para o modelo Λ CDM plano, apresentados com 68,3% e 95,4% de confiança estatística.

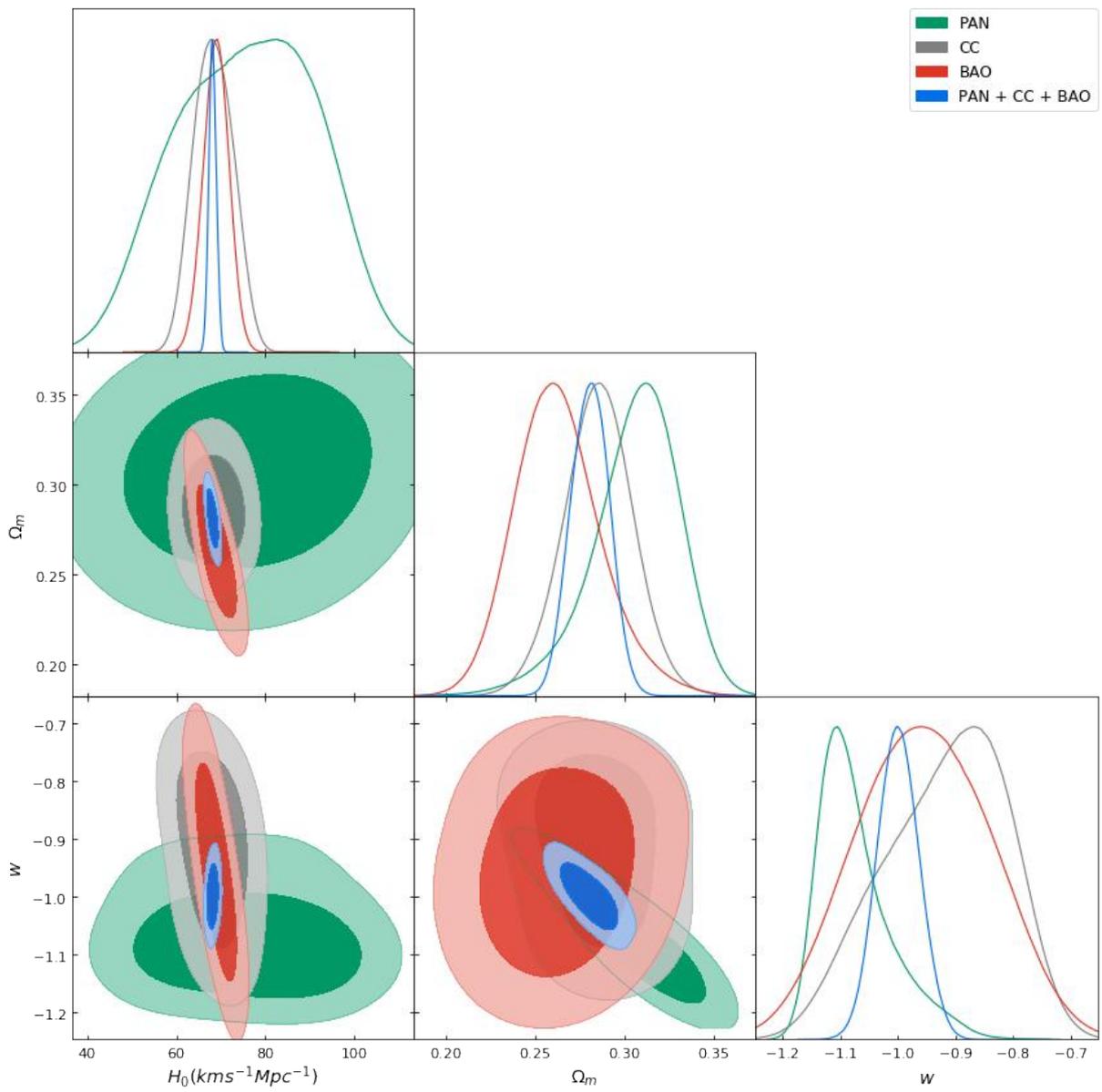


Figura 29 – Vínculos entre os parâmetros livres do modelo $wCDM$ plano inferidos a partir de dados de supernovas, oscilações acústicas de bárions e cronômetros cósmicos. Resultados exibidos com 68,3% e 95,4% de confiança estatística.

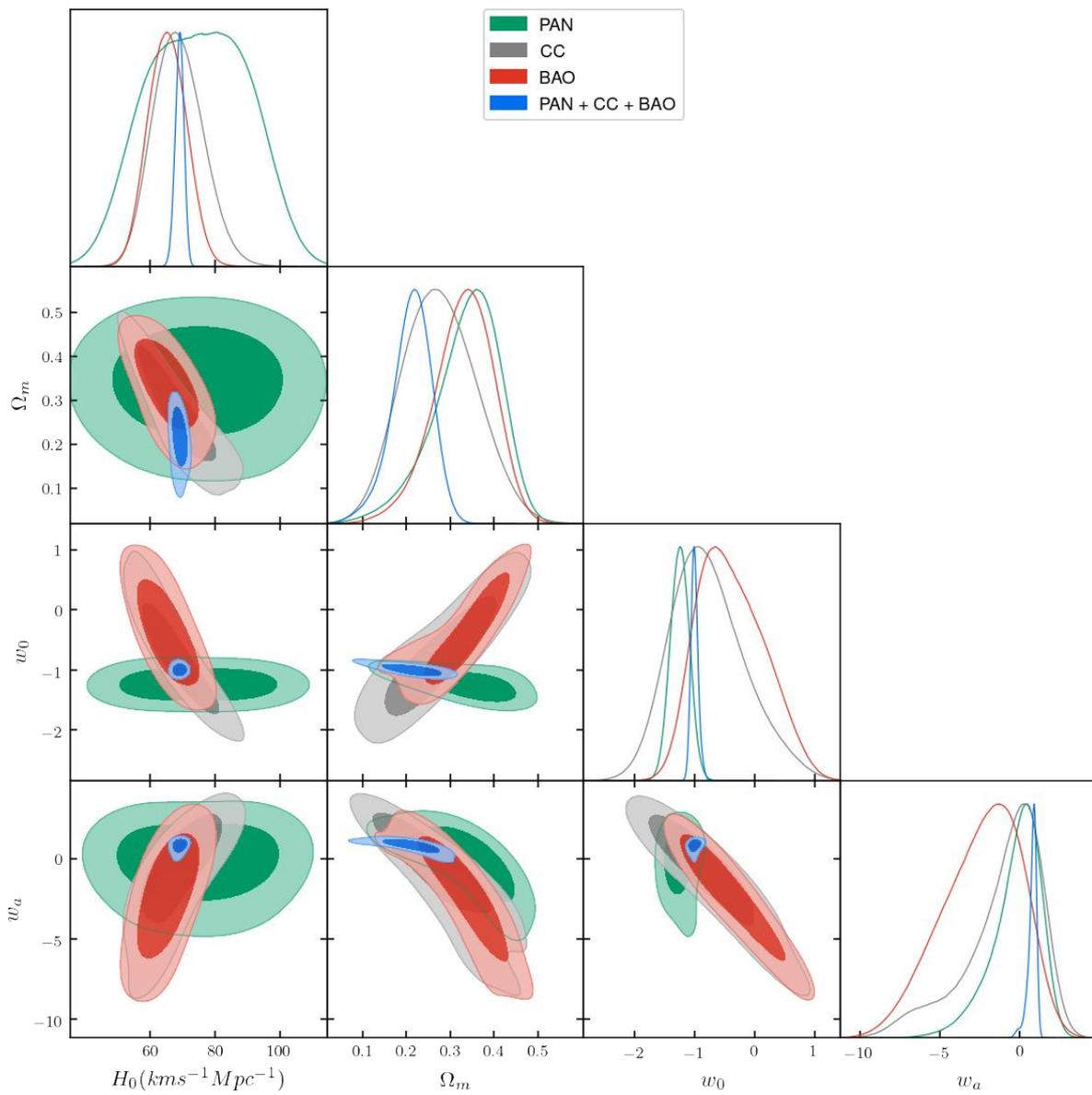


Figura 30 – Resultado para os vínculos entre os parâmetros livres do modelo CPL plano representados com 2 níveis de confiança estatística.

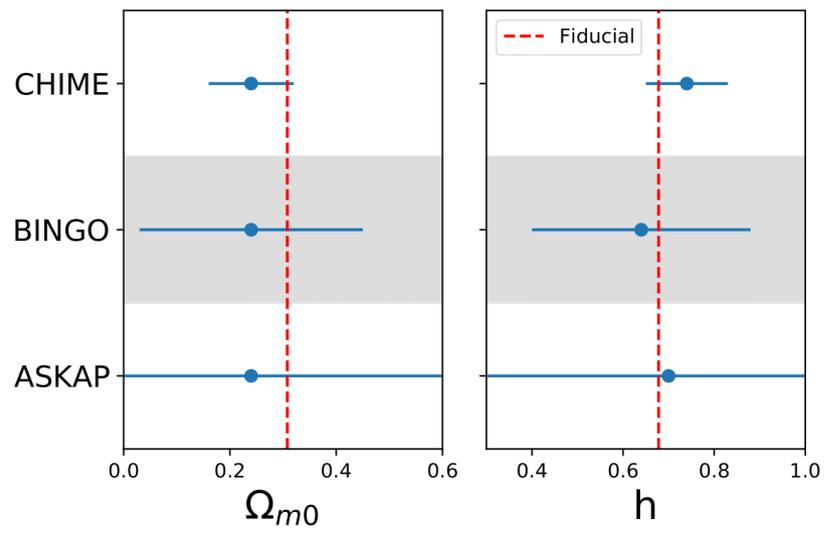


Figura 31 – Resultados da estimativa com barras de erro.

7 Conclusões e perspectivas

Ao longo desta dissertação de mestrado abordamos parte alicerce teórico no qual se baseia a cosmologia moderna ao mesmo tempo em que discutimos e apresentamos ferramentas para o estudo de modelos cosmológicos sob à luz da cosmologia observacional. No primeiro capítulo, fizemos uma breve apresentação da cosmologia observacional, revisando alguns dos experimentos mais importantes das últimas décadas, que resultaram numa mudança radical na forma como entendemos o Universo observável. Também discorremos sobre alguns experimentos futuros, tal qual o radiotelescópio **BINGO**. Em seguida, no capítulo dois, apresentamos o ferramental teórico que engendra a teoria clássica de campos em $(1+1)$ dimensões. Apresentamos o método BPS, bem como a caracterização de defeitos topológicos e não-topológicos através da definição de carga topológica e o exame de suas estabilidades. No capítulo três, usamos algumas das técnicas do capítulo anterior para derivar as equações de campo de Relatividade Geral e obter as equações de Friedmann para descrever a dinâmica do Universo. Introduzimos o modelo Λ CDM e como definir alguns parâmetros cosmológicos.

No capítulo quatro, discutimos os principais observáveis em cosmologia, que são usados para inferir parâmetros de modelos cosmológicos. Revisamos o método conhecido por Cronômetros Cósmiticos, que utiliza a evolução de galaxias antigas. Discutimos as Oscilações Acústicas de Bárions e como usá-las para definir escalas características e medir distâncias cosmológicas. Fizemos o mesmo para a Radiação Cósmitica de Fundo, revisando os parâmetros de deslocamento, que caracterizam de forma sucinta as flutuações de temperatura dessa radiação. Apresentamos como as Supernovas do tipo Ia são usadas para medir distâncias cosmológicas através do seu brilho característico. Em seguida, revisamos as Rajadas Rápidas de Rádio – ou FRB –, que é um observável em cosmologia extremamente proeminente, que pode ser usado para estudar a evolução cósmica. Por último, discutimos a importância de usar diferentes observáveis para restringir de maneira mais eficaz os parâmetros de determinado modelo cosmológico e como fazer isso usando o método do qui-quadrado.

Apresentamos, no quinto capítulo, modelos cosmológicos definidos através de parametrizações fenomenológicas. Primeiramente discutimos três modelos provenientes de parametrizações da equação de estado da energia escura: o modelo Λ CDM; o modelo w CDM; e o modelo CPL. Em seguida, revisamos o Formalismo de Primeira Ordem, que consiste em parametrizar o parâmetro de Hubble em termos de uma função dependente de um campo escalar. Dessa forma sendo possível descrever modelos cosmológicos alternativos. Revisitamos aplicações elementares, como para o espaço plano e para o espaço com curvatura. Estudamos o formalismo aplicado a modelos de quintessência com a presença

de matéria. Para ilustrar o formalismo nesse contexto, fizemos uma aplicação para um caso especial e descobrimos que é idêntico ao Λ CDM. Por fim, apresentamos uma nova abordagem para lidar com o contexto de modelos de quintessência com matéria. Metodologia que possui diversas vantagens sobre o Formalismo de Primeira Ordem, visto que pode-se gerar novos modelos cosmológicos de maneira bem mais concisa.

Com o propósito de realizar testes cosmológicos, no sexto capítulo apresentamos os conjuntos de dados usados para executar as inferências estatísticas sobre os parâmetros dos modelos considerados – nesse caso, os modelos sem curvatura Λ CDM, w CDM e CPL. Para tal, usamos os seguintes conjuntos de dados: 41 medidas de $H(z)$ determinadas pelo método dos Cronômetros Cósmicos; 17 medidas não-correlacionadas de BAO; e dados da compilação de supernovas Pantheon. Como resultado para o Λ CDM plano, no qual usamos apenas 4 parâmetros livres, percebemos que nossos testes estão de acordo com os valores já publicados na literatura. A tensão no valor da constante de Hubble se mostra aparente ao comparar os vínculos realizados pelos dados separadamente. No entanto, a ortogonalidade entre os vínculos quebra totalmente a degenerescência no espaço de parâmetros ao combinar os diferentes observáveis. O modelo w CDM plano estimou muito bem os parâmetros, inclusive com desvio padrão menor que os do Λ CDM para alguns parâmetros. O valor inferido para a equação de estado da energia escura corrobora fortemente para a presença de uma constante cosmológica. Por último, o modelo CPL plano inferiu de forma bastante coerente com os valores inferidos pelos outros modelos para alguns parâmetros. Percebemos, ao examinar os vínculos separadamente, diversas regiões altamente degeneradas e com forte correlações negativas para determinados espaços de parâmetros. Essas questões foram amenizadas ao combinar os diferentes conjuntos de dados.

No capítulo seis, além dos testes acima relatados, usamos quatro medidas do parâmetro de Hubble, inferidas a partir de um conjunto simulado de medidas de FRB, para investigar brevemente a performance de futuros radiotelescópios em termos da taxa de detecção de FRB, sendo eles o CHIME, o ASKAP e o BINGO. Supusemos que essas medidas foram realizadas pelo telescópio CHIME e a partir dos erros associados as medidas dos telescópios ASKAP e BINGO, reconstruímos aos erros das quatro medidas de $H(z)$. Dessa maneira, realizamos inferência estatística sobre os parâmetros do modelo Λ CDM plano e foi possível perceber que os dados concordavam com os parâmetros do modelo utilizado para simular as medidas. Isso reflete a possibilidade proeminente de usar dados de FRB para estudar a evolução cósmica e também foi possível mostrar que o BINGO será um ótimo instrumento capaz de construir um grande catálogo de FRB localizada.

Como perspectivas futuras para essa dissertação, tem-se que a nova abordagem analítica, apresentada no capítulo cinco, exige que modelos cosmológicos sejam gerados e a partir deles definir parâmetros que possam ser testados usando os conjuntos de

dados apresentados no capítulo seis. Além disso, devemos incluir os dados relacionados aos parâmetros de deslocamento associados à Radiação Cósmica de Fundo, afim de resultar em mais robustez em nossas inferências estatísticas. Finalmente, em um futuro próximo, após formatar todos os códigos escritos para realizar os testes cosmológicos, vamos disponibilizá-los na rede para uso público.

Apêndices

APÊNDICE A – Métodos estatísticos

A.1 O método qui-quadrado

Seja F uma grandeza, em um determinado modelo, expressa por uma função $F^{teo} = F(\{\alpha_m\}, z)$, onde $\{\alpha_m\}$ são os parâmetros desse modelo. Supõe-se uma coleção de N dados observacionais/experimentais $\{z_i, F_i^{obs}, \sigma_i\}$, onde F_i^{obs} representa a medida da grandeza F^{teo} quando z é igual a z_i , já σ_i corresponde a incerteza associada a medida de F_i^{obs} [129]. Dessa maneira, a estatística de qui-quadrado tem a seguinte forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{F(\{\alpha_m\}, z) - F_i^{obs}}{\sigma_i} \right)^2. \quad (\text{A.1})$$

Esse método consiste em minimizar a estatística de qui-quadrado ao variar os parâmetros associados ao modelo. Supõe-se que a teoria é qualitativamente correta e usa-se o método para minimizar as diferenças entre F^{teo} e F^{obs} . Em outras palavras, busca-se os valores dos parâmetros que minimizem a estatística χ^2 , pois eles maximizam a função densidade de probabilidade (L) de obter a coleção de dados usados. Tem-se que:

$$L(\chi^2) \propto e^{-\frac{1}{2}\chi^2}. \quad (\text{A.2})$$

A vantagem desse método é que ao mesmo tempo que se estima parâmetros, verifica-se a qualidade do ajuste. Para isso, é necessário verificar se o valor do χ_{min}^2 , qui-quadrado mínimo, é próximo do número de graus de liberdade ν , que é dado por $\nu = N - m$, onde m é o número de parâmetros livres e N o de dados experimentais. A motivação desse procedimento é que o valor mais provável do χ^2 , obtido pela condição de máximo da função de densidade de probabilidade, é aproximadamente igual a ν . Dessa forma, quanto mais próximo o valor de χ_{min}^2 do valor de ν , melhor é o ajuste do modelo aos dados observacionais. Além disso, quanto mais próximo for o (χ_{red}^2) , qui-quadrado reduzido, de 1, melhor o ajuste, já que:

$$\chi_{red}^2 \equiv \frac{\chi_{min}^2}{\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Ao encontrar os valores de melhor ajuste para os parâmetros, resta saber as regiões de confiança estatística para eles. Essas regiões são definidas por:

$$\chi_{\beta}^2 = \chi_{min}^2 + \Delta\chi^2(m, \beta), \quad (\text{A.4})$$

onde, $\Delta\chi^2$ representa o valor de delimita a região β de confiança estatística. Na tabela abaixo são mostrados os valores de $\Delta\chi^2$ que definem as três regiões de confiança estatística mais utilizadas.

β	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
68, 3%(1 σ)	1, 00	2, 30	3, 53
95, 4%(2 σ)	4, 00	6, 17	8, 02
99, 7%(3 σ)	9, 00	11, 8	14, 2

Tabela 8 – Os valores de $\Delta\chi^2(m, \beta)$ que definem as regiões de confiança estatística.

Para analisar cada parâmetro de um modelo cosmológico separadamente, usa-se uma técnica chamada marginalização, que consiste na integração da função densidade de probabilidade sobre todos os valores possíveis do parâmetro indesejado. Dessa forma, leva-se em consideração os efeitos da incerteza acerca do seu valor no resultado final [129, 114]. Por exemplo, seja uma função densidade de probabilidade $L(\alpha_1, \alpha_2)$ de dois parâmetros. A função densidade de probabilidade marginalizada do parâmetro α_1 , será dada por:

$$L(\alpha_1) = \int L(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2. \quad (\text{A.5})$$

Ao substituir a equação (29) na (27), tem-se:

$$L(\Delta\chi^2) = L_{max} e^{-\frac{1}{2}\Delta\chi^2}. \quad (\text{A.6})$$

Isso implica que para um único parâmetro, a região de confiança estatística 1σ é dada pela largura total de L na altura:

$$L = L_{max} e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0, 6065 L_{max}. \quad (\text{A.7})$$

Já a região de 2σ é dada pela largura total de L na altura

$$L = L_{max} e^{-2} \simeq 0, 1353 L_{max}, \quad (\text{A.8})$$

e assim por diante.

A.2 O método de Bayes

O método de Bayes, ou regra de Bayes, é uma equação proveniente da teoria da probabilidade. Todos os termos contidos nesse método são probabilidades. Há também, como será apresentado adiante, termos condicionais [131]. A figura 32 mostra uma versão

Figura 32 – Regra de Bayes. Usa-se esse método para calcular a probabilidade de A dado B . Fonte: Matt Buck (2009) [130]

da regra, porém é comum trocar as letras A e B por H e D , que representam o conjunto de hipóteses e o conjunto de dados do modelo teórico. Dessa maneira, pode-se interpretar a regra de Bayes como a probabilidade de uma hipótese estar correta, diante de determinado dado experimental. Em outras palavras:

$$P(H|D) = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)}. \quad (\text{A.9})$$

Na expressão acima, cada termo representa, respectivamente:

- $P(H|D)$ é a **probabilidade posterior**. Ele determina o nível de certeza de que a hipótese H seja verdadeira, perante os dados experimentais D . Calcular a probabilidade posterior é o objetivo principal desse método.

- $P(H)$ é a **probabilidade a priori**, ou por suposição, o qual descreve o nível de certeza de que a hipótese era verdadeira antes dos dados observacionais D . Pode ser obtida de um experimento anterior, por exemplo.

- $P(D|H)$ é a **verossimilhança**, que é a probabilidade de obter os dados experimentais D ao assumir que a hipótese H é verdadeira.

- $P(D)$ é a **evidência** ou **verossimilhança marginalizada**. É a probabilidade de se obter os dados observacionais D independentemente de a hipótese H ser verdadeira ou não.

Uma das grandes vantagens da análise Bayesiana, conforme [114], é a possibilidade de trabalhar com distribuições de probabilidades marginalizadas sobre parâmetros indesejáveis. Esses parâmetros são necessários para reproduzir os dados, porém são de pouco interesse físico. Com isso, o resultado de uma marginalização é uma função de probabilidade, no presente caso a probabilidade posterior $P(H|D)$, do conjunto de parâmetros do modelo H diante dos dados observacionais D

$$P(H|D) = \int P(H, \alpha|D) d\alpha, \quad (\text{A.10})$$

onde α é o conjunto de parâmetros indesejáveis.

A.3 Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC)

De acordo com [131, 89], Monte Carlo é um termo que engloba várias técnicas computacionais que fazem uso de números aleatórios. MCMC é um tipo especial de Monte Carlo, que permite retirar amostras de uma distribuição mesmo que não seja possível computá-la. Em outras palavras, o objetivo principal desse método é gerar M amostras aleatórias de parâmetros $\{H^i\}$ retirados da distribuição posterior

$$P(H, \alpha|D) = \frac{1}{Z} P(H, \alpha) P(D|H, \alpha), \quad (\text{A.11})$$

onde $Z = P(D)$ é a evidência, que é independente de H e α . Isso significa que pode-se retirar amostras de $P(H, \alpha|D)$ sem necessidade de calcular Z – ao menos que a intenção seja comparar a validade entre dois modelos diferentes. Para isso, o algoritmo desenvolve a chamada cadeia de Markov, que é uma sequência de variáveis aleatórias $\{X^0, X^1, \dots, X^{(M-1)}\}$, na qual a probabilidade do $t_{i\text{-ésimo}+1}$ elemento na cadeia só depende do valor do $t_{i\text{-ésimo}}$ elemento, assim cada elemento numa cadeia de Markov só depende do anterior.

As cadeias de Markov tem como propriedade convergir a um estado estacionário onde seus elementos sucessivos são amostras da distribuição posterior. A geração desses elementos é de natureza probabilística, dessa forma vários algoritmos são capazes de produzir cadeias de Markov. A escolha do algoritmo depende das especificidades do problema a ser analisado. Uma vez que, as amostras tenham sido produzidas pelo MCMC, ou seja, uma cadeia de Markov tenha sido construída, pode-se obter estimativas dos valores esperados para qualquer função dos parâmetros. Por exemplo, a média da posterior é dada por

$$\langle H \rangle \approx \int P(H|D) = \frac{1}{M} \sum_{t=0}^{M-1} H^{(t)}. \quad (\text{A.12})$$

Essa igualdade é permitida porque as amostras $H^{(t)}$ são, por construção, geradas a partir da posterior. Em geral pode-se obter o valor esperado de qualquer função dos parâmetros $f(H)$ da seguinte maneira:

$$\langle f(H) \rangle \approx \frac{1}{M} \sum_{t=0}^{M-1} f(H^{(t)}). \quad (\text{A.13})$$

Isso equivale a dizer que os valores marginalizados de $H^{(t)}$ podem ser aproximados pelo histograma das amostras projetado no subespaço dos parâmetros de H [114, 89].

Produzir as amostras, segundo [114], não é um processo trivial a menos que $P(H, \alpha|D)$ seja uma distribuição analítica conhecida –e.g. a gaussiana. Um algoritmo MCMC executa um processo de caminho aleatório no subespaço dos parâmetros, que com o tempo, extrai um conjunto significativo de amostras da distribuição. Por exemplo, contido em [89], considera-se uma probabilidade marginalizada unidimensional para o i -ésimo elemento de H , H^i . Seja $i = 1$ e o subespaço dos parâmetros seja de dimensionalidade n , então

$$P(H^1|D) = \int P(H|D) dH^2 \dots dH^n, \quad (\text{A.14})$$

onde $P(H^i|D)$ é a posterior marginalizada para H^i . A partir da cadeia de Markov pode-se plotar a posterior marginalizada desde que os elementos da cadeia de Markov sejam amostras da distribuição total, pois eles refletem o valor da distribuição de probabilidade total. Dessa maneira, constrói-se uma série de barras através dos valores possíveis de H^1 e, ao ignorar os valores das coordenadas H^2, \dots, H^n , calcula-se o número de amostras dentro de cada barra. O procedimento pode ser generalizado para uma posterior bidimensional.

A.3.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

O objetivo desse algoritmo é gerar um conjunto de pontos em um espaço de parâmetros, no qual a distribuição estatística segue uma função densidade de probabilidade. Assim, é possível reconstruir uma função a partir de simples histogramas. O algoritmo MCMC de Metropolis-Hastings é um dos mais simples e mais usados. O procedimento consiste em: (1) dado $X^{(t)}$, que é a posição de um elemento em uma cadeia de Markov, propõe-se uma nova posição Y , uma amostra retirada a partir de uma distribuição $Q(Y|X^{(t)})$, a qual representa a transição entre as posições – ou seja, a probabilidade de Y dado que $X^{(t)}$; (2) aceita-se a proposta de acordo com a probabilidade

$$P(Y|X^{(t)}) = \min \left(\frac{P(Y|D) Q(X^{(t)}|Y)}{P(X^{(t)}|D) Q(Y|X^{(t)})}, 1 \right). \quad (\text{A.15})$$

Uma parametrização possível para essa probabilidade é uma distribuição gaussiana centrada em $X^{(t)}$. Se a posição proposta for aceita, $X^{(t+1)} = Y$, caso contrário repete-se a posição $X^{(t)}$ na cadeia [114, 65].

A probabilidade usada para aceitar uma nova posição no algoritmo de Metropolis-Hastings, de acordo com [132], é formulada de modo que atenda as seguintes restrições: (1) a amostra Y tende a escolher posições com maiores probabilidades de acordo com a função densidade de probabilidade total – essa restrição é dada por $\frac{P(Y|D)}{P(X^{(t)}|D)}$; (2) a amostra deve percorrer o subespaço dos parâmetros e evitar permanecer em uma posição

específica – por exemplo, a amostra pode reverter uma posição anterior; essa restrição é dada pela razão $\frac{Q(X^{(t)}|Y)}{Q(Y|X^{(t)})}$.

Algorithm 1: Algoritmo de Metropolis-Hastings

```

Inicia-se na posição  $X^0$ ;
for  $i = 1, 2, \dots$  do
    Propõe-se a posição retirada da distribuição de transição  $Y \sim Q(Y|X^{(t)})$ ;
    Calcula-se a probabilidade de aceitação da posição nova
     $P(Y|X^{(t)}) = \min\left(\frac{P(Y|D)}{P(X^{(t)}|D)} \frac{Q(X^{(t)}|Y)}{Q(Y|X^{(t)})}, 1\right)$ ;
    Sorteia-se um número aleatório  $\mu$  no intervalo  $[0, 1]$ ;
    if  $\mu < P(Y|X^{(t)})$  then
        | Aceita-se a nova posição,  $X^{(t+1)} = Y$ ;
    else
        | Rejeita-se a nova posição e repete-se a posição anterior para a próxima
        | iteração;
    end
end
  
```

Esse algoritmo tende a convergir a um determinado conjunto de amostras da distribuição após certo tempo [114], porém há vários algoritmos que convergem a esse estado mais rapidamente e com diferentes níveis de dificuldade de implementação. Prefere-se algoritmos de rápida convergência, pois isso significa menor custo computacional para obter resultados equivalentes. Um exemplo de algoritmo M-H é apresentado no **algoritmo 1**.

A.4 Algoritmo MCMC linearmente invariante

Este algoritmo tem como principal característica tratar diferentes distribuições de probabilidades como igualmente difíceis ao fazer uso de transformações lineares para escrevê-las de forma mais conveniente [133]. Um algoritmo linearmente invariante (ALI) consiste em varrer o espaço de n parâmetros através de L processos aleatórios – caminhantes aleatórios. Esses caminhantes são individualmente amostras independentes da distribuição de probabilidade posterior. Em uma interação de um ALI, atualiza-se a posição de todos os caminhantes um por um. Para isso, uma nova posição é proposta e aceita – ou rejeitada – de acordo com uma regra de aceitação do tipo Metropolis-Hastings. O objetivo é simular a distribuição posterior a partir de uma função $\pi(x)$ n -dimensional dada por

$$\prod_{n=0}^L \pi(x), \quad (\text{A.16})$$

ou seja, essa distribuição é replicada L vezes para cada caminhante [134].

Há diversas propostas para algoritmos linearmente invariantes. Uma delas, bastante utilizada, é a chamada *stretch move*, ou movimento esticado, que funciona da seguinte forma

[114]: seja $X_k^{(t)}$ a posição do j -ésimo caminhante no espaço de parâmetros, com $k = 1, \dots, L$, na interação t . Para que sua posição seja atualizada, seleciona-se aleatoriamente um outro caminhante $X_j^{(t)}$, com $j \neq k$. A posição proposta é dada por:

$$X_k^{(t)} \rightarrow Y = X_j + Z (X_k^{(t)} - X_j), \quad (\text{A.17})$$

onde Z é uma variável aleatória retirada da seguinte distribuição:

$$g(Z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Z}} & \text{se } Z \in \left[\frac{1}{a}; a\right], \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

com a sendo um parâmetro de escala. Finalmente, o movimento será aceito de acordo com a probabilidade

$$q = \min \left[1, Z^{n-1} \frac{p(Y)}{p(X_k^{(t)})} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Esse procedimento é repetido para cada caminhante e é ilustrado no **algoritmo 2**.

Algorithm 2: Algoritmo linearmente invariante (stretch move - 1 interação)

```

Inicia-se na posição  $X^0$ ;
for  $k = 1, \dots, L$  do
    Inicia-se com todos os  $L$  caminhantes em posições definidas por  $X_k^{(t)}$ ;
    Escolhe-se aleatoriamente um caminhante  $X_j$ ;
    Define-se uma variável aleatória a partir da distribuição  $g(Z)$ , eq.(A.18);
    Propõe-se uma nova posição  $Y$ , eq.(A.17);
    Define-se a condição de aceitação, eq.(A.19);
    Sorteia-se um número aleatório no intervalo  $[0, 1]$ ;
    if  $r \leq q$  then
        | Aceita-se a nova posição,  $X_k^{(t+1)} = Y$ ;
    else
        | Rejeita-se a nova posição e repete-se a posição anterior para a próxima
        | iteração;
    end
end

```

Esse algoritmo possui uma versão implementada em um programa – disponível gratuitamente – escrito em *Python* com o nome de *emcee* [114]. Nesse programa o stretch move é ligeiramente diferente, pois divide-se os caminhantes em dois grupos e a posição de cada caminhante em um grupo, é determinada pela posição dos caminhantes do outro grupo – cf. [114].

A.4.1 Inferência bayesiana em cosmologia

Para que um problema de inferência estatística seja totalmente especificado [89], é necessário definir um modelo – no qual os parâmetros podem variar de acordo com suas distribuições de probabilidades a priori – e a função de verossimilhança – likelihood – para os dados considerados. Sendo assim, para entender como todos os conceitos apresentados até então podem ser aplicados à cosmologia, nesta sessão reproduz-se um exemplo. Considera-se um problema bastante comum em cosmologia [59], que consiste em estimar os valores atuais do parâmetro de Hubble H_0 , da densidade de matéria do Universo Ω_m e da densidade associada a energia escura Ω_Λ , assumindo o modelo padrão Λ CDM. Para isso, foi necessário escrever um código em Python – disponível em [135] – usando três programas disponíveis gratuitamente: *getdist* [136], para plotar os vínculos entre os parâmetros na mesma imagem; *iminuit*, uma implementação em Python de um programa escrito em 1975 por cientistas do CERN [137], que nesse exemplo foi usado para a minimização do χ^2 e plotar as curvas de confiança estatística; e o *emcee* [114], para computar as cadeias de Markov.

Para a implementação desse exemplo foi usado um conjunto de 33 medidas observacionais do parâmetro de Hubble em termos de redshift, $H(z)$, a partir da abordagem conhecida como *Cronômetros Cósmicos*. Esse método utiliza galáxias vermelhas, que são objetos super massivos e possuem as populações de estrelas mais anciãs, como também possuem pouca poeira estelar, o que favorece a obtenção do seu espectro luminoso e permite medir $H(z)$. Essa amostra cobre cerca de $10Ga$ – 10 bilhões de anos – em termos de tempo cósmico. A grande vantagem de usar esses dados é que eles são praticamente independentes do modelo cosmológico [138, 59]. O dados estão plotados na figura 4.

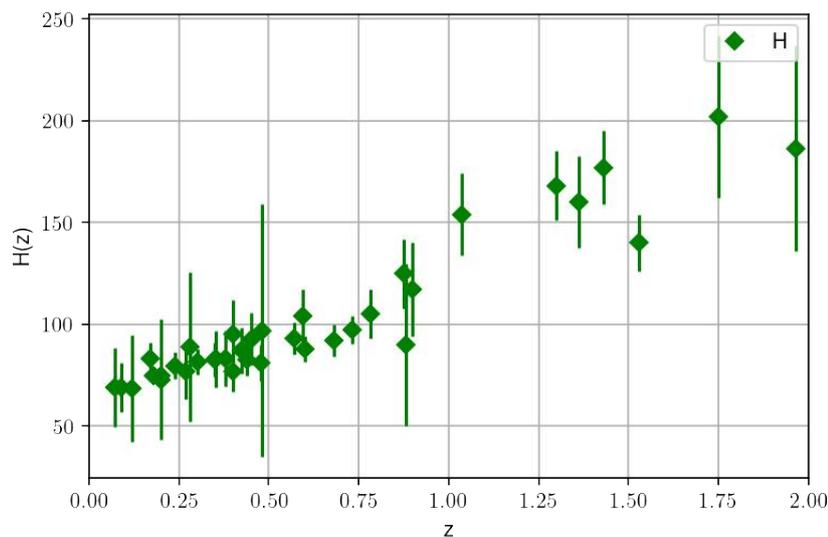


Figura 33 – Cronômetros cosmológicos, dados de $H(z)$.

O objetivo desse exemplo é estimar os parâmetros cosmológicos que compõe a

descrição do Universo de acordo com o modelo considerado e verificar como eles estão correlacionados. Sendo assim, escreve-se a equação de Friedmann em termos do redshift – usa-se $1 + z = 1/a$ – e por simplicidade admite-se um Universo com o termo de curvatura escrito em termo das outras componentes do Universo e sem presença de radiação. Assim, o modelo tem a seguinte forma:

$$H(z)^2 = H_0 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{k,0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (\text{A.20})$$

onde $H_0 = h \cdot 100 \cdot km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$, com o seguinte vínculo,

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1. \quad (\text{A.21})$$

Pela eq.(A.21), pode-se escrever um parâmetro em termos do outro, eliminando-o da análise numérica. Com isso, tem-se os seguintes parâmetros livres: h , z , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$. Ao assumir que os parâmetros a ser estimados estejam distribuídos de forma gaussiana, define-se a seguinte função de verossimilhança:

$$L \propto \exp \left[- \sum \frac{(H(z_i) - H_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (\text{A.22})$$

onde, $H(z_i)$ é descrito pela equação (A.20), avaliada para cada valor z_i no conjunto de dados, H_i são os valores do parâmetro de Hubble observados para cada valor z_i dos dados e σ_i os erros associados a essas medidas.

Sendo assim, para plotar as curvas de confiança estatística previstas pelo modelo considerado até então, é necessário estabelecer a forma das distribuições a priori. As informações que se tem acerca dos parâmetros livres de densidade de cada componente do Universo, é que elas satisfazem a seguinte relação $0 \leq \Omega_i \leq 1$. Para H_0 , pode-se inferir uma distribuição a priori ao observar o conjunto de dados [59]. Com isso, pode-se assumir que os parâmetros estão distribuídos uniformemente com os limites $\Omega_m \in [0, 1]$ e $H_0 \in [10, 100]$. Em seguida, com todas as informações reunidas, pode-se usar os programas mencionados anteriormente para construir o código necessário para a inferência estatística. Os resultados são mostrados na figura 5. Os valores estimados para os parâmetros, que minimizam o χ^2 e conseqüentemente maximizam a função de verossimilhança, são: $h = 0,67 \pm 0,04$ – ou seja, $H_0 \approx 67$ –, $\Omega_{m,0} = 0,23 \pm 0,11$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0,58 \pm 0,53$. Isso sugere que o termo de curvatura é próximo de zero, isto é, o Universo apresenta-se aparentemente plano atualmente. Resultado que bate com os já publicados na literatura.

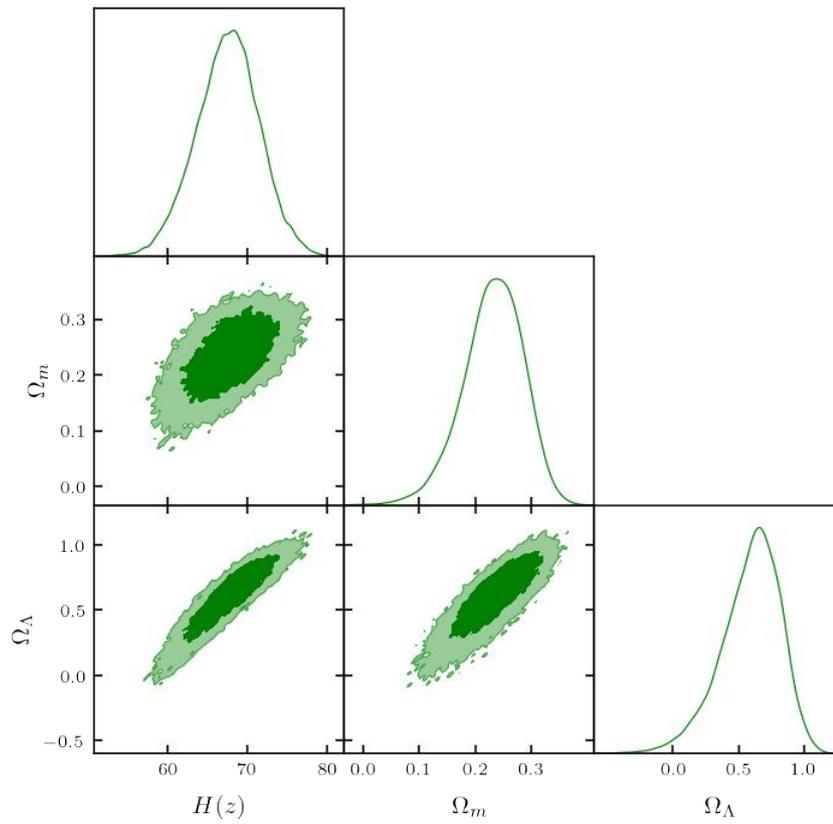


Figura 34 – Resultado da inferência estatística. Para gerar as cadeias de Markov foram usados um conjunto de 100 caminhantes aleatórios e 10000 interações.

Referências

- 1 SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado na página 29.
- 2 RHEE, G. *Cosmic dawn*. Springer. Citado na página 29.
- 3 PÁSZTOR, E. *Nebra disk. hae*, p. 1349, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.
- 4 HAMACHER, D. W. Are supernovae recorded in indigenous astronomical traditions? *arXiv preprint arXiv:1404.3253*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.
- 5 BURKE, B. F.; GRAHAM-SMITH, F.; WILKINSON, P. N. *An introduction to radio astronomy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- 6 GRAHAM-SMITH, F. *Unseen Cosmos: the universe in radio*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 7 BENNETT, C. L. et al. Scientific results from the cosmic background explorer (cobe):(microwave/infrared). *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 90, n. 11, p. 4766–4773, 1993. Citado na página 31.
- 8 BENNETT, C. L. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 20, 2013. Citado na página 31.
- 9 ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 571, p. A1, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 17, 31 e 49.
- 10 AKRAMI, Y. et al. Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck. *arXiv preprint arXiv:1807.06205*, 2018. Citado na página 31.
- 11 NASA/JPL-CALTECH/ESA. *Universe Older Than Previously Thought*. <https://science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/2013/21mar_cmb>. Accessed: 2021-21-01. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 32.
- 12 SCHMIDT, B. P. et al. The high-z supernova search: measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type ia supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 507, n. 1, p. 46, 1998. Citado na página 32.
- 13 FILIPPENKO, A. V.; RIESS, A. G. Results from the high-z supernova search team. *Physics Reports*, Elsevier, v. 307, n. 1-4, p. 31–44, 1998. Citado na página 32.
- 14 GOOBAR, A. et al. The acceleration of the universe: Measurements of cosmological parameters from type ia supernovae. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2000, n. T85, p. 47, 2000. Citado na página 32.
- 15 NASA. *HST Images of Three High-z Supernovae*. <<https://www.cfa.harvard.edu/supernova/highz/figures/pictures.html>>. Accessed: 2021-22-01. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 33.

- 16 YORK, D. G. et al. The sloan digital sky survey: Technical summary. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 120, n. 3, p. 1579, 2000. Citado na página 33.
- 17 SDSS. *Science Results*. <<https://www.sdss.org/science/>>. Accessed: 2021-24-01. Citado na página 33.
- 18 EBOSS. *The Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)*. <<https://www.sdss.org/surveys/eboss/>>. Accessed: 2021-24-01. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 19 SDSS. *Small Version of SDSS 2.5m Telescope*. <<https://www.sdss.org/education/sdss-telescope-small/>>. Accessed: 2021-26-01. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 34.
- 20 SDSS. *No need to Mind the Gap: Astrophysicists fill in 11 billion years of our universe's expansion history*. <<https://www.sdss.org/press-releases/no-need-to-mind-the-gap/>>. Accessed: 2021-26-01. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 34.
- 21 HOBBS, G. et al. An ultra-wide bandwidth (704 to 4 032 mhz) receiver for the parkes radio telescope. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, Cambridge University Press, v. 37, 2020. Citado na página 34.
- 22 EDWARDS, P. Fifty years in fifteen minutes: the impact of the parkes observatory. *arXiv preprint arXiv:1210.2138*, 2012. Citado na página 34.
- 23 SARKISSIAN, J. M. On eagle's wings: The parkes observatory's support of the apollo 11 mission. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, Cambridge University Press, v. 18, n. 3, p. 287–310, 2001. Citado na página 34.
- 24 LORIMER, D. et al. A bright millisecond radio burst of extragalactic origin. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 318, n. 5851, p. 777–780, 2007. Citado na página 34.
- 25 DYER, A. *Visiting The Dish – The Parkes Radio Telescope*. <<https://amazingsky.net/2012/12/07/visiting-the-dish-the-parkes-radio-telescope/>>. Accessed: 2021-26-01. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.
- 26 COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019. Citado na página 34.
- 27 PSALTIS, D. et al. Gravitational test beyond the first post-newtonian order with the shadow of the m87 black hole. *Physical review letters*, APS, v. 125, n. 14, p. 141104, 2020. Citado na página 34.
- 28 PALMESE, A. et al. Gravitational wave cosmology and astrophysics with large spectroscopic galaxy surveys. *arXiv preprint arXiv:1903.04730*, 2019. Citado na página 34.
- 29 SILK, J. Challenges in cosmology from the big bang to dark energy, dark matter and galaxy formation. In: *Proceedings of the 14th International Symposium on Nuclei in the Cosmos (NIC2016)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 010101. Citado na página 34.
- 30 NAGAI, D. et al. Astro2020 science white paper supermassive black hole feedback. Citado na página 34.

- 31 WUENSCHÉ, C.; COLLABORATION, B. et al. The bingo telescope: a new instrument exploring the new 21 cm cosmology window. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2019. v. 1269, n. 1, p. 012002. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 79.
- 32 WUENSCHÉ, C. et al. Baryon acoustic oscillations from integrated neutral gas observations: Broadband corrugated horn construction and testing. *Experimental Astronomy*, Springer, v. 50, n. 1, p. 125–144, 2020. Citado na página 36.
- 33 YOHANA, E.; LI, Y.-C.; MA, Y.-Z. Forecasts of cosmological constraints from hi intensity mapping with fast, bingo and ska-i. *Research in Astronomy and Astrophysics*, IOP Publishing, v. 19, n. 12, p. 186, 2019. Citado na página 36.
- 34 PADMANABHAN, H.; REFREGIER, A.; AMARA, A. Impact of astrophysics on cosmology forecasts for 21 cm surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 485, n. 3, p. 4060–4070, 2019. Citado na página 36.
- 35 PRITCHARD, J. R.; LOEB, A. 21 cm cosmology in the 21st century. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 75, n. 8, p. 086901, 2012. Citado na página 36.
- 36 OLIVEIRA, G. A. de. *USP lidera projeto internacional de construção do radiotelescópio Bingo*. <<https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/usp-lidera-projeto-internacional-de-construcao-do-radiotelescopio-bingo/>>. Accessed: 2021-26-01. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 36 e 61.
- 37 PE'ER, A. *Classical Field Theory*. 2016. 17 p. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 44.
- 38 TORRE, C. G. *Introduction to Classical Field Theory*. Utah: All Complete Monographs, 2019. v. 3. 235 p. Citado na página 39.
- 39 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. v. 1. 386 p. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 41.
- 40 BAZEIA, D. F. *Campos escalares em ação*. 121 p. Tese (Tese (apresentada para concurso de professor titular)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 40, 41, 42, 43, 44 e 46.
- 41 LOBÃO, A. S. J. *Estudo de Modelos de Campos Escalares*. 83 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 44.
- 42 ALVES, F. A. P. J. *Gerando Modelo de dois campos escalares*. 41 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012. Citado na página 41.
- 43 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, LD Landau Theoretical Physics Institute, USSR Academy of Sciences, Moscow, v. 24, n. 4, 1976. Citado na página 41.
- 44 PRASAD, M.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the 't hooft monopole and the julia-zee dyon. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 12, p. 760, 1975. Citado na página 41.

- 45 SANTOS, J. R. L. dos. *Tópicos em Defeitos Deformados e o Movimento Browniano*. 126 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.
- 46 JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 49, n. 3, p. 681, 1977. Citado na página 43.
- 47 VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls: An introduction to classical and quantum solitons*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2006. v. 1. 192 p. Citado na página 44.
- 48 BAZEIA, D. F. Topological solitons in a vacuumless system. *Phys.Rev. D60 (1999) 067705*, v. 1, p. 7, 1999. Citado na página 44.
- 49 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521654760. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=eW4bB_LATHec>. Citado 3 vezes nas páginas 47, 49 e 51.
- 50 TONG, D. *Cosmology*. 2019. 81 p. Citado na página 49.
- 51 COLLESS, M. et al. The 2df galaxy redshift survey: spectra and redshifts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 328, n. 4, p. 1039–1063, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 49.
- 52 CARROLL, S. M. Lecture notes on general relativity. In: . [S.l.: s.n.], 1997. Citado 4 vezes nas páginas 50, 51, 53 e 56.
- 53 RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tCqejgEACAAJ>>. Citado 5 vezes nas páginas 51, 56, 60, 63 e 71.
- 54 CALDER, L. *Dark energy: how the paradigm shifted*. [S.l.], 2010 (accessed September 3, 2020). <<https://physicsworld.com/a/dark-energy-how-the-paradigm-shifted/>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 52.
- 55 LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large-scale structure*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 62.
- 56 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 71.
- 57 LAMBOURNE, R. J. *Relativity, gravitation and cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 55.
- 58 PALMA, C. *Disponível online*. [S.l.]. <<http://www2.astro.psu.edu/users/cpalma/astro1h/class28.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 55.
- 59 PADILLA, L. E. et al. Cosmological parameter inference with bayesian statistics. *arXiv preprint arXiv:1903.11127*, 2019. Citado 8 vezes nas páginas 56, 57, 59, 60, 62, 63, 104 e 105.
- 60 LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 71.

- 61 MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- 62 DAVIS, T. M. et al. Scrutinizing exotic cosmological models using essence supernova data combined with other cosmological probes. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 666, n. 2, p. 716, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 72.
- 63 JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 573, n. 1, p. 37, 2002. Citado na página 59.
- 64 NEGRELLI, C. et al. Testing modified gravity theory (mog) with type ia supernovae, cosmic chronometers and baryon acoustic oscillations. *arXiv preprint arXiv:2004.13648*, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 62.
- 65 SANTOS, M. V. *Vínculos observacionais de SN Ia e BAO/CMB: uma abordagem cinematográfica*. 96 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, São Paulo, 1986. Citado 5 vezes nas páginas 60, 62, 69, 72 e 101.
- 66 EISENSTEIN, D. J.; SEO, H.-J.; WHITE, M. On the robustness of the acoustic scale in the low-redshift clustering of matter. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 664, n. 2, p. 660, 2007. Citado na página 60.
- 67 BLAKE, C. et al. The wigglez dark energy survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 425, n. 1, p. 405–414, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- 68 CARTER, P. et al. The impact of the fiducial cosmology assumption on bao cosmological parameter inference. *arXiv preprint arXiv:1906.03035*, 2019. Citado na página 61.
- 69 SANTOS, B. et al. Testing averaged cosmology with type ia supernovae and bao data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2017, n. 02, p. 047, 2017. Citado na página 62.
- 70 ESO, E. S. O. *O resto de supernova SN 1006 observado em diferentes comprimentos de onda*. <<https://www.eso.org/public/brazil/images/eso1308b/>>. Accessed: 2021-24-02. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 62.
- 71 DODELSON, S. *Modern cosmology*. [S.l.]: Elsevier, 2003. Citado na página 63.
- 72 BUDASSI, P. *Logarithmic radial photo of the universe by Pablo Budassi*. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithmic_radial_photo_of_the_universe_by_pablo_budassi_9MFK.jpg>. Accessed: 2021-26-02. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 64.
- 73 RUBINO-MARTÍN, J. A. Planck 2013 cosmology results: a review. *Acta Polytechnica CTU Proceedings*, v. 1, n. 1, p. 49–55, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 65.
- 74 CASAS, S. Power spectrum and the anisotropies of the cmb. Citado na página 63.
- 75 MILLER, C. *Cosmic Concordance*. 8 p. Citado na página 63.

- 76 ZHAI, Z. et al. Cmb distance priors revisited: effects of dark energy dynamics, spatial curvature, primordial power spectrum, and neutrino parameters. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2020, n. 07, p. 009, 2020. Citado na página 63.
- 77 CHEN, L.; HUANG, Q.-G.; WANG, K. Distance priors from planck final release. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 028, 2019. Citado na página 63.
- 78 KOMATSU, E. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 180, n. 2, p. 330, 2009. Citado na página 63.
- 79 ZHAO, Z.-W. et al. Cosmological parameter estimation for dynamical dark energy models with future fast radio burst observations. *arXiv preprint arXiv:2006.01450*, 2020. Citado na página 65.
- 80 WALTERS, A. et al. Future cosmological constraints from fast radio bursts. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 856, n. 1, p. 65, 2018. Citado na página 65.
- 81 HASHIMOTO, T. et al. Fast radio bursts to be detected with the square kilometre array. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2020. Citado na página 65.
- 82 PETROFF, E.; HESSELS, J.; LORIMER, D. Fast radio bursts. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer, v. 27, n. 1, p. 1–75, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 66, 67 e 68.
- 83 CORDES, J. M.; CHATTERJEE, S. Fast radio bursts: an extragalactic enigma. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 57, 2019. Citado na página 66.
- 84 LEEUWEN, J. van. Proceedings of iau symposium 291 "neutron stars and pulsars: Challenges and opportunities after 80 years". *arXiv preprint arXiv:1212.4042*, 2012. Citado na página 66.
- 85 ESO, E. S. O. *O VISTA enxerga através do véu de poeira da Pequena Nuvem de Magalhães*. <<https://www.eso.org/public/brazil/news/eso1714/>>. Accessed: 2021-28-02. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 66.
- 86 WU, Q.; YU, H.; WANG, F. A new method to measure hubble parameter $h(z)$ using fast radio bursts. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 895, n. 1, p. 33, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 21, 67, 79 e 84.
- 87 ZHANG, G. et al. Dispersion measures of fast radio burst host galaxies derived from illustriTng simulation. *arXiv preprint arXiv:2007.13935*, 2020. Citado na página 67.
- 88 BOCHENEK, C. D. et al. A fast radio burst associated with a galactic magnetar. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 587, n. 7832, p. 59–62, 2020. Citado na página 67.
- 89 TROTTA, R. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemp.Phys.49:71-104,2008*, v. 1, p. 41, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 68, 69, 100, 101 e 104.
- 90 LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the universe. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 9, p. 091301, 2003. Citado na página 72.

- 91 MORAES, P.; SANTOS, J. Two scalar field cosmology from coupled one-field models. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083516, 2014. Citado na página 72.
- 92 BAZEIA, D. et al. First-order formalism and dark energy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 633, n. 4-5, p. 415–419, 2006. Citado na página 72.
- 93 SANTOS, R. S. *Soluções Cosmológicas tipo Kink em teorias $f(R,T)$ e $\Lambda(\phi)$* . 81 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2019. Citado na página 74.
- 94 SANTOS, J. J. R. dos. *Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares*. 129 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 74, 75 e 76.
- 95 BAZEIA, D. et al. First-order formalism for dark energy and dust. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 55, n. 1, p. 113–117, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.
- 96 JESUS, J. et al. Bayesian correction of $h(z)$ data uncertainties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 477, n. 3, p. 2867–2873, 2018. Citado na página 79.
- 97 BENISTY, D.; STAICOVA, D. Testing late-time cosmic acceleration with uncorrelated baryon acoustic oscillation dataset. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 647, p. A38, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.
- 98 SCOLNIC, D. M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 859, n. 2, p. 101, 2018. Citado na página 79.
- 99 ZHANG, C. et al. Four new observational $h(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, IOP Publishing, v. 14, n. 10, p. 1221, 2014. Citado na página 80.
- 100 SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 12, p. 123001, 2005. Citado na página 80.
- 101 MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z = 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 08, p. 006, 2012. Citado na página 80.
- 102 GAZTANAGA, E.; CABRÉ, A.; HUI, L. Clustering of luminous red galaxies—iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $h(z)$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 399, n. 3, p. 1663–1680, 2009. Citado na página 80.
- 103 OKA, A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the sdss dr7 lrg sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 439, n. 3, p. 2515–2530, 2014. Citado na página 80.

- 104 CHUANG, C.-H.; WANG, Y. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of $h(z)$, $d_a(z)$ and $f(z) \sigma_8(z)$ from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 435, n. 1, p. 255–262, 2013. Citado na página 80.
- 105 MORESCO, M. et al. A 6% measurement of the hubble parameter at $z = 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014, 2016. Citado na página 80.
- 106 BLAKE, C. et al. The wigglez dark energy survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 425, n. 1, p. 405–414, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- 107 STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i: $H(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 02, p. 008, 2010. Citado na página 80.
- 108 ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: measuring d_a and h at $z = 0.57$ from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 439, n. 1, p. 83–101, 2014. Citado na página 80.
- 109 MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at $z = 2$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Oxford University Press, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 2015. Citado na página 80.
- 110 DELUBAC, T. et al. Baryon acoustic oscillations in the $\text{Ly}\alpha$ forest of boss quasars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 552, p. A96, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- 111 DELUBAC, T. et al. Baryon acoustic oscillations in the $\text{Ly}\alpha$ forest of boss dr11 quasars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 574, p. A59, 2015. Citado na página 80.
- 112 FONT-RIBERA, A. et al. Quasar-lyman α forest cross-correlation from boss dr11: Baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 05, p. 027, 2014. Citado na página 80.
- 113 SANTOS, M. V. dos; REIS, R. R.; WAGA, I. Constraining the cosmic deceleration-acceleration transition with type ia supernova, bao/cmb and $h(z)$ data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2016, n. 02, p. 066, 2016. Citado na página 80.
- 114 FOREMAN-MACKEY, D. et al. emcee: The mcmc hammer. *arXiv:1202.3665v4[astro-ph.IM]*, p. 15, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 81, 98, 99, 100, 101, 102, 103 e 104.
- 115 HANDLEY, W.; HOBSON, M.; LASENBY, A. Polychord: nested sampling for cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Oxford University Press, v. 450, n. 1, p. L61–L65, 2015. Citado na página 81.

- 116 BEUTLER, F. et al. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 416, n. 4, p. 3017–3032, 2011. Citado na página 81.
- 117 ROSS, A. J. et al. The clustering of the sdss dr7 main galaxy sample-i. a 4 per cent distance measure at $z=0.15$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 449, n. 1, p. 835–847, 2015. Citado na página 81.
- 118 PERCIVAL, W. J. et al. Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 401, n. 4, p. 2148–2168, 2010. Citado na página 81.
- 119 TOJEIRO, R. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: galaxy clustering measurements in the low-redshift sample of data release 11. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 440, n. 3, p. 2222–2237, 2014. Citado na página 81.
- 120 SEO, H.-J. et al. Acoustic scale from the angular power spectra of sdss-iii dr8 photometric luminous galaxies. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 761, n. 1, p. 13, 2012. Citado na página 81.
- 121 ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 427, n. 4, p. 3435–3467, 2012. Citado na página 81.
- 122 SRIDHAR, S. et al. Clustering of lrgs in the decals dr8 footprint: Distance constraints from baryon acoustic oscillations using photometric redshifts. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 904, n. 1, p. 69, 2020. Citado na página 81.
- 123 BOURBOUX, H. D. M. D. et al. The completed sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey: Baryon acoustic oscillations with $\text{Ly}\alpha$ forests. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 901, n. 2, p. 153, 2020. Citado na página 81.
- 124 ABBOTT, T. et al. Dark energy survey year 1 results: Measurement of the baryon acoustic oscillation scale in the distribution of galaxies to redshift 1. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 483, n. 4, p. 4866–4883, 2019. Citado na página 81.
- 125 HOU, J. et al. The completed sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey: Bao and rsd measurements from anisotropic clustering analysis of the quasar sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 500, n. 1, p. 1201–1221, 2021. Citado na página 81.
- 126 ATA, M. et al. The clustering of the sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey dr14 quasar sample: first measurement of baryon acoustic oscillations between redshift 0.8 and 2.2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 473, n. 4, p. 4773–4794, 2018. Citado na página 81.

- 127 AGATHE, V. de S. et al. Baryon acoustic oscillations at $z=2.34$ from the correlations of $ly\alpha$ absorption in eboss dr14. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 629, p. A85, 2019. Citado na página 81.
- 128 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020. Citado na página 82.
- 129 NETO, G. P. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física (Online)*, v. 40, n. 6810, p. 361–365, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 98.
- 130 BUCK, M. *Bayes' theorem spelt out in blue neon at the offices of Autonomy in Cambridge*. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Bayes>. Accessed: 2021-07-12. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 99.
- 131 BREWER, B. J. *Introduction to Bayesian Statistics*. 98 p. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 100.
- 132 YILDIRIM, I. *Bayesian Inference: Metropolis-Hastings Sampling*. 2012. 6 p. Citado na página 101.
- 133 GOODMAN, J.; WEARE, J. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in applied mathematics and computational science*, Mathematical Sciences Publishers, v. 5, n. 1, p. 65–80, 2010. Citado na página 102.
- 134 HUIJSER, D.; GOODMAN, J.; BREWER, B. J. Properties of the affine invariant ensemble sampler in high dimensions. *arXiv preprint arXiv:1509.02230*, 2015. Citado na página 102.
- 135 FORTUNATO, J. *Cosmological inference example*. mutatisIV, 2020. Disponível em: <<https://github.com/mutatisIV/interstellar-overdrive/tree/main/Cosmology>>. Citado na página 104.
- 136 LEWIS, A. Getdist: a python package for analysing monte carlo samples. *arXiv preprint arXiv:1910.13970*, 2019. Citado na página 104.
- 137 JAMES, F.; ROOS, M. Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations. *Comput. Phys. Commun.*, v. 10, p. 343–367, 1975. Citado na página 104.
- 138 MORESCO, M. et al. Constraining the time evolution of dark energy, curvature and neutrino properties with cosmic chronometers. *arXiv preprint arXiv:1604.00183*, 2016. Citado na página 104.