



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

A QUEBRA DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA ELETRODINÂMICA
QUÂNTICA ATRAVÉS DE UM ESPAÇO-TEMPO INTRINSECAMENTE
ANISOTRÓPICO

RAFAEL DE JESUS DOS SANTOS OLIVEIRA

Campina Grande - PB
Agosto de 2017

RAFAEL DE JESUS DOS SANTOS OLIVEIRA

**A QUEBRA DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA ELETRODINÂMICA
QUÂNTICA ATRAVÉS DE UM ESPAÇO-TEMPO INTRINSECAMENTE
ANISOTRÓPICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Campina Grande - PB
Agosto de 2017

O48q Oliveira, Rafael de Jesus dos Santos.
A quebra da invariância de Lorentz na eletrodinâmica quântica através de um espaço-tempo intrinsecamente anisotrópico / Rafael de Jesus dos Santos Oliveira. – Campina Grande, 2017.
63 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".
Referências.

1. Eletrodinâmica Quântica. 2. Espaço-tempo Anisotrópico.
3. Métrica de Finsler. 4. Violação da Invariância de Lorentz. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

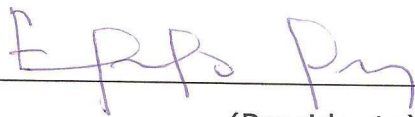
CDU 537.8:530.145(043)

RAFAEL DE JESUS DOS SANTOS OLIVEIRA

**A QUEBRA DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA ELETRODINÂMICA
QUÂNTICA ATRAVÉS DE UM ESPAÇO-TEMPO INTRINSECAMENTE
ANISOTRÓPICO**

Dissertação aprovada em 07/08/2017

BANCA EXAMINADORA



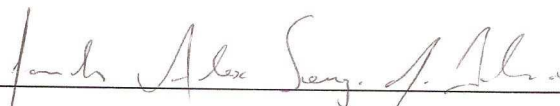
(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Departamento de Física - UEPB



(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - CG

“A paz é a única forma de nos sentirmos realmente humanos.” Albert Einstein

Dedico este trabalho à minha querida e amada esposa Débora Oliveira, que tem me acompanhado nesta empreitada e me apoiado significativamente. Assim como à minha mãe Nádia Rodrigues dos Santos que sempre me motivou a seguir perseverando durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

Obrigado!

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer inicialmente a Deus, meu porto seguro, que esteve comigo mesmo em momentos no qual eu tentei tomar o controle, achando que conseguiria fazer algo por minhas próprias mãos. Que é o meu fôlego de vida, minha motivação e quem me permitiu viver essa experiência única.

Agradeço também ao meu orientador professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, o qual tem me ajudado, compreendendo minhas dificuldades e motivando-me sempre a buscar uma melhor compreensão da realidade de um apreciador desta área de conhecimento tão fascinante que é a Física. Agradeço aqui à minha família que tem sido peça importante como motivação em todo o processo do mestrado, especialmente à minha esposa Débora Oliveira e às minhas irmãs Bruna dos Santos e Laysa Monayla dos Santos.

Aproveito o momento para agradecer ainda aos meus mestres e amigos Professor Dr. Lúcio Fábio Pereira da Silva e Professor Dr. Marco Aurélio dos Santos Cruz, os quais me apoiaram no ingresso deste curso de mestrado, dando conselhos que me levasse a um estado de reflexão sobre a vida.

Gostaria de expressar também meus sinceros agradecimentos ao meu amigo Adriano dos Santos, que com sua parceria fundamental, me ajudou a cumprir as etapas durante todo o processo do curso.

Agradeço também aos professores que contribuíram para minha formação, assim como ao programa de pós-graduação em física da UFCG pela oportunidade da realização deste trabalho. Finalmente, quero agradecer ao programa de bolsas da CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Lista de siglas

SR *Special Relativity (Relatividade Especial)*

QG *Quantum Gravity (Gravidade Quântica)*

sLIV *spontaneous Lorentz Invariance Violation (Violação da Invariância de Lorentz espontânea)*

LIV *Lorentz Invariance Violation (Violação da Invariância de Lorentz)*

SME *Standard Model Extension (Extensão do Modelo Padrão)*

DSR *Doubly Special Relativity (Relatividade Especial Dupla)*

VSR *Very Special Relativity (Variedades de Relatividade Especial)*

GRBs *Gamma-Ray Bursts (Esplosões de Raios Gama)*

QED *Quantum Electrodynamics (Eletrodinâmica Quântica)*

Resumo

Neste trabalho, considerou-se a proposta de que a violação da invariância de Lorentz espontânea (sLIV) está relacionada à geometria de Finsler, uma vez que o espaço-tempo de Finsler é intrinsecamente anisotrópico e naturalmente induz a violação da invariância de Lorentz (LIV). Com o foco na eletrodinâmica quântica (QED), no qual o setor eletromagnético e o fermiônico são descritos no espaço-tempo localmente de Minkowski, a densidade de lagrangeana apresentada explicitamente para o caso do campo eletromagnético, mostra-se compatível com a da extensão do modelo padrão (SME). As equações de Maxwell violando a invariância de Lorentz assim como a equação de onda eletromagnética são obtidas, e as soluções de onda plana para a onda eletromagnética dá a relação de dispersão que caracteriza o cone de luz, onde o mesmo pode ser expresso ou alargado de acordo com o parâmetro LIV do espaço-tempo de Finsler. A velocidade da luz pode depender da direção da luz, vindo a ser superluminal ou subluminal, e tais efeitos LIV podem ser vistos como influências de uma fonte anisotrópica sobre a onda eletromagnética. Uma restrição no espaço-tempo anisotrópico é feita a partir de observações de explosões de raios gama (GRBs), de modo que a velocidade da luz se encontre subluminal e dependente da energia. Além disso, a birrefringência da luz não aparece durante o processo deste modelo. Para o caso do setor fermiônico, é investigada a possibilidade da indução do termo eletromagnético de Finsler, viabilizado pelo método de correção quântica em quatro dimensões, o que conduz a um termo eletromagnético de Finsler dependente de uma parte divergente e que quebra a invariância de Lorentz.

Palavras-Chave: Espaço-tempo Anisotrópico. Métrica de Finsler. Violação da Invariância de Lorentz.

Abstract

In this work, we considered the proposition that the spontaneous Lorentz invariance violation (sLIV) is related to Finsler's geometry, since Finsler's spacetime is intrinsically anisotropic and naturally induces Lorentz invariance violation (LIV). With the focus on quantum electrodynamics (QED), in which the electromagnetic and fermionic sectors are described in locally Minkowski spacetime, the lagrangian density explicitly presented for the case of the electromagnetic field, is compatible with the standard model extension (SME). The Lorentz-violating Maxwell equations invariance as well as the electromagnetic wave equation are obtained, and the plane wave solutions for the electromagnetic wave gives the dispersion relation that characterizes the lightcone, where it can be narrowed or enlarged from According to the Finsler's spacetime parameter LIV. The speed of light may depend on the direction of light, becoming superluminal or subluminal, and such LIV effects can be seen as influences of an anisotropic source on the electromagnetic wave. An anisotropic space-time constraint is made from observations of gamma-ray bursts (GRBs), so that the speed of light is subluminal and dependent on energy. In addition, the birefringence of light does not appear during the process of this model. For the case of the fermionic sector, is investigated the possibility of the induction of the Finsler electromagnetic term by the quantum correction method in four dimensions, which leads to a Finsler electromagnetic term dependent on a divergent part that breaks the Lorentz invariance .

Key-words: Anisotropic Spacetime. Finsler Metrics. Lorentz Invariance Violation.

Sumário

1	Introdução	1
2	A extensão do modelo padrão: setor do campo de calibre	4
2.1	O setor do fóton	4
2.1.1	Setor eletromagnético de CPT-par	5
2.1.2	Setor eletromagnético de CPT-ímpar	8
3	Métrica de Finsler e campos de calibre	11
3.1	Norma de Minkowski	11
3.2	Métrica de Finsler	12
3.3	Campo eletromagnético no espaço localmente de Minkowski	14
3.4	Campo eletromagnético devido a métrica de Finsler	18
4	Propagador de Feynman: unitariedade	21
5	Aspectos fenomenológicos e explosões de raios gama	28
5.1	Modo de propagação das ondas eletromagnéticas	28
5.2	O atraso temporal entre dois fótons	30
6	Correções quânticas na eletrodinâmica quântica com a métrica de Finsler	34
6.1	A eletrodinâmica quântica com a métrica de Finsler	34
6.2	Cálculo do tensor de polarização	36
7	Conclusão e perspectiva	44

A	Tensor k_F em termos de um tensor simétrico de traço nulo	46
B	Equações de Maxwell modificadas pelo termo CPT-par	48
C	Equações de Maxwell modificadas pelo termo CPT-ímpar	50
D	Métrica de Randers-Finsler	52
E	Lema de Poincaré	54
F	Equação de Euler-Lagrange	55
G	Demonstração	57
H	Termo interno à ação de Finsler	58
	Referências Bibliográficas	60

Capítulo 1

Introdução

“Para descobrir todos os fenômenos que deseja, basta ao sábio três coisas: pensar, pensar, pensar.”

Isaac Newton.

Em escalas de energias experimentalmente acessíveis, a relatividade especial de Einstein (SR), regida pelas transformações de Lorentz, se mantém compatível com todas as observações físicas atuais. Contudo, espera-se que a SR deva ser modificada em escalas de energias tais como a escala de Planck. Isto é decorrente da incompatibilidade existente entre a simetria de Lorentz (transformações contínuas) e os efeitos da gravidade quântica (QG) (regida por um tipo de espaço-tempo discretizado) [1]–[14]. Os estudos das teorias de cordas revelam que a invariância de Lorentz deve ser quebrada de forma espontânea no regime perturbativo [12, 13, 14], onde a violação espontânea da invariância de Lorentz (sLIV) envolve valores esperado no vácuo não-nulo de certos campos tensoriais. Isto de fato deve caracterizar uma certa anisotropia do espaço-tempo desde que valores esperados não-nulos no vácuo estejam relacionados com certas direções preferenciais, o qual pode ser comparado com o processo de quebra espontânea da simetria na teoria eletrofraca: um campo de Higgs adquirir um valor esperado de vácuo diferente de zero gerando massas para outras partículas.

Atualmente, os termos da sLIV são adicionados na densidade de lagrangeana dos campos mantendo a invariância de calibre, renormalizações, etc. Os valores esperados do vácuo dos campos tensoriais tornam-se acoplamentos constantes nos termos de sLIV. Este processo de introduzir os efeitos da sLIV é chamado de Extensão do Modelo Padrão (SME) [13, 14]. Além disso, o espaço-tempo de Minkowski deverá ser alterado junto com a densidade de lagrangeana das partículas e campos se a LIV estiver presente (não importa se ela for espontânea ou não).

Recentemente, Kostelecky [15] propôs que a SME esteja relacionada ao espaço-

tempo de Finsler, que é intrinsecamente anisotrópico. Os acoplamentos constantes que controlam os termos efetivos da sLIV são relacionados com certas direções preferenciais fixas na estrutura de Finsler. A razão fundamental disto é de que a geometria de Finsler [16, 17, 18], se protege da restrição quadrática sobre a estrutura espaço-tempo tal que a métrica de Finsler dependa apenas das direções do espaço tempo (contexto puramente cinemático).

A relatividade especial de Einstein (SR) reside num espaço-tempo plano de Riemann, conhecido como espaço-tempo de Minkowski. E do mesmo modo, a relatividade especial devido aos efeitos da LIV pode residir num espaço tempo intrinsecamente anisotrópico tal como o espaço-tempo de Finsler [15]. Por exemplo, um simples modelo da SME, com apenas um parâmetro não-dinâmico diferente de zero, a_μ , no termo da LIV conduz a um espaço-tempo plano da geometria de Randers-Finsler [19]. Atualmente, o espaço-tempo plano de Finsler é chamado espaço-tempo localmente de Minkowski [17], que pode ser visto como uma extensão do espaço-tempo de Minkowski. Além disso, a relatividade especial dupla (DSR) [1]-[5] foi incorporada no espaço-tempo de Finsler [20], assim como, outras variedades de relatividades especiais (VSR) [10, 21].

O objetivo desta dissertação é o de investigar os efeitos LIV sobre os setores dos campos da eletrodinâmica quântica devido ao espaço-tempo intrinsecamente anisotrópico, tal como espaço-tempo de Finsler. Espera-se que esse procedimento, perturbação da métrica sobre um espaço-tempo localmente de Minkowski, introduzam naturalmente os efeitos da LIV como contribuições extras na densidade de lagrangeana da teoria. Para o caso da extensão do setor do campo eletromagnético, pretende-se estudar modificações nas diversas quantidades atribuídas ao campo eletromagnético em primeira ordem do parâmetro que controla os efeitos da LIV. O foco principal deste trabalho direciona-se às equações de Maxwell, relação de dispersão e o propagador de Feynman. Para o propagador de Feynman, deve-se verificar a unitariedade da teoria diante dos efeitos da LIV, e para relação de dispersão, deve-se analisar as características da velocidade de grupo dos fótons dependente da energia. Em adição a isto, deve-se estudar restrições sobre o espaço-tempo anisotrópico através de observações astrofísicas em explosões de raios gama (GRBs). No caso do setor fermiônico, tem-se a intenção de submetê-lo a métrica intrinsecamente anisotrópica de tal forma que seja possível obter termos extras como extensões da densidade de lagrangeana associada. A intenção é estudar a possibilidade de se induzir quanticamente os termos antes gerados pela perturbação da métrica que modificam o setor do campo eletromagnético, como correções radiativas ao nível de um-loop. Além disso, também submeteu-se o setor fermiônico da QED aos efeitos da métrica anisotrópica para se obter extensões efetivas capazes de induzir via correções radiativas os termos efetivos que modificam o setor do campo eletromagnético. Para esse fim, os cálculos são realizados através dos cálculos de um-loop em conjunto com o esquema de

regularização dimensional.

A estrutura da dissertação é a seguinte: no capítulo 2, apresentou-se uma breve descrição dos efeitos da LIV pelo ponto de vista da SME. Tomando-se como exemplo as extensões de CPT-par e CPT-ímpar para o setor do campo eletromagnético. No capítulo 3, introduziu-se a métrica intrinsecamente anisotrópica, a saber a métrica de Finsler, e estudou-se seus efeitos na eletrodinâmica de Maxwell. Induziu-se um termo a partir da densidade de lagrangeana modificada e comparou-se este termo com resultados da teoria SME. No capítulo 4, considerou-se a eletrodinâmica efetiva, devido a métrica anisotrópica e estudou-se algumas propriedades, tais como as equações de Maxwell modificadas e a estrutura de unitariedade do propagador do campo de calibre. No capítulo 5, estudou-se limites fenomenológicos para os efeitos anisotrópicos através de dados experimentais de GRBs, neste caso estudou-se modos de propagação da onda eletromagnética através da relação de dispersão modificada e foi usada para calcular o atraso temporal do voo entre dois fótons supostamente emitidos da mesma fonte. No capítulo 6, estudou-se indução radiativa através de perturbações quânticas ao nível de um laço fermiônico. E finalmente no capítulo 7, apresentou-se as conclusões e perspectivas.

Será adotado o sistema de unidades naturais, isto é, $c = \hbar = 1$ e a métrica $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

A extensão do modelo padrão: setor do campo de calibre

“O cálculo tensorial conhece muito mais a física do que o próprio Físico.”

Langevin.

A Extensão do Modelo Padrão (SME) corresponde a uma teoria de campos efetiva proposta por Colladay e Kostelecky [15], que está intimamente relacionada a um espaço-tempo anisotrópico, isto é, um espaço-tempo que prevê a LIV. Na prática, a SME fornece uma descrição quantitativa da LIV e CPT, controlada por um conjunto de coeficientes cujos valores devem ser determinados ou restringidos por experimento. Neste capítulo, será tomado como foco o setor do fóton, a fim de se examinar algumas implicações teóricas da existência de termos da LIV e CPT, e como esses termos modificam as equações de Maxwell. Em tal análise, será tomado como base o trabalho de D. Colladay e V. Alan Kostelecky[14].

2.1 O setor do fóton

As pesquisas por violação de Lorentz envolvendo fótons estão entre os melhores testes de relatividade. Um exemplo prático seria a clássica experiência de Michelson-Morley que utilizam cavidades de ressonância eletromagnéticas altamente estáveis para pesquisas de pequenos desvios na velocidade da luz c emitida por fontes astrofísicas distantes. Devido às distâncias extremas envolvidas, os estudos astrofísicos alcançaram sensibilidades na ordem das partes em 10^{38} . Sendo assim, faz-se mister uma breve análise de como a SME modifica algumas relações, as quais, em condições de invariância de Lorentz, já são conhecidas atualmente (por exemplo, as equações de Maxwell).

A densidade de lagrangeana de interesse, que é invariante de calibre $U(1)$ por

construção, é uma combinação do termo de fóton usual, mais um termo com LIV, ou seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{LIV}, \quad (2.1)$$

em que, o primeiro termo é parte eletromagnética usual, isto é

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Já o termo o qual comporta os efeitos LIV, é dividido em duas partes, uma que inclui o termo LIV CPT-par, dada por

$$\mathcal{L}_{even} = -\frac{1}{4}(k_F)_{\rho\lambda\mu\nu}F^{\rho\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

em que o acoplamento $(k_F)_{\rho\lambda\mu\nu}$ surge da contribuição par do setor do fóton (ver referência [14]), ele é real e adimensional. Sem perda de generalidade, ele pode ser visto como um duplo traço nulo, desde que qualquer componente do traço serviria meramente para redefinir o termo cinético e portanto é apenas uma renormalização do campo.

A outra parte, é a que contem o termo LIV CPT-ímpar do setor do fóton, ou seja

$$\mathcal{L}_{odd} = \frac{1}{2}(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde o coeficiente de acoplamento $(k_{AF})^\rho$ é real e tem dimensão de massa. Este termo surge a partir do setor de calibre CPT-ímpar da SME¹.

Para se ter uma noção, sem exaurir sobre o tema, será feito uma análise de como os termos acoplados na densidade de lagrangeana modificam as equações de Maxwell. Esta análise será feita em duas partes, uma só com o termo LIV CPT-par e a outra com o termo LIV CPT-ímpar.

2.1.1 Setor eletromagnético de CPT-par

Nesta subseção, será trabalhado apenas com a densidade de lagrangeana contendo a parte de Maxwell (usual) somado com o termo de LIV CPT-par, assim a densidade de lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L}_{f_1} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\rho\lambda\mu\nu}F^{\rho\lambda}F^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

É interessante perceber que o termo k_F , quando decomposto, tem 19 componentes independentes, sendo 10 componentes análogos ao tensor de Weyl e 9 componentes

¹Propriedades de CPT-par devida a LIV pode ser vista em [22].

análogos ao traço livre do tensor de Ricci[14]. Uma maneira interessante de parametrizar as 9 componentes não-birrefringentes do tensor k_F , é escrevê-las em termos de um tensor simétrico de traço nulo, isto é²

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\rho} k^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} k^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} k^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} k^{\mu\rho} \right]. \quad (2.6)$$

A equação de movimento que diz como se dá a dinâmica desse sistema, é obtido pela variação da ação em relação às variáveis $(A^\nu, \partial_\mu A^\nu)$, ou equivalentemente, aplicando a densidade de lagrangeana \mathcal{L}_{f_1} na conhecida equação de Euler-Lagrange, isto é

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{f_1}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{f_1}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Como a densidade de lagrangeana é composta de duas partes (usual e CPT-par), será feito as derivadas de cada uma das partes separadamente, em seguida juntar-se-á tudo.

Primeiramente, percebe-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{even}}{\partial A^\nu} = 0, \quad (2.8)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{4} \eta_{\beta\lambda} \eta^{\alpha\rho} \left[\frac{\partial F_\alpha^\lambda}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} F_\rho^\beta + F_\alpha^\lambda \frac{\partial F_\rho^\beta}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\rho} \left[(\delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\lambda - \delta^{\lambda\mu} \delta_{\alpha\nu}) F_\rho^\beta + F_\alpha^\lambda (\delta_\rho^\mu \delta_\nu^\beta - \delta^{\beta\mu} \delta_{\rho\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[F^\mu{}_\nu - F_\nu{}^\mu + F^\mu{}_\nu - F_\nu{}^\mu \right], \\ &= -F^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Desta vez, fazendo para

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{even}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{4} (k_F)_{\rho\lambda\alpha\beta} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\alpha\theta} \left[\frac{\partial F_\gamma^\lambda}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} F_\theta^\beta + F_\gamma^\lambda \frac{\partial F_\theta^\beta}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right] \\ &= -\frac{1}{4} (k_F)_{\rho\lambda\alpha\beta} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\alpha\theta} \left[(\delta_\gamma^\mu \delta_\nu^\lambda - \delta^{\lambda\mu} \delta_{\gamma\nu}) F_\theta^\beta + F_\gamma^\lambda (\delta_\theta^\mu \delta_\nu^\beta - \delta^{\beta\mu} \delta_{\theta\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[(k_F)_{\rho\nu\alpha\beta} \eta^{\rho\mu} \eta^{\alpha\theta} F_\theta^\beta - (k_F)_{\rho\mu\alpha\beta} \eta^{\rho\nu} \eta^{\alpha\theta} F_\theta^\beta \right. \\ &\quad \left. + (k_F)_{\rho\lambda\alpha\nu} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\alpha\mu} F_\gamma^\lambda - (k_F)_{\rho\lambda\alpha\mu} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\alpha\nu} F_\gamma^\lambda \right], \end{aligned}$$

²Detalhes, ver Apêndice A.

notando que através da simetria do tensor de Riemann, é possível simplificar a equação acima, e como os índices α, β, ρ e λ são índices mudos, obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{even}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = -(k_F)^\mu{}_{\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Finalmente, substituindo as Eqs.(2.8)–(2.9)–(2.10) em (2.7), o resultado será

$$\partial_\mu F^\mu{}_\nu + (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.11)$$

E as equações de Maxwell homogêneas usuais permanecem inalteradas:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.12)$$

com $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, sendo o tensor dual da intensidade de campo. A equação de movimento (2.11) depende apenas de $F^{\mu\nu}$, de modo que, como esperado, ela é invariante por transformações de calibre U(1), isto é

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda, \quad (2.13)$$

onde Λ é uma função qualquer da posição e do tempo. Assim, a modificação extra não deve alterar as quantidades conservadas da teoria usual. Apesar destes paralelos com a eletrodinâmica convencional, o processo de fixação de calibre envolve algumas diferenças interessantes. Por exemplo, há normalmente uma equivalência entre o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, o calibre temporal $A_0 = 0$, e um dos membros da família dos calibres de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Quando os efeitos da violação de Lorentz são incluídos, essas três escolhas tornam-se desiguais. Um exemplo é A_0 normalmente ser diferente de zero se o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ é imposta[14].

Neste ponto será verificado quais os efeitos do termo extra LIV nas equações de onda. Reescrevendo a Eq.(2.11), da seguinte maneira

$$[\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - 2(k_F)_{\mu\alpha\beta\nu} \partial^\alpha \partial^\beta] A^\mu = 0, \quad (2.14)$$

onde foi usado, o calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, e as simetrias do tensor de Riemann. Para resolver a Eq.(2.14), será usado a seguinte solução de onda plana:

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu(p) e^{-ip_\lambda x^\lambda}, \quad (2.15)$$

com $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, de modo que obtém-se a seguinte equação

$$M_{\mu\nu} A^\mu = 0, \quad (2.16)$$

onde a matriz $M_{\mu\nu}$ é

$$M_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu}p^2 - 2(k_F)_{\mu\alpha\beta\nu}p^\alpha p^\beta. \quad (2.17)$$

Esta matriz 4×4 é hermitiana devido os termos serem reais e simétricos. Pode ser mostrado que seu determinante é nulo de forma idêntica para todos os p^μ , tal fator está relacionado à liberdade de calibre. O resultado convencional é recuperado quando o coeficiente k_F desaparece.

Agora, considerando a Eq.(2.11) no caso em que as componentes não nulas de k_F escolhidas a ser $(k_F)_{0i0j} = -\frac{1}{2}\beta_i\beta_j$, onde β_i são quantidades (pequenas) reais adimensionais, e estas componentes estão relacionadas pela simetria de k_F . Assim, obtém-se as seguintes equações³:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\beta}\vec{\nabla}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}), \quad (2.18)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = \vec{\beta}\partial_0(\vec{\beta} \cdot \vec{E}). \quad (2.19)$$

As Eqs.(2.18)–(2.19) são as equações de Maxwell não-homogêneas, na ausência de fontes, modificadas. O caso usual é recuperado para $\vec{\beta}$ nulo, ou se estiver perpendicular ao campo elétrico \vec{E} .

2.1.2 Setor eletromagnético de CPT-ímpar

A partir daqui, será trabalhado a densidade de lagrangeana que contém a parte de Maxwell (usual) somado com o termo de LIV CPT-ímpar, de modo que tem-se a seguinte equação:

$$\mathcal{L}_{f_2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\alpha\beta}A^\lambda F^{\alpha\beta}. \quad (2.20)$$

Para obter a equação de movimento, basta fazer similarmente ao que foi feito na seção anterior, ou seja, usar novamente a equação de Euler-Lagrange. Neste caso, observa-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{odd}}{\partial A^\nu} = \frac{1}{2}(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

³Mais detalhes no Apêndice B.

Tomando agora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{odd}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} &= \frac{\eta^{\alpha\gamma}}{2} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\alpha\beta} A^\lambda \frac{\partial F_\gamma^\beta}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \\
&= \frac{\eta^{\alpha\gamma}}{2} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\alpha\beta} A^\lambda (\delta_\gamma^\mu \delta_\nu^\beta - \delta^{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\eta^{\alpha\mu} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\alpha\nu} A^\lambda - \eta^{\alpha\nu} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\alpha\mu} A^\lambda \right], \tag{2.22}
\end{aligned}$$

onde considerando a antissimetria do símbolo de Levi-Civita, obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{odd}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = (k_{AF})^\rho \epsilon^\mu{}_{\rho\lambda\nu} A^\lambda. \tag{2.23}$$

Então, substituindo as Eqs.(2.9)–(2.21)–(2.23) na equação (2.7), o resultado será⁴

$$\frac{1}{2} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\nu\mu\lambda} F^{\mu\lambda} + \partial_\mu F^\mu{}_\nu - (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda = 0. \tag{2.24}$$

Notando que é possível, reescrever o terceiro termo do lado direito da equação acima da seguinte forma:

$$(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda = \frac{1}{2} (k_{AF})^\rho \left[\epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda + \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda \right], \tag{2.25}$$

de modo que, trocando os índices do $\mu \rightarrow \lambda$ e $\lambda \rightarrow \mu$ do segundo termo entre as chaves, obtém-se

$$\begin{aligned}
(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda &= \frac{1}{2} (k_{AF})^\rho \left[\epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda + \epsilon_{\rho\mu\lambda\nu} \partial^\lambda A^\mu \right] \\
&= \frac{1}{2} (k_{AF})^\rho \left[\epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\lambda - \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial^\lambda A^\mu \right] \\
&= -\frac{1}{2} (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} F^{\mu\lambda}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Assim, ao substituir novamente na equação, o resultado é a equação de movimento

$$\partial_\mu F^\mu{}_\nu + (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\nu\lambda\mu} F^{\lambda\mu} = 0. \tag{2.27}$$

É possível ver claramente que, semelhante ao caso CPT-par, este caso também é invariante de calibre, por depender somente do tensor intensidade de campo. E as mesmas análises feitas referente ao quadrivetor A_μ na seção anterior, podem ser feitas aqui. Além disso é possível obter a seguinte equação de onda modificada:

$$\left[\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha + 2(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\nu\lambda\mu} \partial^\lambda \right] A^\mu = 0. \tag{2.28}$$

⁴Onde foi trocado os índices mudos $\alpha \rightarrow \mu$ e $\beta \rightarrow \lambda$ do resultado (2.21).

E semelhante ao caso anterior, ao usar o ansatz em (2.28)

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(p)e^{-ip_\alpha x^\alpha}, \quad (2.29)$$

a equação de movimento (2.28) gera a equação no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$[\eta_{\mu\nu}p^2 + 2i(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}p^\lambda]A^\mu = 0. \quad (2.30)$$

Ou melhor, assumindo que $M_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu}p^2 + 2i(k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}p^\lambda$, escreve-se

$$M_{\mu\nu}A^\nu = 0, \quad (2.31)$$

onde, por sua vez, a matriz $M_{\mu\nu}$ de ordem 4×4 é hermitiana devido o primeiro termo ser real e simétrico, enquanto que o segundo é imaginário e antissimétrico.

É possível ter uma visão de como o termo CPT-ímpar modifica as equações de Maxwell inhomogêneas na ausência de fonte, basta tomar $(k_{AF})^\rho = ((k_{AF})^0, \vec{k}_{AF})$. Assim, obtém-se⁵

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -2\vec{k}_{AF} \cdot \vec{B}, \quad (2.32)$$

e também

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = -2\vec{k}_{AF} \times \vec{E} - 2(k_{AF})^0 \vec{B}. \quad (2.33)$$

As equações de Maxwell inhomogêneas usuais são recuperadas para $(k_{AF})^\rho$ tomado como zero.

⁵Ver detalhes no Apêndice C.

Capítulo 3

Métrica de Finsler e campos de calibre

“Nada é tão maravilhoso que não possa existir, se admitido pelas leis da Natureza.”

Michael Faraday.

Neste capítulo será feito uma breve explanação sobre a métrica de Finsler, conceitos e definições, preparando um terreno que ajudará durante o processo dos cálculos. Só então será aplicada tal métrica no campo eletromagnético.

3.1 Norma de Minkowski

Devido ao fato de que será usado mais adiante o conceito de espaço-tempo localmente de Minkowski, faz-se necessário para clarificar a leitura deste trabalho, uma breve abordagem da geometria da norma de Minkowski sobre um espaço vetorial.

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma norma de Minkowski sobre V é uma função não negativa $F : V \rightarrow [0, \infty)$ o qual cumpre as seguintes propriedades:*

(M_1) F está C^∞ sobre $V \setminus \{0\}$;

(M_2) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall \lambda > 0$ e $y \in V$;

(M_3) $\forall y \in V \setminus \{0\}$, a forma simétrica bilinear \mathbf{g}_y sobre V é positivo definido, onde

$$\mathbf{g}_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2(y + su + tv) \right] \Big|_{s=t=0}. \quad (3.1)$$

O produto interno \mathbf{g}_y é chamado de forma fundamental na direção y . O par (V, F) é chamado espaço de Minkowski. A norma de Minkowski F é dita sendo reversível se

$F(-y) = F(y)$ para $y \in V$.

Há muitas normas de Minkowski sobre o espaço vetorial (para melhor compreensão ver [18] e [24]).

3.2 Métrica de Finsler

O estudo da Métrica de Finsler teve o início na dissertação de P. Finsler[25] em 1918, o qual foi publicado em 1951. E só em seguida, esta métrica foi chamada de *Métrica de Finsler*¹.

Seja M uma variedade. Para um ponto $x \in M$, denota-se por T_xM o espaço tangente à M em x , conforme a figura abaixo:

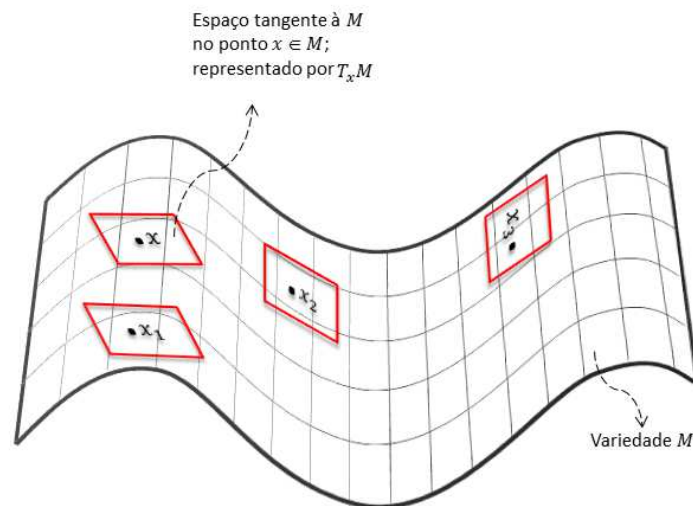


Figura 3.1: Variedade M onde para cada ponto $x \in M$, tem-se o espaço tangente T_xM .

O *fibrado tangente* TM de M é a união de espaços tangentes com a estrutura diferencial natural,

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

Denota-se os elementos em TM por (x, y) onde $y \in T_xM$. Assim, a métrica de Finsler é definida sobre o fibrado tangente TM ao invés de ser sobre a variedade M .

Definição 2. A função $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é chamado de *Métrica de Finsler* se ela tem as seguintes propriedades:

- (i) F é C^∞ no $TM \setminus \{0\}$;

¹Este capítulo é feito com base no trabalho de Zhe Chang e Sai Wang [23]

(ii) $\forall x \in M, F_x := F|_{T_x M}$ é um espaço-tempo Minkowski normalizado sobre $T_x M$.
 O par (M, F) é chamado de espaço Finsler.

A geometria de Finsler origina-se a partir da seguinte integral[16][18]

$$\int_a^b F(x, y) d\tau \quad (3.2)$$

onde x denota a posição e $y := \frac{dx}{d\tau}$ denota a chamada quadrivelocidade. O integrando $F(x, y)$ é chamado de *estrutura de Finsler*, que é uma função positiva, suave e positivamente 1-homogênea definida sobre a fenda do fibrado tangente $TM \setminus \{0\}$. A positividade 1-homogênea denota a característica $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ para todo $\lambda > 0$. A métrica de Finsler é definida como

$$g_{\mu\nu}(x, y) := \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left(\frac{1}{2} F^2 \right) \quad (3.3)$$

O modelo mais simples da SME, com apenas uma constante de acoplamento não nulo a_μ nos termos sLIV, leva a um espaço-tempo plano de geometria Randers-Finsler. Onde o resultado será uma métrica composta por uma parte plana mais um termo com função de uma direção preferencial y .²

A métrica de Finsler junto com seu tensor inverso, são usados para baixar e levantar os índices dos tensores. Além disso, nota-se que a métrica de Finsler se torna Riemanniana se ela não depende de y .

Um espaço-tempo de Finsler (M, F) é chamado localmente Minkowski[17] se não há dependência de x na estrutura F , ou seja $F = F(y)$. Portanto, como é possível constatar, a métrica Finsler $g_{\mu\nu}$ depende somente de y de acordo com (3.3). Em tal espaço-tempo, as conexões e curvaturas se anulam. Portanto, é um plano e maximamente simétrico[26].

O anulamento das conexões implica que uma partícula livre segue uma linha reta. Sendo assim, nota-se que o espaço-tempo localmente de Minkowski pertence ao espaço-tempo Berwald[17]. Todo espaço tangente do espaço-tempo Berwald é linearmente isomorfo à um espaço linear de Minkowski normalizado comum. Fisicamente, isto significa que as leis da física são comuns em cada posição em tal espaço-tempo.

No espaço-tempo de Finsler, a quadrivelocidade de uma partícula livre é dada por uma equação geodésica de Finsler[17]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x, y) \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (3.4)$$

onde Γ denota a conexão. A geodésica de Finsler origina-se a partir da variação de uma integral do elemento de linha Finsler da forma (3.2). No espaço-tempo localmente de

²Conforme mostrado no Apêndice D.

Minkowski, as conexões se anulam, particularmente. De modo que a equação geodésica de Finsler (3.4) torna-se

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (3.5)$$

Sua solução dá um vetor constante em y , significando que y é independente de x .

Algo muito interessante a se comentar é que, neste trabalho y denota a quadrive-locidade de um fóton livre ao longo da geodésica de Finsler. Porém, para uma partícula carregada, tal como o elétron, a mesma interagiria com o campo eletromagnético, de modo do que a equação geodésica de Finsler deva ser modificada. Com isso, um termo extra relacionado à força eletromagnética $F^\mu(x)$ deve ser adicionado ao lado direito da equação geodésica de Finsler. A velocidade da partícula carregada é dada pela solução da equação geodésica modificada, de modo que ela dependeria de x .

3.3 Campo eletromagnético no espaço localmente de Minkowski

Similarmente ao caso no espaço-tempo de Minkowski, será definido um quadripotencial, que é um 1-forma, do campo eletromagnético no espaço-tempo localmente de Minkowski na forma

$$A := A_\mu(x)dx^\mu \quad (3.6)$$

que preserva a simetria interna de calibre $U(1)$. A partir do quadripotencial, será definida a intensidade do campo da seguinte forma

$$\begin{aligned} F &:= dA = d(A_\mu dx^\mu) \\ &= d(A_\mu)dx^\mu + A_\mu d(dx^\mu), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde através do *Lema de Poincaré*³, é possível usar o fato de que $d(dx^\mu) = 0$.

Assim, da equação (3.7), resta

$$\begin{aligned} F &= dA_\mu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde tal equação é possível ser escrita na seguinte forma:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \right). \quad (3.9)$$

³Ver demonstração no Apêndice E.

Trocando $\nu \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow \nu$ no segundo termo, obtém-se

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right). \quad (3.10)$$

Similarmente, ao que foi feito anteriormente, isto é, sendo $dx^\nu \wedge dx^\mu = -dx^\mu \wedge dx^\nu$, a equação (3.10) toma a seguinte forma:

$$F = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (3.11)$$

A equação acima será escrita como

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.12)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (3.13)$$

Nota-se que a intensidade do campo F é uma 2-forma.

A partir daqui, a fim de simplificar a escrita, será usada a notação abreviada

$$\partial_\mu A_\nu := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu},$$

de tal forma que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.14)$$

que é um invariante sob o grupo de calibre $U(1)$.

Através da métrica de Finsler $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo localmente de Minkowski, é possível obter a forma contravariante do tensor força de campo, bastando levantar os índices do 2-forma covariante de (3.14), a saber $F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}$. Desta maneira, o caráter covariante é preservado no espaço-tempo localmente de Minkowski.

Aqui será escrita a forma usual da densidade de lagrangeana para o campo eletromagnético, mas substituindo a métrica do espaço-tempo $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica de Finsler $g_{\mu\nu}$. Assim, a densidade de lagrangeana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

No espaço-tempo localmente de Minkowski, uma base base ortogonal é dada por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$ e sua base dual é $\{dx^\mu\}$. A ação do campo eletromagnético tem a forma

$$S = \int \mathcal{L} d\Omega \quad (3.16)$$

onde $d\Omega = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}(y)} d^4x$ denota o elemento de volume invariante para cada posição x .

Usando o princípio variacional da ação, em que $\delta S = 0$, obtém-se a equação de Euler-Lagrange⁴ associada a ação S ou à densidade de lagrangeana $\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu)$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Tomando agora a densidade de lagrangeana (3.15), já usando a métrica de Finsler para baixar os índices, isto é⁵

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\beta\nu} F^{\beta\nu} = -\frac{1}{4} g_{\nu\gamma} g^{\beta\lambda} F_\beta{}^\gamma F_\lambda{}^\nu \quad (3.18)$$

e aplicando na equação de Euler-Lagrange, obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\sigma} = 0 \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\sigma)} &= -\frac{1}{4} g_{\nu\gamma} g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial F_\beta{}^\gamma}{\partial (\partial_\mu A^\sigma)} F_\lambda{}^\nu + F_\beta{}^\gamma \frac{\partial F_\lambda{}^\nu}{\partial (\partial_\mu A^\sigma)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} g_{\nu\gamma} g^{\beta\lambda} [(\delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\gamma - \delta^{\gamma\mu} \delta_{\beta\sigma}) F_\lambda{}^\nu + F_\beta{}^\gamma (\delta_\lambda^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta^{\nu\mu} \delta_{\lambda\sigma})] \\ &= -\frac{1}{4} [(\delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\gamma - \delta^{\gamma\mu} \delta_{\beta\sigma}) F^\beta{}_\gamma + F^\lambda{}_\nu (\delta_\lambda^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta^{\nu\mu} \delta_{\lambda\sigma})] \\ &= -\frac{1}{4} [F^\mu{}_\sigma - F^\sigma{}_\mu + F^\mu{}_\sigma - F^\sigma{}_\mu] \end{aligned}$$

e como $F^\mu{}_\sigma = -F^\sigma{}_\mu$, tem-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\sigma)} = -F^\mu{}_\sigma. \quad (3.20)$$

Substituindo estes resultados na equação de Euler-Lagrange, obtém-se a seguinte equação de movimento⁶

$$\partial_\mu F^\mu{}_\sigma = 0. \quad (3.21)$$

⁴Ver o cálculo no Apêndice F.

⁵Os índices foram trocados para não causarem confusão no processo dos cálculos.

⁶Sabendo que $\partial_\mu F^\mu{}_\sigma = \partial^\mu F_{\mu\sigma}$.

Usando a métrica de Finsler, a equação acima pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\mu\sigma} = 0. \quad (3.22)$$

Ao escrever (3.22) em termos de A_μ e A_σ , obtém-se

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \partial_\nu [\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu] &= 0 \\ g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma \partial^\mu A_\mu &= 0. \end{aligned}$$

Usando o calibre de Lorentz

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu = 0 \quad (3.23)$$

obtém-se a seguinte equação:

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A_\sigma = 0, \quad (3.24)$$

sendo esta a *equação de onda eletromagnética* associada, tendo como solução:

$$A_\sigma = \epsilon_\sigma e^{-ig_{\mu\nu} k^\mu x^\nu}, \quad (3.25)$$

onde ϵ_σ denota a polarização e k^μ denota um vetor-onda da onda plana eletromagnética. Substituindo a Eq.(3.25) na Eq.(3.24), obtém-se uma relação de dispersão para a onda plana eletromagnética

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu (\epsilon_\sigma e^{-ig_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta}) &= 0 \\ -\delta_\alpha^\mu k^\alpha g_{\alpha\beta} k^\alpha \delta_\mu^\beta A_\sigma &= 0 \end{aligned}$$

onde $g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} = \delta_\alpha^\mu$. Então

$$-k^\mu g_{\alpha\mu} k^\alpha A_\sigma = 0,$$

como $A_\sigma \neq 0$, implica que

$$g_{\alpha\mu} k^\alpha k^\mu = 0. \quad (3.26)$$

Sua forma é tão semelhante quanto um invariante de Lorentz na eletrodinâmica usual. Contudo, ela é modificada pela métrica de Finsler $g_{\mu\nu}$ desde que a contração dos índices de espaço-tempo seja via esta métrica.

3.4 Campo eletromagnético devido a métrica de Finsler

As observações feitas não mostram sinais dos efeitos LIV nas presentes escalas de energias atingíveis[28]. Este fato implica que os efeitos LIV devem ser minúsculos. Porém, é possível extrair os efeitos LIV pela expansão da métrica de Finsler da seguinte maneira:

$$g^{\mu\nu}(y) = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(y). \quad (3.27)$$

Através desta expansão, os efeitos LIV de primeira ordem são extraídos e caracterizados completamente por $h^{\mu\nu}$. Dada a Eq.(3.15), que com os índices baixados torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \quad (3.28)$$

de modo que usando a expansão (3.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}[\eta^{\mu\rho} + h^{\mu\rho}][\eta^{\nu\sigma} + h^{\nu\sigma}]F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{4}[\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma} + h^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}]F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{4}[\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma} + h^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}]F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{4}[\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + h^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}] \end{aligned}$$

onde o termo $h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}$ é desprezado devido ser um termo de segunda ordem, gerando um efeito LIV de segunda ordem, com o qual não se está sendo trabalhado. Fazendo a troca dos índices do terceiro termo (em vista que estão somados) da seguinte forma: $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$, e também $\rho \rightarrow \sigma$ e $\sigma \rightarrow \rho$, obtém-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\nu\mu}F_{\sigma\rho}].$$

Usando a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$, obtém-se o seguinte resultado:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}. \quad (3.29)$$

Como mencionado na introdução, a violação explícita da invariância de Lorentz se dá pela SME. Na prática, essa abordagem inclui termos mediados por campos constantes que controlam o LIV da densidade de lagrangeana estendida. Neste ponto, será mostrado que um termo específico que modifica o setor do fóton, pode ser obtido pela abordagem de Finsler.

A partir da Eq.(3.29) pode-se separar a densidade de lagrangeana em dois termos, isto é

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_{LI} + \mathcal{L}_{LIV}, \quad (3.30)$$

onde $\mathcal{L}_{LI} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ denota o termo invariante de Lorentz, enquanto que o termo LIV é reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LIV} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \right] \\ \mathcal{L}_{LIV} &= -\frac{1}{8} [\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}]. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a seguinte troca de índices: no segundo termo será trocado $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$, no terceiro termo será trocado $\sigma \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \sigma$, já no quarto termo será trocado $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$, assim como $\sigma \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \sigma$, de modo que o resultado é

$$\mathcal{L}_{LIV} = -\frac{1}{8} [\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\nu\rho}h^{\mu\sigma}F_{\nu\mu}F_{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma}h^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} + \eta^{\nu\sigma}h^{\mu\rho}F_{\nu\mu}F_{\sigma\rho}],$$

usando a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$, obtém-se

$$\mathcal{L}_{LIV} = -\frac{1}{8} [\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}h^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}h^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}h^{\mu\rho}] F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}. \quad (3.31)$$

Foi abordado no capítulo anterior que na estrutura da SME o termo sLIV CPT-par na densidade de lagrangeana do campo eletromagnético é dado por[14]

$$\mathcal{L}_{SME} = -\frac{1}{4} k^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \quad (3.32)$$

onde $k^{\mu\nu\rho\sigma}$ denota um termo adimensional que caracteriza o nível dos efeitos sLIV. Um detalhe importante é que, na SME, o parâmetro $k^{\mu\nu\rho\sigma}$ é posto a mão, enquanto que no espaço-tempo localmente de Minkowski, pode-se relacionar este parâmetro ao parâmetro de deformação $h^{\mu\nu}$ do espaço-tempo de Minkowski ao localmente de Minkowski. Comparando Eq.(3.31) com Eq.(3.32), obtém-se a relação

$$k^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}h^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}h^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}h^{\mu\rho} \right), \quad (3.33)$$

onde observa-se uma semelhança com a equação (2.6).

É possível fazer algumas observações a cerca deste resultado. Por exemplo, na SME, o parâmetro k é uma constante desde que a energia e o momento sejam conservados[14]. No espaço-tempo localmente de Minkowski, a equação geodésica do fóton dá y como um vetor constante ao longo da geodésica, assim sendo, h é uma constante e o lado direito da equação é também uma constante. Com esta análise, é possível inferir que o modelo LIV

do campo eletromagnético obtido no espaço-tempo localmente de Minkowski é compatível com os resultados perturbativos na SME. Além do mais, existem dez componentes independentes para $h^{\mu\nu}$, e como foi visto anteriormente, há dezenove para $k^{\mu\nu\rho\sigma}$ [14]. Porém, somente as componentes da forma $k^{\mu\nu\mu\sigma}$ são possivelmente não-nulos no espaço-tempo localmente de Minkowski, basta olhar para a equação acima. Lembrando que a forma escrita de $k^{\mu\nu\rho\sigma}$ são os termos não birrefringentes, implicando em que, a birrefringência da luz não aparecerá ao lidar com termos de primeira ordem neste modelo Finsler do campo eletromagnético. A razão é que ao lidar somente com termos de primeira ordem, todas as componentes de Weyl de $k^{\mu\nu\rho\sigma}$ anulam-se [29]. Estas previsões distinguem o modelo do campo eletromagnético no espaço-tempo localmente de Minkowski da SME.

Além disso, assim como \mathcal{L}_{SME} faz na SME, o termo LIV \mathcal{L}_{LIV} denota as interações de violação da invariância de Lorentz em primeira ordem para o campo eletromagnético no espaço-tempo localmente de Minkowski.

Capítulo 4

Propagador de Feynman: unitariedade

“Tudo é interessante, se você olhar o suficiente.”

Richard Feynman .

Em teoria quântica de campo, é possível obter informações do sistema olhando a equação de movimento do mesmo. No estudo de interações do sistema, como no caso simples, em que a equação de movimento interage com uma fonte externa, a equação de movimento sofre alterações. Esta interação é descrita via uma função de Green específica, tal qual é conhecida como propagador. No caso do campo eletromagnético esta função é chamada de *propagador de Feynman*.

Para obter o propagador, será tomado a densidade de lagrangeana (3.29), isto é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\lambda\partial_{\mu}A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} \quad (4.1)$$

onde o último membro da equação acima representa um termo de fixação de calibre, para que o propagador possa ser determinado univocamente.

Desta forma, a ação é

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \lambda\partial_{\mu}A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} \right] \quad (4.2)$$

onde é possível reescrever o primeiro termo, reescrevendo de forma conveniente os índices somados e usando a antissimetria do tensor intensidade de campo, da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}. \quad (4.3)$$

Trabalhando agora o segundo termo de (4.2), tem-se que

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} &= \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu][\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho] \\ &= \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma - \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\sigma A_\rho - \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial_\rho A_\sigma + \eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial_\sigma A_\rho.\end{aligned}$$

Notando que todos os termos estão com os índices somados, será feita a seguinte troca dos índices:

(i) no 1º termo será trocado $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$;

(ii) no 2º termo será trocado $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$;

(iii) no 3º termo será trocado $\nu \rightarrow \sigma$ e $\sigma \rightarrow \nu$;

(iv) no 4º termo será trocado $\nu \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \nu$. Assim, o resultado obtido será

$$\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \eta^{\nu\rho}h^{\mu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial_\rho A_\sigma - \eta^{\nu\rho}h^{\mu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial_\sigma A_\rho - \eta^{\mu\rho}h^{\sigma\nu}\partial_\sigma A_\mu\partial_\rho A_\nu + \eta^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu.$$

Agora será feito a seguinte troca: $\nu \rightarrow \sigma$ e $\sigma \rightarrow \nu$ no 1º termo, também $\nu \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \nu$ no 2º termo, *i.é*

$$\eta^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \eta^{\sigma\rho}h^{\mu\nu}\partial_\sigma A_\mu\partial_\rho A_\nu - \eta^{\rho\nu}h^{\mu\sigma}\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu - \eta^{\mu\rho}h^{\sigma\nu}\partial_\sigma A_\mu\partial_\rho A_\nu + \eta^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu. \quad (4.4)$$

Substituindo Eq.(4.3) e Eq.(4.4) em Eq.(4.2), obtém-se

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \frac{1}{2} [\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \eta^{\sigma\rho}h^{\mu\nu}\partial_\sigma A_\mu\partial_\rho A_\nu + \eta^{\rho\nu}h^{\mu\sigma}\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu \\ &\quad + \eta^{\mu\rho}h^{\sigma\nu}\partial_\sigma A_\mu\partial_\rho A_\nu - \eta^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu - \lambda\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu]. \quad (4.5)\end{aligned}$$

Aqui serão feitas as seguintes considerações: usando a derivada do produto, é possível escrever

$$\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu = \partial_\nu[A_\mu\partial^\mu A^\nu] - A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu, \quad (4.6)$$

de modo que ao substituir a equação acima na Eq.(4.5), notando que o primeiro termo (termos de superfície) de cada equação se anulará ao integrar no contorno, e fazendo $\lambda = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \frac{1}{2} [A_\nu\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu + \eta^{\sigma\rho}h^{\mu\nu}A_\mu\partial_\rho\partial_\sigma A_\nu - \eta^{\rho\nu}h^{\mu\sigma}A_\mu\partial_\sigma\partial_\rho A_\nu \\ &\quad - \eta^{\mu\rho}h^{\sigma\nu}A_\mu\partial_\sigma\partial_\rho A_\nu + \eta^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}A_\mu\partial_\rho\partial_\sigma A_\nu + A^\mu\partial_\mu\partial^\nu A_\nu], \quad (4.7)\end{aligned}$$

onde o segundo e o último termo se anulam, assim

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} [A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \eta^{\sigma\rho} h^{\mu\nu} A_\mu \partial_\rho \partial_\sigma A_\nu - \eta^{\rho\nu} h^{\mu\sigma} A_\mu \partial_\sigma \partial_\rho A_\nu - \eta^{\mu\rho} h^{\sigma\nu} A_\mu \partial_\sigma \partial_\rho A_\nu + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} A_\mu \partial_\rho \partial_\sigma A_\nu]. \quad (4.8)$$

Usando a métrica, tem-se que

$$A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu \square A_\nu, \quad (4.9)$$

com $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$. Tem-se também que

$$A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = A_\mu \partial^\nu \partial^\mu A_\nu \quad (4.10)$$

assim como

$$A^\mu \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \quad (4.11)$$

de modo que a ação (4.8), pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu [\eta^{\mu\nu} \square + \eta^{\sigma\rho} h^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma - \eta^{\rho\nu} h^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial_\rho - \eta^{\mu\rho} h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial_\rho + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma] A_\nu, \quad (4.12)$$

ou melhor

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu [\eta^{\mu\nu} \square + h^{\mu\nu} \square - h^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial^\nu - h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial^\mu + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma] A_\nu, \quad (4.13)$$

sendo possível reescrever da seguinte forma:

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu \Delta^{\mu\nu} A_\nu, \quad (4.14)$$

onde o termo $\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \square + h^{\mu\nu} \square - h^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial^\nu - h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial^\mu + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma$ é o núcleo da ação, e uma vez que esse operador atue em uma função de Green, de modo a obter

$$\Delta^{\mu\nu} (\Delta_F)_{\lambda\nu}(x - y) = \delta_\lambda^\mu \delta^4(x - y), \quad (4.15)$$

tal função de Green $(\Delta_F)_{\lambda\nu}(x - y)$ é o propagador do modelo Finsler.

Então

$$[\eta^{\mu\nu} \square + h^{\mu\nu} \square - h^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial^\nu - h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial^\mu + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma] (\Delta_F)_{\lambda\nu}(x - y) = \delta_\lambda^\mu \delta^4(x - y), \quad (4.16)$$

que pode ser reescrito no espaço dos momentos, notando que

$$(\Delta_F)_{\lambda\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\Delta_F)_{\lambda\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (4.17)$$

e

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (4.18)$$

de modo que

$$\begin{aligned} & [\eta^{\mu\nu} \square + h^{\mu\nu} \square - h^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial^\nu - h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial^\mu + \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma] (\Delta_F)_{\lambda\nu}(x-y) \\ &= \delta_\lambda^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Notando que

$$\partial_\mu (\Delta_F)_{\lambda\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\Delta_F)_{\lambda\nu}(k) (-ik_\mu) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (4.20)$$

obté-m-se

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-\eta^{\mu\nu} k^2 - h^{\mu\nu} k^2 + h^{\mu\sigma} k_\sigma k^\nu + h^{\sigma\nu} k_\sigma k^\mu - \eta^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma] (\Delta_F)_{\lambda\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &= \delta_\lambda^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observando a equação acima, nota-se que

$$[-\eta^{\mu\nu} (k^2 + h^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma) - h^{\mu\nu} k^2 + h^{\mu\sigma} k_\sigma k^\nu + h^{\sigma\nu} k_\sigma k^\mu] (\Delta_F)_{\lambda\nu}(k) = \delta_\lambda^\mu. \quad (4.22)$$

Agora, definindo $\tilde{k}^2 := k^2 + h^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma$, $\tilde{k}^\mu := h^{\mu\sigma} k_\sigma$ e $\tilde{k}^\nu := h^{\sigma\nu} k_\sigma$, a equação acima torna-se

$$[-\eta^{\mu\nu} \tilde{k}^2 - h^{\mu\nu} k^2 + \tilde{k}^\mu k^\nu + \tilde{k}^\nu k^\mu] (\Delta_F)_{\lambda\nu}(k) = \delta_\lambda^\mu, \quad (4.23)$$

de modo que, tomando o seguinte *ansatz*:

$$(\Delta_F)_{\lambda\nu} = A\eta_{\lambda\nu} + Bh_{\lambda\nu} + C\tilde{k}_\lambda k_\nu + D\tilde{k}_\nu k_\lambda. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.23), o resultado será

$$-A\delta_\lambda^\mu \tilde{k}^2 - Bh_\lambda^\mu \tilde{k}^2 - C\tilde{k}_\lambda k^\mu \tilde{k}^2 - D\eta^{\mu\nu} \tilde{k}_\nu k_\lambda \tilde{k}^2 - Ah_\lambda^\mu k^2 + A\tilde{k}^\mu k_\lambda + A\eta_{\lambda\nu} \tilde{k}^\nu k^\mu = \delta_\lambda^\mu, \quad (4.25)$$

onde os termos que continham produtos de “ h ” foram desprezados, por serem perturbações de segunda ordem, por exemplo $h^{\mu\nu} h_{\lambda\nu}$. Nota-se que (4.25) proporciona quatro equações

com quatro incógnitas, isto é

$$\begin{aligned} -A\delta_\lambda^\mu \tilde{k}^2 &= \delta_\lambda^\nu \\ A &= -\frac{1}{\tilde{k}^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e assim

$$\begin{aligned} (-B\tilde{k}^2 - Ak^2)h_\lambda^\mu &= 0 \\ B &= -\frac{Ak^2}{\tilde{k}^2} \\ B &= \frac{k^2}{\tilde{k}^4}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} (-C\tilde{k}^2 + A)\tilde{k}_\lambda k^\mu &= 0 \\ C &= \frac{A}{\tilde{k}^2} \\ C &= -\frac{1}{\tilde{k}^4}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

também

$$\begin{aligned} (-D\tilde{k}^2 + A)\tilde{k}^\mu k_\lambda &= 0 \\ D &= \frac{A}{\tilde{k}^2} \\ D &= -\frac{1}{\tilde{k}^4}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Finalmente, substituindo estes resultados em (4.24), obtém-se a função de Green que é o propagador de Feynman modificado deste modelo, isto é

$$(\Delta_F)_{\lambda\nu} = -\frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\eta_{\lambda\nu} - \frac{k^2 h_{\lambda\nu}}{\tilde{k}^2} + \frac{\tilde{k}_\lambda k_\nu}{\tilde{k}^2} + \frac{\tilde{k}_\nu k_\lambda}{\tilde{k}^2} \right). \quad (4.30)$$

Uma questão de grande relevância em um modelo, é saber se o mesmo preserva a propriedade de unitariedade. Para essa verificação, será feito o seguinte procedimento:

Saturando o propagador com correntes conservadas, tal que $k_\mu J^\mu = 0$, obtém-se

$$PS \equiv J^\nu (\Delta_F)_{\lambda\nu} J^\lambda. \quad (4.31)$$

Observa-se que resta apenas

$$PS = -\frac{1}{\tilde{k}^2} \left(J^2 - \frac{k^2 J^\nu h_{\lambda\nu} J^\lambda}{\tilde{k}^2} \right), \quad (4.32)$$

de modo que

$$PS = -\frac{1}{k^2 + h^{\lambda\nu} k_\lambda k_\nu} \left(J^2 - \frac{k^2 J^\nu h_{\lambda\nu} J^\lambda}{k^2 + h^{\lambda\nu} k_\lambda k_\nu} \right). \quad (4.33)$$

É possível assegurar a unitariedade deste modelo se o resíduo do propagador saturado (PS) calculado em seus polos simples forem maiores que zero para os modos de propagação. Partindo do caso em que¹ $h^{00} = -h_{00} = \frac{k^0}{M}$, e pela conservação de corrente, nota-se que $J^\mu = (J^0, J^1, J^2, \frac{k^0 J^0}{k_3})$. Assim

$$PS = -\frac{1}{k^2 + h^{00} k_0 k_0} \left(J^2 - \frac{k^2 J^0 h_{00} J^0}{k^2 + h^{00} k_0 k_0} \right), \quad (4.34)$$

de modo que

$$PS = -\frac{1}{k^2 + \frac{k^0}{M} \omega^2} \left(J^2 + \frac{k^2 \frac{k^0}{M} J_0^2}{k^2 + \frac{k^0}{M} \omega^2} \right). \quad (4.35)$$

Tomando o denominador fora dos parênteses e igualando-o à zero, obtém-se o polo

$$k^2 + \frac{k^0}{M} \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = -\frac{k^0}{M} \omega^2, \quad (4.36)$$

então

$$PS = -\frac{1}{k^2 - m_-^2} \left(J^2 + \frac{k^2 \frac{k^0}{M} J_0^2}{k^2 - m_-^2} \right), \quad (4.37)$$

onde $m_-^2 = -\frac{k^0}{M} \omega^2$.

Tomando $k^2 = k^2 - m_-^2 + m_-^2$, a equação (4.37) torna-se

$$\begin{aligned} PS &= -\frac{J^2}{k^2 - m_-^2} - \frac{(k^2 - m_-^2) \frac{k^0}{M} J_0^2}{k^2 - m_-^2} - \frac{m_-^2 k^0 J_0^2}{(k^2 - m_-^2) M} \\ &= -\frac{J^2}{k^2 - m_-^2} - \frac{k^0 J_0^2}{M} - \frac{k_0^2 \omega^2 J_0^2}{(k^2 - m_-^2) M^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

¹Tal proposta será argumentada no próximo capítulo.

onde, ao desprezar termos de segunda ordem na escala de energia, resta apenas

$$PS = -\frac{J^2 M - (k^2 - m_-^2)k^0 J_0^2}{(k^2 - m_-^2)M}. \quad (4.39)$$

Chamando $f(k^2) = -\frac{J^2 M - (k^2 - m_-^2)k^0 J_0^2}{M}$, tem-se que o resíduo do PS será

$$\begin{aligned} \text{Res}[PS]_{k^2=m_-^2} &= \lim_{k^2 \rightarrow m_-^2} \frac{f(k^2)(k^2 - m_-^2)}{(k^2 - m_-^2)} \\ &= \lim_{k^2 \rightarrow m_-^2} -\frac{J^2 M - (k^2 - m_-^2)k^0 J_0^2}{M} \\ &= -J^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assim, finalmente²

$$\text{Res}[PS]_{k^2=m_-^2} = J_0^2 \left[\frac{k_0^2}{k_3^2} - 1 \right] + (J_1^2 + J_2^2). \quad (4.41)$$

Como pode ser visto a partir do resultado acima, o resíduo do PS é sempre positivo para qualquer valor real de k_3 e k_0 , garantindo assim a unitariedade deste modelo Finsler.

²tomando $k_\mu = (k_0, 0, 0, k_3)$.

Capítulo 5

Aspectos fenomenológicos e explosões de raios gama

Neste capítulo será estudado os modos de propagação da onda eletromagnética devido o termo perturbativo da métrica de Finsler. Em seguida será imposto limites fenomenológicos deste modelo através de observações astrofísicas, especificamente o atraso temporal entre dois fótons através de dados de explosões de raios gama (GRBs).

5.1 Modo de propagação das ondas eletromagnéticas

Sabendo que o propagador da teoria é uma função na qual o denominador, quando igualado a zero resulta na relação de dispersão, será usado o denominador da Eq.(4.30), de modo que é possível obter a relação de dispersão para este modelo¹

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + h^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (5.1)$$

Neste ponto, com o intuito de que a velocidade da luz seja subluminal, será proposto uma métrica no espaço-tempo localmente de Minkowski e assim se estudará os modos de propagação do fóton.

Para discutir detalhes dos efeitos LIV, é postulado a métrica do espaço-tempo localmente de Minkowski como

$$g^{\mu\nu}(y) = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(y), \quad (5.2)$$

¹Atentando para o fato de que esta equação caracteriza o cone de luz, onde o termo LIV se apresenta como uma fonte, de modo que o cone de luz pode ser exprimido ou alargado e a velocidade podendo ser subluminal ou superluminal.

$$g^{\mu\nu}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou escreve-se da seguinte forma

$$g^{\mu\nu}(y) = \text{diag}(1 + ay^0, -1, -1, -1), \quad (5.3)$$

onde $|ay^0| \ll 1$ e “ a ” é positivo. F foi normalizado $F(\tilde{y}) = 0$, e $y^\mu = \tilde{y}^\mu/f(\tilde{y})$. Como se sabe, a quadrivelocidade de uma partícula está relacionada ao quadrimomento desta partícula. Então, y poderia ser relacionado com k . No caso mais simples, y é uma função linear de k , ou seja $y \propto k$ similarmente à mecânica quântica. Desta maneira, a métrica pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu}(y) = \text{diag}\left(1 + \frac{k^0}{M}, -1, -1, -1\right) \quad (5.4)$$

onde a constante M é uma escala de alta-energia em que “ a ” foi absorvida. Logo, a métrica perturbativa é dada por

$$h^{00} = -h_{00} = \frac{k^0}{M} \quad (5.5)$$

e as outras componentes são nulas. A escala de energia M implica em uma escala para uma possível ocorrência dos efeitos LIV, implicando que os efeitos LIV estão contidos mais severamente por esta escala. Portanto, é esperado que os efeitos LIV sejam observados, mais possivelmente, na física de ultra-alta energia, tal como a escala de Planck.

Decompondo a relação de dispersão (5.1) em termos de $k_\mu = (\omega, -\vec{k})$ e inserindo a Eq.(5.5), obtém-se as soluções como frequência em função do vetor onda, isto é

$$\left(1 + \frac{k^0}{M}\right)\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{\left(1 + \frac{k^0}{M}\right)}$$

$$\omega = \frac{\pm|\vec{k}|}{\sqrt{1 + \frac{k^0}{M}}}, \quad (5.6)$$

onde é possível notar pela equação acima que não aparece birrefringência neste modelo, uma vez que os modos de propagação da onda são iguais dependentes apenas da energia controlada pela escala M . Nota-se que se o termo perturbativo tende a ser muito pequeno, o caso usual do setor eletromagnético é recuperado.

Da equação (5.6), pode-se obter a velocidade de grupo, lembrando que

$$v_g = \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial |\vec{k}|} \quad (5.7)$$

de modo que a velocidade de grupo tem a seguinte forma:

$$v_g = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^0}{M}}}. \quad (5.8)$$

Expandindo $\left(1 + \frac{k^0}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}$ em série de Taylor, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{k^0}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{k^0}{2M} + \dots \\ \left(1 + \frac{k^0}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} &\approx 1 - \frac{k^0}{2M}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

assim

$$v_g = \pm \left(1 - \frac{k^0}{2M}\right). \quad (5.10)$$

Isto implica que a velocidade de grupo para partículas com energia $k^0 > 0$ se propagam subluminalmente em tal espaço-tempo. Significando que, partículas com energia cada vez mais alta, propagam-se mais devagar. Em outras palavras, a relação de dispersão torna-se

$$\eta_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} = \frac{k^0}{M} (k^0)^2 > 0. \quad (5.11)$$

Significando que o cone de luz é comprimido, de modo que quanto mais alta é a energia da partícula, mais severamente o seu cone de luz é comprimido. Então, nota-se a consistência com a velocidade da luz (5.10) ser subluminal.

5.2 O atraso temporal entre dois fótons

As predições feitas através deste modelo Finsler, são de tal maneira que quanto maior for a energia de um fóton, menor será a velocidade do mesmo ao viajar neste espaço-tempo localmente Minkowski; estes resultados podem ser verificadas através de observações astrofísicas sobre Explosões de Raios Gama (GRBs). Pode-se pensar que os efeitos da LIV podem ser acumuladas depois que um fóton viaja uma distância cosmológica.

Serão considerados os dados coletados pelo satélite *Fermi*, onde se tem obser-

vado várias GRBs com fótons de energia maior do que 100 MeV nos anos recentes. Tem sido visto que fótons com energia GeV chegam bem depois de fótons com energia MeV.[31][33][30][32]

Sabendo que o atraso de tempo observável para dois fótons com energia k_{alta}^0 e k_{baixa}^0 consiste de duas partes [34]

$$\Delta t_{obs} = \Delta t_{LIV} + \Delta t_{int}, \quad (5.12)$$

onde Δt_{int} denota o atraso intrínseco de emissão, e Δt_{LIV} representa a diferença de tempo de voo induzido pelos efeitos LIV.

Tomando como base o modelo do jato magnético[35], é possível determinar Δt_{int} . Segundo este modelo, fótons com energia menor que 10 MeV podem escapar quando o raio do jato está além do raio da fotosfera de Thomson, isto é, a profundidade óptica para fótons de baixa energia é $\tau_T \sim 1$. No entanto, os fótons de GeV serão convertidos em pares de elétrons-pósitrons nesse raio, e podem escapar mais tarde quando a profundidade óptica $\tau_{\gamma\gamma}(k^0)$ de produção de pares cai abaixo da unidade.

Como o atraso intrínseco de emissão é dado por $\Delta t_{int} = \Delta t(k_{alta}^0) - \Delta t(k_{baixa}^0)$, sendo cada um destes obtidos através da equação

$$\Delta t(k^0) = \frac{3r_0(1+z)}{2c} \left[\left(\frac{r_{\gamma\gamma}(k^0)}{r_0} \right)^{1/3} - \left(\frac{r_p}{r_0} \right) \right], \quad (5.13)$$

de modo a possibilitar a obtenção de Δt_{int} para cada GRB (ver mais detalhes em [34]). Com isto, pode-se determinar Δt_{LIV} utilizando a equação (5.12).

Ao considerar-se a emissão de dois fótons do mesmo ponto no espaço tempo, o atraso de tempo de chegada entre eles devido aos efeitos LIV é dado por

$$\Delta t_{LIV} = t_2 - t_1, \quad (5.14)$$

e se $t = \frac{D}{v_g}$, implica em $t_1 = \frac{D}{v_{1g}}$ e $t_2 = \frac{D}{v_{2g}}$. Tomando a equação (5.10), escreve-se

$$t_1 = D \left(1 - \frac{k_1^0}{2M} \right)^{-1}, \quad t_2 = D \left(1 - \frac{k_2^0}{2M} \right)^{-1}, \quad (5.15)$$

onde $D(z)$ é a distância cosmológica, e é a mesma para os fótons, em vista que saem da mesma fonte. Expandindo (5.15), obtém-se

$$t_1 = \left(1 + \frac{k_1^0}{2M} \right) D(z), \quad t_2 = \left(1 + \frac{k_2^0}{2M} \right) D(z). \quad (5.16)$$

Ao substituir as equações acima em (5.14), o resultado será

$$\begin{aligned}\Delta t_{LIV} &= \left[1 + \frac{k_2^0}{2M} - 1 - \frac{k_1^0}{2M}\right] D(z) \\ &= \frac{(k_2^0 - k_1^0)D(z)}{2M},\end{aligned}\quad (5.17)$$

assim

$$\Delta t_{LIV} = \frac{\Delta k^0 D(z)}{2M}.\quad (5.18)$$

A distância cosmológica é definida como

$$D(z) := H_0^{-1} \int_0^z \frac{(1+z')dz'}{\sqrt{\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}},\quad (5.19)$$

onde $H_0 \approx 72 \frac{Km}{s \cdot Mpc}$ denota a constante de Hubble, $\Omega_M \approx 0,3$ é a densidade de matéria e $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ é a constante cosmológica.

Assim, de posse destes valores, é possível obter a escala de energia para cada GRB, dado o seu valor de redshift “ z ”, isto é, através da seguinte equação:

$$2M = \frac{\Delta k^0 D(z)}{\Delta t_{LIV}}.\quad (5.20)$$

Aproveitando os dados obtidos pelas observações *Fermi*, nos quais, obteve-se o valor estimado do nível dos efeitos LIV para quatro GRBs. As quatro GRBs são 080916c GRB [30], GRB 090902b [31], GRB 090510 [32] e GRB 090926 [33], respectivamente, dos quais foram coletados o atraso temporal observável Δt_{obs} . Veja os resultados na tabela abaixo.²

ERG	k_{baixa}^0 MeV	k_{alta}^0 GeV	Δt_{obs} s	Δt_{LIV} s	$K(z)$ s.GeV	$2M$ GeV
080916c	100	13.22	12.94	0.24	4.50×10^{18}	10.02×10^{19}
090510	100	31	0.20	0.14	7.02×10^{18}	9.73×10^{19}
090902b	100	11.16	9.5	0.10	3.38×10^{18}	9.94×10^{19}
090926	100	19.6	21.5	0.20	6.20×10^{18}	9.59×10^{19}

Dividindo a equação (5.18) por $(1+z)$, obtém-se

$$\frac{\Delta t_{LIV}}{1+z} = (2M)^{-1} \frac{\Delta k^0 D(z)}{1+z},\quad (5.21)$$

²Aproveitando a tabela com os resultados obtidos no trabalho [23].

e definindo

$$K(z) := \frac{\Delta k^0 D(z)}{1+z}, \quad (5.22)$$

chega-se à seguinte equação

$$\frac{\Delta t_{LIV}}{1+z} = (2M)^{-1} K(z). \quad (5.23)$$

Assim, é possível uma visualização dos efeitos LIV através do gráfico $\frac{\Delta t_{LIV}}{1+z}$ versus $K(z)$, onde a inclinação do gráfico é dado pelo inverso do nível dos efeitos LIV, ou seja $(2M)^{-1}$.

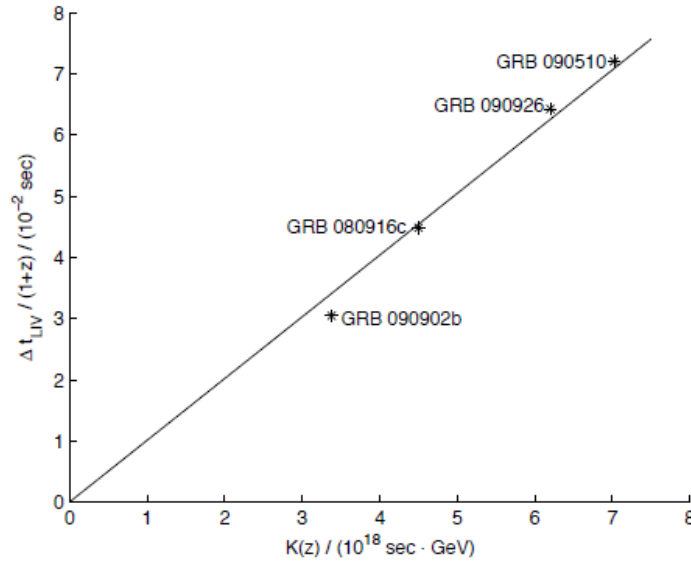


Figura 5.1: Este gráfico $\frac{\Delta t_{LIV}}{1+z} \times K(z)$ foi aproveitado do trabalho [23].

O gráfico $\frac{\Delta t_{LIV}}{1+z}$ versus $K(z)$ feito na 6.1, teve um ajustamento na inclinação que demonstrou ser $(2M)^{-1} \sim 10^{-20} \text{ GeV}^{-1}$. Onde é possível notar que a escala de energia LIV mostrou-se $2M \sim 10^{20} \text{ GeV}$. Portanto, pode-se esperar a observação da anisotropia do espaço-tempo próximo a escala de Planck, em um futuro astrofísico e observações cosmológicas.[23]

Capítulo 6

Correções quânticas na eletrodinâmica quântica com a métrica de Finsler

As correções quânticas tem sido um importante mecanismo para se estabelecer termos que controlam a LIV em certas teorias tal como a SME. Como exemplos, tem-se uma variedade de estudos destinados a induzir via correções quânticas o conhecido termo de CPT-ímpar de Carrol, Field e Jackiw [36] quando se considera uma extensão do tipo $\bar{\psi}n_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi$ (com n_μ sendo um campo constate) na QED usual [37]. Neste capítulo será feito um estudo análogo para induzir o termo de Finsler eletromagnético, Eq.(3.29), via o setor fermiônico da QED submetida à métrica de Finsler, $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$.

6.1 A eletrodinâmica quântica com a métrica de Finsler

Diante da ação da métrica de Finsler, a densidade de lagrangeana resultante para o setor fermiônico da eletrodinâmica quântica é dada como:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + ih_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu - m - q\cancel{A} - qh_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu)\psi, \quad (6.1)$$

com q sendo a constante de acoplamento, tem-se que a Eq.(6.1) apresenta dois termos adicionais, um na parte dinâmica e outro na parte de interação relacionados a ação da métrica de Finsler.

Neste ponto, será fornecido as regras de Feynman apropriadas para o cálculo de um-loop usando a densidade de lagrangeana, Eq.(6.1). Elas serão lineares no parâmetro

de Finsler $h^{\mu\nu}$, que controla a LIV. O propagador para o campo fermiônico é dado como:

$$\longrightarrow \longrightarrow S(l) = \frac{i}{\not{l} - m},$$

onde o momento l_μ está alinhado na direção do fluxo de carga mostrado no diagrama. A contribuição devido a LIV na parte livre do setor fermiônico entra como uma inserção no propagador:

$$\longrightarrow \times \longrightarrow = il^\mu h_{\mu\nu} \gamma^\nu.$$

O vértice usual devido a interação férmion-fóton é dado como

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy} \\ | \\ \times \end{array} \longrightarrow = -iq\gamma^\mu.$$

Enquanto a contribuição associada a LIV, conduz ao seguinte vértice adicional

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy} \\ | \\ \times \end{array} \longrightarrow = -iqh^{\mu\nu} \gamma_\nu.$$

Portanto, para os cálculos, deve-se considerar a soma dos seguintes gráficos ao nível de um-loop:

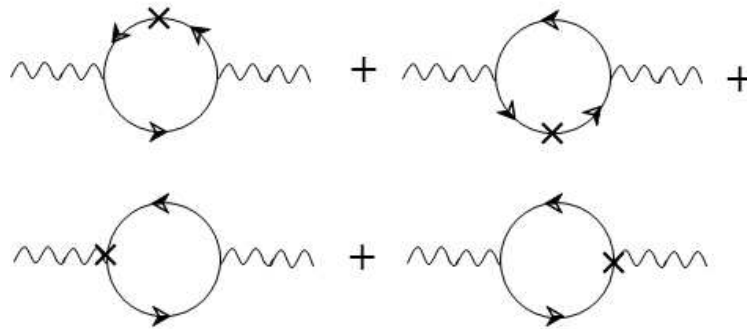


Figura 6.1: Diagramas em um-loop.

onde os primeiros dois termos surgem a partir das inserções nas linhas e os dois últimos termos a partir dos vértices modificados.

6.2 Cálculo do tensor de polarização

A soma dos quatro diagramas adicionais gera uma correção de um-loop para o propagador do fóton¹[39]. O Tensor de polarização associado é dado na forma

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = iq^2 h_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} & \left\{ l^\beta \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(l-p) \gamma^\nu S_F(l) \gamma^\alpha S_F(l) \right] \right. \\ & + (l-p)^\beta \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(l-p) \gamma^\alpha S_F(l-p) \gamma^\nu S_F(l) \right] - i\eta^{\beta\mu} \text{Tr} \left[\gamma^\alpha S_F(l-p) \gamma^\nu S_F(l) \right] \\ & \left. - i\eta^{\beta\nu} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(l-p) \gamma^\alpha S_F(l) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aqui, a notação “Tr”, representa o traço sobre as matrizes gama. Após calcular esse traço, escreve-se o resultado como

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_{(1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2)}^{\mu\nu}, \quad (6.3)$$

tal que

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} = 4q^2 h_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta} & \left\{ \eta^{\mu\nu} [(l-p)^\alpha l^\beta + (l-p)^\beta l^\alpha] + \eta^{\mu\beta} [l \cdot (l-p) - m^2] \eta^{\nu\alpha} \right. \\ & + \eta^{\nu\beta} [l \cdot (l-p) - m^2] \eta^{\mu\alpha} - \left(\eta^{\mu\alpha} [l^\beta (l-p)^\nu + l^\nu (l-p)^\beta] + \eta^{\nu\alpha} [l^\beta (l-p)^\mu + l^\mu (l-p)^\beta] \right. \\ & \left. \left. + \eta^{\mu\beta} [l^\alpha (l-p)^\nu + l^\nu (l-p)^\alpha] + \eta^{\nu\beta} [l^\alpha (l-p)^\mu + l^\mu (l-p)^\alpha] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^{\mu\nu} = 8q^2 h_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta^2} & \times \\ & \left\{ [(l-p)^2 - m^2] l^\alpha l^\beta \left(m^2 \eta^{\mu\nu} - l \cdot (l-p) \eta^{\mu\nu} + (l-p)^\mu l^\nu + l^\mu (l-p)^\nu \right) + \right. \\ & \left. (l^2 - m^2) (l-p)^\alpha (l-p)^\beta \left(m^2 \eta^{\mu\nu} - l \cdot (l-p) \eta^{\mu\nu} + (l-p)^\mu l^\nu + l^\mu (l-p)^\nu \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $\Delta = (l^2 - m^2)[(l-p)^2 - m^2]$.

Neste ponto será calculado explicitamente o tensor de polarização dado pela Eq.(6.4). Primeiro, aplica-se a fórmula da *parametrização de Feynman* de denominadores, dado na seguinte forma:

$$\frac{1}{A^p B^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dz \frac{z^{p-1} (1-z)^{q-1}}{[Az + B(1-z)]}. \quad (6.6)$$

¹Usando as regras de Feynman.

E, chamando $A = (l - p)^2 - m^2$ e $B = l^2 - m^2$, obtém-se que

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dz \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}, \quad (6.7a)$$

$$\frac{1}{A^2B} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{(k^2 - M^2)^3}, \quad (6.7b)$$

$$\frac{1}{AB^2} = 2 \int_0^1 dz \frac{(1 - z)}{(k^2 - M^2)^3}, \quad (6.7c)$$

$$\frac{1}{A^2B^2} = 6 \int_0^1 dz \frac{(1 - z)z}{(k^2 - M^2)^4}, \quad (6.7d)$$

onde $k = l - pz$ e $M^2 = m^2 - p^2(1 - z)z$. Aplicando as Eqs.(6.7a)–(6.7d) na Eq.(6.4) em conjunto com a seguinte mudança de variável: $l = k + pz$, obtem-se

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} = & 4q^2 h_{\alpha\beta} \int_0^1 dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2\eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta (z - 1)z + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} p^2 (z - 1)z - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} m^2}{(k^2 - M^2)^2} \right. \\ & + \frac{\eta^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} p^2 (z - 1)z - \eta^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} m^2 - 2\eta^{\mu\alpha} p^\beta p^\nu (z - 1)z - 2\eta^{\nu\alpha} p^\beta p^\mu (z - 1)z - \eta^{\mu\beta} p^\alpha p^\nu (z - 1)z}{(k^2 - M^2)^2} \\ & - \frac{2\eta^{\nu\beta} p^\alpha p^\mu (z - 1)z}{(k^2 - M^2)^2} + 2 \frac{(\eta^{\mu\nu} k^\alpha k^\beta - \eta^{\mu\alpha} k^\beta k^\nu - \eta^{\nu\alpha} k^\beta k^\mu - \eta^{\mu\beta} k^\alpha k^\nu - \eta^{\nu\beta} k^\alpha k^\mu)}{(k^2 - M^2)^2} \\ & \left. + \frac{\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} k^2 + \eta^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} k^2}{(k^2 - M^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Na equação acima há três tipos de integrais dadas na forma:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}, \quad I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^2} \quad \text{e} \quad I_3 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - M^2)^2}, \quad (6.9)$$

Note que por contagem de potência no integrando k -momento, temos que I_1 diverge logaritmicamente enquanto que I_2 e I_3 ambas divergem quadraticamente. Nesse ponto será usado um procedimento de regularização que preserve a invariância de calibre tal como o esquema de regularização dimensional[38]. As integrais são promovidas para dimensões D , isto é, mudam $\int d^4k/(2\pi)^4 \rightarrow (\mu^2)^{\epsilon/2} \int d^Dk/(2\pi)^D$, onde $\epsilon = 4 - D$ e $\alpha(\epsilon) = \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2}$ é uma função real de um parâmetro arbitrário μ^2 que identifica a escala

de massa. Abaixo é listado alguns resultados úteis:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right); \\ I_2 &= \frac{-i\alpha(\epsilon)M^2}{2(4\pi)^2} \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \eta^{\mu\nu}; \\ I_3 &= \frac{i\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \frac{\epsilon - 4}{2} M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Inserindo as Eqs.(6.10) na Eq.(6.8), obtém-se

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p}(z-1)z + h^{\mu\nu} p^2(z-1)z - h^{\mu\nu} m^2 - 2\bar{p}^\mu p^\nu(z-1)z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2p^\mu \bar{p}^\nu(z-1)z \right] + \frac{\epsilon}{2} M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} - M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} + M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde $\bar{p}^\mu = h^{\mu\alpha} p_\alpha$, enquanto que $p \cdot \bar{p} = h^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ (no processo da conta foi considerado o traço de h nulo). Sabendo que $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$, implicando que $(-1+\frac{\epsilon}{2})\Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2})$, sendo possível reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[M^2 h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p}(z-1)z + h^{\mu\nu} p^2(z-1)z - h^{\mu\nu} m^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\bar{p}^\mu p^\nu(z-1)z - 2p^\mu \bar{p}^\nu(z-1)z \right] + M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Lembrado que $M^2 = m^2 - p^2(1-z)z$, percebe-se que a equação resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2h^{\mu\nu} p^2(z-1)z + \eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p}(z-1)z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\bar{p}^\mu p^\nu(z-1)z - 2p^\mu \bar{p}^\nu(z-1)z \right] + M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Integrando, obtém-se

$$\Pi_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[-\frac{h^{\mu\nu} p^2}{3} - \frac{\eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p}}{6} + \frac{\bar{p}^\mu p^\nu}{3} + \frac{p^\mu \bar{p}^\nu}{3} \right] + \int_0^1 dz M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \quad (6.14)$$

E para calcular o tensor de polarização, Eq.(6.5), aplica-se Eqs.(6.7a)–(6.7d) na Eq.(6.4) em conjunto com a seguinte mudança de variável: $l = k + px$, primeiro reescreve-

se

$$\Pi_{(2)}^{\mu\nu} = \Pi_{(2.1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2.2)}^{\mu\nu} \quad (6.15)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \Pi_{(2.1)}^{\mu\nu} = 16q^2 h_{\alpha\beta} \int_0^1 (1-z) dz \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m^2 \eta^{\mu\nu} l^\alpha l^\beta - l^2 l^\alpha l^\beta \eta^{\mu\nu} + l \cdot p l^\alpha l^\beta \eta^{\mu\nu} + 2l^\alpha l^\beta l^\mu l^\nu}{(k^2 - M^2)^3} \right. \\ \left. + \frac{(-l^\alpha l^\beta p^\mu l^\nu - l^\alpha l^\beta l^\mu p^\nu)}{(k^2 - M^2)^3} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{(2.2)}^{\mu\nu} = 16q^2 h_{\alpha\beta} \int_0^1 z dz \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ (l^\alpha l^\beta - l^\alpha p^\beta - l^\beta p^\alpha + p^\alpha p^\beta) \times \right. \\ \left. \times \frac{(m^2 \eta^{\mu\nu} - l \cdot (l-p) \eta^{\mu\nu} + (l^\mu - p^\mu) l^\nu + l^\mu (l^\nu - p^\nu))}{(k^2 - M^2)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Focando agora apenas na Eq.(6.16), reescreve-se

$$\begin{aligned} \Pi_{(2.1)}^{\mu\nu} = 16q^2 \int_0^1 (1-z) dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ h_{\alpha\beta} \left[\frac{p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} m^2 z^2 + p^2 p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} (1-z) z^3}{(k^2 - M^2)^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu (z-1) z^3}{(k^2 - M^2)^3} \right] + h_{\alpha\beta} \left[\frac{k^\alpha k^\beta \eta^{\mu\nu} m^2 + k^\alpha k^\beta p^2 \eta^{\mu\nu} (1-z) z + 2k^\alpha k^\beta p^\mu p^\nu (z-1) z}{(k^2 - M^2)^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k^\alpha k^\rho p_\rho p^\beta \eta^{\mu\nu} (1-2z) z + k^\alpha k^\mu p^\beta p^\nu (2z-1) z + k^\alpha k^\nu p^\beta p^\mu (2z-1) z + k^\beta k^\rho p_\rho p^\alpha \eta^{\mu\nu} (1-2z) z}{(k^2 - M^2)^3} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{k^\beta k^\mu p^\alpha p^\nu (2z-1) z + k^\beta k^\nu p^\alpha p^\mu (2z-1) z + 2k^\mu k^\nu p^\alpha p^\beta z^2}{(k^2 - M^2)^3} \right] - h_\alpha^\beta \frac{k_\rho k^\rho k^\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu}}{(k^2 - M^2)^3} \right. \\ \left. - h_{\mu\nu} \frac{k^2 p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} z^2}{(k^2 - M^2)^3} + \frac{2h_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Neste caso tem-se as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^3}, \quad I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^3}, \quad I_3 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k^\rho k^\alpha k_\beta}{(k^2 - M^2)^3} \\ I_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - M^2)^3} \quad \text{e} \quad I_5 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^3}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

Novamente, por contagem de potência no integrando k -momento, tem-se que I_1

converge, enquanto que I_2 e I_4 divergem logaritmicamente e as integrais I_3 e I_5 ambas divergem quadraticamente. Assim, com o uso do procedimento de regularização dimensional, tem-se listado abaixo resultados úteis

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-i\alpha(\epsilon)}{2(4\pi)^2 M^2} \Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad I_2 = \frac{i\alpha(\epsilon)}{4(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \eta^{\mu\nu}, \quad I_3 = \frac{-i\alpha(\epsilon)(6 - \epsilon)M^2}{8(4\pi)^2} \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \delta_\beta^\alpha \\
I_4 &= \frac{i\alpha(\epsilon)(\epsilon - 4)}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \quad I_5 = \frac{-i\alpha(\epsilon)M^2}{8(4\pi)^2} \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}\right).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Assim, ao inserir estas equações acima em (6.18), lembrando que o traço de “ h ” para esta proposta é nulo², e usando também a propriedade da função gama, é possível obter a seguinte equação

$$\begin{aligned}
\Pi_{(2.1)}^{\mu\nu} &= \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 (1-z)dz \left\{ -\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[2p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu} p^2 (1-z)z^3 - 2p \cdot \bar{p} p^\mu p^\nu (1-z)z^3\right] \right. \\
&\quad \left. + \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu} (z - 3z^2) + \bar{p}^\mu p^\nu (2z^2 - z) + \bar{p}^\nu p^\mu (2z^2 - z)\right] - M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\},
\end{aligned} \tag{6.21}$$

de modo que ao integrar, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Pi_{(2.1)}^{\mu\nu} &= \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[-\frac{p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu}}{12} \right] - \int_0^1 dz \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[2p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu} p^2 (z^5 - 2z^4 + z^3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2p \cdot \bar{p} p^\mu p^\nu (z^5 - 2z^4 + z^3) \right] - \int_0^1 (1-z)dz M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

²Uma vez que, lembrando da proposta (5.5) apresentada no capítulo anterior, não se está interessado em termos de segunda ordem na escala de energia.

Por sua vez, será feito o cálculo para Eq.(6.17), obtém-se

$$\begin{aligned}
\Pi_{(2.2)}^{\mu\nu} = & 16q^2 h_{\alpha\beta} \int_0^1 z dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \left[p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} m^2 (z^2 - 2z + 1) \right. \right. \\
& \left. \left. + p^2 p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} (-z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z) + 2p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu (z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z) \right] \right. \\
& + \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \left[k^\alpha k^\beta \eta^{\mu\nu} m^2 + k^\alpha k^\beta p^2 \eta^{\mu\nu} (1 - z)z + 2k^\alpha k^\beta p^\mu p^\nu (z - 1)z \right. \\
& + k^\alpha k^\rho p_\rho p^\beta \eta^{\mu\nu} (-2z^2 + 3z - 1) - k^\alpha k^\mu p^\beta p^\nu (-2z^2 + 3z - 1) - k^\alpha k^\nu p^\beta p^\mu (-2z^2 + 3z - 1) \\
& k^\beta k^\rho p_\rho p^\alpha \eta^{\mu\nu} (-2z^2 + 3z - 1) - k^\beta k^\mu p^\alpha p^\nu (-2z^2 + 3z - 1) - k^\beta k^\nu p^\alpha p^\mu (-2z^2 + 3z - 1) \\
& \left. \left. 2k^\mu k^\nu p^\alpha p^\beta (z^2 - 2z + 1) \right] - \frac{k_\rho k^\rho k^\alpha k^\beta \eta^{\mu\nu}}{(k^2 - M^2)^3} + \frac{2k^\alpha k^\beta k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^3} - \frac{k^2 p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} (z^2 - 2z + 1)}{(k^2 - M^2)^3} \right\}. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Nota-se que a equação acima tem os mesmos tipos de integrais que o caso anterior com os mesmos casos de divergências. Então, ao usar o método da regularização dimensional, lembrando que $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$, obtém-se a seguinte equação

$$\begin{aligned}
\Pi_{(2.2)}^{\mu\nu} = & \frac{8iq^2 \alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 z dz \left\{ -\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[-M^2 \eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} (z^2 - 2z + 1) + p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu} m^2 (z^2 - 2z + 1) \right. \right. \\
& \left. \left. + \eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} p^2 (-z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z) - 2p \cdot \bar{p} p^\mu p^\nu (-z^4 + 3z^3 - 3z^2 z + z) \right] + \right. \\
& \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[-2\eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} (z^2 - 2z + 1) + p \cdot \bar{p} \eta^{\mu\nu} (z - z^2) + \bar{p}^\mu p^\nu (2z^2 - 3z + 1) + \bar{p}^\nu p^\mu (2z^2 - 3z + 1) \right. \\
& \left. \left. - M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}, \tag{6.24}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\Pi_{(2.2)}^{\mu\nu} = & \frac{8iq^2 \alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 z dz \left\{ -\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[2\eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} p^2 (-z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2p \cdot \bar{p} p^\mu p^\nu (-z^4 + 3z^3 - 3z^2 z + z) \right] + \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\eta^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} (-3z^2 + 5z - 2) + \bar{p}^\mu p^\nu (2z^2 - 3z + 1) \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{p}^\nu p^\mu (2z^2 - 3z + 1) \right] - M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Integrando em “ z ”, o resultado é

$$\begin{aligned} \Pi_{(2,2)}^{\mu\nu} = \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[-\frac{\eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p}}{12} \right] - \int_0^1 z dz \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[2\eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p}p^2(-z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z) \right. \right. \\ \left. \left. - 2p \cdot \bar{p}p^\mu p^\nu(-z^4 + 3z^3 - 3z^2z + z) \right] - \int_0^1 z dz M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sabendo que $\Pi_{(2)}^{\mu\nu} = \Pi_{(2,1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2,2)}^{\mu\nu}$, tomando as Eq.(6.22) e Eq.(6.26), obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{8iq^2\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[-\frac{\eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p}}{6} \right] - \int_0^1 z dz \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{M^2} \left[2\eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p}p^2(z^4 - 2z^3 + z^2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2p \cdot \bar{p}p^\mu p^\nu(z^4 - 2z^3 + z^2z) \right] - \int_0^1 dz M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) h^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Finalmente, lembrando que $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_{(1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2)}^{\mu\nu}$, e considerando as Eqs.(6.14)–(6.27), o resultado é a equação

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \left[-h^{\mu\nu}p^2 - \eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p} + \bar{p}^\mu p^\nu + p^\mu \bar{p}^\nu + f(p^4) \right]. \quad (6.28)$$

Consequentemente, a ação efetiva devido a métrica de Finsler induzida é dada por

$$\begin{aligned} S_F &= \int d^4x A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu \\ S_F &= \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x A_\mu \left[-h^{\mu\nu}p^2 - \eta^{\mu\nu}p \cdot \bar{p} + \bar{p}^\mu p^\nu + p^\mu \bar{p}^\nu \right] A_\nu. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Para que o resultado dê com os mesmos índices da Eq.(3.29), será trocado o índice $\mu \rightarrow \sigma$, e invertidas as posições dos campos, isto é

$$S_F = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x A_\nu \left[-h^{\sigma\nu}p^2 - \eta^{\sigma\nu}p \cdot \bar{p} + \bar{p}^\sigma p^\nu + p^\sigma \bar{p}^\nu \right] A_\sigma. \quad (6.30)$$

Assim, quando usado a regra do produto para reescrever cada termo da equação acima, lembrando que a integral da derivada total anula-se nos extremos (termos de superfície), além do fato de que $p = -i\partial$ na equação acima, fazendo a troca conveniente dos índices

somados, obtém-se que³

$$S_F = -\frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \eta^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (6.31)$$

Portanto, foi possível induzir a ação efetiva eletromagnética devido a métrica de Finsler proporcional a um coeficiente divergente.

³Ver detalhes deste cálculo no Apêndice H.

Capítulo 7

Conclusão e perspectiva

Nesta dissertação, estudou-se a eletrodinâmica quântica sobre os efeitos do espaço-tempo localmente de Minkowski primeiro para o setor do campo eletromagnético e depois para o setor do campo fermiônico.

Para o setor do campo eletromagnético, os efeitos da LIV foram introduzidos pela substituição da métrica do espaço-tempo pela métrica de Finsler. Neste caso, a densidade de lagrangeana preserva a invariância de calibre. Obtiveram-se as equações de movimento e o propagador de Feynman associados. No caso do propagador modificado, verificou-se que os efeitos da LIV devido à métrica de Finsler, não altera a propriedade de unitariedade da teoria. Verificou-se ainda que, a relação de dispersão é modificada, contudo, a presença da LIV não gera birrefringência da luz, que está consistente com observações astrofísicas. Além disso, a influência da LIV sobre as ondas eletromagnéticas se comporta como uma fonte de campo eletromagnético. Isto pode ser interpretado como a influência de um fraco meio anisotrópico sobre os campos eletromagnéticos.

Ainda no setor do campo eletromagnético, estudaram-se os limites fenomenológicos sobre os efeitos da LIV tomando como base as modificações nos modos de propagação dos fótons dados pela sua respectiva velocidade de grupo. Foi proposta uma métrica perturbativa de modo que a luz se propagasse de forma subluminal, ou seja, o cone de luz fosse encontrado exprimido. A velocidade da luz neste espaço-tempo intrinsecamente anisotrópico mostrou-se subluminal e em função da energia do fóton, coincidindo com o objetivo da métrica perturbativa proposta neste trabalho. Comparando as previsões feitas através do modelo Finsler com observações astrofísicas, a saber, fenômenos de explosões de raios gama, os resultados de atraso temporal entre dois fótons de energia 110 MeV e GeV mostram-se compatíveis. Os efeitos LIV acumularam-se quando a luz se propaga a partir de GRBs distantes, percorrendo distâncias cosmológicas até chegar na terra.

Para o setor do campo fermiônico, considera-se os termos extras devido à métrica de Finsler para gerar novas regras de Feynman tais como inserção no propagador do

campo fermiônico e vértice de interação extra. Através de cálculos ao nível de um-loop, calcularam-se os tensores de polarização associados via o esquema de regularização dimensional de integrais divergentes. Como resultado, foi possível induzir radiativamente a contribuição eletromagnética devido à métrica de Finsler.

Uma extensão imediata do presente trabalho é a de estudar os efeitos da métrica de Finsler sobre outras teorias do campo eletromagnético tal como o eletromagnetismo de altas ordens derivativas de Podolsky. Também o de obter análogos birrefringentes deste modelo.

Apêndice A

Tensor k_F em termos de um tensor simétrico de traço nulo

Para escrever o tensor k_F em termos de um tensor simétrico de traço nulo, basta partir de

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} + (k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} \right], \quad (\text{A.1})$$

onde ao usar a simetria do tensor de Riemann em que $(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} + (k_F)^{\mu\rho\sigma\nu} + (k_F)^{\mu\sigma\nu\rho} = 0$, obtém-se que

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[- (k_F)^{\mu\rho\sigma\nu} - (k_F)^{\mu\sigma\nu\rho} - (k_F)^{\mu\rho\sigma\nu} - (k_F)^{\mu\sigma\nu\rho} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Agora, usando as outras simetrias do tensor de Riemann, em que

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = - (k_F)^{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = - (k_F)^{\mu\nu\sigma\rho} \quad \text{e} \quad (k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = (k_F)^{\rho\sigma\mu\nu},$$

é possível escrever

$$\begin{aligned} (k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \left[(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} - (k_F)^{\mu\nu\sigma\rho} - (k_F)^{\nu\mu\rho\sigma} + (k_F)^{\nu\mu\sigma\rho} \right] \\ (k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \left[g^{\mu\rho} (k_F)_{\rho}{}^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} (k_F)_{\sigma}{}^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} (k_F)_{\rho}{}^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} (k_F)_{\sigma}{}^{\mu\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Observando que, por exemplo, no termo $(k_F)_{\rho}{}^{\nu\sigma}$, ρ é um índice mudo, por estar sendo somado, podendo ser chamado por α , assim

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\rho} (k_F)_{\alpha}{}^{\nu\alpha\sigma} - g^{\mu\sigma} (k_F)_{\alpha}{}^{\nu\alpha\rho} - g^{\nu\rho} (k_F)_{\alpha}{}^{\mu\alpha\sigma} + g^{\nu\sigma} (k_F)_{\alpha}{}^{\mu\alpha\rho} \right], \quad (\text{A.4})$$

de modo que, ao definir-se $k^{\mu\nu} \equiv (k_F)_\alpha^{\mu\alpha\nu}$, finalmente escreve-se

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\rho} k^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} k^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} k^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} k^{\mu\rho} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Equações de Maxwell modificadas pelo termo CPT-par

Ao considerar o caso em que as componentes não nulas de k_F são escolhidas a serem $(k_F)_{0i0j} = -\frac{1}{2}\beta_i\beta_j$, onde β_i são quantidades (pequenas) reais adimensionais, e estas componentes estão relacionadas pela simetria de k_F . Além do fato de que $\partial^\mu = (\partial^0, -\partial^i)$, e $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k$. Assim, para $\nu = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}\eta_{00}\partial_\mu F^{\mu 0} + (k_F)_{\mu 0\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} &= 0 \\ \partial_i F^{i0} - (k_F)_{i0\alpha\beta}\partial^i F^{\alpha\beta} &= 0 \\ -\partial_i F^{0i} - (k_F)_{i00\beta}\partial^i F^{0\beta} - \underbrace{(k_F)_{i0i\beta}}_{=0}\partial^i F^{i\beta} - (k_F)_{i0j\beta}\partial^i F^{j\beta} &= 0,\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}-\partial_i F^{0i} - (k_F)_{i00j}\partial^i F^{0j} - (k_F)_{i0j0}\partial^i F^{j0} &= 0 \\ -\partial_i F^{0i} + 2(k_F)_{0i0j}\partial^i F^{0j} &= 0 \\ \partial_i E^i - \beta_i\beta_j\partial^i F^{0j} &= 0 \\ \partial_i E^i + \beta_i\partial^i(\beta_j E^j) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\vec{\beta}\vec{\nabla}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Agora para $\nu = i$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \eta_{ii} \partial_\mu F^{\mu i} + (k_F)_{\mu i \alpha \beta} \partial^\mu F^{\alpha \beta} = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ji} + (k_F)_{0i\alpha\beta} \partial^0 F^{\alpha\beta} = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ij} + (k_F)_{0i0j} \partial^0 F^{0j} + (k_F)_{0ij0} \partial^0 F^{j0} = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ij} + 2(k_F)_{0i0j} \partial^0 F^{0j} = 0 \\
& \quad \partial_0 E^i - \epsilon^{ijk} \partial_j B_k + \frac{2}{2} \beta_i \beta_j \partial^0 E^j = 0 \\
& -\partial_0 E^i + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \beta_i \partial^0 (\beta_j E^j) = 0 \\
& \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = \vec{\beta} \partial^0 (\vec{\beta} \cdot \vec{E}).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Apêndice C

Equações de Maxwell modificadas pelo termo CPT-ímpar

Partindo de que $(k_{AF})^\rho = ((k_{AF})^0, \vec{k}_{AF})$. Observa-se para $\nu = 0$, a equação (2.27) torna-se

$$\begin{aligned}\eta_{00}\partial_\mu F^{\mu 0} + (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho 0\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= 0 \\ \partial_i F^{i0} + (k_{AF})^i \epsilon_{i0jk} F^{jk} &= 0.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Lembrando da propriedade do símbolo de Levi-Civita, em que $\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$, e também que $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k$, obtém-se

$$\begin{aligned}\partial_i F^{i0} + \epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} (k_{AF})^i B_l &= 0 \\ \partial_i F^{i0} + 2\delta_i^l (k_{AF})^i B_l &= 0 \\ \partial_i E^i + 2(k_{AF})^i B_i &= 0,\end{aligned}\tag{C.2}$$

onde foi usado propriedade do símbolo de Levi-Civita, no qual $\epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} = 2\delta_i^l$, e também, como já é conhecido $F^{i0} = E^i$, então

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -2\vec{k}_{AF} \cdot \vec{B}.\tag{C.3}$$

Agora, tomando $\nu = i$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \eta_{ii} \partial_\mu F^{\mu i} + (k_{AF})^\rho \epsilon_{\rho i \alpha \beta} F^{\alpha \beta} = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ji} + (k_{AF})^k \epsilon_{ki0j} F^{0j} + (k_{AF})^k \epsilon_{kij0} F^{j0} + (k_{AF})^0 \epsilon_{0ijk} F^{jk} = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} + \epsilon_{jik} \partial_j B^k - \epsilon_{kij} (k_{AF})^k F^{0j} - \epsilon_{kij} (k_{AF})^k F^{0j} - \epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} (k_{AF})^0 B_l = 0 \\
& -\partial_0 F^{0i} - \epsilon_{ijk} \partial_j B^k + 2\epsilon_{ikj} (k_{AF})^k F^{0j} - 2\delta_i^l (k_{AF})^0 B_l = 0 \\
& \partial_0 E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B^k - 2\epsilon_{ikj} (k_{AF})^k E^j - 2(k_{AF})^0 B_i = 0
\end{aligned} \tag{C.4}$$

de modo que, a equação obtida é

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = -2\vec{k}_{AF} \times \vec{E} - 2(k_{AF})^0 \vec{B}. \tag{C.5}$$

Apêndice D

Métrica de Randers-Finsler

Tomando-se uma função que viabiliza a métrica denominada *métrica de Randers-Finsler*, o qual é dada da seguinte forma: $F(y) = \sqrt{\eta(y, y)} + \beta(y)$, onde η seria a métrica Riemanniana em M e preserva a invariância de Lorentz, enquanto $\beta(y)$ é o termo que conduz a violação da invariância de Lorentz.

Assim, percebe-se que

$$F^2(y) = \eta(y, y) + 2\sqrt{\eta(y, y)}\beta(y) + \beta^2(y), \quad (\text{D.1})$$

e escrevendo $\eta(y, y) = \eta_{\mu\nu}y^\mu y^\nu$, assim como $\beta(y) = \beta_\rho y^\rho$, implica que

$$F^2(y) = \eta_{\mu\nu}y^\mu y^\nu + 2\sqrt{\eta_{\mu\nu}y^\mu y^\nu}\beta_\rho y^\rho + (\beta_\rho y^\rho)^2. \quad (\text{D.2})$$

Então, substituindo em (3.3), obtém-se

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left(\frac{1}{2} [\eta_{\alpha\gamma}y^\alpha y^\gamma + 2\sqrt{\eta_{\alpha\gamma}y^\alpha y^\gamma}\beta_\rho y^\rho + (\beta_\rho y^\rho)^2] \right)$$

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{1}{2} \left[\eta_{\alpha\gamma}(\delta_\nu^\alpha y^\gamma + y^\alpha \delta_\nu^\gamma) + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{(\eta_{\alpha\gamma}\delta_\nu^\alpha y^\gamma + \eta_{\alpha\gamma}y^\alpha \delta_\nu^\gamma)}{\sqrt{\eta_{\alpha\gamma}y^\alpha y^\gamma}} \beta_\rho y^\rho + \sqrt{\eta_{\alpha\gamma}y^\alpha y^\gamma} \beta_\rho \delta_\nu^\rho \right) + 2(\beta_\rho y^\rho) \beta_\rho \delta_\nu^\rho \right] \right)$$

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{1}{2} \left[(\eta_{\nu\gamma}y^\gamma + \eta_{\alpha\nu}y^\alpha) + \frac{(\eta_{\nu\gamma}y^\gamma + \eta_{\alpha\nu}y^\alpha)}{\sqrt{\|y\|}} \beta_\rho y^\rho + 2\sqrt{\|y\|} \beta_\nu + \beta_\rho \beta_\nu y^\rho \right] \right),$$

onde $\|y\| = \eta_{\alpha\gamma}y^\alpha y^\gamma$. Como α e γ são mudos no 1° e 2° termo, será trocado $\gamma \rightarrow \alpha$, assim

o resultado será

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{1}{2} \left[2\eta_{\alpha\nu} y^\alpha + 2 \frac{\eta_{\alpha\nu} y^\alpha}{\sqrt{\|y\|}} \beta_\rho y^\rho + 2\sqrt{\|y\|} \beta_\nu + \beta_\rho \beta_\nu y^\rho \right] \right) \\
g_{\mu\nu}(x, y) &= \eta_{\alpha\nu} \delta_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma} (\delta_\mu^\alpha y^\gamma + y^\alpha \delta_\mu^\gamma) \frac{\eta_{\alpha\nu} y^\alpha}{\sqrt{\|y\|^{\frac{3}{2}}}} \beta_\rho y^\rho + \frac{\eta_{\alpha\nu} \delta_\mu^\alpha \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{\eta_{\alpha\nu} (\delta_\mu^\alpha y^\gamma + y^\alpha \delta_\mu^\gamma)}{\sqrt{\|y\|}} \beta_\nu \\
&\quad + \frac{\eta_{\alpha\nu} y^\alpha \beta_\rho \delta_\mu^\rho}{\sqrt{\|y\|}} + \beta_\rho \beta_\nu \delta_\mu^\rho \\
g_{\mu\nu}(x, y) &= \eta_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\alpha\nu} y^\alpha y^\rho}{\sqrt{\|y\|^{\frac{3}{2}}}} \beta_\rho y_\mu + \frac{\eta_{\mu\nu} \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{\eta_{\alpha\nu} \beta_\mu y^\alpha}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{\beta_\nu y_\mu}{\sqrt{\|y\|}} + \beta_\mu \beta_\nu \\
g_{\mu\nu}(x, y) &= \eta_{\mu\nu} - \frac{y_\mu y_\nu \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|^{\frac{3}{2}}}} + \frac{\eta_{\mu\nu} \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{(\beta_\mu y_\nu + \beta_\nu y_\mu)}{\sqrt{\|y\|}} + \beta_\mu \beta_\nu
\end{aligned} \tag{D.3}$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y), \tag{D.4}$$

$$\text{onde } h_{\mu\nu}(y) = -\frac{y_\mu y_\nu \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|^{\frac{3}{2}}}} + \frac{\eta_{\mu\nu} \beta_\rho y^\rho}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{(\beta_\mu y_\nu + \beta_\nu y_\mu)}{\sqrt{\|y\|}} + \beta_\mu \beta_\nu.$$

Apêndice E

Lema de Poincaré

Dado uma 1-forma do tipo

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

sua derivada exterior é dada por

$$\begin{aligned} d(dx^\mu) &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu \\ d(dx^\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu \right). \end{aligned}$$

Trocando $\gamma \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \gamma$, no segundo termo (visto que estão somados), obtém-se

$$d(dx^\mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} dx^\nu \wedge dx^\gamma \right).$$

Como $dx^\nu \wedge dx^\gamma = -dx^\gamma \wedge dx^\nu$, e desde que $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu}$, tem-se que

$$\begin{aligned} d(dx^\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} dx^\gamma \wedge dx^\nu \right) \\ d(dx^\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Apêndice F

Equação de Euler-Lagrange

Dado que a ação do campo eletromagnético tem a forma

$$S = \int \mathcal{L} d\Omega \quad (\text{F.1})$$

onde $d\Omega = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}(y)} d^4x$ denota o elemento de volume invariante para cada posição x . Usando o princípio variacional da ação (F.1) com a condição de contorno

$$\delta A_\mu(x^i, t_i) = \delta A_\mu(x^i, t_f) = 0 \quad (\text{F.2})$$

e sabendo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta \mathcal{L} d\Omega \\ \delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \delta A^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta (\partial_\mu A^\nu) \right) d\Omega \\ \delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \delta A^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \partial_\mu \delta A^\nu \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Lembrando da derivada do produto que tem a forma

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu \right] &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) \delta A^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \partial_\mu \delta A^\nu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \partial_\mu \delta A^\nu &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu \right] - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) \delta A^\nu. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Substituindo em (F.3), obtém-se

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \delta A^\nu + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu \right] - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) \delta A^\nu \right) d\Omega \\ \delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) \right) \delta A^\nu d\Omega + \int \sqrt{-\det g_{\mu\nu}(y)} d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu \Bigg|_{t_i}^{t_f}\end{aligned}\quad (\text{F.5})$$

Na equação acima, o último termo se anula quando é usado a condição (F.2), então resta apenas

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) \right) \delta A^\nu d\Omega \quad (\text{F.6})$$

Note que foi usado nos cálculos acima, o fato de que $\delta(\partial_\mu A^\nu) = \partial_\mu \delta A^\nu$, e tal equação é facilmente demonstrada¹.

Então, para a equação (F.6), ser nula, isto é $\delta S = 0$, percebe-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) = 0. \quad (\text{F.7})$$

Tal equação é conhecida como equação de Euler-Lagrange associada a ação S ou à densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu)$.

¹Veja no Apêndice G.

Apêndice G

Demonstração

Para facilitar tal demonstração, basta partir da seguinte ideia (considerando uma dimensão para simplificar)

$$\delta(\partial_x A_\nu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (A'_\nu(x + \epsilon) - A'_\nu(x) - (A_\nu(x + \epsilon) - A_\nu(x)))$$

de modo que

$$\delta(\partial_x A_\nu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((A'_\nu(x + \epsilon) - A_\nu(x + \epsilon)) - (A'_\nu(x) - A_\nu(x))).$$

Reconhecendo os termos entre os parenteses internos, escreve-se

$$\delta(\partial_x A_\nu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\delta A_\nu(x + \epsilon) - \delta A_\nu(x)).$$

Assim, finalmente obtém-se

$$\delta(\partial_x A_\nu) = \partial_x(\delta A_\nu).$$

Apêndice H

Termo interno à ação de Finsler

Partindo da seguinte equação

$$S_F = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x A_\nu \left[-h^{\sigma\nu} p^2 - \eta^{\sigma\nu} p \cdot \bar{p} + \bar{p}^\sigma p^\nu + p^\sigma \bar{p}^\nu \right] A_\sigma, \quad (\text{H.1})$$

de modo que tem-se

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x A_\nu \left[-h^{\sigma\nu} p_\mu p^\mu - \eta^{\sigma\nu} h^{\mu\rho} p_\mu p_\rho + h^{\sigma\mu} p_\mu p^\nu + h^{\nu\mu} p^\sigma p_\mu \right] A_\sigma \\ &= \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \left[-h^{\sigma\nu} A_\nu p_\mu p^\mu A_\sigma - A^\sigma h^{\mu\rho} p_\mu p_\rho A_\sigma + h^{\sigma\mu} A_\nu p_\mu p^\nu A_\sigma + h^{\nu\mu} A_\nu p^\sigma p_\mu A_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

usando $p = -i\partial$, obtém-se

$$S_F = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \left[h^{\sigma\nu} A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A_\sigma + h^{\mu\rho} A^\sigma \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - h^{\sigma\mu} A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A_\sigma - h^{\nu\mu} A_\nu \partial^\sigma \partial_\mu A_\sigma \right]. \quad (\text{H.3})$$

Sabendo que pela derivada do produto

$$A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A_\sigma = \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A_\sigma) - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A_\sigma, \quad (\text{H.4})$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação acima é um termo de superfície, portantoo

anula-se quando integrado na ação, assim resta apenas

$$S_F = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \left[-h^{\sigma\nu}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A_\sigma - h^{\mu\rho}\partial_\mu A^\sigma\partial_\rho A_\sigma + h^{\sigma\mu}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A_\sigma + h^{\nu\mu}\partial^\sigma A_\nu\partial_\mu A_\sigma \right]. \quad (\text{H.5})$$

Como há termos somados, será feito a seguinte troca de índices:

- (i) no segundo termo será trocado $\mu \rightarrow \sigma$, $\sigma \rightarrow \mu$ e $\rho \rightarrow \nu$;
- (ii) no terceiro termo será trocado $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$;
- (iii) no quarto termo será trocado $\sigma \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow \sigma$.

Assim o resultado será

$$S_F = \frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \left[-h^{\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A_\sigma - h^{\sigma\nu}\partial_\sigma A^\mu\partial_\nu A_\mu + h^{\sigma\nu}\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A_\sigma + h^{\nu\sigma}\partial^\mu A_\nu\partial_\sigma A_\mu \right]. \quad (\text{H.6})$$

Trocando ainda $\nu \rightarrow \sigma$ e $\sigma \rightarrow \nu$ no segundo termo, sabendo que $\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu$, a equação acima torna-se

$$S_F = -\frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \left[h^{\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A_\sigma - h^{\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\sigma A^\mu - h^{\nu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A_\sigma + h^{\nu\sigma}\partial_\nu A_\mu\partial_\sigma A^\mu \right], \quad (\text{H.7})$$

de modo que

$$S_F = -\frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \eta^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} \left[\partial_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) - \partial_\nu A_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \right]. \quad (\text{H.8})$$

Finalmente, obtém-se que

$$S_F = -\frac{iq^2\alpha(\epsilon)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{6\pi^2} \int d^4x \eta^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (\text{H.9})$$

Referências Bibliográficas

- [1] AMELINO-CAMELIA G., Testable scenario for relativity with minimum length. **Physics Letters B**, v. 510, 255 (2001).
- [2] AMELINO-CAMELIA G., Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale. **International Journal of Modern Physics D**, v. 11, 35 (2002).
- [3] AMELINO-CAMELIA G., The detection of cosmic rays with unexpectedly high energies has prompted a rethink of Einstein's theory of special relativity. A new formulation, called 'doubly special relativity', might be the answer. **Nature**, v. 418, 34 (2002).
- [4] MAGUEIJO J., SMOLIN L., Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale , **Physical Review Letters**, v. 88, 190403 (2002).
- [5] MAGUEIJO J., SMOLIN L., Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. **Physical Review D**, v. 67, 044017 (2003).
- [6] ALFARO J., MORALES-TECOTL H. A., URRUTIA L.F., Quantum Gravity Corrections to Neutrino Propagation. **Physical Review Letters**, V. 84, 2318 (2000).
- [7] ALFARO J., MORALES-TECOTL H. A., URRUTIA L.F., Loop quantum gravity and light propagation. **Physical Review D**, v. 65, 103509 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevD.65.103509
- [8] SUDARSKY D. et al., Bounds on stringy quantum gravity from low energy existing data. **Physical Review D**, v. 68, 024010 (2003). DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.024010>
- [9] BERNABEU J., MAVROMATOS N.E., SARKAR S., Decoherence induce CPT violation and entangled neutral mesons. **Physical Review D**, v. 74, 045014 (2006).
- [10] COHEN A.G., GLASHOW S.L., Very Special Relativity. **Physical Review Letters**, v. 97, 021601 (2006).

- [11] PAVLOPOULOS T.G., Breakdown of Lorentz Invariance. **Physical Review Journals Archive**, v. 159, 1106 (1967).
- [12] KOSTELECKY V.A., SAMUEL S., Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, v. 39, 683 (1989).
- [13] COLLADAY D., KOSTELECKY V. A., CPT violation and the standard model. **Physical Review D**, v. 55, 6760 (1997).
- [14] COLLADAY D., KOSTELECKY V. A., Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, 116002 (1998)
- [15] KOSTELECKY V. A., Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics. **Physics Letters B** 701, 137 (2011).
- [16] RUND H., The Differential Geometry of Finler Spaces. **Springer-Verlag OHG.**, v. 1 ISBN 978-3-642-51612-2 (1959).
- [17] BAO D., CHERN S. S., SHEN Z., An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. **Springer-Verlag**, v. 1 ISBN 0-387-98948-x (2000).
- [18] SHEN Z., Lectures on Finsler Geometry. **World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.**, v. 1 ISBN 981-02-4530-0 (2001).
- [19] RANDERS G., On asymmetric metric in the four space of general relativity. **Physical Review Journals Archive**, v. 59, 195-199 (1941).
- [20] GIRELLE F., LIBERATI S., SINDONI L., Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry. **Physical Review D**, v. 75, 064015 (2007).
- [21] GIBBONS G.W., GOMIS J., POPE C.N., General very special relativity is Finsler geometry. **Physical Review D**, v. 76, 081701 (2007).
- [22] CASANA R., FERREIRA M. M., Jr., GOMES A. R., SANTOS F. E. P., Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the standard model extension. **Physical Review D**, v. 82, 125006 (2010).
- [23] CHANG Z., WANG S., Lorentz invariance violation and electromagnetic field in an intrinsically anisotropic spacetime. **Springer-Verlag**. v. 1 (2012). DOI 10.1140/epjc/s10052-012-2165-0
- [24] CHERN S. S., SHEN Z., Riemann-Finsler Geometry. **World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.** v. 6 ISBN 981-238-357-3 (2005).
- [25] FINSLER P., Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, **Springer Basel AG**, v. 1 ISBN 978-3-0348-4070-5 (1951). DOI 10.1007/978-3-0348-4144-3

- [26] LI X., CHANG Z., Symmetry and special relativity in Finsler spacetime with constant curvature. **Elsevier B.V.**, v. 1 (2012).
- [27] LI X., CHANG Z., Symmetry and special relativity in Finsler spacetime with constant curvature. arXiv:1010.2020 [gr-qc]
- [28] KOSTELECKY V. A., RUSSEL N., Data Tables for Lorentz and CPT Violation **Reviews of Modern Physics** **83**, 11 arXiv:0801.0287 (2011).
- [29] KOSTELECKY A., MEWES M., Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D** v. 80, 015020 (2009).
- [30] Abdo. A. A. *et al.*, Fermi Observations of High-Energy Gamma-Ray Emission from GRB 080916C. **Science** (2009). DOI: 10.1126/science.1169101
- [31] Abdo. A. A. *et al.*, Fermi Observations of GRB 090902B: A Distinct Spectral Component in the Prompt and Delayed Emission. **The Astrophysical Journal** (2009). doi:10.1088/0004-637X/706/1/L138
- [32] Abdo. A. A. *et al.*, Testing Einstein's special relativity with Fermi's short hard γ -ray burst GRB090510. arXiv:0908.1832
- [33] ACKERMANN M., Detection of a Spectral Break in the extra hard component of GRB 090926A. **The Astrophysical Journal** (2011). doi:10.1088/0004-637X/729/2/114
- [34] CHANG Z., JIANG Y., Lin H. N., A unified constraint on the Lorentz invariance violation from both short and long GRBs. **Elsevier B.V.** (2012).
- [35] BOSNJAK Z., KUMAR P., Magnetic jet model for GRBs and the delayed arrival of >100 MeV photons. **Monthly Notices of the Royal astronomical society** (2012). doi:10.1111/j.1745-3933.2011.01202.x
- [36] CARROLL S., FIELD G., JACKIW R., Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, v. 41, 1231 (1990).
- [37] JACKIW R., KOSTELECKY V. A., Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics. **Physical Review Letters**, v. 82, 3572 (1999); PEREZ-VICTORIA M., Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in QED. **Physical Review Letters**, v. 83, 2518 (1999); CHUNG J. M., CHUNG B. K., Induced Lorentz- and CPT-violating Chern-Simons term in QED: Fock-Schwinger proper time method. **Physical Review D**, v. 63, 105015 (2001); PEREZ-VICTORIA M., Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT

- violation in QED. **Journal of High Energy Physics**, v. 0104, 032 (2001); ANDRIANOV A. A., GIACCONI P., SOLDATI R., Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED. **Journal of High Energy Physics**, v. 02, 030 (2002); MARIZ T., NASCIMENTO J. R., PASSOS E., RIBEIRO R. F., BRITO F. A., A remark on Lorentz violation at finite temperature. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, 019 (2005).
- [38] HOOFT G. 'T, M. VELTMAN, Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics B**, v. 44, 189 (1972).
- [39] GREINER W., REINHARDT J., Field Quantization. **Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York**, v. 1 ISBN 3-540-59179-6 (1996).