

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Teconologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano.

por

Cícero Januário Guimarães

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Março/2006

# Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano.

por

Cícero Januário Guimarães

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

---

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

---

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2006

# Agradecimentos

Ao professor Marco Aurelio, pela compreensão e excelente orientação.

Aos professores João Marcos do Ó e Daniel Cordeiro, pelas sugestões e por aceitarem a participar da banca examinadora.

Ao professor Claudianor, pelas sugestões.

Aos professores Francisco Morais e Rosana, por me recomendarem ao mestrado.

Aos professores com os quais cursei disciplinas no mestrado: Marco Aurelio, Claudianor, Vânio, Braulio e Daniel Pellegrino.

Aos demais professores da UAME.

A todos os funcionários da UAME, entre eles, Salete, Dona Argentina e Valdir, pela presteza e atenciosidade.

A Jesualdo, Lauriclécio e Lindomberg, por me ajudarem no LATEX.

A todos os colegas de mestrado.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

# Dedicatória

Aos meus pais.

# Resumo

Neste trabalho estudamos os espaços  $L^{p(x)}(\Omega)$  e  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , bem como a existência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado ou  $\Omega = \mathbb{R}^N$ ;  $p(x) > 1$  é uma função contínua e  $\Delta_{p(x)}$  denota o operador  $p(x)$ -Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Usando técnicas variacionais, obtemos alguns resultados de existência de solução para os problemas em questão.

# Abstract

In this work we study the spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , as well as existence of weak solutions for elliptic problems of type

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  is a bounded domain or  $\Omega = \mathbb{R}^N$ ;  $p(x) > 1$  is a continuous function and  $\Delta_{p(x)}$  denotes  $p(x)$ -Laplacian operator, which is defined by

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Using variational techniques, we obtain some results of existence of solution for the problems in question.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 O Espaço <math>L^{p(x)}(\Omega)</math></b>	<b>10</b>
1.1 Definições e Resultados Básicos . . . . .	10
1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ . . . . .	17
1.3 O Operador de Nemytskii . . . . .	26
<b>2 O Espaço <math>W^{1,p(x)}(\Omega)</math></b>	<b>31</b>
2.1 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ . . . . .	32
2.2 Imersões . . . . .	33
<b>3 Problema Elíptico em Domínio Limitado</b>	<b>39</b>
3.1 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano . . . . .	39
3.2 Existência de Solução . . . . .	46
<b>4 Problemas Elípticos em <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>57</b>
4.1 Hipóteses sobre as funções $p(x)$ e $q(x)$ . . . . .	57
4.2 Imersões Contínuas . . . . .	58
4.3 A geometria do Passo Da Montanha . . . . .	60
4.4 Existência de Solução . . . . .	65
4.4.1 Primeiro Caso: Igualdade no Infinito . . . . .	65
4.4.2 Segundo Caso: Assintoticamente Constante no Infinito . . . . .	70
<b>A Desigualdades</b>	<b>74</b>
<b>B O Teorema de Minty-Browder para Operadores Contínuos</b>	<b>76</b>

	ii
C Teorema do Passo da Montanha	80
D Resultados Utilizados na Dissertação	90
Bibliografia	92



# Introdução

Neste trabalho, estudamos os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados, bem como problemas elípticos envolvendo o operador  $p(x)$ -laplaciano, em domínios limitados e em  $\mathbb{R}^N$ . A importância de estudar os espaços mencionados é que eles fornecem a estrutura necessária para se resolver problemas elípticos com certas condições de crescimento.

O principal objetivo neste trabalho é estudar a existência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado ou  $\Omega = \mathbb{R}^N$ ,  $p(x) > 1$  é uma função contínua e  $\Delta_{p(x)}$  denota o operador  $p(x)$ -Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Sobre a função assumiremos hipóteses ao longo do trabalho.

O operador  $p(x)$ -laplaciano surge em alguns problemas físicos, por exemplo, em teoria da elasticidade e mecânica dos fluidos, mais precisamente, fluidos do tipo eletro-reológicos (ver [8] e [23]), cuja equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}S(u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = f,$$

onde  $u : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a velocidade do fluido em um ponto do espaço-tempo,  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  é o operador gradiente,  $\pi : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$  é a pressão,  $f : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa forças externas e o tensor stress  $S : W_{loc}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3+3}$  é da forma

$$S(u)(x) = \mu(x)(1 + |Du(x)|^2)^{(p(x)-2/2)}Du(x),$$

onde  $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  é a parte simétrica do gradiente de  $u$ . Além disso, o operador  $p(x)$ -laplaciano possui uma propriedade interessante: ele é não-homogêneo quando a função  $p$  é não-constante. Como consequência disso, temos algumas dificuldades, como por exemplo: não podemos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange na maioria dos problemas envolvendo esse operador.

Este trabalho é constituído de quatro capítulos e quatro apêndices.

No **Capítulo 1** estudamos o espaço de Lebesgue generalizado, ou seja, o seguinte espaço

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um conjunto mensurável e  $p \in L^{\infty}(\Omega)$ , com  $p \geq 1$ . Neste Capítulo demonstramos as principais propriedades desse espaço, tais como: completeza, reflexividade, separabilidade e densidade. Também demonstramos as propriedades básicas do operador de Nemytskii.

No **Capítulo 2** fazemos um estudo semelhante ao do **Capítulo 1**, agora para o espaço de Sobolev generalizado  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , o qual é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \dots, N \right\},$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio. Tal espaço é essencial neste trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a existência de solução para os problemas em questão. É importante ainda observar que este espaço pode ser escrito da seguinte forma

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \},$$

onde

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Ainda neste capítulo, supondo  $\Omega$  limitado, demonstramos alguns resultados de imersão, entre eles um teorema tipo Sobolev e a Desigualdade de Poincaré, que serão de grande utilidade nos capítulos seguintes.

Os Capítulos 1 e 2 são baseados no artigo de Fan & Zhao [9].

No **Capítulo 3** estudamos a existência de solução fraca em  $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$  para o problema de Dirichlet

$$(P) \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado,  $p > 1$ ,  $p \in C(\overline{\Omega})$ . Ainda neste capítulo, estudamos as propriedades do operador  $p(x)$ -laplaciano e obtemos alguns resultados de existência de solução para o problema  $(P)$ , impondo certas condições de crescimento sobre a função  $f$ .

O **Capítulo 3** é baseado no artigo de Fan & Zhang [10].

No **Capítulo 4** estudamos a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$(P_\lambda) \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$  é um parâmetro e  $p, q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis satisfazendo algumas condições de crescimento.

Estudaremos dois tipos de comportamento para a função  $q$  no infinito. No primeiro, supondo  $q$  constante no infinito, mostramos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > 0$ . No segundo, supondo  $q$  assintoticamente constante no infinito, mostramos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > \lambda_o > 0$ .

Para o **Capítulo 4** temos como referência o artigo de Alves & Souto [2].

No **Apêndice A** demonstramos que, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , valem as seguintes desigualdades

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p}|x - y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ (p-1) \frac{|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

As desigualdades acima são importantes, pois através delas e do Teorema de Minty-Browder, demonstrado no **Apêndice B**, concluiremos que o operador

$$L : W_o^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W_o^{1,p(x)}(\Omega))^*$$

definido por

$$(L(u), v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \text{ para todos } u, v \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$$

é um homeomorfismo. Tal propriedade será útil na busca de solução fraca para o problema  $(P)$ .

No **Apêndice B** demonstramos o Teorema de Minty-Browder, que é um dos resultados básicos da teoria dos operadores monótonos.

No **Apêndice C** demonstramos o Teorema do Passo da Montanha, um resultado fundamental neste trabalho, já que estudamos problemas elípticos variacionais.

No **Apêndice D** enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo da dissertação.

# Capítulo 1

## O Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo estudaremos o espaço de Lebesgue generalizado  $L^{p(x)}(\Omega)$ , o qual é definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um conjunto mensurável e  $p \in L^{\infty}(\Omega)$ , com  $p \geq 1$ . Tal espaço juntamente com espaço de Sobolev generalizado  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , que será estudado no capítulo 2, desempenham um papel fundamental quando se estuda problemas elípticos variacionais com certas condições de crescimento.

### 1.1 Definições e Resultados Básicos

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável. Considere o conjunto

$$L_+^{\infty}(\Omega) = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : \inf \text{ess } u \geq 1\}.$$

Para  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e  $p \in L_+^{\infty}(\Omega)$ , definimos

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx,$$

$$p^- = \inf \text{ess } p \text{ e } p^+ = \sup \text{ess } p.$$

A função  $\rho$  definida anteriormente é chamada de modular. Devido à sua importância, a seguir demonstraremos alguns resultados envolvendo tal função, e que se mostrarão úteis ao longo deste trabalho.

**Proposição 1.1** Para todos  $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ , tem-se

(a)  $\rho(u) = 0$  se e, somente se,  $u = 0$ ;

(b)  $\rho(-u) = \rho(u)$ ;

(c)  $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ , i.e.,  $\rho$  é uma função convexa.

(d)  $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}[\rho(u) + \rho(v)]$ ;

(e) Se  $\lambda > 1$ , então

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

e se  $0 < \lambda < 1$ , temos

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) Para cada  $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ ,  $\rho(\lambda u)$  é uma função crescente, contínua e convexa em  $\lambda \in [0, \infty)$ .

**Demonstração.** Sejam  $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ .

(a) Note que

$$\rho(u) = 0 \Leftrightarrow |u(x)|^{p(x)} = 0, \text{ q.s. em } \Omega \Leftrightarrow |u(x)| = 0, \text{ q.s. em } \Omega \Leftrightarrow u(x) = 0, \text{ q.s. em } \Omega.$$

(b) Segue da definição de  $\rho$ .

(c) Note que a função  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(x, s) = |s|^{p(x)}$  é convexa em  $\mathbb{R}$ . Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que  $\rho$  é convexa.

(d) Note que

$$|u(x) + v(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)}(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}), \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando a desigualdade acima, obtemos o resultado.

(e) Se  $\lambda > 1$ , temos

$$|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^+}|u(x)|^{p(x)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Se  $0 < \lambda < 1$ , temos

$$\lambda^{p^+}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq |u(x)|^{p(x)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando em ambos os casos as desigualdades acima, obtemos o resultado.

(f) Sejam  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$ , tais que  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Fixando  $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ , temos

$$|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} = |\lambda_1|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} = |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando esta desigualdade, obtemos

$$\rho(\lambda_1 u) < \rho(\lambda_2 u).$$

Logo,

$$\rho(\lambda u) \text{ é crescente em } \lambda \in [0, \infty).$$

Mostremos a continuidade. Seja  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  em  $[0, \infty)$ . Note que, q.s. em  $\Omega$ ,

$$\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)} \text{ é uma seqüência crescente e } \varphi_n \rightarrow \varphi := |\lambda u(x)|^{p(x)}.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona temos

$$\rho(\lambda_n u) \rightarrow \rho(\lambda u).$$

Portanto,  $\rho(\lambda u)$  é contínua em  $\lambda \in [0, \infty)$ .

Com relação à convexidade, note que a função  $\varphi(x, \lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}$ ,  $\lambda \geq 0$ , é convexa em  $\lambda$ . Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que  $\rho(\lambda u)$  é convexa em  $\lambda \in [0, \infty)$ . ■

Pelos itens (a), (b), (d) e (e) da Proposição 1.1, temos

**Proposição 1.2**  $L^{p(x)}(\Omega)$  é um espaço vetorial.

Nas demonstrações seguintes, para cada  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  denotaremos

$$I_u = \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Note que  $I_u$  é um intervalo da forma  $I_u = (0, \infty)$  se  $u = 0$  e  $I_u = [a, \infty)$ ,  $a > 0$ , se  $u \neq 0$ . De fato, se  $u = 0$  é imediato, pois neste caso  $\rho(0) = 0$ . Suponha que  $u \neq 0$  e seja  $a \in I_u$ . Daí, se  $\lambda > a$  temos que

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a}.$$

Assim,

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1,$$

logo  $\lambda \in I_u$ . Portanto,  $I_u$  é um intervalo.

Agora observe que, para  $\lambda > 0$ , a função

$$f(\lambda) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

é contínua convexa decrescente. Além disso,

$$I_u = f^{-1}(-\infty, 1] = f^{-1}(0, 1].$$

Logo,  $I_u = [a, \infty)$ , com  $a = f^{-1}(\{1\})$ .

Vamos agora definir uma norma no espaço  $L^{p(x)}(\Omega)$ , que será denotada por  $\|\cdot\|_{p(x)}$ .

**Proposição 1.3**  $\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$  é uma norma em  $L^{p(x)}(\Omega)$ .

**Demonstração.** Sejam  $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Devemos mostrar que

- (i)  $\|u\|_{p(x)} \geq 0$ ,
- (ii)  $\|u\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ,
- (iii)  $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha| \|u\|_{p(x)}$ ,
- (iv)  $\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$ .

De fato,

- (i) É imediato.
- (ii) Se  $u = 0$ , então  $I_u = (0, \infty)$ . Logo,  $\|u\|_{p(x)} = 0$ . Suponha agora que  $\|u\|_{p(x)} = 0$ , mas  $u \neq 0$ . Existe  $(\lambda_n) \subset (0, 1)$  tal que

$$\lambda_n \rightarrow 0 \text{ e } \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Sendo  $\rho(u) > 0$ , teríamos

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \rightarrow +\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

uma contradição. Portanto,  $u = 0$ .



(iii) Se  $\alpha = 0$ , o resultado é imediato. Se  $\alpha \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left( \frac{\alpha u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ |\alpha| \lambda > 0 : \rho \left( \frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left( \frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \|u\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

(iv) Defina o conjunto

$$C = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho(u) \leq 1\}.$$

Observe que  $I_u = \{\lambda > 0 : \lambda^{-1}u \in C\}$ . Sendo  $L^{p(x)}(\Omega)$  um espaço vetorial e  $\rho$  uma função convexa, temos que  $C$  é convexo.

Denotando  $\|u\|_{p(x)} = a$  e  $\|v\|_{p(x)} = b$ , temos

$$\frac{u}{a + \epsilon}, \frac{v}{b + \epsilon} \in C, \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

pois  $a + \epsilon \in I_u$  e  $b + \epsilon \in I_v$ .

Sendo  $C$  convexo, temos

$$\frac{tu}{a + \epsilon} + \frac{(1-t)v}{b + \epsilon} \in C, \text{ para } t \in [0, 1].$$

Em particular, se

$$t = \frac{a + \epsilon}{a + b + 2\epsilon},$$

temos

$$\frac{u + v}{a + b + 2\epsilon} \in C.$$

Daí,

$$a + b + 2\epsilon \in I_{u+v}.$$

Logo,

$$\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)} + 2\epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Portanto,

$$\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)},$$

o que conclui a demonstração. ■

**Proposição 1.4** Se a função  $p(x) = p$  é constante, então

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p,$$

onde  $\|\cdot\|_p$  é a norma usual do espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Demonstração.** Se  $u = 0$  é imediato. Suponha  $u \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left( \frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda^{p(x)}} |u(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p} \|u\|_p^p dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 : \|u\|_p \leq \lambda \} \\ &= \|u\|_p. \end{aligned}$$

**Proposição 1.5** Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ . Então,

$$\|u\|_{p(x)} = a \text{ se, e somente se, } \rho \left( \frac{u}{a} \right) = 1.$$

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ). Seja  $\|u\|_{p(x)} = a$ . Então,

$$I_u = [a, \infty) \text{ e } \rho \left( \frac{u}{a} \right) \leq 1.$$

Suponha que

$$\rho \left( \frac{u}{a} \right) < 1.$$

Para  $t > 0$ , a função

$$\rho \left( \frac{u}{t} \right),$$

é contínua convexa decrescente. Logo, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\rho \left( \frac{u}{t} \right) < 1, \text{ para } t \in (a - \delta, a + \delta).$$

Assim, teríamos  $a - \frac{\delta}{2} \in I_u$ , que é um absurdo. Portanto,

$$\rho \left( \frac{u}{a} \right) = 1.$$

( $\Leftarrow$ ). Seja  $\rho \left( \frac{u}{a} \right) = 1$ . Então,  $a \in I_u$ . Daí,  $\|u\|_{p(x)} \leq a$ . Suponha que  $\|u\|_{p(x)} < a$ .

Assim, existe  $\lambda_o \in I_u$  tal que

$$\|u\|_{p(x)} \leq \lambda_o < a.$$

Logo,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < \rho\left(\frac{u}{\lambda_0}\right) \leq 1,$$

um absurdo. Portanto,  $\|u\|_{p(x)} = a$ . ■

**Proposição 1.6** *Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Então,*

(1)  $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$  se, e somente se,  $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$ ;

(2) Se  $\|u\|_{p(x)} > 1$ , então  $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$ ;

(3) Se  $\|u\|_{p(x)} < 1$ , então  $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$ .

**Demonstração.**

(1). Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Se  $u = 0$  é imediato. Suponha  $u \neq 0$ .

Que  $\|u\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1$ , segue da Proposição 1.5.

Se  $\|u\|_{p(x)} = a < 1$ , então  $1 < \frac{1}{a}$ . Sendo  $\rho(\lambda u)$  crescente em  $\lambda \in [0, \infty)$ , temos

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Se  $\rho(u) < 1$ , então  $1 \in I_u$ . Logo, pela Proposição 1.5, concluímos que  $\|u\|_{p(x)} < 1$ .

A prova da outra equivalência é similar.

(2). Seja  $\|u\|_{p(x)} = a > 1$ . Então,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Sendo  $\frac{1}{a} < 1$ , pelo item (e) da Proposição 1.1 temos

$$\frac{1}{a^{p^+}} \rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p^-}} \rho(u),$$

logo

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

(3) É similar a (2). ■

**Proposição 1.7** *Seja  $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ . Se  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$ .

**Demonstração.**

(1) $\Rightarrow$ (2). Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$ , então dado  $0 < \epsilon < 1$  existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_o$  implica

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < \epsilon < 1.$$

Logo,

$$\rho(u_n - u) \leq \|u_n - u\|_{p(x)}^{p^-} < \epsilon^{p^-} < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$ , então dado  $0 < \epsilon < 1$  existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_o$  implica

$$\rho(u_n - u) < \epsilon^{p^+} < \epsilon < 1.$$

Logo, pela Proposição 1.6 temos

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < 1,$$

sempre que  $n \geq n_o$ . Daí, novamente pela Proposição 1.6,

$$\|u_n - u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u_n - u) < \epsilon^{p^+}, \text{ para todo } n \geq n_o.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0.$$

■

## 1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, demonstraremos as principais propriedades de  $L^{p(x)}(\Omega)$ .

**Teorema 1.8**  $L^{p(x)}(\Omega)$  é um espaço de Banach.

**Demonstração.** Seja  $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$  uma seqüência de Cauchy. Mostrando que  $(u_n)$  possui uma subseqüência convergente, demonstraremos o teorema.

Afirmção: existe uma subseqüência  $(u_k) \subset (u_n)$  tal que

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{p(x)} < \frac{1}{2^k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

De fato, dado  $\epsilon = \frac{1}{2}$  existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq n_1$  implica

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2}.$$

Dado  $\epsilon = \frac{1}{2^2}$  existe  $n_2 \geq n_1$  tal que  $m, n \geq n_2$  implica

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Em particular,

$$\|u_{n_2} - u_{n_1}\|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Dado  $\epsilon = \frac{1}{2^3}$  existe  $n_3 \geq n_2$  tal que  $m, n \geq n_3$  implica

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

Em particular,

$$\|u_{n_3} - u_{n_2}\|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

E assim por diante. Denote  $(u_{n_k}) = (u_k)$ .

Mostraremos que  $(u_k)$  é convergente. Defina a seqüência não-decrescente

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^n |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \quad x \in \Omega.$$

Então,  $(v_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$  e, por (1.1), temos

$$\|v_n\|_{p(x)} \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 1.6

$$\int_{\Omega} |v_n(x)|^{p(x)} dx \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Usando (1.2) e o Teorema da Convergência Monótona, existe  $v \in L^{p(x)}(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x), \quad \text{q.s. em } \Omega. \quad (1.3)$$

Por outro lado, para  $m, n \geq 2$  e  $x \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + |u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)| + \cdots \\ &+ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq v(x) - v_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por (1.3) e (1.4), segue que para quase todo  $x \in \Omega$ ,  $\{u_k(x)\} \subset \mathbb{R}$  é uma seqüência de Cauchy, logo convergente, digamos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x), \text{ q.s. em } \Omega. \quad (1.5)$$

Resulta de (1.4) e (1.5) que

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x), \text{ para } k \geq 2 \text{ e q.s. em } \Omega. \quad (1.6)$$

Sendo  $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ , então por (1.6) tem-se

$$u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Desde que, por (1.5) e (1.6),

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \longrightarrow 0 \text{ e } |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)}, \text{ q.s em } \Omega,$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k - u) = 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{p(x)} = 0,$$

concluindo a demonstração. ■

O resultado abaixo é um corolário da demonstração do Teorema 1.8.

**Teorema 1.9** *Seja  $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$ . Então, existe uma subsequência  $(u_{n_k})$  tal que*

$$(a) \ u_{n_k}(x) \rightarrow u(x), \text{ q.s. em } \Omega;$$

$$(b) \ |u_{n_k}(x)| \leq h(x), \text{ para } k \geq 1, \text{ q.s. em } \Omega, \text{ com } h \in L^{p(x)}(\Omega).$$

**Demonstração.**

(a). Como a seqüência  $(u_n)$  é de Cauchy, existe uma subsequência  $(u_{n_k})$  verificando (1.1). Procedendo como na demonstração do Teorema 1.8, concluímos de (1.5) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x) = g(x), \text{ q.s. em } \Omega. \quad (1.7)$$

Além disso, por (1.6):

$$|u_{n_k}(x) - g(x)| \leq v(x), \text{ para todo } k \geq 1, \text{ q.s. em } \Omega, \quad (1.8)$$

com  $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada  $g \in L^{p(x)}(\Omega)$  e

$$u_{n_k} \longrightarrow g \text{ em } L^{p(x)}(\Omega).$$

Logo,  $u(x) = g(x)$ , q.s. em  $\Omega$ . E usando (1.7), obtemos (a).

(b). Escolha  $h = g + v$  e aplique (1.8). ■

**Proposição 1.10 (Desigualdade de Hölder)** *Seja  $p^- > 1$  e seja  $q \in L^{\infty}_+(\Omega)$  tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

*Se  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e  $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ , então*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left( \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}.$$

**Demonstração.** Sejam  $\|u\|_{p(x)} = a$  e  $\|v\|_{q(x)} = b$ . Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b} dx \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|u(x)|}{a} \cdot \frac{|v(x)|}{b} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-} \int_{\Omega} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

**Teorema 1.11** *Se  $p^- > 1$ , então  $L^{p(x)}(\Omega)$  é um espaço reflexivo.*

**Demonstração.** Defina os conjuntos

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\} \text{ e } \Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\}.$$

Observe que  $L^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega_+) \oplus L^{p(x)}(\Omega_-)$ .

Mostraremos que:

(i)  $L^{p(x)}(\Omega_+)$  é reflexivo;

(ii)  $L^{p(x)}(\Omega_-)$  é reflexivo,

e daí concluiremos que  $L^{p(x)}(\Omega)$  é reflexivo, pois a soma direta de dois espaços de Banach reflexivos é um espaço reflexivo.

Com efeito,

(i). Afirmação:  $L^{p(x)}(\Omega_+)$  é uniformemente convexo. De fato, seja  $\epsilon > 0$  e sejam  $u, v \in L^{p(x)}(\Omega_+)$  tais que

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1, \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1 \text{ e } \|u - v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon. \quad (1.9)$$

Desde que  $p(x) \geq 2$  em  $\Omega_+$ , então pela 1ª desigualdade de Clarkson (ver [5], pág. 59), temos

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^{p(x)} + \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p(x)} \leq \frac{1}{2} (|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}), \text{ para } x \in \Omega_+. \quad (1.10)$$

Integrando (1.10) em  $\Omega_+$  e usando (1.9), obtemos

$$\int_{\Omega_+} \left| \frac{u+v}{2} \right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_+} \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega_+} \frac{1}{2} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_+} \frac{1}{2} |v|^{p(x)} dx \leq 1. \quad (1.11)$$

Segue desta desigualdade que

$$\int_{\Omega_+} \left| \frac{u+v}{2} \right|^{p(x)} dx, \int_{\Omega_+} \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p(x)} dx \leq 1. \quad (1.12)$$

Usando agora a Proposição 1.6 e (1.11) - (1.12), obtemos

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)}^{p^+} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)}^{p^+} \leq 1. \quad (1.13)$$

Sendo  $\|u - v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon$ , temos por (1.13) que

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} < 1 - \delta,$$

onde

$$\delta = 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{p^+} \right]^{\frac{1}{p^+}} > 0.$$

Logo,  $L^{p(x)}(\Omega_+)$  é uniformemente convexo, e portanto reflexivo pelo Teorema de Milman-Pettis (ver [5], Teorema III.29).

(ii). Seja  $q \in L^\infty(\Omega)$  tal que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$



Defina o operador linear

$$\begin{aligned} T : L^{p(x)}(\Omega_-) &\longrightarrow (L^{q(x)}(\Omega_-))^* \\ u &\longmapsto \langle T(u), v \rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (ver Proposição 1.10), temos

$$|\langle T(u), v \rangle| \leq C \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega_-)},$$

onde  $C = \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right)$ . Daí,

$$\|T(u)\|_{(L^{q(x)}(\Omega_-))^*} \leq C \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)}, \quad (1.14)$$

ou seja,  $T$  é contínuo.

Seja  $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} = a$  e considere a função

$$v_o(x) = \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)-1} \operatorname{sgn} u(x), \quad x \in \Omega_-,$$

onde  $\operatorname{sgn}$  é a função sinal, ou seja,

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Observe que

$$v_o \in L^{q(x)}(\Omega_-) \quad \text{e} \quad \|v_o\|_{L^{q(x)}(\Omega_-)} = 1.$$

Assim,

$$\langle T(u), v_o \rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v_o(x)dx = \int_{\Omega_-} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)-1} |u(x)|dx = \int_{\Omega_-} a \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx = a.$$

Logo,

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{(L^{q(x)}(\Omega_-))^*}. \quad (1.15)$$

De (1.14) e (1.15), obtemos

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{(L^{q(x)}(\Omega_-))^*} \leq C \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)}, \quad \text{para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega_-). \quad (1.16)$$

De (1.16), segue que  $T$  é injetivo. Sendo  $T$  linear, então  $E = T(L^{p(x)}(\Omega_-))$  é um subespaço vetorial de  $(L^{q(x)}(\Omega_-))^*$ . Como  $L^{p(x)}(\Omega_-)$  é um espaço de Banach, concluímos de

(1.16) que  $E$  é fechado. Como  $L^{q(x)}(\Omega_-)$  é reflexivo, por Brezis ([5], Corolário III.18)  $(L^{q(x)}(\Omega_-))^*$  é reflexivo. Logo, por Brezis ([5], Proposição III.17),  $E$  é reflexivo. De onde concluímos que  $L^{q(x)}(\Omega_-)$  é reflexivo. ■

A seguir, demonstraremos o **Teorema da Representação de Riesz** para o espaço  $L^{p(x)}(\Omega)$ .

**Teorema 1.12** *Seja  $p^- > 1$  e seja  $q \in L_+^\infty(\Omega)$  tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

*Então, dado  $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$  existe um único  $v \in L^{q(x)}(\Omega)$  tal que*

$$f(v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

**Demonstração.** Defina o operador linear

$$\begin{aligned} T : L^{q(x)}(\Omega) &\longrightarrow (L^{p(x)}(\Omega))^* \\ v &\longmapsto \langle T(v), u \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Procedendo como em (ii) da demonstração do Teorema 1.11 concluímos que  $T$  é injetivo e que  $E = T(L^{q(x)}(\Omega))$  é um subespaço vetorial fechado de  $(L^{p(x)}(\Omega))^*$ .

Vamos mostrar que  $T$  é sobrejetivo. Sendo  $E$  fechado, basta mostrar que  $E$  é denso em  $(L^{p(x)}(\Omega))^*$ .

Seja  $u \in (L^{p(x)}(\Omega))^{**} = L^{p(x)}(\Omega)$  (pois  $L^{p(x)}(\Omega)$  é reflexivo) tal que

$$\langle T(v), u \rangle = 0, \text{ para todo } v \in L^{q(x)}(\Omega).$$

Afirmação:  $u = 0$ . De fato, considere a função

$$v_o(x) = |u(x)|^{p(x)-2}u(x), x \in \Omega.$$

Observe que  $v_o \in L^{q(x)}(\Omega)$ . Logo,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}dx = \int_{\Omega} v_o(x)u(x)dx = \langle T(v_o), u \rangle = 0,$$

de onde concluímos que  $u = 0$ .

Por Brezis ([5], Corolário I.8), temos que  $E$  é denso em  $(L^{p(x)}(\Omega))^*$ . Daí,  $T$  é sobrejetivo, e portanto um isomorfismo. ■

No que segue, faremos sistemacamente a identificação

$$(L^{p(x)}(\Omega))^* = L^{q(x)}(\Omega).$$

Agora, abordaremos a questão da densidade em  $L^{p(x)}(\Omega)$ .

**Teorema 1.13** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto. Então, o espaço  $C_o(\Omega)$  é denso em  $L^{p(x)}(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Sabemos que  $C_o(\Omega)$  é denso em  $L^1(\Omega)$ . Suponha  $p(x) > 1$  em  $\Omega$ . Por Brezis (ver [5], Corolário I.8 e sua Observação 5) para demonstrarmos o teorema é suficiente verificar que se  $v \in L^{q(x)}(\Omega)$  é tal que

$$\int_{\Omega} v(x)u(x)dx = 0, \text{ para } u \in C_o(\Omega),$$

então  $v = 0$ .

Observe que, para todo compacto  $K \subset \Omega$ , usando a desigualdade de Young, temos

$$\int_K |v(x)| dx \leq \int_K \frac{1}{p(x)} dx + \int_K \frac{|v(x)|^{q(x)}}{q(x)} dx \leq \frac{1}{p^-} |K| + \frac{1}{q^-} \int_K |v(x)|^{q(x)} dx < \infty.$$

Logo,  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Pelo Lema de Du Bois-Reymond,  $v = 0$ . ■

**Teorema 1.14** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto. Então, o espaço  $C_o^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^{p(x)}(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Pelo Teorema 1.13, dado  $\eta > 0$  existe  $v \in C_o(\Omega)$  tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}. \tag{1.17}$$

Por Adams ([1], Lema 2.18, itens (b) e (d)), para todo  $\epsilon > 0$  temos

$$\varphi_\epsilon := J_\epsilon * v \in C_o^\infty(\Omega), \text{ se } \epsilon < \text{dist}(supp v, \partial\Omega)$$

e

$$\varphi_\epsilon \rightarrow v \text{ uniformemente em } supp v, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+, \tag{1.18}$$

onde  $J_\epsilon \in C_o^\infty(\Omega)$  é um **mollifier** (ver Adams [1], pág. 29) e

$$\varphi_\epsilon(x) = (J_\epsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x - y) v(y) dy.$$

Por (1.18) e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\rho(\varphi_\epsilon - v) = \int_{\Omega} |\varphi_\epsilon - v|^{p(x)} dx = \int_{\text{supp } v} |\varphi_\epsilon - v|^{p(x)} dx \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Logo, pela Proposição 1.7 temos

$$\|\varphi_\epsilon - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (1.19)$$

Portanto, de (1.17) e (1.19),

$$\|u - \varphi_\epsilon\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|\varphi_\epsilon - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , concluindo a demonstração. ■

**Teorema 1.15** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto. Então, o espaço  $L^{p(x)}(\Omega)$  é separável.*

**Demonstração.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n \right\}.$$

Observe que cada  $\overline{\Omega}_n$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$ .

Seja  $P$  o conjunto de todos os polinômios de  $\mathbb{R}^N$  em  $\mathbb{R}$  com coeficientes racionais e defina

$$P_n = \{ \chi_{\overline{\Omega}_n} f : f \in P \}, n \in \mathbb{N},$$

onde  $\chi_{\overline{\Omega}_n}$  é a função característica de  $\overline{\Omega}_n$ . Pelo Teorema de Stone-Weierstrass  $P_n$  é denso em  $C(\overline{\Omega}_n)$ . Além disso, o conjunto  $P_o = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$  é enumerável.

Seja  $\epsilon > 0$  pequeno e seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Então, pelo Teorema 1.13 existe  $v \in C_o(\Omega)$  tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se  $\frac{1}{n} < \text{dist}(\text{supp } v, \partial\Omega)$ , então  $\text{supp } v \subset \overline{\Omega}_n$ , e daí existe  $f \in P_n$  tal que

$$\|v - f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} \leq \frac{\epsilon}{2} |\overline{\Omega}_n|^{-1/c}, \quad (1.20)$$

onde

- $c = p^+$ , se  $|\overline{\Omega}_n| < 1$ ;
- $c = p^-$ , se  $|\overline{\Omega}_n| \geq 1$ .

Em qualquer situação, usando (1.20) teremos

$$\int_{\Omega} |v - f|^{p(x)} dx = \int_{\bar{\Omega}_n} |v - f|^{p(x)} dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, pela Proposição 1.6, obtemos

$$\|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\|u - f\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

i.e.,  $P_o$  é denso em  $L^{p(x)}(\Omega)$ . Portanto,  $L^{p(x)}(\Omega)$  é separável. ■

### 1.3 O Operador de Nemytskii

Nesta seção estudaremos o operador de Nemytskii entre os espaços  $L^{p(x)}(\Omega)$ 's.

Sejam  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Carathéodory e  $N_f$  o operador de Nemytskii definido por  $f$ , i.e.,  $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$ , para toda função mensurável  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.16** *Se  $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ , então  $N_f$  é contínuo, limitado e existem uma constante  $b \geq 0$  e uma função não-negativa  $a \in L^{q(x)}(\Omega)$  tais que*

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p(x)/q(x)}, \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } s \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Reciprocamente, se  $f$  satisfaz (1.21), então  $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ , e  $N_f$  é contínuo e limitado.

#### Demonstração.

( $\Rightarrow$ ). Seja  $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ . Suponha inicialmente que  $f(x, 0) = 0$ . Assim, devemos mostrar a continuidade de  $N_f$  em  $u = 0$ .

Seja  $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow 0$ . Pela Proposição (1.7), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p(x)} dx = 0. \quad (1.22)$$

Defina a função  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x, s) = |f(x, \operatorname{sgn} s |s|^{1/p(x)})|^{q(x)}.$$

Para  $v \in L^1(\Omega)$ , seja

$$(N_h v)(x) = h(x, v(x)) = |f(x, \operatorname{sgn} v(x) |v(x)|^{1/p(x)})|^{q(x)}. \quad (1.23)$$

Desde que

$$\operatorname{sgn} v(x)|v(x)|^{1/p(x)} \in L^{p(x)}(\Omega),$$

usando a hipótese, temos  $N_h v \in L^1(\Omega)$ , mostrando que

$$N_h : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega).$$

Portanto,  $N_h$  é contínuo em  $v = 0$  (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.3).

Seja a seqüência  $(v_n) \subset L^1(\Omega)$ , definida por  $v_n = \operatorname{sgn} u_n |u_n|^{p(x)}$ . Daí, por (1.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_n(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p(x)} = 0,$$

Sendo  $N_h$  contínuo, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(N_h v_n)(x)| dx = 0.$$

Logo, por (1.23),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(N_f u_n)(x)|^{q(x)} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x, \operatorname{sgn} u_n(x) |u_n(x)|)|^{q(x)} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(N_h v_n)(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.7,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|N_f u_n\|_{q(x)} = 0,$$

mostrando a continuidade de  $N_f$  em  $u = 0$ .

No caso geral, se  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ , então basta considerar a função

$$g(x, s) = f(x, s + u(x)) - f(x, u(x)),$$

e observar que  $g(x, 0) = 0$ .

Mostremos que  $N_f$  é limitado. Seja  $B \subset L^{p(x)}(\Omega)$  um conjunto limitado. Então, existe  $r > 0$  tal que

$$\|u\|_{p(x)} \leq r, \text{ para todo } u \in B.$$

Daí, pela Proposição 1.6, existe  $c > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} \leq c.$$

Desde que

$$N_h : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega),$$

então  $N_h$  é limitado (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.3).

Observe que se  $u \in B$ , então  $v = \operatorname{sgn} u |u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ , pois

$$\int_{\Omega} |v(x)| dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx \leq c.$$

Sendo  $N_h$  limitado, existe  $k > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |(N_f u)(x)|^{q(x)} dx = \int_{\Omega} |N_h(\operatorname{sgn} u_n(x) |u_n(x)|^{p(x)})| dx \leq k.$$

Logo, pela Proposição 1.6,  $N_f(B) \subset L^{q(x)}(\Omega)$  é limitado.

Desde que  $N_h : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ , então existem uma constante  $b_1 \geq 0$  e uma função não-negativa  $a_1 \in L^1(\Omega)$  (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.4) tais que

$$|(N_h v)(x)| \leq a_1(x) + b_1 |v(x)|, \text{ para } v \in L^1(\Omega).$$

Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ . Então,  $v = \operatorname{sgn} u |u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ . Assim,

$$|(N_f u)(x)|^{q(x)} = |(N_h v)(x)|^{q(x)} \leq (a_1(x) + b_1 |u(x)|^{p(x)})^{q(x)}.$$

Sendo  $1/q(x) \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)| &\leq (a_1(x) + b_1 |u(x)|^{p(x)})^{1/q(x)} \\ &\leq (a_1(x))^{1/q(x)} + b_1^{1/q(x)} |u(x)|^{p(x)/q(x)} \\ &\leq a(x) + b |u(x)|^{p(x)/q(x)}, \end{aligned}$$

onde  $a = a_1^{1/q(x)} \in L^{q(x)}(\Omega)$  e  $b = b_1^{1/q^-} \geq 0$ , mostrando assim a desigualdade (1.21).

( $\Leftarrow$ ). Suponha que existem uma constante  $b \geq 0$  e uma função não-negativa  $a \in L^{q(x)}(\Omega)$  tais que a desigualdade (1.21) seja válida. Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e observe que

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)|^{q(x)} &\leq |a(x) + b |u(x)|^{p(x)/q(x)}|^{q(x)} \\ &\leq 2^{q(x)} (|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)} |u(x)|^{p(x)}) \\ &\leq 2^{q^+} |a(x)|^{q(x)} + 2^{q^+} b^{q(x)} |u(x)|^{p(x)}. \end{aligned}$$

Desde que  $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ ,  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e a função  $b^{q(x)}$  é limitada, concluímos da última desigualdade que

$$N_f u \in L^{q(x)}(\Omega),$$

mostrando que  $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ . Procedendo como na primeira parte da demonstração, mostra-se que  $N_f$  é contínuo e limitado. ■

**Corolário 1.17** *Suponha que  $|\Omega| < \infty$  e sejam  $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ . Então*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

*se, e somente se,  $q(x) \leq p(x)$ , q.s. em  $\Omega$ . E neste caso, a imersão é contínua.*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ). Suponha que  $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ . Considere a função de Carathéodory

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) &\longmapsto f(x, s) = s. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 1.16, existem uma constante  $b > 0$  e uma função não-negativa  $a \in L^{q(x)}(\Omega)$  tais que

$$|s| \leq a(x) + b|s|^{p(x)/q(x)}.$$

Desta desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |s|^{q(x)} &\leq 2^{q(x)}(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|s|^{p(x)}) \\ &\leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + (2b)^{q^+}|s|^{p(x)}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

o que implica  $q(x) \leq p(x)$ , q.s. em  $\Omega$ , pois do contrário a desigualdade (1.24) não seria válida quando  $s \rightarrow \infty$ .

( $\Leftarrow$ ). Sem perda de generalidade, suponha  $q(x) \leq p(x)$  em  $\Omega$ . Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e considere o conjunto

$$E = \{x \in \Omega : |u(x)| < 1\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \rho_q : &= \int_{\Omega} |u(x)|^{q(x)} dx = \int_E |u(x)|^{q(x)} dx + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)} dx \\ &\leq |E| + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)} dx \\ &\leq |\Omega| + \int_{E^c} |u(x)|^{p(x)} dx \\ &\leq |\Omega| + \rho_p(u) < \infty, \end{aligned} \tag{1.25}$$



daí  $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ . Logo,  $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ .

Mostremos que a imersão  $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$  é contínua.

Afirmção: se  $\|u\|_{p(x)} \leq 1$ , então  $\|u\|_{q(x)} \leq |\Omega| + 1$ . (1.26)

De fato, seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  tal que  $\|u\|_{p(x)} \leq 1$ . Segue de (1.25) e da Proposição 1.6 que

$$\rho_q(u) \leq |\Omega| + \rho_p(u) \leq |\Omega| + 1.$$

Daí,

$$\rho_q\left(\frac{u}{|\Omega| + 1}\right) := \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{|\Omega| + 1} \right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{|\Omega| + 1} \int_{\Omega} |u(x)|^{q(x)} dx \leq 1.$$

Novamente pela Proposição 1.6,

$$\left\| \frac{u}{|\Omega| + 1} \right\|_{q(x)} \leq 1,$$

de onde segue a afirmação.

Seja  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  e seja  $\|u\|_{p(x)} = a \neq 0$ . Usando a afirmação em (1.26) obtemos

$$\left\| \frac{u}{a} \right\|_{q(x)} \leq |\Omega| + 1.$$

Logo,

$$\|u\|_{q(x)} \leq (|\Omega| + 1)\|u\|_{p(x)},$$

mostrando que a imersão

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua. ■

# Capítulo 2

## O Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo estudaremos o espaço de Sobolev generalizado  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , ou seja, o seguinte espaço

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \dots, N \right\},$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio. Tal espaço é muito importante em nosso trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a existência de solução para os problemas dos capítulos seguintes.

Observamos que, para  $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ , então  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  denota a  $j$ -ésima derivada fraca de  $u$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Em  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , temos a seguinte norma

$$\|u\|_* = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}.$$

Se  $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ , definimos

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Note que podemos escrever o espaço  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \}.$$

Neste caso, é mais conveniente usarmos a norma equivalente

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

## 2.1 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Nesta seção demonstraremos as principais propriedades de  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ .

**Teorema 2.1**  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  é um espaço de Banach.

**Demonstração.** Seja  $\{u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$  uma seqüência de Cauchy. Então,

$$\{u_n\} \text{ e } \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right\},$$

$j = 1, \dots, N$ , são seqüências de Cauchy em  $L^{p(x)}(\Omega)$ .

Sendo  $L^{p(x)}(\Omega)$  um espaço de Banach, existem  $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$  tais que

$$u_n \longrightarrow u \text{ e } \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \longrightarrow w_j, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

$j = 1, \dots, N$ .

Usando a desigualdade de Hölder (ver Proposição 1.10), temos

$$\int_{\Omega} (u_n - u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq C \|u_n - u\|_{p(x)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\|_{q(x)}, \text{ para } \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \quad (2.2)$$

onde  $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$ . Segue de (2.1) e (2.2) que

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \longrightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \text{ para } \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} w_j \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Desde que

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \quad (2.5)$$

passando ao limite em (2.5) de  $n \rightarrow \infty$  e usando (2.3) e (2.4), obtemos

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} w_j \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega). \quad (2.6)$$

Usando o lema de Du Bois-Reymond em (2.6), concluímos que

$$u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ e } w_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, \dots, N.$$

Logo, usando (2.1), temos

$$\|u_n - u\|_* = \|u_n - u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto,  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  é um espaço de Banach. ■

**Teorema 2.2** *O espaço  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  é separável e reflexivo, se  $p^- > 1$ .*

**Demonstração.** Observe que o espaço  $E = \overbrace{L^{p(x)}(\Omega) \times \cdots \times L^{p(x)}(\Omega)}^{(N+1) \text{ cópias}}$  munido da norma  $\|\cdot\|$  é reflexivo e separável. Defina o operador linear  $T : W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow E$  por

$$T(u) = (u, \nabla u).$$

Note que

$$\|T(u)\| = \|u\|.$$

Desta última igualdade concluímos que  $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$  é um subespaço fechado de  $E$ . Por Brezis ([5], Proposições III.17 e III.22), temos que  $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$  é reflexivo e separável. Portanto,  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  é reflexivo e separável. ■

**Definição 2.1** *Definimos o espaço  $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $C_o^\infty(\Omega)$  em  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ .*

Segue imediatamente da definição de  $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$  e das propriedades de  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  o seguinte resultado

**Teorema 2.3**  *$W_o^{1,p(x)}(\Omega)$  é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se  $p^- > 1$ .*

## 2.2 Imersões

Nesta seção, supondo  $\Omega$  limitado, demonstraremos alguns resultados de imersão que serão bastante úteis nos capítulos seguintes. Dentre esses resultados, destacamos um teorema que generaliza os teoremas de Sobolev e Rellich-Kondrachov, bem como uma desigualdade do tipo Poincaré.

**Teorema 2.4** *Sejam  $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$  tais que  $q(x) \leq p(x)$ , q.s. em  $\Omega$ . Então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

*e tal imersão é contínua.*

**Demonstração.** Suponha que  $q(x) \leq p(x)$ , q.s. em  $\Omega$ . Então, pelo Corolário 1.17 a imersão

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua, ou seja, existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{q(x)} \leq C\|u\|_{p(x)}, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega). \quad (2.7)$$

Desde que

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e por (2.7) concluímos que a imersão

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega)$$

é contínua. ■

No que segue, denotaremos

$$p^*(x) = \begin{cases} Np(x)/(N - p(x)), & p(x) < N, \\ \infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

**Teorema 2.5** *Sejam  $p, q \in C(\overline{\Omega})$  tais que  $p^-, q^- \geq 1$ . Se*

$$q(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

*então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

*e tal imersão é contínua e compacta.*

**Demonstração.** Sendo  $p, q \in C(\overline{\Omega})$ , então para cada  $x \in \overline{\Omega}$  existe uma vizinhança aberta  $x \in V_x \subset \overline{\Omega}$  tal que

$$q^+(V_x) < (p^-(V_x))^*,$$

onde

$$q^+(V_x) = \sup\{q(y) : y \in V_x\} \text{ e } p^-(V_x) = \inf\{p(y) : y \in V_x\}.$$

Sendo  $\{V_x\}_{x \in \overline{\Omega}}$  uma cobertura aberta do compacto  $\overline{\Omega}$ , então pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existem  $V_1, \dots, V_s$  tais que  $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^s V_j$ .

Para cada  $j = 1, \dots, s$ , denote

$$p_j^- = p_j^-(V_j) \text{ e } q_j^+ = q_j^+(V_j).$$

Seja  $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ . Então,

$$u \in W^{1,p(x)}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelo Teorema 2.4, temos

$$u \in W^{1,p_j^-}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelos teoremas de Sobolev e de Rellich-Kondrachov as seguintes imersões

$$W^{1,p_j^-}(V_j) \subset L^{q_j^+}(V_j), j = 1, \dots, s, \quad (2.8)$$

são contínuas e compactas. Assim,

$$u \in L^{q_j^+}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelo Corolário 1.17, as imersões

$$L^{q_j^+}(V_j) \subset L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s, \quad (2.9)$$

são contínuas. Daí,

$$u \in L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Logo,  $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ . Portanto,  $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ .

**Afirmção 1:** a imersão  $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$  é contínua.

De fato, seja  $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow 0$ . Desde que as imersões

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s,$$

são contínuas, então

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s. \quad (2.10)$$

Usando (2.10), temos

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^s \int_{V_j} |u_n(x)|^{q(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^{q(x)}(\Omega).$$

Portanto, a imersão

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua.

**Afirmção 2:** a imersão  $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$  é compacta.

De fato, seja  $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$  limitada. Então, pelo Teorema 2.4,

$$(u_n) \subset W^{1,p_j^-}(V_j), j = 1, \dots, s,$$

é limitada.

Por (2.8) e (2.9),  $(u_n)$  possui subseqüências convergentes tais que

$$\{u_n^1\}_{n \in \mathbb{N}_1} \subset L^{q(x)}(V_1),$$

$$\{u_n^2\}_{n \in \mathbb{N}_2} \subset L^{q(x)}(V_2),$$

...

$$\{u_n^s\}_{n \in \mathbb{N}_s} \subset L^{q(x)}(V_s),$$

onde  $\mathbb{N}_s \subset \mathbb{N}_{s-1} \cdots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ . Agora, considere a subseqüência

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^s \chi_{V_j} u_n^j(x), x \in \Omega, n \in \mathbb{N}_s.$$

Se  $m, n \in \mathbb{N}_s$ , então

$$\int_{\Omega} |v_m(x) - v_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^s \int_{V_j} |u_m^j(x) - u_n^j(x)|^{q(x)} dx \longrightarrow 0,$$

para  $m, n$  suficientemente grandes. Logo, a subseqüência  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_s}$  é de Cauchy em  $L^{q(x)}(\Omega)$ , portanto convergente, pois  $L^{q(x)}(\Omega)$  é completo. Mostramos, assim, que a imersão

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é compacta. ■

**Observação 2.1** Seguindo as mesmas idéias da demonstração do Teorema 2.5, é possível mostrar que, se  $p, q \in C(\overline{\Omega})$  são tais que

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

com imersão contínua.

Usaremos a Observação 2.1 para mostrar o seguinte resultado importante:

**Teorema 2.6 (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $p \in C(\overline{\Omega})$  tal que  $p^- > 1$ . Então, existe  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)}, \text{ para todo } u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega).$$

**Demonstração.** Defina a função  $f : [0, N) \longrightarrow [0, +\infty)$  por

$$f(t) = \frac{Nt}{N-t}.$$

Note que  $f$  é uma bijeção crescente, com inversa  $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, N)$  dada por

$$g(s) = \frac{Ns}{N+s}.$$

Sejam  $p_o(x) := p(x)$  e  $p_N(x) \equiv 1$ . Agora, para cada  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , defina

$$p_{j+1}(x) = \max\{g(p_j(x)), 1\}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, para  $x \in \overline{\Omega}$ , temos

$$p_{j+1}(x) < p_j(x) \leq p_{j+1}^*(x), j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.11)$$

Pela Observação 2.1 do Teorema 2.5 e (2.11), concluímos que as seguintes imersões

$$W^{1,p_{j+1}(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_j(x)}(\Omega), j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

são contínuas.

Pelo Corolário 1.17 e (2.11), temos também que as seguintes imersões

$$L^{p_j(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_{j+1}(x)}(\Omega), j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

são contínuas.

Seja  $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ . Usando sucessivamente (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} &\leq C_o(\|\nabla u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}) \\ &\leq C'_o \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_o \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}, \\ \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} &\leq C_1(\|\nabla u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)}) \\ &\leq C'_1 \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_1 \|u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)}, \end{aligned}$$



...

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p_{N-1}(x)}(\Omega)} &\leq C_{N-1}(\|\nabla u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)}) \\ &\leq C'_{N-1}\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_{N-1}\|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Poincaré em espaços de Sobolev (ver [5], Corolário IX.19), temos

$$\|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_N\|\nabla u\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq C'_N\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Combinando as desigualdades convenientes, concluímos a demonstração. ■

**Observação 2.2** *Como consequência da Desigualdade de Poincaré, temos*

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \leq (C + 1)\|\nabla u\|_{p(x)},$$

para todo  $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ , ou seja, as normas  $\|u\|$  e  $\|\nabla u\|_{p(x)}$  são equivalentes em  $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ .

## Capítulo 3

# Problema Elíptico em Domínio Limitado

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução fraca em  $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$  para o seguinte problema de Dirichlet

$$(P) \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado,  $p > 1$ ,  $p \in C(\bar{\Omega})$  e  $\Delta_{p(x)}$  denota o operador  $p(x)$ -laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Sobre a função  $f$  colocaremos hipóteses posteriormente.

Os resultados aqui apresentados são generalizações daqueles para o problema de Dirichlet envolvendo o operador  $p$ -laplaciano.

No que segue, denotaremos

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{h : h \in C(\bar{\Omega}), h(x) > 1, \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}\},$$

$$h^+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} h(x) \text{ e } h^- = \min_{x \in \bar{\Omega}} h(x), \text{ para todo } h \in C(\bar{\Omega}).$$

### 3.1 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano

Até o final deste Capítulo, denotaremos  $X := W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ .

**Teorema 3.1** *O funcional  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx,$$

*é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ .*

**Demonstração.** Afim de mostrar que o funcional  $J$  é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ , é suficiente mostrar que a derivada de Gateaux de  $J$  existe e é contínua.

**Existência da derivada de Gateaux.** Sejam  $u, v \in X$ . Dados  $x \in \Omega$  e  $0 < |t| < 1$ , pelo Teorema do Valor Médio existe  $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2} (\nabla u + \lambda t\nabla v) \nabla v.$$

Observe que

$$h := |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2} (\nabla u + \lambda t\nabla v) \nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v, \text{ q.s. em } \Omega, \quad (3.1)$$

quando  $t \rightarrow 0$ .

Observe também que

$$|h| \leq |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-1} |\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} |\nabla v|. \quad (3.2)$$

Sabemos que

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}.$$

Assim,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} |\nabla v| \in L^1(\Omega). \quad (3.3)$$

Logo, usando (3.1)-(3.3) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$J'(u).v = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|\nabla(u + tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx.$$

**Continuidade da derivada de Gateaux.** Seja  $\{u_n\} \subset X$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $X$ .

Assim,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ em } (L^{p(x)}(\Omega))^N. \quad (3.4)$$

Daí, pelo Teorema 1.9, existem uma subsequência, ainda denotada por  $\{u_n\}$ , e uma função  $g \in L^{p(x)}(\Omega)$  tais que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \text{ q.s. em } \Omega, \quad (3.5)$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x), \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.6)$$

Por (3.5), temos que

$$|\nabla u_n(x)| \longrightarrow |\nabla u(x)|, \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.7)$$

Para todo  $v \in X$ , temos

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &= \left| \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right| |\nabla v| dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se

$$f_n := \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.9)$$

então

$$f_n \leq |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Note que

$$(|\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}) \in L^{q(x)}(\Omega),$$

onde

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1}.$$

Logo, por (3.10) concluimos que

$$\{f_n\} \subset L^{q(x)}(\Omega).$$

Usando a desigualdade de Hölder em (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &\leq C \|f_n\|_{q(x)} \|\nabla v\|_{p(x)} \\ &\leq C \|f_n\|_{q(x)} \|v\|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| \leq C \|f_n\|_{q(x)} \quad (3.11)$$

Usando agora (3.5) e (3.7) em (3.9), obtemos

$$f_n(x) \longrightarrow 0, \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.12)$$

De (3.6) e (3.10), temos que

$$f_n(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{ q.s. em } \Omega.$$

Daí,

$$f_n(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+} (g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}) \in L^1(\Omega), \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.13)$$

De (3.12)-(3.13) e do Teorema da Convergência Dominada, resulta que

$$\int_{\Omega} f_n^{q(x)} dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim, pelo Teorema 1.7, tem-se

$$\|f_n\|_{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Disto e de (3.11), obtemos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux  $J'$  é contínua, o que conclui a demonstração. ■

Se definirmos  $L := J' : X \longrightarrow X^*$ , então

$$(L(u), v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \text{ para todos } u, v \in X.$$

O operador  $L$  tem propriedades interessantes, e será útil na busca de solução fraca para o problema (P).

**Teorema 3.2** *O operador  $L : X \longrightarrow X^*$  é*

- (a) *contínuo;*
- (b) *limitado;*
- (c) *estritamente monótono, i.e.,*

$$(L(u) - L(v), u - v) > 0, \text{ para todos } u, v \in X, \text{ com } u \neq v;$$

- (d) *do tipo  $(S_+)$ , i.e., se  $u_n \rightharpoonup u$  e  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$ , então*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } X;$$

- (e) *um homeomorfismo.*

**Demonstração.**

(a). Observe que  $(L(u), v) = (J'(u), v)$ , para todos  $u, v \in X$ . Assim, a continuidade de  $L$  segue da continuidade da derivada de Gateaux de  $J$ .

(b). Seja  $B \subset X$  um conjunto limitado. Então, existe uma constante  $k > 0$  tal que

$$\|u\| \leq k, \text{ para todo } u \in B. \quad (3.14)$$

Se  $u \in B$  e  $v \in X$ , então

$$|(L(u), v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla v| dx. \quad (3.15)$$

Usando a desigualdade de Hölder em (3.15), temos

$$\|L(u)\| \leq C \|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}, \text{ para todo } u \in B. \quad (3.16)$$

onde

$$g = |\nabla u|^{p(x)-1}.$$

Desde que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| \leq k, \text{ para todo } u \in B,$$

então existe  $\tilde{k} > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} g(x)^{q(x)} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq \tilde{k}.$$

Portanto, por (3.16), concluímos que  $L$  é limitado.

(c). Para quaisquer  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ , valem as seguintes desigualdades (ver Apêndice A):

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p} |\xi - \eta|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ (p-1) \frac{|\xi - \eta|^2}{(|\xi|^p + |\eta|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Sejam  $u, v \in X$  tais que  $u \neq v$ . Então,  $\nabla u \neq \nabla v$ . Considere os conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\} \text{ e } \Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}.$$

A monotonicidade estrita de  $L$  segue fazendo  $\xi = \nabla u$  e  $\eta = \nabla v$  nas desigualdades acima e integrando sobre  $\Omega_+$  ou  $\Omega_-$ , conforme seja  $p(x) \geq 2$  ou  $1 < p(x) < 2$ , respectivamente.

(d). Se  $u_n \rightharpoonup u$  e  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) = 0.$$

Se  $p(x) \geq 2$ , então

$$C_1 \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Se  $1 < p(x) < 2$ , então pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &= C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\ &\leq C \|g_n\|_{\frac{2}{p(x)}} \|h_n\|_{\frac{2}{2-p(x)}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$g_n = \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}$$

e

$$h_n = (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}.$$

Desde que  $u_n \rightharpoonup u$  em  $X$ , então  $(u_n)$  é limitada. Daí, existe uma constante  $C_3 > 0$  tal que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \leq C_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho_{\frac{2}{2-p}}(h_n) &= \int_{\Omega_-} |h_n|^{\frac{2}{2-p(x)}} dx = \int_{\Omega_-} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx \\ &\leq 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C_4. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Temos também

$$\rho_{\frac{2}{p}}(g_n) = \int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}} dx \leq C_5 (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \quad (3.19)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Usando (3.18) e (3.19) em (3.17), obtemos

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{p(x)} \longrightarrow 0,$$

o que implica

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \text{ em } X.$$

(e). Sendo  $L$  estritamente monótono, então  $L$  é injetivo.

Suponha que  $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$ . Então, pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx \geq \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}. \quad (3.20)$$

Como consequência da desigualdade de Poincaré (ver Teorema 2.6), existe  $C > 0$  tal que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geq C\|u\|. \quad (3.21)$$

Daí, de (3.20) e (3.21), temos

$$\frac{(L(u), u)}{\|u\|} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx}{\|u\|} \geq \tilde{C}\|u\|_{p(x)}^{p^- - 1}.$$

Logo,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(L(u), u)}{\|u\|} = \infty, \quad (3.22)$$

ou seja,  $L$  é coercivo. Usando esta última propriedade, a continuidade e a monotonicidade de  $L$ , concluímos do Teorema de Minty-Browder (ver Apêndice B), que  $L$  é sobrejetivo. Assim, existe o operador inverso

$$L^{-1} : X^* \longrightarrow X.$$

Vamos mostrar que  $L^{-1}$  é contínuo. Seja  $\{g_n\} \subset X^*$  tal que  $g_n \rightarrow g$  em  $X^*$ .

Considere

$$u_n = L^{-1}(g_n) \text{ e } u = L^{-1}(g).$$

Sendo  $L$  uma bijeção, temos

$$L(u_n) = g_n \text{ e } L(u) = g. \quad (3.23)$$

Note que

$$\frac{(L(u_n), u_n)}{\|u_n\|} \leq \|g_n\|.$$

Daí, usando a limitação de  $\{g_n\}$  e (3.22), concluímos que  $\{u_n\}$  é limitada em  $X$ . Sendo  $X$  um espaço de Banach reflexivo, então a menos de subsequência podemos supor que

$$u_n \rightharpoonup u_0.$$



Observe que

$$(L(u_n) - L(u_o), u_n - u_o) = (g_n, u_n - u_o) - (L(u_o), u_n - u_o).$$

Por outro lado, temos

$$(g_n, u_n - u_o) = (g_n - g, u_n - u_o) + (g, u_n - u_o)$$

Agora, tendo em vista que  $g_n \rightarrow g$  e  $u_n \rightarrow u_o$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u_o), u_n - u_o) = 0.$$

Assim, sendo  $L$  do tipo  $(S_+)$ , segue que

$$u_n \longrightarrow u_o. \quad (3.24)$$

Pela continuidade de  $L$ , temos

$$L(u_n) \longrightarrow L(u_o).$$

Por (3.23), obtemos

$$L(u) = L(u_o).$$

Desde que  $L$  é injetivo, temos  $u = u_o$ . Logo, de (3.24), obtemos

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } X,$$

mostrando que  $L^{-1}$  é contínuo. Portanto,  $L$  é um homeomorfismo. ■

## 3.2 Existência de Solução

Nesta seção, discutiremos a existência de solução fraca para o problema (P).

**Definição 3.1** Dizemos que  $u \in X$  é uma solução fraca do problema (P) se

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) v \, dx, \text{ para todo } v \in X.$$

**Teorema 3.3** Se  $f(x, u) = f(x)$ ,  $f \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$ , onde  $\alpha \in C_+(\overline{\Omega})$  é tal que

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então o problema (P) tem uma única solução fraca.

**Demonstração.** Considere o funcional  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$g(v) = \int_{\Omega} f(x)v \, dx.$$

Claramente,  $g$  é linear. Mostraremos que  $g$  é contínuo. Seja  $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$  tal que

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\beta(x)} = 1, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, usando a hipótese, temos

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x) - 1}{\alpha(x)} > \frac{1}{p^*(x)}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Daí,

$$\beta(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, pelo Teorema 2.5, a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$$

é contínua, ou seja, existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|v\|_{\beta(x)} \leq C_1 \|v\|, \text{ para todo } v \in X. \quad (3.25)$$

Pela a desigualdade de Hölder,

$$|g(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v \, dx \right| \leq C \|f\|_{\alpha(x)} \|v\|_{\beta(x)}, \quad (3.26)$$

onde

$$C = \frac{1}{\alpha^-} + \frac{1}{\beta^-}.$$

Por (3.25) e (3.26), obtemos

$$|g(v)| \leq C_2 \|v\|, \text{ para todo } v \in X,$$

o que mostra a continuidade de  $g$ .

Seja  $g \in X^*$  e  $L$  um homeomorfismo, então existe um único  $u \in X$  tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x)v \, dx, \text{ para todo } v \in X,$$

ou seja, o problema (P) possui uma única solução fraca. ■

De agora em diante, vamos supor que  $f$  satisfaz à seguinte condição  
 ( $f_o$ )  $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Carathéodory tal que

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)-1}, \text{ para } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde

$$\alpha \in C_+(\overline{\Omega}) \text{ e } \alpha(x) < p^*(x).$$

**Teorema 3.4** *O funcional  $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$G(u) = \int_{\Omega} F(x, u)dx,$$

onde  $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)ds$ , é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ .

**Demonstração.** Sejam  $u, v \in X$ . Dados  $x \in \Omega$  e  $0 < |t| < 1$ , pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + \lambda tv)v. \quad (3.27)$$

Daí,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u)v, \text{ q.s em } \Omega. \quad (3.28)$$

Sabemos que

$$v \in L^1(\Omega), L^{\alpha(x)}(\Omega).$$

Assim,

$$(|u| + |v|)^{\alpha(x)-1} \in L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega).$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder e a condição ( $f_o$ ), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x, u + \lambda tv)v| &\leq C_1|v| + C_2|u + \lambda tv|^{\alpha(x)-1}|v| \\ &\leq C_1|v| + C_2(|u| + |v|)^{\alpha(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando agora (3.27) - (3.29) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$G'(u).v = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} dx = \int_{\Omega} f(x, u)v dx.$$

A continuidade de  $G'$  segue da imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$$

e da Desigualdade de Hölder. Portanto,  $G$  é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ . ■

**Teorema 3.5** *O funcional  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$G(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

*onde  $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ , é fracamente contínuo, i.e., se  $u_n \rightharpoonup u$ , então*

$$G(u_n) \rightarrow G(u).$$

**Demonstração.** Desde que  $f$  satisfaz à condição  $(f_o)$ , temos

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &= \left| \int_0^t f(x, s) ds \right| \\ &\leq \int_0^t (C_1 + C_2 |s|^{\alpha(x)-1}) ds \\ &\leq C_1 |t| + C_2 |t|^{\alpha(x)} \\ &\leq C(1 + |t|^{\alpha(x)}), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por (3.30), o operador de Nemytskii é tal que

$$N_F : L^{\alpha(x)}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega).$$

Sabemos que a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$$

é compacta. Assim, se  $u_n \rightharpoonup u$  em  $X$ , então

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{\alpha(x)}(\Omega). \tag{3.31}$$

De (3.31) e da continuidade de  $N_F$ , temos

$$N_F(u_n) \rightarrow N_F(u) \text{ em } L^1(\Omega). \tag{3.32}$$

Note que

$$\begin{aligned} |G(u_n) - G(u)| &= \left| \int_{\Omega} (F(x, u_n) - F(x, u)) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |F(x, u_n) - F(x, u)| dx \\ &= \int_{\Omega} |N_F(u_n) - N_F(u)| dx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Logo, combinando (3.32) e (3.33), concluímos que

$$G(u_n) \rightarrow G(u).$$

■

**Teorema 3.6** O operador  $G' : X \longrightarrow X^*$  dado por

$$G'(u).v = \int_{\Omega} f(x, u)v dx$$

é completamente contínuo, i.e., se  $u_n \rightharpoonup u$ , então

$$G'(u_n) \longrightarrow G'(u).$$

**Demonstração.** Seja  $u_n \rightharpoonup u$ . Dado  $v \in X$ , usando a condição  $(f_o)$  e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |(G'(u_n) - G'(u), v)| &= \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u))v dx \right| \\ &\leq C \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} \|v\|_{\alpha(x)}. \\ &\leq \tilde{C} \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} \|v\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \leq \tilde{C} \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}. \quad (3.34)$$

Da imersão compacta

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega),$$

se  $u_n \rightharpoonup u$ , então

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{\alpha(x)}(\Omega). \quad (3.35)$$

Sendo o operador

$$N_f : L^{\alpha(x)}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega)$$

contínuo, então por (3.35) temos

$$N_f(u_n) \longrightarrow N_f(u) \text{ em } L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega).$$

Portanto, de (3.34), concluímos que

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \longrightarrow 0.$$

■

**Observação 3.1** O funcional  $J$ , sendo contínuo e convexo, é fracamente semicontínuo inferiormente (ver [5], Corolário III.8). Pelo Teorema 3.5, o funcional  $-G$  também é fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema  $(P)$ , que é dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

é fracamente semicontínuo inferiormente.

**Observação 3.2** Pelos Teoremas (3.1) e (3.4) o funcional  $I$  é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ , com

$$I'(u).v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \text{ para todos } u, v \in X.$$

Dessa forma, as soluções fracas de (P) são exatamente os pontos críticos de  $I$ .

**Teorema 3.7** Se  $f$  satisfaz à condição

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{\beta-1}, \text{ para todos } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \text{ onde } 1 \leq \beta < p^-, \quad (3.36)$$

então (P) tem uma solução fraca.

**Demonstração.** Sendo

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds,$$

então de (3.36), temos

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &\leq C_1 |t| + C_2 |t|^\beta \\ &\leq C(1 + |t|^\beta), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Seja  $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$ . Segue de (3.37) que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} - C \int_{\Omega} |u|^\beta dx - C_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pela imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^\beta(\Omega),$$

existe  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u|^\beta dx \leq \tilde{C} \|u\|^\beta. \quad (3.39)$$

Daí, de (3.38) e (3.39), e pelo fato de  $\beta < p^-$ , temos

$$I(u) \geq \frac{C_4}{p^+} \|u\|^{p^-} - C_5 \|u\|^\beta - C_3 \longrightarrow +\infty. \quad (3.40)$$

quando  $\|u\| \longrightarrow \infty$ . Logo,  $I$  é coercivo.

Sendo o funcional  $I$  fracamente semicontínuo inferiormente, segue de (3.40) e do Teorema 1.1 de [18] que  $I$  tem um ponto de mínimo, que é solução fraca de (P). ■

Nosso objetivo, a partir de agora, é mostrar que o funcional  $I$  satisfaz às hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz (ver Apêndice C). Começemos, então, com a seguinte definição

**Definição 3.2** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $I$  satisfaz à condição de Palais- Smale (PS) em  $X$ , se toda seqüência  $\{u_n\} \subset X$  tal que*

$$\{I(u_n)\} \text{ é limitada e } \|I'(u_n)\| \longrightarrow 0,$$

*possui uma subseqüência convergente.*

**Lema 3.8** *Suponha que  $f$  satisfaz à condição  $(f_1)$  existem  $M > 0$  e  $\theta > p^+$  tais que*

$$0 < \theta F(x, t) \leq tf(x, t), \text{ para } |t| \geq M \text{ e } x \in \Omega,$$

*então  $I$  satisfaz à condição (PS).*

**Demonstração.** Seja  $\{u_n\} \subset X$  tal que  $\{I(u_n)\}$  é limitada e  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina o conjunto

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq M\}.$$

Usando as hipóteses e a condição  $(f_o)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx &= \int_{\Omega_n} F(x, u_n) dx + \int_{\Omega_n^c} F(x, u_n) dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_3 \int_{\Omega_n^c} (1 + M^{\alpha(x)}) dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_4. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Observe que, usando a condição  $(f_o)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx &= \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx - \int_{\Omega_n^c} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + \frac{M}{\theta} \int_{\Omega_n^c} (C_1 + C_2 M^{\alpha(x)-1}) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_5. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Suponha que  $\|\nabla u_n\|_{p(x)} > 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, usando a limitação de  $\{I(u_n)\}$  e (3.41) - (3.42), temos

$$\begin{aligned} C \geq I(u_n) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx - C_6 \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta} \right) |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x, u_n)) dx - C_6 \\ &\geq \left( \frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p^-} - \frac{1}{\theta} \|I'(u_n)\| \|u_n\| - C_6, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde para concluir a última desigualdade usamos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x, u_n)) dx = I'(u_n) \cdot u_n \leq \|I'(u_n)\| \|u_n\|.$$

Desde que

$$\|I'(u_n)\| \longrightarrow 0,$$

deduzimos de (3.43) que  $\{\|u_n\|\}$  é limitada. Sendo  $X$  um espaço de Banach reflexivo, podemos supor, a menos de subsequência, que  $u_n \rightharpoonup u$ . Daí, pelo Teorema 3.6, segue que

$$G'(u_n) \longrightarrow G'(u). \quad (3.44)$$

Uma vez que

$$L(u_n) - G'(u_n) = I'(u_n) \longrightarrow 0,$$

então por (3.44), obtemos

$$L(u_n) \longrightarrow G'(u).$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow L^{-1}(G'(u)),$$

pois  $L$  é um homeomorfismo. Desde que  $u_n \rightharpoonup u$ , concluimos que

$$u_n \longrightarrow u.$$

Portanto,  $I$  satisfaz à condição (PS). ■

**Teorema 3.9** *Se  $f$  satisfaz  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e*

*$(f_2)$   $f(x, t) = o(|t|^{p^+ - 1}), t \rightarrow 0$ , uniformemente em  $x$ , onde  $p^+ < \alpha^-$ ,*

*então  $(P)$  tem uma solução não-trivial.*

**Demonstração.** Mostraremos que o funcional  $I$  satisfaz às condições do Teorema do Passo da Montanha. Primeiramente observe que  $I(0) = 0$  e, pelo Lema 3.8,  $I$  satisfaz à condição de Palais-Smale.

Pelas hipóteses, temos

$$p^+ < \alpha^- \leq \alpha(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{p^+}(\Omega)$$



é contínua, ou seja, existe  $C_o > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u|^{p^+} dx \leq C_o \|u\|^{p^+}, \text{ para todo } u \in X. \quad (3.45)$$

Por  $(f_2)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $|t| < \delta$  implica

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{p^+-1}, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Por  $(f_o)$ , se  $|t| \geq \delta$  então

$$\delta^{\alpha^+-1} < \delta^{\alpha(x)-1} \leq |t|^{\alpha(x)-1},$$

e daí

$$\frac{|f(x, t)|}{|t|^{\alpha(x)-1}} \leq \frac{C_1}{|t|^{\alpha(x)-1}} + C_2 \leq \frac{C_1}{\delta^{\alpha^+-1}} + C_2 = C_\epsilon.$$

Logo, pelas hipóteses  $(f_o)$  e  $(f_2)$  temos

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{p^+-1} + C_\epsilon |t|^{\alpha(x)-1}, \text{ para } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

que integrando sobre  $\Omega$  implica

$$F(x, t) \leq \frac{\epsilon}{p^+} |t|^{p^+} + C_\epsilon |t|^{\alpha(x)}, \text{ para } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

Para  $\|u\| = s$ ,  $s > 0$  suficientemente pequeno, usando (3.46) temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{\epsilon}{p^+} \int_{\Omega} |u|^{p^+} dx - C_\epsilon \int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} dx \end{aligned} \quad (3.47)$$

Da imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega),$$

existe  $C_3 > 0$  tal que

$$\|u\|_{\alpha(x)} \leq C_3 \|u\| \leq s C_3 < 1. \quad (3.48)$$

Por (3.48) e pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} dx \leq \|u\|_{\alpha(x)}^{\alpha^-} \leq \|u\|^{\alpha^-}. \quad (3.49)$$

Usando (3.45) e (3.49) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{p^+} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} - \frac{\epsilon}{p^+} C_o^{p^+} \|u\|^{p^+} - C_\epsilon \|u\|^{\alpha^-} \\
&\geq \frac{C}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\epsilon C_o^{p^+}}{p^+} \|u\|^{p^+} - C_\epsilon \|u\|^{\alpha^-} \\
&\geq \left( \frac{C}{p^+} - \frac{\epsilon C_o^{p^+}}{p^+} \right) \|u\|^{p^+} - C_\epsilon \|u\|^{\alpha^-}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Para

$$0 < \epsilon < \frac{C}{2C_o^{p^+}},$$

por (3.50), temos

$$I(u) \geq \frac{C}{2p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^+} - C_\epsilon \|u\|^{\alpha^-}, \text{ para } \|u\| = s, \text{ s pequeno.} \tag{3.51}$$

Escolhendo

$$0 < s_o < \left( \frac{C}{2p^+ C_\epsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha^- - p^+}}$$

e

$$\delta = \frac{C}{2p^+} s_o^{p^+} - C_\epsilon s_o^{\alpha^-},$$

por (3.51) temos

$$I(u) \geq \delta > 0, \text{ para } \|u\| = s_o.$$

De  $(f_1)$ , para  $x \in \Omega$  e  $\tau \geq M$ , temos

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)} \tag{3.52}$$

Integrando (3.52) em  $\tau$  de  $M$  até  $t$ , obtemos

$$F(x, t) \geq C_4 |t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, t \geq M. \tag{3.53}$$

Por outro lado, se  $\tau < -M$ , então usando  $(f_1)$  obtemos

$$\frac{\theta}{\tau} \geq \frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)} \tag{3.54}$$

Integrando (3.54) em  $\tau$  de  $t$  até  $-M$ , obtemos

$$F(x, t) \geq C_5 |t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, t \leq -M. \tag{3.55}$$

Logo, segue de (3.53) e (3.55) que

$$F(x, t) \geq C_6 |t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, |t| \geq M. \tag{3.56}$$

Fixe  $u \in X \setminus \{0\}$  e  $t > 1$ . Por (3.56) e por um argumento similar para se obter os itens (3.41) e (3.42), temos

$$\begin{aligned} I(tu) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |t\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, tu) dx \\ &\leq t^{p^+} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - C_6 t^{\theta} \int_{\Omega} |u|^{\theta} dx - C_7. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por (3.57), usando a hipótese  $\theta > p^+$ , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(tu) = -\infty,$$

o que implica que existe  $t_o > 0$  tal que

$$\|t_o u\| > s \text{ e } I(t_o u) < 0.$$

Logo, o funcional  $I$  satisfaz às condições do Teorema do Passo da Montanha, possuindo portanto um ponto crítico não-trivial. ■

# Capítulo 4

## Problemas Elípticos em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo estudamos a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$(P_\lambda) \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$  é um parâmetro e  $p, q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis satisfazendo algumas condições de crescimento.

Estudaremos dois tipos de comportamento para a função  $q$  no infinito. No primeiro, supondo  $q$  constante no infinito, mostramos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > 0$ . No segundo, supondo  $q$  assintoticamente constante no infinito, mostramos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > \lambda_o > 0$ .

Para  $f, g \in L^{\infty}_+(\mathbb{R}^N)$ , diremos que  $f(x) \ll g(x)$ , q.s. em  $\mathbb{R}^N$  se

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} (g(x) - f(x)) > 0.$$

No que segue,  $R > 0$  é um número real suficientemente grande.

### 4.1 Hipóteses sobre as funções $p(x)$ e $q(x)$

Ao longo de todo este capítulo, assumiremos as seguintes hipóteses preliminares sobre as funções  $p(x)$  e  $q(x)$  :

$$(H_1) \quad p, q \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N),$$

$$(H_2) \quad p^-, q^- > 1 \text{ e } p^+ < q^- + 1,$$

$$(H_3) \quad p(x) \ll q(x) \ll p^*(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$(H_4) \quad p(x) \geq m, \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N \text{ e } p(x) = m, \text{ para todo } |x| \geq R.$$

## 4.2 Imersões Contínuas

Nesta seção mostraremos alguns resultados de imersão contínua em  $\mathbb{R}^N$ . Começamos com uma desigualdade de interpolação.

**Lema 4.1** *Seja  $h \in C(\mathbb{R}^N) \cap L_+^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que*

$$p(x) \leq q(x) \leq h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

*Então,*

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N) \subset L^{q(x)}(\mathbb{R}^N),$$

*e tal imersão é contínua.*

**Demonstração.** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , seja  $\alpha(x) = \alpha \in [0, 1]$  tal que

$$q(x) = (1 - \alpha)p(x) - \alpha h(x).$$

Seja  $u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N)$ . Então, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |u|^{q(x)} &= |u|^{(1-\alpha)p(x)} \cdot |u|^{\alpha h(x)} \\ &\leq (1 - \alpha)|u|^{p(x)} + \alpha|u|^{h(x)} \\ &\leq |u|^{p(x)} + |u|^{h(x)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Integrando a desigualdade (4.1), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{h(x)} dx, \tag{4.2}$$

logo

$$u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

portanto

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N) \subset L^{q(x)}(\mathbb{R}^N). \tag{4.3}$$

Segue imediatamente de (4.2) que a imersão dada (4.3) é contínua. ■

**Lema 4.2** *Se*

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } p(x) = m, \text{ para todo } |x| \geq R,$$

*então a imersão*

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$$

*é contínua.*

**Demonstração.** Seja  $B = B_R(0)$ . Pela Observação 2.1, a seguinte imersão

$$W^{1,p(x)}(B) \hookrightarrow L^{q(x)}(B) \quad (4.4)$$

é contínua. Como em (4.2) do Lema 4.1, para  $u \in L^m(B^c) \cap L^{m^*}(B^c)$  temos

$$\int_{B^c} |u|^{q(x)} dx \leq \int_{B^c} |u|^m dx + \int_{B^c} |u|^{m^*} dx. \quad (4.5)$$

Usando em (4.5) as imersões de Sobolev:

$$W^{1,m}(B^c) \hookrightarrow L^{m^*}(B^c) \hookrightarrow L^m(B^c),$$

obtemos

$$\int_{B^c} |u|^{q(x)} dx \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p(x)}(B^c)}^{m^*}. \quad (4.6)$$

Logo, a imersão

$$W^{1,p(x)}(B^c) \hookrightarrow L^{q(x)}(B^c) \quad (4.7)$$

é contínua. Portanto, usando (4.4) e (4.7) concluimos que a imersão

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua. ■

**Lema 4.3** *A hipótese ( $H_4$ ) implica que*

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,m}(\mathbb{R}^N),$$

*e que tal imersão é contínua.*

**Demonstração.** Seja  $B = B_R(0)$ . Para  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ , temos

$$|u|^m \leq (1 + |u|^{p(x)})\chi_B(x) + |u|^m \leq (1 - \chi_B)(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^N, \quad (4.8)$$

$$|\nabla u|^m \leq (1 + |\nabla u|^{p(x)})\chi_B(x) + |\nabla u|^m \leq (1 - \chi_B)(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.9)$$

Integrando (4.8) e (4.9) em  $\mathbb{R}^N$ , pela hipótese  $(H_4)$  obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx \leq |B| + \int_B |u|^{p(x)} dx + \int_{B^c} |u|^{p(x)} dx, \quad (4.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m dx \leq |B| + \int_B |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{B^c} |\nabla u|^{p(x)} dx. \quad (4.11)$$

Por (4.10) e (4.11), segue que

$$u, \nabla u \in L^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

Logo,  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ . Portanto,

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

Segue imediatamente de (4.10) e (4.11) que a aplicação identidade

$$i : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$$

é limitada, e portanto contínua.

### 4.3 A geometria do Passo Da Montanha

Nesta seção demonstraremos que o funcional de Enler-Lagrange associado ao problema  $(P_\lambda)$ , o qual é dado por

$$I_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_+^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx,$$

satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.

Observamos que, seguindo as mesmas idéias do Capítulo 3 (Seção 3.1), mostra-se que  $I_\lambda$  é de classe  $C^1(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$  com

$$I'_\lambda(u).v = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2} uv] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} uv dx,$$

para todos  $u, v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ .

**Lema 4.4** *O funcional  $I_\lambda$  satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.*

**Demonstração.** Seja  $\|u\| = r, r \geq 0$  suficientemente pequeno. Então, pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \geq \frac{1}{p^+} \left[ \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} + \|u\|_{p(x)}^{p^+} \right] \geq C_1 \|u\|^{p^+}. \quad (4.12)$$

Pelo Lema 4.2, a imersão

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)+1}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua, i.e., existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\|u\|_{q(x)+1} \leq C_2 \|u\| = C_2 r < 1.$$

Logo, novamente pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx \leq \frac{1}{q^+ + 1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)+1} dx \leq C_3 \|u\|_{q(x)+1}^{q^-+1} \leq C_4 \|u\|^{q^-+1}. \quad (4.13)$$

Desde que  $q^- + 1 > p^+$ , então por (4.12) e (4.13), temos

$$I_\lambda(u) \geq \delta > 0, \text{ para } \|u\| = r_o \quad (4.14)$$

com

$$0 < r_o < \left( \frac{C_1}{\lambda C_4} \right)^{\frac{1}{q^-+1-p^+}} \text{ e } \delta = C_1 r_o^{p^+} - \lambda C_4 r_o^{q^-+1}.$$

Fixe  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ . Para  $t > 1$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|\nabla t\phi|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|t\phi|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \leq t^{p^+} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|\nabla \phi|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|\phi|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \quad (4.15)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t\phi|^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx \geq t^{q^-+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{q(x)+1} dx. \quad (4.16)$$

Logo, por (4.15) e (4.16), segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_\lambda(t\phi) = -\infty. \quad (4.17)$$

Portanto, usando (4.14) e (4.17), e observando que  $I_\lambda(0) = 0$ , conclui-se que  $I_\lambda$  satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.

Pelo Lema 4.4 e pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma seqüência Palais-Smale  $\{u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$I_\lambda(u_n) \longrightarrow c_\lambda,$$



$$I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0,$$

onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\lambda \in C([0, 1], W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)) : \lambda(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\lambda(t)) \leq 0\}.$$

De agora em diante, denotaremos por  $I_\infty$  o funcional de Euler-Lagrange do seguinte problema

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_m u + u^{m-1} = \lambda u^s, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

o qual é dado por

$$I_\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|\nabla u|^m}{m} + \frac{|u|^m}{m} \right] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_+^{s+1}}{s+1} dx,$$

onde  $m < N$ ,  $s \in (m-1, m^*-1)$  e  $m^* = \frac{Nm}{N-m}$ .

Sabe-se que  $I_\infty$  é de classe  $C^1(W^{1,m}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$  e tal que

$$I'_\infty(u).v = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v + |u|^{m-2} uv] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{s-1} uv dx,$$

para todos  $u, v \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ .

**Lema 4.5** *Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência  $(PS)_d$  de  $I_\lambda$ . Então, existem uma subseqüência, ainda denotada por  $\{u_n\}$ , e  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  tais que*

- i)  $\{u_n\}$  é limitada com  $u_n \rightharpoonup u$ ;
- ii)  $u_n \longrightarrow u$  em  $W_{loc}^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  e em  $W_{loc}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ ;
- iii)  $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ , q.s. em  $\mathbb{R}^N$ ;
- iv)  $u_n \longrightarrow u$  em  $L_{loc}^m(\mathbb{R}^N)$ ,  $L_{loc}^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ ,  $L_{loc}^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$  e em  $L_{loc}^{q(x)+1}(\mathbb{R}^N)$ .

### Demonstração.

i) Note que, sendo  $p^+ < q^- + 1$  e  $q^- \leq q(x)$ , temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q^- + 1} I'_\lambda(u_n).u_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q^- + 1} \right) [|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}] dx \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{q^- + 1} - \frac{1}{q(x) + 1} \right) |u_n|^{q(x)+1} dx \\ &\geq \left( \frac{1}{p^+} - \frac{1}{q^- + 1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}] dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por outro lado, sendo  $\{u_n\}$   $(PS)_d$ , temos

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q^- + 1} I'_\lambda(u_n).u_n \leq C_1 + C_2 \|u_n\|. \quad (4.19)$$

Pela Proposição 1.6, (18) - (19) e após consideração sobre as normas  $\|\nabla u_n\|_{p(x)}$  e  $\|u_n\|_{p(x)}$ , obtemos

$$\|u_n\| \leq C_3 + C_4 \|u_n\|^{1/p^-}.$$

Logo,  $\{u_n\}$  é limitada. Portanto, existe  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

ii) Seja  $B = B_R(0)$ . Fixe  $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que  $0 \leq \phi \leq 1$  e

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geq 2R, \\ 1, & \text{se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Denotando

$$P_n(x) = \langle |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_B P_n dx &= \int_B \phi P_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi P_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla u dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \phi \langle |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)} dx &= I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u_n \nabla u_n \nabla \phi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{p(x)} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{q(x)+1} dx \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla u dx &= I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u \nabla u_n \nabla \phi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{p(x)-2} u_n u dx \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{q(x)-1} u_n u dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo (4.21) e (4.22) em (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} \int_B P_n dx &\leq I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u_n) - I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u) + C_1 \int_{B_{2R}} |\nabla u_n|^{p(x)-1} |u_n - u| dx \\ &\quad + C_2 \int_{B_{2R}} |u_n|^{p(x)-1} |u_n - u| dx + C_3 \int_{B_{2R}} |u_n|^{q(x)} |u_n - u| dx \\ &\quad + C_4 \int_{B_{2R}} \langle |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

com  $\text{supp } \phi \subset B_{2R}$ .

Temos:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I'_\lambda(u_n) \cdot (\phi u) = 0$ .
- $\int_{B_{2R}} \langle |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle dx = \langle J'(u), u_n - u \rangle \longrightarrow 0$ , onde

$$J(u) = \int_{B_{2R}} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

- Usando a desigualdade de Hölder e as imersões compactas

$$W^{1,p(x)}(B_{2R}) \hookrightarrow L^{p(x)}(B_{2R}), L^{q(x)+1}(B_{2R}),$$

obtemos

$$\int_{B_{2R}} |\nabla u_n|^{p(x)-1} |u_n - u| dx \leq C \|f_n\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{p(x)}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

$$\int_{B_{2R}} |u_n|^{p(x)-1} |u_n - u| dx \leq C \|g_n\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{p(x)}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

$$\int_{B_{2R}} |u_n|^{q(x)} |u_n - u| dx \leq C' \|h_n\|_{L^{\frac{q(x)+1}{q(x)}}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{q(x)+1}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

onde as seqüências

$$f_n = |\nabla u_n|^{p(x)-1}, g_n = |u_n|^{p(x)-1} \text{ e } h_n = |u_n|^{q(x)}$$

são limitadas, pois  $\{u_n\}$  é limitada. Logo, por (4.23), segue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_B P_n dx \leq 0. \quad (4.24)$$

Segue de (4.24) e da convergência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p(x)}(B)$$

que o operador  $L : W^{1,p(x)}(B) \longrightarrow (W^{1,p(x)}(B))^*$  definido por

$$(L(u), v) = \int_B |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

é do tipo  $(S_+)$ . Daí,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,p(x)}(B).$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W_{loc}^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

portanto, pelo Lema 4.3,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W_{loc}^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

iii) Segue de ii) e da Proposição 1.9.

iv) Segue de ii), das hipóteses sobre  $p$  e  $q$  e do Lema 4.2. ■

## 4.4 Existência de Solução

Nesta seção discutiremos a existência de solução fraca para o problema  $(P_\lambda)$ . Como estudaremos dois tipos de comportamento no infinito para a função  $q$ , dividiremos esta seção em duas subseções.

Primeiramente, explicitemos o que seja uma solução fraca para o problema  $(P_\lambda)$ .

**Definição 4.1** Dizemos que  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  é uma solução fraca do problema  $(P_\lambda)$  se

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi + |u|^{p(x)-2} u \phi] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} u \phi dx,$$

para todo  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

### 4.4.1 Primeiro Caso: Igualdade no Infinito

Nesta subseção, supondo  $q$  constante no infinito, mostraremos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > 0$ .

O próximo Lema estabelece uma importante desigualdade envolvendo o nível minimax  $c_\infty$  de  $I_\infty$ .

**Lema 4.6** Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência  $(PS)_d$  de  $I_\lambda$  tal que  $u_n \rightharpoonup 0$  em  $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  e suponha que

$$q(x) \leq s \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N \text{ e } q(x) \equiv s, \text{ para todo } |x| \geq R. \quad (Q_1)$$

Então,  $c_\infty \leq d$ .

**Demonstração.** Afirmamos que

$$I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) \longrightarrow 0 \text{ e } I_\infty(u_n) \longrightarrow d.$$

De fato, usando as hipóteses  $(H_4)$  e  $(Q_1)$  temos

$$\begin{aligned}
I'_\lambda(u_n) \cdot (u_n) - I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) &= \int_{|x| \leq R} [|\nabla u_n|^{p(x)} - |\nabla u_n|^m] dx \\
&+ \int_{|x| \leq R} [|u_n|^{p(x)} - |u_n|^m] dx \\
&+ \lambda \int_{|x| \leq R} [|\nabla u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Pelo Lema 4.5 cada termo do lado direito de (4.25) é  $o_n(1)$ , e sendo  $\{u_n\}$   $(PS)_d$  e limitada, temos

$$I'_\lambda(u_n) \cdot (u_n) \leq \|I'_\lambda(u_n)\| \|u_n\| \longrightarrow 0,$$

portanto, usando (4.25) obtemos

$$I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) \longrightarrow 0.$$

Analogamente, desde que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) - I_\infty(u_n) &= \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla u_n|^m}{m} \right] dx \\
&+ \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|u_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|u_n|^m}{m} \right] dx \\
&+ \lambda \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla u_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|u_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1} \right] dx,
\end{aligned}$$

temos  $I_\infty(u_n) \longrightarrow d$ , pois  $I_\lambda(u_n) \longrightarrow d$ .

Fixemos  $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ . Sendo  $s+1 > m$ , a função  $f(t) = I_\infty(tv)$ ,  $t > 0$ , possui um único ponto de máximo. Então, fixemos  $t_n > 0$  tal que

$$I_\infty(t_n u_n) = \max_{t>0} I_\infty(tu_n). \tag{4.26}$$

Afirmação:  $t_n \longrightarrow 1$ .

De fato, a menos de subsequência, temos

$$\|u_n\| \longrightarrow a \text{ e } \|u_n\|_{s+1} \longrightarrow b \text{ em } \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Por outro lado, temos

$$I_\infty(u_n) = \frac{1}{m} \|u_n\|^m - \frac{\lambda}{s+1} \|u_n\|_{s+1}^{s+1} = d + o_n(1) \tag{4.28}$$

e

$$I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) = \|u_n\|^m - \lambda \|u_n\|_{s+1}^{s+1} = o_n(1) \quad (4.29)$$

Usando (4.27) e passando ao limite em (4.28) e (4.29), obtemos

$$d = a^m \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{s+1} \right). \quad (4.30)$$

Segue de (4.26) que

$$\frac{d}{dt} I_\infty(t_n u_n) = 0,$$

o que implica

$$\|u_n\|_{s+1}^{s+1} = \frac{t_n^{m-1-s}}{\lambda} \|u_n\|^m. \quad (4.31)$$

Logo, de (4.27) e (4.31) conclui-se que  $\{t_n\}$  é convergente.

Agora, substituindo (4.31) em (4.28) resulta em

$$I_\infty(u_n) = \|u_n\|^m \left( \frac{1}{m} - \frac{t_n^{m-1-s}}{s+1} \right). \quad (4.32)$$

Finalmente, passando ao limite em (4.32) e usando (4.27)-(4.30), obtemos  $t_n \rightarrow 1$ .

Pela definição de  $c_\infty$ , temos

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(t_n u_n) = I_\infty(u_n) + I_\infty(t_n u_n) - I_\infty(u_n) \\ &\leq d + o_n(1) + \frac{t_n^m - 1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^m + |u_n|^m] dx \\ &\quad + \frac{\lambda(1 - t_n^{s+1})}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{s+1} dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Passando ao limite em (4.33) e tendo em vista que a seqüência  $\{u_n\}$  é limitada em  $W_{loc}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ ,  $L_{loc}^{s+1}(\mathbb{R}^N)$  e que  $t_n \rightarrow 1$ , concluímos que  $c_\infty \leq d$ .  $\blacksquare$

**Lema 4.7** *Se a hipótese  $(Q_1)$  é válida, então  $c_\lambda < c_\infty$ .*

**Demonstração.** Fixe uma ground state solution radialmente simétrica positiva  $\omega$  do problema limite (ver [3])

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_m \omega + \omega^{m-1} = \lambda \omega^s, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \omega \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sejam  $x_n = (0, 0, \dots, n)$ ,  $\omega_n = \omega(x - x_n)$  e  $t_n$  tais que

$$I_\lambda(t_n \omega_n) = \max_{t>0} I_\lambda(t \omega_n).$$

Afirmação:  $\{t_n\}$  é limitada.

De fato, note que, sendo  $c_\infty = I_\infty(\omega_n)$  e  $I'_\infty(\omega_n) = 0$ , temos

$$c_\infty = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \omega_n^m| + \omega_n^m] dx - \frac{\lambda}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} \omega_n^{s+1} dx, \quad (4.34)$$

$$c_o := \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \omega_n|^m + \omega_n^m] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \omega_n^{s+1} dx. \quad (4.35)$$

Assim, usando (4.34) e (4.35), temos

$$c_o = \left( \frac{s+1-m}{m(s+1)} \right).$$

Pela hipótese ( $H_4$ ):

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}] dx = o_n(1) + c_o, \quad (4.36)$$

onde

$$o_n(1) = \int_{|x| \leq R} [|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}] dx.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_\lambda(t\omega_n) &= I'_\lambda(t\omega_n) \cdot \omega_n, \\ \frac{d}{dt} I_\lambda(t_n \omega_n) &= 0, \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} t_n^{p(x)-1} [|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} t_n^{q(x)} \omega_n^{q(x)+1} dx. \quad (4.37)$$

Suponha que  $t_n \geq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Daí, usando (4.36) e (4.37), obtemos

$$t_n^{p^+-1} [o_n(1) + c_o] \geq \lambda t_n^{q^-} [o_n(1) + c_o]. \quad (4.38)$$

Logo, usando a hipótese  $q^- > p^+ - 1$  e (4.38), concluímos que  $\{t_n\}$  é limitada.

Pela definição de  $c_\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} c_\lambda &\leq I_\lambda(t_n \omega_n) = I_\infty(t_n \omega_n) + I_\lambda(t_n \omega_n) - I_\infty(t_n \omega_n) \\ &\leq c_\infty + \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx \\ &\quad + \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx \\ &\quad + \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n \omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1} \right] dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Agora, fixemos  $n$  suficientemente grande tal que

$$|\nabla t_n \omega_n| < 1, |t_n \omega_n| < 1 \text{ em } B_R(0).$$

Sendo a função  $f(t) = t^{-1}a^t$ ,  $0 < a < 1$ , decrescente em  $(0, \infty)$ , então, para tal  $n$ , os termos

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx, \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx, \\ & \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n \omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1} \right] dx \end{aligned}$$

são negativos. Portanto, por (4.39), tem-se  $c_\lambda < c_\infty$ . ■

**Teorema 4.8** *Se a hipótese  $(Q_1)$  é válida, então o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > 0$ .*

**Demonstração.** Para cada  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , a seqüência  $(PS)_{c_\lambda} \{u_n\}$  satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \phi + |u_n|^{p(x)-2} u_n \phi] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)-1} u_n \phi dx + o_n(1). \quad (4.40)$$

Pelo Lema 4.5, existe  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W_{loc}^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Por continuidade, temos

$$\int_{supp \phi} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx, \quad (4.41)$$

$$\int_{supp \phi} |u_n|^{p(x)-2} u_n \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |u|^{p(x)-2} u \phi dx, \quad (4.42)$$

$$\int_{supp \phi} |u_n|^{q(x)-1} u_n \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |u|^{q(x)-1} u \phi dx. \quad (4.43)$$

Passando ao limite (4.40) e usando (4.41) - (4.43), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi + |u|^{p(x)-2} u \phi] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} u \phi dx,$$

para todo  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , o que mostra que  $u$  é solução fraca de  $(P_\lambda)$ . Logo, pelos Lemas (4.6) e (4.7), concluímos que  $u > 0$ . ■



#### 4.4.2 Segundo Caso: Assintoticamente Constante no Infinito

Nesta subseção, supondo  $q$  assintoticamente constante no infinito, mostraremos que o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para todo  $\lambda > \lambda_o > 0$ .

O próximo resultado estabelece uma importante desigualdade envolvendo o nível minimax  $c_\infty$  do funcional  $I_\infty$ .

**Lema 4.9** *Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência  $(PS)_c$  de  $I_\lambda$  tal que  $u_n \rightarrow 0$  em  $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  e suponha que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = s. \quad (Q_2)$$

Então,  $c_\infty \leq c$ .

**Demonstração.** Afirmamos que

$$I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) \rightarrow 0 \text{ e } I_\infty(u_n) \rightarrow c.$$

De fato, usando a hipótese  $(H_4)$  temos

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_n) \cdot (u_n) - I'_\infty(u_n) \cdot (u_n) &= \int_{|x| \leq R} [|\nabla u_n|^{p(x)} - |\nabla u_n|^m] dx \\ &+ \int_{|x| \leq R} [|u_n|^{p(x)} - |u_n|^m] dx \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pelo Lema 4.5, os dois primeiros termos do lado direito de (4.44) são  $o_n(1)$ . Quanto ao terceiro, note que podemos escrevê-lo como

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx = o_n(1) + \int_{|x| \geq R} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx, \quad (4.45)$$

onde, pelo Lema 4.5,

$$o_n(1) = \int_{|x| \leq R} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx.$$

Fixemos  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $|x| \geq R$ , pelo Teorema do Valor Médio temos

$$||u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}| = |u_n|^\theta \log |u_n| |q(x) - s|, \quad (4.46)$$

com  $\theta(x, n) = \theta \in (q(x) + 1, s + 1)$ . Agora, escolhamos  $\xi > 0$  suficientemente pequeno de sorte que

$$m + \xi < \theta < m^* - \xi. \quad (4.47)$$

Note que

$$|u_n|^\theta \log |u_n| \leq |u_n|^{\theta-\xi} + |u_n|^{\theta+\xi}. \quad (4.48)$$

Logo, usando (4.46) - (4.48) e um argumento de interpolação, obtemos

$$\int_{|x| \geq R} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx \leq C \int_{|x| \geq R} [|u_n|^m + |u_n|^{m^*}] |q(x) - s| dx.$$

Usando agora a condição  $(Q_2)$ , temos

$$\int_{|x| \geq R} [|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}] dx \leq o_R(1) \int_{|x| \geq R} [|u_n|^m + |u_n|^{m^*}] dx. \quad (4.49)$$

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos escolher  $R > 0$  tal que

$$o_R(1) \int_{|x| \geq R} [|u_n|^m + |u_n|^{m^*}] dx < \epsilon/2. \quad (4.50)$$

Logo, por (4.45) - (4.50), temos

$$|I'_\lambda(u_n).(u_n) - I'_\infty(u_n).(u_n)| < o_n(1) + \epsilon/2,$$

portanto  $I'_\infty(u_n).(u_n) \longrightarrow 0$ . De maneira análoga, mostra-se que  $I_\infty(u_n) \longrightarrow c$ .

Fixe  $t_n$  tal que

$$I_\infty(t_n u_n) = \max_{t > 0} I_\infty(t u_n).$$

Como foi mostrado no Lema 4.6,  $t_n \longrightarrow 1$ . Assim, pela definição de  $c_\infty$ , temos

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(t_n u_n) = I_\infty(u_n) + I_\infty(t_n u_n) - I_\infty(u_n) \\ &\leq c + o_n(1) + \frac{t_n^m - 1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^m + |u_n|^m] dx \\ &\quad + \frac{\lambda(1 - t_n^{s+1})}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{s+1} dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Passando ao limite em (4.51) e tendo em vista que a seqüência  $\{u_n\}$  é limitada em  $W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ ,  $L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$  e que  $t_n \longrightarrow 1$ , concluímos que  $c_\infty \leq c$ .  $\blacksquare$

**Lema 4.10** *Suponha que a condição  $(Q_2)$  é válida e que  $q(x) \leq s$ , q.s. em  $\mathbb{R}^N$ . Então, existe  $\lambda_o > 0$  tal que  $c_\lambda < c_\infty$ , para  $\lambda > \lambda_o$ .*

**Demonstração.** Seja  $v$  uma ground state solution radialmente simétrica positiva do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_m v + v^{m-1} = v^s, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Assim, após alguns cálculos, constata-se que a função  $\omega = \lambda^{(m-1)-s}v$  é ground state solution do problema

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_m \omega + \omega^{m-1} = \lambda \omega^s, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \omega \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sendo  $s > m - 1$ , podemos escolher  $\lambda_o > 0$  suficientemente grande tal que

$$|\omega|_\infty, |\nabla \omega|_\infty < 1.$$

Fixemos  $t_n$  tal que

$$I_\lambda(t_n \omega_n) = \max_{t>0} I_\lambda(t \omega_n).$$

Usando a definição de  $c_\lambda$  e a hipótese  $(H_4)$ , temos que

$$\begin{aligned} c_\lambda &\leq I_\lambda(t_n \omega_n) = I_\infty(\omega_n) + I_\lambda(t_n \omega_n) - I_\infty(\omega_n) \\ &\leq c_\infty \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - |t_n \nabla \omega_n|^m \right] dx \\ &\quad + \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n \omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1} \right] dx. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Fixe  $n$  suficientemente grande tal que

$$|t_n \omega_n|, |\nabla t_n \omega_n| < 1 \text{ em } B_R(0).$$

Agora, observe que, sendo a função  $f(t) = t^{-1}a^t$ ,  $0 < a < 1$ , decrescente em  $(0, +\infty)$ , temos que, para tal  $n$ , os termos

$$\begin{aligned} &\int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|\nabla t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx, \int_{|x| \leq R} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n \omega_n|^m}{m} \right] dx, \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{|t_n \omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n \omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1} \right] dx \end{aligned}$$

são negativos. Portanto, por (4.52), tem-se  $c_\lambda < c_\infty$ . ■

**Teorema 4.11** *Suponha que a condição  $(Q_2)$  é válida e que  $q(x) \leq s$ , q.s. em  $\mathbb{R}^N$ . Então, o problema  $(P_\lambda)$  tem uma solução para  $\lambda > \lambda_o$ .*

**Demonstração.** Para cada  $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ , a seqüência  $(PS)_{c_\lambda} \{u_n\}$  satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \phi + |u_n|^{p(x)-2} u_n \phi] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)-1} u_n \phi dx + o_n(1). \quad (4.53)$$

Pelo Lema 4.5, existe  $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W_{loc}^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Por continuidade, temos

$$\int_{supp \phi} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx, \quad (4.54)$$

$$\int_{supp \phi} |u_n|^{p(x)-2} u_n \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |u|^{p(x)-2} u \phi dx, \quad (4.55)$$

$$\int_{supp \phi} |u_n|^{q(x)-1} u_n \phi dx \longrightarrow \int_{supp \phi} |u|^{q(x)-1} u \phi dx. \quad (4.56)$$

Passando ao limite (4.53) e usando (4.54) - (4.56), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi + |u|^{p(x)-2} u \phi] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} u \phi dx,$$

para todo  $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ , o que mostra que  $u$  é solução fraca de  $(P_\lambda)$ . Logo, se  $\lambda > \lambda_o$ , então pelos Lemas (4.9) e (4.10), concluímos que  $u > 0$ . ■

# Apêndice A

## Desigualdades

Neste Apêndice, demonstraremos duas desigualdades que foram utilizadas no Capítulo 3 (Seção 3.1). Adaptamos a demonstração de [20] (pág. 78).

**Lema A.1** *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^N$ . Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p} |x - y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ (p-1) \frac{|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

**Demonstração.** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^N$ . Podemos supor  $|x| = 1$  e  $|y| \leq 1$ , pois do contrário, supondo  $|x| \geq |y|$ , consideraríamos

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|} \text{ e } \tilde{y} = \frac{y}{|x|}.$$

Escolhendo uma base conveniente em  $\mathbb{R}^N$ , podemos supor

$$x = (1, 0, \dots, 0) \text{ e } y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0).$$

i)  $1 < p < 2$ . Neste caso, a desigualdade requerida é equivalente à

$$g(y_1, y_2) = \left\{ 1 - y_1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C$$

ou

$$g(y_1, y_2) = \left\{ \left( 1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Se  $0 \leq y_1 \leq 1$ , então

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} &\geq 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} = (1 - y_1)\left(1 + \frac{1}{|y_1|^{2-p}}\right) + y_1 - \frac{1}{|y_1|^{2-p}} \\ &\geq (1 - y_1)p + y_1 - 1 = (p - 1)(1 - y_1). \end{aligned}$$

Se  $y_1 < 0$ , então

$$1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p - 1)(1 - y_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &\geq \left\{ (1 - y_1)^2(p - 1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &\geq \left\{ (1 - y_1)^2(p - 1) + (p - 1)y_2^2 \right\} \frac{1}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &= (p - 1)\{(1 - y_1)^2 + y_2^2\} \frac{1}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &= (p - 1). \end{aligned}$$

ii)  $p \geq 2$ . Substituindo  $t = |y|$  e  $s = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}$  na expressão

$$\frac{\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle}{|x - y|^p},$$

temos

$$h(t, s) = \frac{1 - (t + t^{p-1})s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}}. \quad (\text{A.1})$$

Mostraremos que a função  $h$  é limitada inferiormente.

Fixando  $t$ , temos que se

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0,$$

então

$$1 - (t + t^{p-1})s + t^p = \frac{1}{p}(t^{p-2} + 1)(1 - 2ts + t^2). \quad (\text{A.2})$$

Logo, se  $s_o$  é um ponto crítico de  $h$ , substituindo (A.2) em (A.1) temos

$$\begin{aligned} h(t, s_o) &= \frac{t^{p-2} + 1}{p(1 - 2ts_o + t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &\geq \frac{t^{p-2} + 1}{p(t + 1)^{p-2}} \\ &\geq \frac{1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^{p-2} + 1}{(t + 1)^{p-2}} \\ &= \frac{2^{3-p}}{p}. \end{aligned}$$

■

# Apêndice B

## O Teorema de Minty-Browder para Operadores Contínuos

Neste apêndice demonstraremos o Teorema de Minty-Browder, um dos resultados básicos na teoria dos operadores monótonos. Faremos a demonstração para operadores contínuos, embora tal teorema seja válido para operadores mais gerais (ver [13]). Para uma outra demonstração sugerimos a referência [6] (pág. 117).

No que segue,  $X$  é um espaço de Banach reflexivo e  $X^*$ , seu dual.

**Definição B.1** *Um operador  $T : X \longrightarrow X^*$  é dito ser monótono se*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \text{ para todos } x, y \in X.$$

**Definição B.2** *Um operador  $T : X \longrightarrow X^*$  é dito ser coercivo se*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty.$$

**Teorema B.1 (Minty-Browder)** *Sejam  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $T : X \longrightarrow X^*$  um operador contínuo monótono e coercivo. Então,  $T$  é sobrejetivo.*

**Demonstração.** Dividiremos a demonstração em dois casos:

- (a)  $X$  tem dimensão finita;
  - (b)  $X$  tem dimensão infinita.
- (a). Suponha inicialmente que  $X = X^* = \mathbb{R}^N$ . Basta mostrar que  $0 \in \text{Im}(T)$ , pois se

$y \in \mathbb{R}^N, y \neq 0$ , o operador translação  $T_y = T - y$  satisfaz às hipóteses do Teorema e  $0 \in \text{Im}(T_y)$  se, e somente se,  $y \in \text{Im}(T)$ . Sendo  $T$  coercivo existe  $r > 0$  tal que

$$\langle T(x), x \rangle > 0, \text{ para } |x| = r, \quad (\text{B.1})$$

onde  $|\cdot|$  é a norma em  $\mathbb{R}^N$ .

**Afirmação:** o operador

$$S = I_d - T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

tem um ponto fixo  $x_o \in B(0, r)$ , o que implica  $T(x_o) = 0$ . Para demonstrar a afirmação vamos usar o seguinte corolário do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:

"Uma aplicação contínua  $S : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}^N$  tem um ponto fixo se

$$S(x) \neq \lambda x, \text{ para } |x| = r \text{ e } \lambda \geq 1."$$

De fato, suponha que existem  $x_o \in B(0, r)$  e  $\lambda_o \geq 1$  tais que

$$S(x_o) = \lambda_o x_o.$$

Logo, usando (B.1) temos

$$(x_o, x_o) \leq (\lambda_o x_o, x_o) = (S(x_o), x_o) = (x_o, x_o) - (T(x_o), x_o) < (x_o, x_o),$$

uma contradição. Isto prova a afirmação.

Se  $X \neq \mathbb{R}^N$ , então existe um isomorfismo

$$i : \mathbb{R}^N \longrightarrow X$$

tal que

$$C_1|x| \leq \|i(x)\| \leq C_2|x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{B.2})$$

Considere o operador

$$L = i^* \circ T \circ i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

onde  $i^*$  é o adjunto de  $i$ . Note que o operador  $L$  é

- contínuo, por ser composição de aplicações contínuas.
- coercivo, pois usando a coercividade de  $T$  e (B.2) tem-se

$$\frac{\langle L(x), x \rangle}{|x|} = \frac{\langle (i^* \circ T \circ i)(x), x \rangle}{|x|} = \frac{\langle T(i(x)), i(x) \rangle}{|x|} \longrightarrow +\infty,$$



quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

• monótono, pois usando a monotonicidade de  $T$  temos

$$\begin{aligned} \langle L(x) - L(y), x - y \rangle &= \langle (i^* \circ T \circ i)(x) - (i^* \circ T \circ i)(y), x - y \rangle \\ &= \langle T(i(x)) - T(i(y)), i(x) - i(y) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $L$  é sobrejetivo, e portanto  $T$  também o será. Mostramos, assim, o item (a).

(b). Seja  $\mathcal{F}$  a coleção de todos os subespaços  $F$  de dimensão finita de  $X$ . Sejam  $i_F : F \rightarrow X$  o operador de inclusão e  $i^* : X^* \rightarrow F^*$ , seu adjunto. Considere o operador

$$T_F = i^* \circ T \circ i : F \rightarrow F^*.$$

Observe que  $T_F$  satisfaz todas as hipóteses do Teorema C.1. Logo, pelo item (a), existe  $x_F \in F$  tal que

$$T_F(x_F) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Usando a coercividade de  $T$  e (B.3), temos que existe uma constante  $M > 0$  tal

$$\|x_F\| \leq M, \text{ para todo } F \in \mathcal{F}. \quad (\text{B.4})$$

Agora, para cada  $F_o \in \mathcal{F}$ , defina o conjunto

$$V_{F_o} = \text{fecho fraco de } \bigcup_{F \supset F_o} \{x_F\}.$$

Sendo  $X$  reflexivo, então por (B.4) e pelo Teorema III.16 de [5], temos que a bola  $\overline{B(0, M)}$  é fracamente compacta. Logo,  $V_{F_o}$  é fracamente compacto.

Agora, afirmamos que a família  $\{V_{F_o} : F_o \in \mathcal{F}\}$  tem a propriedade da interseção finita. De fato, sejam

$$F_1, F_2, \dots, F_p \in \mathcal{F},$$

e considere o subespaço

$$F_o = \text{span}\{F_1, F_2, \dots, F_p\}.$$

Assim,  $F_o \in \mathcal{F}$ . Seja  $x_{F_o} \in F_o$  tal que  $T_{F_o}(x_{F_o}) = 0$ . Desde que

$$F_j \subset F_o, j = 1, \dots, p,$$

então

$$x_{F_o} \in V_{F_j}, j = 1, \dots, p.$$

Donde,

$$x_{F_o} \in \bigcap_{i=j}^p V_{F_j}.$$

Logo, sendo  $\{V_{F_o} : F_o \in \mathcal{F}\}$  uma família de compactos com a propriedade da interseção finita, existe  $x_o \in X$  tal que

$$x_o \in \bigcap_{F_o \in \mathcal{F}} V_{F_o}.$$

Mostraremos que  $T(x_o) = 0$ .

De fato, dado  $y \in X$ , seja  $F_o \in \mathcal{F}$  tal que  $y \in F_o$ . Assim, para  $F \supset F_o$ , temos que

$$\langle T(y) - T(x_F), y - x_F \rangle \geq 0.$$

Daí, por (B.3) segue que

$$\langle T(y), y - x_F \rangle \geq 0, \text{ para } F_o \subset F.$$

Desde que  $x_o \in V_{F_o}$ , existe  $\{F_n\} \in \mathcal{F}$  tal que

$$F_o \subset F_n \text{ e } x_{F_n} \rightarrow x_o.$$

Logo,

$$\langle T(y), y - x_o \rangle \geq 0. \tag{B.5}$$

Fazendo  $y = x_o + tz$ ,  $z \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$ , em (B.5) temos

$$\langle T(x_o + tz), z \rangle \geq 0, \text{ se } t \geq 0 \tag{B.6}$$

e

$$\langle T(x_o + tz), z \rangle \leq 0, \text{ se } t \leq 0. \tag{B.7}$$

Assim, se  $t \rightarrow 0^+$ , segue de (B.6) que

$$\langle T(x_o), z \rangle \geq 0, \text{ para todo } z \in X. \tag{B.8}$$

Do mesmo modo, se  $t \rightarrow 0^-$ , então usando (B.7) obtemos

$$\langle T(x_o), z \rangle \leq 0, \text{ para todo } z \in X. \tag{B.9}$$

Portanto, usando (B.8) e (B.9), concluímos que  $T(x_o) = 0$ . ■

# Apêndice C

## Teorema do Passo da Montanha

Neste Apêndice, através do Princípio Variacional de Ekeland, demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz. Este Teorema é um dos mais importantes da Análise Funcional não Linear, sendo de grande utilidade quando se estuda certos tipos de problemas elípticos. Seguimos, com poucas alterações, a demonstração encontrada em [17]. Para uma outra demonstração, usando lema de Deformação em vez do Princípio Variacional de Ekeland, sugerimos as referências [21] e [25].

Lembramos que, se  $X$  é um espaço topológico, um funcional  $\Phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  é dito ser semicontínuo inferiormente (s.c.i.) se o conjunto

$$[\Phi \leq \lambda] = \{x \in X : \Phi(x) \leq \lambda\}$$

for fechado, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

O próximo resultado é conhecido como o **Princípio Variacional de Ekeland**.

**Teorema C.1** *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  um funcional s.c.i., limitado inferiormente e tal que  $\Phi \not\equiv +\infty$ . Então, dados  $\epsilon > 0$  e  $u \in M$  tais que*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \epsilon,$$

*existe  $v \in M$  com*

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \text{ e } d(u, v) \leq \epsilon. \tag{C.1}$$

*Além disso, para cada  $w \in M$ ,  $w \neq v$ , tem-se*

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(v, w). \tag{C.2}$$

**Demonstração.** Verifica-se facilmente que a seguinte relação

$$w \leq v \Leftrightarrow \Phi(w) + \epsilon d(v, w) \leq \Phi(v) \quad (\text{C.3})$$

define uma ordem em  $M$ .

Vamos construir indutivamente uma seqüência em  $\{u_n\}$  em  $M$  da seguinte maneira: começamos com  $u_0 = u$  e, supondo conhecido  $u_n$ , definimos o conjunto

$$S_n = \{w \in M : w \leq u_n\}.$$

Agora, escolhemos  $u_{n+1}$  tal que

$$\Phi(u_n) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

Observe que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $S_{n+1} \subset S_n$ .

De fato, se  $w \in S_{n+1}$ , então  $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

- $S_n$  é fechado.

De fato, seja  $\{w_j\} \subset S_n$  tal que

$$w_j \longrightarrow w \in M.$$

Desde que  $w_j \leq u_n$ , temos

$$\Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w_j). \quad (\text{C.4})$$

Sendo  $\Phi$  s.c.i. e  $d$  contínua, os conjuntos

$$A = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) \leq 2\Phi(u_n)\},$$

$$B = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) + 2\epsilon d(u_n, w_j) \leq 0\}$$

são fechados. Logo, o conjunto

$$A \cup B = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w_j)\}$$

é fechado. Passando ao limite de  $j \longrightarrow +\infty$  em (C.4) obtemos

$$\Phi(w) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w),$$

o que implica  $w \leq u_n$ , portanto  $w \in S_n$ .

Seja  $w \in S_{n+1}$ . Então,  $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ , e daí

$$\epsilon d(w, u_n) \leq \phi(u_n) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n}.$$

Logo, se  $v \in S_{n+1}$ , então

$$d(w, v) \leq d(w, u_n) - d(v, u_n) \leq \frac{2}{n\epsilon} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\text{diam } S_{n+1} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

i.e.,

$$\text{diam } S_n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \quad (\text{C.5})$$

Desde que  $(S_n) \subset M$  é uma seqüência decrescente de conjuntos fechados verificando (C.5) e  $M$  é completo, temos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{v\}, \quad (\text{C.6})$$

para algum  $v \in M$ . Em particular,  $v \in S_o$ , i.e.,  $v \leq u_o = u$ . Logo,

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, w) \leq \Phi(u),$$

$$d(u, v) \leq \epsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(v)) \leq \epsilon^{-1}(\inf_M \Phi + \epsilon - \inf_M \Phi) = 1,$$

com isto obtemos (C.1).

Para obter (C.2), por (C.3) basta mostrar que  $w \leq v$  implica  $w = v$ . Então, se  $w \leq v$ , temos

$$w \leq u_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

pois  $v \in S_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, por (C.6), concluimos que  $w = v$ . ■

**Observação C.1** *Se usarmos a métrica  $\lambda d$ , com  $\lambda > 0$ , as conclusões (C.1) e (C.2) podem ser substituídas, respectivamente, por*

$$d(u, v) \leq 1/\lambda,$$

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon \lambda d(v, w). \quad (\text{C.7})$$

**Teorema C.2** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional diferenciável e limitado inferiormente. Então, para cada  $\epsilon > 0$  e cada  $u \in X$  tais que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \epsilon, \quad (\text{C.8})$$

*existe  $v \in X$  tal que*

$$\varphi(v) \leq \varphi(u), \quad (\text{C.9})$$

$$\|u - v\| \leq \epsilon^{1/2}, \quad (\text{C.10})$$

$$\|\varphi'(v)\| \leq \epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.11})$$

**Demonstração.** Usando a Observação C.1 com  $\lambda = \epsilon^{-1/2}$  e fazendo  $X = M$  e  $\varphi = \Phi$  no Teorema C.1, temos que dados  $\epsilon > 0$  e  $u \in X$  satisfazendo (C.8), existe  $v \in X$  tal que valem (C.9) e (C.10), e além disso tem-se

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \epsilon^{1/2}\|v - w\|, \quad (\text{C.12})$$

para todo  $w \in X$ ,  $w \neq v$ .

Fazendo  $w = v + th$ , para  $t \neq 0$  e  $h \in X$ , com  $\|h\|=1$ , por (C.12) temos

$$\frac{\varphi(v + th) - \varphi(v)}{|t|} \geq -\epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.13})$$

Por (C.13) temos

- se  $t \rightarrow 0^+$ , então

$$\langle \varphi'_+(v), h \rangle \geq -\epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.14})$$

- se  $t \rightarrow 0^-$ , então

$$\langle \varphi'_-(v), h \rangle \leq \epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.15})$$

De (C.14) e (C.15), obtemos

$$|\langle \varphi'_-(v), h \rangle| \leq \epsilon^{1/2}, \text{ para } h \in X, \text{ com } \|h\| = 1,$$

portanto,

$$\|\varphi'(v)\| \leq \epsilon^{1/2},$$

o que mostra (C.11). ■

**Teorema C.3** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $u_o, u_1 \in X$  e  $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Seja o espaço métrico completo*

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], X) : g(0) = u_o \text{ e } g(1) = u_1\}$$

*munido da norma usual d. Defina*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \varphi(g(t)) \text{ e } c_1 = \max(\varphi(u_o), \varphi(u_1)).$$

*Se  $c > c_1$ , então dados  $\epsilon > 0$  e  $f \in \Gamma$  tais que*

$$\max_{t \in [0, 1]} \varphi(f(t)) \leq c + \epsilon, \quad (\text{C.16})$$

*existe  $v \in X$  tal que*

$$c - \epsilon \leq \varphi(v) \leq \max_{t \in [0, 1]} \varphi(f(t)), \quad (\text{C.17})$$

$$\text{dist}(v, f([0, 1])) \leq \epsilon^{1/2}, \quad (\text{C.18})$$

$$\|\varphi'(v)\| \leq \epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.19})$$

**Demonstração.** Se  $c > c_1$ , então podemos supor  $0 < \epsilon < c - c_1$ . Seja  $f$  satisfazendo (C.16). Defina a função  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Phi(g) = \max_{t \in [0, 1]} \varphi(g(t)).$$

Então,

$$c = \inf_{\Gamma} \Phi > c_1.$$

Segue da continuidade de  $\varphi$  no compacto  $g([0, 1])$  que  $\Phi$  é contínua. Observe que  $\Phi$  verifica às hipóteses do Teorema C.1. Logo, por (C.16), existe  $h \in \Gamma$  tal que

$$\Phi(h) \leq \Phi(f) \leq c + \epsilon, \quad (\text{C.20})$$

$$\max_{t \in [0, 1]} |h(t) - f(t)| \leq \epsilon^{1/2}, \quad (\text{C.21})$$

$$\Phi(g) > \Phi(h) - \epsilon^{1/2}d(h, g), \text{ para } g \in \Gamma, g \neq h. \quad (\text{C.22})$$

Note que de (C.21) segue (C.18). Assim, para concluir a demonstração é suficiente mostrar que existe  $t_o \in [0, 1]$  tal que

$$c - \epsilon \leq \varphi(h(t_o)), \quad (\text{C.23})$$

$$\|\varphi'(h(t_o))\| \leq \epsilon^{1/2},$$

ou, em particular,

$$\langle \varphi'(h(t_o)), v \rangle \geq -\epsilon^{1/2}, \text{ para } v \in X, \|v\| = 1. \quad (\text{C.24})$$

Observe que (C.23) é satisfeita. Suponha, por absurdo, que para cada  $t \in I$ , onde

$$I = \{t \in [0, 1] : c - \epsilon \leq \varphi(h(t))\},$$

existe  $v_t \in X, \|v_t\| = 1$ , tal que

$$\langle \varphi'(h(t)), v_t \rangle < -\epsilon^{1/2}.$$

Logo, pela continuidade de  $\varphi'$ , para cada  $t \in I$ , existem  $\delta_t > 0, v_t \in X, \|v_t\| = 1$  e um intervalo aberto  $t \in I_t \subset [0, 1]$  tal que

$$\langle \varphi'(h(s) + u), v_t \rangle < -\epsilon^{1/2}, \text{ para } s \in I_t \text{ e } u \in X, \|u\| \leq \delta_t. \quad (\text{C.25})$$

Sendo  $I$  compacto, a cobertura aberta

$$\bigcup_{t \in I} I_t$$

de  $I$  possui uma subcobertura finita  $I_{t_1}, \dots, I_{t_k}$ . Defina a função  $\psi_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  por

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \frac{\text{dist}(t, I_{t_j}^c)}{\sum_{j=1}^k \text{dist}(t, I_{t_j}^c)}, & \text{se } t \in \bigcup_{i=1}^k I_{t_i}, \\ 0, & \text{se } t \notin \bigcup_{i=1}^k I_{t_i}. \end{cases}$$

Seja  $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_k}\}$ . Pelo Lema de Urysohn, podemos construir uma função contínua  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } c \leq \varphi(h(t)), \\ 0, & \text{se } \varphi(h(t)) \leq c - \epsilon. \end{cases}$$

Seja  $g \in C([0, 1], X)$  tal que

$$g(t) = h(t) + \delta \psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) v_{t_j}. \quad (\text{C.26})$$



Se  $h \in \Gamma$ , então

$$\varphi(h(t)) \leq c_1 < c - \epsilon, \text{ para } t \in \{0, 1\}.$$

Daí, pela definição de  $\psi$ , temos

$$\psi(t) = 0, \text{ para } t \in \{0, 1\}. \quad (\text{C.27})$$

Logo, de (C.26) e (C.27), temos que  $g \in \Gamma$ .

Usando (C.25) e o Teorema do Valor Médio, para cada  $t \in I$ , existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} \varphi(g(t)) - \varphi(h(t)) &= \left\langle \varphi'(h(t) + \lambda\delta\psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t)v_{t_j}), \delta\psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t)v_{t_j} \right\rangle \\ &= \delta\psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) \left\langle \varphi'(h(t) + \lambda\delta\psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t)v_{t_j}), v_{t_j} \right\rangle \\ &\leq -\epsilon^{1/2}\delta\psi(t). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Se  $t \notin I$ , então

$$\varphi(h(t)) < c - \epsilon,$$

daí  $\psi(t) = 0$ . Logo, por (C.26), tem-se

$$\varphi(g(t)) = \varphi(h(t)), \text{ para } t \notin I. \quad (\text{C.29})$$

Seja  $\bar{t} \in [0, 1]$  tal que

$$\Phi(g) = \varphi(g(\bar{t})).$$

Assim, por (C.28) e (C.29), temos

$$\varphi(h(\bar{t})) \geq \varphi(g(\bar{t})) \geq c > c - \epsilon,$$

de onde segue que

$$\bar{t} \in I \text{ e } \psi(\bar{t}) = 1.$$

Por (C.28),

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2}\delta \leq \varphi(g(\bar{t})) + \epsilon^{1/2} \leq \varphi(h(\bar{t})) \leq \Phi(h),$$

logo  $g \neq h$ . Pela definição de  $g$ , temos

$$d(g, h) \leq \delta,$$

logo

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2}d(g, h) \leq \Phi(h),$$

que contradiz (C.22), e completa a demonstraçãõ. ■

**Corolário C.4** *Com as hipóteses e notações do Teorema C.3, suponha que existe  $S \subset X$  tal que*

$$g([0, 1]) \cap S \neq \emptyset, \text{ para } g \in \Gamma \quad (\text{C.30})$$

e

$$c_o = \inf_{g \in S} \varphi.$$

Se

$$c_1 < c_o,$$

entãõ  $c > c_1$ .

**Demonstraçãõ.** Por (C.30), temos

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \varphi(g(t)) \geq c_o > c_1.$$

■

Antes de demonstrarmos o Teorema do Passo da Montanha, estabeleçamos a seguinte

**Definiçãõ C.1** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $\varphi$  satisfaz à condiçãõ de Palais- Smale no nível  $c$ ,  $(PS)_c$ , se toda seqüência  $\{u_n\} \subset X$  tal que*

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c \text{ e } \varphi'(u_n) \longrightarrow 0$$

*possui uma subseqüência convergente.*

**Teorema C.5 (Passo da Montanha)** *Com as hipóteses e notações do Teorema C.3 e seu Corolário C.4, suponha que existem  $u_o, u_1 \in X$  e uma vizinhança aberta  $U$  de  $u_o$  tal que  $u_1 \in X \setminus U$  e*

$$\inf_{\partial U} \varphi > c_1.$$

*Se  $\varphi$  satisfaz à condiçãõ  $(PS)_c$ , entãõ  $c$  é um valor crítico de  $\varphi$  e  $c > c_1$ .*

**Demonstração.** Afirmamos que

$$g([0, 1]) \cap U \neq \emptyset, \text{ para } g \in \Gamma.$$

De fato, sem perder a generalidade podemos supor que  $U = B(u_o, r)$ , bola aberta de centro  $u_o$  e raio  $r$ . Fixe  $g \in \Gamma$  e defina a função contínua

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = \|g(t)\|. \end{aligned}$$

Note que

$$h(0) = \|g(0)\| = \|u_o\| < r \text{ e } h(1) = \|g(1)\| = \|u_1\| \geq r.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $t_o \in [0, 1]$  tal que

$$h(t_o) = \|g(t_o)\| = r,$$

e portanto

$$g([0, 1]) \cap U \neq \emptyset, \text{ para } g \in \Gamma.$$

Além disso, Pelo Corolário C.4, tem-se  $c > c_1$ . Pelo Teorema C.3, existe uma seqüência  $\{u_n\} \subset X$  tal que

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c, \tag{C.31}$$

$$\|\varphi'(u_n)\| \longrightarrow 0. \tag{C.32}$$

Desde que  $\varphi$  satisfaz à condição  $(PS)_c$ , existem uma subsequência  $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$  e  $u \in X$  tais que

$$u_{n_j} \longrightarrow u. \tag{C.33}$$

Sendo  $\varphi$  contínuo, temos por (C.31) e (C.33) que

$$\varphi(u_{n_j}) \longrightarrow \varphi(u) = c. \tag{C.34}$$

Pela continuidade de  $\varphi'$ , (C.32) e (C.33) segue que

$$\varphi'(u_{n_j}) \longrightarrow \varphi'(u) = 0. \tag{C.35}$$

Portanto, por (C.34) e (C.35),  $c$  é um valor crítico de  $\varphi$ . ■

**Observação C.2** *No Capítulo 3, usamos o Teorema do Passo da Montanha com a condição (PS). No entanto, se um funcional  $\varphi \in C^1$  satisfaz à condição (PS), então  $\varphi$  satisfaz à condição  $(PS)_c$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ . A recíproca, porém, não é verdadeira (ver [17], pág. 81).*

# Apêndice D

## Resultados Utilizados na Dissertação

Neste Apêndice, enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo da dissertação.

No que segue, denotaremos

- $(X, \mathcal{X}, \mu)$  um espaço de medida,
- $M^+$  = conjunto das funções mensuráveis não-negativas definidas em  $X$  e assumindo valores em  $\overline{\mathbb{R}}$ ,
- $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$  = espaço das funções reais integráveis.

**Teorema D.1 (Teorema da Convergência Monótona)** *Se uma seqüência não-decrescente  $\{f_n\} \subset M^+$  converge em quase todo ponto para uma função  $f$ , então*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Demonstração.** Veja [4], Teorema 4.6 e Corolário 4.12.

**Teorema D.2 (Teorema da Convergência Dominada)** *Seja uma seqüência  $\{f_n\} \subset L$  que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g \forall n$ , então  $f \in L$  e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Demonstração.** Veja [4], Teorema 5.6.

**Lema D.3 (du Bois-Reymond)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto. Se  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  é tal que*

$$\int f u = 0, \forall u \in C_o^\infty(\Omega),$$

*então  $f = 0$ , q.s. em  $\Omega$ .*

**Demonstração.** Veja [4], Lema IV.2 e [18], Proposição 1.31.

**Teorema D.4 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)** *Seja  $1 \leq p < N$ , então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

*e existe uma constante  $C = C(p, N)$  tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

**Demonstração.** Veja [5], Teorema IX.9.

**Corolário D.5** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Se  $1 \leq p < N$ , então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, p^*],$$

*com imersão contínua.*

**Demonstração.** Veja [5], Corolário IX.14.

**Teorema D.6 (Rellich-Kondrachov)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Se  $p < N$ , então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*], \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

*com imersão compacta.*

**Demonstração.** Veja [5], Teorema IX.16.

**Teorema D.7** *Sejam  $X$  um espaço de Banach reflexivo e uma seqüência  $(x_n) \subset X$  limitada. Então, existem uma subseqüência  $(x_{n_k})$  e  $x \in X$  tais que  $x_{n_k} \rightharpoonup x$ .*

**Demonstração.** Veja [5], Teorema III.27.

**Teorema D.8** *Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear compacto. Se  $x_n \rightarrow x$  em  $X$ , então  $Tx_n \rightarrow Tx$  em  $Y$ .*

**Demonstração.** Veja [16], Teorema 8.1-7.

**Teorema D.9** *Sejam  $X$  um espaço vetorial normado e uma seqüência  $(x_n) \subset X$ . Tem-se*

- (i)  $x_n \rightarrow x$  se, e somente se,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$ ;
- (ii) se  $x_n \rightarrow x$ , então  $x_n \rightarrow x$ ;
- (iii) se  $x_n \rightarrow x$ , então  $\|x_n\|$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ ;
- (iv) se  $x_n \rightarrow x$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $X^*$ , então  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

**Demonstração.** Veja [5], Proposição III.5.

# Bibliografia

- [1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Alves, C.O. & Souto, M.A.S, *Existence of solutions for a class of problems in  $\mathbb{R}^N$  involving  $p(x)$ -Laplacian*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 66. No. 1, pp 17-32. Published by Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005.
- [3] Alves, C.O., do Ó, J.M. & Miyagaki, O.H., *On Perturbations of a class of a periodic  $m$ -Laplacian equation with critical growth*, Nonlinear Analysis 45 (2001) 849-863.
- [4] Bartle, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [5] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, 2005.
- [6] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [7] DiBenedetto, E., *Real Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [8] Diening, L., *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.
- [9] Fan, X.L. & Zhao, D., *On the Spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$* , Journal of Mathematical Analysis and Applications 263, 424-446 (2001).
- [10] Fan, X.L. & Zhang, Q.H., *Existence of solutions for  $p(x)$ -laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis 52 (2003), 1843-1852.
- [11] de Figueiredo, D.G., *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [12] de Figueiredo, D.G., *Equações Elípticas não Lineares*, 11<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1977.
- [13] Gilbarg, D. & Trudinger *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag , Second Edition, Berlin, 1983.
- [14] Harjulehto, P. & Hästö, P., *An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces*, Future Trends in Geometric Function Theory(D. Herron (ed.), RNC Workshop, Jyväskylä, 2003), 85-93.
- [15] Hästö, P.A., *The  $p(x)$ -Laplacian and applications*, National Conference on PDE and Applications , Coimbatore, Índia, 2005.
- [16] Kreyszig, W., *Introductory Functional Analyses with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [17] Mawhin, J. & Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [18] Medeiros, L.A. & Milla, M.A., *Espaços de Sobolev(Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [19] do Ó, J.M. & Medeiros, E.S., *Remarks on Least Energy Solutions for Quasilinear Elliptic Problems in  $\mathbb{R}^N$* , Eletronic Journal of Differential Equations, vol. 2003 (2003), No. 83. pp. 1-14.
- [20] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the  $p$ -Laplacian*, Second School On Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations , Miramare-Trieste, 1997.
- [21] Rabinowitz, P.H, *Minimax Methods in Critical Points Theory with Applications to Differential Equations*, Conference Board of Mathematical Sciences, AMS, Rhode Island, 1986.
- [22] Royden, H.L., *Real Analysis*, Third Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1988.
- [23] Ruzicka, M., *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [24] Vainberg, M.M., *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day, Series in Mathematical Physics, San Francisco, 1964.



- [25] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 24, Birkhäuser, Boston, 1996.