UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS VAGNER DA SILVA ARAÚJO

TEOREMA DE HERÃO: UMA APLICAÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER

CUITÉ - PB
2022

MARCOS VAGNER DA SILVA ARAÚJO

TEOREMA DE HERÃO: UMA APLICAÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Prof. Drº. Aluízio Freire da Silva Junior

CUITÉ – PB

2022

A663t Araújo, Marcos Vagner da Silva.

Teorema de Herão: uma aplicação da identidade de Euler. / Marcos Vagner da Silva Araújo. - cuité, 2022.
45 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior".
Referências.

1. Matemática financeira. 2. Teorema de Herão. 3. Identidade de Euler. 4. Análise complexa. I. Silva Junior, Aluízio Freire da. II. Título.

CDU 51:336(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

MARCOS VAGNER DA SILVA ARAÚJO

TEOREMA DE HERÃO: UMA APLICAÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité.

Aprovado em: 24/03/2022

BANCA EXAMINADORA

Aluízio Freire da S. Junior

Prof. Drº. Aluízio Freire da Silva Junior
(Orientador)

Glageane da Silva Souza

Prof. Drª Glageane da Silva Souza- UFCG
(Examinador da Interno)

Igor Raphael Silva de Melo

Prof. Prof. Me. Igor Raphael Silva de Melo
(Examinador Externo)

CUITÉ - PB

2022

AGRADECIMENTOS

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus, pois sem ele não conseguiria estar presente nesse plano. Dedico também a minha família que é composta por minha mãe Virgínia Suely, meu padrasto Ivanildo Rocha, meu irmão Maicom Vinícius e minha irmã Lávinia Elóa. Eles sempre acreditaram em mim e a todo o momento não os tirei do meu pensamento em nenhum minuto. Dificuldade que somente a gente pode sentir, então não poderia deixar de homenageá-los nesse momento.

Destino esse trabalho também, aos meus amigos de curso, Leandro Confessor (Irmão de outra mãe), André Macedo, Marcos Sérgio (minha dupla), Italo Rafael (Jack Chan), Eduardo Pinto (gênio indomável), Samara Cristina (Conselheira), Loandson (O músico) e entre outros colegas.

Não poderia esquecer-se dos professores que marcaram essa longa trajetória, o professor Marciel que sempre tirava minhas dúvidas quando podia, professor Aluízio com suas brilhantes aulas de álgebra, professora Maria de Jesus por sempre puxar minha orelha em Cálculo Diferencial Integral I e ao professor Clebson Huan que me reprovou em Álgebra Vetorial, ele foi minha motivação para ainda continuar no curso.

EPÍGRAFE

“O ideal é não ser perfeito”

Marcos Sérgio Florêncio Júnior

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo bibliográfico sobre o matemático Leonhard Euler. Deduzimos a constante de Euler através de uma aplicação da Matemática Financeira. Apresentamos alguns conceitos da Análise Real, Complexa e Geometria Plana, tais como: Números complexos, Sequências Numéricas, Séries Infinitas em particular (Taylor e Maclaurin), congruência de Triângulos. Mostramos a Identidade de Euler e por fim enunciamos e demonstramos o Teorema de Herão.

Palavras-chave: Identidade Euler, Análise Complexa, Teorema de Herão.

ABSTRACT

In this work we carried out a bibliographic study on Leonhard Euler mathematics. We deduce the Euler constant through an application of Financial Mathematics. It presents several concepts of Real Analysis, Complex and Plane Geometry, such as: Complex numbers and Sequences of numbers, Infinite series in particular (Taylor Maclaurin), congruence of triangles. We will show Euler's Identity and finally we state and prove Herão's Theorem.

Keywords: Euler's Identity, Complex Analysis, Heron's Theorem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos abordar a história de Euler, seus passos e trajetória na terra. Logo após iremos mostrar como chegar no número de Euler, o famoso símbolo da exponencial. Depois mostraremos a identidade de Euler, que é um arranjo matemático da área especifica da análise complexa, que mostra uma relação profunda entre as funções trigonométricas e a função exponencial.

Usaremos a identidade de Euler para provar a fórmula de Herão, uma fórmula capaz de determinar a área de um triângulo somente através das medidas dos lados. Essa fórmula descarta a utilização da altura do triângulo, o que as outras expressões matemáticas o fazem.

Nesse contexto, o desenvolvimento de uma revisão da literatura sobre o tema proposto, poderia contribuir com a solução destes problemas, uma vez que as revisões têm a função de possibilitar uma análise sobre um determinado assunto a partir de diferentes perspectivas, auxiliando em sua compreensão (ROTHER, 2007). Para isso foram revisados vários livros e artigos que possibilitaram o desenvolvimento do trabalho.

O objetivo deste estudo é realizar uma revisão de literatura sobre o tema de análise complexa, sequencias e séries, identidade de Euler e além disso provar o teorema de Herão usando métodos aprendidos na relação de números complexos com séries numéricas.

Dessa maneira, se fosse realizada uma revisão da literatura sobre o tema (usando a identidade de Euler para demonstrar o teorema de Herão), isso contribuiria com a ampliação dos conhecimentos dos leitores sobre essa temática específica, pois as revisões tem a função de preencher as lacunas existentes na literatura através da combinação de diferentes pesquisas bibliográficas (CORDEIRO, 2007).

Para melhor compreensão do trabalho é necessário ter domínio básico dos conteúdos de geometria euclidiana plana, análise complexa e calculo diferencial integral.

1 IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A matemática é uma ciência que tem como finalidade explicar fenômenos naturais, o desenvolvimento dela implica diretamente no desenvolvimento da humanidade. Ao passar do tempo, esta ciência teve contribuições importantes desde os primórdios até nossa contemporaneidade.

De fato, a ciência matemática surge da interação do ser humano com a natureza, dando primeiramente a noção e compreensão numérica.

> [...] a necessidade do homem primitivo de estimar quantidades de alimentos, pessoas e animais contribuiu para o surgimento do conceito de número, este iniciou com a simples percepção de diferenças e semelhanças e evoluiu através de contagens primitivas com uso de pedras, ossos e dedos das mãos. (OLIVEIRA, 2008, p.3)

Com isso a matemática é uma construção do conhecimento, todos os métodos e conceitos da antiguidade estão ligados diretamente com o conhecimento que adquirimos hoje. Todos os problemas que foram solucionados por povos antigos serviram como bases para novas técnicas e novos modelos.

> As ideias matemáticas perpassam todos os momentos da história e todas as civilizações em seus modos de saber e de fazer. Compreender como esses modos de saber/fazer foram gerados, os fatores que levaram a sua emergência e, principalmente, o modo como foram organizados intelectualmente por determinada civilização, pode servir como um método para ensinar Matemática. (LARA, 2013, p.52)

Logo a matemática nasceu para auxiliar a vida humana, e as informações do passado foram essenciais para o desenvolvimento dessa disciplina, que cada dia está sendo alimentado por novas informações, por meio de artigos, livros, palestras e entre outros meios comunicativos.

Segundo Lara (2013) "compreender como os modos de fazer, originados em determinada civilização, foram transmitidos e transformados e se existe hegemonia em relação à permanência e legitimação de determinados saberes (...)". De fato, os documentos registrados através do tempo são de grande importância para novos conhecimentos serem gerados através da necessidade humana de compreender os problemas que surgiram na época de cada civilização.

Então é necessário entender o conceito matemático que a história mostra, porque todo conhecimento matemático é fruto de várias contribuições, em cada civilização teve uma parte relacionada a história da matemática.

Logo este processo evolutivo matemático nos faz pensar que os avanços das civilizações estiveram diretamente interligados com o aprimoramento da matemática como uma das principais engrenagens de avanço social, econômico e cultural

> As tentativas de definir História, e o mesmo se dá com Matemática ou qualquer outra área de conhecimento, encontram enormes dificuldades. Muitas das definições podem ser sintetizadas dizendo que História é a narrativa de fatos, datas e nomes associados à geração, à organização intelectual e social e à difusão do conhecimento – no nosso caso conhecimento matemático – através das várias culturas ao longo da evolução da humanidade. (D'Ambrosio,2009, pag. 15)

Diante disso, percebe-se que a compressão da história da matemática contribui para o desenvolvimento de novas perspectivas do saber numérico, sendo imprescindível mencionar autores relevantes, tais como: Arquimedes, Newton, Euler, Gauss entre outros.

1.1 HISTÓRIA DE EULER.

Neste trabalho, iremos destacar um dos autores supracitados: Leonhard Euler. Famoso por ser o matemático que mais publicou - em vida foram 530 artigos, após sua morte foram registrados mais 336, totalizando 866 artigos científicos. Suas obras são de grande valor para a matemática.

Euler nasceu na Rússia, na cidade da Basiléia em 15 de abril de 1707. Filho do Pastor Paul Euler e Margaret Brucker, teve duas irmãs mais novas Anna Maria e Maria Magdalena. Leonhard faleceu no dia 18 de setembro de 1783, na cidade de São Petersburgo, localizada na Rússia.

Na matemática contribuiu diretamente na área da álgebra e da geometria. Fez descobertas e padronizaram escritas, criando notações usadas até hoje. Destacou-se também em áreas correlatas do saber matemático, com obras relacionadas à teoria musical, dinâmica dos fluídos, óptica, astronomia e mecânica.

Adiante, dividiremos em tópicos cada momento da vida de Euler: iniciando com sua jornada enquanto criança, logo após iremos descrever resumidamente sua vida adulta e suas principais obras. E, ao final, o que ocasionou sua morte.

1.2 O TRAJETO DE LEONHARD EULER

Seu pai ambicionava um futuro semelhante ao seu para Euler, levando-o seu à universidade para estudar teologia, grego e hebraico. Porém este nunca se dedicou a fundo. Euler se interessava realmente por matemática. Com o passar dos anos, Johan Bernoulli, da tradicional família Bernoulli, começou a dar aulas na universidade, tendo sido chamado posteriormente por Leonhard Euler para lhe ensinar matemática. Johann era muito ocupado para atender ao pedido de seu irmão, mas ajudou-lhe com livros e encontros dominicais.

Em 1726, Euler publicou seu primeiro artigo em um concurso que consistia trazer uma solução para o seguinte questionamento: "qual o local ideal para fixar um mastro em um barco?''. Nesse importante concurso, Euler ficou em segundo lugar. O primeiro colocado foi Pierre Bourger, conhecido por inventar o símbolo de "menor ou igual" e "maior ou igual". Em seu segundo artigo, Euler publicou um trabalho relacionado ao som, mais especificamente sobre sua propagação, em uma tentativa de ingresso na universidade da Basiléia, mas não obteve sucesso.

No ano de 1724, durante o período de modernização da Rússia, a Academia de Ciências de São Petersburgo, por necessidade de novos cientistas, abriu um chamado. Pedro I de Romonov (1672-1725) levou Nicolaus II, que já era matemático, Bernouli e Daniel Bernouli, que já era formado em Medicina, para lecionar na instituição. Mas em 1926, Euler é levado para a Rússia por Daniel Bernoulli. Com o posto vago de Daniel Bernouli, Euler iria para a Academia de Ciências de São Petersburgo para ser médico, mas sua única formação era em Teologia. Por ter aptidão em Matemática e por seu gosto pela área, primeiramente migrou para área da Física e logo após começou a estudar matemática.

Entre 1727 e 1730, Euler foi tenente da Marinha russa. Em 1733, Daniel sai da Rússia para voltar a ser professor na Basiléia, deixando o posto de matemática em aberto na instituição. Em 1734, Euler casou-se com Katharina Gsell (1707 a 1773), com quem teve 13 filhos, mas 5 filhos vieram a óbito.

Nessa época Euler ainda não era reconhecido, somente em 1735, ao solucionar o Problema da Basiléia, no qual muitos matemáticos falharam, incluindo a família Bernouli.

O problema consistia em encontrar uma expressão para a seguinte soma

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

A partir daí, Euler ficou conhecido pela comunidade cientifica como o matemático que tinha solucionado o problema de São Petersburgo.

Figura 1: Universidade de São Petersburgo

Fonte: imagens google

Em 1738, Euler começou a apresentar problemas de catarata, onde ficou praticamente cego. Em 1741, Euler foi convidado por Frederic para ser professor na Academia de Berlim, na Alemanha, onde aceitou o convite. Além de Euler, foram convidados Daniel Bernouli e Jean Bernouli, que na ocasião, acabaram negando o convite. Porém Leonhard não se sentiu confortável em Berlim, já que segundo Eves(2004), Frederic gostaria de alguém relacionado com a filosofia e sociologia, não se encaixando nas formações de Leonhard Euler.

Figura 2: Leonhard Euler

Fonte: Vianna (2021)

2 COMO CHEGAR AO NÚMERO DE EULER

Portanto, idealizar a expressiva relevância que teve Euler para o desenvolvimento da ciência, mais precisamente da matemática. Os trabalhos os quais o matemático em questão empenhou-se não se restringem apenas aos citados na descrição de sua trajetória. Isso evidencia-se pelo fato de termos hoje acesso a diversas publicações elaboradas por Euler, as quais enunciam e demonstram diversos resultados extremamente importantes para modelagem e, consequentemente, resoluções de problemas que necessitam ser solucionados a todo o momento.

De acordo com Viana (2021), os trabalhos de Euler apresentam diversas contribuições essenciais a vários ramos da matemática, os quais vão da teoria dos números até a probabilidade, na física, por exemplo, o estudioso também se dedicou para desenvolver aproximações científicas relacionadas não somente à acústica, como também à ótica, entre outras coisas presentes em áreas como geofísica, mecânica e lógica.

Contudo, no que tange à relação de Euler mais especificamente com a matemática, é possível discorrer com mais profundidade acerca de alguns pontos. Desse modo, vale informar que no, século XVII, baseado em Precioso e Pedroso (2013) o matemático Jakob Bernoulli chegou ao certo questionamento, o qual valendo-se da linguagem atual seria equivalente a: Qual o montante da aplicação de R$ 1 à taxa nominal de 100 % ao ano em prazo qualquer?

Entretanto devemos entender que para calcular esse tipo de problema precisaríamos da fórmula do montante de uma aplicação de capital ao regime de juros compostos, também conhecida como juros sobre juros, é sempre aplicada ao somatório do capital no final de cada período. Dessa forma, a fórmula é dada por:

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

Nessa fórmula devemos conhecer os parâmetros, onde M é considerado o montante, que pode ser entendido pelo valor acumulado, a variável C é o capital aplicado no início ou valor inicial, o parâmetro i é a taxa de juros composto e o n é o tempo de aplicação.

Portanto, para responder tal questionamento, por recorrência, foi resolvido, na época, da seguinte maneira, isto é, em um período de um ano, trivialmente percebe-se que o montante evolui de R$1 para R$(1+1=2).

Porém em um prazo de 2 anos, já que trata-se de uma taxa nominal, isto é, proporcional, logo, o dinheiro evoluiria para

$$1(1 + \frac{100\%}{2})^2 = 2{,}25.$$

Agora usando a fórmula taxa nominal iremos supor que, se o prazo fosse 4 anos a taxa seria $\frac{100\%}{4}$, logo, o montante valeria em reais.

$$1(1 + \frac{100\%}{2})^2 = 2{,}4375.$$

Se o prazo fosse 365 anos, então o capital progrediria em reais para,

$$1(1 + \frac{100\%}{365})^{365} \simeq 2{,}7146.$$

Percebeu-se, indutivamente, que o resultado do montante pode ser representado pela sequência abaixo:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Quando n tende para um número infinitamente grande, tem-se 2,71828…, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots.$$

A importância da resolução do problema citado anteriormente é ocasionada ao fato que pela percepção pela primeira vez da convergência da sequência:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

para o número irracional 2,71828…

Segundo Boyer (2003), Euler, em seus estudos sobre cálculo diferencial e integral, notou que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é um resultado que aparecia recorrente em suas modelagens, assim ele resolveu determinar uma notação especial ao resultado, passando convencionar

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots = e.$$

3 A CONSTRUÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER

Neste capitulo iremos definir o conceito de números complexos, suas principais propriedades e suas formas algébricas. Além disso, mostraremos os principais resultados das Séries de Taylor e MacLaurin, para assim chegarmos na famosa identidade de Euler. As definições de números complexos tiveram como base no livro do Iezzi (1977).

3.1 CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Definimos como o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) |\ x \in \mathbb{R}\ e\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) onde temos que $x\ e\ y$ são números reais. No corpo dos números complexos consideramos três importantes definições: igualdade, adição e multiplicação. Para melhor compreensão das definições iremos considerar dois elementos, $(a, b)\ e\ (c, d)$.

Igualdade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e o segundo termo iguais, temos:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d.$$

Adição: é definido como soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c\ , b + d).$$

Multiplicação: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro. Então:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd\ , ad + bc).$$

Logo, chama-se conjunto dos números complexos, e sua representação é dada pelo símbolo $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação como definimos.

Normalmente representamos cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ com a letra z, dessa forma:

$z \in \mathbb{C} \leftrightarrow z = (x, y)$ sendo $x, y \in \mathbb{R}$.

A operação de adição em $\mathbb{C}$ tem estrutura de grupo comutativo, valendo as seguintes propriedades:

Propriedade associativa: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{C}$.

Propriedade comutativa: $a + b = b + a, \forall\, a, b \in \mathbb{C}$.

Existência do elemento neutro: $\exists\, x\, \mathbb{C} \mid z + x = z, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Existência do elemento simétrico: $\forall\, z \in \mathbb{C}, \exists\, z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = x$, onde x é o elemento neutro.

A operação de multiplicação em $\mathbb{C} - \{(0,0)\}$ tem estrutura de grupo comutativo. Em $\mathbb{C}$ temos as seguintes propriedades:

Propriedade associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{C}$.

Propriedade comutativa: $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{C}$.

Existência do elemento neutro: $\exists\, y\, \mathbb{C} \mid z \cdot y = z, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Existência do elemento simétrico: $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}, \exists\, z'' \in \mathbb{C} - \{(0,0)\} \mid z \cdot z'' = y$, onde y é o elemento neutro.

Estas propriedades não são necessárias serem demonstradas nesse trabalho, a ênfase neste capítulo é apresentar a definição e as principais propriedades do conjunto dos números complexos. Análogo ao que denotamos no conjunto dos números reais, para cada $z \in \mathbb{C}$ e n inteiro, denotamos z^n como o produto $z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$ com n fatores, caso $n > 0$, $z^0 = (1,0)$, caso $n = 0$ e $z \neq (0,0)$, e $z^n = (z')^{|n|}$, onde z' é o inverso de z em $\mathbb{C} - \{(0,0)\}$ em relação a multiplicação e $n < 0$.

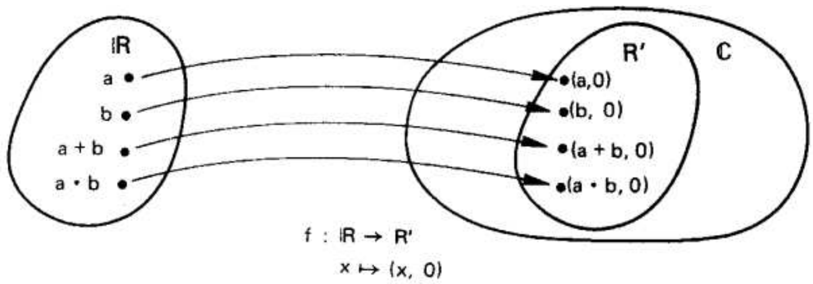
3.2 FORMA ALGÉBRICA DO CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos o subconjunto $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujos segundo termo é zero:

$$\mathbb{R}' = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathbb{C} \mid b = 0\}.$$

Pertencem, por exemplo, a $\mathbb{R}'$ os pares $(0,0), (1,0), (a, 0), (b, 0), (a + b, 0), (a - b, 0)$ e entre outros. Consideremos agora a aplicação f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}'$, que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$.

Figura 3: Relação entre conjuntos



Fonte: Iezzi (1977)

Em primeiro lugar, notaremos olhando a figura acima que f é bijetora, já que:

1. Todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é o correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$. Isto mostra que f é sobrejetora.
2. Dados $x, x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x, 0) \in \mathbb{R}'\ e\ (x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados, mostra que nossa f é injetora.

Em segundo lugar, notemos que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1. À soma $a + b$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associada com o par $(a + b, 0)$ que é a soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de $a\ e\ b$, respectivamente:
$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b).$$
2. Ao produto $a \cdot b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a \cdot b, 0)$ que é o produto dos pares $(a, 0)\ e\ (b, 0)$, correspondente de $a\ e\ b$, respectivamente:
$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b).$$

Como existe uma aplicação bijetora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}\, e\, \mathbb{R}'$ são isomorfos e que f é um isomorfismo. Devido ao isomorfismo, operar com $(x, 0)$ em $\mathbb{R}'$ leva a resultados análogos aos obtidos com x em $\mathbb{R}$; isto justifica considerarmos a igualdade:

$$x = (x, 0), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Essa igualdade é a que vamos utilizar daqui para frente, definimos como forma algébrica. Pela igualdade acima, temos alguns elementos, em particular $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)\; e\; \mathbb{R} = \mathbb{R}'$. Dessa forma, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) pode ser considerado subconjunto do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), temos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

3.3 UNIDADE IMAGINÁRIA

Chamamos de unidade imaginária e indicamos por i o número complexo $(0,1)$. Notamos que, pelas propriedades de números complexos, temos:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Chegamos na propriedade básica da unidade imaginária que:

$$i^2 = -1.$$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos também:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Mais geralmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$i^{4n} = 1,\; i^{4n+1} = i,\; i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

A demonstração não será necessária nesse trabalho. Agora, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) =$$

$$= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0,1),$$

então,

$$z = x + y \cdot i.$$

Portanto, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + y \cdot i$, chamada de *forma algébrica*. O número real x é chamado *parte real* de z e o número real y é chamado *parte imaginária* de z. Facilitam as operações em $\mathbb{C}$, trabalhar com a forma algébrica $(x, y) = x + yi$ na representação dos números complexos. Vejamos como ficam as definições de igualdade, adição e multiplicação de complexos, pela a forma algébrica:

Igualdade: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \ e \ b = d$, isto é, dois números complexos são ditos iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e parte imaginárias iguais.

Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, isto é, a soma de dois números complexos é um complexo cuja parte real é a soma das partes reais das parcelas e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginária das parcelas.

Multiplicação: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, isto é, o produto de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de $(a + bi)(c + di)$, basta aplicar a propriedade distributiva e levando em conta que $i^2 = -1$, temos:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exemplo 3.3.1: Considerando $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 2 - i \ e \ z_3 = 4 + 3i$. Vamos calcular $z_1 + z_2$, $z_2 \cdot z_3$:

$$z_1 + z_2 \ = (2 + 2i) + (2 - i) = (2 + 2) + (2 - 1)i = 4 + i$$

$$z_2 \cdot z_3 = (2 - i)(\ 4 + 3i) = 2(4 + 3i) - i(4 + 3i) = 8 + 6i - 4i - 3i^2 =$$

$$= 8 + 2i - 3(-1) = 8 + 2i + 3 = 11 + 2i.$$

3.4 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Chama-se *norma* de um número complexo $z = x + yi$ ao número real positivo

$$N(z) = x^2 + y^2.$$

Nomeamos *módulo* ou *valor absoluto* de um número complexo $z = x + yi$ ao número real positivo

$$|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nesse trabalho iremos considerar $|z|$ com o símbolo ρ para representar o módulo.

Exemplo 3.4.1:

1º) $z = \sqrt{5} + 2i \Rightarrow N(z) = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2^2 = 9 \;\; e \;\; \rho = 3.$

2º) $z = -2i \Rightarrow N(z) = (0)^2 + (-2)^2 = 4 \;\; e \;\; \rho = 2.$

Chama-se argumento de um número complexo $z = x + yi$, não nulo, ao ângulo θ tal que:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \;\; e \;\; \sin\theta = \frac{y}{\rho} \quad onde \;\; \rho = |z|,$$

notemos que,

1º) a condição $z \neq 0$ garante $\rho \neq 0,$

2º) existe ao menos um ângulo θ satisfazendo a definição pois:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2}.$$

Porém, temos por definição que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, logo $\rho^2 = x^2 + y^2$. Dessa forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

3º) Fixando o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos\theta \; e \; \sin\theta$, mas o ângulo θ, pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

onde θ_0, chamado argumento principal de z, tal que $\cos\theta_0 = \frac{x}{\rho} \; e \; \sin\theta_0 = \frac{y}{\rho}$ e $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$. Frequentemente trabalhamos com θ_0 chamando simplesmente argumento de z.

Dado um número complexo $z = x + yi$, não nulo, temos:

$$z = x + yi = \rho\left(\frac{x}{\rho} + i \cdot \frac{y}{\rho}\right).$$

Portanto,

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \sin\theta).$$

Chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar* de z.

3.5 SEQUÊNCIA

As definições e propriedades apresentadas de Sequências e Séries foram baseadas no livro de Lima (2006) e Stewart (2013), com algumas modificações, mas sem perder a essência.

Pode-se pensar numa sequência como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots}$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Note que, para cada número inteiro positivo n existe um número correspondente a a_n e, dessa forma uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n ao invés da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ pode ser denotada por

$$\{a_n\} \quad ou \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

as sequências podem ser definidas pela a fórmula do n-ésimo temo. A seguir iremos dar alguns exemplos de sequência.

Exemplo 3.5.1: Considere a sequência $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Pode-se notar que a fórmula do termo geral é da forma $a_n = \frac{n+1}{n}$, ou seja, seus termos são definidos da seguinte forma:

$$\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\right\}.$$

Quando tem-se a fórmula do termo geral é fácil denotar a sequência, escreve-la na forma tabular. Mas nem sempre é assim, às vezes é necessário encontrar a fórmula do termo geral a_n.

Exemplo 3.5.2 : Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}.$$

Supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

Podemos perceber que:

$$a_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ a_2 = \frac{1}{4}\ , a_3 = -\frac{1}{8}\ \ e\ \ a_4 = \frac{1}{16}.$$

Podemos observar que o numerador dessa sequência não muda, sempre é definido por 1. Com relação aos denominadores, podemos notar que são potências de 2, então nossa a_n tem denominador 2^n. Os sinais dos termos sempre estão se alternando entre negativo e positivo, dessa forma será necessário multiplicar por uma potência de (-1). Nesse exemplo precisamos começar com o termo negativo, então usaremos $(-1)^n$, dessa forma

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Definição 3.5.3 : A sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\ \ ou\ a_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se existir, dizemos que a sequência *converge* (ou é *convergente*). Caso contrário, dizemos que a sequência *diverge* (ou é *divergente*).

Definição 3.5.4: A sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad ou\ a_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que:

$$\text{se } n > N, \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Teorema 3.5.6: Seja $\{a_n\}$ uma sequência, $f(n) = a_n$ e suponhamos que $f(x)$ exista para todo número real x ≥0.

- Se $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.
- Se $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (ou $-\infty$).

Exemplo 3.5.7: Mostre que a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$, é uma sequência convergente:

Solução: pelo teorema acima iremos analisar o limite da sequência, considerando $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Usando uma propriedade de limite no infinito, onde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

dessa forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Com isso temos que a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$, converge para 1.

Propriedades

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências convergentes, isto é, os limites existem, então:

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) $\lim_{n\to\infty} c = c$.

(4) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, b_n \neq 0\ e\ \lim_{n\to\infty} b_n$.

(6) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$.

(7) Se $a_n \leq b_n$, então $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

(8) **(Teorema do confronto)** Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

(9) Se $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3.6 SUBSEQUÊNCIAS

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Diremos que uma sequência de números reais $\{b_k\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$ se existir subconjunto infinito

$$N' = \{n_k |\ k \in \mathbb{N}, n_k < n_{k+1}\} \subseteq \mathbb{N},$$

tal que $b_k = a_{n_k}$. Denotaremos $\{b_k\} = \{a_{n_k}\}$.

A definição acima é equivalente a seguinte definição.

Definição 3.6.1: Dada uma sequência $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, as restrições de f a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ são chamadas subsequências de f.

Teorema 3.6.2: Se $a_n \to L$ (converge para L) , então toda subsequência $\{a_{n_k}\}$ da sequência $\{a_n\}$, é uma sequência convergente, e converge para L ($a_{n_k} \to L$).

Uma observação importante que devemos levar em consideração, é que, se uma sequência $\{a_n\}$ possui duas subsequências $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n_j}\}$ que convergem para limites distintos, então temos que sequência $\{a_n\}$ diverge.

Definição 3.6.3: Uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada superiormente* quando existir um número real M, tal que:

$$a_n \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.6.4: Uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada inferiormente* quando existir um número real m, tal que:

$$m \leq a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.6.5: Uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada* quando existir *limite superior* e *limite inferior*, isto é, quando existir uma constante positiva c, tal que:

$$|a_n| \leq c, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 3.6.6: Toda sequência convergente é limitada.

Definição 3.6.7: Considerando uma sequência $\{a_n\}$, definimos que:

(1) Crescente, se $a_n \leq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
(2) Decrescente, se $a_{n+1} \leq a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3.7 SÉRIES NUMÉRICAS

Devemos entender que série é diferente de sequência. Nesse caso, série é um somatório. Vamos analisar o resultado de somatório de vários termos. Na sequência analisamos a sucessão dos termos.

Se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}$, obteremos uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma *série infinita* (ou apenas séries) e é denotado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Iremos apresentar agora alguns exemplos importantes, bastante utilizados nas disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Exemplo 3.7.1: Série Harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Exemplo 3.7.2: Série Geométrica

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \in \mathbb{R}$$

Definição 3.7.3: Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, podemos definir a sequência das somas parciais (S_n) por

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Teorema 3.7.4: Seja $a \neq 0$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$. ($q$ é denominada a razão da série e a é seu coeficiente).

1) Converge e sua soma é $S = \frac{a}{1-q}$, se $|q| < 1$.
2) Diverge se $|q| \geq 1$.

Propriedades de Séries

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas e seja α um número real.

1) Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ também convergem, e valem as relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.
3) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $\alpha \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ é divergente.

Definição 3.7.5 (*Teste da razão*) : Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com $a_n \neq 0$ e consideremos

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

então

1) Se $l < 1,$ a série converge para l.
2) Se $l > 1$ ou $l = \infty$, a série diverge.
3) Se $l = 1$, nada pode ser definido pelo teste.

Existem diversos outros testes de convergência de séries, tais como: teste do termo geral, teste da comparação, teste da integral, teste de Leibniz para séries alternadas, convergência absoluta, teste da raiz. Neste trabalho, não se deter a mostrar mais tipos de testes de convergência ou divergência, somente o teste da razão, pois iremos utilizar.

3.8 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Definição 3.8.1: Uma série de potências é uma soma infinita do tipo:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

onde convencionamos que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. O número a é denominado centro da *série* e os números c_n são os coeficientes. Em particular temos um caso quando $a = 0$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots,$$

mais uma vez iremos determinar $x^0 = 1$, mesmo que $x = 0$.

Exemplo 3.8.2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Nesse caso, nosso $c_n = 1$, que nomeamos na (definição 3.8.1) , e o centro da série é $a = 0$.

Exemplo 3.8.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

mais uma série de potência onde $c_n = \frac{1}{n!}$ e o centro da série é dado por $a = 0$.

Propriedades 3.8.4:

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ onde $a - r < x < a + r, r > 0$ sendo o *raio de convergência*. Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

então,

1) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$, no intervalo $a - r < x < a + r$;
2) $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$, no intervalo $a - r < x < a + r$.

3.9 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

As séries de *Taylor* e *Maclaurin* auxiliam bastante no cálculo diferencial e integral, já que podemos escrever algumas funções elementares em forma de uma série de potência, mas para isso a nosso função necessita de derivadas de ordem superior.

Para entendermos melhor as séries de Taylor e Maclaurin, iremos responder as seguintes dúvidas:

1) Se uma função f permite uma representação em séries de potências

$$f(x) = \sum_{n=}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Qual é o formato das constantes c_n?

Supondo que nossa $f(x)$ tenha raio de convergência $r > 0$, com isso podemos operar com as **propriedades 3.8.4**, assim:

$$f(x) = \sum_{n=}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_3(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Logo, usando a **propriedade 3.8.4**, temos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

Para acharmos as constantes é necessário:

$$f(a) = c_0$$

$$f'(a) = c_1$$

$$f''(a) = 2c_2$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1c_n$$

Mas, nosso propósito é achar $c_0, c_1, \cdots$, temos que:

$$c_0 = f(a)$$

$$c_1 = f'(a)$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

chegamos que,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Logo esse desenvolvimento é chamado de *desenvolvimento de Taylor da função* f no intervalo $a - r < x < a + r$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

dessa forma a *Série de Taylor* é designada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

a *Série de Maclaurin* é um caso particular da Série de Taylor, por esse motivo que vem a ligação entre esses dois pesquisadores. Se o *raio de convergência* $a = 0$, temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

2) Segunda dúvida, é qual condição necessária para que as funções possam ser representadas nas *Séries de Taylor*?

Definição 3.9.1: Dada uma função $f(x)$ que possui derivadas de ordem enésima em um intervalo contendo a, o *Polinômio de Taylor* de f de grau n em torno de $x = a$ é o polinômio $P_n(x)$ dado por:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

O *Polinômio de Maclaurin* é um caso particular do *Polinômio de Taylor*, fazendo $a = 0$, temos que:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Exemplo 3.9.2: Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$

Solução: Uma condição necessária para que uma $f(x)$ tenha uma representação na Série de Taylor e de Maclaurim é que a $f^{(n)}(x)$. No nosso exemplo, temos:

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \cdots, f^{(n)} = e^x, \cdots.$$

Dessa forma,

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \cdots, f^{(n)}(0) = 1, \cdots.$$

Portanto, nosso polinômio tem a forma,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$$

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Logo,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Teorema 3.9.3: Seja f uma função C^∞ (possui derivadas de todas as ordens) em algum intervalo que contém a. Dado x qualquer nesse intervalo, existe um número z tal que $a < z < x$, tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

O $R_n(x)$ é denominado o resto da *fórmula de Taylor*. Se $a = 0$ no **teorema 3.9.3** , temos a *fórmula de Maclaurin* com Resto.

Teorema 3.9.4: Seja f uma função C^∞ em algum intervalo que contém a e seja $R_n(x)$ o resto de *Taylor* de f em a. Se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

para todo x no intervalo, então $f(x)$ é representada pela série de *Taylor* para todo f em a.

Exemplo 3.9.5: Encontre a série de *Maclaurin* de $sin(x)$ e demonstre que ela representa $sin(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: O que precisamos fazer é usar o **Teorema 3.9.3,** e logo após, iremos usar o **Teorema 3.9.4.** Com efeito:

$$f(x) = \sin(x)\,, f'(x) = \cos(x)\,, f''(x) = -\sin(x)\,, f'''(x) = -\cos(x),$$

$$f^{IV}(x) = \sin(x)\,, \cdots$$

e por sua vez,

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{IV}(0) = 0, \cdots$$

Chegamos que $P_n(x)$ é da forma

$$P_n(x) = (0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

então,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x).$$

Como a função $f(x) = \sin(x)$ tem derivadas periódicas, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|f^{n+1}(x)| = |sin(x)| \quad ou \quad |f^{n+1}(x)| = |\cos(x)|.$$

Aplicando o **Teorema 3.9.3,** existe um número z tal que $a < z < x$, tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Mas,

$$|f^{n+1}(z)| \leq 1, \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Com isso,

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Portanto, usando a **Definição 3.7.5,** temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+2)}\right| = |x| \cdot 0 = 0,$$

portanto pelo teste da razão mostramos que $\lim_{n\to\infty} R(x) = 0$, assim

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemplo 3.9.6: Obtenha a série de *Maclaurin* para $\cos(x)$.

Solução: Para resolver esse problema iremos derivar o $\sin(x)$, assim achamos o $\cos(x)$.Então pelo Exemplo 3.9.5, temos:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

derivando ambos os lados, e usando a **Propriedades 3.8.4** no lado direito da igualdade, chegamos que,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

mas, $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$, então

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)(2n)!}$$

logo,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4 IDENTIDADE DE EULER

Ao longo do trabalho mostramos várias propriedades importantes para chegar a *identidade de Euler*. Usando o **Exemplo 3.9.2** , temos que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Agora fazendo uma substituição $x = i\theta$, onde $i\theta \in \mathbb{C}$, Assim

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

Usando a propriedade de potência, temos que:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots$$

Então, temos pelas propriedades de números complexos que.

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i,$$

assim,

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots,$$

dessa forma, iremos organizar os termos, os que têm a unidade imaginária de um lado e os que não tem a unidade imaginária do outro lado, então

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + \left(i\theta - \frac{i(\theta)^3}{3!} + \frac{i(\theta)^5}{5!} + \frac{i(\theta)^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$e^{i\theta} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

Pelo **Exemplo 3.9.5** e **Exemplo 3.9.6**, temos que:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + isin(\theta),$$

o qual substituindo o valor de π no lugar de x, tem-se que

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1,$$

ou seja,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Para muitos, a igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$ é uma das relações mais bonitas da matemática, uma vez que reúnem em uma simples igualdade parâmetros totalmente independentes entre si, pois i é a unidade imaginária, e é o número irracional já discorrido anteriormente e π é o número irracional, o qual é obtido pela razão entre comprimento de qualquer circunferência e o comprimento do seu respectivo diâmetro (EVES, 2004).

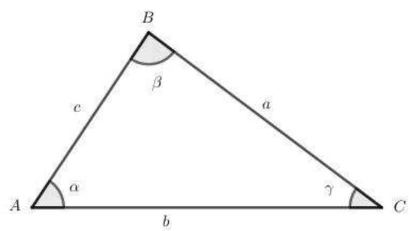
Outrossim, em consonância com Viana (2021), Euler é considerado o matemático mais prolífico da história, visto que o mesmo publicou centenas de artigos, os quais em sua maioria possuem relevância para comunidade científica até os dias atuais, e essas conclusões citadas, ou seja, as que envolvem o número e são as mais famosas, pois são resultados que até no ensino médio podem ser perfeitamente enunciados.

5 TRIÂNGULOS

Nessa secção iremos definir algumas propriedades de triângulos, que serão necessários para demonstrar o teorema de *Herão* através da identidade de *Euler*. Os resultados a seguir tem como base em Barbosa (1995).

Definição 5.1: Triângulo é um polígono formado por três lados e três ângulos internos. Os vértices de um triângulo são representados por letras maiúsculas e os lados são representados por letras minúsculas. De forma alternativa, considere três pontos não alinhados, A, B e C. Chamamos de triângulo a união dos segmentos AB, BC e CA.

Figura 4: triângulo qualquer

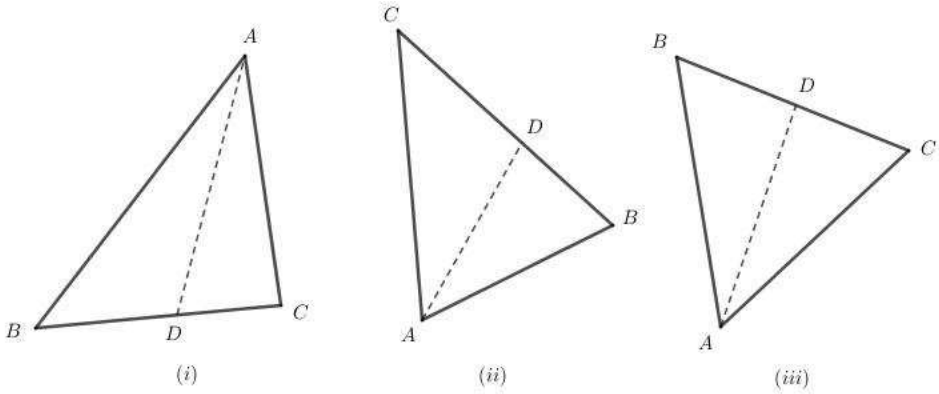


Fonte: O autor

Denotaremos por ABC todo triângulo de vértice A, B e C.

Definição 5.2: Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contem B e C. O segmento AD chama-se *mediana* do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se *bissetriz* do angulo Â se a semi-reta S_{AD} divide o angulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos iguais, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$. O segmento AD chama-se *altura* do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.

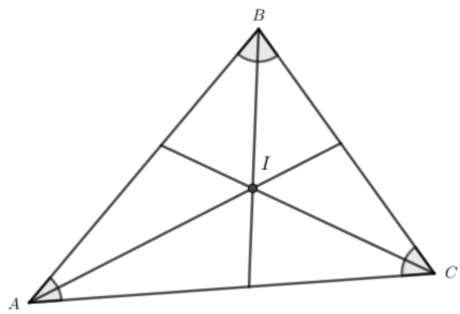
Figura 5: *Mediana*, *bissetriz e altura.*



Fonte: O autor

Definição 5.3: No triângulo temos três vértices, portanto teremos três ângulos internos. Em cada um desses ângulos internos podemos traçar uma reta, partindo do vértice que secciona o ângulo ao meio, ou seja, podemos traçar uma *bissetriz*. Ao traçarmos as três bissetrizes de um triângulo, elas vão se intersectar em um único ponto, sendo este ponto denominado *incentro*.

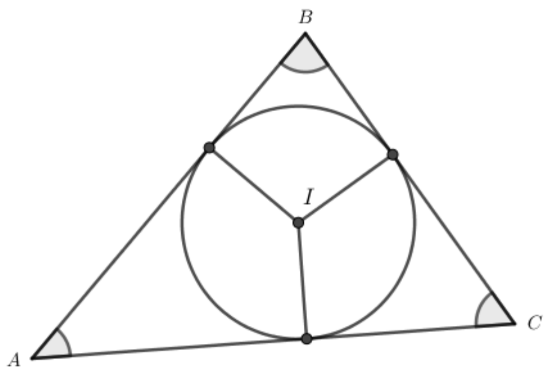
Figura 6: *Incentro.*



Fonte: O autor

O *incentro* determinado na **Figura 6** é obtido através do encontro das bissetrizes, esse ponto I é equidistante aos lados AB, BC e AC. Dessa forma podemos desenhar um círculo contido no triângulo ABC, onde os aos lados AB, BC e AC tangenciam esse circulo e I é o centro dessa circunferência.

Figura 7: Círculo circunscrito em um triângulo



Fonte: O autor

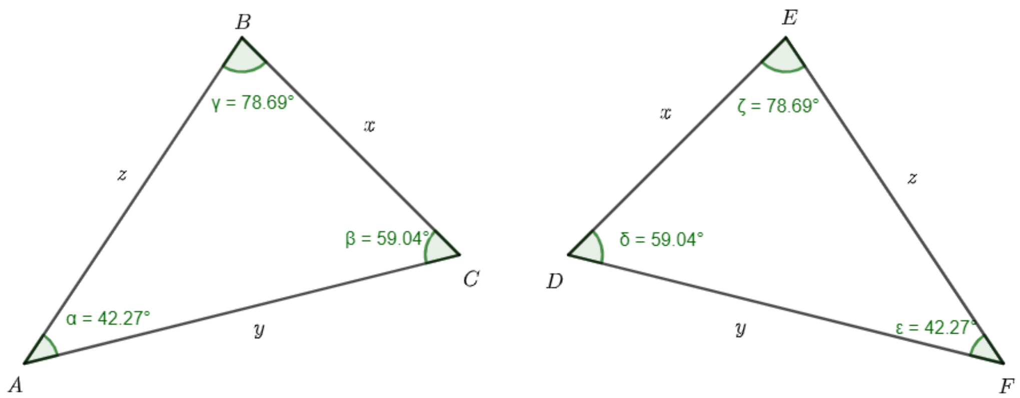
5.1 CONGRUÊNCIA

Dado a forma simples que os triângulos são construídos, muito deles podem ser obtidos a partir de outros triângulos, reduções ou ampliações de suas medidas, ou até mesmo uma simples rotação da figura. Congruência entre triângulos ocorre quando as medidas equivalentes são iguais, ou seja, os ângulos internos e a medida dos lados, de um ponto pra outro, são os mesmo.

Definição 5.1.1: Diremos que dois segmentos AB, CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida.

Definição 5.1.2: Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes**.**

Figura 8: triângulos congruentes



Fonte: O autor

Os triângulos ABC e DEF são congruentes. De fato, considere a relação biunívoca $A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow D$. Note que, $\overline{AB} = \overline{EF} = z$, $\overline{AC} = \overline{FD} = y$ e $\overline{BC} = \overline{ED} = x$, e para os ângulos $\hat{A} = \hat{F}, \hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.

Pela a rigidez que o triângulo apresenta, para que dois triângulos sejam congruentes, será necessário e suficiente que eles tenham as medidas iguais dos lados.

Teorema 5.1.3: Se dois triângulos tem três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

O teorema acima é conhecido pelo caso de congruência Lado Lado Lado (LLL). Existem mais critérios de congruência, mas nesse trabalho iremos utilizar o (LLL).

6 TEOREMA DE HERÃO

Geralmente para calcular a área de um triângulo necessitamos de um de seus lados e da altura correspondente a ele, nessa secção iremos abordar um novo método peculiar para determinar a área de um triângulo qualquer utilizando apenas o comprimento dos seus lados, que será denominado Teorema de *Herão*. Para auxiliar na demonstração do teorema, iremos utilizar a Identidade de *Euler*.

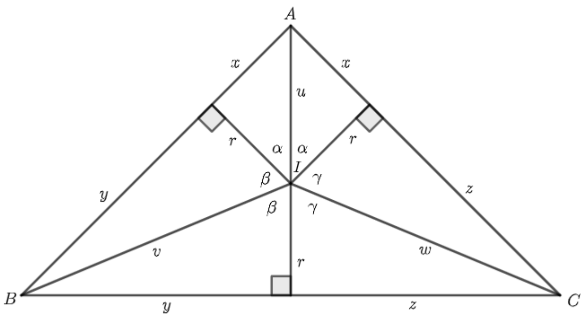
Teorema 5.1: Considere um triângulo qualquer de lados $a, b\ e\ c$, denotemos $p = \frac{a+b+c}{2}$. Temos que a área S do triângulo é dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Demonstração:

Consideremos que o triângulo é formado pelos vértices A, B e C, onde a é o lado oposto ao vértice A, b é oposto ao vértice B e c é oposto ao vértice C. Tracemos as bissetrizes u, v e w dos ângulos dos vértices A, B e C, respectivamente. Sabemos que as bissetrizes se encontram em um único ponto, que denominaremos I, chamado de incentro. Note que, o ponto I é o centro da circunferência circunscrita no triângulo ABC, denotemos por r o raio da circunferência. Nomeando os lados e ângulos para a nossa construção, ficamos com a seguinte figura:

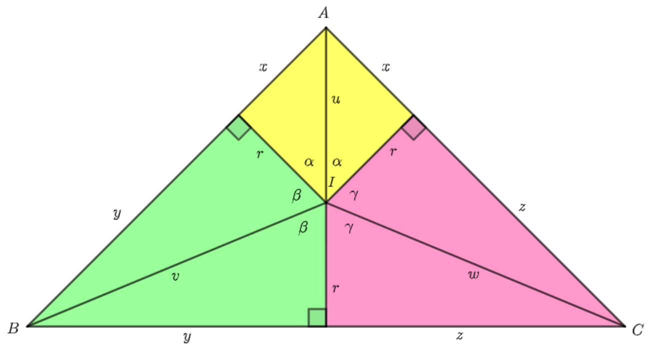
Figura 9: Triângulo ABC com seu incentro



Fonte: O autor

Note que nesse caso temos que $a = y + z$, $b = x + z$ e $c = y + z$. Sendo assim seu semiperímetro, isto é, a metade do seu perímetro é $p = x + y + z$. Pelo o caso de congruência de triângulos LLL(Lado, Lado e Lado) vemos que o triângulo ABC é dividido por 3 pares de triângulos congruentes, que estão representados pela mesma cor na Figura 9.

Figura 10: Triângulos congruentes



Fonte: O autor

As áreas de cada um dos triângulos verdes são $\frac{yr}{2}$, percebe-se que as áreas de cada um dos triângulos amarelos equivalem á $\frac{xr}{2}$ e dos rosas correspondem á $\frac{zr}{2}$. Desse modo, a área S do triângulo ABC é igual

$$S = 2 \cdot \frac{yr}{2} + 2 \cdot \frac{xr}{2} + 2 \cdot \frac{zr}{2} = (y + x + z)r,$$

como vimos inicialmente, temos $p = x + y + z$, então $S = pr$.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos três triângulos da Figura 5.3 do triângulo verde, obtemos

$$v^2 = y^2 + r^2,$$

analogamente, para o triângulo amarelo temos,

$$u^2 = x^2 + r^2,$$

por fim, para o rosa

$$w^2 = z^2 + r^2.$$

Notemos que u, v e w coincidem exatamente com as *normas* dos números complexos, $r + ix$, $r + iy$ e $r + iz$ respectivamente. Sejam α, β e γ os ângulos centrais da **figura 5.2**,medidos em radianos, temos que

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi,$$

logo,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Ademais analisando os triângulos coloridos, temos

$$\cos\alpha = \frac{r}{u},\ \sin\alpha = \frac{x}{u},\ \cos\beta = \frac{r}{v},\ \sin\beta = \frac{y}{v},\ \cos\gamma = \frac{r}{w}, \sin\gamma = \frac{z}{w},$$

deste modo, usando a *forma polar* de um número complexo, temos:

$$r + ix = u\left(\frac{r}{u} + i\frac{x}{u}\right) = u(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = ue^{i\alpha},$$

$$r + iy = v\left(\frac{r}{v} + i\frac{y}{v}\right) = v(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = ve^{i\beta},$$

$$r + iz = w\left(\frac{r}{w} + i\frac{z}{w}\right) = w(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma) = we^{i\gamma}.$$

Calculando o produto desses números complexos, por um lado, temos:

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz) = ue^{i\alpha}ve^{i\beta}we^{i\gamma} = uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)},$$

porém, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

$$uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = uvwe^{i\pi},$$

pela identidade de *Euler*, temos que $e^{i\pi} = -1$, então

$$uvwe^{i\pi} = -uvw,$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(r + ix)(r + iy)(r + iz) &= \big(r^2 - xy + i(xr + ry)\big)(r + iz)\\ &= r^3 - rxy - zxr - zry + i(zr^2 - zxy + xr^2 + yr^2)\\ &= r(r^2 - xy - zx - zy) + i(r^2(z + x + y) - zxy)).\end{aligned}$$

Como o vimos que o produto resultava em um número real $-uvw$, temos que a parte imaginária do número complexa acima é nula, assim:

$$r^2(z+x+y) - zxy = 0,$$

isolando r

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},$$

substituindo, $p = x+y+z$, $a = y+z$, $b = x+z$ e $c = x+z$, obtemos:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

concluímos que,

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o século XVIII, a Análise Complexa tem se mostrado uma das mais proveitosas teorias no contexto global da Matemática. Através dela foi possível compreender melhor as funções definidas por séries de potências, entre outros feitos igualmente relevantes, por exemplo, estabelecer relações importantes entre funções elementares como, $e^{ix} = cos\, x + isen\, x$. Por meio de um problema de Matemática Financeira, foi possível definir a constante de Euler "e", essa constante deriva de uma série de outros fenômenos importantes, que são encontrados não só nas finanças, mas economia, física, engenharia, biologia, astronomia e etc, e que validam a teoria de que há certa harmonia entre a matemática e a natureza.

Neste trabalho exploramos um método para demonstrar o Teorema de Herão através da Identidade de Euler. Nesse método necessitamos da relação direta entre a análise complexa e a geometria euclidiana plana.

Para próximos trabalhos necessita-se relacionar a análise complexa com a geometria plana, para assim conseguir novos métodos de demonstrações.

Logo, temos em mente que os objetivos foram concluídos e esperamos que esse trabalho sirva de referência, para novos métodos de demonstrações.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas, **Geometria Euclidiana Plana**. DOLCE, Osvaldo e outros, Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, **Geometria Plana**, Editora Atual **Bibliografia** complementar: ANTAR Neto, Aref e outros, **Geometria**, vol. 5, Ed.

B. BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003

CORDEIRO, Alexander Magno et al. Systematic review: a narrative review. Revista do colégio Brasileiro de Cirurgiões, v. 34, n. 6, p. 428-431, 2007.

EVES, Howard. **História da Geometria: tópicos de história para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, Howard**. Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

LARA, I. C. M; **O Ensino da Matemática por Meio da História da Matemática: Possíveis Articulações com a Etnomatemática**. VIDYA, v. 33, Santa Maria, 2013.

LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de Uma Variável**. 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA 2006.

OLIVEIRA, J. S. B.; ALVES, A. X.; NEVES, S. S. M. **História da Matemática: contribuições e descobertas para o ensino-aprendizagem de matemática**. Belém: SBEM, 2008.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antônio. **História do Número e: Gênese e Aplicações**. Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 31-44, jun. 2013.

ROTHER, Edna Terezinha**. Revisão sistemática X revisão narrativa**. Acta Paulista de enfermagem, v.20 , n.2, p. vvi, 2007.

STEWART, James. **Cálculo**. volume 2 / James Stewart ; tradução EZ2 Translate. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

VIANA, Marcelo. **Euler, o Matemático mais prolífico da história**. Folha de S.Paulo. São Paulo, p. 100-103. fev. 2021.

RIBEIRO, Raul Cintra de Negreiros. **Números complexos :** aplicações / Raul Cintra de Negreiros Ribeiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**, **6**: Complexos, polinômios, equações. Atual Editora. 1993.