Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa †

sob orientação do

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Outubro de 2007

†O autor contou com apoio financeiro da Capes

Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro de 2007

Resumo

Neste trabalho usamos métodos variacionais para mostrar a existência de solução fraca para dois tipos de problema. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

O segundo é referente ao sistema Hamiltoniano

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Abstract

In this work we use variational methods to show the existence of weak solutions for two types problems. The first, is related with a following Ordinary Differential Equations of the form

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

The second is relating at the Hamiltonian Systems

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Agradecimentos

-Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bençãos e as graças alcançadas.

-Aos Professores José de Arimatéia e Claudianor Oliveira pela atenção e paciência durante a realização deste trabalho.

-Ao Professor Marco Aurélio pela atenção e auxilio dado durante todo o curso.

-Aos Professores Giovany e Angelo por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

-A todos que fazem parte da minha família, em especial a meu irmão Renato Maurício pelo apoio e confiança depositada em mim.

-Aos professores da Pós-Graduação: Daniel Cordeiro, Jaime, Marco Aurélio e Arimatéia pelas disciplinas lecionadas e que contribuiram para a formação do meu conhecimento.

-Aos professores: Vânio e Braulio pela confiança a mim atribuida.

-A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG.

-Aos colegas de curso pelo companherismo, motivação e que diretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

-A Capes pelo apoio financeiro.

-Aos projetos Casadinho/CNPQ e Instituto do Milênio.

Dedicatória

A minha família em especial a meu irmão Renato Maurício.

Notações

(1) $(.,.)$ produto interno.

(2) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:

(i) $\|v\|$ é referente a norma usual de v no $\mathbb{R}^N$.

(ii) $|x|$ é o valor absoluto de x, se $n = 1$.

(3) Se $f : X \to Y$ é uma função com X e Y espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (2).

(4) [.] referência bibliográfica.

(5) $D^{'}$ derivada no sentido das distribuições.

(6) X^* espaço dual de X.

(7) $\rightharpoonup$ convergência fraca.

(8) $q.t.p$ quase todo ponto.

(9) $\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}$.

(10) $K^c = \{u \in X : \phi(u) = c \text{ e } \phi^{'}(u) = 0\}$.

(11) $A_\delta = \{u \in X : dist(u, A) \leq \delta\}$.

(12) $\mathbb{C}^k$ Espaço dos vetores com k coordenadas complexas.

(13) $dist(u, A) = inf\{\|u - v\|; v \in A\}$ distância do ponto u ao conjunto A.

(14) $\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^p dt + \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ norma no Espaço $W^{1,p}([0,T])$.

Conteúdo

Notações 6

Introdução 6

1 Princípios de Minimax **9**

1.1 Pseudo - gradiente 9

1.2 Lema de Deformação 13

1.3 Condições de Compacidade 21

2 Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado **29**

2.1 A Desigualdade de Wirtinger 30

2.2 Existência de Solução 35

3 A Transformada de Legendre **46**

3.1 Introdução 46

3.2 Funções Convexas 47

3.3 Função de Legendre 49

3.4 Inequações 59

3.5 Dual Hamiltoniano 73

3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo 78

3.7 Subharmônicas 92

3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito 98

3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita 102

4 Pontos Críticos de Funcionais Invariantes **114**

4.1 S^1-índice 115

4.2 O Lema de Deformação 115
4.3 Teorema da Multiplicidade 130
4.4 Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa 134

A Séries de Fourier **144**

B Funcionais Diferenciáveis **147**

C Resultados Gerais **153**

Bibliografia **157**

Introdução

Nesta dissertação nos baseamos principalmente em [12] que corresponde ao curso de Métodos de Minimax em Teoria de Pontos Críticos que foi ministrado na Universidade de Brasília em Janeiro e Fevereiro de 1983. Estamos interessados em usar métodos variacionais para determinar soluções fracas para os seguintes problemas. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t). \tag{1}$$

Em particular, se considerarmos $G(u) = -cos u$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u^{''}(t) + sen(u(t)) = f(t).$$

A existência de solução T-periódica para a equação (1) é devido a Ambrosetti-Rabinowitz e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia definido por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'\,2}}{2} - G(u) + fu \right] dt.$$

O segundo problema trata-se de encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

onde $J : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ é tal que

$$J(x, y) = (-y, x)$$

e ∇ denota o gradiente com respeito a u.

No caso forçado é natural assumir que H é T-periódica com respeito a t e observar soluções T-periódicas ou soluções kT-periódicas para algum $k \geq 2$, o qual chamaremos posteriormente de soluções subharmônicas.

No caso livre é natural observar soluções periódicas não-constantes com período prescrito ou energia prescrita.

No **Capítulo 1** fizemos um breve estudo sobre Pseudo-gradiente, o qual é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do Lema de Deformação que foi abordado neste capítulo. Além disso, definimos algumas condições de compacidade que são de grande importância para o desenvolvimento e o entendimento dos Lemas e os Teoremas abstratos que serão vistos no decorrer desta dissertação.

No **Capítulo 2** primeiramente mostramos algumas desigualdades, dentre as quais, a desigualdade de Wirtinger, as quais são muito importantes no estudo de soluções periódicas. Mostramos também que o espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \ \textit{é absolutamente contínua,}\ \ T\textit{-periódica}\ \ e \ \int_0^T |u^{'}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno definido por

$$(u, v) = \int_0^T (u^{'} v^{'} + uv) dt,$$

e o funcional energia ϕ associado a equação (1) satisfaz a condição Fraca de Palais-Smale (WPS) definida no Capítulo 1. Além disso, verificamos a existência de solução T-periódica para a equação

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t),$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função T-periódica.

No **Capítulo 3** fizemos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, os quais serão muito utilizados na procura de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano convexo. No primeiro momento nos preocupamos em encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Num segundo momento encontramos soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

com período minimal prescrito e com energia prescrita.

No **Capítulo 4** fizemos um breve estudo sobre funcionais invariantes, subconjuntos invariantes e aplicações invariantes, que serão de muita importância para mostrarmos e entendermos uma forma mais geral do Lema de Deformação e o Teorema da Multiplicidade de pontos críticos que abordaremos neste capítulo. Além disso, vamos fazer um breve estudo sobre o número de órbitas Hamiltonianas periódicas em uma superfície convexa.

No **Apêndice A** fizemos uma breve revisão sobre as séries de Fourier.

No **Apêndice B** definimos a derivada de Fréchet e mostramos que os funcionais utilizados na dissertação são de classe C^1.

Finalmente no **Apêndice C** enunciamos alguns resultados da Análise funcional, Teoria da medida e Espaços de Sobolev que foram usados na dissertação.

Capítulo 1

Princípios de Minimax

Neste capítulo nosso objetivo é demonstrar o Lema de Deformação e alguns Teoremas abstratos, os quais serão de grande importância no desenvolvimento dos próximos capítulos, para tanto, usaremos o conceito de pseudo-gradiente e algumas condições de compacidade.

1.1 Pseudo - gradiente

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $Y = \{u \in X : \phi^{'}(u) \neq 0\}$. Um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y é uma aplicação contínua localmente Lipschitziana $V : Y \to X$ tal que, para cada $u \in Y$,*

$$\|V(u)\| \leq 2\,\|\phi^{'}(u)\|, \tag{1.1}$$

$$\langle \phi^{'}(u), V(u) \rangle \geq \|\phi^{'}(u)\|^2. \tag{1.2}$$

Lema 1.1 *Sob as hipóteses da Definição 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y.*

Demonstração:

Dado $u \in Y$, temos $\phi^{'}(u) \neq 0$ e

$$\|\phi^{'}(u)\| = sup\,\{\langle \phi^{'}(u), w \rangle : \|w\| = 1\}.$$

Segue da definição de supremo que dado $\epsilon = \frac{\|\phi^{'}(u)\|}{3} > 0$, existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \phi^{'}(u), w_u \rangle > \|\phi^{'}(u)\| - \epsilon$$

implicando

$$\langle \phi^{'}(u), w_u \rangle > \frac{2}{3}\ \|\phi^{'}(u)\|.$$

Considerando a função $v : Y \to X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2}\|\phi^{'}(u)\|\, w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2}\ \|\phi^{'}(u)\| < 2\, \|\phi^{'}(u)\|. \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle = \frac{3}{2}\ \|\phi^{'}(u)\|\, \langle \phi^{'}(u), w_u \rangle$$

de onde segue,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle > \frac{3}{2}\ \|\phi^{'}(u)\|\, \frac{2}{3}\ \|\phi^{'}(u)\|$$

logo,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle > \|\phi^{'}(u)\|^2. \tag{1.4}$$

Visto que $\phi^{'}$ é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de u em Y tal que

$$\|v\| < 2\, \|\phi^{'}(w)\|\,, \forall\, w \in N_u \tag{1.5}$$

e

$$\langle \phi^{'}(w), v \rangle >\ \|\phi^{'}(w)\|^2\ , \forall\, w \in N_u. \tag{1.6}$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y (Ver[10]).

No que segue, consideramos

$$\rho_i(u) = dist(u, (N_{u_i})^c), \forall\, u \in Y$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_j \rho_j(u)} v_i\,, \forall\ u \in Y \tag{1.7}$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2}\ \|\phi^{'}(u_i)\|\, w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, cada $u \in Y$ só pertence apenas a um número finito de N_{u_i} (Ver[10]). Logo as somas definidas em (1.7) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i}. Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos $v_i' s$, que verificam

$$\|v_i\| < 2\,\|\phi^{'}(u)\|, \; \forall\, u \in N_{u_i}$$

e

$$\langle \phi^{'}(u), v_i\rangle > \; \|\phi^{'}(u)\|^2, \quad \forall\, u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_i \; = \frac{\rho_1(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_1 + \frac{\rho_2(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_2 + ... + \frac{\rho_n(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_n$$

implicando que,

$$\|V(u)\| \leq \; \frac{\rho_1(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_1\| + \frac{\rho_2(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_2\| + ... + \frac{\rho_n(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_n\|$$

e portanto,

$$\|V(u)\| \leq \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\| \; = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u, segue que

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi^{'}(u)\|$$

e

$$\langle \phi^{'}(u), V(u)\rangle \geq \; \|\phi^{'}(u)\|^2.$$

Para mostrar que V é localmente lipschitiziana, basta mostrar que cada parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\|$$

é localmente lipschitziana.Observando que para cada i, $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente lipschitziana. Para tanto considerando z arbitrário tal que $u, v \in V_z$ temos,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)}$$

donde segue,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_1(v) + \rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(u)\,\rho_1(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

o que implica,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}.$$

Assim,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(v) + \rho_1(v)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

de onde segue que,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)\,[\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]} + \frac{\rho_1(v)\,[\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| \leq & \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,|\rho_1(u) - \rho_1(v)| + \\ & + \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,|\rho_2(v) - \rho_2(u)|. \end{aligned}$$

Sendo ρ_1 e ρ_2 funções lipschitzianas, existem K_1 e K_2 tais que $|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq K_1\,\|u - v\|$ e $|\rho_2(v) - \rho_2(u)| \leq K_2\,\|u - v\|$, logo

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| \leq & \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]}\,\frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,K_1\,\|u - v\| + \\ & + \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]}\,\frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,K_2\,\|u - v\|. \end{aligned}$$

Desde que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$ e como ρ_1 e ρ_2 são funções contínuas, existe uma vizinhança V_z de u tal que

$$\rho_1(v) + \rho_2(v) > a\ , \forall\, v \in V_z.$$

Portanto,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a}\,K_1\,\|u - v\| + \frac{1}{a}\,K_2\,\|u - v\|$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1 \ , \ \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo,

$$|g(u)-g(v)| \leq \frac{1}{a}\,(K_1+K_2)\|u-v\| \ , \ \forall\, u,v \in V_z$$

mostrando que g é localmente lipschitziana. Concluíndo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y.

■

1.2 Lema de Deformação

Nesta subseção iremos demonstrar alguns lemas de deformação, o primeiro deles é o lema de deformação de Clark.

Considerando X um Espaço de Banach, para $S \subset X$ e $\alpha > 0$ definamos

$$S_\alpha = \{u \in X : dist(u,S) \leq \alpha\}.$$

Lema 1.2 *Sejam* $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ *e* $\epsilon,\delta \ > 0$ *tais que, para todo* $u \in \phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$,

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}. \tag{1.8}$$

Então, existe $\eta \in C(\ [\ 0,1\ ] \times X, X)$ *tal que*
(i) $\eta(0,u) = u$, $\forall\, u \in X$
(ii) $\eta(t,u) = u$, $\forall\, u \in (\phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta})^c$, $\forall \ \ t \in [0,1]$
(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$
(iv) $\eta(t,.)$ *é um homeomorfismo para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração:

No que segue denotamos por $A, B \subset X$ os seguintes conjuntos

$$A = \phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}([\ c-\epsilon, c+\epsilon\ ]) \cap S_\delta.$$

Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente V para ϕ em $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$. Sendo $A = \phi^{-1}([\ c - 2\ \epsilon, c + 2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$, segue que $A \subset Y$. De fato, por (1.8)

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0,\ \forall u \in A$$

logo $\phi'(u) \neq 0$, mostrando que $A \subset Y$.

Considerando a função $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana dada por

$$\psi(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

onde

$$\rho_1(u) = dist(u, \overline{A^c})$$

e

$$\rho_2(u) = dist(u, B)$$

tem-se,

$$\begin{cases} \psi(u) = 1 \ \text{ em } \ B \\ \psi(u) = 0 \ \text{ em } \ \overline{A^c} \\ 0 \leq \psi(u) \leq 1 \ \text{ em } \ X. \end{cases} \tag{1.9}$$

Se $f : X \longrightarrow X$ é o campo vetorial definido por

$$f(u) = \begin{cases} -\dfrac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ V(u) \ \text{ em } A \\ 0 \ \text{ em } \ A^c \end{cases}$$

note que f é localmente lipschitziana, pois

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v)}{\|V(v)\|}\ V(v) - \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ V(u)$$

daí,

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(u)}{\|V(u)\|\ \|V(v)\|}$$

assim,

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\|V(u)\|\ \|V(v)\|}[\psi(v)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(u)\|\ V(v) +$$

$$+\psi(u)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(v) + \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(u)]$$

consequentemente,

$$f(u)-f(v)=\frac{1}{\|V(u)\|\ \|V(v)\|}\{\|V(u)\|\ V(v)\ (\psi(v)-\psi(u))+$$

$$+\psi(u)\ \|V(v)\|(V(v)-V(u))+\psi(u)\ V(v)(\|V(u)\|-\|V(v)\|)\}$$

logo,

$$\|f(u)-f(v)\|\leq|\psi(v)-\psi(u)|+\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\|V(v)-V(u)\|+\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\|V(u)-V(v)\|.$$

Sendo ψ e V localmente lipschitzianos, existem $K_1, K_2 > 0$ e z arbitrário tal que $u, v \in V_z$ satisfazendo

$$|\psi(v)-\psi(u)|\leq K_1\ \|v-u\|,\quad \forall\ u,v\in V_z$$

e

$$\|V(v)-V(u)\|\leq K_2\|v-u\|,\quad \forall\ u,v\in V_z$$

mostrando que,

$$\|f(u)-f(v)\|\leq K_1\ \|v-u\|+\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ K_2\|v-u\|+\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ K_2\|v-u\|$$

logo,

$$\|f(u)-f(v)\|\leq\left(K_1+2\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}K_2\right)\|v-u\|.$$

Usando a continuidade das funções ψ e V, podemos concluir que f é localmente lipschitziana. Usando o fato que a função f é limitada e localmente lipschitziana, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy, que denotaremos por (PC),

$$(PC) \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{dw}{dt}(t)=f(w(t))\\ w(0)=u\end{array}\right.$$

possui uma única solução, a qual denotaremos por $w(t,u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$.

No que segue, consideramos $\eta : [0,1]\times X \to X$ o campo vetorial dado por

$$\eta(t,u)=w(\delta t,u).$$

Assim,

$$\eta(0,u) = w(0,u) = u$$

isto é,

$$\eta(0,u) = u$$

mostrando (i).

Seja $u \in A^c$ e defina $w_1(t) = u$. Observe que

$$w_1^{'}(t) = 0 = f(w_1(t))$$

pois, se $u \in A^c$, tem-se $f(u) = 0$. Desse modo

$$\begin{cases} w_1^{'}(t) = f(w_1(t)) \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Logo, pela unicidade de solução de (PC), devemos ter

$$w_1(t) = w(t,u) = u, \ \forall\ u \in \ A^c \ e \ \forall\ t \in [0,1],$$

e consequentemente

$$\eta(t,u) = u, \ \forall\ u \in \ A^c \ e \ \forall\ t \in [0,1]$$

o que mostra (ii).

Agora, observe que para $t \geq 0$,

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau$$

assim,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| = \left\| \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\| d\tau$$

o que implica,

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \frac{|\psi(w(\tau,u))|}{\|V(w(\tau,u))\|} \ \|V(w(\tau,u))\| \ d\tau.$$

Usando (1.9)

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t 1 \ d\tau \ = t \tag{1.10}$$

o que mostra que se $u \in S$, então $w(t,u) \in S_t$. De acordo com a igualdade

$$\frac{d}{dt} \ \phi(w(t,u)) = \langle \phi^{'}(w(t,u)), w^{'}(t,u) \rangle$$

temos,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = \langle \phi^{'}(w(t,u)), f(w(t,u))\rangle$$

consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = -\langle \phi^{'}(w(t,u)), \frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ V(w(t,u))\rangle$$

logo,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = -\frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \langle \phi^{'}(w(t,u)), V(w(t,u))\rangle.$$

Sendo V um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ, temos

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) \leq -\frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \|\phi^{'}(w(t,u))\|^2 \leq 0.$$

Portanto, a aplicação

$$t \mapsto \phi(w(.\ ,u))$$

é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$, iremos considerar dois casos:

(1) Para algum $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \delta]$, temos $\phi(\mathbf{w}(\mathbf{t},\mathbf{u})) \leq \mathbf{c} - \epsilon$.

Assim, como $\phi(w(.\ ,u))$ é não-crescente,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(t,u)) \leq c - \epsilon$$

donde segue,

$$w(\delta,u) \in \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, de (1.10),

$$\|w(\delta,u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(\delta,u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta,u) \in\ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Segue da definição de η , que

$$\eta(1,u) \in\ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$$

e portanto,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

(2) Para todo $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \delta]$, temos $\phi(\mathbf{w}(\mathbf{t}, \mathbf{u})) \geq \mathbf{c} - \epsilon$.

Visto que $\phi(w(.\ , u))$ é não-crescente,

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Por (1.10),

$$\|w(t,u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(t,u) \in S_\delta,$$

portanto,

$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}([\ c-\epsilon, c+\epsilon\ ]) \cap S_\delta.$$

Uma vez que,

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u))\ dt$$

temos, por (PC)

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \langle \phi'(w(t,u)), f(w(t,u))\rangle dt$$

isto é,

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \langle \phi'(w(t,u)), V(w(t,u))\rangle dt.$$

Usando o fato que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \|\phi'(w(t,u))\|^2\ dt$$

ou ainda

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t,u))}{2}\ \|\phi'(w(t,u))\|\ dt.$$

Sendo $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$ e $w(t,u) \in B$,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c + \epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2}\ \|\phi'(w(t,u))\|\ dt$$

e por (1.8),

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c + \epsilon - \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta}\ \ dt$$

logo,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon$$

portanto,

$$w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Pela definição de η,

$$\eta(1, u) \in \ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Assim, em qualquer dos casos (1) ou (2), encontramos

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta,$$

O que prova (iii).

Finalmente, para mostrarmos (iv), consideramos as funções

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ u &\rightarrowtail h(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ u &\rightarrowtail g(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Observe que

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, g(u))$$

o que implica,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Consequentemente,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t - \delta t, u)) = w(0, u) = u$$

isto é,

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Analogamente,

$$(g \circ h)(u) = u$$

mostrando assim que η é inversível.

Visto que, $w(\delta t, u)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais, temos de modo análogo que $w(-\delta t, u)$ é contínua, assím concluímos que η é um homeomorfismo, para todo $t \in [0, 1]$. Mostrando (iv).

■

Corolário 1.2 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitada inferiormente, $v \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que $\phi(v) \leq inf\phi + \epsilon$. Então, para todo $\delta > 0$ existe $u \in X$ tal que $\|u - v\| \leq 2\delta$, $\phi(u) \leq inf\phi\, + 2\epsilon$ e $\|\phi^{'}(u)\| < \dfrac{4\epsilon}{\delta}$.*

Demonstração:

Sendo ϕ limitado inferiormente, considere $c = inf\phi$, $S = \{v\}$ e observe que

$$v \in \phi^{-1}([\ inf\phi - \epsilon,\ inf\phi + \epsilon\ ]) \cap S. \tag{1.11}$$

Agora, suponha por contradição que existe $\delta > 0$, tal que para todo $u \in X$ verificando

$$\|u - v\| \leq 2\ \delta \quad e \quad \phi(u) \leq c + 2\ \epsilon$$

ou seja,

$$u \in \phi^{-1}\left([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\right) \cap S_{2\delta} \tag{1.12}$$

tem-se,

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}.$$

Usando o item (iii) do Lema 1.2,

$$\eta(1, v) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_{\delta},$$

o que é um absurdo, pois $\phi^{c-\epsilon} = \emptyset$.

■

1.3 Condições de Compacidade

O Corolário 1.2 ainda não implica na existência de um ponto crítico para ϕ. A fim de provar a existência de pontos críticos, veremos algumas condições de compacidade para ϕ.

Definição 1.3 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$.*

O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$ tem uma subsequência convergente.

O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale fraca (WPS) se toda sequência limitada $\{u_n\} \subset X$ tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$ tem uma subsequência convergente.

O funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ se, quando $\{u_n\} \subset X$ é tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, então c é um valor crítico de ϕ.

Lema 1.3 *A condição (PS) implica ao mesmo tempo em (WPS) e $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Primeiramente, vamos mostrar que a condição (PS) implica na condição (WPS)

De fato, seja (u_n) uma sequência limitada em X tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, logo $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, como por hipótese (u_n) satisfaz (PS) segue que (u_n) tem uma subsequência convergente.

Portanto, $(PS) \;\Rightarrow\; (WPS)$.

Agora, mostraremos que a condição (PS) implica na condição $(PS)_c$.

Com efeito, considere uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi^{'}(u_n) \to 0$. Visto que por hipótese ϕ satisfaz (PS), segue que existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que $u_{n_j} \to u \in X$. Sendo $\phi \in C^1$ em X, temos

$$\phi^{'}(u) = \phi^{'}(lim\ u_{n_j}) = lim\ \phi^{'}(u_{n_j}) = 0$$

e

$$\phi(u) = \phi(lim\ u_{n_j}) = lim\ \phi(u_{n_j}) = c$$

logo,

$$\phi(u) = c \quad e \quad \phi^{'}(u) = 0$$

ou seja, c é um valor crítico de ϕ. Portanto, $(PS) \;\Rightarrow\; (PS)_c$.

■

Lema 1.4 *Sejam $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $d \in \mathbb{R}$. Se ϕ satisfaz $(PS)_d$ e se d não é valor crítico de ϕ, então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\eta \in C\,(\,[\,0,1\,] \times X, X)$ tal que:*

(i) $\eta(0,u) = u \quad , \forall\, u \in X$

(ii) $\eta(t,u) = u \quad , \forall\, u \in (\phi^{-1}([\,d-2\epsilon, d+2\epsilon\,]))^c, \;\; \forall \;\; t \in [0,1]$

(iii) $\eta(1,\phi^{d+\epsilon}) \subset \phi^{d-\epsilon}$

(iv) $\eta(t,.)$ *é homeomorfismo para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração:

Uma vez que por hipótese d não é valor crítico de ϕ, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([d-2\alpha, d+2\alpha])$ então $\|\phi^{'}(u)\| \geq \beta$.

Com efeito, pois caso contrário existiria uma sequência (u_n) verificando

$$u_n \in \phi^{-1}\left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| < \frac{1}{n}$$

isto é,

$$\phi(u_n) \in \left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| \to 0$$

ou ainda,

$$\phi(u_n) \to d \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| \to 0.$$

Como por hipótese ϕ satisfaz $(PS)_d$, d seria um valor crítico de ϕ, o que é um absurdo.

Portanto existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([d-2\alpha, d+2\alpha])$ então $\|\phi^{'}(u)\| \geq \beta$.

Considerando

$$\epsilon \in (0,\alpha] \quad , \quad S = X \quad e \quad \delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$$

para cada,

$$u \in \phi^{-1}([d-2\epsilon, d+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

temos,

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

logo, pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C\,([\,0,1\,] \times X, X)$ sastifazendo (i) , (ii) , (iii) e (iv).

■

Teorema 1.4 *Seja $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ limitada inferiormente e seja $c = \inf \phi$. Se ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico (e o mínimo) de ϕ.*

Demonstração:

Suponhamos por contradição que c não é um valor crítico de ϕ, então pelo Lema 1.4, existem $\epsilon > 0$ e $\eta \in C\,([\ 0,1\ ] \times X, X)$ tais que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

o que é um absurdo, pois $c = \inf \phi$.

■

Teorema 1.5 *Sejam* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $u \neq v \in X$, $c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t))$ *e* $\Gamma = \{g \in C\,([\ 0,1\ ], X) \,:\, g(0) = u \text{ e } g(1) = v\ \}$. *Se*
(i) ϕ *satisfaz a condição* $(PS)_c$
(ii) *Existem* $0 < R < \|u - v\|$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *tais que se* $\|w - u\| = R$, *então* $\phi(w) \geq b > a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$.

Então $c \geq b$ *e* c *é valor crítico de* ϕ.

Demonstração:

Usando a condição (ii), para cada $g \in \Gamma$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\|g(t_0) - u\| = R$$

de onde encontramos,

$$\phi(g(t_0)) \geq b > a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

e consequentemente,

$$\max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t)) \geq b$$

mostrando que,

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t)) \geq b.$$

Suponhamos por contradição que c não é valor crítico de ϕ e fixemos $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c-a}{2}\right)$, então pelo Lema 1.4, existe $\eta \in C\,([\ 0,1\ ] \times X, X)$ satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv). Segue da definição de ínfimo que existe $g \in \Gamma$ verificando

$$\max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t)) \leq c + \epsilon. \tag{1.13}$$

Definindo,

$$h(t) = \eta(1, g(t))$$

temos, $h(t) \in C([0,1], X)$, e como

$$a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

devemos ter

$$\phi(u) < c - 2\epsilon \quad e \quad \phi(v) < c - 2\epsilon$$

ou seja,

$$v, u \in (\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]))^c$$

pelo item (ii) do Lema 1.4, obtemos

$$h(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, u) = u$$

e

$$h(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, v) = v$$

isto é,

$$h(0) = u \quad e \quad h(1) = v$$

portanto, $h \in \Gamma$.

Por (iii) do Lema 1.4,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

juntamente com (1.13), temos

$$g(t) \in \phi^{c+\epsilon}$$

assim,

$$\eta(1, g(t)) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

donde concluímos,

$$\phi(\eta(1, g(t))) \leq c - \epsilon$$

portanto,

$$\phi(h(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

mostrando que,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(h(t)) \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo , pois

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)).$$

■

Teorema 1.6 *Sejam* $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$*,* $u \neq v \in X$*,* $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\le t\le 1} \phi(g(t))$ *e* $\Gamma = \{g \in C(\ [\ 0,1\ ], X)\ :\ g(0) = u\ e\ g(1) = v\ \}$*. Se*

(i) ϕ *satisfaz as condições* $(PS)_c$ *e* (WPS)

(ii) *Existem* $0 < r < R < \|u - v\|$ *tais que se* $r \le \|w - v\| \le R$*, então* $\phi(w) \ge a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$*.*

Então, $c \ge a$ *é valor crítico de* ϕ*. Além disso, se* $c = a$*, existe um ponto crítico* w *tal que* $\phi(w) = a$ *e* $\|w - u\| = \dfrac{R + r}{2}$*.*

Demonstração:

Observe que, se $c > a$ é suficiente usar a prova do Teorema 1.5.

Agora, consideremos $c = a$ e $n \in N^*$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{R - r}{2}. \tag{1.14}$$

Segue da definição de c, que existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0\le t\le 1} \phi(g(t)) \le a + \frac{1}{n}$$

o que implica,

$$\phi(g(t)) \le a + \frac{1}{n}\ ,\ \forall\ t \in [0,1]$$

e consequentemente,

$$g(t) \in \phi^{a+\frac{1}{n}}\ ,\ \forall\ t \in [0,1].$$

Afirmação: Para cada $g \in \Gamma$, existe $t_n \in [0,1]$ tal que $\|g(t_n) - u\| = \dfrac{R + r}{2}$.

De fato, considere a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = \|g(t) - u\|, \quad g \in \Gamma.$$

Note que $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e

$$f(0) = \|g(0) - u\| = 0.$$

Além disso, sendo $0 < r < R$, temos

$$\frac{r}{2} < r < \frac{R + r}{2} < R.$$

Assim,

$$f(1) = \|g(1) - u\| = \|v - u\| > R > \frac{R + r}{2}$$

e

$$f(0) < \frac{R+r}{2} < f(1).$$

Sendo f contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver[9]), existe $t_n \in [0,1]$ tal que

$$f(t_n) = \frac{R+r}{2}$$

e portanto,

$$\|g(t_n) - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Escrevendo,

$$u_n = g(t_n)$$

temos,

$$a \leq \phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n} \tag{1.15}$$

e

$$\|u_n - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Considere,

$$S = \{u_n\} \quad , \quad c = a \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{n} \quad , \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{1.16}$$

e suponhamos que, para todo

$$u \in \phi^{-1}\left(\left[c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n}\right]\right) \cap S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

temos

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Então, pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C\left([\ 0,1\ ] \times X, X\right)$ tal que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Por (1.15) e (1.16),

$$u_n \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$$

e

$$v_n = \eta(1, u_n) \in \phi^{a-\frac{1}{n}} \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Assim,

$$\phi(v_n) \leq a - \frac{1}{n} < a \tag{1.17}$$

e

$$\|v_n - u\| \leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\|$$

implicando,

$$\|v_n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2}.$$

Usando (1.14),

$$\|v_n - u\| \leq \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = R$$

isto é,

$$\|v_n - u\| \leq R.$$

Por outro lado,

$$\|u_n - u\| \leq \|v_n - u\| + \|v_n - u_n\|$$

assim,

$$\|v_n - u\| \geq \|u_n - u\| - \|v_n - u_n\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e por (1.14),

$$\|v_n - u\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{R-r}{2} = r$$

logo,

$$r \leq \|v_n - u\| \leq R$$

implicando por (ii) que $\phi(v_n) \geq a$, o que é um absurdo com (1.17).

Portanto, existe

$$w_n \in \phi^{-1}([\ c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \tag{1.18}$$

tal que,

$$\|w_n - u_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

e

$$\|\phi^{'}(w_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}. \tag{1.19}$$

Note que,

$$\|w_n - u\| \leq \|w_n - u_n\| + \|u_n - u\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq R - r + \frac{R+r}{2}$$

logo,

$$\|w_n - u\| \leq \frac{3R - r}{2}$$

assim,

$$\|w_n\| - \|u\| \leq \frac{3R - r}{2}$$

ou seja,

$$\|w_n\| \leq \frac{3R - r}{2} + \|u\| \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

isto é, a sequência (w_n) é limitada.

Uma vez que (1.18) e (1.19) implicam que

$$\phi(w_n) \longrightarrow c \quad e \quad \phi^{'}(w_n) \longrightarrow 0.$$

Segue da hipótese que ϕ satisfaz a condição (WPS), que existe uma subsequência (w_{n_j}) tal que

$$w_{n_j} \longrightarrow w \quad em \quad X.$$

Como $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue

$$\phi(w) = \phi(lim\ w_{n_j}) = lim\ \phi(w_{n_j}) = c$$

e

$$\phi^{'}(w) = \phi^{'}(lim\ w_{n_j}) = lim\ \phi^{'}(w_{n_j}) = 0$$

mostrando que c é um valor crítico de ϕ.

Por outro lado,

$$\|u_{n_j} - w\| \leq \frac{2}{\sqrt{n_j}} + \|w_{n_j} - w\|$$

de onde concluímos que

$$\|u_{n_j} - w\| \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$u_{n_j} \longrightarrow w.$$

Desde que,

$$\|u_{n_j} - u\| = \frac{R + r}{2}$$

passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|w - u\| = \frac{R + r}{2}.$$

■

Capítulo 2

Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado

Neste capítulo nosso objetivo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções T-periódicas para a equação

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

Em particular, considerando $G(u(t)) = -cos(u(t))$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u^{''}(t) + sen(u(t)) = f(t).$$

A garantia de solução T-periódica para $u^{''} + G^{'}(u) = f(t)$ é devido a Ambrosetti-Rabinowitz (Ver [1]) e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia dado por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'\,2}}{2} - G(u) + fu\right] dt. \tag{2.1}$$

Começamos nosso estudo neste capítulo verificando algumas desigualdades elementares que são ferramentas básicas na teoria de soluções periódicas.

2.1 A Desigualdade de Wirtinger

Proposição 2.1 *Seja* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *uma função* T*-periódica absolutamente contínua tal que* $\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$*. Se* $\int_0^T u(t)dt = 0$*, então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \quad \textit{(Desigualdade de Wirtinger)}$$

e

$$\|u\|_\infty^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \quad \textit{(Desigualdade de Sobolev)}$$

Demonstração:

Considere o seguinte resultado, se u contínua, com $u^{'} \in L^2([0,T])$ e u T-periódica, então a série de Fourier gerada por u converge uniformemente a u. Além disso, vale a identidade de Parseval

$$\|c_k\|_2^2 = \sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \frac{1}{T} \|u\|_2^2.$$

Se

$$u \cong \sum_{k \neq 0} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T} t}$$

é a série de Fourier gerada por u, (Ver [Apêndice A]), a série de Fourier da sua derivada, $u^{'}$, é dada por

$$u^{'} \cong \sum_{k \neq 0} \frac{i2k\pi}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T} t}.$$

Pela identidade de Parseval,

$$\sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

e

$$\sum_{k \neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

ou seja,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Donde segue,

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

desde que,

$$\sum_{k\neq 0} k^2|c_k|^2 \geq \sum_{k\neq 0} |c_k|^2$$

obtemos

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{1}{T}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

logo,

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Além disso, note que

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} |c_k|\right)^2, \quad \forall\ t \in [0,T]$$

implicando

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} \frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k}.\frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}}|c_k|\right)^2, \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Observando que

$$\left(\frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2 \quad e \quad \left(\frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}}|c_k|\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$$

tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} \frac{T}{4\pi^2 k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T}|c_k|^2\right).$$

Desde que,

$$\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

ficamos com

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{T}{12}\sum_{k\neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T}|c_k|^2 = \frac{T}{12}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

e consequentemente

$$\|u\|_\infty^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right)\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

■

Corolário 2.2 *Seja $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua l - lipschitziana. Se u é uma solução não - constante T-periódica de $u^{'} = f(u)$, então*

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

Demonstração:

Sendo u solução não - constante T-periódica de $u^{'}(t) = f(u(t))$, devemos ter $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Desse modo $u^{'}(t)$ tem derivada $q.t.p$ em $\mathbb{R}$. Por definição

$$\frac{\|u^{'}(t+h) - u^{'}(t)\|}{h} = \frac{\|f(u(t+h)) - f(u(t))\|}{h}$$

Usando o fato que a função f é l-lipschitziana tem-se

$$\frac{\|u^{'}(t+h) - u^{'}(t)\|}{h} \leq l\frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{h}$$

passando ao limite quando $h \to 0$, obtemos

$$\|u^{''}(t)\| \leq l\|u^{'}(t)\| \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}.$$

Desde que,

$$\int_0^T \|u^{''}(t)\|^2 dt \leq l^2 \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$$

pela Proposição 2.1, temos

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{''}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T l^2 \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

donde segue,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Por hipótese, u é não constante, logo

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 \neq 0 \quad e \quad \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$$

desse modo,

$$1 \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2}$$

portanto,

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

■

Proposição 2.3 *Seja* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *uma função* T*-periódica absolutamente contínua tal que* $\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt < \infty$ *com* $p > 1$. *Se* $\int_0^T u(t) dt = 0$, *então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

Demonstração:

Considere

$$M = \left\{ u \in H_T^{1,p}([0,T]); \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1 \ \ e \ \ \int_0^T u(t)dt = 0 \right\}$$

onde

$$H_T^{1,p}([0,T]) = \left\{ u \in W^{1,p}([0,T]); u(0) = u(T) \right\}$$

e $S : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

Sendo S limitado inferiormente, denotamos por $C \geq 0$ o ínfimo de S, isto é,

$$\inf_{u \in M} S(u) = C.$$

Afirmação 1: O ínfimo C é atingido.

De fato, seja $\{u_n\} \subset M$ uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u_n^{'}(t)\|^p dt \longrightarrow C \ , \ \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1 \ \ e \ \ \int_0^T u_n(t)dt = 0.$$

Usando o fato de que,

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1,$$

segue que $\|u_n\|_{L^p([0,T])}$ é limitada, daí $\{u_n\} \subset H_T^{1,p}([0,T])$ é limitada. Visto que $H_T^{1,p}([0,T])$ é reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por (u_n) e $u \in H_T^{1,p}([0,T])$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \ em \ \ H_T^{1,p}([0,T]).$$

Por imersões de Sobolev,

$$u_n \longrightarrow u \ \ em \ \ L^p([0,T])$$

assim,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = lim \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt.$$

Sendo

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u_n(t)\| dt = 0$$

pelas imersões compactas de Sobolev

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

mostrando que $u \in M$.

Visto que $u \in M$, devemos ter

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \geq C.$$

Por outro lado, da convergência fraca

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \leq \underline{lim} \int_0^T \|u_n^{'}(t)\|^p dt.$$

daí,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \leq C.$$

Donde segue,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = C$$

ou seja, o ínfimo C é atingido.

Portanto,

$$\min_{u \in M} S(u) = C$$

Afirmação 2: $C > 0$.

Com efeito, suponhamos, por contradição, que $C = 0$, então

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = 0$$

o que implicaria

$$\|u^{'}(t)\|^p = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}$$

ou ainda

$$u^{'}(t) = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R},$$

implicando que u é constante.

Uma vez que $u \in M$, a condição $\displaystyle\int_0^T u(t)dt = 0$ implica $u = 0$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}$, enquanto a condição $\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$ implica que $u \neq 0$, chegando a um absurdo, portanto $C > 0$.

Sendo,

$$\min_{u \in M} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = C.$$

segue que,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \geq C, \quad \forall \;\; u \in M.$$

Agora, dado $u \in H_T^{1,p}([0,T]) \backslash \{0\}$ com

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

definamos

$$w = \frac{u}{\|u\|_{L^p([0,T])}}.$$

Observe que $w \in M$, pois

$$\int_0^T \|w(t)\|^p dt = \frac{1}{\|u\|^p_{L^p([0,T])}} \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1.$$

Portanto,

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^p dt \geq C$$

o que implica,

$$\frac{\displaystyle\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt}{\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^p dt} \geq C$$

ou seja,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

$\blacksquare$

2.2 Existência de Solução

Sejam $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função T-periódica. Consideremos a existência de soluções T-periódicas da equação

$$u^{''} + G^{'}(u) = f(t). \tag{2.2}$$

Se u é solução da equação (2.2), então para todo $k \in \mathbb{Z}$, $u + 2\pi k$ tambem é solução de (2.2).

Denotemos, no que segue, H como sendo o seguinte espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \text{ é absolutamente contínua, T-periódica e } \int_0^T |u^{'}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

com o produto interno

$$(u,v) = \int_0^T (u^{'}v^{'} + uv)dt,$$

e o funcional energia

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'\,2}}{2} - G(u) + fu \right] dt,\ \forall\ u \in H$$

o qual está bem definido sendo de classe $C^1(H,\mathbb{R})$ (Ver [Apêndice B]). Além disso, os pontos críticos de ϕ são soluções fracas de (2.2), com

$$\langle \phi^{'}(u), h \rangle = \int_0^T \left[u^{'}h^{'} - G^{'}(u)h + fh \right] dt,\ \forall\ h \in H. \tag{2.3}$$

Lema 2.1 *O espaço H é Hilbert com relação ao produto interno dado por*

$$(u,v) = \int_0^T (u^{'}v^{'} + uv)dt.$$

Demonstração:

Seja $\{u_n\} \subset H$ uma sequência de Cauchy, assim dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\|u_n - u_m\|_H < \epsilon \ \ para \ \ m,n \geq n_0.$$

Observe que

$$\|u_n\|_H^2 = \|\widehat{u}_n\|^2_{H^1_T([0,T])}$$

onde

$$\widehat{u}_n = u_n|_{[0,T]}$$

e

$$H^1_T([0,T]) = \left\{ u \in W^{1,2}_T([0,T]); u(0) = u(T) \right\}.$$

Usando fato que $H^1_T([0,T])$ é Hilbert, existe $\widehat{u} \in H^1_T([0,T])$ tal que

$$\widehat{u}_n \to \widehat{u} \in H^1_T([0,T]).$$

Considere $u(t) = \widehat{u}(t); t \in [0,T]$ e defina

$$u(t) = \widehat{u}(t - kT) \ \ se \ \ t \in [kT,(k+1)T]; k \in \mathbb{Z}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$H_T^1([0,T]) \hookrightarrow C([0,T])$$

assim,

$$u_n(0) = \widehat{u_n}(0) \to \widehat{u}(0)$$

e

$$u_n(T) = \widehat{u_n}(T) \to \widehat{u}(T).$$

Segue do fato que a sequência $\{u_n\} \subset H$ é T-periódica e da unicidade do limite que

$$\widehat{u}(0) = \widehat{u}(T).$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$u(t+T) = \widehat{u}(t+T-kT) = u(t)$$

ou seja,

$$u(t+T) = u(t).$$

mostrando que u é T-periódica.

Afirmação 1: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda sequência finita de intervalos disjuntos (a_i, b_i) de $[0,T]$ temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon.$$

Considere ,

$$B = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup ... \cup (a_n, b_n) \;\; em \;\; [0,T] \;\; tal \;\; que \;\; |b_j - a_j| < \frac{\delta}{n}, \;\; j = 1, ..., n.$$

Usando o fato que a união é disjunta, segue

$$\mu(B) = \mu((a_1, b_1)) + \mu((a_2, b_2)) + ... + \mu((a_n, b_n)),$$

onde $\mu(B) :=$ medida de Lebesgue. Portanto,

$$\mu(B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + ... + |b_n - a_n| = \sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta.$$

Segue de (C.9) (Ver [Apêndice C]) e (C.10) (Ver [Apêndice C])

$$\sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{a_j}^{b_j} u^{'}(t)dt \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} |u^{'}(t)|dt$$

o que implica,

$$\sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| \leq \int_{\cup_{j=1}^{n}(a_j,b_j)} |u^{'}(t)|dt = \int_{B} |u^{'}(t)|dt < \epsilon.$$

Segue deste argumento acima e do fato que u é T-periódica que u é absolutamente contínua.

Sendo $u(t) = \widehat{u}(t), t \in [0,T]$ uma função T-periódica e absolutamente contínua com $u_n \to u$ em $H^1([0,T])$, então

$$\|u_n - u\|_H^2 = \int_0^T |\widehat{u_n} - \widehat{u}|^2 = \|\widehat{u_n} - \widehat{u}\|^2_{H_T^1([0,T])} \to 0$$

isto é,

$$u_n \to u \quad em \quad H.$$

■

Lema 2.2 *O funcional ϕ satisfaz a condição (WPS).*

Demonstração:

Seja $J : H \longrightarrow H^*$ tal que,

$$\langle J(u), h\rangle = \int_0^T u^{'}h^{'}dt + \int_0^T uh\ dt,\ \forall\ u, h \in H$$

e considere $N : H \longrightarrow H^*$ tal que,

$$\langle N(u), h\rangle = \int_0^T uh\ dt + \int_0^T G^{'}(u)h\ dt - \int_0^T fh\ dt,\ \forall\ h \in H$$

portanto,

$$\langle \phi^{'}(u), h\rangle = \langle J(u), h\rangle - \langle N(u), h\rangle,\ \forall\ h \in H$$

isto é,

$$\phi^{'}(u) = J(u) - N(u), \quad \forall u \in H.$$

Afirmação 1: Se $u_k \rightharpoonup u$ em H, então $N(u_k) \to N(u)$ em H^*.

Com efeito, seja $\{u_k\} \subset H$ uma sequência limitada tal que $\phi(u_k)$ é limitada e $\phi^{'}(u_k) \to 0$. Note que,

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T \Big([u_k h + G^{'}(u_k)h - fh] - [uh + G^{'}(u)h - fh]\Big)\, dt$$

assim,

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T \Big((u_k - u)h + (G^{'}(u_k) - G^{'}(u))h\Big)\, dt$$

donde segue,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq \int_0^T \Big(\|u_k - u\|\|h\| + |G^{'}(u_k) - G^{'}(u)|\|h\|\Big)\, dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq \|u_k - u\|_{L^2([0,T])}\|h\|_{L^2([0,T])} + \|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}\|h\|_{L^2([0,T])}. \tag{2.4}$$

e pelas imersões contínuas de Sobolev

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,T])}\|h\|_H + C\|G^{'}(u_k) - G^{'}(u))\|_{L^2([0,T])}\|h\|_H. \tag{2.5}$$

Portanto, usando a norma em H^*,

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\|\leq 1} |\langle N(u_k) - N(u), h\rangle|$$

ficamos com

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} \leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,T])} + C\|G^{'}(u_k) - G^{'}(u))\|_{L^2([0,T])}.$$

Usando as hipóteses sobre a sequência (u_k), existe uma subseqüência (u_{k_j}) tal que

$$u_{k_j} \to u \ em \ L^2([0,T]) \tag{2.6}$$

e

$$u_{k_j} \to u \ q.t.p \ em \ [0,T].$$

Por outro lado, sendo $G \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, segue

$$G^{'}(u_{k_j}) \to G^{'}(u) \ q.t.p \ em \ [0,T]$$

logo,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)| \to 0 \ q.t.p \ em \ [0,T],$$

portanto,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 \to 0 \ q.t.p \ em \ [0,T].$$

Desde que,

$$|G^{'}(t)| \leq K, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

obtemos,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 \leq 4K^2 \in L^1([0,T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [2]), segue

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^T |G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 dt = \int_0^T \lim_{j\to\infty} |G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 dt = 0,$$

ou seja,

$$G^{'}(u_{k_j}) \to G^{'}(u) \ em \ L^2([0,T]). \tag{2.7}$$

Usando (2.6) e (2.7),

$$\|N(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \to 0$$

ou equivalentemente

$$N(u_{k_j}) \to N(u) \quad em \quad H^*$$

mostrando a Afirmação.

Por outro lado,

$$\phi^{'}(u_{k_j}) = J(u_{k_j}) - N(u_{k_j}),$$

e desde que,

$$\phi^{'}(u_{k_j}) \to 0 \quad e \quad N(u_{k_j}) \to N(u),$$

segue,

$$J(u_{k_j}) \to N(u) \quad quando \quad j \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\langle J(u_{k_j}), h\rangle = \int_0^T u^{'}_{k_j} h^{'} dt + \int_0^T u_{k_j} h dt, \quad \forall \quad u, h \in H,$$

ou seja,

$$\langle J(u_{k_j}), h\rangle_{H^*} = \left(u_{k_j}, h\right)_H .$$

Logo pelo Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]),

$$\|J(u_{k_j})\|_{H^*} = \|u_{k_j}\|_H.$$

Segue da definição de N e do Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]) que existe $w \in H$ tal que

$$\langle N(u), h\rangle_{H^*} = (w, h)_H$$

e

$$\|N(u)\|_{H^*} = \|w\|_H.$$

Assim,

$$\langle J(u_{k_j}) - N(u), h\rangle_{H^*} = \big(u_{k_j} - w, h\big)_H$$

usando novamente o Teorema de Riesz-Fréchet,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} = \|u_{k_j} - w\|_H.$$

Usando o fato que,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \to 0$$

segue,

$$\|u_{k_j} - w\|_H \to 0.$$

Portanto,

$$u_{k_j} \to w \quad em \quad H,$$

mostrando desse modo, que ϕ satisfaz a condição (WPS).

■

Teorema 2.4 *Se* $\int_0^T f(t)dt = 0$, *a equação* (2.2) *tem duas soluções* T*-periódicas que não diferem por multiplicidade* 2π.

Demonstração:

Para cada $u \in H$, sejam

$$v(t) = u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

e

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

assim,

$$u(t) = v(t) + w \tag{2.8}$$

e

$$u^{'}(t) = v^{'}(t). \tag{2.9}$$

Desde que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'2}}{2} - G(u) + fu\right]dt$$

obtemos, de (2.8) e (2.9)

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{{v'}^2}{2} - G(v+w) + f.(v+w)\right] dt.$$

Sendo,

$$\int_0^T f(t)dt = 0$$

segue que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{{v'}^2}{2} - G(v+w) + fv\right] dt.$$

Afirmação 1: ϕ é limitado inferiormente.

De fato, seja $\alpha = \max\limits_{u \in \mathbb{R}} G(u)$, logo

$$G(u) \leq \alpha, \quad \forall \;\; u \in \mathbb{R}.$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver[3])

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{{v'}^2}{2}\, dt - \alpha T - \left(\int_0^T f^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T v^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e pela Proposição 2.1,

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{{v'}^2}{2}\, dt - \alpha T - \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T f^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

logo,

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2([0,T])} - k_1 \|v'\|_{L^2([0,T])} - k_2, \tag{2.10}$$

isto é, ϕ é limitada inferiormente.

Afirmação 2: ϕ é 2π-periódica, isto é, $\phi(u + 2\pi) = \phi(u)$.

Com efeito, usando (2.1), (2.8) e (2.9)

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{{v'}^2}{2}\, dt - \int_0^T G(v+w+2\pi)\, dt + \int_0^T f(v+w+2\pi)\, dt$$

assim,

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{{v'}^2}{2}\, dt - \int_0^T G(v+w+2\pi)\, dt + \int_0^T fv\, dt.$$

Desde que,

$$G(v+w+2\pi) = G(v+w)$$

temos

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{{v'}^2}{2}\, dt - \int_0^T G(v+w)\, dt + \int_0^T fv\, dt \;\; = \phi(u)$$

ou seja,

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u)$$

mostrando a Afirmação 2.

Afirmação 3: ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $\{u_k\} \subset H$ uma sequência tal que

$$\phi(u_k) \to c \ \ e \ \ \phi^{'}(u_k) \to 0.$$

Por (2.10) tem-se

$$\phi(u_k) \geq \frac{1}{2}\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])} - k_1\|v_k^{'}\|_{L^2([0,T])} - k_2$$

Por outro lado, sendo $\phi(u_k)$ convergente, segue que $\phi(u_k)$ é limitada, assim existe $k_3 > 0$ tal que $\phi(u_k) \leq k_3$ o que implica

$$\frac{1}{2}\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])} - k_1\|v_k^{'}\|_{L^2([0,T])} \leq k_3 + k_2$$

ou seja, $(v_k^{'})$ é limitada em $L^2([0,T])$.

Por outro lado, temos

$$\int_0^T |v_k|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |v_k^{'}|^2 dt,$$

ou ainda,

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq k_4\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])}.$$

Portanto, sendo $(v_k^{'})$ limitada em $L^2([0,T])$, segue que existe $k_5 > 0$ verificando

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq k_5, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

isto é, (v_k) é limitada em $L^2([0,T])$.

Por (2.8),

$$u_k = v_k + w_k,$$

pela periodicidade de ϕ, deve existir $\widehat{w_k} \in [0, 2\pi]$ verificando

$$\phi(u_k) = \phi(v_k + \widehat{w}_k).$$

Fazendo $\widehat{u}_k = v_k + \widehat{w}_k$, segue

$$\phi(\widehat{u}_k) \to c \ \ e \ \ \phi^{'}(\widehat{u}_k) \to 0.$$

Visto que, $\widehat{w}_k \in [0, 2\pi]$, temos

$$\|\widehat{w}_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq 4\pi^2 T$$

mostrando que $(\widehat{w}_k)$ é limitada em $L^2([0,T])$. Portanto sendo (v_k) e $(\widehat{w}_k)$ limitadas, segue que $(\widehat{u}_k)$ é limitada em H.

Pelo Lema 2.2, existe $(\widehat{u}_{k_j})$ tal que

$$\widehat{u}_{k_j} \to u \ \ em \ \ H.$$

Sendo $\phi \in C^1$, segue

$$\phi(\widehat{u}_{k_j}) \to \phi(u) \ \ e \ \ \phi^{'}(\widehat{u}_{k_j}) \to \phi^{'}(u),$$

pela unicidade do limite,

$$\phi(u) = c \ \ e \ \ \phi^{'}(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ϕ. Portanto ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$. Mostrando, desta forma, a Afirmação 3.

Pelas Afirmações 1, 3 e pelo Teorema 1.4, segue que ϕ tem mínimo em algum ponto $u \in H$, ou seja,

$$\phi(u) = \min_H \phi.$$

Da Afirmação 2,

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u) = \min_H \phi.$$

Considere, $v = u + 2\pi$, assim

$$\|u - v\|^2_{L^2([0,T])} = \int_0^T |u - v|^2 dt = 4\pi^2 T$$

ou seja,

$$\|u - v\|_{L^2([0,T])} = 2\pi\sqrt{T}.$$

Considere, $0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} = \|u - v\|$ e $w \in X$ tal que $r \leq \|w - u\| \leq R$. Sendo

$$\phi(v) = \phi(u) = \min_H \phi$$

segue que,

$$\phi(w) \geq a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

logo, pelo Teorema 1.6, segue que $c \geq a$, onde c é o nivel Minimax dado no Teorema 1.6, é valor crítico de ϕ. Observe que

(i) Se $c > a$ e u_1 um ponto crítico com $\phi(u_1) = c$ e sendo $\phi(u) = a$, segue

$$\phi(u_1) > \phi(u)$$

logo,

$$u_1 \neq u + 2k\pi,$$

de fato, caso contrário, teríamos em vista da periodicidade de ϕ que $\phi(u_1) = \phi(u)$, o que é absurdo.

(ii) Se $c = a$, pelo Teorema 1.6, existe um ponto crítico u_1 tal que

$$\phi(u_1) = a \quad com \quad \|u_1 - u\| = \frac{R + r}{2}. \tag{2.11}$$

Considere $u_1 = u + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Assim

$$\|u_1 - u\|^2 = \int_0^T |u_1^{'} - u^{'}|^2 dt + \int_0^T (2k\pi)^2 dt$$

e usando o fato de que $u_1^{'} = u^{'}$, segue

$$\|u_1 - u\|^2 = 4k^2\pi^2 T$$

donde segue,

$$\|u_1 - u\| = 2|k|\pi\sqrt{T}.$$

Sendo,

$$0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} \leq 2|k|\pi\sqrt{T}$$

segue,

$$\frac{R + r}{2} < 2|k|\pi\sqrt{T} = \|u_1 - u\|$$

o que é um absurdo, por (2.11). Logo, $u_1 \neq u + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, mostrando que a equação (2.2) possui duas soluções que não diferem por multiplicidade 2π.

$\blacksquare$

Capítulo 3

A Transformada de Legendre

Nosso objetivo neste capítulo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)).$$

Para tanto, faremos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, as quais serão muito utilizadas na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

3.1 Introdução

Definição 3.1 *A transformada de Legendre F^* de uma função $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ é dada pela fórmula implícita*

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u), \end{aligned}$$

quando ∇F é invertível.

3.2 Funções Convexas

Uma função $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ diz-se convexa se, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\lambda \in (0,1)$, tem-se

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

No caso em que acima vale a desigualdade estrita sempre que $u \neq v$, a função diz-se estritamente convexa.

Proposição 3.2 *Se $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *F é convexa*
(ii) *$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w-u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Supondo F convexa, para $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ temos

$$F((1-\lambda)u + \lambda w) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(w)$$

assim,

$$F((1-\lambda)u + \lambda w) - F(u) \leq -\lambda F(u) + \lambda F(w)$$

logo para $\lambda > 0$,

$$\frac{F(u + \lambda(w-u)) - F(u)}{\lambda} \leq F(w) - F(u).$$

Passando ao limite quando $\lambda \to 0^+$ na última desigualdade, obtemos

$$(\nabla F(u), w-u) \leq F(w) - F(u)$$

o que implica,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w-u)\,. \tag{3.1}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Sendo (ii) válida para quaisquer $u, w \in \mathbb{R}^N$, podemos escrever

$$F(u) \geq F(w) + (\nabla F(w), u-w) \tag{3.2}$$

e

$$F(v) \geq F(w) + (\nabla F(w), v-w)\,. \tag{3.3}$$

Considerando $w = (1-\lambda)u + \lambda v$, segue de (3.2) e (3.3),

$$F(u) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), \lambda(u-v))$$

e

$$F(v) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), (1-\lambda)(v-u))$$

consequentemente

$$F(u) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + \lambda \left(\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), u-v\right) \tag{3.4}$$

e

$$F(v) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) - (1-\lambda) \left(\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), u-v\right). \tag{3.5}$$

Multiplicando (3.4) por $(1-\lambda)$ e (3.5) por λ e adicionando membro a membro as duas desigualdades, ficamos com

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

■

Lema 3.1 *A função $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ é convexa se, e somente se, o gradiente de F, $\nabla F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u-v) \geq 0, \quad \forall \quad u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \tag{3.6}$$

Demonstração:

Segue da Proposição 3.2

$$(\nabla F(u), v-u) \leq F(v) - F(u). \tag{3.7}$$

Analogamente,

$$(\nabla F(v), u-v) \leq F(u) - F(v)$$

logo,

$$-\left(\nabla F(v), v-u\right) \leq F(u) - F(v). \tag{3.8}$$

Somando (3.7) e (3.8) membro a membro, segue

$$(\nabla F(u), v-u) - (\nabla F(v), v-u) \leq 0$$

e portanto,

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) \geq 0.$$

Reciprocamente, segue do Teorema do Valor Médio aplicado a função $g(t) = F(u + t(w - u))$ que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$F(u + (w - u)) = F(u) + (\nabla F(u + \theta(w - u)), w - u)\,. \tag{3.9}$$

Por outro lado, usando (3.6), obtemos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), \theta(w - u)) \geq 0$$

assim,

$$\theta\,(\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), (w - u)) \geq 0$$

sendo $\theta > 0$, temos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)), (w - u)) \geq (\nabla F(u), (w - u))\,. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.9), encontramos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Portanto pela Proposição **??**, segue que F é convexa.

■

Observação 3.1 *Pelo estudo feito acima, observa-se que a função F é estritamente convexa se, e somente se, o gradiente de F, $\nabla F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação estritamente monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; u \neq v.$$

3.3 Função de Legendre

Definição 3.3 *Uma função $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é uma função de Legendre, se F satisfaz às seguintes condições:*
(i) $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$
(ii) *F é estritamente convexa*
(iii) $\dfrac{F(u)}{\|u\|} \to \infty$ *quando* $\|u\| \to \infty$.

Proposição 3.4 *Se F é uma função de Legendre, então ∇F é um homeomorfismo do* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração:

Iremos dividir a nossa demonstração em alguns passos.

Passo 1: **∇F é injetivo.**

De fato, por hipótese F é estritamente convexa, logo pela Observação 3.1

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall \ \ u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u \neq v. \tag{3.11}$$

De (3.11), segue que

$$u \neq v \Rightarrow \nabla F(u) \neq \nabla F(v)$$

mostrando que ∇F é injetivo.

Passo 2: **∇F é sobrejetivo.**

Com efeito, dado $v \in \mathbb{R}^N$ e supondo $u \neq 0$, temos

$$F(u) - (v, u) \geq F(u) - \|v\|\|u\| = \|u\| \left(\frac{F(u)}{\|u\|} - \|v\| \right).$$

Usando (iii) da Definição 3.3, temos

$$F(u) - (v, u) \to \infty \ \ quando \ \ \|u\| \to \infty. \tag{3.12}$$

Definamos a função $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por

$$g(u) = F(u) - (v, u)\,.$$

Por (3.12), segue

$$g(u) \to \infty \ \ quando \ \ \|u\| \to \infty$$

assim, para todo $M_1 > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$g(u) > M_1 \ \ quando \ \ \|u\| > C$$

isto é, se $\|u\| > C$ então g é limitada inferiormente por M_1.

Agora consideremos $\|u\| \leq C$. Sendo g contínua, segue que g atinge um mínimo M_2 em $B_C(0)$, ou seja

$$M_2 = \min_{\|u\| \leq c} g(u).$$

Considere

$$K = min\{M_1, M_2\} = M_2.$$

Desse modo,

$$g(u) \geq K, \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

mostrando que g é limitada inferiormente. Considere

$$g_0 = \inf_{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g(u)$$

e $\{u_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} g(u_n) = g_0 < \infty.$$

Note que a sequência (u_n) é limitada, portanto existe (u_{n_j}) e $u_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_j} \to u_0 \quad em \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Sendo g contínua,

$$g(u_{n_j}) \to g(u_0),$$

logo pela unicidade do limite,

$$g(u_0) = g_0,$$

ou seja, g atinge seu mínimo no ponto $u_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e portanto $\nabla g(u_0) = 0$

Por outro lado,

$$\nabla g(u_0) = \nabla F(u_0) - v$$

logo

$$\nabla F(u_0) = v$$

mostrando que ∇F é sobrejetivo.

Passo 3: $(\nabla \mathbf{F})^{-1}$ **é contínua.**

De fato, primeiramente note que ∇F é coercivo, pois sendo F convexa,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Assim,

$$F(0) \geq F(u) + (\nabla F(u), -u) = F(u) - (\nabla F(u), u)$$

o que implica,

$$(\nabla F(u), u) \geq F(u) - F(0).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|\nabla F(u)\| \geq \frac{F(u) - F(0)}{\|u\|}.$$

Sendo F uma função de Legendre, temos que o lado direito da última desigualdade tende a infinito quando $\|u\| \to \infty$, logo

$$\|\nabla F(u)\| \to \infty \ \ quando \ \ \|u\| \to \infty,$$

ou seja, ∇F é coercivo.

Para mostrar que $(\nabla F)^{-1}$ é contínua, basta verificar que

$$x_n \to x \ \ quando \ \ \nabla F(x_n) \to \nabla F(x).$$

Supondo $\nabla F(x_n) \to \nabla F(x)$, sendo ∇F coercivo, (x_n) é uma sequência limitada. Seja (x_{n_j}) uma subsequência qualquer de (x_n) , assim (x_{n_j}) é uma sequência limitada. Logo existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x_1 \ \ em \ \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Usando a continuidade de ∇F, segue

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \to \nabla F(x_1).$$

Por outro lado,

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \to \nabla F(x)$$

logo pela unicidade do limite,

$$\nabla F(x) = \nabla F(x_1).$$

Usando o Passo 1, concluimos que $x = x_1$.

Portanto, para toda $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x \ \ em \ \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Suponhamos que,

$$x_n \nrightarrow x$$

assim existe $\epsilon_0 > 0$ e $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, tal que

$$\|x_{n_j} - x\| \geq \epsilon_0 \ \ \forall \ n_j \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x. \tag{3.14}$$

Usando (3.13) e (3.14),

$$\|x_{n_{j_k}} - x\| \geq \epsilon_0 \quad e \quad \|x_{n_{j_k}} - x\| \to 0$$

o que é um absurdo. Logo,

$$x_n \to x \quad em \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

portanto, $(\nabla F)^{-1}$ é contínua, mostrando o Passo 3.

■

Lema 3.2 *Se F_1 e F_2 são funções de Legendre tais que $F_1 \leq F_2$, então $F_1^* \geq F_2^*$.*

Demonstração:

Sendo

$$F^*(v) = (v, u) - F(u)$$
$$v = \nabla F(u)$$

pela Proposição **??**, temos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

assim,

$$F(w) \geq F(u) + (v, w) - (v, u) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

implicando que

$$F^*(v) \geq (v, w) - F(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Em particular,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left((v, w) - F(w)\right), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Assim, sendo $F_1 \leq F_2$, devemos ter

$$F_1(w) - (v, w) \leq F_2(w) - (v, w)$$

o que implica,

$$(v, w) - F_1(w) \geq (v, w) - F_2(w)$$

logo,

$$(v,w) - F_2(w) \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_1(w))$$

portanto,

$$F_2^* = \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_2(w)) \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_1(w)) = F_1^*$$

ou seja, $F_1^* \geq F_2^*$.

■

No que segue vamos demonstrar o seguinte Lema que será importante no decorrer deste trabalho.

Lema 3.3 *Se F é uma função de Legendre, então F^* é Fréchet diferenciável.*

Demonstração:

Sejam $u = (\nabla F)^{-1}(v)$ e $u_t = (\nabla F)^{-1}(v + th)$. Sendo,

$$F^*(v) = (v,u) - F(u) \quad e \quad F^*(v+th) = (v+th, u_t) - F(u_t)$$

para todo $t > 0$, tem-se que

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v+th, u_t) - F(u_t) - (v,u) + F(u)}{t}$$

donde segue,

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v,u_t) + t\,(h,u_t) - F(u_t) - (v,u) + F(u)}{t}.$$

Assim,

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = (h,u_t) + \frac{(v, u_t - u) - F(u_t) + F(u)}{t}$$

e desde que,

$$F(u_t) \geq F(u) + (\nabla F(u), u_t - u)\,,$$

segue,

$$(v, u_t - u) - F(u_t) + F(u) \leq 0$$

e portanto

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} \leq (h, u_t)\,. \tag{3.15}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.2

$$F^*(v+th) \geq (v+th, u) - F(u)$$

consequentemente

$$\frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \geq \frac{(v+th,u)-F(u)-(v,u)+F(u)}{t}$$

ou ainda

$$\frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \geq (h,u)\,. \tag{3.16}$$

Portanto por (3.15) e (3.16),

$$(h,u) \leq \frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \leq (h,u_t)\,.$$

Passando ao limite quando $t \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} = (h,u)\,.$$

Por outro lado, note que

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \geq 0,$$

pois

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = F^*(v+h)-[(v,u)-F(u)]-(h,u)$$

e assim,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = F^*(v+h)-[(v+h,u)-F(u)]$$

pela definição de $F^*(v+h)$ tem-se

$$F^*(v+h)-[(v+h,u)-F(u)] \geq 0$$

logo,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \geq 0.$$

Além disso,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \leq (h,(u_h-u))\,.$$

Com efeito, temos

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = (v+h,u_h)-F(u_h)-(h,u)-F^*(v)$$

o que implica,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = [(v,u_h)-F(u_h)]-F^*(v)+(h,(u_h-u))$$

usando a definição de $F^*(v)$, obtemos

$$[(v, u_h) - F(u_h)] - F^*(v) \leq 0$$

portanto,

$$F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u) \leq (h, (u_h - u)) \, .$$

Assim,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h,u)\,|}{\|h\|} = \frac{F^*(v+h) - F^*(v) - (h,u)}{\|h\|} \leq \frac{(h, (u_h - u))}{\|h\|}$$

usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h,u)\,|}{\|h\|} \leq \|u_h - u\|.$$

Por outro lado,

$$u_h = (\nabla F)^{-1}(v + th) \to (\nabla F)^{-1}(v) = u \;\; quando \;\; h \to 0$$

isto é,

$$\|u_h - u\| \to 0 \;\; quando \;\; h \to 0$$

e consequentemente

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h,u)\,|}{\|h\|} \to 0 \;\; quando \;\; h \to 0$$

Mostrando que F^* é Fréchet diferenciável.

■

Proposição 3.5 *Se F é uma função de Legendre, então*

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \to \infty \;\; quando \;\; \|v\| \to \infty.$$

Demonstração:

Devemos mostrar que dado $C > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$\|v\| > A \Longrightarrow \frac{F^*(v)}{\|v\|} > C$$

ou equivalentemente,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \Longrightarrow \|v\| \leq A.$$

Para cada $C > 0$, considere $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C,$$

ou

$$F^*(v) \leq C\|v\|.$$

Definindo

$$M = \max_{\|w\|=2C} F(w)$$

desde que pelo Lema 3.2,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v, w) - F(w))$$

fazendo $w = \dfrac{2C}{\|v\|}v$, obtemos

$$2C\|v\| = \left(v, \frac{2C}{\|v\|}v\right) \leq F^*(v) + F\left(\frac{2C}{\|v\|}v\right) \leq M + C\|v\|$$

logo,

$$C\|v\| \leq M$$

portanto,

$$\|v\| \leq \frac{M}{C}.$$

Assim, dado $C > 0$, considere $A = \dfrac{m}{C}$ que teremos

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \Longrightarrow \|v\| \leq A.$$

Portanto,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \to \infty \quad quando \quad \|v\| \to \infty.$$

■

Teorema 3.6 *Se F é uma função de Legendre, temos*
(i) $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$
(ii) $F^* \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Pelo Lema 3.3, F^* é Fréchet diferenciável e

$$(\nabla F^*(v), h) = (h, u).$$

Assim,

$$(\nabla F^*(v) - u, h) = 0, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

o que implica,

$$\nabla F^*(v) = u.$$

Desde que pelo Lema 3.3, $u = (\nabla F)^{-1}(v)$, segue

$$\nabla F^*(v) = (\nabla F)^{-1}(v)$$

o que mostra (i).

Desde que $(\nabla F)^{-1}$ é contínua e $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$, temos $F^* \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$, mostrando (ii).

■

Corolário 3.7 *Se F é uma função de Legendre, a função F^* é estritamente convexa.*

Demonstração:

Sendo F uma função de Legendre, por definição F é estritamente convexa e usando a Observação 3.1 podemos concluir que $(\nabla F)^{-1}$ é estritamente monótono. Pelo Teorema 3.6,

$$\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$$

sendo $(\nabla F)^{-1}$ estritamente monótono, segue que ∇F^* é estritamente monótono, novamente usando a Observação 3.1, segue que F^* é estritamente convexa.

■

Observação 3.2 *Sendo F uma função de Legendre, segue dos resultados demonstrados que F^* é uma função de Legendre. Além disso,*

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u), \quad u = \nabla F^*(v) \end{aligned}$$

e

$$(F^*)^* = F.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} (F^*)^*(w) &= (w, v) - F^*(v) \\ w &= \nabla F^*(v) \end{aligned}$$

e

$$F^*(v) = (v,u) - F(u)$$
$$v = \nabla F(u).$$

Usando a Proposição 3.4 temos $u = (\nabla F)^{-1}(v)$ e pelo Teorema 3.6 podemos concluir que $u = w$. Logo,

$$(F^*)^*(u) = (u,v) - F^*(v) = (u,v) - (v,u) + F(u)$$

ou seja,

$$(F^*)^* = F.$$

3.4 Inequações

Nesta subseção, demonstraremos algumas desigualdades que são fundamentais no estudo de sistemas Hamiltonianos convexos.

Lema 3.4 *Sejam $G : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$, com $\gamma > 0$, $q > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.17}$$

temos que

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha. \tag{3.18}$$

Demonstração:

Sendo $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$, é fácil verificar que G é uma função de Legendre. Além disso,

$$\nabla G(u) = \gamma q\|u\|^{q-2}u \quad e \quad \nabla G(0) = 0. \tag{3.19}$$

Considerando $v = \nabla G(u)$, segue do Teorema 3.6 que $(\nabla G)^{-1}(v) = u$. Observe que

$$\|v\| = \gamma q\|u\|^{q-1}$$

o que implica,

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

e por (3.17)

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Desse modo,

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{v}{\|v\|}$$

ou

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v.$$

Logo, por definição

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}}\|v\|^2 - G\left(\frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v\right)$$

donde segue,

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}}\|v\|^2 - \gamma\left\|\frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v\right\|^q - \alpha.$$

Usando (3.17),

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} - \gamma\left(\frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^p}\right) - \alpha$$

mostrando que

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left(1 - \gamma\frac{1}{\gamma q}\right) - \alpha$$

ou seja,

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \alpha.$$

Usando novamente (3.17), temos

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha.$$

■

Proposição 3.8 *Seja F uma função de Legendre tal que*

$$n \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^q + \alpha \tag{3.20}$$

para algum $\gamma > 0$, $q > 1$, $\alpha, n \in \mathbb{R}$. Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

Demonstração:

Fixando $v = \nabla F(u)$, segue do Lema 3.4 e de (3.20) que

$$F^*(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha$$

ou equivalentemente

$$F^*(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha. \tag{3.21}$$

Desde que

$$F^*(v) = (v, u) - F(u) \tag{3.22}$$

por (3.21) e (3.22),

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha \leq (\nabla F(u), u) - F(u) \leq (\nabla F(u), u) - n$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

■

Lema 3.5 *Supondo as hipóteses da Proposição 3.8, existem constantes* $C_2, C_3 > 0$ *tais que*

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{q-1} + C_3.$$

Demonstração:

Com efeito, pela Proposição 3.8, temos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \|\nabla F(u)\| \|u\| + \alpha - n. \tag{3.23}$$

Pela desigualdade de Young, existem $\epsilon > 0$ e $C_\epsilon > 0$ tais que

$$\|\nabla F(u)\| \|u\| \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23), obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q + \alpha - n.$$

Fixando $0 < \epsilon < \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}$ e $C = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} - \epsilon > 0$, ficamos com

$$C\|\nabla F(u)\|^p \leq C_\epsilon \|u\|^q + C_1, \quad onde \quad C_1 = \alpha - n.$$

Assim,

$$\|\nabla F(u)\| \leq \left(\frac{C_\epsilon}{C} \|u\|^q + \frac{C_1}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{\frac{q}{p}} + C_3$$

onde $C_2 = \left(\frac{C_\epsilon}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$ e $C_3 = \left(\frac{C_1}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$. Usando (3.17), ficamos com

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{q-1} + C_3.$$

O Lema anterior nos diz que ∇F pode crescer no máximo até a potência $q - 1$. ■

No que segue, vamos definir e verificar algumas propriedades de um funcional que será de grande importância na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

Lema 3.6 *Considere a função* $J : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, *dada por* $J(x, y) = (-y, x)$. *Então para* $u, v \in \mathbb{R}^{2N}$ *temos:*
(i) $(Ju, u) = 0$
(ii) $(u, Jv) = -(Ju, v)$
(iii) $J^2 u = -u$
(iv) $\|Ju\| = \|u\|$

Demonstração:

Sejam $u = (x, y)$, $v = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^{2N}$. Por definição

$$(J(x, y), (x, y)) = ((-y, x), (x, y)) = -(y, x) + (x, y) = 0$$

o que mostra (i).

Com relação a (ii), considere $u = (x, y)$ e $v = (x_1, y_1)$. Então,

$$((x, y), J(x_1, y_1)) = ((x, y), (-y_1, x_1)) = -(x, y_1) + (y, x_1) = -\left[(x, y_1) - (y, x_1)\right]$$

portanto,

$$(u, J(v)) = -\left[(-y, x), (x_1, y_1)\right] = -(J(u), v),$$

mostrando (ii).

Note que

$$J(x, y) = (-y, x) \Rightarrow J^2(x, y) = J(-y, x)$$

o que implica,

$$J^2(x,y) = (-x,-y) = -(x,y)$$

mostrando a igualdade

$$J^2(u) = -u$$

mostrando (iii).

Finalmente,

$$\|J(u)\|^2 = (J(u), J(u)) = \left(-J^2(u), u\right) = (u,u) = \|u\|^2$$

logo,

$$\|J(u)\| = \|u\|$$

mostrando o item (iv).

■

Proposição 3.9 *Sejam* $q > 1$ *e*

$$X = \left\{ u : [0,T] \to \mathbb{R}^{2N};\ u \text{ é absolutamente contínua}, \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt < \infty \text{ e } u(0) = u(T) \right\}$$

com norma

$$\|u\|_X = \|u\|_{L^q([0,T])} + \|u^{'}\|_{L^q([0,T])}.$$

Então

$$\min_{u \in X} \left\{ \int_0^T \left(Ju^{'}(t), u(t)\right) dt \ ; \quad \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T \right\} = -\frac{T^2}{2\pi}.$$

Demonstração:

Primeiramente, consideremos os seguintes conjuntos

$$M = \left\{ u \in X; \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T \right\}$$

e

$$N = \left\{ u \in X; \int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t)\right) dt = 1 \right\}.$$

Desse modo vamos dividir nossa demonstração em algumas etapas:

Etapa 1: O funcional $u \mapsto \int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t)\right) dt$ é limitado superiormente no conjunto M.

De fato, note que

$$\int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t)\right) dt \quad = \quad -\int_0^T \left(Ju^{'}(t), u(t)\right) dt.$$

Para todo $u \in X$, considere

$$\widehat{u} = u - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt.$$

Afirmação: $\displaystyle\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = \int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\,dt.$

De fato, para fixar as idéias, considere $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Por definição

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = \int_0^T \left(\Big(-u_2'(t), u_1'(t)\Big), \left(u_1 - \frac{1}{T}\int_0^T u_1(t)dt, u_2 - \frac{1}{T}\int_0^T u_2(t)dt\right)\right)dt$$

o que implica,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = -\int_0^T u_2'(t)u_1(t)dt - \frac{1}{T}\left(\int_0^T u_1'(t)dt\right)\left(\int_0^T u_2(t)dt\right) + \int_0^T u_1'(t)u_2(t)dt +$$

$$+\frac{1}{T}\left(\int_0^T u_2'(t)dt\right)\left(\int_0^T u_1(t)dt\right).$$

Sendo $u_1(0) = u_1(T)$ e $u_2(0) = u_2(T)$, tem-se

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = -\int_0^T u_2'(t)u_1(t)dt + \int_0^T u_1'(t)u_2(t)dt$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = \int_0^T \Big(u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)\Big)\,dt$$

logo,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt = \int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\,dt \tag{3.25}$$

mostrando a Afirmação.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\,dt = \int_0^T \Big(Ju'(t), \widehat{u}(t)\Big)\,dt \geq -\left(\int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|\widehat{u}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade de Wirtinger a $\widehat{u}$, obtemos

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\,dt \geq -\left(\int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \frac{T^2}{4\pi^2}\|\widehat{u}'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\,dt \geq -\frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|\widehat{u}'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o item (iv) do Lema 3.6 e a definição de $\widehat{u}$, segue

$$\|Ju'(t)\|^2 = \|u'(t)\|^2 = \|\widehat{u}'(t)\|^2$$

assim,

$$\int_0^T \Big(Ju'(t), u(t)\Big)\, dt \geq -\frac{T}{2\pi}\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt, \quad \forall\ u \in M$$

logo,

$$\int_0^T \Big(u'(t), Ju(t)\Big)\, dt \leq \frac{T}{2\pi}\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = \frac{T^2}{2\pi}, \quad \forall\ u \in M$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(u'(t), Ju(t)\Big)\, dt,$$

é limitado superiormente em M.

Seja

$$\sup_{u\in M}\int_0^T \Big(u'(t), Ju(t)\Big)\, dt = A. \tag{3.26}$$

Etapa 2: O funcional $u \mapsto \displaystyle\int_0^T \|u'(t)\|^q dt$ é limitado inferiormente sobre N.

Com efeito, sendo $\|u'(t)\|^q \geq 0$, temos

$$\int_0^T \|u'(t)\|^q dt \quad \geq 0, \quad \forall\ u \in N$$

mostrando a Etapa 2.

Considere

$$\inf_{u\in N}\int_0^T \|u'(t)\|^q dt = B.$$

Etapa 3: B é atingido e $B > 0$.

Com efeito, Seja $\{u_n\} \subset N$ uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u_n'(t)\|^q dt \to B. \tag{3.27}$$

Considerando

$$w_n(t) = u_n(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)dt$$

tem-se

$$w_n'(t) = u_n'(t) \quad e \quad \int_0^T \|w_n'(t)\|^q dt \to B.$$

Além disso, por (3.25) temos

$$\int_0^T \Big(u_n'(t), Ju_n(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(w_n'(t), Jw_n(t)\Big)\, dt$$

logo,

$$\int_0^T \Big(w_n'(t), Jw_n(t)\Big)\, dt = 1.$$

Por (3.27), $\|w_n^{'}\|_{L^q}$ é limitada e pela desigualdade de Wirtinger segue que $\|w_n\|_{L^q}$ é limitada, o que implica que (w_n) é limitada em X. Logo, existe uma subsequência, que denotaremos por (w_n) , tal que

$$w_n \rightharpoonup w \quad em \quad X.$$

Pelas imersões de Sobolev, temos

$$w_n \to w \quad em \quad L^q([0,T])$$

logo,

$$\int_0^T \Big(w_n^{'}(t), Jw_n(t)\Big)\, dt \to \int_0^T \Big(w^{'}(t), Jw(t)\Big)\, dt$$

mostrando que

$$\int_0^T \Big(w^{'}(t), Jw(t)\Big)\, dt = 1.$$

Usando o fato que $\displaystyle\int_0^T \|w_n^{'}(t)\|^q dt$ é convexa, temos

$$\underline{lim} \int_0^T \|(w_n^{'}(t)\|^q \geq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt$$

ou seja,

$$B \geq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt. \tag{3.28}$$

Por outro lado, sendo

$$B = \inf_{u \in N} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt$$

devemos ter

$$B \leq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt. \tag{3.29}$$

Por (3.28) e (3.29)

$$B = \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt$$

mostrando a Etapa 3.

Etapa 4: $B = \dfrac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$

Sendo

$$\inf_{u \in N} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = B$$

existem $v_n \in N$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\int_0^T \|v_n^{'}(t)\|^q dt = B + \epsilon_n.$$

Denotemos $B_n = B + \epsilon_n$, assim

$$\int_0^T \|v_n^{'}(t)\|^q dt = B_n.$$

Note que,

$$\int_0^T \left\| \left(\frac{v_n}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right)^{'} \right\|^q dt = 1$$

assim,

$$T \int_0^T \left\| \frac{v_n^{'}}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T$$

logo,

$$\int_0^T \left\| \frac{T^{\frac{1}{q}} v_n^{'}}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T.$$

Considerando

$$\alpha_n = \left(\frac{B_n}{T} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.30}$$

temos

$$\int_0^T \left\| \left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right)^{'} \right\|^q dt = T$$

ou seja, $g_n = \dfrac{v_n}{\alpha_n} \in M$. Assim,

$$\int_0^T \left(\left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right)^{'}, J\left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right) \right) dt \leq A \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^T \left(v_n^{'}, Jv_n \right) dt \leq A$$

o que implica,

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \leq A.$$

Usando (3.30), temos

$$A^{\frac{q}{2}} \geq \frac{T}{B_n}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$B \geq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \tag{3.31}$$

Por outro lado, por (3.26), existem $w_n \in M$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\int_0^T \left(w_n^{'}(t), Jw_n(t) \right) dt = A + \epsilon_n.$$

Fazendo $A_n = A + \epsilon_n$, temos

$$\int_0^T \left(w_n^{'}(t), Jw_n(t) \right) dt = A_n. \tag{3.32}$$

Logo, por (3.32)

$$\int_0^T \left(\left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}}\right)^{'}, J\left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}}\right)\right) dt = 1$$

ou seja,

$$F_n = \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \in N.$$

Assim,

$$\int_0^T \|F_n^{'}(t)\|^q dt \geq B \Longrightarrow \int_0^T \left\|\left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}}\right)^{'}\right\|^q \geq B$$

ou seja,

$$B \leq \frac{1}{A_n^{\frac{q}{2}}} \int_0^T \|w_n^{'}(t)\|^q dt$$

portanto,

$$B \leq \frac{T}{A_n^{\frac{q}{2}}}$$

passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$B \leq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \tag{3.33}$$

Portanto, por (3.31) e (3.33) temos

$$B = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}.$$

Etapa 5: A é atingido.

De fato, se B é atingido em $w \in N$ temos

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt = B$$

assim,

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|A^{\frac{1}{2}} w^{'}(t)\|^q dt = T.$$

Portanto, $h(t) = A^{\frac{1}{2}} w(t) \in M$ e

$$\int_0^T \left(\left(A^{\frac{1}{2}} w(t)\right)^{'}, J\left(A^{\frac{1}{2}} w(t)\right)\right) dt = A \int_0^T (w^{'}(t), Jw(t))$$

logo,

$$\int_0^T \left(\left(A^{\frac{1}{2}} w(t)\right)^{'}, J\left(A^{\frac{1}{2}} w(t)\right)\right) dt = A$$

mostrando a Etapa 5. Logo,

$$max\int_0^T \Big(u^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt = A, \quad \forall\ u \in M.$$

Desse modo concluímos que

$$min\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt$$

é atingido em algum ponto $u \in X$, onde

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T.$$

Para $u \in X$, considere

$$G(u^{'}) = \|u^{'}\|^q, \quad F(u) = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \quad e \quad H(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\frac{F(u+sh)-F(u)}{s} = \frac{\displaystyle\int_0^T \Big(J(u^{'}(t)+sh^{'}(t)), u(t)+sh(t)\Big)\, dt - \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt}{s}.$$

Passando ao limite quando $s \to 0$, encontramos

$$\lim_{s\to 0}\frac{F(u+sh)-F(u)}{s} = \int_0^T \Big(J(u^{'}(t), h(t)\Big)\, dt + \int_0^T \Big(Jh^{'}(t), u(t)\Big)\, dt. \tag{3.34}$$

Sendo,

$$\int_0^T \Big(J(h^{'}(t)), u(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt$$

por (3.34),

$$(\nabla F(u), h) = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt - \int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt. \tag{3.35}$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt$ por partes e usando o fato de que $u(0) = u(T)$, encontramos

$$\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) em (3.35), obtemos

$$(\nabla F(u), h) = 2\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt. \tag{3.37}$$

Sendo

$$H(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\left|\frac{H(u+sh)-H(u)}{s}\right| = \left|\frac{\displaystyle\int_0^T (\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q)dt}{s}\right|$$

e pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\left|\frac{\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q}{s}\right| = \left|\frac{(\|u^{'}(t)+\lambda sh^{'}(t)\|^q)^{'}\|sh^{'}\|}{s}\right|$$

consequentemente

$$\left|\frac{\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q}{s}\right| \leq q\ 2^{q-1}(\|u^{'}(t)\|^{q-1} + \|h^{'}(t)\|^{q-1})\|h^{'}(t)\|.$$

Observe que usando a desigualdade de Hölder e o fato que $\displaystyle\int_0^T \|h^{'}(t)\|^q dt < \infty$ tem-se

$$q(\|u^{'}(t)\|^{q-1} + \|h^{'}(t)\|^{q-1})\|h^{'}(t)\| \in L^1([0,T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver[2]), segue

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \Big(q\|u^{'}(t)\|^{q-2}u^{'}(t), h^{'}(t)\Big)\, dt.$$

Desde que

$$\nabla G(u^{'}(t)) = q\|u^{'}(t)\|^{q-2}u^{'}(t)$$

ficamos com

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \Big(\nabla G(u^{'}(t)), h^{'}(t)\Big)\, dt.$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T \Big(\nabla G(u^{'})(t), h^{'}(t)\Big)\, dt$ por partes e usando o fato de que $u(0) = u(T)$, obtemos

$$\int_0^T \Big(\nabla G(u^{'})(t), h^{'}(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt \tag{3.38}$$

e consequentemente

$$(\nabla H(u), h) = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt.$$

Pelo método do Multiplicadores de Lagrange em espaços de Banach, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(\nabla F(u), h) = \lambda_1 (\nabla H(u), h)$$

ou seja,

$$2\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt = -\lambda_1 \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt, \quad \forall\ h \in X.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'}) = -\lambda J u^{'}.$$

Considere G^* a transformada de Legendre da função G. Se $v = \nabla G(u^{'})$ temos $u^{'} = \nabla G^*(v)$, e assim, obtemos o sistema Hamiltoniano

$$v^{'} + \lambda J \nabla G^*(v) = 0. \tag{3.39}$$

Observe que,

$$\frac{d}{dt}G^*(v) = \Big(\nabla G^*(v), v^{'}\Big) = (\nabla G^*(v), -\lambda J \nabla G^*(v)) = -\lambda\, (\nabla G^*(v), J\nabla G^*(v))$$

logo, pelo item (i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt}G^*(v) = 0$$

o que implica que $G^*(v)$ é constante.

Pelo Lema 3.4, temos

$$G^*(v) = q^{\frac{-p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}$$

sendo $G^*(v)$ constante, segue que $\|v\|$ é constante. Visto que,

$$v = \nabla G(u^{'}) = q\|u^{'}\|^{q-2}u^{'} \tag{3.40}$$

temos,

$$\|v\| = q\|u^{'}\|^{q-1}$$

mostrando que $\|u^{'}\|$ é constante.

Por outro lado,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T$$

assim, $\|u^{'}\| = 1$. Logo, por (3.40)

$$v = qu^{'}$$

o que implica,

$$v^{'} = qu^{''}. \tag{3.41}$$

Substituindo (3.41) em (3.39) segue

$$qu^{''} + \lambda Ju^{'} = 0$$

ou seja,

$$u^{''} + \frac{\lambda}{q}Ju^{'} = 0.$$

No que segue denotaremos $\dfrac{\lambda}{q}$ por λ, assim

$$u^{''} + \lambda Ju^{'} = 0. \tag{3.42}$$

No que segue vamos mostrar que $\lambda = \dfrac{-2\pi}{T}$.

De fato, para fixar as idéias, consideremos $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, assim

$$u^{''} + \lambda Ju^{'} = 0 \Leftrightarrow \left(u_1^{''}, u_2^{''}\right) + \lambda\left(-u_2^{'}, u_1^{'}\right) = 0$$

o que implica,

$$\begin{cases} u_1^{''} - \lambda u_2^{'} = 0 \\ u_2^{''} + \lambda u_1^{'} = 0 \end{cases}$$

assim,

$$\begin{cases} u_1^{'''} - \lambda u_2^{''} = 0 \\ u_2^{''} + \lambda u_1^{'} = 0 \end{cases}$$

logo,

$$u_1^{'''} + \lambda^2 u_1^{'} = 0.$$

Fazendo, $y = u_1^{'}$, obtemos

$$\begin{cases} y^{''} + \lambda^2 y = 0 \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

que tem equação característica dada por

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \tag{3.43}$$

com raizes complexas

$$r = \pm|\lambda|i$$

onde sem perda de generalidade podemos supor $\lambda > 0$. Portanto, a solução geral da equação (3.43) é dada por

$$y(t) = C_1 cos(\lambda t) + C_2 sen(\lambda t).$$

Sendo $y(0) = y(T)$, segue

$$C_1 cos(0) + C_2 sen(0) = C_1 cos(\lambda T) + C_2 sen(\lambda T)$$

obtendo,

$$cos(\lambda T) = 1$$

e consequentemente,

$$\lambda = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Além disso,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt = \int_0^T -\Big(u^{''}(t), u(t)\Big)\, dt$$

usando (3.42), obtemos

$$T = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt = \int_0^T -\Big(u^{''}(t), u(t)\Big)\, dt = \lambda \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt$$

portanto,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{T}{\lambda}.$$

Observe que

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{T^2}{2k\pi}, \quad \forall\ u \in M$$

atinge o menor valor quando $k = -1$. Portanto,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{-T^2}{2\pi}, \quad \forall\ u \in M.$$

■

3.5 Dual Hamiltoniano

Nesta subseção vamos considerar de maneira informal que os funcionais que consideraremos são continuamente diferenciáveis em $W_T^{1,p}([0,T])$. Além disso, vamos mostrar qual deve ser o funcional adequado afim de que os pontos críticos desse funcional sejam soluções do sistema Halmitoniano

$$\begin{cases} q^{'}(t) = D_z H(t, q, p) \\ p^{'}(t) = -D_x H(t, q, p). \end{cases}$$

Seja $L(t,x,y)$ uma função suave definida em $[0,T]\times\mathbb{R}^{2N}$ tal que para qualquer $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N$, $L(t,x,.)$ é uma função de Legendre. Considere $H(t,x,.)$ a transformada de Legendre de $L(t,x,.)$. Assim,

$$\begin{cases} H(t,x,z)=(z,y)-L(t,x,y) \\ z=D_yL(t,x,y), \quad y=D_zH(t,x,z) \end{cases} \tag{3.44}$$

ou

$$H(t,x,z)=\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[(z,y)-L(t,x,y)\right], \quad \forall z\in\mathbb{R}^N. \tag{3.45}$$

Se $q:[0,T]\to\mathbb{R}^N$ é ponto crítico de

$$\phi(q)=\int_0^T L(t,q,q^{'})dt \tag{3.46}$$

definida em um espaço de funções suaves T-periódicas, então

Afirmação 1: $\dfrac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'})=D_xL(t,q,q^{'})$.

De fato, sendo ϕ continuamente diferenciável em $W_T^{1,p}([0,T])$, para cada $v\in W_T^{1,p}([0,T])$, considere

$$F(\lambda,t)=L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})$$

e

$$\psi(\lambda)=\int_0^T F(\lambda,t)dt$$

assim,

$$\psi(\lambda)=\int_0^T F(\lambda,t)dt=\phi(q+\lambda v). \tag{3.47}$$

Por outro lado,

$$\psi^{'}(\lambda)=\int_0^T D_\lambda F(\lambda,t)dt=\int_0^T D_\lambda L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})$$

sendo,

$$D_\lambda L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})=\Big(D_xL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\Big)+\Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)$$

temos,

$$\psi^{'}(\lambda)=\int_0^T\Big(D_xL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\Big)dt+\int_0^T\Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)dt. \tag{3.48}$$

Integrando $\int_0^T \left(D_y L(t, q+\lambda v, q^{'}+\lambda v^{'}), v^{'}\right) dt$ por partes e usando o fato das funções serem T-periódicas, obtemos

$$\int_0^T \left(D_y L(t, q+\lambda v, q^{'}+\lambda v^{'}), v^{'}\right) dt = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt} D_y L(t, q+\lambda v, q^{'}+\lambda v^{'}), v\right) dt \tag{3.49}$$

logo, substituindo (3.49) em (3.48),

$$\psi^{'}(\lambda) = \int_0^T \left(\left(D_x L(t, q+\lambda v, q^{'}+\lambda v^{'}), v\right) - \left(\frac{d}{dt} D_y L(t, q+\lambda v, q^{'}+\lambda v^{'}), v\right)\right) dt. \tag{3.50}$$

Por (3.47),

$$\psi^{'}(\lambda) = \langle \phi^{'}(q+\lambda v), v\rangle$$

o que implica,

$$\psi^{'}(0) = \langle \phi^{'}(q), v\rangle. \tag{3.51}$$

Substituindo (3.51) em (3.50), obtemos em $\lambda = 0$

$$\langle \phi^{'}(q), v\rangle = \int_0^T \left(\left(D_x L(t, q, q^{'}), v\right) - \left(\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q^{'}), v\right)\right) dt, \quad \forall\ v \in W_T^{1,p}.$$

Sendo q um ponto crítico de ϕ,

$$\int_0^T \left(\left(D_x L(t, q, q^{'}), v\right) - \left(\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q^{'}), v\right)\right) dt = 0, \quad \forall\ v \in W_T^{1,p}([0,T]).$$

Visto que

$$C_0^1([0,T]) \subset W_T^{1,p}([0,T])$$

tem-se

$$\int_0^T \left(\left(D_x L(t, q, q^{'}), v\right) - \left(\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q^{'}), v\right)\right) dt = 0 \quad \forall\ v \in C_0^1([0,T]).$$

Pelo Teorema de Dubois-Raymond (Ver [Apêndice C]), temos

$$D_x L(t, q, q^{'}) - \frac{d}{dt} D_y L(t, q, q^{'}) = 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q^{'}) = D_x L(t, q, q^{'})$$

mostrando a Afirmação.

Considerando

$$p(t) = D_y L(t, q, q^{'}) \tag{3.52}$$

temos,

$$p^{'}(t) = D_x L(t, q, q^{'}). \tag{3.53}$$

Analogamente a (3.44), segue de (3.52)

$$q^{'}(t) = D_z H(t, q, p). \tag{3.54}$$

Por (3.44)

$$H(t, x, z) = (z, y) - L(t, x, y)$$

implicando que $y = y(t, x, z)$. De maneira informal, obtemos por (3.44)

$$D_{x_i} H = (D_{x_i} z, y) + (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y),$$

sendo x e z independentes, segue

$$D_{x_i} H = (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y),$$

usando (3.44),

$$D_{x_i} H = -D_{x_i} L$$

mostrando que $D_x H = -D_x L$. Assim, por (3.53) temos

$$p^{'}(t) = -D_x H(t, q, p). \tag{3.55}$$

Afirmação 2: As soluções do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} q^{'}(t) = D_z H(t, q, p) \\ p^{'}(t) = -D_x H(t, q, p) \end{cases} \tag{3.56}$$

são os pontos críticos do funcional

$$\phi(p, q) = \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt - \int_0^T H(t, q, p) dt.$$

De fato, primeiramente considerando

$$I(p, q) = \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt$$

por definição

$$\frac{I(p + sv, q + sw) - I(p, q)}{s} = \frac{\displaystyle\int_0^T \left(p + sv, q^{'} + sw^{'}\right) dt - \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt}{s}$$

logo,

$$\frac{I(p+sv,q+sw)-I(p,q)}{s}=\frac{s\displaystyle\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt+s\int_0^T\left(v,q^{'}\right)dt+s^2\int_0^T\left(v,w^{'}\right)dt}{s}.$$

Passando ao limite quando $s\to 0$, obtemos

$$\lim_{s\to 0}\frac{I(p+sv,q+sw)-I(p,q)}{s}=\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt+\int_0^T\left(v,q^{'}\right)dt$$

ou seja,

$$I^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[\left(p,w^{'}\right)+\left(v,q^{'}\right)\right]dt. \tag{3.57}$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt$ por partes e usando o fato das funções serem T-periódicas, obtemos

$$\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt=-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt, \tag{3.58}$$

substituindo (3.58) em (3.57), encontramos

$$I^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[\left(v,q^{'}\right)\right]-\left(p^{'},w\right)dt.$$

Por outro lado, se

$$K(p,q)=\int_0^T H(t,q,p)dt$$

seguindo o mesmo raciocínio da Afirmação 1,

$$K^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[(D_xH(t,q,p),w)+(D_zH(t,q,p),v)\right]dt.$$

Logo,

$$\phi^{'}(p,q).(v,w)=I^{'}(p,q).(v,w)-K^{'}(p,q).(v,w)$$

ou seja,

$$\phi^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left(v,q^{'}\right)-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt-\int_0^T(D_xH(t,q,p),w)\,dt-\int_0^T(D_zH(t,q,p),v)\,dt. \tag{3.59}$$

Agora vamos mostrar que os pontos críticos de ϕ são soluções de (3.56).

Analisemos os seguintes casos:

(i) Se $(v,w)=(0,w)$, segue

$$-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt-\int_0^T(D_xH(t,q,p),w)\,dt=0,\quad\forall\ w\in W_T^{1,p}([0,T])$$

o que implica,

$$\int_0^T \left(\left(-p^{'} - D_x H(t,q,p)\right), w\right) dt = 0, \quad \forall\ w \in C_0^1([0,T])$$

portanto,

$$p^{'} = -D_x H(t,q,p).$$

(ii) Se $(v,w) = (v,0)$, obtemos

$$\int_0^T \left(q^{'}, v\right) dt - \int_0^T (D_z H(t,q,p), v)\, dt = 0, \quad \forall\ v \in W_T^{1,p}([0,T])$$

e consequentemente,

$$\int_0^T \left(\left(q^{'} - D_z H(t,q,p)\right), v\right) dt = 0, \quad \forall\ v \in C_0^1([0,T])$$

portanto,

$$q^{'} = D_z H(t,q,p).$$

Por (i) e (ii) segue a Afirmação 2.

3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo

Nesta seção trataremos da existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'} = J\nabla H(t,u)$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'} = J\nabla H(u),$$

onde J é definido como no Lema 3.6 e ∇ denota o gradiente com respeito a u.

No caso forçado assumiremos que H é T-periódica com respeito a t com o objetivo de encontrar soluções T-periódicas ou kT-periódicas para algum $k \geq 2$.

No caso livre, a energia é constante, pois

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \left(\nabla H(u(t)), u^{'}(t)\right) = (\nabla H(u(t)), J\nabla H(u(t)))$$

e pelo item i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = 0$$

mostrando que $H(u(t))$ é constante.

No que segue, assumimos as seguintes hipóteses sobre o Hamiltoniano $H(t,u)$:

$(\mathbf{H_1})$ H é contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N}$, diferenciável com respeito a u e $\nabla H(t,u)$ é contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N}$.

$(\mathbf{H_2})$ H é estritamente convexa com respeito a u.

$(\mathbf{H_3})$ Existem $q\in(1,2)$, $\alpha\geq 0$ e $\beta,\gamma>0$ tais que

$$\beta\|u\|^q-\alpha\leq H(t,u)\leq\gamma\|u\|^q+\alpha.$$

$(\mathbf{H_4})$ H é T-periódica com respeito a t.

Observação 3.3 *Assumindo a hipótese* (H_3), *existem* $q\in(1,2)$, $\alpha\geq 0$ *e* $\beta,\gamma>0$ *tais que*

$$\beta\|u\|^{q-1}-\frac{\alpha}{\|u\|}\leq\frac{H(t,u)}{\|u\|}\leq\gamma\|u\|^{q-1}+\frac{\alpha}{\|u\|}\quad com\quad \|u\|\neq 0.$$

Passando ao limite quando $\|u\|\to\infty$, *encontramos*

$$\frac{H(t,u)}{\|u\|}\to\infty$$

de onde concluímos que H *é uma função de Legendre.*

Denotaremos por $G(t,.)$ a transformada de Legendre de $H(t,.)$, isto é,

$$\begin{cases} G(t,v)=(v,u)-H(t,u)\\ v=\nabla H(t,u),\quad u=\nabla G(t,v)\end{cases}$$

ou

$$G(t,v)=\sup_{w\in\mathbb{R}^{2N}}\left[(v,w)-H(t,w)\right].$$

Se $p>2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, segue da Afirmação (H_3) e do Lema 3.4 que

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}-\alpha\leq G(t,v)\leq\left(\frac{1}{\beta q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}+\alpha. \tag{3.60}$$

Denotaremos por X o seguinte espaço vetorial

$$X=\left\{\begin{array}{l} v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2N} absolutamente\ contínua, T-periódica,\\ \displaystyle\int_0^T v(t)dt=0\ e\int_0^T\|v'(t)\|^p dt<\infty\end{array}\right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.61}$$

e por $\phi : X \to \mathbb{R}$ o seguinte funcional

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt.$$

Se $v \in W^{1,p}([0,T])$ e $\displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0$, pela Proposição 2.3 existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt$$

o que implica,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq \left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt + C\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq (C+1)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

mostrando que

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq T^{\frac{1}{p}}(C+1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando $C_1 = T^{\frac{1}{p}}(C+1)^{\frac{1}{p}}$, da última desigualdade

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq C_1\|v\|_X. \tag{3.62}$$

Por outro lado,

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{T^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt + \int_0^T \|v(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando $C_2 = T^{\frac{1}{p}}$ ficamos com

$$C_2\|v\|_X \leq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])}. \tag{3.63}$$

Por (3.62) e (3.63), temos

$$C_1\|v\|_X \geq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \geq C_2\|v\|_X,$$

de onde concluímos que $\|.\|_{W^{1,p}([0,T])}$ e $\|.\|_X$ são equivalentes em X.

Sendo $W^{1,p}([0,T])$ um espaço de Banach com norma $\|.\|_{W^{1,p}([0,T])}$ para $1 \leq p \leq \infty$, concluímos que X é um espaço de Banach com norma $\|.\|_X$.

O funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt$$

está bem definido, pois usando (3.60) e o Lema 3.5, ∇G cresce no máximo até a potência $p-1$, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ (Ver [Apêndice B]) e

Afirmação 1: $\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \displaystyle\int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'})\right)$ dt.

De fato, considerando $I : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) = \int_0^T \left(Jv^{'}, v\right) dt,$$

é simples verificar que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\langle I^{'}(v), h\rangle = -2\int_0^T \left(Jv, h^{'}\right) dt.$$

Por outro lado, definindo

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'}) dt,$$

tem-se (Ver [Apêndice B]),

$$\langle K^{'}(v), h\rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}), h^{'}\right) dt.$$

Sendo,

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \frac{1}{2}\langle I^{'}(v), h\rangle + \langle K^{'}(v), h\rangle$$

temos,

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = -\int_0^T \left(Jv, h^{'}\right) dt + \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}), h^{'}\right) dt$$

ou

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'}\right) dt \tag{3.64}$$

mostrando a Afirmação 1.

Lema 3.7 *Se v é um ponto crítico de ϕ, existe uma solução T-periódica u para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right).$$

Demonstração:

Por (3.64),

$$\langle \phi^{'}(v), h \rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'} \right) dt.$$

Sendo v um ponto crítico de ϕ,

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'} \right) dt = 0, \quad \forall \; h \in X.$$

Dado $\varphi \in C_0^\infty([0, T])$, considerando

$$h_\varphi(t) = \varphi(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(s) ds$$

tem-se, $h_\varphi^{'} = \varphi^{'}$ e

$$\int_0^T h_\varphi(t) dt = \int_0^T \varphi(t) dt - \int_0^T \frac{1}{T} \left(\int_0^T \varphi(s) ds \right) dt$$

ou seja,

$$\int_0^T h_\varphi(t) dt = 0.$$

Mostrando que $h_\varphi \in X$.

Logo,

$$0 = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h_\varphi^{'} \right) dt = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, \varphi^{'} \right) dt, \quad \forall \; \varphi \in C_0^\infty([0, T])$$

o que implica,

$$D^{'} \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv \right) = 0$$

onde $D^{'}$ denota a derivada no sentido das distribuições.

Consequentemente

$$\left(D^{'} \nabla G(t, v^{'}), \varphi \right) = \int_0^T J v^{'} \varphi$$

ou seja,

$$D^{'} \nabla G(t, v^{'}) = J v^{'}$$

portanto,

$$\frac{d}{dt} \nabla G(t, v^{'}) = J v^{'}.$$

Considerando

$$u = \nabla G(t, v^{'})$$

temos

$$v^{'} = \nabla H(t,u)$$

assim,

$$u^{'} = \frac{d}{dt}\nabla G(t,v^{'}) = Jv^{'} \tag{3.65}$$

o que implica,

$$u^{'} = J\nabla H(t,u).$$

Logo, u é solução para

$$u^{'} = J\nabla H(t,u).$$

Sendo ∇G e $v^{'}$ T-periódicas, segue que u é T-periódica.

Observando que

$$J^2 = -I, I := identidade,$$

de (3.65) segue

$$Ju^{'}(t) = -v^{'}(t).$$

Integrando de 0 a s, obtemos

$$\int_0^s v^{'}(t)dt = -J\left(\int_0^s u^{'}(t)dt\right)$$

assim (Ver [3]),

$$v(s) - v(0) = -J(u(s) - u(0))$$

ou seja,

$$v(s) - v(0) = -Ju(s) + Ju(0). \tag{3.66}$$

Integrando de 0 a T,

$$\int_0^T v(t)dt - \int_0^T v(0)dt = -J\left(\int_0^T u(t)dt\right) + J\left(\int_0^T u(0)dt\right)$$

e sendo $\int_0^T v(t)dt = 0$, temos

$$-Tv(0) = -J\left(\int_0^T u(t)dt\right) + TJu(0)$$

consequentemente,

$$v(0) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\right) - Ju(0). \tag{3.67}$$

Por (3.66) e (3.67) segue

$$v(s) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\right) - Ju(0) - Ju(s) + Ju(0)$$

ou seja,

$$v(t) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right) - Ju(t)$$

portanto,

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right).$$

$\blacksquare$

Lema 3.8 *O funcional ϕ é limitado inferiormente.*

Demonstração:

Para

$$w(t) = \frac{T^{\frac{1}{p}}v(t)}{\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}$$

temos,

$$\|w^{'}(t)\|^p = \frac{T\|v^{'}(t)\|^p}{\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt}$$

e consequentemente

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^p dt = T.$$

Pela Proposição 3.9,

$$\int_0^T \left(Jw^{'}(t), w(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

o que implica,

$$\frac{T^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}}\int_0^T \left(Jv^{'}(t), v(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

logo,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left(Jv^{'}(t), v(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{4\pi}\|v\|_X^2. \tag{3.68}$$

Por outro lado, usando a equação (3.60) segue

$$\int_0^T G(t, v^{'})dt \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt - \alpha T$$

e assim,

$$\int_0^T G(t,v^{'})dt \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right) - \alpha T. \tag{3.69}$$

Por (3.68) e (3.69) tem-se

$$\phi(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\|v\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi}\|v\|_X^2 - \alpha T.$$

■

Lema 3.9 *O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).*

Demonstração:

Seja (v_k) uma sequência em X tal que $(\phi(v_k))$ é limitada e $\phi^{'}(v_k) \to 0$. Pelo Lema 3.8,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\|v_k\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi}\|v_k\|_X^2 - \alpha T \leq \phi(v_k)$$

e sendo $(\phi(v_k))$ limitada, existe $M > 0$ tal que

$$\phi(v_k) \leq M.$$

Usando estas últimas desigualdades, tem-se (v_k) é limitada em X. Logo, (v_k) é limitada em $W^{1,p}([0,T])$. Desse modo, existe uma subsequência, que denotaremos por (v_k), tal que

$$v_k \to v \ \ uniformemente \ \ em \ \ [0,T] \tag{3.70}$$

pois

$$W^{1,p}([0,T]) \hookrightarrow C([0,T]).$$

Sendo

$$\{v_k\} \subset W^{1,p}([0,T]) \tag{3.71}$$

segue que

$$\{v_k^{'}\} \subset L^p([0,T]).$$

Visto que $L^p([0,T])$ é um espaço reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por $(v_k^{'})$, tal que

$$v_k^{'} \rightharpoonup w \ \ em \ \ L^p([0,T]).$$

Por (3.71) temos

$$\int_0^T v_k^{'}(t)\psi(t)dt = -\int_0^T v_k(t)\psi^{'}(t)dt, \quad \forall \ \ \psi \in C_0^1([0,T]). \tag{3.72}$$

Por definição

$$v_k^{'} \rightharpoonup w \ \ em \ \ L^p([0,T]) \Longleftrightarrow \varphi(v_k^{'}) \to \varphi(w), \ \ \forall \ \varphi \in (L^p([0,T]))^*.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Ver [3])

$$\int_0^T v_k^{'}(t)\varphi(t)dt \to \int_0^T w(t)\varphi(t)dt.$$

Por outro lado,

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq \int_0^T \|v_k(t)-v(t)\| \ |\varphi^{'}(t)|dt, \ \ \forall \ \ \varphi \in C_0^1([0,T])$$

assim,

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq C\int_0^T \|v_k(t)-v(t)\|dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq C \ T^{\frac{1}{q}} \ \|v_k - v\|_{L^p}^p.$$

De (3.70), segue

$$\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt \to \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt, \ \ \forall \ \ \varphi \in C_0^1([0,T]).$$

Usando (3.72), temos

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt, \ \ \forall \ \ \varphi \in C_0^1([0,T]).$$

Integrando $\int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt$ por partes e usando o Teorema de Dubois-Raymond (Ver [3]), obtemos

$$w = v^{'}$$

portanto,

$$v_k^{'} \rightharpoonup v^{'} \ \ em \ \ L^p([0,T]). \tag{3.73}$$

Observando que

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k \in L^q([0,T])$$

podemos escrever,

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k = w_k + f_k$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \nabla G(t, v_k^{'})dt.$$

Desse modo,

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt = \int_0^T \left(w_k + f_k, h^{'}\right) dt$$

mostrando que

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt = \int_0^T \left(f_k, h^{'}\right) dt.$$

Por outro lado, sendo $\phi^{'}(v_k) \to 0$ tem-se

$$\sup\left\{\left|\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt\right|; \quad \|h^{'}\|_{L^p([0,T])} \leq 1\right\} \to 0$$

portanto,

$$\sup\left\{\left|\int_0^T \left(f_k, h^{'}\right) dt\right|; \quad \|h^{'}\|_{L^p([0,T])} \leq 1\right\} \to 0. \tag{3.74}$$

Desde que $f_k \in L^q([0,T])$, existe $\psi_k \in C([0,T])$ (Ver[3]), tal que

$$\|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])} \leq \frac{1}{k}.$$

Considere

$$h_k(t) = \varphi_k(t) - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_k(s)ds$$

onde

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \psi_k|\psi_k|^{q-2}ds.$$

Então,

$$\int_0^T f_k h_k^{'} dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'} dt + \int_0^T \psi_k h_k^{'} dt$$

ou equivalentemente

$$\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])} \int_0^T f_k\left(\frac{h_k}{\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}}\right)^{'} dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'} dt + \int_0^T \psi_k h_k^{'} dt. \tag{3.75}$$

Usando (3.74) e o fato que $\|h_k^{'}\|_{L^q([0,T])} \leq C$, podemos afirmar que

$$\left|\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])} \int_0^T f_k\left(\frac{h_k}{\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}}\right)^{'} dt\right| \to 0.$$

Além disso,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'} dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)\varphi_k^{'} dt \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])}\|\varphi_k^{'}\|_{L^p([0,T])}$$

o que implica,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'}dt \leq \frac{1}{k}\|\psi_k\|_{L^q([0,T])}^{\frac{p}{q}} \leq \frac{C_1}{k} \to 0$$

consequentemente por (3.75),

$$\int_0^T \psi_k h_k^{'}dt \to 0.$$

Observando que

$$\int_0^T \psi_k h_k^{'}dt = \int_0^T |\psi_k|^q dt$$

temos,

$$\|\psi_k\|_{L^q([0,T])} \to 0 \ \ quando \ \ k \to +\infty.$$

Por outro lado,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} = \|f_k - \psi_k + \psi_k\|_{L^q([0,T])} \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

ou seja,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} \leq \frac{1}{k} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

mostrando que

$$f_k \to 0 \ \ em \ \ L^q([0,T]).$$

Portanto,

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k - w_k = f_k \to 0 \ \ em \ \ L^q([0,T]) \tag{3.76}$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \nabla G(t, v_k^{'})dt.$$

Note que,

$$\|w_k\| \leq \frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla G(t, v_k^{'})\|dt. \tag{3.77}$$

Sendo $G(t,.)$ a transformada de Legendre de $H(t,.)$, usando (3.60) e a Observação 3.5 existem $C_2 > 0$ e $C_3 > 0$ tais que

$$\|\nabla G(t, v_k^{'})\| \leq C_2\|v_k^{'}\|^{p-1} + C_3$$

logo, (w_k) é limitada em $\mathbb{R}^{2N}$. Portanto, existem uma subsequência, que denotaremos por (w_k), e $w \in \mathbb{R}^{2N}$ tais que

$$w_k \to w \ \ em \ \ \mathbb{R}^{2N}.$$

Usando (3.76),

$$v_k^{'} = \nabla H(f_k + Jv_k + w_k).$$

Por (H_3) e usando o Lema 3.5 existem $C_6 > 0$ e $C_7 > 0$ tais que

$$\|v_k^{'}\| \leq C_6 \|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7$$

o que implica,

$$\|v_k^{'}\|^p \leq \left(C_6 \|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7\right)^p.$$

Considerando

$$g_k = C_6 \|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7,$$

temos,

$$\|v_k^{'}\| \leq g_k.$$

Observe que

$$|g_k|^p \leq C_8 \|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{(q-1)p} + C_9$$

ou seja,

$$|g_k|^p \leq C_8 \|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q} + C_9.$$

Usando (3.76),

$$g_k \in L^p([0,T]).$$

Por outro lado, passando a subsequência se necessário,

$$v_k^{'}(t) \to g(t) \quad q.t.p \ em \ [0,T]$$

onde $g = \nabla H(Jv + w)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado de Lebesgue

$$\int_0^T \|v_k^{'}(t) - g(t)\|^p dt \to 0 \quad em \quad L^p([0,T])$$

ou seja,

$$\int_0^T \|v_k^{'}(t) - v^{'}(t)\|^p dt \to 0 \quad em \quad L^p([0,T])$$

portanto,

$$v_k \to v \quad em \quad X.$$

■

Teorema 3.10 *Assumindo as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$*, existe uma solução* T*-periódica* u *para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right)$$

minimiza ϕ *em* X*.*

Demonstração:

Uma vez que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, pelos Lemas 3.8 e 3.9 o funcional ϕ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$. Logo pelo Teorema 1.4 existe um ponto crítico v que minimiza ϕ em X.

Portanto, sendo v um ponto crítico de ϕ, pelo Lema 3.7 existe uma solução T-periódica u para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right)$$

minimiza ϕ em X.

■

Proposição 3.11 *Assumindo as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$ *e que* u *é uma solução de*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

verificando $u(0) = u(T)$*. Então*

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \le \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p\right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T \tag{3.78}$$

e

$$\beta\int_0^T \|u(t)\|^q dt \le \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p\right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T. \tag{3.79}$$

Demonstração:

Assumindo as hipóteses $(H_1) - (H_4)$, temos que H é uma função de Legendre e existem $q \in (1, 2)$, $\alpha \ge 0$ e $\beta, \gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^q - \alpha \le H(t, u) \le \gamma\|u\|^q + \alpha,$$

com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|\nabla H(t,u)\|^{p}}{p}\leq(\nabla H(t,u),u)+2\alpha.$$

Sendo u solução de

$$u^{'}(t)=J\nabla H(t,u(t))$$

temos

$$Ju^{'}(t)=-\nabla H(t,u(t))$$

o que implica,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|\nabla H(t,u)\|^{p}}{p}\leq-\left(Ju^{'},u\right)+2\alpha.$$

Integrando ambos os membros de 0 a T, obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_{0}^{T}\|\nabla H(t,u)\|^{p}dt\leq-\int_{0}^{T}\left(Ju^{'},u\right)dt+2\alpha T. \tag{3.80}$$

Observe que,

$$\|u^{'}\|^{2}=(J\nabla H(t,u(t)),J\nabla H(t,u(t)))=\big(\nabla H(t,u(t)),J^{2}\nabla H(t,u(t))\big)$$

assim,

$$\|u^{'}\|^{2}=\|\nabla H(t,u)\|^{2}. \tag{3.81}$$

Substituindo (3.81) em (3.80) e usando a Proposição 3.9, ficamos com

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\leq\frac{T^{2}}{2\pi}\left(\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\leq\frac{T^{2}}{2\pi}\,\frac{1}{T^{\frac{2}{p}}}\left(\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\leq\frac{T^{2-\frac{2}{p}}}{2\pi}\left(\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T.$$

Usando o fato que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, tem-se

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\leq\frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_{0}^{T}\|u^{'}(t)\|^{p}dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T$$

mostrando (3.78).

Por outro lado, pela Proposição 3.2

$$H(t,0) \geq H(t,u) + (\nabla H(t,u), -u)$$

ou seja,

$$H(t,u) \leq H(t,0) + (\nabla H(t,u), u)\,.$$

Usando (H_3),

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(t,u) \leq (\nabla H(t,u), u) + H(t,0)$$

e

$$H(t,0) \leq \alpha.$$

Logo,

$$\beta\|u\|^q \leq (\nabla H(t,u), u) + 2\alpha.$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para mostrar (3.78), obtemos

$$\beta \int_0^T \|u(t)\|^q dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T$$

demonstrando (3.79).

■

3.7 Subharmônicas

Considerando o sistema Hamiltoniano

$$Ju^{'}(t) + \nabla H(t, u(t)) = 0, \tag{3.82}$$

uma solução u de (3.82) em $[0,T]$ verificando

$$u(0) = u(T)$$

pode ser extendida pela T-periodicidade para $\mathbb{R}$, obtendo-se uma solução u de (3.82) satisfazendo

$$u(t+T) = u(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.83}$$

Se (3.83) não é satisfeita substituindo T por $\dfrac{T}{k}$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k \geq 2$, T é chamado **período minimal** de u.

Nesta seção mostraremos que (3.82) admite solução u tal que

$$u(t) = u(t + kT), \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

para algum $k \geq 2$. Estas soluções são chamadas soluções subharmônicas ou simplesmente subharmônicas.

Teorema 3.12 *Assumindo as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$, *para todo* $k \in \mathbb{N}^*$, *existe uma solução,* u_k, kT*-periódica para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$\|u_k\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} \|u_k(t)\| \to \infty \ \ quando \ \ k \to \infty.$$

Além disso, o período minimal (T_k) *de* u_k *verifica*

$$T_k \to \infty \ \ quando \ \ k \to \infty.$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor $T = 2\pi$. Visto que toda solução T-periódica é também kT-periódica, considere $T = 2k\pi$, pelo Teorema 3.10 existe uma solução $2k\pi$ - periódica de

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)) \tag{3.84}$$

tal que

$$v_k(t) = -J\left(u_k(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_k(s)ds\right) \tag{3.85}$$

minimiza

$$\phi_k(v) = \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\Big(Jv^{'}(t), v(t)\Big) + G(t, v^{'}(t))\right]dt$$

em X.

Vamos estimar superiormente $C_k = \phi_k(v_k)$. Considere $e \in \mathbb{R}^{2N}$ tal que $\|e\| = 1$ e

$$m = max\{G(t, v(t)) : t \in \mathbb{R}, \|v\| = 1\}. \tag{3.86}$$

Se

$$h_k = k\ cos\left(\frac{t}{k}\right)e + k\ sen\left(\frac{t}{k}\right)Je$$

temos

$$h_k^{'} = -sen\left(\frac{t}{k}\right)e + cos\left(\frac{t}{k}\right)Je$$

e consequentemente,

$$\|h_k^{'}\|^2 = \left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)e + cos\left(\frac{t}{k}\right)Je, -sen\left(\frac{t}{k}\right)e + cos\left(\frac{t}{k}\right)Je\right)$$

de onde encontramos,

$$\|h_k^{'}\|^2 = sen^2\left(\frac{t}{k}\right)\|e\|^2 + 2\,(e, Je)\left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)cos\left(\frac{t}{k}\right)\right) + cos^2\left(\frac{t}{k}\right)\|Je\|^2.$$

Por definição $\|e\| = \|Je\| = 1$ e por (i) do Lema 3.6 temos $(e, Je) = 0$. Portanto,

$$\|h_k^{'}\|^2 = sen^2\left(\frac{t}{k}\right) + cos^2\left(\frac{t}{k}\right)$$

donde concluímos que

$$\|h_k^{'}\| = 1. \tag{3.87}$$

Além disso,

$$C_k \leq \phi_k(h_k) = \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) + G(t, h_k^{'}(t))\right]dt.$$

Usando (3.86) e (3.87), temos

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) + m\right]dt$$

assim,

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi}\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right)dt + 2km\pi. \tag{3.88}$$

Por outro lado,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = \left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)Je - cos\left(\frac{t}{k}\right)e, k\ cos\left(\frac{t}{k}\right)e + k\ sen\left(\frac{t}{k}\right)Je\right)$$

o que implica,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = -k\ sen^2\left(\frac{t}{k}\right)\|Je\|^2 - k\ cos^2\left(\frac{t}{k}\right)\|e\|^2$$

e portanto,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = -k. \tag{3.89}$$

Substituindo (3.89) em (3.88) tem-se

$$C_k \leq -\frac{1}{2}\int_0^{2k\pi}k\ dt + 2km\pi$$

assim,

$$C_k \leq 2km\pi - k^2\pi. \tag{3.90}$$

Afirmação 1: $\|u_k\|_\infty \to \infty$ quando $k \to \infty$.

De fato, Se $\|u_k\|$ não converge para $+\infty$, existem $C_2 > 0$ e uma subsequência (u_{k_n}) tal que

$$\|u_{k_n}\|_\infty \leq C_2.$$

Observe que, $\nabla H|_{[0,T]\times\mathbb{R}^{2N}}$ é contínua e usando (3.84) temos

$$\|u'_{k_n}\|_\infty \leq max\{\|J\nabla H(t,z)\| : t \in [0,T], \|z\| \leq C_2\}$$

portanto,

$$\|u'_{k_n}\|_\infty \leq C_3.$$

Usando (3.85) obtemos

$$\|v_{k_n}\|_\infty = \left\| u_{k_n} - \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} u_{k_n}(s)ds \right\|_\infty$$

o que implica,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq \|u_{k_n}\|_\infty + \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} \|u_{k_n}(s)\|_\infty ds$$

logo,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq C_2 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} C_2\ ds$$

ou seja,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq 2\ C_2.$$

Analogamente,

$$\|v'_{k_n}\|_\infty \leq C_3.$$

Desse modo existe $C > 0$ tal que

$$\|v_{k_n}\|_\infty.\|v'_{k_n}\|_\infty \leq C.$$

Note que,

$$\Big(Jv'_k, v_k\Big) \geq -\Big|\Big(Jv'_k, v_k\Big)\Big| \geq -\|Jv'_k\|\|v_k\| = -\|v'_k\|\|v_k\|.$$

Sendo

$$C_k = \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\Big(Jv'_k(t), v_k(t)\Big) + G(t, v'_k(t))\right]dt$$

temos,

$$C_{k_n} \geq -\int_0^{2k_n\pi} \frac{1}{2}\|v_{k_n}\|_\infty.\|v_{k_n}^{'}\|_\infty \, dt + \int_0^{2k_n\pi} G(t, v_{k_n}^{'}(t)) \, dt.$$

Por outro lado, usando (3.60) obtemos

$$G(t, v_k^{'}) \geq -\alpha.$$

logo,

$$C_{k_n} \geq -k_n C\pi - 2k_n\alpha\pi$$

o que implica,

$$C_{k_n} \geq -2k_n\pi\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \tag{3.91}$$

o que é um absurdo, pois por (3.90) e (3.91) segue

$$-2k_n\pi\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \leq -k_n^2\pi + 2k_n\pi m$$

donde segue,

$$-2\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \leq -k_n + 2m$$

ou seja,

$$k_n \leq 2m + C - 2\alpha$$

mostrando que (u_{k_n}) é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$\|u_k\|_\infty \to \infty \;\; quando \;\; k \to \infty$$

mostrando a Afirmação 1.

Afirmação 2: $T_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Com efeito, caso contrário existe $\tau > 0$ e uma subsequência (T_{k_n}) tal que o período minimal T_{k_n} de u_{k_n} satisfaz $T_{k_n} \leq \tau$ onde $n \in \mathbb{N}^*$ e $k_n \to \infty$.

Pela Proposição 3.11, existem $A_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, tais que

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^p \leq A_1\frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2\tau \tag{3.92}$$

e

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}\|^q \leq A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n}. \tag{3.93}$$

Considere

$$u_{k_n} = \widehat{u_{k_n}} + \overline{u_{k_n}}$$

onde,

$$\widehat{u_{k_n}} = \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} u_{k_n}(t)dt.$$

Observe que,

$$u_{k_n}^{'} = \overline{u_{k_n}}^{\prime}$$

pela desigualdade de Sobolev (Ver Proposição 2.1),

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq \frac{T_{k_n}}{12} \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^2 dt.$$

Sendo $p > 2$, por imersões de Sobolev

$$W_T^{1,p}([0,T]) \hookrightarrow W_T^{1,2}([0,T])$$

assim,

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C\frac{T_{k_n}}{12} \left(\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^p dt \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Usando (3.92) tem-se

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C\frac{\tau}{12} \left(A_1 \frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2\tau \right)^{\frac{2}{p}}$$

logo, $\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty$ é limitada.

Por outro lado, temos

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\| dt$$

usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left(\int_0^{T_{k_n}} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando (3.93) tem-se

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left[T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left(A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

assim,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left[T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left(A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q}} \right) \right]$$

o que implica,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left(A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \right)$$

ou seja,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}}\left(A_3^{\frac{1}{q}}T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}}T_{k_n}\right).$$

Observe que,

$$\frac{1}{p}+\frac{2}{q^2}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}-\frac{1}{q}=1+\frac{2}{q^2}-\frac{q}{q^2}$$

o que implica,

$$\frac{1}{p}+\frac{2}{q^2}=1+\frac{2-q}{q^2}>1$$

poís, sendo $q \in (1,2)$ tem-se

$$\frac{2-q}{q^2}>0.$$

Portanto,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(A_3^{\frac{1}{q}}\tau^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}-1} + A_4^{\frac{1}{q}}\right).$$

mostrando que $\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty$ é limitada.

Pela definição de u_{k_n} segue que $\|u_{k_n}\|_\infty$ é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$T_k \to \infty \;\; quando \;\; k \to \infty$$

mostrando a Afirmação 2.

■

3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito

No que segue considere as seguintes afirmações sobre o Hamiltoniano livre $H(u)$:

$(\mathbf{H_5})$ $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$

$(\mathbf{H_6})$ H é estritamente convexa com respeito a u

$(\mathbf{H_7})$ Existem $q \in (1,2)$, $\alpha \geq 0$ e $\beta,\gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^q-\alpha \leq H(u) \leq \gamma\|u\|^q+\alpha,$$

e considere G é a transformada de Legendre de H.

Observação 3.4 *Assumindo $(H_5)-(H_7)$, podemos supor sem perda de generalidade $H(0)=0$.*

De fato, usando (H_7) e passando ao limite quando $\|u\| \to \infty$, temos

$$\lim_{\|u\|\to\infty}(\beta\|u\|^q-\alpha) \leq \lim_{\|u\|\to\infty} H(u) \leq \lim_{\|u\|\to\infty}(\gamma\|u\|^q+\alpha)$$

logo,

$$H(u) \to \infty \quad quando \quad \|u\| \to \infty.$$

Assim H possui mínimo em algum ponto $q \in \mathbb{R}^{2N}$.

Considere,

$$h_0 = H(q) = \min_{z \in \mathbb{R}^{2N}} H(z)$$

e a função $\widehat{H} : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{H}(v) = H(v + q) - h_0.$$

Por definição

$$\widehat{H}(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Observe que

$$\widehat{H}(0) = H(q) - h_0 = 0,$$

ou seja, $\widehat{H}$ possui mínimo no ponto 0.

Por outro lado,

$$\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$$

onde $i = v + q$. Se

$$v^{'}(t) = J\nabla \widehat{H}(v(t))$$

usando $u^{'} = v^{'}$ e $\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$ tem-se

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)).$$

No que segue, podemos assumir que $H(0) = 0$ e $\nabla H(0) = 0$. Sendo G a transformada de Legendre de H, obtemos

$$G(u) \geq 0, \quad \forall \ \ u \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$G(0) = (v, 0) - H(0) = 0$$

logo,

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = 0 = G(0).$$

Portanto,

$$0 = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} H(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = G(0).$$

Teorema 3.13 *Assumindo* $(H_5) - (H_7)$ *e* $H(0) = 0$, *existe* $T_0 \geq 0$ *tal que para todo* $T > T_0$, *a equação*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)) \tag{3.94}$$

admite solução não-trivial u_T *com período minimal prescrito* T. *Além disso,*

$$\|u_T\|_\infty \to \infty \quad quando \quad T \to \infty.$$

Demonstração:

Pelo Teorema 3.10, para todo $T > 0$ existe uma solução u_T para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

tal que

$$v_T(t) = -J\left(u_T(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T(s)ds\right)$$

minimiza

$$\phi_T(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}(t), v(t)\right) + G(v^{'}(t))\right] dt$$

em X.

Vamos estimar superiormente $C_T = \phi_T(v_T)$. Consideremos $e \in \mathbb{R}^{2N}$ tal que $\|e\| = 1$ e

$$m = \max_{\|v\|=1} G(v).$$

Se

$$h_T = \frac{T}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) e + \frac{T}{2\pi} sen\left(\frac{2\pi}{T}t\right) Je$$

repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.12, obtemos

$$C_T \leq -\frac{T^2}{4\pi} + mT$$

e

$$\|u_T\|_\infty \to \infty \quad quando \quad T \to \infty.$$

Além disso, se

$$T > T_0 = 4m\pi$$

temos

$$\frac{T^2}{4\pi} > mT$$

o que implica,

$$mT - \frac{T^2}{4\pi} < 0$$

ou seja, se $T > T_0 = 4m\pi$ devemos ter

$$C_T < 0 = \phi_T(0)$$

mostrando que u_T é uma solução não trivial.

Afirmação: A solução u_T tem período minimal T.

Com efeito, caso contrário u_T é $\left(\frac{T}{k}\right)$-periódica para algum $k \geq 2$. Então

$$v(t) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

é T-periódica, pois

$$v(t+T) = k\ v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) \tag{3.95}$$

e

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t+T}{k}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T\left(\frac{t+T}{k}\right)\right)dt.$$

Logo

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt$$

mostrando a igualdade

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = v_T\left(\frac{t}{k}\right). \tag{3.96}$$

Substituindo (3.96) em (3.95) tem-se

$$v(t+T) = k\ v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

ou seja,

$$v(t+T) = v(t)$$

mostrando que $v(t) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$ é T-periódica.

Além disso,

$$\phi_T(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(Jv_T'\left(\frac{t}{k}\right), k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt + \int_0^T G\left(v_T'\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt$$

ou seja,

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2}\int_0^T \left(Jv_T'\left(\frac{t}{k}\right), v_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt + \int_0^T G\left(v_T'\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt.$$

Considerando $s = \frac{t}{k}$ temos $dt = kds$, logo

$$\phi_T(v) = \frac{k^2}{2}\int_0^{\frac{T}{k}} \left(Jv_T'(s), v_T(s)\right)ds + k\int_0^{\frac{T}{k}} G\left(v_T'(s)\right)ds. \tag{3.97}$$

Definindo

$$f(s) = \left(Jv_T'(s), v_T(s)\right)$$

observe que

$$\int_0^T f(s)ds = \int_0^{\frac{T}{k}} f(s)ds + \int_{\frac{T}{k}}^{\frac{2T}{k}} f(s)ds + ... + \int_{\frac{(k-2)T}{k}}^{\frac{(k-1)T}{k}} f(s)ds + \int_{\frac{(k-1)T}{k}}^{T} f(s)ds$$

o que implica,

$$\int_0^T f(s)ds = k \int_0^{\frac{T}{k}} f(s)ds.$$

Substituindo a última igualdade em (3.97) e usando um argumento semelhante para $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{k}} G\left(v_T'(s)\right) ds$, ficamos com

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2}\int_0^T \left(Jv_T'(s), v_T(s)\right) ds + \int_0^T G\left(v_T'(s)\right) ds$$

ou ainda

$$\phi_T(v) = \phi_T(v_T(t)) + \frac{k-1}{2}\int_0^T \left(Jv_T'(t), v_T(t)\right) dt.$$

Desde que,

$$G(v) \geq 0, \forall\ v \in \mathbb{R}^{2N}$$

tem-se

$$0 > \phi_T(v_T) \geq \int_0^T \frac{1}{2}\left(Jv_T'(t), v_T(t)\right) dt$$

o que implica,

$$\int_0^T \frac{1}{2}\left(Jv_T'(t), v_T(t)\right) dt < 0.$$

Portanto,

$$\phi_T(v) < \phi_T(v_T)$$

o que é um absurdo. Mostrando que u_T é T-periódica.

■

3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita

Se u é solução do sistema Hamiltoniano livre

$$u'(t) - J\nabla H(u(t)) = 0$$

sabemos que $H(u(t))$ é constante.

As órbitas de $u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$ em uma hiper-superfície S, é o conjunto

$$\{u(t) \in \mathbb{R}^{2N} : u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)), t \in [0,T] \;\; e \;\; H(u) \;\; é \;\; constante\}.$$

Lema 3.10 *Sejam* $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ *e* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$S = H_1^{-1}(c_1) = H_2^{-1}(c_2).$$

Se

$$\nabla H_i(u(t)) \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall\ u \in S,$$

então as órbitas de $u^{'}(t) = J\nabla H_i(u(t))$, *i = 1,2 em S são as mesmas.*

Demonstração:

Seja $u_1 : [0,T] \to S$ solução de

$$u^{'}(t) = J\nabla H_1(u(t)).$$

Sendo S uma hiper-superfície, $\nabla H_1(u_1(t))$ e $\nabla H_2(u_1(t))$ são paralelos ao vetor normal ao plano tangente S que passa pelo ponto $u_1(t)$. Portanto $\nabla H_1(u_1(t))$ e $\nabla H_2(u_1(t))$ são linearmente dependentes. Assim, existe uma função $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla H_2(u_1(t)) = \lambda(t)\nabla H_1(u_1(t)), \quad t \in [0,T]$$

o que implica,

$$\|\nabla H_2(u_1(t))\| = |\lambda(t)|\ \|\nabla H_1(u_1(t))\|, \quad t \in [0,T].$$

Visto que $\nabla H_i(u(t)) \neq 0$, i = 1, 2, tem-se

$$\lambda(t) \neq 0, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{3.98}$$

Observe que,

$$\lambda(t) = \frac{(\nabla H_2(u_1(t)), \nabla H_1(u_1(t)))}{\|\nabla H_1(u_1(t))\|^2}$$

e sendo $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$, podemos concluir que λ é contínua. Usando (3.98), o fato de λ ser contínua e o Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), temos que

$$\lambda(t) > 0 \;\; ou \;\; \lambda(t) < 0, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{3.99}$$

Considere a função $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{dt}{\lambda(t)}.$$

Afirmação: ψ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

De fato, sendo
$$\psi^{'}(s) = \frac{1}{\lambda(s)}$$
usando (3.99) segue
$$\psi^{'}(s) > 0, \quad \forall\ s \in [0,T]$$
ou
$$\psi^{'}(s) < 0, \quad \forall\ s \in [0,T]$$
mostrando que ψ é injetiva.

Sendo ψ contínua e injetiva, existe pelo teorema da Função Inversa $\psi^{-1} : \psi([0,T]) \to \mathbb{R}$ tal que ψ^{-1} é contínua. Visto que
$$\psi^{'}(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \quad e \quad \lambda(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0,T]$$
pelo Teorema da Regra da Cadeia, ψ^{-1} é derivável para todo $s \in \psi([0,T])$. Logo, ψ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Mostrando a Afirmação.

Considere a função $u_2 : \psi([0,T]) \to \mathbb{R}^{2N}$ tal que
$$u_2(t) = u_1(\psi^{-1}(t))$$
onde $t = \psi(s)$. Observe que
$$t = \psi(s) \Leftrightarrow s = \psi^{-1}(t), \quad \forall\ s \in [0,T].$$
Logo,
$$u_2^{'}(t) = u_1^{'}(\psi^{-1}(t)).\frac{1}{\psi^{'}(s)}$$
o que implica,
$$u_2^{'}(t) = u_1^{'}(\psi^{-1}(t)).\frac{1}{\psi^{'}(\psi^{-1}(t))}$$
ou seja,
$$u_2^{'}(t) = \left(\frac{1}{\psi^{'}}(\psi^{-1}(t))\right).\left(u_1^{'}(\psi^{-1}(t))\right).$$
sendo u_1 solução de $u^{'}(t) = J\nabla H_1(u(t))$, segue
$$u_2^{'}(t) = \left(\frac{1}{\psi^{'}}(\psi^{-1}(t))\right) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t))$$

e usando a definição de ψ,

$$u_2^{'}(t) = \lambda\left(\psi^{-1}(t)\right) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t))$$

visto que $\psi^{-1}(t) \in [0, T]$, logo

$$u_2^{'}(t) = J\nabla H_2(u_2(t)).$$

Por outro lado, se considerarmos $u_2 : [0, T] \to S$ solução de

$$u^{'}(t) = J\nabla H_2(u(t)).$$

Usando o mesmo argumento devemos ter

$$u_1^{'}(t) = J\nabla H_1(u_1(t)).$$

$\blacksquare$

Lema 3.11 *Sejam* $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tais que* $\nabla H(u) \neq 0$ *para todo* $u \in H^{-1}(c) = S$, *onde* S *a fronteira de um conjunto* C *compacto e estritamente convexo com* $0 \in intC$. *Se* $j_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ *é tal que*

$$j_c(u) = inf\left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e

$$F(u) = j_c^{\frac{3}{2}}(u)$$

temos:
(i) $F^{-1}(1) = S$
(ii) *F é homogênea positiva de grau* $\dfrac{3}{2}$
(iii) $F \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$
(iv) *F é estritamente convexa*
(v) *Existem* $\beta, \gamma > 0$ *tais que*

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

(vi) $\nabla F(u) \neq 0, \ \forall \ u \in S.$

Demonstração:

No que segue vamos fazer algumas observações que serão utilizadas na demonstração do Lema.

I: Se $u \in C$ então $j_c(u) \leq 1$.

De fato, sendo $u \in C$ temos

$$1 \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e pela definição de j_c,

$$j_c(u) \leq 1$$

mostrando I.

II: $u \in intC$ se, e somente se, $j_c(u) < 1$.

Com efeito, se $u \in intC$ então $(1+\epsilon)u \in C$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, assim

$$\frac{1}{1+\epsilon} \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

logo,

$$j_c(u) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$$

isto é,

$$j_c(u) < 1.$$

Reciprocamente, se $j_c(u) < 1$ existe α tal que

$$j_c(u) < \alpha < 1 \quad com \quad \frac{u}{\alpha} \in C.$$

Sendo $0 \in intC$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset C$. Para todo $v \in C$, usando o fato de C ser estritamente convexo, temos

$$u + (1-\alpha)v = \alpha\left(\frac{u}{\alpha}\right) + (1-\alpha)v \in C$$

logo,

$$B(u, (1-\alpha)\delta) \subset C$$

ou seja,

$$u \in intC$$

o que mostra II.

III: Se $j_c(u) = 1$ então $u \in \partial C$.

De fato, se $j_c(u) = 1$ existe uma sequência (λ_n) com $\lambda_n > 1$ tal que

$$\lambda_n \to 1 \quad e \quad \frac{u}{\lambda_n} \in C.$$

Observe que,

$$u = \lim_{n\to\infty} \frac{u}{\lambda_n},$$

e sendo C fechado, devemos ter $u \in C$.

Portanto usando I, II e III e o fato que C é fechado, tem-se

$$u \in \partial C \ \ se, \ \ e \ \ somente \ \ se, \ \ j_c(u) = 1. \tag{3.100}$$

Portanto, $j_c^{-1}(1)$ é o conjunto de pontos de ∂C, isto é,

$$j_c^{-1}(1) = S.$$

Observe que

$$u \in F^{-1}(1) \Leftrightarrow F(u) = 1 \Leftrightarrow (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow j_c(u) = 1 \Leftrightarrow u \in j_c^{-1}(1).$$

Portanto $F^{-1}(1) = S$, o que mostra (i).

Para mostrar (ii), note que para $t > 0$

$$j_c(tu) = inf \left\{ \lambda > 0; \frac{tu}{\lambda} \in C \right\},$$

o que implica

$$j_c(tu) = t \ inf \left\{ \widehat{\lambda} > 0; \frac{u}{\widehat{\lambda}} \in C \right\}$$

ou seja,

$$j_c(tu) = tj_c(u).$$

Portanto,

$$F(tu) = (j_c(tu))^{\frac{3}{2}} = (tj_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \ (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \ F(u),$$

mostrando (ii).

Com relação a (iii), primeiramente sejam $U = \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{2N+1}; u \neq 0 \ \ e \ \ \lambda > 0\}$ e considere a função $G : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(u, \lambda) = H\left(\frac{u}{\lambda}\right) - c.$$

Observe que,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{\lambda} \in S \Leftrightarrow j_c\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$$

logo,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow j_c(u) = \lambda.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = \left(\nabla H\left(\frac{u}{\lambda}\right), -\frac{u}{\lambda^2}\right)$$

o que implica,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(\nabla H\left(\frac{u}{\lambda}\right), \frac{u}{\lambda}\right)$$

ou seja,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{j_c(u)}\left(\nabla H\left(\frac{u}{j_c(u)}\right), \frac{u}{j_c(u)}\right).$$

Usando o fato de $0 \in intC$ segue

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{j_c(u)}\left(\nabla H\left(\frac{u}{j_c(u)}\right), \frac{u}{j_c(u)}\right) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $u \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ existe $B = B_\delta(u) \subset \mathbb{R}^{2N}$ e um intervalo $J = (j_c(u) - \epsilon, j_c(u) + \epsilon)$ tal que, existe uma única função $\xi : B \to J$ de classe C^1 satisfazendo

$$G(z, \xi(z)) = 0, \quad \forall\ z \in B.$$

Pela unicidade da função ξ temos

$$F(z) = \xi(z), \quad \forall\ z \in B$$

portanto,

$$F \in C^1(B, \mathbb{R}).$$

Sendo u qualquer em $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, concluímos que

$$F \in C^1\left(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\right).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(0+th) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(j_c(th))^{\frac{3}{2}} - (j_c(0))^{\frac{3}{2}}}{t}$$

o que implica,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{\frac{3}{2}}(j_c(h))}{t}$$

logo,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}} j_c(h) = 0.$$

Agora iremos mostrar que

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{\|h\|} \to 0 \ \ quando \ \ \|h\| \to 0.$$

Sendo $F(0) = 0$ e considerando $r(h) = F(h)$, temos

$$(j_c(h))^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

ou seja,

$$\left(j_c\left(\|h\|\frac{h}{\|h\|}\right)\right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

o que implica,

$$\|h\|^{\frac{3}{2}}\left(j_c\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

assim,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\|h\|^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = 0$$

mostrando que

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{\|h\|} \to 0 \quad quando \quad \|h\| \to 0$$

de onde segue $F^{'}(0) = 0$. Obviamente ∇F é homogênea positiva de grau $\dfrac{1}{2}$, logo

$$\lim_{\|u\|\to 0}\ \nabla F(u) = \lim_{\|u\|\to 0}\ \nabla F\left(\|u\|\frac{u}{\|u\|}\right) = \lim_{\|u\|\to 0}\ \|u\|^{\frac{1}{2}}\nabla F\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \quad h \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$\lim_{\|u\|\to 0}\ \nabla F(u) = 0 = \nabla F(0)$$

ou seja, F é diferenciável no ponto 0 e ∇F é contínua no ponto 0. Portanto

$$F \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$$

mostrando (iii).

Com relação a (iv), para $u, v \in \mathbb{R}^m$ fixe

$$\lambda \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e

$$\mu \in \left\{\mu > 0; \frac{u}{\mu} \in C\right\}.$$

Usando a convexidade de C,

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{v}{\mu}\right) \in C$$

pois, fixando

$$0 < t = \frac{\mu}{\lambda+\mu} < 1$$

tem-se

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = (1-t)\left(\frac{u}{\lambda}\right) + t\left(\frac{v}{\mu}\right)$$

e consequentemente,

$$\lambda + \mu \in \left\{\theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C\right\}.$$

Usando propriedades de ínfimo, tem-se

$$inf\left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\} + inf\left\{\mu > 0; \frac{v}{\mu} \in C\right\} \geq inf\left\{\theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C\right\},$$

ou seja,

$$j_c(u+v) \leq j_c(u) + j_c(v).$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $u, v \in \mathbb{R}^m$,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq j_c((1-\alpha)u) + j_c(\alpha v)$$

o que implica,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq (1-\alpha)j_c(u) + \alpha j_c(v)$$

o que mostra que j_c é uma função convexa.

Sendo C um conjunto estritamente convexo, para $u, v \in C$ com $u \neq v$ e $\theta \in (0,1)$ temos

$$\theta\left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta)\left(\frac{v}{j_c(v)}\right) \in intC.$$

Usando II,

$$j_c\left(\theta\left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta)\left(\frac{v}{j_c(v)}\right)\right) < 1.$$

Para cada $t \in [0,1]$, considerando

$$\theta = \frac{tj_c(u)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

tem-se

$$1 - \theta = \frac{(1-t)j_c(v)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

e

$$j_c(tu + (1-t)v) < tj_c(u) + (1-t)j_c(v)$$

mostrando que j_c é uma função estritamente convexa. Portanto, sendo F a composição de duas funções estritamente convexas, concluímos que F é estritamente convexa. Mostrando (iv).

Para a prova de (v), observe que existem $\gamma, \beta > 0$ tais que

$$\beta \leq F\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \leq \gamma$$

usando (ii) tem-se

$$\beta \leq \left(\frac{1}{\|u\|}\right)^{\frac{3}{2}} F(u) \leq \gamma$$

o que implica,

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

mostrando (v).

Finalmente, para mostrarmos (vi) observe que $F(0) = 0$ e usando o fato que a função F é estritamente convexa segue que 0 é o único ponto crítico de F. Logo, sendo $F^{-1}(1) = S$ devemos ter

$$\nabla F(u) \neq 0, \ \forall \ u \in S.$$

$\blacksquare$

Teorema 3.14 *Sejam* $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\nabla H(u) \neq 0$ *para todo* $u \in S = H^{-1}(c)$ *onde* S *é a fronteira de um conjunto* C *compacto e estritamente convexo com* $0 \in intC$. *Então existe pelo menos uma órbita periódica para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

com $u(t) \in S, \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Considere G a transformada de Legendre de F, onde F é a função definida no Lema 3.11. Do Teorema 3.10, existe uma solução u (2π)-periódica para

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)ds\right)$$

minimiza

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\Big(Jv^{'}(t), v(t)\Big) + G(t, v^{'}(t))\right]dt$$

em X. Pelo Lema 3.11, existem $\beta, \gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}.$$

Considerando $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$, segue do Lema 3.4

$$\left(\frac{2}{3\gamma}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3} \leq G(v) \leq \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3}.$$

Se

$$h(t) = (cost)e + (sent)Je, \quad com\ e \in \mathbb{R}^{2N}$$

usando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 3.12 tem-se

$$\phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3}.$$

Assim,

$$\min_{v \in X} \phi(v) \leq \phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3},$$

e fixando $\|e\| < \dfrac{27\beta^2}{8}$ obtemos

$$\min_{v \in X} \phi(v) < 0 = \phi(0). \tag{3.101}$$

Portanto, usando a hipótese que v minimiza ϕ, segue por (3.101) que $v \neq 0$, o que implica que $u \neq 0$.

Por conservação de energia e pelas propriedades de F, segue

$$F(u(t)) = d > 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Considere

$$w(t) = d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Observe que w é $\left(\dfrac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$-periódica. De fato, temos

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t + 2\pi)$$

sendo u uma função (2π)-periódica, segue

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = w(t).$$

Por outro lado,

$$F(w(t)) = F\left(d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t)\right) = 1$$

Além disso,

$$Jw^{'}(t) = d^{-\frac{2}{3}} Ju^{'}\left(d^{\frac{1}{3}} t\right) . d^{\frac{1}{3}} = d^{-\frac{1}{3}} Ju^{'}\left(d^{\frac{1}{3}} t\right).$$

Sendo,

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

obtemos,

$$Jw^{'}(t) = -d^{-\frac{1}{3}}\nabla F\left(u\left(d^{\frac{1}{3}}t\right)\right)$$

o que implica,

$$Jw^{'}(t) = -\nabla F(w(t))$$

ou ainda,

$$w^{'}(t) = J\nabla F(w(t)).$$

Logo, w é solução $\left(\dfrac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$-periódica de

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

com $F(w(t)) = 1$.

Pelo Lema 3.10, os sistemas Hamiltonianos

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t)) \quad e \quad u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

admitem a mesma órbita para

$$S = F^{-1}(1) = H^{-1}(c).$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Pontos Críticos de Funcionais Invariantes

Nosso objetivo neste capítulo é obter resultados de multiplicidade de pontos críticos de funcionais invariantes por uma ação de S^1.

Quando o problema apresenta simetrias, isto é, quando existe um determinado grupo G agindo de uma forma contínua no espaço X, onde X um espaço de Banach e $G = S^1$ é um grupo topológico compacto, e o funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é invariante sob esta ação, é possível mostrar que o funcional ϕ possui muitos pontos críticos. Para tanto, vamos introduzir conceitos, tais como, S^1-índice e funcionais invariantes. Vamos mostrar também uma versão mais geral do Lema de Deformação, para o qual vamos trabalhar com funcionais invariantes e com vizinhança invariante.

Neste capítulo apresentaremos a teoria de representação de grupos topológicos compactos em espaços de Banach (ou grupo de representação por operadores lineares). O grupo S^1 terá grande importância para o estudo de soluções periódicas dos sistemas Hamiltonianos livres, uma vez que, se $u(t)$ é solução de tal sistema o mesmo acontece com $u(t+\theta)$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e portanto, se $u(t)$ é T-periódica vemos o surgimento da representação $L(\theta)$ do grupo $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \sim S^1$ dado por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

4.1 S^1-índice

Suponha que $\{L(\theta); \theta \in S^1\}$ é uma dada representação isométrica de S^1 em X, isto é, para cada, $\theta \in S^1$, $L(\theta) : X \to X$ é um operador linear e com as seguintes propriedades:

(i) $\|L(\theta)u\| = \|u\|$

(ii) $L(\theta_1 + \theta_2) = L(\theta_1)L(\theta_2), \ \forall \ \theta_1, \theta_2 \in S^1$

(iii) $L(0) := I_d$

(iv) $(\theta, u) \longmapsto L(\theta)u$ é contínua

(v) $L(\theta + 2\pi) = L(\theta)$.

Definição 4.1 *A órbita de um elemento $u \in X$ é o conjunto $\sigma(u) = \{L(\theta)u; \theta \in S^1\}$. Um subconjunto $\Omega \subset X$ é invariante se $L(\theta)\Omega = \Omega$, para todo $\theta \in S^1$. O grupo S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω se $L(\theta)u = u$ para algum $\theta \in S^1$ e para algum $u \in \Omega$, implica $\theta = 0$.*

Definição 4.2 *Uma aplicação T entre dois conjuntos invariantes diz-se equivariante se $T \circ L(\theta) = L(\theta) \circ T$, para todo $\theta \in S^1$.*

Definição 4.3 *Um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ é invariante se $\phi \circ L(\theta) = \phi$, para todo $\theta \in S^1$.*

4.2 O Lema de Deformação

Lema 4.1 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\theta \in S^1$. Se ϕ é invariante, então*
(i) $\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h \rangle$
(ii) $\|\phi'(L(\theta)u)\| = \|\phi'(u)\|$.

Demonstração:

Por definição,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(L(\theta)u + th) - \phi(L(\theta)u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\phi\left[L(\theta)(u + L(-\theta)(th))\right] - \phi(L(\theta)u)}{t}.$$

Sendo ϕ invariante,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(u + L(-\theta)(th)) - \phi(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(u + tL(-\theta)h) - \phi(u)}{t}$$

logo,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h \rangle,$$

o que mostra (i).

Sendo

$$\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle = \langle \phi^{'}(u), L(-\theta)h\rangle,$$

segue que

$$\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle \leq \|\phi^{'}(u)\|\|L(-\theta)h\| = \|\phi^{'}(u)\|\|h\|, \forall h \in X.$$

Considerando $h \in X$ com $\|h\| \leq 1$, tem-se

$$\|\phi^{'}(L(\theta)u)\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \frac{|\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle|}{\|h\|} \leq \|\phi^{'}(u)\|$$

ou seja,

$$\|\phi^{'}(L(\theta)u)\| \leq \|\phi^{'}(u)\|. \tag{4.1}$$

Por outro lado, dado $h_1 \in X$, $\|h_1\| \leq 1$, existe $h \in X$ tal que

$$L(-\theta)h = h_1$$

pois $L(-\theta)$ é sobrejetiva. Assim

$$\langle \phi^{'}(u), h_1\rangle = \langle \phi^{'}(L(\theta)u), L(\theta)h_1\rangle$$

desse modo,

$$\langle \phi^{'}(u), h_1\rangle \leq \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|\|L(\theta)h_1\| = \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|\|h_1\|$$

portanto,

$$\|\phi^{'}(u)\| \leq \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|. \tag{4.2}$$

Usando (4.1) e (4.2), tem-se

$$\|\phi^{'}(u)\| = \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|.$$

■

Lema 4.2 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $Y = \{u \in X; \phi^{'}(u) \neq 0\}$. Se ϕ é invariante, existe um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para ϕ em Y.*

Demonstração:

Primeiramente note que usando o Lema 4.1 é fácil verificar que o conjunto Y é invariante. Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente $w : Y \to X$.

Considere $v : Y \to X$ dada por

$$v(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta)u)d\theta, \quad \forall\ u \in Y.$$

Assim,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(-\theta)w(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u)\|d\theta.$$

Usando o fato de que w é pseudo-gradiente e o Lema 4.1,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\|\phi^{'}(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\|\phi^{'}(u)\|d\theta$$

e portanto

$$\|v(u)\| \leq 2\|\phi^{'}(u)\|.$$

Por outro lado,

$$\langle\phi^{'}(u), v(u)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle\phi^{'}(u), L(-\theta)w(L(\theta)u)\rangle d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle\phi^{'}(L(\theta)u), w(L(\theta)u)\rangle d\theta$$

e consequentemente

$$\langle\phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|^2 d\theta$$

ou seja,

$$\langle\phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\phi^{'}(u)\|^2 d\theta$$

mostrando que

$$\langle\phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \|\phi^{'}(u)\|^2.$$

Observe que,

$$v(L(\tau)u) = \int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta+\tau)u)d\theta$$

o que implica para $\sigma = \theta + \tau$

$$v(L(\tau)u) = \frac{L(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\sigma)w(L(\sigma)u)d\sigma$$

isto é,

$$v(L(\tau)u) = L(\tau)v(u)$$

mostrando que v é equivariante.

Finalmente, considerando $u \in Y$, observando que Y é invariante e

$$A = \{L(\theta(u)), \theta \in S^1\} \subset Y$$

tem-se que A é invariante. De fato, seja $v \in A$, assim $v = L(\theta)u$ e

$$L(\widehat{\theta})L(\theta)u = L(\widehat{\theta} + \theta)u = L(\sigma)u, \quad onde \;\; \sigma \in S^1.$$

Assim,

$$L(\widehat{\theta})A \subset A, \; \forall \, \widehat{\theta} \in S^1. \tag{4.3}$$

Por outro lado,

$$L(\widehat{\theta}) \left(L(-\widehat{\theta})A \right) \subset L(\widehat{\theta})A$$

isto é,

$$L(\widehat{\theta} - \widehat{\theta})A \subset L(\widehat{\theta})A$$

o que implica,

$$A \subset L(\widehat{\theta})A, \; \forall \, \widehat{\theta} \in S^1. \tag{4.4}$$

Por (4.3) e (4.4) segue que A é invariante.

Agora considere a seguinte afirmação que será bastante utilizada nesta seção.

Afirmação 1: O conjunto $A_\delta = \{u \in X; dist(u, A) \leq \delta\}$ é invariante.

Com efeito, se $u \in L(\theta)A_\delta$, por definição

$$dist(u, A) = inf\{\|u - v\|; v \in A\}$$

o que implica para $u = L(\theta)z$

$$dist(u, A) = inf\{\|L(\theta)z - L(\theta)w\|, \; w \in A\}$$

assim,

$$dist(u, A) = inf\{\|z - w\|,\ w \in A\}$$

ou seja,

$$dist(u, A) = dist(z, A) \leq \delta$$

mostrando que

$$L(\theta)A_\delta \subset A_\delta,\ \forall\ \theta \in S^1.$$

Por outro lado,

$$L(\theta)\left(L(-\theta)A_\delta\right) \subset L(\theta)A_\delta$$

isto é,

$$L(\theta - \theta)A_\delta \subset L(\theta)A_\delta$$

o que implica,

$$A_\delta \subset L(\theta)A_\delta,\ \forall\ \theta \in S^1.$$

mostrando a Afirmação 1.

Considere $u_1, u_2 \in B_\delta(u)$, usando o fato que A_δ é invariante, segue

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(-\theta)[w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)]\|d\theta$$

o que implica,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)\|d\theta$$

considerando $\delta > 0$ tal que w é localmente lipschitziana em $B_\delta(L(\theta)u)$, existe uma constante l tal que

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{l}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(\theta)(u_1 - u_2)\|d\theta$$

e assim,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq l\|u_1 - u_2\|$$

mostrando que v é localmente lipschitziana. Portanto, v é um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para ϕ em Y.

■

Observação 4.1 *Note que para mostrarmos que um conjunto* $\Omega \subset X$ *é invariante, basta mostrarmos que* $L(\theta)\Omega \subset \Omega$, $\forall\ \theta \in S^1$. *Além disso, usando a Afirmação* 1 *do Lema* 4.2 *concluímos que se o conjunto* Ω *é invariante então a função distância dada por*

$$dist(u, \Omega) = inf\{\|u - v\|; v \in \Omega\}$$

é invariante.

No que segue, definamos, $ind\Omega = k$ se k é o menor inteiro tal que existem uma aplicação $\phi \in C\left(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\}\right)$ e algum $n \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo a relação

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega. \tag{4.5}$$

Além disso, defina $ind\Omega = \infty$ se uma tal aplicação não existe e defina $ind\emptyset = 0$.

Teorema 4.4 *Para todo conjunto invariante* Ω *que age livremente em* S^1, *existe um inteiro, denotado por* $ind\Omega$, *tal que*

(i) *Se existe uma aplicação contínua equivariante* $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ *então* $ind\Omega_1 \leq ind\Omega_2$

(ii) $ind(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq ind\Omega_1 + ind\Omega_2$

(iii) *Se* Ω *é compacto, existe uma vizinhança fechada invariante* N *de* Ω *com* $indN = ind\Omega$

(iv) *Se* $ind\Omega \geq 2$ *e* $\Omega \cap Fix(S^1) = \emptyset$, *então* Ω *contém infinitas* S^1*-órbitas distintas*

(v) *Sejam* Y *um subespaço invariante de dimensão finita de* X *e* D *uma vizinhança aberta limitada invariante de 0 em* Y. *Se*

$$D \cap Fix(S^1) = \{0\}$$

então

$$ind\partial D = \frac{1}{2}dimY,$$

onde

$$Fix(S^1) = \{u \in X; L(\theta)u = u,\ \forall\ \theta \in S^1\}.$$

Demonstração:

No que segue mostraremos os itens (i), (ii), (iii) e (iv), com relação ao item (v) Ver [7].

Considere

$$\widehat{\Omega} = \{\Omega \subset X;\ \Omega \text{ é }\ fechado,\ L(\theta)\Omega = \Omega,\ \forall\ \theta \in S^1\}.$$

Prova de (i):

Por hipótese existe uma aplicação $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ contínua equivariante. Suponhamos, sem perda de generalidade, $ind\Omega_2 = \mathrm{k} < \infty$. Assim existe uma aplicação contínua $\phi : \Omega_2 \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega_2.$$

Sendo ϕ e T funções contínuas, a função $\psi = \phi \circ T : \Omega_1 \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ é contínua.

Por outro lado,

$$\psi(L(\theta)u) = \phi(T(L(\theta)u))$$

e sendo T equivariante,

$$\psi(L(\theta)u) = (\phi \circ L(\theta))(T(u))$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(T(u))$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\psi(u)$$

mostrando que ψ satisfaz (4.5). Portanto,

$$ind\Omega_1 \leq k$$

de onde segue (i).

Prova de (ii):

Suponhamos que $ind\Omega_1 = k_1 < \infty$ e $ind\Omega_2 = k_2 < \infty$. Portanto, existem aplicações contínuas $\phi_j : \Omega_j \to \mathbb{C}^{k_j} \setminus \{0\}$ e algum $n_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, 2$ satisfazendo

$$\phi_j(L(\theta)u) = e^{in_j\theta}\phi_j(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega_j. \tag{4.6}$$

Sejam $\widehat{\phi_j} : X \to \mathbb{C}^{k_j}$ uma extensão contínua de ϕ_j dada pelo Teorema de Tietze (Ver [Apêndice C]) e $\psi_j : X \to \mathbb{C}^{k_j}$ definida por

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}\widehat{\phi_j}(L(\theta)u)d\theta, \quad j = 1, 2.$$

Para $u \in \Omega_j$ tem-se

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}\phi_j(L(\theta)u)d\theta, \quad j = 1,2$$

o que implica,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}e^{in_j\theta}\phi_j(u)d\theta, \quad j = 1,2$$

ou seja,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_j(u)d\theta, \quad j = 1,2$$

logo,

$$\psi_j(u) = \phi_j(u), \quad j = 1,2$$

mostrando que ψ_j é uma extensão contínua de ϕ_j. Além disso ψ_j satisfaz (4.6).

Definindo $\psi : \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{C}^{k_1+k_2}$ por

$$\psi(u) = (\psi_1(u)^{n_2}, \psi_2(u)^{n_1})$$

onde

$$\psi_1(u)^{n_2} = (\psi_{1,1}(u)^{n_2}, ..., \psi_{1,k_1}(u)^{n_2}) \ \ e \ \psi_2(u)^{n_1} = (\psi_{2,1}(u)^{n_1}, ..., \psi_{2,k_2}(u)^{n_1})\,,$$

observamos que

- $\psi_j(\Omega_j) = \phi_j(\Omega_j) \subset \mathbb{C}^{k_j}\backslash\{0\}, \quad j = 1,2$
- $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \mathbb{C}^{k_1+k_2}\backslash\{0\}$

e

$$\psi(L(\theta)u) = (\psi_1(L(\theta)u)^{n_2}, \psi_2(L(\theta)u)^{n_1})\,.$$

Assim,

$$\psi(L(\theta)u) = \left((e^{in_1\theta}\psi_1(u))^{n_2}, (e^{in_2\theta}\psi_2(u))^{n_1}\right)$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = \left(e^{in_1n_2\theta}\psi_1(u)^{n_2}, e^{in_1n_2\theta}\psi_2(u)^{n_1}\right)$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in_1n_2\theta}\psi(u).$$

Considerando $n = n_1n_2$, segue que ψ satisfaz (4.5). Logo,

$$\psi \in C\left(\Omega_1 \cup \Omega_2, \mathbb{C}^{k_1+k_2} \setminus \{0\}\right)$$

portanto,

$$ind(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq k_1 + k_2$$

mostrando (ii).

Prova de (iii):

Considerando $ind\Omega = k < \infty$ existe uma função

$$\phi \in C\left(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\}\right)$$

satisfazendo (4.5). Seja $\psi : X \to \mathbb{C}^k$ uma extensão contínua de ϕ verificando (4.5).

Visto que,

$$0 \notin \psi(\Omega) = \phi(\Omega)$$

e Ω é compacto, segue que ψ é uniformemente contínua em Ω. Considerando $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega)) > 0$ devemos ter

$$\|\psi(u)\| \geq \epsilon, \quad \forall\ u \in \Omega. \tag{4.7}$$

Desde que,

$$\Omega_\delta = \{u \in X; dist(u, \Omega) \leq \delta\}$$

para $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega))$ existe $\delta > 0$ tal que

$$u, v \in \Omega_\delta, \|u - v\| < \delta \Rightarrow \|\psi(u) - \psi(v)\| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{4.8}$$

Se $u \in \Omega_\delta$ existe $v \in \Omega$ tal que $\|u - v\| < \delta$ consequentemente por (4.7) e (4.8),

$$\|\psi(u)\| \geq \frac{3\epsilon}{4}$$

ou seja,

$$\psi(u) \neq 0, \quad \forall\, u \in \Omega_\delta.$$

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \notin \psi(\Omega_\delta).$$

Desse modo, $\Omega_\delta = N$ é uma vizinhança fechada de Ω. Pela Afirmação 1 do Lema 4.2 N é invariante. Portanto,

$$indN \leq k.$$

Por outro lado, sendo a inclusão uma aplicação equivariante, por (i) do Teorema 4.4, tem-se

$$indN \geq k.$$

Logo,

$$indN = ind\Omega = k$$

mostrando (iii).

Prova de (iv):

Primeiramente, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Se $u \notin Fix(S^1)$ então ind $(\sigma(u)) = 1$.

Com efeito, visto que $u \notin Fix(S^1)$ a aplicação contínua $\theta \to L(\theta)u$ tem período minimal $\dfrac{2\pi}{n}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Definamos a função $\phi : \sigma(u) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ por

$$\phi(v) = e^{in\theta},\ \forall\, v \in \sigma(u).$$

Assim, existe $\theta \in S^1$ tal que

$$v = L(\theta)u$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}.$$

Observe que,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in(\widehat{\theta}+\theta)}$$

ou seja,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in\widehat{\theta}}.e^{in\theta} = e^{in\widehat{\theta}}\phi(L(\theta)u)$$

mostrando que ϕ satisfaz (4.5). Portanto, sendo ϕ contínua, temos

$$ind(\sigma(u)) = 1$$

mostrando a Afirmação 1.

Se

$$\Omega = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2) \cup ... \cup \sigma(u_k)$$

é uma união disjunta com

$$u_j \notin Fix(S^1), \quad \forall\ j = 1, 2, ..., k.$$

Considerando a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por

$$\phi(u) = e^{in_j\theta},$$

se $u \in \sigma(u_j)$ e $\theta \to L(\theta)u_j$ tem período minimal $\dfrac{2\pi}{n_j}$. Desse modo, usando a Afirmação 1, tem-se

$$ind\Omega = 1.$$

Portanto, se $ind\Omega \geq 2$, Ω contém uma infinidade de S^1-órbitas. Mostrando (iv).

■

Observação 4.2 *Note que $u \in Fix(S^1)$ se, e somente se, a S^1-órbita de u, $\sigma(u)$, se reduz ao conjunto $\{u\}$. Neste caso, $ind\{u\} = \infty$, pois* (4.5) *não pode ser satisfeita com $\phi(u) \neq 0$.*

Lema 4.3 *Seja ϕ um funcional invariante satisfazendo a condição (PS). Sejam $c \in \mathbb{R}$ e N uma vizinhança aberta invariante de K_c. Então existem $\epsilon > 0$ e $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ tais que*

(i) $\eta(0, u) = u, \quad \forall\ u \in X$

(ii) $\eta\left(1, \phi^{c+\epsilon} \backslash N\right) \subset \phi^{c-\epsilon}$

(iii) $\eta(t, L(\theta)u) = L(\theta)\eta(t, u), \quad \forall\ t \in [0,1], \quad \forall\ u \in X, \quad \forall\ \theta \in S^1.$

Demonstração:

Considerando $S = N^c$, existem $\epsilon, \delta > 0$ tais que

$$u \in \phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) \cap S_{2\delta} \Rightarrow \|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

pois, caso contrário, tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ e $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ existe $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$u_n \in S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}, \quad u_n \in \phi^{-1}\left([c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n}]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim, $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$. Desde que ϕ satisfaz (PS), (u_n) possui uma subsequência, que denotaremos por (u_n), tal que $u_n \to u$ em X para algum $u \in X$. Logo,

$$\phi(u) = \phi(lim\ u_n) = lim\ \phi(u_n) = c$$

e

$$\phi^{'}(u) = \phi^{'}(lim\ u_n) = lim\ \phi^{'}(u_n) = 0$$

ou seja,

$$u \in K_c \cap S$$

o que é um absurdo, pois $S = X \setminus N$ e $K_c \subset N$. Pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ satisfazendo (i) e (ii).

Finalmente, sendo ϕ invariante, em vista do Lema 4.2, podemos supor que o campo pseudo-gradiente V escolhido para ϕ é equivariante.

Definamos a função $\psi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{dist(u, A^c)}{dist(u, A^c) + dist(u, B)}$$

onde,

$$A = \phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) \cap \left(N^c\right)_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) \cap \left(N^c\right)_{\delta}.$$

Afirmação 1: ψ é invariante.

Com efeito, note que

$$A^c = \left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c \cup N_{2\delta}$$

logo, se $u \in A^c$ temos

$$u \in \left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c \;\; ou \; u \in N_{2\delta}.$$

Se $u \in \left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c$ então

$$\phi(u) > c + 2\epsilon \quad ou \quad \phi(u) < c - 2\epsilon$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = \phi(u) > c + 2\epsilon \quad ou \quad \phi(L(\theta)u) = \phi(u) < c - 2\epsilon$$

mostrando que $\left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c$ e $N_{2\delta}$ são invariantes, ou seja A^c é invariante.

Usando um argumento análogo, segue que B é invariante.

Por outro lado, pela Observação 4.1 $dist(u, A^c)$ é invariante e $dist(u, B)$ é invariante. Desse modo, ψ é invariante. Mostrando a Afirmação 1.

Definamos a função $f : X \to X$ por

$$f(u) = -\psi(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|}.$$

Observe que

$$f(L(\theta)u) = -\psi(L(\theta)u)\frac{V(L(\theta)u)}{\|V(L(\theta)u)\|}.$$

Usando a Afirmação 1 e o fato de V ser equivariante tem-se

$$f(L(\theta)u) = -\psi(u)\frac{L(\theta)V(u)}{\|V(u)\|}$$

e consequentemente,

$$f(L(\theta)u) = L(\theta)f(u)$$

mostrando que f é equivariante.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, para todo $u \in X$ o problema de Cauchy

$$(PC)_1 \qquad \begin{cases} w' = f(w) \\ w(0) = u \end{cases}$$

possui uma única solução contínua $w(., u)$.

Afirmação 2: Se $w(t,u)$ é solução de $(PC)_1$, então

$$w_\theta(t) = L(\theta)w(t,u)$$

é solução do problema

$$(PC)_2 \qquad \begin{cases} w'_\theta = f(w_\theta) \\ w_\theta(0) = L(\theta)u. \end{cases}$$

Com efeito, desde que $L(\theta)$ é linear e contínua, temos

$$w'_\theta(t) = L(\theta)w'(t,u) = L(\theta)f(w)$$

usando o fato que f é equivariante tem-se

$$w'_\theta(t) = f(L(\theta)w) = f(w_\theta).$$

Note que

$$w_\theta(0) = L(\theta)u$$

portanto,

$$w_\theta(t) = w(t, L(\theta)u)$$

o que mostra a Afirmação 2, e portanto

$$L(\theta)w(t,u) = w(t, L(\theta)u)$$

mostrando que w é equivariante. Por definição $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$, donde segue (iii).

■

No Lema que segue, denotaremos por X o seguinte espaço de Banach

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N} absolutamente\ contínua, (2\pi) - periódica, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} v(t)dt = 0 \ e \int_0^{2\pi} \|v'(t)\|^3 dt < \infty \end{array} \right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|v^{'}(t)\|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}},$$

onde a ação de S^1 é dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta)$$

sobre X.

Lema 4.4 *Sejam Y o subespaço de X dado por*

$$Y = \{(cost)e + (sent)Je,\ \ e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e $D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\}$. Então $ind\partial D = N$.

Demonstração:

Primeiramente, note que Y é invariante.

De fato, se $u \in Y$ temos

$$u(t) = (cost)e + (sent)Je$$

para algum $e \in \mathbb{R}^{2N}$. Assim,

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta) = (cos(t+\theta))e + (sen(t+\theta))Je$$

desse modo,

$$(L(\theta)u)(t) = (cost\ cos\theta - sen\theta\ sent)e + (sent\ cos\theta + sen\theta\ cost)Je$$

donde segue,

$$(L(\theta)u)(t) = cost(cos\theta\ e + sen\theta\ Je) + sent(cos\theta\ Je - sen\theta\ e).$$

Considerando $\widehat{e} = cos\theta\ e + sen\theta\ Je$ tem-se

$$(L(\theta)u)(t) = cost\widehat{e} + sentJ\widehat{e}$$

logo, $L(\theta)u \in Y$ e portanto $L(\theta)Y \subset Y$. Mostrando que Y é invariante.

Sendo

$$D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\},$$

observe que

$$Fix(S^1) \cap D = \{0\}.$$

De fato, se $u \in Fix(S^1) \cap D$ então

(1) $u \in Fix(S^1)$ e

(2) $u \in Y$ com $\|u\| < \delta$.

Logo, por (1)

$$(L(\theta)u)(t) = u(t),$$

ou seja,

$$u(t+\theta) = u(t), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Mostrando que $\theta \in [0, 2\pi)$ é período para u. Usando (2) segue que o período minimal de u é 2π, logo devemos ter $u \equiv 0$.

Portanto,

$$Fix(S^1) \cap D = \{0\}.$$

Pelo item (v) do Teorema 4.4 tem-se

$$ind \partial D = N.$$

■

4.3 Teorema da Multiplicidade

Teorema 4.5 *Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante limitado inferiormente e satisfazendo a condição (PS). Se S^1 age livremente em um subconjunto invariante*

$$\Omega = \{u \in X; \phi(u) < m\}$$

com $m \in \mathbb{R}$ e Ω contém uma esfera Σ, $(2n-1)$ dimensional invariante, em que a ação de S^1 é dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

Então Ω contém pelo menos n S^1-órbitas distintas de pontos críticos de ϕ.

Demonstração:

Definamos, para $k = 1, 2, ..., n$

$$\Gamma_k = \{\gamma \subset \Omega : \gamma \ \text{ é } \ compacto, \ \ invariante \ \ e \ \ ind\gamma \geq k\}.$$

Por hipótese S^1 age livremente em γ. Além disso, $\Sigma \subset \Omega$ e $ind\Sigma = n$. Assim,

$$\Sigma \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Considere, para $k = 1, 2, ..., n$

$$c_k = \inf_{\gamma \in \Gamma_k} \max_{u \in \gamma} \phi(u).$$

Observe que,

$$\Gamma_k \subset \Gamma_{k-1}$$

onde $k \geq 2$. Logo,

$$-\infty < inf\phi \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_k \leq \max_{u \in \Sigma} \phi(u) < m.$$

Afirmação 1: Cada c_k é um valor crítico de ϕ.

De fato, caso contrário, sabendo que existe $\gamma \in \Gamma_k$ tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c_k + \epsilon$$

podemos aplicar o Lema 4.3 com $c = c_k$ e $K_{c_k} = N = \emptyset$. Assim, pelo item (ii) do Lema 4.3 segue que

$$\widehat{\gamma} = \eta(1, \gamma) \subset \phi^{c_k - \epsilon}.$$

Sendo γ compacto, segue que $\widehat{\gamma}$ é compacto e pelo item (iii) do Lema 4.3, obtemos que $\widehat{\gamma}$ é invariante. Observe que,

$$\max_{u \in \widehat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon < c_k < m$$

ou seja,

$$\widehat{\gamma} \subset \Omega.$$

Note que,

$$\begin{aligned} T:\gamma &\rightarrow \widehat{\gamma} \\ u &\rightarrowtail T(u)=\eta(1,u) \end{aligned}$$

é equivariante. Logo, pelo item (i) do Teorema 4.4

$$ind\widehat{\gamma} \geq ind\gamma \geq k$$

ou seja, $\widehat{\gamma} \in \Gamma_k$, assim,

$$c_k \leq \max_{u\in\widehat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon$$

o que é um absurdo. Mostrando Afirmação 1.

Afirmação 2: Se todos os $c_{k's}$ são distintos, então cada $\phi^{-1}(c_k)$ possui pelo menos uma S^1-órbita de pontos críticos de ϕ.

De fato, considere $u_k \in X$ tal que $\phi(u_k) = c_k$ e $\phi^{'}(u_k) = 0$. Desse modo, sendo $v \in \sigma(u_k)$ tem-se

$$v = L(\theta)u_k$$

assim,

$$\phi(v) = \phi(L(\theta)u_k) = \phi(u_k) = c_k$$

o que implica,

$$\sigma(u_k) \subset \phi^{-1}(\{c_k\}).$$

Por outro lado, usando o Lema 4.1 tem-se

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \langle \phi^{'}(L(\theta)u_k), h\rangle = \langle \phi^{'}(u_k), L(-\theta)h\rangle = 0, \quad \forall\ h \in X$$

logo,

$$\sigma(u_k) \subset K_{c_k}$$

mostrando a Afirmação 2.

Por outro lado, vamos mostrar que se $c_j = c_k$ com $j < k$, temos

$$indK_c > k - j$$

ou seja,

$$indK_c \geq 2$$

onde $c = c_j = c_k$. Assim, pelo item (iv) do Teorema 4.4, K_c possui uma infinidade de S^1-órbitas. Donde concluímos, usando o fato que $K_c \subset \Omega$ é um conjunto fechado invariante, que Ω contém uma infinidade de S^1-órbitas distintas de pontos críticos de ϕ.

Sendo,

$$K_c = \{u \in X; \phi(u) = c \;\; e \;\; \phi^{'}(u) = 0\}$$

e usando o fato que ϕ satisfaz a condição (PS), segue que K_c é compacto.

Pelo item (iii) do Teorema 4.4, existe uma vizinhança fechada invariante N de K_c com $indN = indK_c$. Então o interior de N, denotado por $intN$, é uma vizinhança aberta invariante de K_c, de sorte que podemos aplicar o Lema 4.3 e concluir a existência de $\epsilon > 0$ e $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ satisfazendo as propriedades (i) - (iii).

Agora, pela definição de $c = c_k$, tomemos $\gamma \in \Gamma_k$ tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Definamos

$$\beta = \gamma \backslash int\ N.$$

Usando a definição de S^1-órbita,

$$k \leq ind\gamma \leq ind(\beta \cup N) \leq ind\beta + indN = ind\beta + indK_c.$$

Visto que,

$$\beta \subset \phi^{c+\epsilon} \backslash int\ N$$

usando o Lema 4.3,

$$\widehat{\beta} = \eta(1, \beta) \subset \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, sendo β compacto segue que $\widehat{\beta}$ é compacto. Note que,

$$L(\theta)\widehat{\beta} = L(\theta)\eta(1, \beta)$$

usando o Lema 4.3 e o fato que β é invariante, segue

$$L(\theta)\widehat{\beta} = \eta(1, L(\theta)\beta) = \eta(1, \beta) = \widehat{\beta}$$

ou seja, $\widehat{\beta}$ é invariante.

Observe que,

$$\max_{u \in \widehat{\beta}} \phi(u) \leq c - \epsilon$$

pela definição de $c_j = c$, temos

$$ind\widehat{\beta} < j.$$

Pelo item (i) do Teorema 4.4

$$ind\beta \leq ind\widehat{\beta} < j$$

logo,

$$k < j + indK_c$$

ou seja,

$$indK_c > k - j$$

e consequentemente

$$indK_c \geq 2.$$

■

4.4 Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa

Para $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ é possivel mostrar usando o Teorema 3.14 a existência de pelo menos uma órbita periódica para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)) \tag{4.9}$$

em $S = H^{-1}(c)$, desde que

($\mathbf{H_8}$) Para todo $u \in S$, $\nabla H(u) \neq 0$ e S é a fronteira de um conjunto compacto estritamente convexo C com $0 \in intC$.

Assumiremos a seguinte hipótese que será de grande importância no decorrer desta seção.

($\mathbf{H_9}$) Existe $0 < r \leq R$ tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2},$$

e

$$B[0,r] \subset C \subset B[0,R].$$

Teorema 4.6 *Assumindo as hipóteses* (H_8) *e* (H_9) *existe pelo menos* N *órbitas periódicas para* (4.9) *em* S.

Antes de demonstrar o Teorema 4.6 iremos mostrar algumas propriedades da função F definida no Lema 3.11 e alguns resultados que serão utilizados nesta demonstração. Desde que F satisfaz os itens (i)-(vi) do Lema 3.11, assumindo (H_9) acima temos

$$\left(\frac{|u|}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left(\frac{|u|}{r}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

De fato, observe que

$$r\frac{u}{|u|} \in B[0,r] \subset C$$

assim,

$$r\frac{u}{|u|} \in C$$

o que implica,

$$\frac{|u|}{r} \geq inf\{\lambda > 0; u \in \lambda C\}$$

isto é,

$$j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}. \tag{4.10}$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$j_c(u) \leq \lambda < j_c(u) + \epsilon \quad e \quad \frac{u}{\lambda} \in C.$$

Logo,

$$\frac{u}{\lambda} \in B[0, R]$$

assim,

$$\left|\frac{u}{\lambda}\right| \leq R$$

o que implica,

$$|u| \leq Rj_c(u) + R\epsilon, \quad \forall\ \epsilon > 0$$

portanto,

$$|u| \leq Rj_c(u)$$

ou seja,

$$j_c(u) \geq \frac{|u|}{R}. \tag{4.11}$$

Segue de (4.10) e (4.11) que

$$\frac{|u|}{R} \leq j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}$$

e consequentemente,

$$\left(\frac{|u|}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left(\frac{|u|}{r}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.12}$$

Desde que

$$H^{-1}(c) = S = F^{-1}(1)$$

é suficiente, pelo Lema 3.10, encontrar N órbitas periódicas distintas para

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t)) \tag{4.13}$$

em S.

Sejam $u_1, ..., u_N$ N soluções descrevendo órbitas distintas de (4.13) com período minimal 2π. Se

$$F(u_k(t)) = d_k > 0$$

então w_k definido por

$$w_k(t) = d_k^{-\frac{2}{3}} u_k\left(d_k^{\frac{1}{3}} t\right)$$

é solução de (4.13) com período minimal $\dfrac{2\pi}{d_k^{\frac{1}{3}}}$ e energia

$$F(w_k(t)) = 1.$$

Se w_j e w_k descrevem a mesma órbita em $S = F^{-1}(1)$, existe uma função $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$w_k = w_j \circ \psi$$

assim,

$$J\nabla F(w_k) = w_k^{'} = \psi^{'}(w_j^{'} \circ \psi) = \psi^{'} J\nabla F(w_j \circ \psi)$$

o que implica,

$$J\nabla F(w_k) = \psi^{'} J\nabla F(w_k)$$

logo, $\psi^{'} \equiv 1$ e sendo $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ segue

$$w_k(t) = w_j(t + \alpha).$$

Desse modo, w_j e w_k têm o mesmo período minimal, isto é, $d_k = d_j$. Consequentemente,

$$u_k(t) = u_j(t + \widehat{\alpha}),$$

ou seja, u_j e u_k descrevem a mesma órbita e usando o fato que as órbitas são distintas temos $j = k$. Assim, é suficiente encontrarmos N soluções descrevendo órbitas de (4.13) com período minimal 2π.

Seja G a transformada de Legendre da função F, usando (4.12), obtemos

$$\eta r^3 |v|^3 \leq G(v) \leq \eta R^3 |v|^3 \tag{4.14}$$

onde $\eta = \dfrac{4}{27}$.

No que segue, considere X o espaço de Banach utilizado no Lema 4.4, $\phi : X \to \mathbb{R}$ o funcional energia dado por

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(Jv^{'}, v) + G(v^{'})\right] dt$$

e os seguintes subespaços

$$Y = \{(cos\ t)e + (sen\ t)Je : \quad e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e

$$Z = \left\{ v \in X; v \quad é \quad \frac{2\pi}{k} - periódica \quad para \quad algum \quad k \geq 2 \right\}.$$

Lema 4.5 *Se* $v \in Y$ *e* $\|v\|_X = \rho = (3\eta R^3)^{-1}$*, então*

$$\phi(v) \leq M = -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

Demonstração:

Se $v \in Y$,

$$v = (cos\ t)e + (sen\ t)Je, \quad e \in \mathbb{R}^{2N}$$

sendo,

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(Jv^{'}, v) + G(v^{'})\right] dt,$$

tem-se

$$\phi(v) \leq -\pi\|v\|^2 + 2\pi\eta R^3\|v\|^3$$

isto é,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\left(3\|v\|^2 - 6\eta R^3\|v\|^3\right)$$

o que implica,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\left(3\rho^2 - 6\eta R^3\rho^3\right)$$

assim,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2\left(3 - 6\eta R^3\rho\right)$$

logo,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

■

Lema 4.6 *Se $v \in Z$ então*

$$\phi(v) \geq m = -\frac{\pi}{6}\left(6\eta r^3\right)^{-2}.$$

Demonstração:

Se $\|v\|_X = 1$ e v é $\dfrac{2\pi}{k}$ - periódica para algum $k \geq 2$, então por definição

$$\int_0^{2\pi} \|v^{'}(t)\|^3 dt = 2\pi$$

usando a Proposição 3.9, temos

$$\int_0^{2\pi} \left(Jv^{'}, v\right) dt = k\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \left(Jv^{'}, v\right) dt \geq -\frac{2\pi}{k} \geq -\pi.$$

Assim, se $v \in Z$, considerando $w = \dfrac{v}{\|v\|_X}$ usando (4.14),

$$\phi(v) \geq 2\pi\eta r^3\|v\|_X^3 - \frac{\pi}{2}\|v\|_X^2. \tag{4.15}$$

Afirmação 1: O segundo membro da desigualdade (4.15) é minimo quando $\|v\| = (6\eta r^3)^{-1}$.

Com efeito, considerando

$$f(t) = 2\pi\eta r^3 t^3 - \frac{\pi}{2}t^2$$

tem-se

$$f^{'}(t) = 6\pi\eta r^3 t^2 - \pi t$$

fazendo $f^{'}(t) = 0$ ficamos com

$$t = 0 \quad ou \quad t = \left(6\eta r^3\right)^{-1}.$$

Por outro lado,

$$f^{''}(t) = 12\pi\eta r^3 t - \pi$$

donde segue,

$$f''(0) = -\pi < 0$$

e

$$f''\left(\left(6\eta r^3\right)^{-1}\right) = \pi > 0$$

logo, f atinge seu mínimo quando $\|v\|_X = (6\eta r^3)^{-1}$.

Portanto,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\left(-12\eta r^3\|v\|^3 + 3\|v\|^2\right)$$

o que implica,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\|v\|^2$$

logo,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\left(6\eta r^3\right)^{-2}.$$

■

Agora vamos demonstrar o Teorema 4.6.

Demonstração:

Considere sobre X a ação de S^1 dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

Afirmação 1: S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω se e somente se $\Omega \cap Z = \emptyset$.

De fato, primeiramente vamos mostrar que se S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω então $\Omega \cap Z = \emptyset$. Suponhamos, por contradição, que existe

$$u \in \Omega \cap Z$$

desse modo, $u \in X$ e u é $\dfrac{2\pi}{k}$-periódica para algum $k \geq 2$. Por hipótese,

$$L(\theta)u(t) = u(t+\theta).$$

Considerando $\theta = \dfrac{2\pi}{k}$ para algum $k \geq 2$, ficamos com a igualdade

$$L(\theta)u(t) = u(t).$$

Portanto, existe $u \in X$ e $\theta \neq 0 \in S^1$ tal que

$$L(\theta)u = u$$

o que é um absurdo.

Reciprocamente, vamos mostrar que se $\Omega \cap Z = \emptyset$ então S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω. Suponhamos, por contradição, que S^1 não age livremente em um subconjunto invariante Ω, então

$$(L(\theta)u)(t) = u(t)$$

para todo $\theta \in S^1$, para todo $u \in \Omega$ mas $\theta \neq 0$. Assim,

$$u(t + \theta) = u(t)$$

com $\theta \neq 0$. Logo $\theta = \dfrac{2\pi}{k}$ para algum $k \geq 2$. Assim, $u \in Z$. Portanto

$$u \in \Omega \cap Z$$

o que é um absurdo. Mostrando a Afirmação 1.

Observe que o funcional ϕ é invariante, limitado inferiormente pelo Lema 3.8 e satisfaz a condição (PS) pelo Lema 3.9. Pelo Lema 4.6 tem-se

$$\Omega \cap Z = \emptyset$$

onde

$$\Omega = \{v \in X; \phi(v) < m\}.$$

Note que Ω é invariante, poís ϕ é invariante. Da Afirmação 1, acima, segue que S^1 age livremente em Ω.

Considere

$$\Sigma = \{v \in Y; \|v\| = \rho\}.$$

Observe que, se $M < m$ e assumindo que existe $0 < r \leq R$ tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2}$$

e

$$B[0,r] \subset C \subset B[0,R]$$

temos

$$\Sigma \subset \Omega.$$

De fato, note que

$$M < m \Leftrightarrow -\frac{\pi}{27\eta^2 R^6} < -\frac{\pi}{216\eta^2 r^6}$$

o que implica,

$$M < m \Leftrightarrow R^6 < 8r^6$$

logo,

$$M < m \Leftrightarrow \frac{R}{r} < \sqrt{2}.$$

Mostrando que

$$\Sigma \subset \Omega.$$

Pelo Teorema 4.5, Ω contém pelo menos N S^1-órbitas distintas

$$\{L(\theta)v_k; \theta \in S^1\}, \quad k = 1, ..., n$$

de pontos críticos de ϕ. Pelo Lema 3.7 para cada v_k existe uma solução u_k 2π-periódica para

$$u_k^{'}(t) = J\nabla F(u_k(t))$$

tal que

$$v_k(t) = -J\left(u_k(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_k(s)ds\right). \tag{4.16}$$

Além disso, 2π é período minimal de v_k, e assim, u_k tem período minimal 2π.

Se u_j e u_k descrevem a mesma órbita, então, como já visto,

$$u_k(t) = (u_j \circ \psi)(t)$$

onde ψ é uma translação. Assim,

$$u_k(t) = u_j(t + \theta)$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$. Ou seja,

$$u_k(t) = L(\theta)u_j$$

para algum $\theta \in S^1$. Usando (4.16) tem-se

$$v_k(t) = L(\theta)v_j.$$

Logo, v_j e v_k tem a mesma S^1-órbita e $k = j$.

$\blacksquare$

Apêndice A

Séries de Fourier

Neste Apêndice faremos um breve estudo sobre as séries de Fourier. Mais detalhes podem ser encontrados em [6].

Seja $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, a sua série de Fourier é a série dada por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right). \tag{A.1}$$

Podemos reescrever a série de Fourier de uma função u definida em [0, T] usando exponênciais complexas. Lembre-se que se $t \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{\frac{i2k\pi}{T}t} = cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$$

o que implica,

$$e^{\frac{-i2k\pi}{T}t} = cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) - isen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$$

assim,

$$cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}$$

e

$$sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}.$$

Logo,

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = a_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}\right)$$

donde segue,

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

usando o fato que $i^2 = -1$, obtemos

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}.$$

Reescrevendo (A.1) temos

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

portanto,

$$S[u] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

é a série de Fourier complexa de u, onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) \quad e \quad c_{-k} = \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recorde-se que a_0, b_k e a_k são obtidos da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)dt$$

e

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)dt.$$

Além disso, os coeficientes de Fourier complexos de u e $u^{'}$ satisfazem

$$c_k^{'} = \frac{i2\pi k}{T}c_k, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Quanto aos coeficientes reais, se as séries de Fourier de u e $u^{'}$ são dadas, respectivamente, por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right)$$

e

$$S[u^{'}] = \frac{a_0^{'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{'} cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k^{'} sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right)$$

então

$$a_0^{'} = 0, \quad a_k^{'} = \frac{2k\pi}{T} b_k \quad e \quad b_k^{'} = -\frac{2k\pi}{T} a_k$$

e portanto,

$$S[u^{'}] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{i2\pi k}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}.$$

é a série de Fourier complexa de $u^{'}$.

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Neste Apêndice nossa intenção é mostrar que os funcionais usados no decorrer desta dissertação são de classe C^1.

Definição B.1 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, definido em um espaço normado. Diremos que J é Fréchet diferenciável em $u \in X$, se existe $L : X \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - L(h)|}{\|h\|} \to 0 \quad \textit{quando} \quad \|h\| \to 0.$$

Primeiramente vamos mostrar que o funcional $\phi : H \to \mathbb{R}$ definido no Capítulo 2 por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt$$

é de classe $C^1(H, \mathbb{R})$, onde

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \text{ é absolutamente contínua, T-periódica e } \int_0^T |u'(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Para tanto, basta mostrarmos que o funcional $\psi : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \int_0^T G(u) dt$$

é de classe $C^1(H, \mathbb{R})$.

Afirmação 1: ψ é Fréchet diferenciável e $\psi^{'}(u)v = \displaystyle\int_0^T G^{'}(u)vdt$.

Com efeito, para $u, v \in H$ considere

$$r(v) = \psi(u+v) - \psi(u) - \int_0^T G^{'}(u)vdt \tag{B.1}$$

onde esta última parcela é obtida usando o mesmo raciocínio da seção (3.5). Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Usando (B.1) tem-se

$$r(v) = \int_0^T [G(u+v) - G(u)]dt - \int_0^T G^{'}(u)vdt$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$G(u+v) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv)dx$$

o que implica,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv)dx = \int_0^1 G^{'}(u+xv)vdx.$$

Assim,

$$r(v) = \int_0^T \left[\int_0^1 G^{'}(u+xv)vdx\right] dt - \int_0^T G^{'}(u)vdt$$

donde segue,

$$r(v) = \int_0^T \left[\int_0^1 \Big(G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\Big) vdx\right] dt$$

logo,

$$|r(v)| \leq \int_0^T \left[\int_0^1 \left|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\right| |v|dx\right] dt. \tag{B.2}$$

Observe que, usando o mesmo raciocinio que na Afirmação 1 do Lema (2.2), tem-se

$$G^{'}(u+xv) - G^{'}(u) \in L^2([0,T]).$$

Aplicando o Teorema de Fubini em (B.2), obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_0^T \left|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\right| |v|dt\right] dx$$

usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}\|v\|_{L^2([0,T])}dx$$

Por Imersões contínuas de Sobolev segue

$$|r(v)| \leq C\int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}\|v\|_{H}dx$$

logo,

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|} \leq C\int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}dx.$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\theta_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\theta_n(x) = \|G^{'}(u+xv_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}.$$

Desse modo,

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C\int_0^1 \theta_n(x)dx.$$

Para cada x fixado, temos usando o mesmo raciocínio que na Afirmação 1 do Lema (2.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |G^{'}(u+xv_n) - G^{'}(u)|^2dt = 0$$

assim, para cada x fixado $\theta_n(x) \to 0, \ \ \forall\ x \in [0,1]$. Por outro lado,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq \|G^{'}(u+xv_n)\|_{L^2([0,T])} + \|G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq 2MT^{\frac{1}{2}} = \beta \in L^1([0,T])$$

onde $G^{'}$ é tal que

$$|G^{'}(x)| \leq M, \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \theta_n(x)dx = 0$$

ou seja,

$$\theta_n \to 0 \;\; em \;\; L^1([0,T])$$

mostrando a Afirmação 1.

Agora vamos mostrar que $\psi^{'}$ é contínua, para tanto, basta mostrarmos que, se $u_n \to u$ em H então

$$\|\psi^{'}(u_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Primeiramente, considere $\{v_n\} \subset H$ com $v_n \to 0$. Das imersões contínuas de Sobolev

$$v_n \to 0 \;\; em \;\; L^2([0,T])$$

logo, a menos de subsequência

$$v_n(x) \to u(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Usando a continuidade de $G^{'}$

$$G^{'}(u+v_n)(x) \to G^{'}(u(x)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T]$$

o que implica,

$$|G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 \to 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Por outro lado,

$$|G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 \leq (2M)^2 \in L^1([0,T]).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 dx = 0$$

ou seja,

$$G^{'}(u+v_n) \to G^{'}(u) \;\; em \;\; L^2([0,T])$$

mostrando que,

$$G^{'}(u+v) \to G^{'}(u) \quad em \quad L^2([0,T]); \quad quando \quad v \to 0; \quad v \in H.$$

Por definição,

$$\|\psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} = \sup_{\|v\|\leq 1} \left|\langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v\rangle\right|$$

usando o que mostramos na Afirmação 1, segue

$$\left|\langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v\rangle\right| \leq \int_0^T |G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)||v|dt$$

usando a desigualdade de Hölder, as imersões contínuas de Sobolev e o fato que $\|v\|_H \leq 1$ tem-se

$$\left|\langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v\rangle\right| \leq C\|G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$\|\psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} \leq C\|G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty$$

ou seja,

$$\psi^{'}(u+v_n) \to \psi^{'}(u)$$

mostrando que $\psi^{'}$ é contínuo.

■

Nosso objetivo agora é mostrar que o funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ definido no Capítulo 3 por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt$$

é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Para tanto, vamos mostrar que o funcional $K : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'})dt$$

é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Por definição, $G = H^*$ está bem definida e satisfaz

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha \leq G(t,v) \leq \left(\frac{1}{\beta q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} + \alpha.$$

Em particular, a segunda desigualdade acima mostra que a ação dual

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\Big(Jv^{'}, v\Big) + G(t, v^{'})\right] dt$$

está bem definida.

Pelo Teorema 3.6 temos $G \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e pelo Lema 3.5 tem-se

$$\|\nabla G(t, v^{'})\| \leq C_2 \|v^{'}\|^{q-1} + C_3.$$

Para mostrar que o funcional

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'}) dt$$

é diferenciável a Fréchet, basta utilizarmos um raciocínio análogo ao usado na Afirmação 1 deste Apêndice. Portanto para mostrar que o funcional K é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ vamos mostrar que $K^{'}$ é contínua.

Afirmação: $K^{'}$ é contínua, ou seja, se $u_n \to u$ em X, devemos ter

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Com efeito, por definição

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\| \leq 1} \Big|\langle K^{'}(u_n) - K^{'}(u), h\rangle\Big|$$

e consequentemente,

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \leq \int_0^T \Big(\nabla G(t, u_n^{'}) - \nabla G(t, u^{'}), h^{'}\Big) dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \leq \|\nabla G(t, u_n^{'}) - \nabla G(t, u^{'})\|_{L^q([0,T])} \|h^{'}\|_{L^p([0,T])}$$

Supondo $u_n \to u$ em X, concluímos que

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

$\blacksquare$

Apêndice C

Resultados Gerais

Neste Apêndice enunciaremos uma definição e os principais teoremas utilizados nesta dissertação.

Definição C.1 (Ver[10]) Uma família $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se localmente finita quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intercecta apenas um número finito de conjuntos C_λ.

Teorema C.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver[2]) Seja f_n uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Teorema C.3 (Desigualdade de Hölder) (Ver[2]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema C.4 (Ver[3]) Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente em um espaço normado, isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então,

(**i**) O limite fraco x de (x_n) é único (**ii**) Toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x

(**iii**) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema C.5 (Teorema de Riez) (Ver[3]) Todo funcional linear contínuo f sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,

$$f(x) = (z, x)$$

onde z é unicamente determinado e verifica

$$\|f\| = \|z\|.$$

Teorema C.6 (Ver[3]) Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad em \quad H.$$

Teorema C.7 (Du Bois Raymond) (Ver[3]) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0(\Omega).$$

Então,

$$u = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \Omega.$$

Teorema C.8 (Ver[3]) Se $u \in W^{1,p}(I)$, então

$$u(x) - u(y) = \int_y^x |u^{'}(t)|dt.$$

onde $I = (a, b)$ é um intervalo limitado ou não.

Teorema C.9 (Ver[2]) Se $f \in L^1(X, \chi, \mu)$ dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B f d\mu < \epsilon.$$

Teorema C.10 (Teorema de Tietze) (Ver[10]) Dada uma função real contínua $f : X \to \mathbb{R}$, definida em um subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}^m$, existe uma função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua tal que $F|_X = f$.

Teorema C.11 (Teorema do Valor Intermediário) (Ver[9]) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Teorema C.12 (Teorema de Fubini) (Ver[3]) Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \;\; e \;\; \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Lema C.13 Considere X o seguinte espaço vetorial

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N}; absolutamente\ contínua, T - periódica, \\ \displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0 \ e \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt < \infty \end{array} \right\}.$$

Então a função $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma.

Demonstração:

Devemos mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

(**i**) $\|v\|_X \geq 0, \quad \forall\, v \in X$

(**ii**) $\|v\|_X = 0$ se, e somente se, $v \equiv 0$

(**iii**) $\|\alpha v\|_X = |\alpha|\ \|v\|_X, \ \forall\, v \in X$ e $\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

(**iv**) $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X, \quad \forall\, u, v \in X.$

Observe que os itens (i), (iii) e (iv) seguem diretamente das propriedades da norma nos Espaços $L^p([0,T])$.

Se $\|v\|_X = 0$, temos

$$\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt = 0$$

o que implica,

$$\|v^{'}\|^p = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}$$

e consequentemente

$$v = C \;\; q.t.p \;\; em \;\; X.$$

Sendo $\displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0$ tem-se $v \equiv 0$.

Reciprocamente, se $v \equiv 0$ então

$$\int_0^T \|v'(t)\|^p dt = 0$$

assim,

$$\|v\|_X = 0$$

o que mostra (ii).

$\blacksquare$

Lema C.14 (Ver [5]) Seja G um espaço de Banach e $f : [a, b] \to G$ uma função contínua. Então,

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Bibliografia

[1] A. Anbrosetti, P. H Rabinowitz.,*Dual Variational methods in critical theory and apllications*. J. Funct. Anal. 14 (1973).

[2] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[3] Brézis, Haim., *Analyse Fonctionelle*. 2^a ed. Masson, 1987.

[4] Costa, David Goldstein., *Tópicos em análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[5] Dantas, Moisés dos Santos, *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos Variacionais*. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2005.

[6] Iório Jr., Rafael José e Iório, Valéria., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[7] J. Mawhin, M. Willem., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, New York, 1983.

[8] Lang, Serg., *Analysis II*. Addison-Wesley, 1969.

[9] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[10] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[11] Sotomayor, Jorge., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[12] Willem, Michel. , *Lectures on Critical Point Theory*, Trabalho de Matemática N. 199, UnB, 1983. New York, 1983.