Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Existência, Unicidade e Controlabilidade de Soluções para Algumas Equações Diferenciais Parciais de Evolução

por

Weiller Felipe Chaves Barboza [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

B239s Barboza, Weiller Felipe Chaves.
Sobre a existência, unicidade e controlabilidade de soluções para algumas equações diferenciais parciais de evolução / Weiller Felipe Chaves Barboza. – Campina Grande, 2017.
205 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo".
Referências.

1. Método de Faedo-Galerkin. 2. Semigrupos. 3. Controlabilidade Exata. 4. Desigualdade de Carleman. 5. Método Hum. I. Lourêdo, Aldo Trajano. II. Título.

CDU 51-7(043)

Sobre a Existência, Unicidade e Controlabilidade de Soluções para Algumas Equações Diferenciais Parciais de Evolução

por

Weiller Felipe Chaves Barboza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB

Prof. Dr. Diego Araújo de Souza - UFPE

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Agosto /2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu a vida e pela força que me foi concedida para enfrentar todas as dificuldades encontradas nessa trajetória percorrida.

Ao professor Dr. Aldo Trajano Lourêdo pela excelente orientação, atenção e por toda paciência e dedicação que teve comigo durante todo percusso nesse mestrado.

Sou grato aos que participaram da minha banca, professores Dr. Manuel Milla Miranda e Dr. Diego Araújo de Souza que disponibilizaram seu tempo para ler minha dissertação e pelas contribuições e sugestões para o trabalho.

À todos os professores da Graduação e da Pós-graduação que contribuíram de forma significativa na minha formação acadêmica, em especial aos professores Horácio da Silva, Ângelo Roncalli, Joseilson de Lima, Brandão Júnior e Marco Aurélio.

Aos meu amigos e colegas de Graduação e Pós-graduação em especial: Tayrone Cigano, Wallace, Hélio, Max, Bruna, Fran, Geovani, Thiago, João Paulo entre outros.

Agradeço a minha família por me apoiar e me proporcionar um conforto para a minha educação, além de carinho e incentivo nas horas difíceis.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UFCG, em especial Aninha, Andreza, Totinha e Renato.

A minha noiva Rayzza Tavares Gomes Barboza pelo incentivo, compreensão que soube ter a paciência e a cumplicidade para que eu conseguisse desenvolver esse trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que foi fundamental para minha dedicação e conclusão deste trabalho.

Dedicatória

Ao meu pai José Alberis, minha mãe Maria de Fátima, minha irmã Alberisa de Fátima e minha noiva Rayzza Barboza.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e controlabilidade exata na fronteira e interna para a equação da onda linear com condição de fronteira do tipo Dirichlet. Além disso fizemos um estudo da existência, unicidade e controlabilidade da equação do calor e também sobre a controlabilidade da equação da onda semilinear. Com este fim, na parte da existência da equação da onda linear usamos o método de Faedo-Galerkin, já para a equação do calor fizemos a existência de solução através da teoria de semigrupo de operadores lineares. Para a controlabilidade exata, usamos, essencialmente, o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) e também por meio de métodos variacionais, mostramos que a controlabilidade exata, pode ser feita através de um problema de minimização. Já para a controlabilidade da equação do calor, usamos um método que é baseado na obtenção de uma desigualdade de Carleman através de uma desigualdade de observabilidade e por fim, na controlabilidade da equação da onda semilinear, utilizamos um método baseado no Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Palavras - Chaves: Método de Faedo-Galerkin, Semigrupos, Controlabilidade exata, Desigualdade de Carleman, Método Hum.

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness and exact controllability at the boundary and internal to the linear wave equation with Dirichlet boundary condition. In addition, we did a study of the existence, uniqueness and controllability of the heat equation and also on the controllability of the semilinear wave equation. To this end, in the part of the existence of the linear wave equation, we use the Faedo-Galerkin method. Already for the heat equation we made the existence of solution through the semigroup theory of linear operators. For exact controllability, we essentially use the Hilbertian Uniqueness Method (HUM) and also by means of variational methods, we show that the exact controllability can be done through a minimization problem. For the controllability of the heat equation, we use a method that is based on obtaining a Carleman inequality through an inequality of observability and finally, in the controllability of the semilinear wave equation, we use a method based on the Fixed Point Theorem of Schauder.

Key-Words: Faedo - Galerkin Method, Semigroups, Exact Controlability, Carleman Inequality, Hum Method.

Sumário

Notações e Simbologias

- Ω **é um aberto limitado de classe** C^2 **do** $\mathbb{R}^n$
- Γ **representa a fronteira de** Ω
- Γ_0 **representa um pedaço da fronteira** Γ **de** Ω
- $\Gamma_0 \cap (\Gamma \diagdown \Gamma_0) = \varnothing$
- $Q = \Omega \times (0, T)$ **subconjunto de** $\mathbb{R}^{n+1}$
- $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$
- $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ **designa a derivada na direção normal exterior**
- $\rightharpoonup$ **designa convergência fraca**
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ **designa convergência fraca estrela**
- X' **designa o dual topológico de X**
- $\mathcal{L}(X, Y)$ **designa o designa o espaço das transformações lineares limitadas de** X **em** Y

Introdução

Parte deste trabalho aborda de forma didática o livro intitulado: *Introduction exact control theory: Method Hum* em Milla Miranda, Luiz Adalto e Aldo Trajano [20], que trata da existência de solução, bem como a controlabilidade de sistemas associado ao problema

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = f, \quad em \ \ \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0, \qquad sobre \ \ \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array} \right.$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, e sua fronteira é denotada por $\partial\Omega = \Gamma$.

Outra parte do trabalho é dedicada ao estudo da existência e controlabilidade da equação do calor via desigualdade de Calerman que se encontra no livro intitulado: *Control and Non-linearity* em Jean Michel Coron [6], problema este que é dado por:

$$\left| \begin{array}{l} y' - \Delta y = u(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega, \\ y = 0 \qquad sobre \ \ (0,T) \times \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde no tempo $t \in [0,T]$, o estado é $y(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ e o controle é $u(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$.

Finalizamos o trabalho com o estudo da controlabilidade da equação da onda semilinear que foi retirado do livro: *Controlabilidad Exacta y Estabilizacion de la Ecuacion de Ondas* em Enrike Zuazua [20], onde foi feito a existência de solução e a controlabilidade utilizando um método baseado no Teorema do Ponto Fixo de Schauder

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y + f(y) = h\chi_\omega \ \ em \ \ Q, \\ y = 0 \ \ em \ \ \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y^1(0) = y^1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array} \right.$$

sendo f uma função localmente lipschitz.

A controlabilidade de Equações Diferencias Parciais (EDP) tem sido objeto de um estudo intenso durante as duas últimas décadas. O problema de controlabilidade já tem sido estudado por diversos autores:

Em Markus, L. (1965), se introduziu um método baseado no Teorema da Função Implícita para o estudo de controlabilidade exata de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Mais na frente este método foi adaptado e estendido ao estudo de controlabilidade de equações de ondas não lineares com Chewing, W. C. (1976), Fattorini, H. O. (1989), Russell, D. L. (1978), este método proporciona resultado de controlabilidade local, isto é, dados iniciais em uma vizinhança de $\{0,0\}$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ podem ser levados a $\{0,0\}$ se $f(0) = 0$ em um tempo T. Para a controlabilidade na equação da onda semilinear, adotaremos um ponto de vista diferente, usamos um método que proporciona resultado de controlabilidade exata para alguma classe de funções não lineares. Em Enrike Zuazua [39] se introduziu um método de ponto fixo que proporciona resultado de controlabilidade exata para não linearidades f assintoticamente lineares, isto é:

$$f' \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{1}$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s}. \text{ existe.} \tag{2}$$

Posteriormente Zuazua introduziu um segundo esquema de ponto fixo pelo qual se demostrou a controlabilidade em uma classe de não linearidades globalmente lipschitz. Ou seja, sem a necessidade de supor (2). A desvantagem deste método é que o controle construído pertence a classe $H^{-\epsilon}(0,T;L^2(\Omega))$ com $\epsilon > 0$ e não a classe ideal $L^2(\omega \times (0,T))$ correspondente ao caso linear. Outro autor de grande importância na área, por exemplo o Lions [16] em 1986 introduziu um método sistemático e construtivo conhecido como Método de Unicidade Hilbertiana (HUM). O HUM consiste em reduzir a controlabilidade exata de sistemas lineares em um resultado de continuação única, que é equivalente à obtenção de uma desigualdade inversa, desigualdade de observabilidade. A partir do HUM muitas descobertas importantes foram feitas nesta área.

Gostaria de ressaltar um importante resultado de grande importância na área de controlabilidade. Para isso, vamos considerar os problemas abstratos

$$\left| \begin{array}{l} U' = AU, \\ U(0) = U_0, \end{array} \right. \tag{3}$$

e o problema adjunto,

$$\left| \begin{array}{l} V' = -A^*V + B^*W, \\ V(0) = V_0, \end{array} \right. \tag{4}$$

com $B : D(B) \subset H \longrightarrow G$, onde G é espaço de Hilbert e A^* e B^* são os adjuntos de A e B. Vamos supor que,

(H1) O operador A gera um grupo fortemente contínuo de automorfismos e^{tA} em H, onde H é um espaço de Hilbert.

(H2) $D(A) \subset D(B)$, e existe uma constante $C > 0$, tal que $\|BU_0\|_G \leq C\|AU_0\|_H$ para todo $U_0 \in D(A)$.

(H3) Existe um intervalo I e uma constante $C_I > 0$ tal que a solução de (3) satisfaz a desigualdade,

$$\|BU\|_{L^p(I,G)} \leq C_I\|U_0\|_H, \quad \forall U_0 \in D(A).$$

Vamos assumir também uma desigualdade inversa a (H3), isto é,

(H4) Existe um intervalo limitado I' e uma constante positiva c' tal que a solução de (3) satisfaz a desigualdade

$$\|U_0\|_H \leq c'\|BU\|_{L^p(I',G)}.$$

Notemos algumas observações:

1. O operador B é chamado operador observabilidade, podemos pensar que podemos observar somente BU e não toda solução a U.

2. A hipótese (H3) é uma forma abstrata da desigualdade direta na terminologia de Tome 1 [17] e Tome 2 [18]. Ela também é chamada de desigualdade de admissibilidade, porque ela nos permite definir BU como um elemento de $L^p(I,G)$ para todo $U_0 \in H$, por densidade.

Sobre as hipóteses (H1)-(H3) é possível definir a solução do problema dual

$$\left| \begin{array}{l} V' = -A^*V + B^*W, \\ V(0) = V_0, \end{array} \right. \tag{5}$$

para todo $V_0 \in H'$ e $W \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, G')$. Aqui H' e G' denotam os espaços duais de H e G e A^*, B^* denotam os adjuntos de A e B, respectivamente.
Observa-se também que o operador B^* é usualmente chamado operador controlabilidade: Podemos pensar que podemos agir sobre o sistema escolhendo um controle W. Para um procedimento formal ver Kormonik [12] página 14.

Definimos uma solução de (5) como uma função $V : \mathbb{R} \longrightarrow H'$ satisfazendo,

$$\langle V(S), U(S)\rangle_{H'\times H} = \langle V_0, U_0\rangle_{H'\times H} + \int_0^S \langle W(t), B(t)\rangle_{G'\times G} dt,$$

para todo $V_0 \in H$ e todo $S \in \mathbb{R}$. Retornando aos problemas (3) e (4) e assumindo as hipóteses

(H1)-(H4). Fixado dois números $T > |I'|, \omega > 0$, cuja $T\omega = T + (2\omega)^{-1}$ e definindo,

$$e_\omega(s) = \left| \begin{array}{l} e^{-2\omega s}, \quad se \quad 0 \leq s \leq T, \\ 2\omega e^{-2\omega T}(T_\omega - s), \quad se \quad T \leq s \leq T_\omega, \end{array} \right.$$

e definimos

$$\langle \Lambda_\omega U_0, \tilde{U}_0 \rangle_{H' \times H} := \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)(Be^{sA}U_0, Be^{sA}\tilde{U}_0)_G ds.$$

Então, Λ_ω é um isomorfismo auto-adjunto positivo definido e $\Lambda_\omega \in \mathcal{L}(H, H')$. Denotando por $J : G \longrightarrow G'$ o isomorfismo canônico de Riesz (Ver Manuel Milla Miranda [23]) temos o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *Assuma as hipóteses (H1)-(H4) e fixe $\omega > 0$ qualquer. Então o problema*

$$\left| \begin{array}{l} V' = (-A^* - B^*JB\Lambda_\omega^{-1})V, \\ V(0) = V_0, \end{array} \right. \tag{6}$$

é bem posto em H'. Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que a solução de (6) satisfaz a estimativa

$$\|V(t)\|_{H'} \leq M\|V_0\|_{H'}e^{-\omega t}, \tag{7}$$

para todo $V_0 \in H'$ e todo $t \geq 0$.

Em outras palavras, este Teorema afirma que a Lei feedback

$$W = -JB\Lambda_\omega^{-1}V$$

estabiliza uniforme o problema (5) com uma taxa de decaimento igual a ω. Para mais detalhes ver Kormonik [12].

Gostaríamos de destacar a importância de um grande resultado muito usado nessa área, que é conhecido como o Princípio de Russell, onde ele garante que, estabilizar um sistema linear reversível[1] no tempo implica na controlabilidade exata do mesmo, ou seja, a estabilização é equivalente a controlabilidade exata, desde que o sistema seja linear e reversível. Para mais detalhes, conferira o artigo Russell [28].

No que segue, informamos que este trabalho está dividido como segue a seguinte sequência:

No Capítulo 1, daremos alguns conceitos básicos sobre distribuições para funções reais, funções vetoriais, espaços de Sobolev e resultados gerais de traço. Além disso, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados de fundamental importância no decorrer deste trabalho.

[1]Dizemos que um sistema é reversível no tempo, quando a equação é satisfeita para $-t$ ao invés de t.

No Capítulo 2, mostramos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra fraca da equação da onda linear. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução forte. A solução fraca é obtida como limite de uma sequência de soluções fortes. O método de Transposição é usado para definir a solução ultra fraca.

No Capítulo 3 e 4, estudamos a controlabilidade exata da equação linear da onda, considerando o caso do controle localizado na fronteira do domínio Ω e no capítulo 4 no seu interior. Vimos, por meio do método HUM, que o problema de controlabilidade exata é equivalente a provar uma desigualdade de observabilidade associada ao problema adjunto. Ou seja, o problema de controlabilidade se reduz a provas as desigualdades direta e inversa.

No Capítulo 5, apresentamos outros métodos de controlabilidade, em um primeiro momento, fizemos a controlabilidade exata interna e na fronteira da equação da onda linear, sendo que dessa vez, mostrando que o problema de controlabilidade se reduza um problema de minimização. E também apresentamos um método de controlabilidade que se reduz a provar uma desigualdade de observabilidade, conhecida como controlabilidade via desigualdade de Calerman, para este mesmo problema fizemos a existência da equação do calor através da teoria do Semigrupo de Operadores Lineares, como pode ser vista por exemplo em Alvercio [8] e em Pazy [27].

No Capítulo 6, realizamos a controlabilidade da equação da onda semilinear usando um método criado por Zuazua, onde se é utilizado o Teorema do ponto fixo de Schauder para controlar esse sistema.

Para finalizar o trabalho, escrevemos três apêndices, no primeiro é apresentado o resultado de regularidade da solução forte, no segundo os resultados que nos garante a existência e prolongamento de soluções aproximadas, e é parte essencial da obtenção da solução forte da equação linear da onda e finalmente, no terceiro é apresentado resultados referentes aos sistema de controle linear abstrato.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

No que segue, apresentaremos algumas definições e conceitos básicos relacionados a teoria das distribuições, análise funcional, teoria da medida, espaço de Sobolev, teoria de semigrupos de operadores lineares limitados entre outros que serão de fundamental importância no decorrer do nosso trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definimos por **suporte** de f, e denotamos por $supp(f)$, como sendo o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\} \cap \Omega$. Dessa forma, $supp(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada **multi-índice** e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.
Representa-se por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

Observação 1.1. *Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ define-se $D^0 u = u$, para toda função u. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.*

Definição 1.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$* **converge** *para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*
i) *Existe um compacto K de Ω tal que $supp(\varphi), supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^n$.*
ii) *Para todo multi-índice α, tem-se $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$. uniformemente em K*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de **Espaço das Funções Testes** sobre Ω.

Uma **ditribuição** sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as segintes condições:

i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

ii) T é contínua, isto é, se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denotaremos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ conjunto de todas as distribuições sobre Ω.

Lema 1.1 (Du Bois Reymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Para a prova ver Brezis Brezis [3]. ∎

A seguir, daremos um exemplo de uma distribuição.

Exemplo 1.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é uma distribuição.

Observação 1.2. *Segue do Lema 1.1 Du Bois Reymond que se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se e somente, se $u = v$. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo T_u com o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 1.2. *Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A* **derivada** *$D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω

Observação 1.3. *Decorre da definição que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

1.2 Espaços Funcionais à valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T, X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \to X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Diremos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0, T, X)$ se:

i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $supp(\varphi_n), supp(\varphi) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \to \varphi$ em X uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T,\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$ se $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_n \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle T, \theta_n \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X.

Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T,X)$ se $\langle T_n, \theta \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$ munido da convergência acima é denominado **espaço das distribuições vetorias de** $(0,T)$ **com valores em** X**.**

Observação 1.4. *Prova-se que o conjunto* $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ *é total em* $\mathcal{D}(0,T,X)$. [1]

Definição 1.3. *Dizemos que* u *é* **fortemente mensurável** *quando existir uma sequência de funções simples* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0,T).$$

Denotaremos por $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T,X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0\leq t\leq T} ess\|u(t)\|_X. \tag{1.1}$$

Observação 1.5. *No caso* $p = 2$ *e* X *um espaço de Hilbert, segue que* $L^2(0,T,X)$ *é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, então podemos identificar

$$[L^p(0,T,X)]' = L^q(0,T,X')$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Essas identificações encontram-se demonstradas detalhadamente em Edwards [33] ou Dinculeanu [7].

No caso em que $p = 1$, identificamos

$$[L^1(0,T,X)]' = L^\infty(0,T,X').$$

[1] Um conjunto Υ é dito **total** em X se o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de Υ são densas em X.

Observação 1.6. *Quando* Ω *for um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ *e* $Q = \Omega \times (0, T)$ *for o cilindro em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *então, para* $1 \leq p < \infty$, *tem-se*

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

Definição 1.4. *Dada* $T \in \mathcal{D}'(0, T, X)$, *define-se a derivada de ordem* n *como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0, T)$ *com valores em* X *dada por:*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Representa-se por $C([0, T], X)$ o espaço de Banach das funções u, definidas em $(0, T)$ com valores em X, cuja norma é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup \|u(t)\|_X.$$

Por fim, denotaremos por $H_0^1(0, T, X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0, T, X) = \{u \in L^2(0, T, X); u' \in L^2(0, T, X), u(0) = u(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((u, v))_{H_0^1(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0, T, X)$ com o seu dual $(L^2(0, T, X))'$, via o teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0, T, X) \hookrightarrow H_0^1(0, T, X) \hookrightarrow L^2(0, T, X) \hookrightarrow H^{-1}(0, T, X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T, X),$$

onde

$$H_0^1(0, T, X) = (H^{-1}(0, T, X))'.$$

Proposição 1.1. *Seja* $u \in L^2(0, T, X)$. *Então existe um único* $f \in H^{-1}(0, T, X)$ *que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \xi \in X$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [21]. ∎

Baseado na Proposição anterior, identificamos u' com f. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0, T, X)$ então $u' \in H^{-1}(0, T, X)$.

Proposição 1.2. *A aplicação*

$$u \in L^2(0, T, X) \mapsto u' \in H^{-1}(0, T, X)$$

onde X *é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.*

Demonstração. Ver M. Milla Miranda [21] □

Proposição 1.3. *Suponha que* $u, g \in L^1(0,T,X)$*. Então, as condições abaixo são equivalentes:*
i) *Existe* $\xi \in X$*, independente de* t*, tal que* $u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$ *quase sempre em* $(0,T)$*, (*u *é quase sempre uma primitiva de* g*);*

ii) *Para cada* $\varphi \in D(0,T)$ *tem-se* $\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$*, (*$g = \frac{du}{dt}$ *derivada no sentido das distribuições);*

iii) *Para cada* $y \in X'$*,* $\frac{d}{dt}\langle u(t), y\rangle = \langle g(t), y\rangle$ *no sentido das distribuições.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [19] ou Teman [29].

■

Teorema 1.1. *Sejam* X*,* Y *espaços de Hilbert tal que* $X \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$ *e* $u \in L^p(0,T,X)$*,* $u' \in L^p(0,T,Y)$*,* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $u \in C^0([0,T];Y)$*.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [19]. ■

Teorema 1.2. *Seja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Sejam* $u \in [L^q(0,T,X)]'$ *e* $v \in L^p(0,T,X)$*, então*

$$\langle u, v\rangle_{[L^p(0,T,X)]' \times L^p(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X} dt.$$

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [19] ou Dinculeanu [7]. ■

1.3 Espaços de Sobolev

No que segue, definiremos o espaços de Sobolev e daremos algumas de suas principais propriedades básicas. Considere Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, definimos o espaço de Sobolev. Dado um número inteiro $m > 0$, representa-se $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo multi-índice $|\alpha| \leq m$, tem-se $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{\infty,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^{\alpha}u|^{p}_{L^{\infty}(\Omega)}(\Omega), \text{ quando } p = \infty,$$

Observação 1.7. *Por $p = 2$, representa-se $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a estrutura Hilbertina de tais espaços.*

Proposição 1.4. *Os espaços $H^m(\Omega)$ munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)},$$

são espaços de Hilbert.

Demonstração: Ver M. M. Miranda e L. A. Medeiros [22].

■

Por fim, o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ denota-se por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.4 Espaços de Sobolev Fracionados

Nesta seção, daremos uma outra caracterização dos espaços $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, que servirá de motivação para definir os espaços $H^s(\Omega)$, quando s for um número real positivo e Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. No que segue, daremos algumas definições e propriedades destes espaços que serão utilizados neste trabalho. Na seção anterior, definimos os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto regular e limitado. No caso $p = 2$, temos

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^{\alpha}u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \tag{1.1}$$

Definição 1.5. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A* **transformada de fourier** *de f, denotada por $\hat{f}$, é uma função definida sobre o $\mathbb{R}^n$ pela fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx,$$

onde $\langle \xi, x\rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $i = \sqrt{-1}$.

Definição 1.6 (Espaço de Schwartz)**.** *O* **espaço de Schawartz** *ou* **espaço das funções rapidamente decrecente no infinito***, que denotaremos por $\mathcal{F}$, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k D^{\alpha}\varphi(x) = 0,$$

qualquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 1.2. *Seja* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Então,* $\varphi \in \mathcal{F}$*.*
De fato, desde que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, existe um compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $supp\varphi \subset K$*. Assim, consideremos* $\sigma > 0$ *tal que* $K \subset \mathbb{R}^n$*. Logo, dados* $\varepsilon > 0$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, tem-se para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|x\| > \sigma$

$$\|x\|^k |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon,$$

mostrando que $\varphi \in \mathcal{F}$*.*

Definição 1.7 (Distribuição Temperada)**.** *Um funcional linear* T *definido e contínuo sobre* $\mathcal{F}$ *é denominado* **distribuição temperada***, ao qual denotaremos por* $\mathcal{F}'$ *o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos sobre* $\mathcal{F}$*.*

Vamos definir o espaço $H^s(\Omega)$, e para tanto, consideremos o seguinte resultado

Proposição 1.5. *Para todo* $m \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração: Ver M. M. Miranda e L. A. Medeiros [22]. ■

Dessa forma, motivados pela proposicão anterior, definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$;

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx.$$

Mostra-se em M. M. Miranda e L. A. Medeiros [22] que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 1.6. *Para todo* $s \geq 0$*,* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver M. M. Miranda e L. A. Medeiros [22]. □

Observação 1.8. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$*, denotaremos o dual topológico de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *como sendo*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'.$$

Quando Ω é um aberto limitado e regular do $\mathbb{R}^n$, define-se o espaço $H^s(\Omega)$ como

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w|_\Omega = u\},$$

Proposição 1.7. *Se* $0 \leq s_1 \leq s_2$ *então,* $H^{s_2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} H^{s_1}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Lions Magenes [16]. □

Observação 1.9. *Os resultados acima valem quando* Ω *for um aberto limitado e regular do* $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.8. *O espaço* $\mathcal{D}(\Gamma)$ *é denso em* $H^s(\Gamma)$.

Demonstração. Ver Lions Magenes [16]. □

Proposição 1.9. *O espaço* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma)$.

Demonstração. Ver Lions Magenes [16]. □

1.5 Principais Resultados

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da análise funcional e análise não linear que serão utilizados nesta dissertação.

Definição 1.8. *Seja* I *um intervalo. Dizemos que uma função* u *é* **absolutamente contínua** *quando* $u \in W^{1,1}(I)$.

Teorema 1.3 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach e Seja* T *um operador linear contínuo e bijetivo de* E *em* F. *Então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Demonstração: Para a prova do teorema o leitor interessado pode ver Brezis [3]. ■

Lema 1.2 (Imersão de Sobolev). *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* Γ *regular.*

1. *Se* $n > pm$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right]$.
2. *Se* $n = pm$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $q \in [1, \infty)$.
3. *Se* $n = 1$ *e* $m \geq 1$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Para a prova o leitor pode ver Brezis [3]. ■

Lema 1.3 (Rellich-Kondrachov). *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* Γ *regular.*

1. *Se* $n > pm$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *compacta, onde* $q \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right)$.

2. Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ compacta, onde $q \in [1, \infty)$.

3. Se $pm > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookleftarrow C^k(\overline{\Omega})$ compacta, onde k é um inteiro não negativo tal que

$$k < m - \left(\frac{n}{p}\right) \leq k + 1.$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista em Brezis [3]. ■

Teorema 1.4 (Teorema do Traço). *A aplicação linear*

$$u \longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \cdots, \gamma_{m-1} u) = \left(u\Big|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_{\Gamma}, \cdots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\Big|_{\Gamma} \right),$$

de $\mathbb{D}(\overline{\Omega})$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em Lionse Magenes [16]. ■

Teorema 1.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Seja E um espaço de Banach. O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \ \ \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito a topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$.*

Demonstração: A prova pode ser vista em Brezis [3]. ■

Lema 1.4 (Desigualdade de Gronwall). *Seja $z(t)$ uma função real, absolutamente contínua em $[0, a)$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s) ds, \tag{1.1}$$

onde C é uma constante não negativa. Então

$$z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[.$$

Consequentemente, $z(t)$ é limitada.

Demonstração: A prova pode ser vista em Coddington [5]. ■

Lema 1.5 (Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Banach e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\phi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista por exempplo em Brezis [3] ou Edwards [33].

■

Teorema 1.6. *Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sucessão de E'. Se $f_n \longrightarrow f$ fraco estrela em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

Demonstração: A prova pode ser vista em Brezis [3] ou Edwards [33]. ■

Teorema 1.7 (Banach-Steinhaus). *Sejam E e F espaços de Banach. Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \to \infty$ a um limite que denotamos por T_x. Então tem-se:*

1. $\sup\limits_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$.
2. $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em Brezis [3] ou Edwards [33]. ■

Proposição 1.10. *Considere o números reais p e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

1. $p = 2$ *se* $n = 1, 2, 3$
2. $p \geq \frac{n}{2}$ *se* $n \geq 4$

Então, a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é contínua.

Demonstração: Ver M. M. Miranda e L.A. Medeiros [24]. ■

Teorema 1.8 (Gauss-Green). *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma,$$

com $i = 1, 2, \cdots, n$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Brezis [3]. ■

Teorema 1.9 (Fórmulas de Green). *Se $v \in H^2(\Omega)$, tem-se:*

1. $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$
2. *Se $u, v \in H^2(\Omega)$, então* $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$

Demonstração: Para a prova ver Brezis [3] ou Edwards [33]. ■

Teorema 1.10 (**Representação de Riesz**)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^q$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p)'}.$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Brezis [3] ou Edwards [33]. ■

Teorema 1.11. *Sejam* H *um espaço de Banach reflexivo,* K *um subconjunto convexo fechado de* H *e* $\phi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função com as seguintes propriedades:*

1. ϕ *é convexa.*
2. ϕ *semi-contínua inferiormente.*
3. *Se* K *é ilimitado, então* ϕ *é coercivo, ou seja*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow \infty} \phi(x) = \infty.$$

Então, ϕ *atinge um mínimo em* K*, ou seja, existe* $x_0 \in K$ *tal que*

$$\phi(x_0) = \min_{x \in K} \phi(x).$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Brezis [3] ou Edwards [33]. ■

Observação 1.10. *Se ao invés de* ϕ *ser convexa e for estritamente convexa, semi-contínua inferiormente e coerciva então, teremos que* ϕ *atinge um* ***único ponto mínimo.***

Teorema 1.12 (**Regularidade**)**.** *Considere* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto limitado com fronteira* Γ *de classe* C^2*. Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C|f|_{L^2(\Omega)}$*, onde* C *é uma constante que so depende de* Ω.

Demonstração: A prova o leitor pode encontrar em Brezis [3]. ■

Definição 1.9. *Uma função* $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que*
i)$\varphi \in C^1$
ii)$\varphi(0, x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
iii)$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
é chamada de ***Fluxo****. Se além disso,* $\varphi(t, \cdot) = \varphi_t$ *é uma aplicação linear de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^n$*, o fluxo é dito linear.*

1.6 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Apresentaremos em seguir, alguns resultados muito importantes a cerca de Semigrupo de operadores lineares, os quais podem ser encontrados em Alvercio [8], Pazy [27] , Barbu [1] e Zheng [13], que foram usados fortemente durante nosso estudo de existência de solução, principalmente para a equação do Calor onde foi feito a controlabilidade por meio de uma desigualdade de Carleman.

Definição 1.10. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ um operador linear limitado de X. Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um* **semigrupo de operadores lineares limitados** *de X se*

(i) $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definição 1.11. *Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é* **uniformemente contínuo***, se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Definição 1.12. *Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de* **classe C^0***, ou* **simplesmente fortemente contínuo** *se,*

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Lema 1.6. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-Semigrupo em X, onde X é um espaço de Banach. Então existem $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tal que $0 \leq t \leq \delta$,*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Alvercio [8], Pazy [27] , Barbu [1] e Zheng [13]. ∎

Teorema 1.13. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-Semigrupo em X, sendo X um espaço de Banach. Então existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: A prova do teorema pode ser vista em Alvercio [8], Pazy [27] , Barbu [1] e Zheng [13]. ∎

Corolário 1.1. *Todo Semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: Com efeito, seja $t \in \mathbb{R}^+$. De $h > 0$ vem que

$$\begin{aligned}\big\|S(t+h)x - S(t)x\big\| &= \big\|S(t)[S(h)-I]x\big\| \\ &\leq \big\|S(t)\big\|.\big\|(S(h)-I)x\big\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, e de $0 < h < t$,

$$\begin{aligned}\big\|S(t-h)x - S(t)x\big\| &= \big\|S(t-h)[I-S(h)]x\big\| \\ &\leq \big\|S(t-h)\big\|.\big\|(S(h)-I)x\big\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, pelo Teorema 1.13, obtemos que

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

■

Definição 1.13. *Quando $\omega_0 < 0$, existe $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

neste caso, diz-se que S é um **semigrupo uniformemente limitado de classe** C_0*. Se, além disso $M = 1$, S é dito um* **semigrupo de contrações de classe** C_0*.*

Definição 1.14. *O operador A definido por;*

$$D(A) = \left\{x \in X; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x \ \ existe\right\},$$

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito **gerador infinitesimal do semigrupo** S*.*

Proposição 1.11. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S.*

i.) Se $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.1}$$

ii.) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau. \tag{1.2}$$

iii.) Se $x \in X$ então $\int_s^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ e

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau. \tag{1.3}$$

Demonstração: Seja $t > 0$ fixado. Para $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}x = &= \frac{S(t)S(h)-S(t)}{h}x \\ &= \frac{S(h)-I}{h}S(t)x = A_hS(t)x = S(t)A_hx.\end{aligned}$$

Vamos justificar esta ultima igualdade $A_hS(t)x = S(t)A_hx$. Note que,

$$\begin{aligned}S(t)A_hx = S(t)\frac{S(h)-I}{h}x &= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} \\ = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} &= \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = A_hS(t)x.\end{aligned}$$

Como $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A)$ daí o limite $AS(t)x$ existe, portanto podemos passar o limite na igualdade acima e temos que o limite em $S(t)Ax$ existe, e ainda

$$\begin{aligned}A_hS(t)x &= \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h+t)x - S(t)x}{h} \\ &= \frac{d^+}{dt}S(t)x,\end{aligned} \tag{1.4}$$

por outro lado, para $h \in [0, t]$.

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) = \frac{S(t-h)S(h)x - S(t-h)x}{h} = \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h},$$

o que implica que

$$\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)A_hx = \underbrace{S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) - S(t)A_hx,}_{(*)} \tag{1.5}$$

Somando e subtraindo $S(t-h)A_hx$ em $(*)$ temos,

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h}\right) - S(t)A_hx - S(t-h)A_hx + S(t-h)A_hx,$$

$$\underbrace{S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - A_hx\right)}_{(I)} + \underbrace{(S(t-h) - S(t))A_hx}_{(II)}. \tag{1.6}$$

Observemos para (I), como

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - A_hx\right)\right\| \leq \|S(t-h)\|.\left\|\frac{S(h)x-x}{h} - A_hx\right\|,$$

e como $x \in D(A)$, segue da limitação de $S(t-h)$, que

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - A_hx\right)\right\| \longrightarrow 0, \quad qnd\ h \to 0^+. \tag{1.7}$$

Por outro lado, olhando para (II), da continuidade forte de $S(.)x$, temos por (1.6)

$$\|(S(t-h)-S(t))A_hx\| \longrightarrow 0, \quad qnd\ h \to 0^+. \tag{1.8}$$

Logo, por (1.6), ((1.7)) e ((1.8)), temos voltando para (1.5) que

$$\left\| \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)A_hx \right\| \longrightarrow 0, \quad qnd\ h \to 0^+,$$

isto é, a derivada a esquerda de $S(t)x$

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax, \tag{1.9}$$

de (1.9), (1.4) que

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Ax = AS(t)x,$$

e assim mostramos (i). Agora para mostrar (ii) observe que basta integrar (1.1) de s a t, obtemos

$$\int_s^t \frac{d}{dt}S(t)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau,$$

temos

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau,$$

e fica mostrado (ii). Para mostrar (iii) faremos o seguinte. Seja $h > 0$ com $h < t$. Note que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h}\left[S(h)\int_0^t S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(h)S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(\tau+h)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right].
\end{aligned}$$

Isto é, temos que

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)xd\tau,$$

e assim, podemos ainda fazer,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h}\left[\int_h^t S(\tau)xd\tau + \int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \int_0^h S(\tau)xd\tau - \int_h^t S(\tau)xd\tau\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\underbrace{\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau}_{I_1} - \int_0^h S(\tau)xd\tau\right],
\end{aligned} \tag{1.10}$$

para (I_1), temos o seguinte lema.

Afirmação 1: Para cada $x \in X$ e $h > 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - S(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(S(\tau)x - S(t)x)d\tau\right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|S(\tau)x - S(t)x\|d\tau.\end{aligned}$$

Daí, sendo $S(.)x$ contínua, então segue que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = h > 0$ tal que

$$\|S(\tau)x - S(t)x\| < \epsilon, \;\; para \;\; |\tau - t| < h,$$

para h suficientemente pequeno, portanto

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - S(t)x\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\epsilon d\tau = \frac{1}{h}\epsilon h = \epsilon,$$

daí, concluímos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x.$$

Provado a afirmação, voltamos para igualdade em (1.10)

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau = \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \int_0^h S(\tau)xd\tau\right],$$

passando ao limite com $h \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)xd\tau,$$

usando agora a afirmação mostrada acima, resulta que

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau = S(t)x - x.$$

Por fim, conclui-se que

$$\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A),$$

com

$$A\left(\int_0^t S(\tau)xd\tau\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h) - I}{h}\left(\int_0^t S(\tau)xd\tau\right) = S(t)x - x.$$

$\blacksquare$

Proposição 1.12. 1. *O Gerador infinitesimal de um Semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

2. *Um operador A fechado com domínio denso em X é o gerador infinitesimal de no máximo um semigrupo de classe C_0.*

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8], Pazy [27]. ■

Definição 1.15. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo;*

$$D(A^n) = \{x; x \in D(A^{n-1}) \ \ e \ \ A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$Ax = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 1.13. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal, então temos:*

1. *$D(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X.*

2. *Se $x \in D(A^n)$, então $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in D(A^n)$ então $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A^{n+1})$ e*

$$A^{n+1}\left(\int_0^t S(\tau)x d\tau\right) = S(t)A^n x - A^n x.$$

Demonstração: Para a prova o leitor interessado pode ver Alvercio [8], Pazy [27]. ■

Teorema 1.14. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, ou seja fortemente contínuo em X, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8], Pazy [27]. ■

Lema 1.7. *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|, \tag{1.11}$$

o funcional $| \ . \ |_k$ é uma norma em $D(A^k)$ munido do qual $D(A^k)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: O leitor interessado pode ver a prova em Alvercio [8], Pazy [27]. ■

Proposição 1.14. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo, então para todo $x \in D(A^k)$*

$$S(t)x \in C^{n-k}([0,\infty];[D(A^k)]), \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8], Pazy [27]. ∎

Definição 1.16. *Diz-se que um C_0-Semigrupo S, com gerador infinitesimal. A, é* **diferenciável** *para $t > t_0 \geq 0$ se $S(t)x \subset D(A)$, $\forall t > t_0$. Diz-se que S é* **diferenciável** *se S é diferenciável para $t > 0$.*

Teorema 1.15. *Seja S um semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e $S^{(n)}(t)$ o operador linear definido por $S^{(n)}(t) = A^n S(t)$, $A^0 = I, n = 0,1,\ldots$. Então:*

1. *O operador $S^{(n)}(t)$ tem as propriedades;*

a) $\forall t > (n+1)t_0$ e toda s tal que $t - t_0 > s > nt_0$, tem-se

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x, \quad \forall x \in X, \quad n = 0,1,\ldots \tag{1.12}$$

b) $S^{(n)}(t)$ é limitado para todo $t > nt_0, n = 0,1,\ldots$.

c) $S^{(n)}(t) = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[S^{(1)}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n, \quad \forall t > nt_0, \ n = 1,2,\ldots.$

Demonstração: Para a prova o leitor interessado pode ver Alvercio [8], Pazy [27]. ∎

Teorema 1.16. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-Semigrupo. Se A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $u \in D(A)$. Então,*

$$S(\cdot)u \in C([0,\infty);D(A)) \cap C^1([0,\infty);X),$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au.$$

Demonstração: A segunda parte já foi mostrado na Proposição 1.11. Já vimos que nessas condições, temos que

$$\frac{d}{dt}(S(\cdot)u) = S(\cdot)Au \in C([0,\infty);X),$$

daí,

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty);X).$$

Já vimos que, $S(t)u \in D(A)$ quando $u \in D(A)$. Assim, considerando $D(A)$ com a norma do gráfico dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_X,$$

temos que

$$S(\cdot)u \in C([0,\infty);D(A)), \tag{1.13}$$

pois, dado $t \in [0,\infty)$ e $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ com

$$t_n \longrightarrow t, \quad n \to \infty \quad em \quad [0,\infty),$$

obtemos

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} = \|S(t_n)u - S(t)u\|_X + \|AS(t_n)u - AS(t)u\|_X,$$

Como $S(\cdot)u$ é contínua

$$\|S(t_n)u - S(t)u\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

e, portanto,

$$\|AS(t_n)u - AS(t)u\| = \|S(t_n)Au - S(t)Au\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

Logo,

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

o que mostra (1.13). Portanto,

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A)).$$

■

Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{1.14}$$

Como consequência da Proposição 1.11 e usando o resultado a seguir, mostraremos a existência e unicidade de solução clássica para o PVI (1.14).

Definição 1.17. *Dizemos que uma função $u \in X$ é solução clássica de*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

quando

$$u \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A)),$$

e u verifica o PVI.

Corolário 1.2. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então para todo $u_0 \in D(A)$,*

$$u(t) = S(t)u_0,$$

é a única solução do PVI.

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Demonstração: Seja $u(t) = S(t)u_0$, para cada $u_0 \in D(A)$, daí,

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0) = AS(t)u_0, \quad \forall u_0 \in D(A),$$

logo, segue do Teorema 1.16 que $u(t) = S(t)u_0$ é solução do (1.14).

Agora, mostraremos que tal função é a única solução. De fato, suponha que $w(t)$ é solução do PVI (1.14). Defina,

$$v(s) = S(t-s)w(s),$$

mostraremos que

$$\frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}(S(t-s)w(s)) = -AS(t-s)w(s) + AS(t-s)w(s) = 0, \tag{1.15}$$

de onde concluímos que v é constante. Agora, note que

$$v(t) = S(t-t)w(t) = S(0)w(t) = w(t),$$

e

$$v(0) = S(t-0)w(0) = S(t)w(0) = S(t)u_0,$$

pois, w é solução do PVI (1.14). Sendo v constante, concluímos que

$$w(t) = S(t)u_0 = u(t),$$

Agora, vamos justificar a igualdade em (1.15). Note que

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{v(s+h)-v(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-(s+h))w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h},$$

Assim, somando e subtraindo o termo $S(t-s)w(s+h)$, temos

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-(s+h))w(s+h) - S(t-s)w(s+h) + S(t-s)w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h},$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{[S(t-(s+h)) - S(t-s)]w(s+h) + S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h}, \tag{1.16}$$

Agora, observe que

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h} = AS(t-s)w(s).$

   De fato,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h} &= S(t-s)\left(\lim_{h\to 0}\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right)\\ &= S(t-s)\frac{d}{ds}w(s) = S(t-s)Aw(s),\end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h}=S(t-s)Aw(s)=AS(t-s)w(s).$$

2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h}=-AS(t-s)w(s).$

   De fato,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s-h+h)]w(s+h)}{h},$$

   por propriedade de semigrupo, obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s-h)[I-S(h)]w(s+h)}{h},$$

   logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h}=-\lim_{h\to 0}S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h), \quad (1.17)$$

   Agora, note que

$$\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h)-AS(t-s)w(s)\right\|\leq$$
$$\leq \underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h)-S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s)\right\|}_{N_1}+$$
$$+\underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s)-S(t-s-h)Aw(s)\right\|}_{N_2}+$$
$$+\underbrace{\left\|S(t-s-h)Aw(s)-S(t-s)Aw(s)\right\|}_{N_3},$$

Afirmação: Quando $h\to 0$ temos.

1. $N_1\longrightarrow 0$;
2. $N_2\longrightarrow 0$;
3. $N_3\longrightarrow 0$;

prova de 1. Sendo $S(t-s-\cdot)$ limitada, temos

$$\begin{aligned}N_1&=\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)(w(s+h)-w(s))\right\|_X\\&\leq c_1\left\|\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)(w(s+h)-w(s))\right\|_X,\end{aligned}$$

logo, somando e subtraindo $S(h)w'(s)$ e $w'(s)$ obtemos

$$\begin{aligned} N_1 \leq c_1 \bigg\| S(h)\left(\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right) - S(h)w'(s)\bigg\| \\ + c_1 \Big\| S(h)w'(s) - w'(s) \Big\| \\ + c_1 \Big\| w'(s) - \frac{w(s+h)-w(s)}{h} \Big\|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$N_1 \leq \Big\| S(h)w'(s) - S(h)w'(s) \Big\| + \Big\| S(h)w'(s) - w'(s) \Big\| + \|w'(s) - w'(s)\Big\|,$$

pela diferenciabilidade de w e continuidade de $S(\cdot)w'(s)$, verifica-se (1).

Prova de 2. Como $S(\cdot)$ é limitado, existe $c_1 > 0$ tal que

$$N_2 \leq c_1 \bigg\| \left(\frac{S(h)-I}{h}\right) w(s) - Aw(s) \bigg\|.$$

Logo, Passando ao limite, pela definição de gerador infinitesimal, temos

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) w(s) \longrightarrow Aw(s),$$

de onde segue que $w(s) \in D(A)$ e $N_2 \longrightarrow 0$.

Prova de 3. Segue da continuidade forte da função

$$S(t-s-\cdot)Aw(s).$$

Portanto, de acordo com a afirmação 1,

$$\bigg\| S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) w(s+h) - AS(t-s)w(s) \bigg\| \longrightarrow 0, \quad h \to 0. \tag{1.18}$$

De (1.17) e (1.18) verifica-se (2). Por (1.16) e por (1) e (3) o Teorema 1.16 fica provado !

■

Definição 1.18. *Seja A um operador em um espaço de Banach X. Denominamos o* **conjunto resolvente** *de A, o qual é denotado por: $\rho(A)$*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) = \{L : X \longrightarrow X; \quad \textit{linear e contínuo}\}.$$

Definição 1.19. *Denominamos o* **Espectro** *de A sendo o conjunto;*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Observação 1.11. *Representamos a família $R(\lambda; A)$ por*

$$R(\lambda; A) = \{(\lambda I - A)^{-1}; \quad \lambda \in \rho(A) \text{ e } (\lambda I - A) \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito o **operador resolvente** *de A associado a λ, sendo λ real ou complexo.*

Observação 1.12. *O operador $R(\lambda)$ é denotado também por $R(\lambda; A)$.*

Lema 1.8. *Seja $f : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, então*

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)d\tau \longrightarrow f(0), \quad h \to 0^+.$$

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Teorema 1.17. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $(\lambda I - A)$ é invertível para todo $\lambda > 0$ e*

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda), \tag{1.19}$$

além disso, tem-se para cada $\lambda > 0$ que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: O leitor interessado pode ver a prova em Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Teorema 1.18 (de Hille-Yosida). *Um operador linear A sobre um espaço de Banach X, é um gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações se, e somente se:*

1. *A é fechado e A é densamente definido.*

2. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, temos*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Definição 1.20. *Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$ definimos*

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \varnothing, \quad \forall x \in X$.

Definição 1.21. *Uma* **aplicação dualidade** *é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*, \forall x \in X$, além disso*

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 1.22. *Dizemos que o operador* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é* **maximal** *se,*

$$\Im(I + A) = X,$$

isto é, $\forall f \in X$*, existe* $u \in D(A)$ *tal que* $(I + A)u = f$*.*

Definição 1.23. *Dizemos que o operador linear* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é* **dissipativo** *se, para alguma aplicação dualidade* j

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A),$$

se, além disso, existe $\lambda > 0$ *tal que* $Im(\lambda I - A) = X$*, então dizemos que* A *é* **maximal dissipativo** *ou simplesmente* $m-$**dissipativo***.*

Diz-se que A *é* **acretivo (m-acretivo)** *se* $-A$ *for dissipativo (m-dissipativo).*

Proposição 1.15. *Se* A *é dissipativo, então*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \|x\|, \quad \forall \lambda > 0 \ \ e \ \ \forall x \in D(A),$$

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Proposição 1.16. *Se* A *é* $m-$*dissipativo e* $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\lambda_0 > 0$ *então*

1. $\lambda_0 \in \rho(A)$ *e* A *é fechado.*
2. $(0, \infty) \subset \rho(A)$.
3. $Im(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$.

Demonstração: O leitor interessado poderá ver a prova em Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Observação 1.13. *Para simplificar a linguagem vamos escrever* $A \in G(M, \omega)$ *para exprimir que* A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados de classe* C_0, S *satisfaz a condição*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t > 0.$$

Teorema 1.19 (Lumer-Phillips). *Dizemos que* $A \in G(1, 0)$ *se, e somente se,* A *é* $m-$*dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Observação 1.14. *Se* X *é um espaço de Hilbert, então dizemos que* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é dissipativo se:*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Lema 1.9. *Seja $B : X \longrightarrow X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|S\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$$

Então, $B + S$ é um operador linear contínuo e invertível.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

O resultado a seguir simplifica bastante os cálculos, para mostrar que A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações de um espaço de Hilbert H.

Proposição 1.17 (Liu-Zheng). *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear com $\overline{D(A)} = H$, onde H é um espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$ então A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações de H.*

Demonstração: Sendo $0 \in \rho(A)$ então $(0I - A)$ é invertível e limitado. Logo

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Assim, vamos mostrar que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos:

(a)

$$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I) \text{ é invertível,}$$

desde que,

(b)

$$0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(H)}.$$

De fato, como A é invertível, pelo (1.9), tomando $B = -I$ e $S = \lambda A^{-1}$, para $|\lambda| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, temos que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível, e como a decomposição de operadores invertíveis é invertível, a partir de (a) tem-se que $(\lambda I - A)$ é invertível. Usando a série de Neumann para operadores

$$\sum_{j=0}^{\infty} T^j = \frac{1}{I - T}, \quad \text{se} \quad \|T\| < 1$$

segue que,

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= [A(\lambda A^{-1} - I)]^{-1}\\ &= (\lambda A^{-1} - I)^{-1}A^{-1}\\ &= A^{-1}(\lambda A^{-1} - I)^{-1}\\ &= A^{-1}\frac{1}{(\lambda A^{-1} - I)}\\ &= -A^{-1}\frac{1}{(I - \lambda A^{-1})}\\ &= -A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j,\end{aligned}$$

se, $0 < \|\lambda A^{-1}\|_{\mathcal{H}} < 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \Big\| - A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\Big\|\\ &\leq \|A^{-1}\|\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\Big\|\\ &\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})^j\|\\ &\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})\|^j, \quad se \quad 0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \;\; \text{desde que} \quad 0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1.$$

Note que,

$$0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \|A^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda|}, \quad para \quad \lambda \neq 0.$$

Assim, se $\lambda > 0$ temos que

$$0 < \lambda\|A^{-1}\| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Considerando o caso em que $\lambda \in \mathbb{R}^*$, teríamos

$$0 < |\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}. \tag{1.20}$$

Desse modo, como $\overline{D(A)} = H$, A é dissipativo e $(\lambda I - A)$ é bijetivo sobre a condição (1.20), então pelo Teorema de Lumer-Phillips, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração.

■

Teorema 1.20. *Seja X um espaço de Banach e A um operador fechado não limitado e sobrejetor de X. Se o domínio de A tem imersão compacta em X, então a inversa de A é um operador compacto.*

Demonstração: Para a prova ver Alvercio [8] ou Pazy [27]. ■

Capítulo 2

Soluções para Equação da Onda

Neste capítulo, vamos provar a existência e unicidade de solução forte para a equação da onda linear, onde as condições iniciais são funções suaves. Para tanto, empregaremos o *método de Faedo-Galerkin*, que consiste em aproximar a solução que desejamos encontrar por uma sequência de soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita.
No que segue, assumimos que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 com fronteira Γ. Seja $\Gamma = \partial\Omega$ e consideremos $Q = \Omega \times (0, T)$ um domínio cilíndrico de $\mathbb{R}^{n+1}$, com T > 0 um número real.

2.1 Solução Forte para Equação da Onda

Esta seção é dedicada para resolver o seguinte problema de valor limitado. Dados

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \phi^1 \in H_0^1(\Omega) \text{ e } f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

encontrar um função real $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = f \quad q.s \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi'(x,0) = \phi^1(x) \text{ sobre } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Usaremos a notação ϕ' para representar $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ e $\phi(t)$ é a função $\phi(t) : X \longrightarrow \phi(x, t)$. Consequentemente $\phi(x, 0)$ pode ser escrita como $\phi(0)$. Assim, a condição inicial é $\phi(0) = \phi^0$ e $\phi'(0) = \phi^1$.
O seguinte Teorema resolve o problema.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade). *Considerando* $\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, *então existe única função* $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\begin{aligned}
&\phi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\phi'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi'' - \Delta\phi = f \quad q.s \quad em \quad Q,\\
&\phi(\cdot,0) = \phi^0 \quad e \quad \phi'(\cdot,0) = \phi^1.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Demonstração: Para provar a existência de solução usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita.

2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas.

3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

   Para provar a unicidade, usaremos o método da energia.

Problema Aproximado: Consideremos $\{w_j\}_j$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, formada pelos autovetores do operador $-\Delta$, ou seja, cada vetor w_j é solução do problema espectral:

$$((w_j,v)) = \lambda_j(w_j,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A existência desta base é garantida pelo Teorema Espectral em Análise Espectral - Manuel Milla Miranda [23]. Seja $V_m = [w_1,w_2,\ldots,w_m]$ o subespaço m-dimensional do espaço $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, gerador pelos m primeiros vetores da base $\{w_j\}_j$. O problema aproximado consiste em encontrar funções $\phi_m(t) \in V_m$, tais que

$$\phi_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x),$$

onde os $g_{jm}(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left|\begin{aligned}
&(\phi_m''(t),v) + ((\phi_m(t),v)) = (f(t),v) \quad \forall v \in V_m,\\
&\phi_m(0) = \phi_m^0 \longrightarrow \phi^0 \quad em \quad H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\
&\phi_m'(0) = \phi_m^1 \longrightarrow \phi^1 \quad em \quad H_0^1(\Omega).
\end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

As convergências acima têm sentido, pois o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de V_m é denso em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Pelo Teorema de Caratheodory A.1, o sistema (2.3) tem solução no intervalo $[0,t_m]$, com $t_m < T$ (Ver Apêndice) e, essa solução, pode ser estendida a todo intervalo $[0,T]$ como consequência das estimativas a priori que veremos a seguir.

Primeira Estimativa a Priori: Considere $v = 2\phi'_m(t)$ em (2.3), obtemos:

$$(\phi''_m(t), 2\phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), 2\phi'_m(t))) = (f(t), \phi'_m(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|\phi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\phi_m(t)\|^2 = (f(t), 2\phi'_m(t)).$$

Integrando de 0 a t, obtemos:

$$|\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 = |\phi^1_m|^2 + \|\phi^0_m\|^2 + \int_0^t (f(s), 2\phi'_m(s))ds. \tag{2.4}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^t (f(s), 2\phi'_m(s))ds &\leq \int_0^t |(f(s), 2\phi'_m(t))|ds \leq 2\int_0^t |f(s)||\phi'_m(t)|ds \\ &\leq 2\left(\int_0^t |f(s)|ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds\right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^t |f(s)|ds + \int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds.\end{aligned}$$

Substituindo essa última desigualdade em (2.4), segue que:

$$|\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \leq |\phi^1_m|^2 + \|\phi^0_m\|^2 + \int_0^T |f(s)|ds + \int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds.$$

A partir desta última desigualdade, usando a hipótese sobre f e devido as convergências dos dados iniciais, resulta

$$|\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \leq C + \int_0^T |f(s)|\left(|\phi'_m(s)|^2 + \|\phi_m(s)\|^2\right) ds, \tag{2.5}$$

onde C independe de m e t. Aplicando o Lema de Gronwall em (2.5), resulta que

$$|\phi'_m(t)| + \|\phi_m(t)\|^2 \leq C \text{ para } 0 \leq t \leq T, \tag{2.6}$$

onde C_1 independe de m e t. Logo, pelo Teorema de Caratheodory A.1, obtemos solução u_m no intervalo $[0, t_m), t_m < T$. Por uma consequência das estimativas a priori e utilizando o Teorema do Prolongamento A.2, podemos estender a solução para todo o intervalo $[0, T]$ (ver Apêndice).

Segunda Estimativa a Priori: Pela escolha de $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, segue que $-\Delta\phi'_m(t) \in V_m$. Assim, podemos fazer $v = -2\Delta\phi'_m(t)$ em (2.3), e daí obtemos:

$$(\phi''_m(t), -2\Delta\phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), -2\Delta\phi'_m(t))) = (f(t), -2\Delta\phi'_m(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\|\phi'_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}|\Delta\phi_m(t)|^2 = 2((f(t), \phi'_m(t)). \tag{2.7}$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, segue

$$\|\phi_m'(t)\|^2+|\Delta\phi_m(t)|^2= \|\phi_m^1\|^2+|\Delta\phi_m^0|^2+2\int_0^t ((f(s),\phi_m'(s)))ds. \tag{2.8}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, temos:

$$\begin{aligned} 2\int_0^t ((f(s),\phi_m'(s)))ds &\leq 2\int_0^t |((f(s),\phi_m'(s)))|ds \leq 2\int_0^t \|f(s)\|\|\phi_m'(s)\|ds \\ &\leq 2\left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|f(s)\|\|\phi_m'(s)\|^2ds\right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^T \|f(s)\|ds + \int_0^t \|f(s)\|\|\phi_m'(s)\|^2ds. \end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade em (2.8), levando em conta a hipótese sobre f e as condições iniciais, segue que:

$$\begin{aligned} \|\phi_m'(t)\|^2+|\Delta\phi_m(t)|^2 &\leq |\nabla\phi_m^1|^2+|\Delta\phi_m^0|^2+\int_0^T \|f(s)\|ds + \int_0^t \|f(s)\|\|\phi_m'(s)\|^2ds \\ &\leq C + \int_0^t \|f(s)\|\|\phi_m'(s)\|^2ds. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos:

$$\|\phi_m'(t)\|^2+|\Delta\phi_m(t)|^2< C, \quad para \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.9}$$

onde $C > 0$ independe de m e t.

Passagem ao limite: Por (2.6) e (2.9) obtemos:

$$(\phi_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.10}$$

$$(\phi_m') \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.11}$$

$$(\Delta\phi_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.12}$$

Portanto, por uma consequência do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki 1.5 podemos extrair subsequências $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ainda denotada por $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \tag{2.13}$$

$$\phi_m' \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.14}$$

$$\Delta\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \beta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

Mostraremos agora que $\alpha = \phi'$ e $\beta = \Delta\phi$. De fato, por (2.13) temos que $\phi_m \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e, como o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta

$$\phi_m' \longrightarrow \phi' \text{ em } \mathcal{D}'(Q), \tag{2.16}$$

$$\Delta\phi_m \longrightarrow \Delta\phi \text{ em } \mathcal{D}'(Q), \tag{2.17}$$

Logo, pela unicidade do limite, temos que

$$\phi'_m \longrightarrow \phi' \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$\Delta\phi_m \longrightarrow \Delta\phi \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Consideremos no problema aproximado $v \in \mathcal{D}(\Omega)$e, em seguida, multiplicamos a equação $(2.3)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integramos de 0 a T, para obter:

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(s), v)\theta(s)ds, \tag{2.20}$$

note que,

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi'_m(t), v)\theta(t)dt = -\int_0^T (\phi'_m(t), v)\theta'(t)dt,$$

pela convergência de (2.18) temos,

$$-\int_0^T (\phi'_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (\phi'(t), v)\phi'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi'(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.21}$$

Temos por (2.19) que

$$-\int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (\Delta\phi(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.22}$$

Logo, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.20) e usando (2.21) e (2.22), obtemos

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\theta'(t)dt - \int_0^T (\Delta\phi(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(s), v)\theta(s)ds. \tag{2.23}$$

Seja $\beta(x,t) = v(x)\theta(t) \in \mathcal{D}(Q)$, portanto

$$-\int_0^T \int_\Omega \phi'(x,t)\beta'(x,t)dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(x,t)\beta(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,s)\beta(x,s)dxds,$$

e, assim,

$$\langle \phi'', \beta \rangle_{\mathcal{D}(Q),\mathcal{D}(Q)} = \int_Q (f(x,s) + \Delta\phi(x,s))\beta(x,s)dxds.$$

Desta forma, a distribuição ϕ'' é definida por $f + \Delta\phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ e

$$\int_Q [\phi''(x,s) - \Delta\phi(x,s) - f(x,s)]\,\beta(x,s)dxds = 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}(Q). \tag{2.24}$$

Logo, pelo Lema de Du Bois Reymond 1.1 , segue que

$$\phi'' - \Delta\phi = f \ q.s \text{ em } Q,$$

o que prova a existência do Teorema.

Condições Iniciais:

- $\phi(0) = \phi^0$.

Desde que $\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $\phi' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ (ver L. A. Medeiros e M. M. Miranda [22]), então $\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Assim, faz sentido calcular $\phi(\cdot, 0)$. Segue de (2.19) que

$$\int_0^T (\phi_m'(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi'(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\phi_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.25}$$

Integrando por partes, temos

$$-(\phi_m^0, v) - \int_0^T (\phi_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow -(\phi(0), v) - \int_0^T (\phi(t), v)\theta'(t)dt. \tag{2.26}$$

Pela convergência de ϕ_m, temos

$$\int_0^T (\phi_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi(t), v)\theta'(t)dt,$$

concluímos de (2.26), que

$$(\phi_m^0, v) \longrightarrow (\phi(0), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, segue de $(2.20)_2$ que

$$(\phi_m^0, v) \longrightarrow (\phi^0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, podemos concluir que $\phi^0 = \phi(0)$, pois $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

- $\phi'(0) = \phi^1$.

Como $\phi' \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ e $\phi'' \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$, então temos que $\phi' \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$, (ver L. A. Medeiros e M. M. Miranda [22]), fazendo sentido calcular $\phi'(\cdot, 0)$. Multiplicando $(2.3)_1$ por $\theta_\delta \in H^1(0,T)$, definida por

$$\theta_\delta(t) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{-t}{\delta} + 1, & se \quad 0 \le t \le \delta, \\ 0 & , se \quad \delta \le t \le T. \end{array} \right.$$

e integrando de 0 a T obtemos:

$$\int_0^T (\phi_m''(t), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (-\Delta\phi_m(t), v)\theta_\delta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta_\delta(t)dt.$$

Integrando por partes a primeira integral,

$$-(\phi_m^1,v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(\phi_m'(t),v)dt-\int_0^\delta(-\Delta\phi_m(t),v)\theta_\delta(t)dt=\int_0^\delta(f(t),v)\theta_\delta(t)dt.$$

Fazendo $m\longrightarrow\infty$ na última igualdade e observando as convergências $(2.3)_3$, (2.13), (2.14), (2.15), temos

$$-(\phi^1,v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(\phi'(t),v)dt-\int_0^\delta(-\Delta\phi(t),v)\theta_\delta(t)dt=\int_0^\delta(f(t),v)\theta_\delta(t)dt. \tag{2.27}$$

Fazendo agora, $\delta\longrightarrow 0$ em (2.27), concluímos que

$$-(\phi^1,v)+(\phi'(0),v)=(-\phi^1+\phi'(0),v)=0,\quad \forall v\in L^2(\Omega),$$

ou seja, $\phi^1=\phi'(0)$.

Unicidade: Para provar a unicidade, Seja $\phi,\hat{\phi}$ duas soluções nas condições do Teorema 2.1. Segue que $\zeta=\phi-\hat{\phi}$ é solução de $\zeta''-\Delta\zeta=0$ q. s. em Q, $\zeta(0)=0$ e $\zeta'(0)=0$. Desde que (2.14), $\zeta'\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ faz sentido a integral

$$\int_\Omega\zeta''\zeta'dx-\int_\Omega\Delta\zeta\zeta'dx=0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(|\zeta'(t)|^2+\|\zeta(t)\|^2\right)=0,$$

o que implica $\zeta=0$ sobre Q.

A solução ϕ obtida no Teorema 2.1 é chamada de **solução forte** do problema misto (2.1), ou para equação da onda linear.

■

Teorema 2.2 **(Desigualdade da Energia).** *Se ϕ é uma solução forte, então temos a desigualdade da energia*

$$|\nabla\phi'(t)|+|\Delta\phi(t)|^2\leq|\nabla\phi^1|^2+|\Delta\phi^0|^2+2\int_0^t(\nabla f(s),\nabla\phi'(s))ds. \tag{2.28}$$

Demonstração: tomando $v=-\Delta\phi_m'(t)\in V_m$ na equação aproximada, obtemos

$$|\nabla\phi_m'(t)|^2+|\Delta\phi_m(t)|^2=|\nabla\phi_m^1|^2+|\Delta\phi_m^0|^2+2\int_0^t(\nabla f(s),\nabla\phi_m'(s))ds. \tag{2.29}$$

Seja $\theta>0$ uma função teste sobre $(0,T)$. Em (2.29) tome $m=\mu$, multiplique ambos os membros por θ e integrando sobre $(0,T)$. Obtemos:

$$\int_0^T |\nabla\phi'_\mu(t)|^2\theta(t)dt + \int_0^T |\Delta\phi_\mu(t)|^2\theta(t)dt = \int_0^T |\nabla\phi^1_\mu|^2\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T |\Delta\phi^0_\mu|^2\theta(t)dt + 2\int_0^T \theta(t)\int_0^t (\nabla f(s), \nabla\phi'_\mu(s))dsdt. \tag{2.30}$$

Pelas convergências (2.13), (2.14) e da semicontinuidade por baixo da norma com respeito a convergência fraca, temos:

$$\int_0^T |\nabla\phi'(t)|^2\theta(t)dt \leq \liminf_\mu \int_0^T |\nabla\phi'_\mu(t)|^2\theta(t)dt, \tag{2.31}$$

$$\int_0^T |\Delta\phi(t)|^2\theta(t)dt \leq \liminf_\mu \int_0^T |\Delta\phi_\mu(t)|^2\theta(t)dt, \tag{2.32}$$

tomando o limite inferior em ambos os membros de (2.30), tomando conta de (2.31) e (2.32) e notando que

$$\liminf u + \liminf v \leq \liminf(u+v),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^T |\nabla\phi'(t)|^2\theta(t)dt + \int_0^T |\Delta\phi(t)|^2\theta(t)dt \leq \\ &\int_0^T |\nabla\phi^1|^2\theta(t)dt + \int_0^T |\Delta\phi^0|^2\theta(t)dt + \\ &+2\int_0^T \left(\int_0^t (\nabla f(s), \nabla\phi'(s))\right)\theta(t)dt. \end{aligned} \tag{2.33}$$

■

Observação 2.1. *Seja $v \in L^1(0,T)$. Dizemos que $s \in (0,T)$ é um* **ponto de Lebesgue** *de v, se para $h > 0$ tal que $(s-h, s+h) \subset (0,T)$ então*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} v(\xi)d\xi = v(s).$$

Demonstração: É provado que se $v \in L^1(0,T)$, então quase todos os pontos s de $(0,T)$ são pontos de Lebesgue de v. Voltando para (2.33) observe que as funções nos integrando de (2.33) são $L^1(0,T)$. Se $s \in (0,T)$, vamos considerar a função teste $\theta_h(t) = \theta(t)$ sobre $(s-h, s+h) \subset (0,T)$ e zero no complementar. Então, θ_h é permitida em (2.33). Substituindo θ por θ_h em (2.33), dividindo em ambos lados por $2h$ e fazendo $h \to 0$ obtemos, para $t \in [0,T]$, pois $\theta > 0$:

$$|\nabla\phi'(t)|^2 + |\Delta\phi(t)|^2 \leq |\nabla\phi^1|^2 + |\Delta\phi^0|^2 + 2\int_0^t (\nabla f(s), \nabla\phi'(s))ds \tag{2.34}$$

quase sempre em $(0,T)$. Antes de provar outra forma da desigualdade de energia (2.34) provemos uma desigualdade do tipo Grownall. ■

Lema 2.1. *Seja* $m \in L^1(0,T,\mathbb{R})$ *tal que* $m \geq 0$ *quase sempre em* $(0,T)$ *e* $a > 0$ *uma constante real. Suponha* $g \in L^\infty(0,T)$*,* $g \geq 0$ *sobre* $(0,T)$ *verificando a desigualdade:*

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds,$$

para todo $t \in (0,T)$*. Então,*

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \ \ em \ \ (0,T).$$

Demonstração: Para $\epsilon > 0$ vamos considerar a função $\psi_\epsilon > 0$ em $[0,T]$ definida por:

$$\psi_\epsilon(t) = 2(a+\epsilon)^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\psi_\epsilon(t) = 2m(t)g(t),$$

temos que $\dfrac{1}{2}g^2 \leq \psi_\epsilon$ ou $g(t) \leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\epsilon(t)}$. Desde que ψ_ϵ é absolutamente contínua e $\psi_\epsilon(t) \geq 2\epsilon^2$, temos

$$\frac{d}{dt}\psi_\epsilon(t)^{1/2} = \frac{1}{2\psi_\epsilon(t)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\psi_\epsilon(t)}{dt} \leq \sqrt{2}m(t),$$

integrando esta desigualdade de 0 a t, obtemos

$$\psi_\epsilon(t)^{1/2} \leq \psi_\epsilon(0)^{1/2} + \sqrt{2}\int_0^t m(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

desde que $g(t) \leq \sqrt{2}\psi_\epsilon(t)^{1/2}, 0 \leq t \leq T$, obtemos da desigualdade acima, e com $\epsilon \to 0$,

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \text{ em } [0,T]. \tag{2.35}$$

■

Corolário 2.1. *Se* ϕ *é a solução forte do Teorema 2.1, temos a desigualdade*

$$|\nabla\phi'(t)| + |\Delta\phi(t)| \leq C\left(|\nabla\phi^1| + |\Delta\phi^0| + \int_0^t |\nabla f(s)|ds\right), \tag{2.36}$$

em $[0,T]$.

Demonstração: De fato, de (2.34) temos que

$$(|\nabla\phi'(t)| + |\Delta\phi(t)|)^2 \leq 2\left(|\nabla\phi^1| + |\Delta\phi^0|\right)^2 + 4\int_0^t |\nabla f(s)||\nabla\phi'(s)|ds.$$

Se definirmos:

$$g(t) = |\nabla\phi'(t)| + |\Delta\phi(t)|,$$

obtemos da desigualdade acima

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + \int_0^t m(s)g(s)ds,$$

onde, $\alpha = |\nabla\phi^1| + |\Delta\phi^0|$. Portanto, pelo Lema 2.1, obtemos (2.36). ■

Note que se a fronteira Γ de Ω é C^2, então a norma de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e que uma dada pelo operador Laplaciano são equivalentes, como já foi visto na introdução.
Então, obtemos de (2.36) a desigualdade:

$$\begin{aligned} &\|\phi'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \\ &\leq C\left(\|\phi^1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.1.1 Regularidade da Solução Forte

Nesta subseção será apresentada a regularidade da solução forte, cuja a prova, encontra-se em anexo.

Teorema 2.3 **(Regularidade da Solução Forte).** *A solução forte ϕ do problema (2.1) pertence à classe:*

$$\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)). \tag{2.38}$$

Demonstração: *A prova deste Teorema podemos encontrar no apêndice.*

■

2.2 Solução Fraca para Equação da Onda

Consideremos agora o problema misto da secção anterior, mais, com hipóteses mais fracas sobre as condições iniciais ϕ^0, ϕ^1.

Teorema 2.4. *Considere*

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi^1 \in L^2(\Omega) \ e \ f \in L^1(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.1}$$

então existe apenas uma única função $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:

$$\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.2}$$

$$\phi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi'(t), v) + ((\phi(t), v)) = (f(t), v), \tag{2.4}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, *para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\phi'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ e } \phi'' - \Delta\phi = f \text{ em } L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.5}$$

$$\phi(0) = \phi^0, \qquad \phi'(0) = \phi^1, \tag{2.6}$$

a função ϕ *obtida no Teorema 2.4 é chamada de* **solução fraca** *do problema misto* (2.1).

Demonstração: Provemos este Teorema aproximando a solução fraca por uma sequência de solução forte. De fato, Considere $\{\phi^0, \phi^1, f\} \in \{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), L^1(0,T;L^2(\Omega))\}$, existem sequências $(\phi_m^0), (\phi_m^1)$ e (f_m) em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)$ e $C^0([0,T];C^1(\overline{\Omega}))$ respectivamente tais que

$$\left|\begin{array}{l} \phi_m^0 \longrightarrow \phi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ \phi_m^1 \longrightarrow \phi^1 \text{ em } L^2(\Omega), \\ f_m \longrightarrow f \text{ em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Tomando ϕ_m^0, ϕ_m^1 e f dados no Teorema 2.1 do Capítulo 1, diz que existe uma função $\phi_m : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:

$$\left|\begin{array}{l} \phi_m \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ \phi_m' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \phi_m'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ (\phi_m''(t), v) + ((\phi_m(t), v)) = (f_m(t), v) \text{ em } (0,T), \quad \forall v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \phi_m'' - \Delta\phi_m = f_m \ \ q.s. \text{ em } Q, \\ \phi_m(0) = \phi_m^0, \quad \phi_m'(0) = \phi_m^1. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

O próximo passa consiste em obter estimativas precisas para ϕ_m, dada por (2.8), tal que o limite é a solução reivindicada no Teorema 2.4.

<u>**Estimativas a priori:**</u> Tomando $v = \phi_m'(t)$ em $(2.8)_4$, obtemos

$$(\phi_m''(t), \phi_m'(t)) + ((\phi_m(t), \phi_m'(t))) = (f_m(t), \phi_m'(t)), \tag{2.9}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t\|^2) = 2(f(t), \phi_m'(t)),$$

e integrando de 0 a T, obtemos:

$$|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 = |\phi_m^1|^2 + \|\phi_m^0\|^2 + 2\int_0^T (f_m(t), \phi_m'(t))dt.$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy - Scharwz, Hölder e Young, temos:

$$|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \leq |\phi_m^1|^2 + \|\phi_m^0\|^2 + \int_0^T |f_m(s)|ds + \int_0^t |f_m(s)||\phi_m'(s)|^2 ds.$$

Pelas convergências (2.7), resulta da desigualdade acima

$$|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \leq C + \int_0^t ||f_m(s)|| |\phi_m'(s)|^2 ds,$$

para todo $t \in [0, T]$. Pela desigualdade de Gronwall, temos

$$|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \leq K, \quad \forall t \in [0, T], \tag{2.10}$$

onde $K > 0$ independe de m e t. Assim,

$$(\phi_m) \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.11}$$

$$(\phi_m') \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.12}$$

Daí, como os espaços são reflexivos, como as sequências são limitadas, segue que existe subsequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a qual ainda será denotada da mesma forma, tal que

$$\left| \begin{array}{l} \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \phi_n' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Passagem ao Limite: Multiplicando ambos os lados de (2.9) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando por partes, obtemos:

$$-\int_0^T (\phi_n'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\phi_n(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_n(t), v)\theta(t)dt, \tag{2.14}$$

usando as convergências (2.13), obtemos

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\phi(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \ e \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\langle (\phi'(t), v), \theta'(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle ((\phi(t), v)), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle (f(t), v), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\phi'(t), v) + ((\phi(t), v)) - (f(t), v), \theta(t) \right\rangle = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \ e \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(\phi'(t), v) + ((\phi(t), v)) = (f(t), v) \ \ em \ \ \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando, em particular, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\langle \phi'', v \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta\phi, v \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \tag{2.15}$$

ou seja,

$$\langle \phi'' - \Delta\phi - f, v \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,

$$\phi'' - \Delta\phi = f \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.16}$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ e $\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$, então $\Delta\phi \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Assim,

$$\phi'' = f + \Delta\phi \in L^1(0,T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)) \subset L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Portanto,

$$\phi'' - \Delta\phi = f \text{ em } L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.17}$$

Para completar a prov, precisamos verificar as condições iniciais e a unicidade.

Condições Iniciais: No que segue, mostraremos as condições iniciais.

• $\phi(0) = \phi^0$. De fato, temos que

$$\phi_m(t) = \phi_m(0) + \int_0^t \phi_m'(s)ds. \tag{2.18}$$

Tomando a norma em $L^2(\Omega)$ em ambos os lados de (2.18), obtemos

$$\phi_m \text{ limitada em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Então, existe uma subsequência de $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_0^T (\phi_\nu(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi(t), v)\theta'(t)dt, \tag{2.20}$$

para todo $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De $(2.13)_2$ temos

$$\int_0^T (\phi_\nu'(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi'(t), v)\theta(t)dt, \tag{2.21}$$

para $\theta \in C^1([0,T]), \theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Por (2.20) e (2.21) obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(\phi_\nu(t), v)\theta\right] dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(\phi(t), v)\theta\right] dt,$$

ou $(\phi_\nu(0), v) \longrightarrow (\phi(0), v)$. Note que $\phi(0)$ faz sentido. Sabemos que $(\phi_\nu(0), v) \longrightarrow (\phi^0, v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Então $\phi(0) = \phi^0$.

• $\phi'(0) = \phi^1$. De fato, seja $\delta > 0$ e considere a função θ_δ definida por:

$$\theta_\delta(t) = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{1}{\delta} + 1 \quad se \quad 0 \le t \le \delta, \\ 0 \quad se \quad \delta < t \ge T, \end{array} \right.$$

que pertence a $H^1(0,T)$. Multiplicando ambos os lados da equação aproximada $(2.8)_4$ por $\theta_\delta(t)$ e integrando por partes obtemos:

$$-(\phi_\nu'(0),v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(\phi_\nu'(t),v)dt+\int_0^\delta((\phi_\nu(t),v))\theta_\delta dt=\int_0^\delta(f(t),v)\theta_\delta dt, \tag{2.22}$$

para a subsequência $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ obtida de (2.19). Se $\nu\to\infty$ em (2.22), temos:

$$-(\phi^1,v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(\phi'(t),v)dt+\int_0^\delta((\phi(t),v))\theta_\delta dt=\int_0^\delta(f(t),v)\theta_\delta dt. \tag{2.23}$$

Sendo $\delta\to 0$ em (2.23) obtemos $(\phi'(0),v)=(\phi^1,v)$ para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ ou seja $\phi'(0)=\phi^1$ em $H_0^1(\Omega)$.

<u>Unicidade:</u> Para provar a unicidade, sejam ϕ e $\hat{\phi}$ duas soluções fracas dadas no Teorema 2.4 . Então $w=\phi-\hat{\phi}$ é solução fraca de

$$\left|\begin{array}{l} w''-\Delta w=0 \text{ sobre } Q,\\ w=0 \text{ sobre } \Sigma,\\ w(0)=0,\quad w'(0)=0.\end{array}\right. \tag{2.24}$$

Note que $w''\in L^1(0,T,H^{-1}\Omega)$ e $w'\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, oque não permite considerar $\langle w'',w'\rangle$, dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Portanto, existe um método devido a Visik-Ladyzhenskaya em [40], que consiste em definir uma nova função ψ, de w, tal que $\psi\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e o método da energia funciona. De fato, para $0<s<T$ defina

$$\psi(t)=\left|\begin{array}{l} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma)d\sigma \text{ se } 0<t<s,\\ 0,\ \text{ se } s\le t\le T,\end{array}\right.$$

onde w é uma solução fraca de (2.24). A função $\psi\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, faz sentido a dualidade $\langle w''(t)-\Delta w(t),\psi(t)\rangle$. Assim,

$$\int_0^T\langle w''(t),\psi(t)\rangle dt+\int_0^T\langle-\Delta w(t),\psi(t)\rangle dt=0,$$

ou seja,

$$\int_0^T\langle w''(t)-\Delta w(t),\psi(t)\rangle dt=0, \tag{2.25}$$

considere

$$w_1(\xi)=\int_0^\xi w(\sigma)d\sigma,$$

portanto,

$$\psi(t)=w_1(t)-w_1(s),$$

e

$$\psi'(t) = w_1'(t) = w(t).$$

Temos,

$$\int_0^s \langle w'', \psi \rangle d\sigma = (w'(s), \psi(s)) - (w'(0), \psi(0)) - \int_0^t (w', \psi')d\sigma.$$

Desde que $\psi(s) = w'(0) = 0$, obtemos:

$$\int_0^s \langle w'', \psi \rangle d\sigma = -\frac{1}{2}|w(s)|^2, \tag{2.26}$$

de (2.25) e (2.26) resulta que

$$-\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \int_0^s ((w, \psi))d\sigma = 0. \tag{2.27}$$

Mas,

$$((w, \psi)) = ((\psi', \psi)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2,$$

então, de (2.27), segue

$$|w(s)|^2 + \|\psi(0)\|^2 = 0,$$

provando que $w(s) = 0$ para todo $s \in [0, T]$.

■

Teorema 2.5 (**Desigualdade da Energia**). *Se ϕ é a solução fraca obtida no Teorema 2.4 , então temos a seguinte desigualdade de energia:*

$$|\phi'(t)|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq |\phi^1|^2 + \|\phi^0\|^2 + 2\int_0^t (f(s), \phi'(s))ds, \tag{2.28}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Demonstração: De $(2.8)_4$ com $m = \nu$, pegando $v = \phi_\nu'(t)$ obtemos

$$|\phi_n' u(t)|^2 + \|\phi_\nu(t)\|^2 \leq |\phi_\nu^1|^2 + \|\phi_\nu^0\|^2 + 2\int_0^t (f(s), \phi_\nu'(s))ds.$$

Pelas convergências (2.13) e pelo mesmo argumento usado na prova do Teorema 2.1 do Capítulo 1, obtemos a desigualdade (2.28).

■

Corolário 2.2. *Se ϕ é a solução fraca que existe no Teorema 2.4 , temos a desigualdade:*

$$|\phi'(t)| + \|\phi(t)\| \leq C\left(|\phi^1| + \|\phi^0\| + \int_0^T |f(s)|ds\right), \tag{2.29}$$

em $[0, T]$.

Demonstração: Usando o mesmo argumento na prova do Corolário 2.1 , do Teorema 2.4 . Temos do Corolário 2.1 que

$$\|\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\leq$$

$$C\left(|\phi^1|_{L^2(\Omega)}+\|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}+\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right).$$

■

Teorema 2.6 (**Regularidade da Solução Fraca**). *A solução fraca ϕ tem a seguinte regularidade:*

$$\phi\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.30}$$

Demonstração: Seja $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ a sequência de soluções fortes que se aproxima da solução fraca ϕ. Então, se $m,n\in\mathbb{N}$ com $m>n$, temos:

$$(\phi_m''(t)-\phi_n''(t),v)+((\phi_m(t)-\phi_n(t),v))=(f_m(t)-f_n(t),v),$$

para todo $v\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, por $(2.8)_4$. Tomando $v=\phi_m'(t)-\phi_n'(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(|\phi_m'(t)-\phi_n'(t)|^2+\|\phi_m(t)-\phi_n(t)\|^2\right)\leq$$

$$\leq|f_m(t)-f_n(t)|+|f_m(t)-f_n(t)|+|\phi_m'(t)-\phi_n'(t)|^2,$$

integrando, segue que

$$|\phi_m'(t)-\phi_n'(t)|^2+\|\phi_m(t)-\phi_n(t)\|^2\leq$$

$$\leq C\left(|\phi_m^1-\phi_n^1|^2+\|\phi_m^0-\phi_n^0\|^2+\int_0^T|f_m(t)-f_n(t)|dt\right).$$

Pelas convergência (2.7) segue, da desigualdade acima que,

$$\max_{0\leq t\leq T}|\phi_m'(t)-\phi_n'(t)|\longrightarrow 0\quad,\quad m,n\to\infty,$$

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\phi_m(t)-\phi_n(t)\|\longrightarrow 0\quad,\quad m,n\to\infty.$$

Então, $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $(\phi_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Isto implica que

$$\left|\begin{array}{l}\phi_\nu\longrightarrow\xi \text{ em } C^0([0,T];H_0^1(\Omega)),\\ \phi_\nu\longrightarrow\zeta \text{ em } C^1([0,T];L^2(\Omega)),\end{array}\right. \tag{2.31}$$

segue por (2.13), que $\xi=\phi$, $\zeta=\phi'$, então temos a regularidade esperada (2.30).

■

2.2.1 Regularidade Escondida para Soluções Fraca

Nesta seção estudaremos o comportamento da derivada normal da solução fraca ϕ da fronteira Σ do cilindro Q

Consideremos X um Espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$. Se $v \in L^2(0,T;X)$ e a derivada fraca $v' \in L^2(0,T;X)$, então $v \in C^0([0,T];X)$. Então segue que faz sentido definir:

$$H_0^1(0,T;X) = \{v \in L^2(0,T;X), \quad v' \in L^2(0,T;X); \quad v(0) = v(T) = 0\},$$

com produto interno

$$((u,v))_0 = \int_0^T (u(t),v(t))dt + \int_0^T (u'(t),v'(t))dt.$$

O espaço $H_0^1(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert.

Por $\mathcal{D}(0,T;X)$ representamos o espaço de funções vetoriais $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$, com suporte compacto em $(0,T)$, infinitamente diferenciável 1com a noção usual de convergência definida por Schwartz cf, Lions [14] ou L. A. Medeiros e M. M. Miranda [23] . Representamos por $H^{-1}(0,T;X)$ o dual de $H_0^1(0,T;X)$. Temos as inclusões:

$$\mathcal{D}(0,T;X) \subset H_0^1(0,T;X) \subset L^2(0,T;X) \subset H^{-1}(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X),$$

Por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ representamos o dual de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e identificamos o $L^2(0,T;X)$ com seu dual. As inclusões acima são contínuas e cada espaço é denso no seguinte. Provemos que se $v \in L^2(0,T;X)$ então, a derivada fraca $v' \in H^{-1}(0,T;X)$ cf. Manuel Milla Miranda [21].

Quando ϕ é uma solução fraca, então $\phi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Quando $\phi'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, $-\Delta\phi = f - \phi'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Quando Γ é regular isto implica que

$$\phi \in L^1(0,T;H^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;H^2(\Omega)),$$

e a derivada normal de ϕ tem a regularidade

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) + H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)), \tag{2.32}$$

de (2.32) não resulta que $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ e seja limitada neste espaço. Provaremos, pelo método multiplicativo, que, de fato $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$ não vem da propriedade de solução fraca ϕ dada pelo Teorema 2.4, que Lions chama de **Regularidade Escondida** de $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Esta regularidade foi provada por Lions[14], em primeiro momento, em 1983.

Lema 2.2. *Seja* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *o campo vetorial normal exterior a* Γ*. Então existe um campo vetorial* $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ *tal que*

$$h_i = \nu_i \quad sobre \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração: Sabelos pelo Teorema de Imersão de Sobolev que $m > 1 + \dfrac{n}{2}$ temos $H^m(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ continuamente. O operador traço γ_0 é uma bijeção entre $H^m(\Omega)$ e $H^{\frac{1}{2}(\Gamma)}$. Portanto, se $\nu_k \in H^{m-\frac{1}{2}(\Gamma)}$ então existe $h_k \in H^m(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0 h_k = \nu_k$.

■

Lema 2.3. *Se* $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$*, então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad sobre \quad \Gamma, \tag{2.33}$$

$$|\nabla \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2, \tag{2.34}$$

Demonstração: Vamos provar (2.33), ou seja, provar que:

$$\int_\Gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \forall \quad \theta \in D(\Gamma)$$

De fato, seja $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0 \xi = \theta$. Tal que existe ξ pelo a imersão $H^m(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$ para $m > 2 + \dfrac{2}{n}$ e o Teorema do Traço. Seja $(h_k)_{1 \leq k \leq m}$ o campo de vetores do Lema 3.1. Pela fórmula de Gauss, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi h_j \xi) dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) d\Gamma. \tag{2.35}$$

A integral sobre o lado direito de (2.35) é

$$\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} h_j \xi d\Gamma,$$

porque $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} h_j \xi d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \nu_j \theta d\Gamma,$$

porque $h_j = \nu_j$ e $\xi = 0$ sobre Γ, por definição. Adicionando a desigualdade acima de $j = 1$ à $j = n$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) dx = \sum_{i=1}^n \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \upsilon_j \theta d\Gamma,$$

Pela aplicação do Lema de Gauss ao lado esquerdo, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) dx = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta \nu_j^2 d\Gamma.$$

Adicionando de $j = 1$ a $j = n$, obtemos

$$\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \theta d\Gamma,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Para provar (2.34) é suficientemente considerar

$$\nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = |\nabla \phi|^2,$$

note que o índice repetido significa somatório.

■

Lema 2.4. *Seja $(q_k)_{1 \leq k \leq n}$ um campo vetorial tal que $q_k \in C^1(\overline{\Omega})$ para $1 \leq k \leq n$. Se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de soluções forte de (2.1), então para cada $n \in \mathbb{N}$ é verdade a identidade:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_\Sigma h_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt = \left(\phi_n'(t), q_k \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T + \\ \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left[|\phi_n'(t)|^2 - |\nabla \phi_n(t)|^2 \right] dx dt + \\ + \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j} dx dt - \iint_Q f_n q_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $q_k \in C^1(\overline{\Omega})$, para $1 \leq k \leq n$.

Demonstração: Usamos a notação

$$X = \left(\phi_n'(t), q_k \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T = X = \left(\phi_n'(T), q_k \frac{\partial \phi_n(T)}{\partial x_k} \right) - X = \left(\phi_n'(0), q_k \frac{\partial \phi_n(0)}{\partial x_k} \right),$$

note que $q_k \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \in L^2(Q)$ porque ϕ_n é solução fraca. Então faz sentido multiplicar em ambos os lados de $\phi_n'' - \Delta \phi_n = f_n$, a.e. em Q, por $q_k \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_k}$ e integrar sobre Q. Resulta que:

$$\iint_Q \phi_n'' q_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt - \iint_Q \Delta \phi_n q_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt = \iint_Q f_n q_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt, \tag{2.37}$$

onde o índice duplo significa a adição sobre $1 \leq k \leq n$.

Analise de $\displaystyle\iint_Q \Delta \phi_n q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx dt.$

Para tornar fácil usaremos a notação ϕ ao invés de ϕ_n. Obtemos:

$$-\iint_Q \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx dt = -\int_0^T \int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx dt. \tag{2.38}$$

Pela Fórmula de Gauss 1.9, obtemos:

$$-\int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx = -\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Gamma + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx. \tag{2.39}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\nabla\phi\cdot\nabla\left(q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)+\\ +\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} &= \frac{1}{2}q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+\\ +\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} &= \frac{1}{2}q_k\frac{\partial}{\partial x_k}|\nabla\phi|^2+\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Por (2.40) modificando a última integral no lado direito de (2.39) obtemos

$$\begin{aligned}-\int_\Omega\Delta\phi q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dx &= -\int_\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial\nu}q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}d\Gamma+\\ +\frac{1}{2}\int_\Omega q_k\frac{\partial}{\partial x_k}|\nabla\phi|^2dx &+ \int_\Omega\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Pelo lema de Gauss, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega q_k\frac{\partial}{\partial x_k}|\nabla\phi|^2dx = \frac{1}{2}\int_\Gamma q_k|\nabla\phi|^2\nu_k d\Gamma - \frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi|^2dx.\tag{2.42}$$

Note pelo Lema 2.3 , tem-se que $|\nabla\phi|^2=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2$ e $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}=\nu_k\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Consequentemente, substituindo (2.42) em (2.41) e integrando sobre $(0,T)$, obtemos:

$$\begin{aligned}-\iint_Q\Delta\phi q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dx &= -\frac{1}{2}\iint_\Sigma q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt-\\ -\frac{1}{2}\iint_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi|^2dxdt &+ \iint_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Analise de $\displaystyle\iint_Q\phi'' q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt$

Temos que:

$$\iint_Q\phi'' q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt = \int_0^T\int_\Omega\phi'' q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt,$$

e

$$\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi'\dot{q}_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)dt = \iint_Q\phi'' q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt + \iint_Q\phi' q_k\frac{\partial\phi'}{\partial w_k}dxdt.$$

Logo,

$$\iint_Q\phi'' q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt = \left(\phi'(t)\cdot q_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\phi'^2dxdt.\tag{2.44}$$

Note que $\phi'\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$, pela regularidade da solução forte. Temos

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q_k}{2}\phi'^2\right)dx = \int_\Gamma\frac{q_k}{2}\phi'^2\nu_k d\Gamma = 0.$$

Segue da igualdade acima que:

$$-\frac{1}{2}\iint_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\phi'^2dxdt = \frac{1}{2}\iint_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\phi'^2dxdt.\tag{2.45}$$

De (2.45) obtemos (2.44):

$$\iint_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx dt = \left(\phi'(t) \cdot q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T - \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial}{\partial x_k} \phi'^2 dx dt. \tag{2.46}$$

Substituindo (2.43) e (2.46) em (2.37) obtemos (2.36), depois substituindo ϕ_n ao invés de ϕ.

■

Definimos a energia associada a ϕ_n por

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\phi_n'^2(t) + |\nabla \phi_n(t)|^2 \right) dx.$$

Se $t = 0$, temos:

$$E_n(0) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\phi_n^1|^2 + |\nabla \phi_n^0|^2 \right) dx.$$

Da desigualdade da energia, temos:

$$E_n(t) \leq C \left(E_n(0) + \int_0^T |f(s)| ds \right). \tag{2.47}$$

evidentemente a desigualdade similar é verdadeira para soluções fraca.

Como uma consequência da identidade (2.36) do Lema 3.1, obtemos uma estimativa chave para $\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}$ sobre Σ. De fato, tome $q_k = h_k$ o campo vetorial do Lema Lema 3.1. Então, de (2.36) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_\Sigma \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt &= \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \left(|\phi_n'|^2 - |\nabla \phi_n|^2 \right) dx dt + \\ &+ X + \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} dx dt - \iint_Q f_n h_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned} \tag{2.48}$$

desde que $h_k \in C^1(\overline{\Omega})$ e $f_n \in C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$, temos que

$$\frac{1}{2} \left| \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial_k} \left(|\phi_n'|^2 - |\nabla \phi_n|^2 \right) dx dt \right| \leq C E_n(t),$$

e

$$\left| \iint_Q f_n h_k \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} dx dt \right| \leq C \sum_{k=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq C E_n(t),$$

onde C representa diferentes constantes

$$\left| \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} dx dt \right| \leq C \int_\Omega |\nabla \phi_n|^2 dx \leq C E_n(t).$$

Por Schwarz e a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$ obtemos:

$$|X| \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \left(\phi_n'(t), h_k \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial x_k} \right) \right| \leq C \sup_{0 \leq t \leq T} E_n(t).$$

Então, por (2.47) a desigualdade (2.48) se torna:

$$\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C_1\left(E(0)+\int_0^T |f_n(s)|ds\right), \tag{2.49}$$

onde

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\phi^1|^2+|\nabla\phi^0|^2\right)dx. \tag{2.50}$$

De (2.49) segue que a sequência $\left(\dfrac{\partial\phi_n}{\partial\nu}\right)$ é limitada em $L^2(\Sigma)$. Então, existe uma subsequência, ainda representada da mesma forma, tal que:

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu} \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(\Sigma), \tag{2.51}$$

e

$$|\chi|_{L^2(\Sigma)} \leq \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}\right|_{L^2(\Sigma)}.$$

Escolhemos $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como a sequência de soluções forte que aproxima a solução fraca ϕ como feito na seção anterior. Então, podemos formular a regularidade escondida com o seguinte Teorema.

Teorema 2.7 (**Regularidade Escondida**). *Se ϕ é a solução fraca do problema (2.1), então temos:*

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\in L^2(\Sigma), \tag{2.52}$$

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\left(E_0+\int_0^T |f(s)|ds\right), \tag{2.53}$$

Demonstração: Para provar este Teorema, é suficiente mostrar que o limite χ obtido em (2.51) é igual a $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Então, (2.49) implica (2.52).

De fato, vamos provar que $\chi = \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Sabemos que a solução fraca ϕ é o limite fraco da solução forte aproximada $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Note que γ_1 é o traço de derivada normal. Precisamos mostrar que $\gamma_1\phi_n \rightharpoonup \gamma_1\phi$ em uma topologia que implica a convergência em $L^2(\Sigma)$.

Inicialmente, observe que:

$$-\Delta\phi_n = f_n = \phi_n'' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.54}$$

Temos $f_n\in C^0([0,T];C^1(\overline{\Omega}))$ e $\phi_n'\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Então, existe z_n, w_n em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ tal que

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w_n = f_n \text{ e } \|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\leq C|f_n|_{L^2(Q)}, \\ -\Delta z_n = \phi_n' \text{ e } \|z_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\leq C|\phi_n'|_{L^2(Q)}, \end{array}\right. \tag{2.55}$$

Por resultado de equações elípticas. Por (2.55) mudamos (2.54) obtendo:

$$-\Delta\phi_n = -\Delta w_n - (\Delta z_n)' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.56}$$

provaremos que (2.56) implica:

$$\phi_n = -w_n - z_n' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

De fato, por (2.56), para cada $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ temos:

$$-\int_0^T \Delta\phi_m \theta dx = -\int_0^T \Delta w_n \theta dx + \int_0^T \Delta z_n \theta' dt \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Sabemos que $\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, obtemos:

$$-\Delta\left(\int_0^T \phi_n \theta dt\right) = \Delta\left[-\int_0^T w_n \theta dt + \int_0^T z_n \theta' dt\right].$$

Pela unicidade do Problema de Derichlet, temos

$$\int_0^T \phi_n \theta dt = -\int_0^T w_n \theta dt + \int_0^T z_n \theta' dt \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, ou seja,

$$\phi_n = -w_n - z_n' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.57}$$

Mas, desde que $z_n \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ isto implica que $z_n' \in H^{-1}(0,T;H^2(\Omega))$ e $\gamma_1 z_n' \in H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$. Portanto,

$$\gamma_1\phi_n = -\gamma_1 w_n - \gamma_1 z_n' \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)). \tag{2.58}$$

Pela estimativa (2.49), obtemos

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \le C_1\left(\frac{1}{2}|\phi_n^1|^2 + \frac{1}{2}\|\phi_n^0\|^2 + \int_0^t |f_n(s)|^2 ds\right). \tag{2.59}$$

De maneira análoga, obtemos para $m, n \ge n_0$,

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial\nu}(\phi_m - \phi_n)\right)^2 d\Gamma dt \le C\left[|\phi_m^1 - \phi_n^1|^2 + \|\phi_m^0 - \phi_n^0\|^2 + \int_0^t |f_m(s) - f_n(s)| ds\right], \tag{2.60}$$

onde,

$$\left|\begin{array}{l} \phi_n^0 \longrightarrow \phi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ \phi_n^1 \longrightarrow \phi^1 \text{ em } L^2(\Omega), \\ f_n \longrightarrow f \text{em} L^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{array}\right.$$

com,

$$\left|\begin{array}{l}(\phi_n^0) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\\ (\phi_n^1) \subset H_0^1(\Omega),\\ (f_n) \subset C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega})).\end{array}\right.$$

Logo,

$$\left|\begin{array}{l}(\phi_n^0) \text{ é de Cauchy em } H_0^1(\Omega),\\ (\phi_n^1) \text{ é de Cauchy em } L^2(\Omega),\\ (f_n) \text{ é de Cauchy em } L^1(0,T; L^2(\Omega)).\end{array}\right. \tag{2.61}$$

Portanto, por (2.61), resulta de (2.60) que (ϕ_n) é de Cauchy em $L^2(\Sigma)$ e como $L^2(\Sigma)$ é completo, obtemos

$$\gamma_1\phi_n \longrightarrow \chi \text{ em } L^2(\Omega).$$

Mostra-se que χ independente da sequência escolhida e quando (ϕ_n) for bem regular que, $\chi = \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$, nesse caso, passando ao limite em (2.59), obtemos

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\left(\frac{1}{2}|\phi^1|^2 + \frac{1}{2}\|\phi^0\|^2 + \int_0^T |f(s)|^2 ds\right)$$

Por $(2.55)_2$, desde que ϕ_n' é limitada em $L^2(Q)$, obtemos, pelo argumento similar, uma subsequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\gamma_1 z_n \rightharpoonup \gamma_1 z \text{ em } L^2(0,T; H^{1/2}(\Gamma)), \tag{2.62}$$

provemos que

$$\gamma_1 z_n' \rightharpoonup \gamma_1 z' \text{ em } H^{-1}(0,T; H^{1/2}(\Gamma)). \tag{2.63}$$

Note que por (2.55) w e z são soluções de $\Delta w = -f$ e $\Delta z = -\phi'$ com ϕ' limite fraco de ϕ_n' onde ϕ é a solução fraca. Por $-\Delta\phi = f - \phi''$ em $\mathcal{D}'(0,T; H^{-1}(\Omega))$, obtemos $\phi = -w - z'$ e $\gamma_1\phi = -\gamma_1 w - \gamma_1 z'$ em $H^{-1}(0,T; H^{1/2}(\Gamma))$. Temos por (2.62)

$$\gamma_1\phi_n = -\gamma_1 w_n - \gamma_1 z_n' \longrightarrow -\gamma_1 w - \gamma_1 z' = \gamma_1\phi \text{ em } H^{-1}(0,T; H^{1/2}(\Gamma)),$$

ou

$$\langle\gamma_1\phi_n, v\rangle \longrightarrow \langle\gamma_1\phi, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(0,T; H^{1/2}(\Gamma)),$$

obtemos por (2.51):

$$\langle\gamma_1\phi_n, v\rangle \longrightarrow \langle\chi, v\rangle, \quad \forall v \in L^2(0,T; H^2(\Gamma)).$$

Desde que $H_0^1(0,T; H^{1/2}(\Gamma)) \subset L^2(0,T; L^2(\Gamma))$ temos $\chi = \gamma_1\phi$. ■

2.3 Solução Ultra Fraca para Equação da Onda

Nesta seção estamos interessados em estudar o problema de valor na fronteira não homogêneo:

$$\left| \begin{array}{l} z'' - \Delta z = 0 \text{ em } Q, \\ z = v \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Onde z^0, z^1 são não regulares como na seção 1 e 2. Este tipo de problema foi analisado, em primeiro momento, em Lions-Magenes [16], também cf. Lions [14]. Uma dos questionamentos é uma definição apropriada do que entendemos por soluções de (2.1). Como os dados iniciais z^0, z^1 são não regulares, definimos a solução de (2.1) pelo método chamado de **Método da Transposição**, como proposto em Lions-Magenes op. cit. Aqui seguimos um método heurístico na ordem de encontrar uma definição natural de que iremos chamar de **solução ultra fraca** como definido por Lions-Magenes Lions-Magenes [16]. De fato, multiplicando ambos os membros da equação $(2.1)_1$ por uma função $\theta = \theta(x,t), x \in \Omega, t \in (0,T)$ e integrando em Q, por partes em t.

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega z(\theta'' - \Delta\theta) dx dt + \int_\Omega z'(x,T)\theta(x,T) dx - \\ &- \int_\Omega z'(x,0)\theta'(x,0) dx - \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T) dx + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0) dx - \\ &- \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} \theta d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ainda não temos informação, a certa de $z(x,T), z'(x,T)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$. Então, escolhemos $\theta = \theta(x,t)$ tal que

$$\theta(x,T) = 0, \quad \theta'(x,T) = 0 \;\; e \;\; \theta(x,t) = 0 \;\; sobre \;\; \Sigma. \tag{2.3}$$

Logo, para esta escolha de $\theta = \theta(x,t)$, a igualdade (2.2) ocorre:

$$\langle z, \theta'' - \Delta\theta \rangle = -\langle z^0, \theta'(0) \rangle + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \nu}, v \right\rangle, \tag{2.4}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa diferentes pares de dualidade.

A definição da solução ultra fraca, pelo método da transposição, será dado como um funcional definido pela expressão (2.4). Então, veremos que é natural escolher $\theta = \theta(x,t)$ como a solução fraca do problema retrogrado:

$$\left| \begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta = f \text{ em } Q, \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Se tomarmos $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e considerarmos a mudança de variável $T-t$ ao invés de t em (2.5), então (2.5) é um caso particular do problema estudado na seção 2 para soluções fraca. Então, podemos aplicar para θ, solução fraca de (2.5), toda a conclusão das seções 2 e 3. Então, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \theta \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Pela desigualdade (2.29) da seção 2, com $\theta^0 = \theta^1 = 0$, obtemos:

$$\|\theta'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.7}$$

Pelo primeiro Teorema da Seção 3, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \\ \left\| \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Como uma consequência de (2.6) temos $\theta' \in L^2(\Omega)$, $\theta(0) \in H_0^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Então, afim de garantir que o lado direito de (2.4) faça sentido é suficiente escolher:

$$z^0 \in L^2(\Sigma), z^1 \in H^{-1}(\Omega) \text{ e } v \in L^2(\Sigma). \tag{2.9}$$

Motivado pela expressão (2.6) e pela consideração acima, para cada conjunto $\{z^0, z^1, v\}$ na classe (2.9) está bem definido a funcional S sobre $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ por

$$\langle S, f \rangle = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt, \tag{2.10}$$

para toda solução θ do problema (2.5).

Das estimativas (2.7) e $(2.8)_2$, para a solução fraca θ de (2.5), obtemos de (2.10):

$$\begin{aligned} |\langle S, f \rangle| &\leq |z^0||\theta'(0)| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\theta(0)\| + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \|v\|_{L^2(\Sigma)} \leq \\ &\leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right)\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, $S : L^1(0,T;L^2(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por (2.10), é uma forma linear que é contínua por (2.11). Segue que S, é um objeto de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, o dual topológico de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso,

$$\|S\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.12}$$

Definição 2.1. *Para* $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$*, chamamos de* **solução ultra fraca** *do problema misto não homogêneo* (2.1)*, a função* $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *satisfazendo a condição:*

$$\iint_Q zf\,dxdt = -(z^0, \theta(0)) + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \iint_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} v\,d\Gamma dt, \tag{2.13}$$

para toda $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$*, com* θ *solução do problema retrogrado* (2.5)*.*

Dizemos que a solução ultra fraca z de (2.1) é definida por transposição. Por esta razão, algumas vezes chamamos **solução por transposição** ao invés de **solução ultra fraca.**

Teorema 2.8 (**Existência e Unicidade**). *Existe apenas uma solução ultra fraca z do problema misto não homogêneo* (2.1)*. Além disso, z satisfaz:*

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.14}$$

Observação 2.2. *Note que a constante C em* (2.14) *depende apenas de $T > 0$ e o campo vetorial $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ foi definido na seção anterior.*

Demonstração: A existência é uma consequência de (2.10), (2.11) e do Teorema de representação de Riesz para objetos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. A unicidade é uma consequência do Lema de Du Bois Raymond (cf. Medeiros-Miranda).

■

Corolário 2.3. *A função linear $\{z^0, z^1, v\} \longrightarrow z$, de $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Sigma)$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ é contínua, onde z é a solução fraca de* (2.1) *com dados z^0, z^1, v.*

Na aplicação é importante saber a regularidade da solução ultra fraca como temos visto nos casos forte e fraco.

Teorema 2.9 (**Regularidade da Solução Ultra Fraca**). *A solução ultra fraca z de* (2.1) *pertence a classe:*

$$z \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)), \tag{2.15}$$

e satisfaz a estimativa:

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right), \tag{2.16}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de T e o campo vetorial $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Demonstração: Dividimos a prova em duas partes. Em primeiro momento, provemos a regularidade para z e depois para z'.

Passo 1. Recordemos, em primeiro lugar, alguns resultados de regularidade para soluções fortes. Como temos provado na seção 1, vimos que se ϕ é uma solução forte de (2.1), então

$$\phi \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap C^1([0,T];H_0^1(\Omega)), \tag{2.17}$$

e

$$\begin{aligned} &\|\phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} + \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \\ &\leq 2\left(\|\phi^1\| + \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Note que $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é equipada com a norma do operador Laplaciano. Vamos considerar o sistema (2.1) no caso regular, que é então:

$$z^0 \in H_0^1(\Omega), \quad z^1 \in L^2(\Omega) \quad e \quad v \in H_0^2(0,T; H^{3/2}(\Gamma)). \tag{2.19}$$

Lema 2.5. *Existe apenas uma solução fraca z do problema misto não homogêneo* (2.1) *quando escolhemos o dado inicial* (2.19) *e z tem a regularidade:*

$$z \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.20}$$

Além disso, essa solução fraca z é uma solução ultra fraca.

Demonstração: De fato, seja $\hat{v} \in H_0^2(0,T; H^2(\Omega))$ tal que $\hat{v} = 0$ sobre Σ. Note que $\hat{v}''$ e $\Delta\hat{v}$ são objetos de $L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Vamos considerar o problema misto:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u = -\hat{v}'' + \Delta \hat{v} \text{ em } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(0) = z^0 \text{ e } u'(0) = z^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

Desde que $-\hat{v}'' + \Delta\hat{v} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), z^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $z' \in L^2(\Omega)$, segue, por regularidade de soluções fraca, na seção 2, que a solução u de (2.21) tem a regularidade:

$$u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)),$$

por definição de solução fraca, u satisfaz:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), \psi) + ((u(t), \psi)) = (-\hat{v}'' + \Delta\hat{v}, \psi),$$

para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Então,

$$\frac{d}{dt}(u'(t) + \hat{v}'(t), \psi) + ((u(t) + \hat{v}(t), \psi)) = 0,$$

para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Temos $u + \hat{v} = v$ sobre Σ e $(u + \hat{v})(0) = z^0$ e $(u + \hat{v})'(0) = z^1$. Portanto, $z = u + \hat{v}$ é uma solução fraca do problema (2.1) com dado inicial (2.19). Consequentemente por regularidade de solução fraca temos que $z \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T] : L^2(\Omega))$ e temos a unicidade também.

Para completar a prova precisamos provar que z é também uma solução fraca de (2.1). De fato, seja $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ e considere a sequência $(f_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$, com $f_\mu \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\lim_{\mu \to \infty} f_\mu = f \text{ em } L^1(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.22}$$

Vamos considerar dois problemas retrogrado:

$$\left| \begin{array}{l} \theta_\mu'' - \Delta\theta_\mu = f_\mu \text{ em } Q, \\ \theta_\mu = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta_\mu(T) = 0, \quad \theta_\mu'(T) = 0 \text{ sobre } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.23}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta = f \text{ em } Q, \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0 \text{ sobre } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Pela regularidade de f_μ e f, segue que existe solução forte θ_μ de (2.23) e uma solução fraca θ de (2.24) e:

$$\theta_\mu \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)). \tag{2.25}$$

Assim, $\theta_\mu - \theta$ é uma solução fraca do problema homogêneo retrogrado do tipo (2.24). Quando trocamos t por $T-t$, temos, pela desigualdade da energia na seção 2 e o Teorema 2.5, (2.28) e seção 3, Teorema 2.9, regularidade escondida (2.21):

$$|\theta_\mu'(T-t) - \theta'(T-t)|^2 + \|\theta_\mu'(T-t) - \theta(T-t)\|^2 + \left\| \frac{\partial \theta_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq$$

$$\leq C \|f_\mu - f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Tomando $t = T$ e seja $\mu \to \infty$, obtemos da desigualdade passada:

$$\left| \begin{array}{l} \theta_\mu(0) \longrightarrow \theta(0) \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ \theta_\mu'(0) \longrightarrow \theta'(0) \text{ em } L^2(\Sigma), \\ \dfrac{\partial \theta_\mu}{\partial \nu} \longrightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} \text{ em } L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Mas z satisfaz a condição de regularidade (2.15), então $\Delta z \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. mas z é solução fraca de (2.1) com condição inicial (2.19), então $z'' - \Delta z \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Segue que faz sentido $\langle z'' - \Delta z, \theta_\mu \rangle$ ou $\langle z'', \theta_\mu \rangle, \langle -\Delta z, \theta_\mu \rangle$, dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Então, pela regularidade (2.25) podemos usar integração por partes e usar o argumento usado para obter a equação (2.2), mas agora não formalmente. Então temos:

$$\iint_Q z f_\mu dx dt = -(z^0, \theta_\mu'(0)) + \langle z^1, \theta_\mu(0) \rangle - \iint_\Sigma \frac{\partial \theta_\mu}{\partial \nu} v d\Gamma dt. \tag{2.27}$$

Tomando o limite em (2.27) quando $\mu \to \infty$, observando as convergências (2.26), segue que z é uma solução ultra fraca do problema não homogêneo (2.1) com dado inicial regular dado por (2.19). ■

vamos provar agora que a solução ultra fraca so prolema misto não homogêneo (2.1) esta em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$. De fato, dados $z^0 \in L^2(\Omega)$, $z^1 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$, existe sequências $(z^0_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}, (z^1_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ e $(v_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ com z^0_μ, z^1_μ e v_μ, respectivamente em $H^1_0(\Omega), L^2(\Omega)$ e $H^2_0(0,T;H^{3/2}(\Gamma))$ tal que:

$$\left| \begin{array}{l} z^0_\mu \longrightarrow z^0 \text{ em } L^2(\Omega), \\ z^1_\mu \longrightarrow z^1 \text{ em } H^{-1}(\Omega), \\ v_\mu \longrightarrow v \text{ em } L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Seja $\hat{v}_\mu \in H^1_0(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\hat{v}_\mu = v_\mu$ sobre Σ. Considere o problema misto não homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} z''_\mu - \Delta z_\mu = 0 \text{ em } Q, \\ z_\mu = v_\mu \text{ sobre } \Sigma, z_\mu(0) = z^0_\mu, \quad z^1_\mu(0) = z^1_\mu. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Pelo lema anterior segue que a solução z_μ de (2.29) está na classe:

$$z_\mu \in C^0([0,T];H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \tag{2.30}$$

e z_μ é uma solução ultra fraca do problema (2.29). Portanto, se z é uma solução ultra fraca de (2.1), segue que $z_\mu - z$ é também solução ultra fraca de (2.1) com dados $z^0_\mu - z^0, z^1_\mu - z^1$ e $v_\mu - v$. Pela estimativa (2.14) e o Teorema anterior, obtemos

$$\|z_\mu - z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(|z^0_\mu - z^0| + \|z^1_\mu - z^1|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\mu - v\|_{L^2(\Sigma)} \right).$$

Quando $\mu \to \infty$ na ultima desigualdade, obtemos por (2.28),

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu = z \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por $z_\mu \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, quando $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Passo 2. Provamos agora que $z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$. Na prova usada na seção 3, no Lema 2.4 na identidade (2.36). Provamos primeiramente o Lema a seguir e anunciamos outro lema com o resultado provado depois. Note, sobretudo, a notação

$$W^{1,1}_0(0,T;L^2(\Omega)) = \left\{ v; \quad v, \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad e \quad v(0) = v(T) = 0 \right\},$$

que é um espaço de Banach com a norma:

$$\|v\|_{W^{11}_0(0,T;L^2(\Omega))} = \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.31}$$

O dual deste espaço de Banach será representado por $W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. Para todo $f \in W^{1,1}_0(0,T;L^2(\Omega))$, temos

$$\langle z', f \rangle = -\int_0^T (z(t), f'(t))dt. \tag{2.32}$$

Então, pela desigualdade de Schwarz e (2.31), obtemos de (2.32):

$$\|z'\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.33}$$

para toda solução fraca z de (2.1).

Lema 2.6. *Para a solução fraca z de (2.1) temos*

$$z' \in W_0^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração: Se z é uma solução fraca temos $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, em particular $z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ que implica $z' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Seja $f \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ e considere a sequência $(f_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de funções $f_\mu \in H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que:

$$f_\mu \longrightarrow f \quad em \quad W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.34}$$

Temos por (2.32) e (2.33) para f_μ em vez de f e tomando o limite quando $\mu \to \infty$, temos que $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$.

■

Vamos considerar $f \in H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$. De (2.32) e a definição de solução fraca segue

$$\langle z', f\rangle = -\iint_Q zf'dxdt = (z^0, \theta'(0)) - \langle z^1, \theta(0)\rangle + \iint_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu} v d\Gamma dt, \tag{2.35}$$

para todo θ solução do problema retrogrado:

$$\left|\begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta = f' \text{ em } Q, \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0 \text{ sobre } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.36}$$

Assumimos o seguinte lema que será provado mais tarde.

Lema 2.7. *A solução θ de (2.36) satisfaz a desigualdade*

$$|\theta'(0)| + \|\theta(0)\| + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \tag{2.37}$$

para todo $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Note que a constante C que aparece em (2.37) depende apenas de T e o campo vetorial $(h_k)_{1\leq k\leq n}$. De (2.35) e o lema 2.6, obtemos:

$$|\langle z', f\rangle| \leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{-1}(\Omega) + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}\right), \tag{2.38}$$

desde que $W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$ é denso em $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que a desigualdade (2.38) é verdadeira para todo $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, consequentemente,

$$z' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.39}$$

$$\|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.40}$$

Note que (2.39) e (2.40) são verificadas para todo solução ultra fraca do problema (2.1). Agora, vamos considerar a sequência de soluções fracas de (2.1), aproximando z como em (2.28). Quando $z_\mu - z$ é também uma solução ultra fraca de (2.1) e por (2.40) obtemos:

$$\|z'_\mu - z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(|z^0_\mu - z^0| + \|z^1_\mu - z^1|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\mu - v\|_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Logo,

$$\lim_{\mu\to\infty} z'_\mu = z' \quad em \quad L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.41}$$

Note que z_μ é também solução fraca, então $z'_\mu \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e por (2.41) temos $z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

■

Demonstração: Vamos considerar o problema

$$\left|\begin{array}{l} w'' - \Delta w = f \text{ em } Q, \\ w = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0, \quad w'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.42}$$

para $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$. Segue, da regularidade de solução forte, Seção 1, primeiro Teorema, que:

$$w \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];H_0^1(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$\|w'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|w\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.44}$$

Seja $w' = \theta$. Então, θ é solução de (2.36), pois, θ verifica a equação $(2.36)_1$, $\theta(T) = w'(T) = 0$ e $\theta'(T) = w''(T) = \Delta w(T) = 0$, porque $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto,

$$|\theta'(0)| + \|\theta(0)\| = |w''(0)| + \|w'(0)\| = |\Delta w(0)| + \|w'(0)\|,$$

segue de (2.44) que:

$$|\theta'(0)| + \|\theta(0)\| \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.45}$$

Note que com (2.45), na ordem para obter a desigualdade do Lema 2.6, é suficiente estimar $\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)}$ por $\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$. Por isto, usamos a identidade (2.36) Lema 2.4, seção 3. De fato, reescrevemos isto para θ solução de (2.36). temos com $q_k = h_k$:

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = -\left(\theta(0), h_k\frac{\partial\theta(0)}{\partial x_k}\right) + \tag{2.46}$$

$$+\frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|\theta'|^2 - \|\theta\|^2\right) dxdt + \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} dxdt - \iint_Q f' h_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} dxdt.$$

Desde que $h_k\dfrac{\partial\theta}{\partial x_k} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $h_k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x_k} \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, então

$$-\iint_Q f' h_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} dxdt = \iint_Q f h_k \frac{\partial\theta'}{\partial x_k} dxdt. \tag{2.47}$$

Também, como $f = 0$ em T e $\theta' = w'' = \Delta w + f$, obtemos;

$$\iint_Q f h_k \frac{\partial\theta'}{\partial x_k} dxdt = -\iint_Q \frac{\partial}{\partial x_k}(f h_k)\theta' dxdt = \tag{2.48}$$

$$= -\iint_Q \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k \Delta w dxdt - \iint_Q \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k f dxdt - \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f\Delta w dxdt - \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f^2 dxdt.$$

Pelo mesmo argumento, temos

$$-\iint_Q \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) h_k dxdt = -\frac{1}{2}\iint_Q h_k \frac{\partial}{\partial x_k} f^2 dxdt = \frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f^2 dxdt. \tag{2.49}$$

Substituindo (2.49) em (2.48) e o resultado em (2.47), obtemos:

$$-\iint_Q f' h_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} dxdt = -\iint_Q \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) h_k \Delta w dxdt - \iint_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\right) f\Delta w dxdt - \frac{1}{2}\iint_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\right) f^2 dxdt. \tag{2.50}$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|\theta'|^2 - \|\theta\|^2\right) dxdt = \frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|\Delta w|^2 + 2f|\Delta w| + |f|^2 - \|\theta\|^2\right) dxdt. \tag{2.51}$$

Substituindo (2.50) e (2.51) em (2.46) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt &= -\left(w'(0), h_k\frac{\partial w'(0)}{\partial x_k}\right) + \\ \frac{1}{2}\iint_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\right)|\Delta w|^2 dxdt &- \frac{1}{2}\iint_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\right)\|w'\|^2 dxdt - \\ -\iint_Q \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) h_k \Delta w dxdt &+ \iint_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial w'}{\partial x_k}\frac{\partial w'}{\partial x_j} dxdt. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Aplicando a estimativa (2.44) para o lado direito de (2.52), observando que $h_k \in C^1(\overline{\Omega}), 1 \leq k \leq n$, obtemos:

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.53}$$

De (2.45) e (2.53) segue a prova do Lema 2.7.

■

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema anterior.

Corolário 2.4. *A aplicação linear* $\{z^0, z^1, v\} \longrightarrow \{z, z^1\}$ *de* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ *em* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *onde* z *é a solução ultra fraca de* (2.1), *é contínua.*

2.3.1 Representação Concreta da Solução Ultra Fraca

O ponto mais difícil nesta seção é provar que a solução ultra fraca z da seção anterior, tem o traço sobre a fronteira lateral Σ do cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$. para deixar isso claro precisamos de um operador traço apropriado que será visto em seguida.

Vamos considerar o Espaço de Hilbert

$$U = \left\{u \in L^2(\Omega); \quad \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\right\},$$

com a norma:

$$\|U\|_U^2 = |u|^2 + \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Seguindo o argumento de Lions-Magenes [16] e Lions [34], provamos que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em U. Note que por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representar a restrição para (Ω) de funções φ de $C^\infty(\mathbb{R})$ Então, se $u \in U$ tem-se um traço sobre Γ, que, podemos construir o operador linear contínuo γ_0 tal que:

$$u \in U \longrightarrow \gamma_0 u \quad \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.54}$$

tal que $\gamma_0\varphi = \varphi\Big|_\Gamma$ para todo $\varphi \in D(\overline{\Omega})$.

Seja V o espaço de Hilbert

$$V = \left\{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)); \quad \Delta v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\},$$

com a norma:

$$\|v\|_V^2 = \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Usando a densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em U, obtemos, diretamente, que o conjunto

$$\{\eta\varphi; \quad \eta \in C_0^\infty(0,T), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\},$$

é total em V. Usando (2.54) definimos γ_0 pra funções de V. Para simplificar a notação usamos o mesmo em (2.54), daí, escrevemos:

$$(\gamma_0 v)(t) = \gamma_0 v(t), \quad \forall t \in (0,T).$$

Segue de (2.54) que $\gamma_0 v \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ e

$$\gamma_0 : V \longrightarrow L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)), \tag{2.55}$$

é linear e contínua.

Vamos considerar o espaço Hilbert $H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ que é o espaço de $w \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ tal que $\dfrac{dw}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ com $w(0) = w(T) = 0$. A norma neste espaço é:

$$\|w\|_{H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} = \left\| \frac{dw}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))}.$$

O espaço Dual de $H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ é representado por $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$.

Para a função $v \in V$ definimos a aplicação $\tilde{\gamma}_0$ da seguinte maneira:

$$\langle \tilde{\gamma}_0 v', w \rangle = -\int_0^T (\gamma_0 v, w')_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)} dt, \tag{2.56}$$

para todo $w \in H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$. De (2.56) obtemos:

$$|\langle \tilde{\gamma}_0 v', w \rangle| \leq \|\gamma_0 v\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} \|w'\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))}.$$

Por definição de norma em $H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ obtemos:

$$|\langle \tilde{\gamma}_0, w \rangle| \leq \|\gamma_0 v\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma))} . \|w\|_{H_0^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))}, \tag{2.57}$$

ou

$$\|\tilde{\gamma}_0 v'\|_{H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C\|v\|_V.$$

Observamos que se $v = \eta\varphi, \eta \in C_0^\infty(0,T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, então:

$$\langle \tilde{\gamma}_0 v', w \rangle = -\int_0^T (\gamma_0(\eta\varphi)w')dt = -\int_0^T \eta(\gamma_0\varphi, w')_{L^2(\Gamma)} =$$

$$= \int_0^T \eta'(\gamma_0\varphi, w)_{L^2(\Gamma)} dt = \langle \gamma_0(\eta'\varphi), w \rangle,$$

isto é, $\tilde{\gamma}_0 v' = \gamma_0 v'$. Temos provado o seguinte.

Teorema 2.10. *A aplicação $\tilde{\gamma}_0$ definida por (2.56) toma valores em $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ e*

$$\tilde{\gamma}_0 : V \longrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)),$$

é linear e contínua.

Demonstração: Como temos visto $\tilde{\gamma}_0 v = \tilde{\gamma}_0 v'$ para $v = \eta\varphi$, com $\eta \in C_0^\infty(0,T), \varphi \in D(\overline{\Omega})$, a aplicação $\tilde{\gamma}_0$ é chamada de **aplicação traço** para funções v' com $v \in V$. ■

Agora vamos retornar a estudar o traço sobre Σ para soluções ultra fraca da seção 4, (2.1). De fato, seja $\theta \in C_0^\infty(Q)$. Então, θ é solução do problema (2.5) da seção 4, com $f = \theta'' - \Delta\theta$. Substituindo este f na expressão (2.15), obtemos:

$$\iint_Q z(\theta'' - \Delta\theta)dxdt = 0,$$

pois $\theta \in C_0^\infty(Q)$. Logo

$$\langle z'' - \Delta, \theta\rangle = 0, \quad \forall\theta \in C_0^\infty(Q),$$

consequentemente,

$$z'' - \Delta z = 0 \ \ q.s. \text{ em } Q, \tag{2.58}$$

como uma consequência de (2.58), desde $z \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, segue que

$$z'' \in C^0([0,T]; H^{-2}(\Omega)). \tag{2.59}$$

Note que $\Delta : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é linear e contínua. (Ver M. M. Miranda e L. A. Medeiros [22].)

Vamos considerar $\theta = \eta\varphi$, com $\eta \in H^2(0,T), \theta(T) = \theta'(T) = 0$ e $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Por (2.15), definição de solução fraca z de (2.1) seção 4, temos:

$$\iint_Q z(\eta''\varphi - \eta\Delta\varphi)dxdt = -(z^0, \eta'(0)\varphi) + \langle z^1, \eta(0)\varphi\rangle. \tag{2.60}$$

Integrando por partes duas vezes com respeito a t, aplicando Green e regularidade de z dada por (2.15), obtemos:

$$\iint_Q z(\eta''\varphi - \eta\Delta\varphi)dxdt = -(z(0), \eta'(0)\varphi) + \langle(z'(0), \eta(0)\varphi\rangle + \int_0^T \langle z'' - \Delta z, \eta\varphi\rangle dt. \tag{2.61}$$

Segue de (2.60), (2.61) e (2.58), que:

$$-(z^0, \eta'(0)\varphi) + \langle z', \eta(0)\varphi\rangle = (-z(0), \eta'(0)\varphi) + \langle z'(0), \eta(0)\varphi\rangle.$$

Escolhendo convenientemente $\eta(0)$ e $\eta'(0)$, obtemos

$$z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1. \tag{2.62}$$

Vamos provar agora que $\tilde{\gamma}_0 z = v$. De fato, definimos

$$y(t) = \int_0^t z(s)ds,$$

onde z é a solução ultra fraca. Então $y \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e da equação (2.58) obtemos:

$$\Delta y(t) = \Delta \int_0^t z(s)ds = \int_0^t \Delta z(s)ds = \int_0^t z''(s)ds = z'(t) - z'(0). \tag{2.63}$$

da regularidade temos $z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e segue que $\Delta y \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Assim, $y \in V$ e pelo Teorema 2.10, temos:

$$\tilde{\gamma}_0 y' = \tilde{\gamma}_0 z. \tag{2.64}$$

Seja $(z_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ a sequência de soluções do problema (2.29) na seção 4, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} z_\mu \longrightarrow z \text{ em } C^0([0,T];L^2(\Omega)), \\ z'_\mu \longrightarrow z' \text{ em } C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.65}$$

Vamos considerar

$$y_\mu(t) = \int_0^t z_\mu(s)ds.$$

Então,

$$\Delta y_\mu = z'_\mu(t) - z'_\mu(0).$$

Pelas convergências (2.65) aplicadas para y_μ, obtemos

$$y_\mu \longrightarrow y \text{ em } V.$$

Logo, pelo Teorema 2.10 e a definição de $\tilde{\gamma}_0$, temos

$$\tilde{\gamma}_0 y'_\mu = \tilde{\gamma}_0 z_\mu \longrightarrow \tilde{\gamma}_0 y' = \tilde{\gamma}_0 z \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{2.66}$$

Sabemos que $z_\mu \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, então conseguimos $\gamma_0 z_\mu \in C^1([0,T];H^{1/2}(\Gamma))$ e

$$\gamma_0 \int_0^t z_\mu(s)ds = \int_0^t (\gamma_0 z_\mu)ds.$$

Temos então que,

$$(\tilde{\gamma}_0 y_\mu, w) = -\int_0^T (\gamma_0 y_\mu, w')dt = -\int_0^T \left(\int_0^t (\gamma_0 z_\mu)(s)ds, w' \right) dt = \int_0^T (\gamma_0 z_\mu, w)dt,$$

isto é,

$$\tilde{\gamma}_0 z_\mu = \tilde{\gamma}_0 y'_\mu = \gamma_0 z_\mu. \tag{2.67}$$

Observe que

$$\gamma_0 z_\mu = v_\mu \text{ e } v_\mu \longrightarrow v \text{ em } L^2(\Sigma). \tag{2.68}$$

Como $L^2(\Sigma) = L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \subset H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ continuamente, segue de (2.66), (2.67) e (2.68) que

$$\tilde{\gamma}_0 z = v. \tag{2.69}$$

Conclusão: A solução ultra fraca z de (2.1) seção 4, foi definida pelo método de transposição em (2.15) Seção 4. A existência foi provado pela representação de Riesz da forma contínua e linear sobre $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Então, a solução ultra fraca z é identificada para um objeto de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, o dual de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Depois provamos a regularidade, isto é, $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$, como mostrado no segundo Teorema da seção 4. Na seção presente provamos que a solução ultra fraca é uma solução verdadeira, isto é, $z'' - \Delta z = 0$ q. s. em Q, cf. (2.58). $z(0) = z^0, z'(0) = z^1$ como em (2.58) e a condição inicial $z = v$ sobre Σ, cf. (2.69).

Capítulo 3

Controlabilidade Exata na Equação da Onda na Fronteira

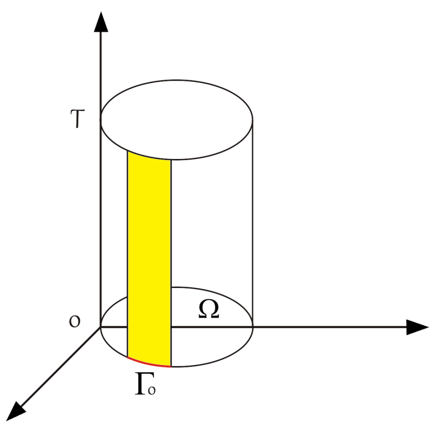
Nosso objetivo neste capítulo é obter a controlabilidade exata da equação da onda linear, com controle localizado na fronteira. Para isso aplicaremos o método HUM (ver Tome 1 [17] e A. T. Louredo, M. M. Miranda, L. A. Medeiros [20]) para fazer a controlabilidade desejada.

Considere o problema

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v, \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Antes de continuar, segue algumas notações que iremos usar:

- $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$.
- $\Gamma = \partial\Omega$ é a fronteira de Ω.
- Σ é a fronteira lateral de Q, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, $\Gamma_0 \subset \Gamma$.



A Função v é chamada de **função controle** e a solução y de (3.1), será denotada por

$$y = y(x,t,v) \text{ ou } y = y(v).$$

3.1 Problema da Controlabilidade Exata

Dado $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H, tal que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle v no conjunto de controles, tal que, a solução $y = y(x,t,v)$ de (3.1) verifica as condições de equilíbrio

$$y(x,T,v) = 0 \text{ e } y'(x,T,v) = 0, \ \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

ou

$$y(T) = 0 \text{ e } y'(T) = 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Vamos considerar Γ_0 uma parte de Γ com $med(\Gamma_0) > 0$ e $\overline{\Gamma_0} \cap (\Gamma - \Gamma_0) = \varnothing$ e considerar a ação do seguinte tipo

$$y = \left| \begin{array}{l} v \text{ sobre } \Sigma_0, \\ 0, \ \text{sobre } \Sigma - \Sigma_0. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Observação 3.1. *A equação da onda é reversível no tempo, pois se $u(t)$ satisfaz o Problema (3.1), então, $u(-t)$ também satisfaz o Problema (3.1).*

3.2 Formulação da Controlabilidade Exata

Dado $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle v pertencentes ao espaço de controle definido sobre Σ_0, tal que a solução $y = y(x,t,v)$ de (3.1) satisfaz a condição de equilíbrio (3.1).

O sistema (3.1) é hiperbólico. Em consequência da velocidade de propagação da onda ser finita (neste caso $= 1$) e por conseguinte, a controlabilidade exata do sistema exige que o tempo $T > 0$ seja suficientemente grande, caso contrário, se T for tomado pequeno, porque a velocidade de propagação é finita, nenhuma ação sobre a fronteira lateral Σ do sistema é cobrada nos pontos de Ω que estão longe de Γ.

Considerando agora o exemplo do domínio $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$, suponhamos que $T < R$, e daí, $T < R - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Se $y = y(v)$ é a solução do sistema (3.1), o valor de y na região:

$$K = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); \ \ |x| < (T-t) + \epsilon\},$$

depende unicamente dos dados iniciais na bola

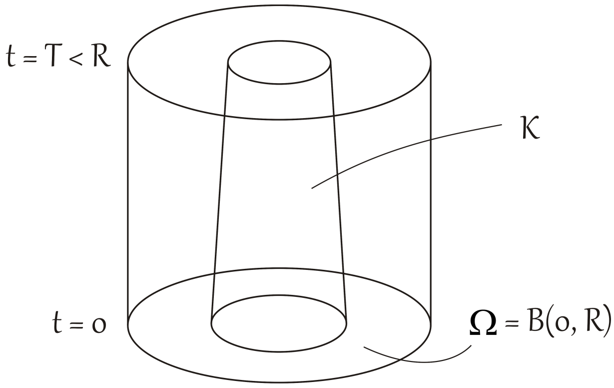
$$B(0, T + \epsilon) \subset B(0, R).$$

Portanto, a solução $y = y(v)$ não depende do controle de v. Logo, $y(v)\big|_K$ é independente de v, pois $y(v)\big|_K$ só depende dos dados iniciais.

Observação 3.2. *Recorde que a solução clássica $u = u(x,t)$ do Problema (3.1) é dado por:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds.$$

Por conseguinte, a controlabilidade do sistema exige que $T > R$.



Observação 3.3. *Devido a linearidade e a reversibilidade no tempo da equação da onda o problema de* ***controlabilidade exata*** *na fronteira pode ser formulado da seguinte forma:*

Dado $T > 0$ suficientemente grande, encontrar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados $\{y^0, y^1\}$ e $\{z^0, z^1\}$ em H exista um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que, a solução $y = y(x,t,v)$ de $(3.1)_{1,2}$ e (3.2) satisfaz a condição:

$$y(x,T,v) = z^0, \quad y'(x,T,v) = z^1, \tag{3.1}$$

em outras palavras, mostrar que todo estado inicial pode ser levado (ou dirigido) ao equilíbrio

$$y(x,T,v) = 0, \quad y'(x,T,v) = 0, \tag{3.2}$$

é equivalente a mostrar que todo estado inicial pode ser dirigido ao estado final.

De fato, consideremos o problema

$$\left|\begin{array}{l} z'' - \Delta z = 0, \text{ em } Q, \\ z = 0 \text{ em } \Sigma, \\ z(T) = z^0, \; z'(T) = z^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

o problema (3.3) tem única solução forte "z". Ver Capítulo 2.

Seja $w = y - z$. Note que, y é solução do problema (3.1) se, e somente se:

$$\left|\begin{array}{l} w'' - \Delta w = (y-z)'' - \Delta(y-z) = y'' - z'' - \Delta y + \Delta z \\ \qquad\qquad\quad = (y'' - \Delta y) - (z'' - \Delta z) = 0, \\ w = 0 \text{ em } \Sigma, \\ w(0) = y_0 - z(0) = y^0 - z(0), \\ w'(0) = y'(0) - z'(0) = y^1 - z'(0). \end{array}\right.$$

Portanto, temos o seguinte problema:

$$\left|\begin{array}{l} w'' - \Delta w = 0 \text{ em } Q, \\ w = 0 \text{ em } \Sigma, \\ w(0) = y^0 - z(0), \\ w'(0) = y^1 - z'(0). \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Observação 3.4. *Note que*

$$y(x,T,v) = z^0 \;\; e \;\; y'(x,T,v) = z^1,$$

se, e somente se

$$w(x,T,v) = y(x,T,v) - z(x,T,v) = z^0 - z^0 = 0,$$

e

$$w'(x,T,v) = y'(x,T,v) - z'(x,T,v) = z^1 - z^1 = 0.$$

Portanto, como $y^0 - z(0)$ *e* $y^1 - z'(0)$ *estão em* H*, existe um controle* $v \in L^2(\Sigma_0)$*, tal que, a solução do problema* (3.4)*, satisfaz a condição*

$$w = w(x,T,v) = 0 \;\; e \;\; w'(x,T,v) = 0,$$

ou

$$w(T) = 0 \;\; e \;\; w'(T) = 0.$$

Logo, a solução $y = y(x,T,v)$ *de* $(3.1)_{1,2}$ *e* (3.2) *satisfaz a condição*

$$y(x,T,v) = z^0 \;\; e \;\; y'(x,T,v) = z^1.$$

Teorema 3.1 (Holmgren). *Seja* $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$*. Então, toda solução fraca* ϕ *do problema*

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \;\; em \;\; Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \;\; sobre \;\; \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \;\; \phi'(0) = \phi^1 \;\; em \;\; \Omega, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

tal que $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0$ *sobre* $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$ *verifica* $\phi = 0$.

Demonstração: A prova pode ser vista em Lions [17]. ■

Observação 3.5 (**Importante:**). *Como veremos, tanto o problema da controlabilidade exata, graças a aplicação do Método Hum se resolve obtendo estimativas a priori adequadas que permitam majorar a energia total das soluções em função de alguma energia localizada na região (interior ou na fronteira), onde se exerce a ação do controle ou do mecanismo dissipativo. Para obter estas estimativas utilizaremos técnicas multiplicativas que combinaremos com o princípio de continuação única.*

3.3 O Método Hum

A metodologia do método Hum é baseada sobre um certo critério de unicidade (Dado pelo Teorema de Holmgren) e a construção de um espaço de Hilbert H, por completude. O método toma em consideração a unicidade e a regularidade para as soluções da equação da onda.

3.3.1 Descrição do Método Hum

1º Etapa: Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, vamos considerar o seguinte problema homogêneo de valor inicial de fronteira.

$$(P_1) \left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Observação 3.6. *Sabemos que a solução forte $\phi = \phi(x,t)$ de (3.1) (ver Capítulo 2) satisfaz*

$$\gamma_1(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{3.2}$$

2ª Etapa: Resolvemos o problema não homogêneo retrogrado (Backward)

$$(P_2) \left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ \psi = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}, \text{ sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ 0, \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array} \right. \\ \psi(T) = 0, \ \psi'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Observação 3.7. *Note que (3.3) é um problema de valor e fronteira não homogêneo do tipo estudado no Capítulo 2. Para obter, a partir de (3.3), o sistema*

$$
(P_*) \quad \left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v \text{ sobre } \Sigma_0 \quad \left(v = \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \right), \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.4}
$$

é suficiente fazer a mudança de variável $T-t$ no lugar de t. Então, $\psi(T-t)$ é solução de (3.4).

De fato, considere $\tau = T-t$ e $y(\tau) = \psi(T-t)$. Note que,

$$
y'(\tau) = -\psi'(T-t), \qquad y''(\tau) = \psi''(T-t),
$$

ou seja,

$$
y'' - \Delta y = \psi'' - \Delta \psi = 0,
$$

fazendo, $\tau = 0$ então $t = T$. Logo,

$$
y(0) = \psi(T) = 0, \qquad y'(0) = -\psi'(T) = 0,
$$

e se $(x,\tau) \in \Sigma_0$

$$
y(x,T) = \psi(x,T-t) = \frac{\partial \phi}{\partial \nu},
$$

pois,

$$
\psi = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}, \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_0, \\ 0, \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{array} \right.
$$

Observação 3.8. *Estamos na situação do Capítulo 2. Consequentemente (3.3) é um problema bem posto.*

Pela Regularidade obtida no Capítulo 2, podemos calcular $\psi(0) \in L^2(\Omega)$ e $\psi'(0) \in H^{-1}(\Omega)$, pois, temos que $\psi : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ e $\psi' : [0,T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$, logo $\psi(0) \in L^2(\Omega)$ e $\psi'(0) \in H^{-1}(\Omega)$.

3.4 O operador Λ

A partir da solução ψ de (3.3), definimos a aplicação

$$
\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega),
$$

definida por,

$$
\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.
$$

Observação 3.9. *Note que a partir de $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, obtemos a solução $\phi = \phi(x,t)$ de (3.1) com a regularidade (3.2), $\left[\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)\right]$ para a derivada normal. Portanto, o problema (3.3) está bem posto, a partir do qual definimos Λ. Assim, Λ está bem definido.*

<u>**3ª Etapa:**</u> Multiplicando ambos os membros de (3.3)$_1$ por $\phi = \phi(x,t)$ solução de (3.1) e integrando em Q, obtemos:

$$\iint_Q \psi''\phi dxdt - \iint_Q \Delta\psi\phi dxdt = 0. \tag{3.1}$$

<u>**Analise da 1ª integral de (3.1)**</u> Note que

$$(\psi', \phi)' = (\psi'', \phi) + (\psi', \phi'), \tag{3.2}$$

integrando (3.2) em $[0, T]$, obtemos

$$\langle\underbrace{\psi'(T)}_{=0}, \phi(T)\rangle - \langle\psi'(0), \phi(0)\rangle = \int_0^T (\psi'', \phi)dt + \int_0^T (\psi', \phi')dt,$$

assim, sabendo que $(\psi'', \phi) = \displaystyle\int_\Omega \psi''\phi dx$, e retornando a (3.2), temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \psi''\phi dxdt = -\langle\psi'(0), \phi^0\rangle - \int_0^T (\psi', \phi')dt,$$

ou seja,

$$\int_Q \psi''\phi dxdt = -\langle\psi'(0), \phi^0\rangle - \int_0^T (\psi', \phi')dt. \tag{3.3}$$

Por outro lado, note que

$$(\psi, \phi')' = (\psi', \phi') + (\psi, \phi''). \tag{3.4}$$

Integrando (3.4) em $[0, T]$ e usando o fato que $\phi'(0) = \phi^1$ e $\phi'(T) = 0$, obtemos:

$$\int_0^T (\psi', \phi')dt + \int_0^T (\psi, \phi'')dt = (\underbrace{\psi(T)}_{=0}, \phi'(T)) - (\psi(0), \phi^1),$$

usando novamente o produto interno em (ψ, ϕ''), temos

$$\int_0^T (\psi, \phi'')dt = \int_0^T \int_\Omega \psi\phi'' dxdt = \iint_Q \psi\phi'' dxdt,$$

daí,

$$\int_0^T (\psi', \phi')dt = -(\psi(0), \phi^1) - \iint_Q \psi\phi'' dxdt, \tag{3.5}$$

substituindo (3.5) em (3.3), obtemos:

$$\iint_Q \psi''\phi dxdt = -\langle\psi'(0), \phi^0\rangle + (\psi(0), \phi^1) + \iint_Q \psi\phi'' dxdt. \tag{3.6}$$

<u>**Analise da 2ª integral de (3.1)**</u>

Usando o Teoremrea de Green 1.9, temos:

$$-\iint_Q \Delta\psi\phi dxdt = \iint_Q \nabla\psi\nabla\phi dxdt - \iint_\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\phi d\Gamma dt, \tag{3.7}$$

e

$$-\iint_Q \Delta\phi\psi dxdt = \iint_Q \nabla\phi\nabla\psi dxdt - \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma, \tag{3.8}$$

de (3.7) e (3.8) e usando o fato que $\phi = 0$ sobre Γ (pois $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$). Temos que substituindo (3.7) e (3.8) obtemos:

$$-\iint_Q \Delta\psi\phi dxdt = -\iint_Q \Delta\phi\psi dxdt + \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma, \tag{3.9}$$

adicionando (3.6) e (3.9) obtemos:

$$\iint_Q \psi''\phi dxdt - \iint_Q \Delta\psi\phi dxdt = \iint_Q \psi\phi'' dxdt - \iint_Q \Delta\phi\psi dxdt$$

$$-\langle\psi'(0), \phi^0\rangle + \langle\psi(0), \phi^1\rangle + \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \iint_Q [\psi'' - \Delta\psi]\phi dxdt &= \iint_Q [\phi'' - \Delta\phi]\psi dxdt - \langle\psi'(0), \phi^0\rangle \\ &+ \langle\psi(0), \phi^1\rangle + \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma, \end{aligned} \tag{3.10}$$

e usando os fatos que

$$\phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ e } \psi'' - \Delta\psi = 0 \quad q.s. \text{ em } Q,$$

resulta de (3.10) que

$$-\langle\psi'(0), \phi^0\rangle + \langle\psi(0), \phi^1\rangle + \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma = 0. \tag{3.11}$$

Note que

$$\psi = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ sobre } \Sigma_0, \\ 0, \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Então, observe que

$$\iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma + \iint_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma,$$

portanto, de (3.11) obtemos

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\Gamma dt = -\langle\psi(0), \phi^1\rangle + \langle\psi'(0), \phi^0\rangle. \tag{3.13}$$

Ou ainda,

$$\iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = -\langle\psi(0), \phi^1\rangle + \langle\psi'(0), \phi^0\rangle. \tag{3.14}$$

Considerando o lado direito de (3.13) como o produto interno de $\{\psi'(0), -\psi(0)\}$ com $\{\phi^0, \phi^1\}$, podemos escrever (3.13) na forma:

$$\iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle, \tag{3.15}$$

usando o fato que,

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\},$$

podemos escrever (3.15) na forma:

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{3.16}$$

Definimos em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a forma quadrática

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \left(\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt\right)^{1/2} = \left\|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)}. \tag{3.17}$$

Observação 3.10. *Onde* (3.17) *é uma seminorma. Para concluir que* (3.17) *é uma norma, necessitamos provar que* $\|\{\phi^0, \phi^1\}\| = 0$ *se, e somente se,* $\phi^0 = \phi^1 = 0$.

Seja ϕ uma solução de (3.1) com $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Então, se $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$ sobre Σ_0 resulta que $\phi = 0$ sobre Q.

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = 0 \Longrightarrow \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Sigma_0,$$

como ϕ é solução de (3.1), pelo Teorema de Holmgren 3.1 $\phi = 0$ sobre Q. Logo, $\phi(0) = 0$ e $\phi'(0) = 0$. Portanto, $\{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\}$.

Observação 3.11. *A norma em* (3.17) *induz em* $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ *o seguinte produto interno.*

$$\langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_F = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} d\Gamma dt, \tag{3.18}$$

onde $\xi = \xi(x,t)$ *é solução de* (3.1) *correspondente ao dado inicial* $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Segue da Observação anterior e de (3.16) que

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle. \tag{3.19}$$

Mostra-se sem muita dificuldade que a norma em (3.17) provem de um produto interno. Ou seja, a desigualdade do paralelogramo se verifica. Pela Desigualdade de Cauchy-Scharwz, obtemos:

$$|\langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle| \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F \|\{\xi^0, \xi^1\}\|_F. \tag{3.20}$$

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e defina

$$\begin{aligned} B : \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \{\overline{\phi}, \overline{\xi}\} &\longmapsto B(\{\overline{\phi}, \overline{\xi}\}) = \langle \overline{\phi}, \overline{\xi} \rangle_F, \end{aligned}$$

onde $\overline{\phi} = \{\phi^0, \phi^1\}, \overline{\xi} = \{\xi^0, \xi^1\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear contínua. Pois, por (3.20).

$$\|B(\{\overline{\phi}, \overline{\xi}\})\|_F = \left|\{\overline{\phi}, \overline{\xi}\}|_F\right| \leq \|\overline{\phi}\|_F \|\overline{\xi}\|_F,$$

sabendo da continuidade da forma bilinear definida por Λ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Seja

$$F := \left| \begin{array}{l} \text{é a completude de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \\ \text{com respeito a norma (3.17).} \end{array} \right.$$

Vamos considerar o complemento de $\mathcal{D}(\Omega) \times D(\Omega)$ com respeito a norma $\|\{\overline{\phi}, \overline{\xi}\}\|_F$ definido por (3.17) e representar por F este espaço de Hilbert.

Observação 3.12. *Conseguimos mostrar sem dificultada que a norma em F provém de um produto interno, ou seja, satisfaz a lei do paralelogramo. Daí, concluímos que F é de fato, um espaço de Hilbert.*

Devido a continuidade da forma bilinear

$$B(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}) = \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle,$$

temos uma extensão, por continuidade ao fecho de F.

Observação 3.13. *Continuaremos a representar a extensão com a mesma notação B, isto é, $B : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$B(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}) = \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_F,$$

é uma forma bilinear contínua sobre o espaço F a qual é coerciva e simétrica por (3.18).

Então, pelo Lema de Lax-Milgram 1.5, para cada $\{\eta^0, \eta^1\} \in F'$, existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, tal que,

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \langle \{\eta^0, \eta^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_{F' \times F}, \quad \forall \{\xi^0, \xi^1\} \in F, \tag{3.21}$$

então, para cada $\{\eta^0, \eta^1\} \in F'$, existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, o qual, é solução da equação

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\eta^0, \eta^1\} \text{ em } F', \tag{3.22}$$

a qual ocorre por (3.21). Por outro lado, veja que pela definição de Λ não é difícil ver que Λ é linear e também note que a partir de (3.22), segue-se que a aplicação $\Lambda : F \longrightarrow F'$ é sobrejetiva.

Mostraremos agora que Λ é injetiva !

Seja $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que $\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\}$ daí,

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle = \langle \{0, 0\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle,$$

ou mesmo

$$\iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_0,$$

como ϕ é solução de (3.1) pelo Teorema de Holmgren 3.1 $\phi = 0$ em Q e portanto, $\phi(0) = \phi^0 = 0$ e $\phi'(0) = \phi^1 = 0$. Logo, Λ é injetora, pois

$$\ker \Lambda = \{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\},$$

como Λ é linear e bijetiva, resulta que $\Lambda : F \longrightarrow F$ é um isomorfismo[1]. Logo, para cada $\{y^0, y^1\} \in F'$ existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{-y^1, -y^0\} \text{ em } F'. \tag{3.23}$$

Como

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \tag{3.24}$$

resulta de (3.23) e (3.24) que

$$\psi(0) = y^0 \text{ e } \psi'(0) = -y^1.$$

Considerando $\tau = T - t$ ao invés de t em $(3.3)_1$ obtemos que $z(\tau) = \psi(T - t)$ satisfaz

$$(P_Z) \quad \left| \begin{array}{l} z'' - \Delta z = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0, T) \\ z = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}, \text{ sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0, \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{array} \right. \\ z(T) = \psi(0) = y^0 \quad \text{em } \Omega, \\ z'(T) = -\psi'(0) = y^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Porém, vimos que

$$(P_y) \quad \left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = \left| \begin{array}{l} v, \text{ sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0, \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{array} \right. \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.26}$$

[1]Podemos concluir o isomorfismo de Λ, notando que sendo Λ bijetiva e contínua, pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que $\Lambda : F \longrightarrow F'$ é um isomorfismo.

Da unicidade de solução ultra fraca dos problemas (3.25) e (3.26), resulta que

$$y(x,t) = \psi(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T),$$

portanto, por $(3.3)_3$, obtemos

$$y(T) = \psi(T) = 0 \text{ e } y'(T) = \psi'(T) = 0,$$

o que desejávamos provar.

Observação 3.14. *Vimos que o operador $\Lambda : F \longrightarrow F'$ é simétrico. Então, a solução $\{\phi^0, \phi^1\}$ da equação*

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\},$$

pode ser obtida (como feito no Lema de Lax-Milgram 1.5 ver Brezis [3]) por um processo de minimização.
De fato, $\{\phi^0, \phi^1\}$ é obtido por

$$\min\left\{\frac{1}{2}\langle\Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}\rangle - \langle\{y^1, y^0\}, \{\xi^0, \xi^1\}\rangle\right\}.$$

3.5 Caracterização dos Espaços F e F' como Espaços de Sobolev

Agora faremos a caracterização dos espaços F e F' como espaços de Sobolev. Na verdade mostraremos a seguir que $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Observação 3.15. *No Capítulo 2 desse trabalho, mostrou-se que a solução fraca $\phi = \phi(x,t)$ do problema*

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \ \textit{em}\ Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \ \textit{sobre}\ \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1, \end{array} \right.$$

satisfaz a desigualdade,

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C_0 E(0) = C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Como F é o complemento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, com a norma definida pelo esquerdo de (3.1), obtemos:

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \hookrightarrow F, \tag{3.2}$$

pois,

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Precisamos mostrar que existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq \iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt, \tag{3.3}$$

se provarmos (3.3), mostramos que

$$F = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

e

$$F' = (H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

a desigualdade (3.1) dada por

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C_0 E(0),$$

é conhecida e chamada de **Desigualdade Direta** e a desigualdade (3.3) dada por

$$C_1\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq \iint_\Sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

é conhecida e chamada de **Desigualdade Inversa.**

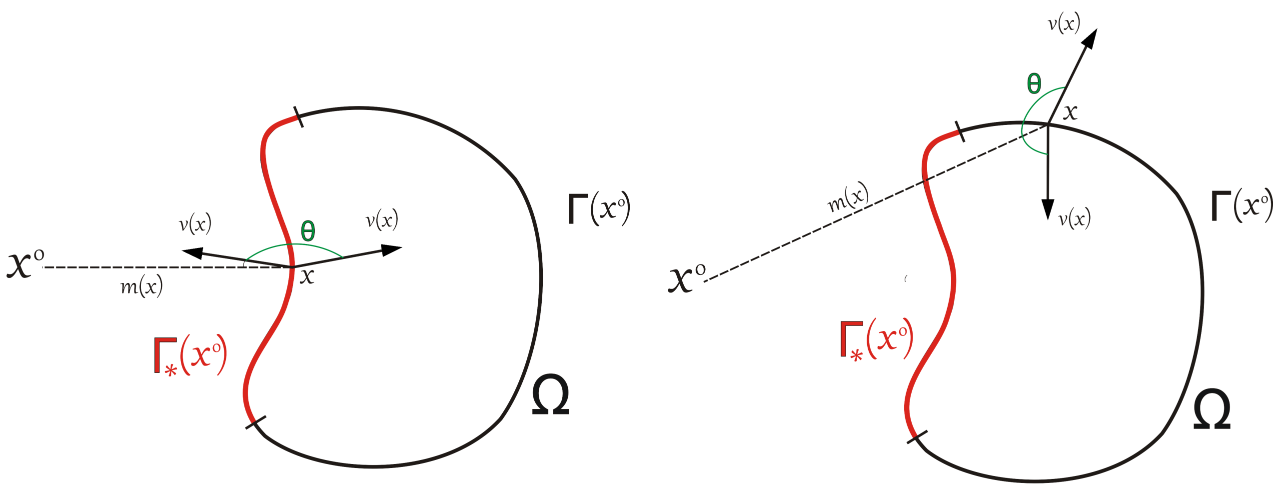
Observação 3.16. *Para completar o método HUM para o caso da ação na fronteira necessitamos provar* (3.3)*.*

3.6 Desigualdade Inversa

Antes de enunciarmos o teorema que nos garante a desigualdade inversa, fixaremos algumas notações que serão respeitadas para a conclusão da desigualdade inversa:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$,
- $m(x) = x - x^0, (x^0 \in \mathbb{R}^n)$ com componentes $m_k(x) = x_k - x_k^0$ para $1 \leq k \leq n$,
- $\Gamma = \partial\Omega$,
- $\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\}$,
- $\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) \leq 0\}$,
- $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0)\times(0,T), \quad \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0)\times(0,T)$,
- $R(x^0) = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|x - x^0\| = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.

As figuras 3.1, ilustra as seguintes situações:



(3.1)

Observação 3.17. *Recorde que* $\cos\theta = \dfrac{m(x)\cdot\nu(x)}{\|m(x)\|.\|\nu(x)\|}$. *Daí,* $m(x)\cdot\nu(x) = \|m(x)\|\cos\theta$.

Teorema 3.2. *Considere* $T(x^0) = 2R(x^0)$. *Se* $T > T(x^0)$. *Então:*

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{R(x^0)}{T - T(x^0)} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

para toda solução forte $\phi = \phi(x,t)$ *do problema*

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \ \ em\ Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \ \ sobre\ \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \ em\ \Omega. \end{array}\right.$$

Demonstração: Para complementação do argumento, reescrevendo a identidade do Lema 2.4 do Capítulo 2. Temos que, para todo campo de vetores $q = (q_k)_{1\leq k\leq n}$ com $q_k \in C^1(\overline{\Omega}), 1 \leq k \leq n$ e toda solução forte ϕ do problema acima. Temos a identidade:

$$\frac{1}{2}\iint_{\Sigma} q_k \cdot \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T + \tag{3.2}$$

$$+\frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt + \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} dxdt,$$

escolha $q_k(x) = x_k - x_k^0$ para $1 \leq k \leq n$. Então,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = n \ \ e \ \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = |\nabla\phi|^2, \tag{3.3}$$

com esta escolha para q_k. Assim, passando o somatório em (3.2) e usando (3.3), podemos escrever:

$$X + \frac{n}{2}\iint_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt + \iint_Q |\nabla\phi|^2 dxdt = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt, \tag{3.4}$$

onde,

$$X = \sum_{k=1}^{n} \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \Bigg|_0^T,$$

recorde que $m_k(x) = x_k - x_k^0 = q_k(x)$. Note que, $\Sigma = \Sigma(x^0) \cup \Sigma \diagdown \Sigma(x^0)$. Em $\Sigma(x^0)$, temos:

$$0 \leq m \cdot \nu = \sum_{k=1}^{n} m_k(x)\nu \leq \left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k^2 \right)^{1/2} = \|m(x)\|.1 = R(x^0).$$

Note que,

$$\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_*(x^0)} \sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \frac{1}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt$$

$$\leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

Portanto, podemos reescrevendo a identidade (3.4) como:

$$X + \frac{n}{2} \iint_Q \left(|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2 \right) dx dt + \iint_Q |\nabla \phi|^2 dx dt \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt, \tag{3.5}$$

daí, somando e subtraindo o termo $\frac{1}{2} \iint_Q |\phi'|^2 dx dt$, e dividindo $\iint_Q |\nabla \phi|^2 dx dt$ em duas partes, obtemos

$$X + \frac{n}{2} \iint_Q \left(|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2 \right) dx dt - \iint_Q |\phi'|^2 dx dt + \iint_Q |\phi'|^2 dx dt + \frac{1}{2} \iint_Q |\nabla \phi|^2 dx dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_Q |\nabla \phi|^2 dx dt \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt,$$

ou ainda,

$$X + \frac{(n-1)}{2} \iint_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 \right) dx dt + \frac{1}{2} \iint_Q |\phi'|^2 dx dt$$

$$\frac{1}{2} \iint_Q |\nabla \phi|^2 dx dt \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

Denotaremos por Y,

$$Y = \iint_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 \right) dx dt,$$

podemos escrever a expressão acima na forma:

$$X + \frac{(n-1)}{2} Y + \int_0^T E(T) dt \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

Como $E(t) = E(0)$, temos que

$$X + \frac{(n-1)}{2} Y + TE(0) \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \tag{3.6}$$

Lema 3.1. *Para toda solução ϕ da equação da onda (3.1), temos:*

$$Y = \iint_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt = (\phi'(t), \phi(t))\Big|_0^T.$$

Demonstração: Multiplicando a equação $\phi'' - \Delta\phi = 0$ em Q por ϕ e integrando por partes e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\iint_Q \phi''\phi dxdt - \iint_Q \Delta\phi\phi dxdt = 0. \tag{3.7}$$

Analise da 1º integral de (3.7)

$$\iint_Q \phi''\phi dxdt = (\phi', \phi)\Big|_0^T - \iint_Q |\phi'|^2 dxdt, \tag{3.8}$$

pois, recorde que

$$(\phi', \phi)' = (\phi'', \phi) + (\phi', \phi'),$$

daí,

$$\int_0^T (\phi', \phi)' dt = \int_0^T (\phi'', \phi) dt + \int_0^T |\phi'|^2 dt,$$

ou seja,

$$(\phi', \phi) = \iint_Q \phi''\phi dxdt + \iint_Q |\phi'|^2 dxdt.$$

Analise da 2º integral de (3.7)

$$\iint_Q \Delta\phi\phi dxdt = \iint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\phi d\Sigma - \iint_Q \nabla\phi\nabla\phi dxdt,$$

daí,

$$-\iint_Q \Delta\phi\phi dxdt = \iint_Q |\nabla\phi|^2 dxdt, \tag{3.9}$$

substituindo (3.8) e (3.9) em (3.7), obtemos:

$$(\phi', \phi)\Big|_0^T - \iint_Q |\phi'|^2 dxdt + \iint_Q |\nabla\phi|^2 dxdt = 0,$$

ou seja,

$$\iint_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt = (\phi', \phi)\Big|_0^T,$$

como queriamos mostrar. ■

A partir do lema 3.1, obtemos:

$$X + \frac{(n-1)}{2} Y = \int_\Omega \phi' \left(m \cdot \nabla\phi + \frac{(n-1)}{2}\phi\right) dx\Big|_0^T.$$

De fato,

$$X+\frac{(n-1)}{2}Y=\left(\phi',\sum_{k=1}^{n}q_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T+\frac{(n-1)}{2}(\phi',\phi)\Bigg|_0^T$$
$$=\int_\Omega\left(\phi'\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^0)\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)dx\Bigg|_0^T+\frac{(n-1)}{2}\int_\Omega\phi'\phi dx\Bigg|_0^T$$
$$=\int_\Omega\phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx\Bigg|_0^T.$$

Portanto,

$$X+\frac{(n-1)}{2}Y=\int_Q\phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx\Bigg|_0^T. \tag{3.10}$$

Considere $\mu>0$ a ser escolhido posteriormente ($\mu=R(x^0)$), multiplicando no lado direito por $\sqrt{\mu}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$ e usando a desigualdade elementar - $2ab\le a^2+b^2$- temos,

$$\int_\Omega\phi'\left(m\cdot\nabla\phi\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx\le\frac{\mu}{2}\int_\Omega|\phi'|^2dx+\frac{1}{2\mu}\int_\Omega\left(m\cdot\nabla+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)^2dx. \tag{3.11}$$

Modificando a última expressão em (3.11), temos:

$$\frac{1}{2\mu}\int_\Omega\left(m\cdot\nabla+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)^2dxdt=\int_\Omega(m\cdot\nabla\phi)^2dx+\int_\Omega\frac{(n-1)^2}{4}\phi^2dx+ \tag{3.12}$$
$$+(n-1)\int_\Omega(m\cdot\nabla\phi)\phi dx.$$

No que segue, vamos analisar, a última integral de (3.12). Temos que:

$$\int_\Omega(m\cdot\nabla\phi)\phi dx=\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\phi dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial}{\partial x_k}\phi^2dx, \tag{3.13}$$

pois, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2=2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\Longrightarrow\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2=\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_k},$$

pelo Lema de Gauss, visto que $\phi=0$ sobre Σ. Assim, temos

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(m_k\phi^2)dx=\int_\Gamma\nu_km_k\phi^2d\Gamma=0, \tag{3.14}$$

pois $\phi=0$ em Σ. Agora note que,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(m_k\phi^2)=\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^2+m_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2,$$

somando e integrando, obtemos:

$$\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(m_k\phi^2)dx=\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^2dx+\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2dx,$$

daí, resulta:

$$n\int_{\Omega}\phi^2dx=-\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2dx,$$

ou ainda,

$$-\frac{n}{2}\int_{\Omega}\phi^2dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi)^2dx, \tag{3.15}$$

substituindo (3.15) em (3.13), obtemos:

$$\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)\phi dx=-\frac{n}{2}\int_{\Omega}\phi^2dx, \tag{3.16}$$

substituindo (3.16) em (3.12), obtemos:

$$\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi\frac{(n-1)}{2}\phi\right)^2dx=\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2dx+\left(\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)}{2}\right)\int_{\Omega}\phi^2dx. \tag{3.17}$$

Observação 3.18. *Note que,*

$$\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)^2-2n(n-1)}{4}=\frac{(n-1)[(n-1)-2n]}{4}=\frac{(n-1)(-n-1)}{4}<0.$$

Assim, retornando a (3.17), obtemos,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2dx&=\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^2dx\\&\leq\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^2\right)dx\\&\leq\int_{\Omega}\|m\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla\phi|^2dx=[R(x^0)]^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx,\end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2dx\leq[R(x^0)]^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.18) em (3.17), obtemos:

$$\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)^2dx\leq\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2dx\leq[R(x^0)]^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)^2dx\leq[R(x^0)]^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx, \tag{3.19}$$

e substituindo (3.19) em (3.11) e considerando $\mu=R(x^0)>0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx&\leq\frac{R(x^0)}{2}\int_{\Omega}|\phi'|^2dx+\frac{1}{2R(x^0)}[R(x^0)]^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx\\&=R(x^0)\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\phi'|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dx\right]\\&=R(x^0)E(t)=R(x^0)E(0),\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_\Omega \phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx\leq R(x^0)E(t)=R(x^0)E(0). \tag{3.20}$$

Assim, por (3.10) e (3.20), obtemos:

$$\begin{aligned}\left|X+\frac{n-1}{2}Y\right| &= \left|\left(\phi', m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)\Big|_0^T\right|\\ &\leq 2\left\|\left(\phi', m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)\right\|_{L^\infty(0,T)}\\ &= 2\left\|\int_\Omega \phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{(n-1)}{2}\phi\right)dx\right\|_{L^\infty(0,T)}\\ &\leq 2R(x^0)E(0),\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|X+\frac{n-1}{2}Y\right|\leq 2R(x^0)E(0). \tag{3.21}$$

Agora, como $T(x^0)=2R(x^0)$, temos

$$\left|X+\frac{n-1}{2}Y\right|\leq T(x^0)E(0). \tag{3.22}$$

Recordando que:

$$X+\frac{(n-1)}{2}Y+TE(0)\leq\frac{R(x^0)}{2}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt, \tag{3.23}$$

de (3.22), obtemos

$$-T(x^0)E(0)\leq X+\frac{(n-1)}{2}Y,$$

somando, $TE(0)$ em ambos os membros, temos:

$$TE(0)-T(x^0)E(0)\leq X+\frac{(n-1)}{2}Y+TE(0)\leq\frac{R(x^0)}{2}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

ou seja,

$$[T-T(x^0)]E(0)\leq\frac{R(x^0)}{2}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

ou ainda,

$$E(0)\leq\frac{R(x^0)}{2[T-T(x^0)]}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt.$$

Substituindo $E(0)$, na última desigualdade, obtemos:

$$\frac{1}{2}\left[|\phi^1|^2+\|\phi^0\|^2\right]\leq\frac{R(x^0)}{2[T-T(x^0)]}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

daí,

$$|\phi^1|^2+\|\phi^0\|^2\leq\frac{R(x^0)}{T-T(x^0)}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

como queríamos mostrar.

■

Capítulo 4

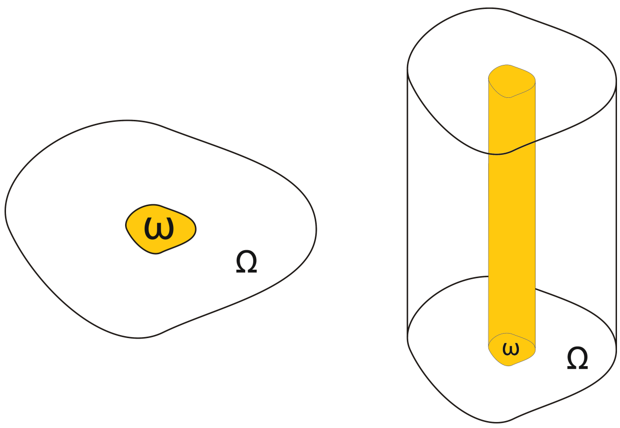
Controlabilidade Exata interna da Equação da Onda

Nosso objetivo neste Capítulo é obter a controlabilidade exata interna da equação da onda linear, com controle localizado no interior do domínio. Para conseguir a controlabilidade também aplicaremos o método HUM. Antes fixaremos algumas notações:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$,
- $\Gamma = \partial\Omega$, fronteira de Ω.
- $\omega \subset \Omega$ um subconjunto de Ω,
- χ_ω representa a função característica de ω.

Vamos considerar o problema de valor inicial e fronteira:

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y = h\chi_\omega \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.1}$$



4.1 A Controlabilidade Exata Interna

A controlabilidade exata interna de (4.1) consiste em, dado um $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H, tal que, para todo $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$, tal que, a solução $y = y(x,t,h)$ de (4.1) satisfaz,

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0, \tag{4.1}$$

Observação 4.1. *Este tipo de problema é chamado de* ***controlabilidade interna****, pois a ação do controle h é no cilindro $\omega \times (0,T)$, contido em $Q = \Omega \times (0,T)$. No que segue, provaremos que o método HUM é bem aplicado para resolver problemas de* ***controlabilidade interna****.*

4.2 O Método HUM

No que segue descreveremos o método HUM, quando o controle atua em uma região interna ω do domínio Ω.

4.2.1 Descrição do Método HUM

1º Etapa: Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ resolvemos o problema regular (4.1):

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Sabemos pelos resultados obtidos no Capítulo 2 que este problema tem única solução forte $\phi = \phi(x,t)$.

2º Etapa: Com a solução regular $\phi = \phi(x,t)$ de (4.1) resolvemos o problema retrogrado.

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi = \phi\chi_\omega \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \psi(T) = 0, \quad \psi'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

4.3 O operador Λ

Com a solução $\psi = \psi(x,t)$ de (4.2) definimos a aplicação Λ por

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{4.1}$$

<u>**3º Etapa:**</u> Multiplicar ambos os lados de (4.1) por ψ solução de (4.2) e integre em Q, obtendo:

$$\int_0^T \int_Q \phi''\psi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = 0, \tag{4.2}$$

<u>**Analise da 1º integral de (4.2)**</u>

Como $(\phi', \psi)' = (\phi'', \psi) + (\phi', \psi')$, obtemos:

$$\int_0^T (\phi'', \psi)dt = \int_0^T (\phi', \psi)' - \int_0^T (\phi', \psi')dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T (\phi'', \psi)dt = (\phi', \psi)\Big|_0^T - \int_0^T (\phi', \psi')dt,$$

implicando que

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt = (\phi'(T), \psi(T)) - (\phi'(0), \psi(0)) - \int_0^T (\phi', \psi')dt,$$

daí,

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt = -(\phi^1, \psi(0)) - \int_0^T (\phi', \psi')dt, \tag{4.3}$$

<u>**Analise da 2º integral de (4.2)**</u>

Usando o fato que $(\phi, \psi')' = (\phi', \psi') + (\phi, \psi'')$ obtemos:

$$(\phi(T), \psi'(T)) - (\phi(0), \psi'(0)) = \int_0^T (\phi', \psi')dt + \int_0^T (\phi, \psi'')dt,$$

daí,

$$-\int_0^T (\phi', \psi')dt = (\phi^0, \psi'(0)) + \int_0^T (\phi, \psi'')dt. \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) e (4.3), temos:

$$\int_0^T (\phi'', \psi)dt = -(\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi'(0)) + \int_0^T (\phi, \psi'')dt, \tag{4.5}$$

e usando o fato que $\psi = 0$ e $\phi = 0$ sobre Σ, e usando o Teorema de Green 1.9, obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Gamma dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi dxdt.$$

Aplicando o Teorema de Green 1.9 novamente na ultima integral, acarreta:

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi dxdt,$$

daí,

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\phi d\Gamma dt = \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt. \tag{4.6}$$

Adicionando membro a membro (4.2), (4.5) e (4.6), obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt - (\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi'(0)) +$$

$$+ \int_0^T (\phi, \psi'')dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T (\phi'', \psi)dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt,$$

implicando que:

$$\int_0^T \int_\Omega [\psi'' - \Delta\psi]\, \phi dxdt = (\phi^1, \psi(0)) - (\phi^0, \psi'(0)). \tag{4.7}$$

Agora, usando o fato que $\psi'' - \Delta\psi = \phi\chi_\omega$ em (4.7), temos:

$$\int_0^T \int_\Omega (\phi\chi_\omega)\phi dxdt = (\phi^1, \psi(0)) - (\phi^0, \psi'(0)),$$

como $\Omega = \omega \cup (\Omega \diagdown \omega)$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega (\phi)^2 dxdt = (\phi^1, \psi(0)) - (\phi^0, \psi'(0)). \tag{4.8}$$

Vamos definir em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a semi-norma

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \int_0^T \int_\Omega \phi^2 dxdt. \tag{4.9}$$

Observação 4.2. *Note que a partir de (4.9) para obter uma norma necessitamos que a solução* $\phi = \phi(x,t)$ *de (4.1) seja zero em* $\omega \times (0,T)$ *então* $\phi = 0$ *em* Q.

Observação 4.3. *O Teorema de Holmgren diz que existe* $T_0 = T_0(\omega)$ *dependente de* $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tal que para todo* $T > T_0$*, a única solução* $\phi = \phi(x,t)$ *de (4.1), tal que,* $\phi = 0$ *sobre* $\omega \times (0,T)$ *então* ϕ *é identicamente nula em* Q*. Em particular,* $\phi^0 = \phi(0) = 0$ *e* $\phi^1 = \phi'(0) = 0$*. Logo,*

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = 0 \Longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \phi^2 dxdt = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \text{ sobre } \omega \times (0,T) \Longrightarrow \phi = 0 \text{ em } Q,$$

e consequentemente para $T > T_0$*, a forma quadrática (4.9) é uma norma em* $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$*. Considere* F *sendo o complemento de* $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$*. Da mesma forma do capítulo anterior, mostra-se que* F *é realmente um espaço de Hilbert.*

Note que se $\xi = \xi(x,t)$ é uma solução de (4.1) correspondente a $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Então, a norma em (4.9) é obtida a partir do produto interno em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ definido por

$$\langle\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}\rangle_F = \int_0^T \int_\omega \phi\xi dxdt.$$

Vamos considerar a forma Bilinear

$$\begin{aligned} \psi: \quad & [\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)]\times[\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad (\overline{\phi},\overline{\xi}) \longmapsto \psi(\overline{\phi},\overline{\xi}) = \langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle = \int_0^T\int_\omega \phi\xi dxdt. \end{aligned}$$

Da mesma forma do capítulo anterior, mostra-se que ψ é uma forma bilinear contínua e positiva em $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Dessa forma, ψ pode ser estendida por continuidade a $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ e Λ pode ser estendida por continuidade a F e também é contínua e coerciva em F. Logo, pelo Lema de Lax-Milgram 1.5, dado $\{y^1,-y^0\}\in F'$, existe único, $\{\phi^0,\phi^1\}\in F$, tal que,

$$\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle_{F'\times F} = \langle \{y^1,-y^0\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle_{F'\times F},$$

para todo $\{\xi^0,\xi^1\}\in F$. Então, dado $\{y^1,-y^0\}\in F'$, existe um único $\{\phi^0,\phi^1\}\in F$ tal que

$$\Lambda\{\phi^0,\phi^1\} = \{y^1,-y^0\}, \tag{4.10}$$

de (4.10) e (4.1), obtemos:

$$y(0)=y^0 \text{ e } \psi'(0)=y^1,$$

onde ψ é a solução de (4.1).

Observação 4.4. *Em (4.1) considere $h=\phi\big|_{\omega\times(0,T)}$, onde ϕ é a solução de (4.1) pela unicidade de solução do problema linear da equação da onda, resulta que*

$$\psi(x,t)=y(x,t) \text{ em } Q.$$

Considere (4.2) com $T-t$ no lugar de t, então:

$$y(T)=\psi(T)=0 \text{ e } y'(T)=-\psi'(T)=0,$$

como queríamos provar.

Observação 4.5. *O Teorema de Holmgren assegura que dado um subconjunto aberto $\omega\subset\Omega$, existe $T_0=T_0(\omega)$ tal que se $T>T_0$ e $\phi=0$ em $\omega\times(0,T)$ então $\phi=0$ em Q, onde ϕ é solução do problema:*

$$\left|\begin{array}{l} \phi''-\Delta\phi=0 \text{ em } Q=\Omega\times(0,T), \\ \phi=0 \text{ em } \Sigma=\Gamma\times(0,T), \\ \phi(0)=\phi^0,\ \phi'(0)=\phi^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right.$$

*" O fato de ψ se anular num cilindro pequeno $\omega\times(0,T)$ também se anular no cilindro grande $\Omega\times(0,T)$ é conhecido como um resultado de **continuação única**. "*

4.4 Caracterização dos Espaços F e F' como Espaços de Sobolev

Observação 4.6. *A desigualdade (2.14) no Capítulo 2 na seção de regularidade da solução ultra, a qual aplicado ao problema (4.1) fornece*

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt \leq C_0 \left\{ |\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right\} = C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}, \tag{4.1}$$

isto implica que

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow F, \tag{4.2}$$

sendo a imersão contínua e densa. Para mostrar que $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, necessitamos provar que,

$$F \hookrightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), \tag{4.3}$$

para tanto, devemos mostrar a ***desigualdade inversa***

$$C_1 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt, \tag{4.4}$$

supondo provado (4.4), então temos que

$$F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \text{ e } F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Resumo: *Dado $\{y^1, -y^0\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, encontramos um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ com o qual resolvemos o problema (4.1), o qual da $\phi = \phi(x,t)$, então o controle $h = h(x,t)$ é a restrição de ϕ a $\omega \times (0,T)$. Pela regularidade da solução ultra fraca do Capítulo 2, segue que $h \in L^2(\omega \times (0,T))$.*

Observação 4.7. *O problema se reduz a obter condições suficientes sobre ω e T tal que $F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ou equivalentemente, $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

4.5 A Desigualdade Inversa

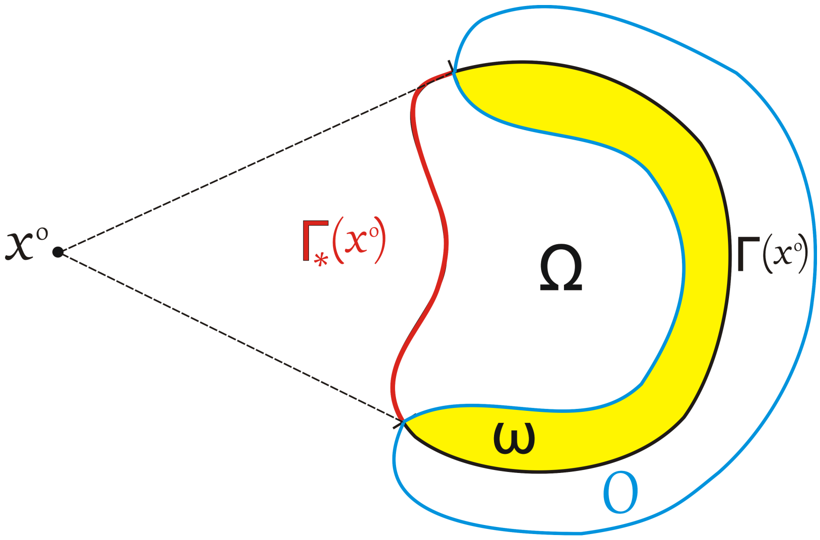
Recordemos que:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$,
- $m(x) = x - x^0, (x^0 \in \mathbb{R}^n)$ com componentes $m_k(x) = x_k - x_k^0$ para $1 \leq k \leq n$,
- $\Gamma = \partial\Omega$,
- $\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma;\ \ m(x) \cdot \nu(x) > 0\}$,
- $\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma;\ \ m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}$,
- $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T),\ \ \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0,T)$,

- $R(x^0) = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|x - x^0\| = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Observação 4.8. *Dizemos que $\omega \subset \Omega$ é uma* **vizinhança** *de $\overline{\Gamma(x^0)}$ se existir um aberto $O \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Gamma(x^0)} \subset O$ e*

$$\omega = \Omega \cap O. \tag{4.1}$$



Teorema 4.1. *Se $T > 2R(x^0)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que,*

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt, \tag{4.2}$$

para toda solução ultra fraca de (4.1), com $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração: Inicialmente substituindo a prova de (4.2) por uma desigualdade equivalente.

<u>**1º Etapa:**</u> Se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega (\phi')^2 dxdt, \tag{4.3}$$

para toda solução fraca $\phi = \phi(x,t)$ de (4.1) com $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi' \in L^2(\Omega)$, então, temos a desigualdade (4.2) para solução ultra fraca $\phi = \phi(x,t)$ quando tomamos $\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\phi^1 \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

De fato, dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, defina, $\chi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $-\Delta\chi = \phi^1$ em Ω. Considere,

$$\psi(x,t) = -\chi + \int_0^t \phi(x,s)ds, \tag{4.4}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é a solução ultra fraca de (4.1) com dados iniciais ϕ^0 e ϕ^1. Integrando $\phi'' - \Delta\phi = 0$, obtemos:

$$\int_0^t \phi''(x,t)dt - \int_0^t \Delta\phi(x,s)ds = 0,$$

ou seja,

$$\phi'(x,t) - \phi'(x,0) = \Delta\left(\int_0^t \phi(x,s)ds\right). \tag{4.5}$$

Derivando (4.4) em relação a t, obtemos

$$\psi'(x,t) = \phi(x,t) \text{ e } \psi''(x,t) = \phi'(x,t),$$

então, por (4.4) e (4.5), temos:

$$\begin{aligned}\psi'' - \Delta\psi &= \phi' - \Delta\left(-\chi + \int_0^t \phi(x,s)ds\right)\\ &= \phi' + \Delta\chi - \Delta\left(\int_0^t \phi(x,s)ds\right)\\ &= \phi' - \phi^1 - \phi' + \phi^1 = 0.\end{aligned}$$

Logo, por definição de χ, temos que

$$\left|\begin{array}{l}\psi'' - \Delta\psi = 0 \text{ em } Q = \Omega\times(0,T),\\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma = \Gamma\times(0,T),\\ \psi(0) = -\chi, \quad \psi'(0) = \phi(0) = \phi^0 \text{ em } \Omega.\end{array}\right. \tag{4.6}$$

Note que no problema (4.6), temos

$$\psi(0) = -\chi \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \psi'(0) = \phi^0 \in L^2(\Omega),$$

o resultado na existência de uma solução fraca.

Observação 4.9. *Se (4.5) é verdadeiro, temos a partir de (4.6), que*

$$\|\chi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T\int_\omega (\psi')^2 dxdt = C\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt, \tag{4.7}$$

pois, $\psi'(x,t) = \phi(x,t)$.

Observação 4.10. *Vamos definir em $H^{-1}(\Omega)$ um produto interno. A aplicação:*

$$\begin{array}{rccc}-\Delta: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega)\\ & u & \mapsto & -\Delta u,\end{array}$$

é um isomorfismo (isometria).

Seja $G = \Delta^{-1}$. Então, para todo $u, v \in H^{-1}(\Omega)$ definimos:

$$(u,v)_{H^{-1}(\Omega)} = \langle u, Gv\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = ((Gu,Gv))_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},$$

o qual é um produto interno em $H^{-1}(\Omega)$. A norma induzida é:

$$\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = ((Gu,Gv)),$$

então,

$$\|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}= ((G\phi^1, G\phi^1)) = ((\chi, \chi)) = \|\chi\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.8}$$

usando (4.8) *em* (4.1)*, obtemos:*

$$\|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)}+|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{4.9}$$

2º Etapa: Vamos mostrar que

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\phi^1|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_\omega (\phi')^2 dxdt,$$

para toda solução fraca $\phi = \phi(x, t)$ de (4.1) com $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi^1 \in L^2(\Omega)$. Para $T > 2R(x^0)$ vimos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla\phi^0|^2+|\phi^1|^2\right) dx \leq \frac{R(x^0)}{T-2R(x^0)}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt, \tag{4.10}$$

para toda solução fraca $\phi = \phi(x, t)$ de (4.1).

Agora, para $\epsilon > 0$, tal que, $T - 2\epsilon > 2R(x^0)$ temos:

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\phi^0|^2+|\phi^1|^2\right) dx \leq \int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{4.11}$$

De fato, considere a mudança de variável $\tau = (T - 2\epsilon)t + T\epsilon$.

- para $t = 0$ temos $\tau = T\epsilon$,
- para $t = T$ temos $\tau = T^2 - 2\epsilon T + T\epsilon = T(T - \epsilon)$,

pois, $T\epsilon \leq \tau \leq T(T - \epsilon)$ o que implica $\epsilon \leq \frac{\tau}{T} \leq T - \epsilon$. Considere agora $\xi = \frac{\tau}{T}$, temos:

- para $\tau = T\epsilon$ temos $\xi = \epsilon$,
- para $\tau = T(T - \epsilon)$ temos $\xi = T - \epsilon$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|\nabla\phi^0|^2+|\phi^1|^2\right) dx &\leq \frac{R(x^0)}{T-2R(x^0)}\iint_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\\ &\leq \frac{2R(x^0)}{T-2R(x^0)}\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\\ &\leq \frac{2R(x^0)}{T-2R(x^0)}\frac{1}{T-2\epsilon}\int_{T\epsilon}^{T(T-\epsilon)}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma d\tau\\ &\leq \frac{C_1}{T}\int_{T\epsilon}^{T(T-\epsilon)}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma d\xi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$E(0) \leq C\int_{T\epsilon}^{T(T-\epsilon)}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{4.12}$$

Para o que segue usaremos o seguinte resultado.

Considere o problema:

$$\left|\begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta = f \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ \theta = 0 \text{ em } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ \theta(0) = \theta^0,\ \theta'(0) = \theta^1 = \phi^0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Lema 4.1. *Seja $q = q(x) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$. Para toda solução fraca de (4.13) com dados*

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(Q),$$

tem-se

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma = \int_\Omega \theta' q\cdot\nabla\theta dx\Big|_0^T +$$
$$+\frac{1}{2}\iint_Q (divq)\left[|\theta'|^2 - |\nabla\theta|^2\right] dxdt + \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} dxdt$$
$$-\iint_Q \theta' q'\cdot\nabla\theta dxdt - \iint_Q fg\cdot\nabla\theta dxdt.$$

Considere $h \in [C^1(\bar{\Omega})]^n$ tal que $h\cdot\nu \geq 0, \forall x \in \Gamma$, $h = \nu$ sobre $\Gamma(x^0)$ e $h = 0$ sobre $\Omega\diagdown\omega$. Seja, $\eta \in C^1([0,T])$, tal que, $\eta(0) = \eta(T) = 0$, $\eta(T) = 1$ em $[\epsilon, T-\epsilon]$. Definimos $q(x,t) = \eta(t)h(x)$ o qual pertence a $W^{1,\infty}(\Omega)$ e satisfaz:

$$\left|\begin{array}{l} (i)\quad q(x,t) = \nu(x), \quad \forall (x,t) \in \Gamma(x^0)\times(\epsilon, T-\epsilon), \\ (ii)\quad q(x)\cdot\nu(x) \geq 0, \quad \forall (x,t) \in \Gamma\times(0,T), \\ (iii)\quad q(x,0) = q(x,T) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \\ (iv)\quad q(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in (\Omega\diagdown\omega)\times(0,T). \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Considerando $''q''$ dado acima, obtemos pelo Lema 4.13,

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma q\cdot\nu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = (\phi'(t), q\cdot\nabla\phi)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\iint_Q divq\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt$$
$$+\iint_Q \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} dxdt - \iint_Q \phi' q'\cdot\nabla\phi dxdt, \tag{4.15}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é solução fraca de (4.1). Note que

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \geq \frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{4.16}$$

De fato, pois

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \geq \frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Gamma \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \geq \frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

note também que,

$$(\phi'(t), q\cdot\nabla\phi)\Big|_0^T = 0, \tag{4.17}$$

pois, $q(T) = \underbrace{\eta(T)}_{=0}h(x) = 0$ e $q(0) = \underbrace{\eta(0)}_{=0}h(x) = 0$.

Como $q \in (C^1(\bar{\Omega}) \times (0,T))$ então: $|divq| \leq c$. Logo,

$$\left|\frac{1}{2}\iint_Q (divq)\left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega (divq)\left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega (divq)\left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt\right| \leq$$

$$\leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt.$$

Ou seja,

$$\left|\frac{1}{2}\int_Q (divq)\left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt\right| \leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt. \tag{4.18}$$

Agora, usando o mesmo raciocínio para $\displaystyle\int_Q \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} dxd\Gamma$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\iint_Q \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} dxd\Gamma\right| &\leq C\int_0^T\int_\omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right| dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_\omega |\nabla\phi|^2 dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt,
\end{aligned}$$

assim,

$$\left|\iint_Q \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} dxd\Gamma\right| \leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt. \tag{4.19}$$

De forma análoga para $\displaystyle\iint_Q \phi' q'\cdot\nabla\phi dxdt$, obtemos:

$$\left|\iint_Q \phi' q'\cdot\nabla\phi dxdt\right| \leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt, \tag{4.20}$$

logo, por (4.15), resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)} q\cdot\nu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt &\leq \frac{1}{2}\iint_\Sigma q\cdot\nu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \\
&\underbrace{\leq}_{(4.15),(4.17),(4.18),(4.19),(4.20)} C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)} \underbrace{q\cdot\nu}_{1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt, \tag{4.21}$$

e de (4.21), obtemos:

$$\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\int_0^T\int_\omega\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right]dxdt. \tag{4.22}$$

A partir de (4.22) e (4.12), resulta

$$E(0)\leq C\int_0^T\int_\omega\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right]dxdt. \tag{4.23}$$

<u>**3º Etapa:**</u> Provaremos nessa etapa que:

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\phi^1|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_\omega\left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right]dxdt. \tag{4.24}$$

De fato, seja $\omega_0\subset\Omega$ uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$, tal que,

$$\Omega\cap\omega_0\subset\Omega.$$

Note que (4.23) é válida para cada vizinhança $\overline{\Gamma(x^0)}$, então é válido para ω_0. Logo,

$$E(0)\leq C\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\omega_0}\left\{|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right\}dxdt. \tag{4.25}$$

Considere $\rho\in W^{1,\infty}(\Omega),\quad \rho(x)\geq 0$ tal que

$$\rho(x)=\left|\begin{array}{l}1,\ \text{em } \omega_0,\\ 0,\ \text{em } \Omega\diagdown\omega.\end{array}\right.$$

Defina $\rho(x,t)$ em Q por:

$$p(x,t)=\eta(t)\rho(t)^2,$$

onde η foi definido na segunda etapa. Temos

$$\left|\begin{array}{l}(i)\quad p(x,t)=1 \text{ em } \omega_0\times(\epsilon,T-\epsilon),\\ (ii)\quad p(x,t)=0 \text{ em } (\Omega\times\omega)\times(0,T),\\ (iii)\quad p(x,0)=p(x,T)=0, \text{ em } \Omega,\\ (iv)\quad \dfrac{|\nabla p|^2}{p}\in L^\infty(Q).\end{array}\right. \tag{4.26}$$

Multiplicando ambos os membros da equação $\phi''-\Delta\phi=0$ em Q por $p\phi$ e integrando, obtemos

$$\iint_Q p\phi\phi'' dxdt-\iint_Q p\phi\Delta\phi dxdt=0. \tag{4.27}$$

<u>**Analise da 1º integral de (4.27)**</u>

$$\int_0^T(\phi'',p\phi)dt=-\int_0^T(\phi',p\phi')dt-\int_0^T(p'\phi,\phi')dt. \tag{4.28}$$

De fato, pois:

$$(\phi', p\phi)' = (\phi'', p\phi) + (\phi', (p\phi)')$$
$$= (\phi'', p\phi) + (\phi', p'\phi) + (\phi', p\phi'),$$

integrando, obtemos:

$$\int_0^T (\phi', p\phi)' dt = \int_0^T (\phi'', p\phi) dt + \int_0^T (\phi', p'\phi) dt + \int_0^T (\phi', p\phi') dt,$$

ou seja,

$$0 = \underbrace{(\phi', p\phi)\Big|_0^T}_{p(0)=p(T)=0} = \int_0^T (\phi'', p\phi) dt + \int_0^T (\phi', p'\phi) dt + \int_0^T (\phi', p\phi') dt,$$

o que acarreta,

$$\int_0^T (\phi'', p\phi) dt = -\int_0^T (\phi', p'\phi) dt - \int_0^T (\phi', p\phi') dt.$$

Analise da 2º integral de (4.27)

$$-\int_\Omega \Delta\phi p\phi dx dt = \int_\Omega \nabla\phi\nabla(p\phi) dx - \int_\Gamma p\phi \frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\Gamma. \tag{4.29}$$

A integral de superfície é zero em (4.29), pois ϕ é solução de $(P2)$ e $\phi = 0$ sobre Σ. Agora, usando os fatos que $\Omega = \omega \cup (\Omega\diagdown\omega)$, $p(x,t) = 0$ sobre $\Omega\diagdown\omega$, $p(x,t) = \eta(t)\rho(t)^2$ e

$$\nabla(p\phi) = \nabla p \cdot q + p \cdot \nabla\phi,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
-\iint_Q \Delta\phi p\phi dx dt &= \int_0^T \int_\omega \nabla\phi\nabla(p\phi) dx dt \\
&= \int_0^T \int_\omega \nabla\phi[\nabla p \cdot \phi + p \cdot \nabla\phi] dx dt \\
&= \int_0^T \int_\omega p\nabla\phi \cdot \nabla\phi dx dt + \int_0^T \int_\omega \nabla p \cdot \nabla\phi\phi dx dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\iint_Q \Delta\phi p\phi dx dt = \int_0^T \int_\omega p\nabla\phi \cdot \nabla\phi dx dt + \int_0^T \int_\omega \nabla p \cdot \nabla\phi\phi dx dt. \tag{4.30}$$

Substituindo (4.30) e (4.28) em (4.27), resulta que

$$\int_0^T \int_\omega p|\nabla\phi|^2 dx dt = \int_0^T \int_\omega p(\phi')^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega p'\phi\phi' dx dt - \int_0^T \int_\omega \nabla p \cdot \nabla\phi\phi dx dt. \tag{4.31}$$

A partir de (4.31) e (4.26), obtemos passando o módulo em (4.31), usando desigualdade triangular e depois uma propriedade de integral, que

$$\int_0^T \int_\omega p|\nabla\phi|^2 dx dt \le \int_0^T \int_\omega |p(\phi')|^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega |p'\phi\phi'| dx dt - \int_0^T \int_\omega |\nabla p \cdot \nabla\phi\phi| dx dt. \tag{4.32}$$

Notemos que,

$$\int_0^T\int_\omega |p(\phi')|^2 dxdt \le \|p\|\int_0^T\int_\omega |\phi'|^2 dxdt \le \|p\|\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt, \tag{4.33}$$

e

$$|p'\phi\phi'| \le \|p\||\phi||\phi'| \le \frac{\|p\|}{2}\left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right], \tag{4.34}$$

e daí, resulta que

$$\int_0^T\int_\omega |p'\phi\phi'| dxdt \le \|p\|\int_0^T\int_\omega |\phi||\phi'| dxdt \le \frac{\|p\|}{2}\int_0^T\int_\omega \left\{|\phi'|^2+|\phi|^2\right\} dxdt. \tag{4.35}$$

Agora, substituindo (4.33) e (4.35) em (4.32), resulta

$$\int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt + \int_0^T\int_\omega |\nabla p\cdot\nabla\phi\phi| dxdt. \tag{4.36}$$

Agora, vamos fazer alguns cálculos a respeito da última da integral acima. Temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\omega |\nabla p\cdot\nabla\phi\phi| dxdt &\le \int_0^T\int_\omega \frac{1}{\sqrt{p}}|\nabla p|\phi\sqrt{p}|\nabla p| dxdt\\ &\le \int_0^T\int_\omega \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}|\nabla p|\phi\right)^2 dxdt + \int_0^T\int_\omega \frac{1}{2}\left(\sqrt{p}|\nabla\phi|\right)^2 dxdt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \frac{|\nabla p|^2}{p}\phi^2 dxdt,\end{aligned} \tag{4.37}$$

por (4.26) $-$ (iv) temos que $\dfrac{|\nabla p|^2}{p} \le c_1$, pois pertence a $L^\infty(Q)$. Daí, substituindo (4.37) em (4.36), temos:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \le \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt +\\ +\frac{C}{2}\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt + C\int_0^T\int_\omega \left\{|\phi'|^2+|\phi|^2\right\} dxdt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt. \tag{4.38}$$

Note que,

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \le \int_0^T\int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \underbrace{\le}_{4.38} C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt. \tag{4.39}$$

Temos que (4.39) é válido para toda vizinhança de $\Gamma(x^0)$. Assim,

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\omega_0} |\nabla\phi|^2 dxdt \le C\int_0^T\int_{\omega_0} \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt, \tag{4.40}$$

e também

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon}\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right] dxdt \le C\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left[|\phi'|^2+|\phi|^2\right] dxdt. \tag{4.41}$$

A partir de (4.25) temos que,

$$E(0) \leq \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\omega_0} \left[|\phi'| + |\nabla \phi|^2 \right] dxdt,$$

e por (4.25) e (4.41), obtemos

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega_0} \left[|\phi'|^2 + |\phi|^2 \right] dxdt. \tag{4.42}$$

Por (4.42), temos

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_{\omega} \left[|\phi'|^2 + |\phi|^2 \right] dxdt, \tag{4.43}$$

e de (2.52) resulta que:

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 dxdt \leq CE(0), \tag{4.44}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é solução fraca de (4.1). De (4.44) e (4.42), obtemos que

$$\iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_{\omega} \left[|\phi'|^2 + |\phi|^2 \right] dxdt. \tag{4.45}$$

4º Etapa: Suponha que (4.3) não ocorre, isto é, não existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_{\omega} (\phi')^2 dxdt, \tag{4.46}$$

então, dado um número natural n existem dados iniciais $\tilde{\phi}_n^0$ e $\tilde{\phi}_n^1$, tal que, a solução $\tilde{\phi}_n$ do problema (4.1) correspondendo aos dados iniciais satisfaz:

$$\|\tilde{\phi}_n^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\tilde{\phi}_n^1|^2_{L^2(\Omega)} \geq n \|\tilde{\phi}_n^1\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Definimos:

$$k = \left(\|\tilde{\phi}_n^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} |\tilde{\phi}_n^1|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

$$\phi_n^0 = \frac{\tilde{\phi}_n^0}{k}, \quad \phi_n^1 = \frac{\tilde{\phi}_n^1}{k}, \quad \phi_n = \frac{\tilde{\phi}_n}{k},$$

a partir disso, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \|\phi_n^1\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \dfrac{1}{c}, \\ \|\phi_n^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi_n^1|^2_{L^2(\Omega)} = 1. \end{array} \right. \tag{4.47}$$

De $(4.47)_1$, obtemos

$$\liminf_{n \to \infty} \int_0^T \int_{\omega} (\phi_n')^2 dxdt = 0, \tag{4.48}$$

de $(4.47)_2$, obtemos subsequências tal que

$$\left| \begin{array}{l} \phi_n^0 \rightharpoonup \phi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ \phi_n^1 \rightharpoonup \phi^1 \text{ em } L^2(\Omega), \end{array} \right.$$

a solução correspondente do problema (4.1), referentes aos dados iniciais ϕ_n^0, ϕ_n^1, tem as estimativas

$$\left| \begin{array}{ll} (\phi_n) & \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ (\phi_n') & \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{array} \right. \tag{4.49}$$

as estimativas (4.49) são válidas em ω ao invés de Ω. Então, existe uma subsequência de (ϕ_n) tal que:

$$\left| \begin{array}{l} \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \phi_n' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{4.50}$$

Como a imersão de $H_0^1(\omega)$ em $L^2(\omega)$ é compacta e a estimativa (4.49) com ω no lugar de Ω, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos que existe uma subsequência (ϕ_n), tal que,

$$\phi_n \longrightarrow \phi \ \ \textit{forte} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(\omega \times (0,T)), \tag{4.51}$$

a partir de (4.48) e $(4.50)_2$ e o Teorema de Banach-Steinhauss, segue que,

$$\phi'(x,t) = 0 \ \ q.s. \text{ em } \omega \times (0,T),$$

isto é, $\phi(x,t) = c$ é constante em relação ao tempo em $\omega \times (0,T)$. Mas, $\phi = 0$ sobre Σ_0, pois ϕ é solução de (4.1). Então,

$$\phi(x,t) = 0 \text{ sobre } \omega \times (0,T),$$

pelo Teorema de Holmgren. Por (4.51), obtemos:

$$\phi_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,T,L^2(\omega)), \tag{4.52}$$

e

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Sigma_0), \tag{4.53}$$

logo, por (4.3), obtemos

$$\lim \int_\Omega \left[\|\phi_n^0\|^2 + |\phi_n^1|^2 \right] dx \leq C \lim \iint_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma dt \right),$$

daí, por (4.53), obtemos:

$$\phi_n^0 \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } \phi_n^1 \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

o que contradiz $(4.47)_2$. Essa contradição, prova o resultado desejado.

■

Capítulo 5

Outros Métodos de Controlabilidade

Neste capítulo, apresentamos outros métodos de controlabilidade para equação da onda linear com controle interno e na fronteira através de um problema de minimização. Também mostramos a controlabilidade da equação do calor, usando uma desigualdade de observabilidade, conhecida na literatura pela Desigualdade de Carleman.

5.1 Controlabilidade da equação da onda via minimização

5.1.1 Controlabilidade com controle localizado na fronteira.

Considere o problema

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0 \ em \ Q, \\ y = \left|\begin{array}{l} v \ sobre \ \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ 0 \ sobre \ \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array}\right. \\ y(0) = y^0, \ y'(0) = y^1 \ em \ \Omega, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

note que (5.1) é **controlável** se existe $v = \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_0)$ tal que

$$y(T) = 0 \ e \ y'(T) = 0, \tag{5.2}$$

onde ϕ é a solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta \phi = 0 \ em \ Q, \\ \phi = 0 \ sobre \ \Sigma, \\ \phi(x,0) = \phi^0(x), \ \phi'(x,0) = \phi^1(x) \ sobre \ \Omega. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

e tem-se que $\{\phi^0, \phi^1\} \in D(\Omega) \times D(\Omega)$.

Observação 5.1. *Vimos que o* ***problema de controlabilidade*** *exata na fronteira resume-se a encontrar um espaço de Hilbert $F = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ no qual, para todo par de dados iniciais $\{y^1, y^0\} \in F$, existe um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x, T, v)$ de (5.1) cumpre a condição de equilíbrio, isto é,*

$$y(x, T, v) = 0 \text{ e } y'(x, T, v) = 0. \tag{5.4}$$

Lema 5.1. *Seja ϕ a solução de (5.3) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então, para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ a solução y de (5.1) satisfaz (5.4) se, e somente se, existe $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que,*

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma dt = \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (y^0, \phi^1). \tag{5.5}$$

Demonstração: Suponhamos $\{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e $v \in \mathcal{D}(\Sigma_0)$. Multiplicando $(5.1)_1$ por ϕ e integrando em Q, obtemos:

$$\int_\Omega \int_0^T \phi(y'' - \Delta y) dt dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \int_0^T \phi(y'' - \Delta y) dt dx = \int_\Omega (\phi y' - \phi' y) dx \Big|_0^T + \iint_\Sigma \left(-\frac{\partial y}{\partial \nu} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \nu} y \right) d\Gamma dt \\ &= \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} y d\Gamma dt + \int_\Omega \left[\phi(T) y'(T) - \phi'(T) y(T) \right] dx - \int_\Omega \left[\phi(0) y^1 - \phi'(0) y^0 \right] dx. \end{aligned}$$

Logo, para $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi y}{\partial \nu} y d\Gamma dt = \int_\Omega y(T) \phi'(T) dx - \langle y'(T), \phi(T) \rangle - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx + \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{5.6}$$

Portanto, segue de (5.6) que y satisfaz a condição de equilíbrio se, e somente se,

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma dt = \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx,$$

o que mostra nosso lema.

■

Definindo a dualidade entre $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, por

$$\langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\} \rangle = (y^0, \phi^1) - \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \tag{5.7}$$

podemos rescrever o lema anterior (5.1) da seguinte forma:

Lema 5.2. *Seja ϕ a solução de (5.3) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então, para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, a solução y de (5.1), satisfaz (5.4) se, e somente se, existe $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que*

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma dt + \langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\} \rangle = 0. \tag{5.8}$$

Observação 5.2. *Observe que, por (5.8), a* ***controlabilidade exata*** *do sistema (5.1) pode ser remetida à obtenção de pontos críticos do funcional* $\mathcal{J} : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$*, definido por:*

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\} \rangle, \tag{5.9}$$

onde ϕ *é a solução de (5.3) com dados iniciais* $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*.*

Teorema 5.1. *Seja* $T > T(x^0)$*. Então, o funcional* $\mathcal{J}$*, definido em (5.9), possui um único mínimo* $\{\bar{\phi}^0, \bar{\phi}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*.*

Demonstração: Para garantir a existência de um único mínimo, devemos provar que o funcional $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo, nesse caso usaremos o Teorema 1.11.

- $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente.

De fato, pela desigualdade direta abaixo,

$$\iint_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)},$$

Como $\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1)$ é dado por:

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\},$$

tem-se da desigualdade direta que,

$$\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \leq \frac{C}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle, \tag{5.10}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\} \rangle \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)},$$

logo, podemos escrever (5.10) na forma,

$$\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \leq \frac{C}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}.$$

Portanto, deduzimos a continuidade do funcional $\mathcal{J}$ e, consecutivamente sua semicontinuidade inferior.

- $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

Com efeito, sejam $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\lambda \in (0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda\{\phi^0, \phi^1\} + (1-\lambda)\{\phi^0, \phi^1\}) = \lambda \mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} + (1-\lambda)\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \\ - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \iint_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, já foi visto que, a desigualdade inversa permite que,

$$C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt,$$

sendo assim, podemos escrever,

$$C_1\|\{\phi^0,\phi^1\}-\{\psi^0,\psi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq \iint_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}-\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt,$$

então, sendo $\displaystyle\iint_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}-\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt > 0$, tem-se que,

$$-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\iint_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}-\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt < 0,$$

assim, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\{\phi^0,\phi^1\}) &= \lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}\\ &\quad -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\iint_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}-\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt\\ &< \lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\},\end{aligned}$$

logo, para algum $\{\phi^0,\phi^1\}\neq\{\psi^0,\psi^1\}$, temos

$$\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\{\psi^0,\psi^1\}) < \lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi^0,\psi^1\}.$$

Portanto, $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

- $\mathcal{J}$ é coercivo.

De fato, note que

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}\geq\frac{1}{2}\left(\iint_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt-\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right), \tag{5.11}$$

pois, temos devido a desigualdade de Cauchy-Schwarz que:

$$\langle\{y^0,y^1\},\{\phi^1,\phi^0\}\rangle\leq|\langle\{y^0,y^1\},\{\phi^1,\phi^0\}\rangle|\leq\|\{\phi^0,\phi^1\}\|\|\{y^0,y^1\}\|,$$

por propriedade de módulo segue que,

$$\langle\{y^0,y^1\},\{\phi^1,\phi^0\}\rangle\geq-\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}.$$

Logo, (5.11) é verdade. Sendo $T>T(x^0)$, segue da desigualdade inversa que (5.11) pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}\geq\frac{C}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}.$$

Ou ainda, podemos escrever,

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} \geq \left(\frac{1}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\right)\left(C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} - \|\{y^0,y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right). \tag{5.12}$$

A partir da desigualdade acima (5.12), obtemos

$$\lim_{\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\longrightarrow\infty} \mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} = \infty.$$

Portanto, $\mathcal{J}$ é coercivo.

■

Observação 5.3. *Mostraremos que o mínimo encontrado no Teorema 5.1 nos fornece o **controle de norma mínima**.*

Teorema 5.2. *Seja $\{y^0,y^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ e suponha que $\{\bar{\phi}^0,\bar{\phi}^1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ é o mínimo do funcional J. Se $\bar{\phi}$ corresponde a solução de (5.3) com dados iniciais $\{\bar{\phi}^0,\bar{\phi}^1\}$, então $v = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\nu}\Big|_{\Sigma_0}$ é um controle, tal que, para dados iniciais $\{y^0,y^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, a solução y de (5.1) satisfaz:*

$$y(x,T,v) = 0 \ e \ y'(x,T,v) = 0.$$

Demonstração: Se $\{\bar{\phi}^0,\bar{\phi}^1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, é um mínimo do funcional J, então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\mathcal{J}\{\bar{\phi}^0,\bar{\phi}^1\} + h\{\phi^0,\phi^1\}\right) - \mathcal{J}\{\bar{\phi}^0,\bar{\phi}^1\}}{h} = 0,$$

logo,[1]

$$\iint_{\Sigma_0}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\nu}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt + \langle\{y^0,y^1\},\{\phi^1,\phi^0\}\rangle = \iint_{\Sigma_0}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\nu}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_\Omega y^0\phi^1 dx - \langle y^1,\phi^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0,$$

para todo $\{\phi^0,\phi^1\} \in H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, onde ϕ é a solução de (5.3). Assim, pela observação (5.3) temos que $v = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\nu}$, é tal que, para todo dado inicial $\{y^0,y^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, a solução y de (5.1) satisfaz:

$$y(x,T,v) = 0 \ e \ y'(x,T,v) = 0.$$

■

O Teorema a seguir mostra que se o controle v do problema (5.1) é obtido pela minimização do funcional, v é de norma mínima.

[1] Lembre da derivada de Gateux: $J'(u)v = \lim_{h\to 0}\frac{J(u+hv)-J(u)}{h}$

Teorema 5.3. *Seja* $v = \dfrac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}$ *o controle, tal que,* ϕ *é uma solução de* (5.3) *cujos dados iniciais* $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}$*, correspondem ao mínimo do funcional* J*. Se* $g \in L^2(\Sigma_0)$ *é outro controle, tal que, para todo par de dados iniciais* $\{y^1, y^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, a solução* y *de* (5.1)*, satisfaz* (5.2) *então,*

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)}.$$

Demonstração: Considerando $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\|v\|^2_{L^2(\Sigma_0)} = \iint_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}\right|^2 dt = -\int_\Omega y^0 \overline{\phi}^1 dx + \langle y^1, \overline{\phi}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \tag{5.13}$$

Por outro lado, por (5.8) e para $g \in L^2(\Sigma_0)$, obtemos:

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} g d\Gamma dt = -\langle \{y^0, y^1\}, \{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \rangle = -\int_\Omega y^0 \overline{\phi}^1 dx + \langle y^1, \overline{\phi}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \tag{5.14}$$

A partir de (5.13) e (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{L^2(\Sigma_0)} &= \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} g d\Gamma dt \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|_{L^2(\Sigma_0)} \\ &= \|g\|_{L^2(\Sigma_0)} \|v\|_{L^2(\Sigma_0)}, \end{aligned}$$

logo,

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)}.$$

■

5.1.2 Controlabilidade com controle Interno

Seja $\omega \subset \Omega$ e considere o problema

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = h\chi_\omega \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \ y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{5.15}$$

a ação do controle é no cilindro $\omega \times (0, T) \subset \Omega \times (0, T)$.

5.1.3 Formulação do Problema

Dado $T > 0$ suficientemente grande, encontrar um espaço de Hilbert H, tal que, para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0, T))$, tal que, a solução $y = y(x, T, h)$ de (5.15), satisfaz

$$y(x, T, h) = 0 \text{ e } y'(x, T, h) = 0. \tag{5.16}$$

Considere o problema

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.17}$$

com $\{\phi^0, \phi^1\} \in D(\Omega) \times D(\Omega)$.

Lema 5.3. *Seja ϕ a solução de (5.17) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Então, para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de (5.15), satisfaz (5.16) se, e somente se, existe h em $L^2(\omega \times (0,T))$, tal que,*

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - (\phi^0, y^1). \tag{5.18}$$

Demonstração: Suponhamos $\{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e $h \in \mathcal{D}(\omega \times (0,T))$. Multiplicando nossa equação por ϕ e integrando em Q, obtemos:

$$\int_\Omega \int_0^T \phi(y'' - \Delta y) dt dx = 0.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^T \phi(y'' - \Delta y) dt dx &= \int_\Omega (\phi y' - \phi' y) dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_\Omega y(\phi'' - \Delta\phi) dx dt \\ &= \int_\Omega \left[\phi(T) y'(T) - \phi'(T) y(T)\right] dx - \int_\Omega \left[\phi(0) y^1 - \phi'(0) y^0\right] dx = 0. \end{aligned}$$

Logo, para algum $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = -\langle \phi'(T), y(T) \rangle + \int_\Omega \phi(T) y'(T) dx + \langle \phi^1, y^0 \rangle - \int_\Omega \phi^0, y^1 dx. \tag{5.19}$$

Portanto, segue de (5.19) que y satisfaz a condição de equilíbrio se, e somente se,

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \phi^0 y^1 dx,$$

o que conclui a prova do resultado.

■

Definindo a dualidade em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ por

$$\langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\} \rangle = (y^0, \phi^1) - \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \tag{5.20}$$

Observação 5.4. *Utilizando a dualidade (5.20), o Lema 5.3, pode ser reescrito, substituindo (5.18) por (5.20),*

Lema 5.4. *Seja ϕ a solução de (5.17) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Então, para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de (5.15), satisfaz (5.16) se, e somente se, existe h em $L^2(\omega \times (0,T))$, tal que*

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = \langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{y^1, y^0\} \rangle. \tag{5.21}$$

Observação 5.5. *De acordo com (5.21), a propriedade interna pode ser transferida a encontrar pontos críticos do funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \ & L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \{\phi^0, \phi^1\} \longmapsto \mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \phi^2 dx dt + \langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{y^1, y^0\} \rangle. \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde ϕ é a solução de (5.17) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Nesse contexto, considere o seguinte resultado.

Teorema 5.4. *Seja $T > T(x^0)$. Então, o funcional $\mathcal{J}$ possui um único ponto de mínimo $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Demonstração: Novamente usando o Teorema 1.11, para confirmar a existência de um único mínimo para o funcional $\mathcal{J}$, devemos mostrar que ele é semicontínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo. A prova desses itens é feito análogo ao caso passado onde o controle estava localizado na fronteira.

- $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente.

  Da desigualdade direta (4.1), obtemos que

$$\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \leq \frac{1}{2} C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + \langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{y^1, y^0\} \rangle,$$

e portanto, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que,

$$\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \leq \frac{C}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \|\{y^0, y^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \tag{5.23}$$

Logo, de (5.23), deduzimos a continuidade do funcional $\mathcal{J}$, e consequentemente sua semicontinuidade inferior.

- $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

  Com efeito, sejam $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $\lambda \in (0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda \{\phi^0, \phi^1\} + (1-\lambda)\{\phi^0, \phi^1\}) = & \lambda \mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} + (1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi^0, \psi^1\} \\ & - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \int_0^T \int_\omega |\phi - \psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, já foi visto que, a desigualdade inversa (4.4) nos permite escrever que,

$$C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq \iint_{\Sigma_0}(\phi)^2 d\Gamma dt,$$

assim, usando esta desigualdade inversa, obtemos que é correto fazer,

$$\int_0^T\int_\omega |\phi-\psi|^2 dxdt \geq C\|\{\phi^0,\phi^1\}-\{\psi^0,\psi^1\}\|^2.$$

então, sendo $\iint_{\Sigma_0}|\phi-\psi|^2 dxdt>0$, tem-se que,

$$-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\iint_{\Sigma_0}|\phi-\psi|^2 dxdt<0,$$

assim, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\{\phi^0,\phi^1\}) &= \lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi^0,\psi^1\}\\ &\quad-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\iint_{\Sigma_0}|\phi-\psi|^2 d\Gamma dt\\ &<\lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi^0,\psi^1\},\end{aligned}$$

logo, para algum $\{\phi^0,\phi^1\}\neq\{\psi^0,\psi^1\}$, temos

$$\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\{\psi^0,\psi^1\})<\lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi^0,\psi^1\}.$$

Portanto, $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

- $\mathcal{J}$ é coercivo.

  De fato, por propriedade de módulo temos que

$$\langle\{\phi^0,\phi^1\},\{y^0,y^1\}\rangle\geq -\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Assim, podemos escrever a seguinte desigualdade,

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}\geq\frac{1}{2}\left(\int_0^T\int_\omega|\phi|^2 dxdt-\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\right).$$

Pela desigualdade inversa novamente (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} &\geq \frac{C}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}-\frac{1}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\|\{y^0,y^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\ &=\left(\frac{1}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right)\left(C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}-\|\{y^0,y^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{5.24}$$

A partir de (5.24), obtemos

$$\lim_{\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\longrightarrow\infty}\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\}=\infty.$$

Portanto, $\mathcal{J}$ é coercivo. Concluindo finalmente que, sendo satisfeito essas hipóteses o funcional $\mathcal{J}$ tem um único mínimo $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

■

Observação 5.6. *No que segue mostraremos que o mínimo do funcional J dado no Teorema 5.4, fornece o* ***controle de norma mínima****.*

Teorema 5.5. *Seja $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, o mínimo do funcional J. Se $\overline{\phi}$ corresponde a solução de (5.3) com dados iniciais $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}$, então $h\big|_\omega$ é um controle, tal que, para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de (5.1) satisfaz (5.16).*

Demonstração: Seja $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ o mínimo do funcional J. Então,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{J}\left(\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} + h\{\phi^0, \phi^1\}\right) - \mathcal{J}\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}}{h} = 0,$$

Assim,[2]

$$\int_0^T \int_\omega \overline{\phi}\phi dxdt + \int_\Omega y^1 \phi^0 dx - \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0,$$

para algum $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, onde ϕ é solução de (5.3). Assim, pelo Lema 5.4 temos que $h = \overline{\phi}\Big|_\omega$ é um controle, tal que para, dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de (5.1) satisfaz (5.16).

■

Teorema 5.6 (**Controle de Norma Mínima**)**.** *Seja $h = \overline{\phi}\big|_\omega$ o controle tal que $\overline{\phi}$ é a solução de (5.3), cujos dados iniciais $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}$ correspondem ao mínimo do funcional $\mathcal{J}$. Se $g \in L^2(\omega \times (0,T))$ é outro controle tal que os dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a solução y de (5.1) satisfaz (5.16). Então,*

$$\|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))}.$$

Demonstração: Seja $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}$ o mínimo do funcional $\mathcal{J}$. Considerando $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\|h\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} = \int_0^T \int_\omega \overline{\phi}^2 dxdt = \langle \overline{\phi}^1, y^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \overline{\phi}^0 y^1 dx, \tag{5.25}$$

agora pelo Lema 5.4 anterior, para $g \in L^2(\omega \times (0,T))$, obtemos

$$\int_0^T \int_\omega g\overline{\phi} dxdt = -\langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{y^1, y^0\} \rangle = -\int_\Omega \overline{\phi}^0 y^1 dx + \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}, \tag{5.26}$$

[2]Lembre da derivada de Gateux: $J'(u)v = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{J(u+hv) - J(u)}{h}$

de (5.25) e (5.26), resulta que

$$\begin{aligned}\|h\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} &= \int_0^T\int_\omega g\overline{\phi}dxdt \leq \|g\|_{L^2(\omega)\times(0,T)}\|\overline{\phi}\|_{L^2(\omega\times(0,T))}\\ &= \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))}\|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|h\|_{L^2(\omega)\times(0,T)}\leq \|g\|_{L^2(\omega)\times(0,T)}.$$

terminando assim, o que queríamos mostrar. ■

5.2 Controlabilidade da Equação do Calor via uma desigualdade de Calerman

Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado considere ω um subconjunto aberto de Ω e considere o seguinte sistema parabólico abaixo

$$\left|\begin{array}{l} y_t-\Delta y = u(t,x), \quad t\in(0,T), \quad x\in\Omega,\\ y=0 \qquad sobre \ \ (0,T)\times\partial\Omega,\end{array}\right. \tag{5.1}$$

onde no tempo $t\in[0,T]$, o estado é $y(t,\cdot)\in L^2(\Omega)$ e o controle é $u(t,\cdot)\in L^2(\Omega)$. Vamos supor que

$$u(\cdot,x)=0, \qquad x\in\Omega\setminus\omega. \tag{5.2}$$

Vamos considerar o caso do **controle interno**.

Considere o problema de Cauchy

$$\left|\begin{array}{l} y_t-\Delta y = u(t,x), \quad t\in(0,T), \quad x\in\Omega,\\ y=0, \ \text{sobre} \ (0,T)\times\partial\Omega,\\ y(0,x)=y^0(x), \quad x\in\Omega,\end{array}\right. \tag{5.3}$$

onde $T>0,\ y^0\in L^2(\Omega)$ e $u\in L^2((0,T)\times\Omega)$ são dados.

5.2.1 Motivação para a Definição de Solução

Seja $y\in C^2([0,T];\bar{\Omega})$ uma solução do problema (5.3) no sentido usual. Dado $\tau\in[0,T]$, seja $\phi\in C^2([0,\tau]\times\bar{\Omega})$, tal que

$$\phi(t,x)=0, \quad \forall(t,x)\in[0,\tau]\times\partial\Omega, \tag{5.4}$$

multiplicando em $(5.3)_1$ por ϕ e integrando sobre $[0,\tau]\times\Omega$, temos que:

$$0=\int_0^\tau\int_\Omega y_t\phi dxdt-\int_0^\tau\int_\Omega \Delta y\phi dxdt-\int_0^\tau\int_\Omega u\phi dxdt, \tag{5.5}$$

usando integração por partes na primeira integral, como

$$\int_\Omega y_t\phi dx=(y_t,\phi)=(y,\phi)'-(y,\phi_t),$$

temos que,

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_\Omega y_t\phi dxdt&=\int_0^\tau (y,\phi)'dt-\int_0^\tau\int_\Omega y\phi_t dxdt\\&=\int_\Omega y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx-\int_\Omega y(0,x)\phi(0,x)dx-\int_0^T\int_\Omega y\phi_t dxdt,\end{aligned}$$

e da segunda integral por Green, conseguimos ver que

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Delta y\phi dxdt=\int_0^\tau\int_\Omega y\Delta\phi dxdt,$$

pois, y e ϕ se anula em $(0,T)\times\partial\Omega$. Por isso, substituindo os resultados das integrais em (5.5) temos que:

$$\begin{aligned}0=&\int_\Omega y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx-\int_\Omega y(0,x)\phi(0,x)dx-\int_0^\tau\int_\Omega \phi_t y dxdt\\&-\int_0^\tau\int_\Omega \Delta\phi y dxdt-\int_0^\tau\int_\Omega u\phi dxdt,\end{aligned}$$

colocando y em evidencia e usando o fato que $y(0,x)=y^0(x)$, temos que

$$-\int_0^\tau\int_\Omega y(\phi_t+\Delta\phi)dxdt-\int_0^\tau\int_\Omega u\phi dxdt+\int_\Omega y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx-\int_\Omega y^0(x)\phi(0,x)dx=0,$$

esta igualdade motiva a seguinte definição.

Definição 5.1. *Sejam $T>0$, $y^0\in L^2(\Omega)$ e $u\in L^2((0,T)\times\Omega)$ dados. Uma **solução** para o problema de Cauchy (5.3) é uma função $y\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, tal que, para todo $\tau\in[0,T]$ e para todo $\phi\in C^0([0,\tau];H^1(\Omega))$, satisfazendo*

$$\phi(t,\cdot)\in H_0^1(\Omega),\quad \forall t\in[0,\tau], \tag{5.6}$$

$$\phi_t\in L^2((0,T)\times\Omega),\quad \Delta\phi\in L^2((0,T)\times\Omega), \tag{5.7}$$

temos

$$-\int_0^\tau\int_\Omega y(\phi_t+\Delta\phi)dxdt-\int_0^\tau\int_\Omega u\phi dxdt+\int_\Omega y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx-\int_\Omega y^0(x)\phi(0,x)dx=0. \tag{5.8}$$

5.2.2 Existência e Unicidade de Solução

De posse do que foi visto a respeito do que envolve o conceito de solução para o problema parabólico (5.1), mostraremos o seguinte teorema apresentado a seguir.

Teorema 5.7. *Sejam $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$ dados. Então o problema de Cauchy (5.3) tem uma única solução y, esta solução satisfaz,*

$$\|y(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right), \tag{5.9}$$

para algum $C > 0$ que não depende de $(y^0, u) \in L^2(\Omega) \times L^2((0,T)\times\Omega)$.

Demonstração: Provaremos inicialmente a existência de solução.

Existência: Para existência, usamos a teoria de semigrupo de operadores lineares (ver Alvercio [8] e Pazy, [27]).

Considere o operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, onde

$$D(A) = \{y \in H_0^1(\Omega); \quad \Delta y \in L^2(\Omega)\},$$

definido por

$$Ay := \Delta y.$$

Note que estamos supondo que Ω é apenas um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, assim não temos necessariamente $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, contudo, temos que $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$, pois $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A)$ e é denso em $L^2(\Omega)$.

Além disso, A é contínuo[3], em particular, fechado. De fato, seja (y_n) uma sequência em $D(A)$ com $y_n \longrightarrow y$ em $D(A)$, para algum $y \in D(A)$, então

$$y_n \longrightarrow y \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } \Delta y_n \longrightarrow \Delta y \text{ em } L^2(\Omega),$$

logo,

$$Ay_n \longrightarrow Ay,$$

e mais,

$$(Ay, y)_H = \int_\Omega \Delta y y dx = -\int_\Omega |\nabla y|^2 dx \leq 0, \quad y \in D(A),$$

ou seja, A é dissipativo. Além disso, $0 \in \rho(A)$[4]. Ou seja, para mostrar esta afirmação devemos mostrar que

$$(0.\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(x).$$

[3]Note que, pela definição de A, temos que: $A(y_n) = \Delta y_n \longrightarrow \Delta y = A(y)$

[4]Lembre que o conjunto resolvente de A é dado por $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(x)\}$

Seja $u \in H = L^2(\Omega)$, considere o problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta y = u(x) \quad em \quad \Omega, \\ \quad y = 0 \quad em \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Ja foi provado em Badiali [2] que este problema tem única solução fraca $y \in D(A)$. Portanto, temos a sobrejetividade do operador

$$-\Delta : D(A) \longrightarrow L^2(\Omega).$$

Logo, como $A : D(A) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é linear, contínua e sobrejetiva, e por construção e unicidade da solução é injetiva, assim é bijetiva, então pelo corolário do Teorema da Aplicação Aberta tem-se que A^{-1} é um operador linear e contínuo, ou seja, limitado. Daí $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, isto é

$$(0.I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Ou seja, existe única $y \in D(A)$ tal que

$$(0.I - \Delta)y = u,$$

donde segue que $0 \in \rho(A)$ e como A é dissipativo pelo Lema de Liu-Zheng 1.17 A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração fortemente contínuo, de operadores lineares $S(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad t \in [0, \infty)$.

Observação 5.7. *Note que podemos garantir que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contração pelo Teorema de Lumer-Phillips 1.19, mostrando que $A = A^*$ sem muitas dificuldade. Ou seja,*

$$(Ay, z) = \int_\Omega \Delta y.zdx = \int_\Omega y\Delta zdx = (y, Az),$$

Agora dados $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$, sejam $(y_n^0) \subset D(A)$ e $(u_n) \subset C_0^1([0,T]; L^2(\Omega))$, tais que

$$u_n \longrightarrow u \quad em \quad L^2((0,T) \times \Omega), \qquad n \to \infty, \tag{5.10}$$

e

$$y_n^0 \longrightarrow y^0 \quad em \quad L^2(\Omega), \qquad n \to +\infty, \tag{5.11}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n^0 \in D(A)$ e $u_n \in C_0^1([0,T]; L^2(\Omega))$, sendo A densamente definido, fechado e dissipativo, segue que (ver Coron [6], p. 375) existe uma única função

$$y_n \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; D(A)),$$

que é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} y_{nt} - \Delta y_n = u_n \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ y_n = 0 \text{ sobre } (0,T)\times\partial\Omega, \\ y_n(0,x) = y_n^0(x), \;\; x\in\Omega, \end{array}\right. \tag{5.12}$$

então, multiplicando em $(5.12)_1$ por y_n e integrando em $(0,t)\times\Omega$ e $t\in[0,T]$, resulta que

$$\int_0^t\int_\Omega y_{nt}y_n dxds - \int_0^t\int_\Omega \Delta y_n y_n dxds = \int_0^t\int_\Omega y_n u_n dxds, \tag{5.13}$$

da primeira integral, temos:

$$\int_\Omega y_{nt}y_n dx = (y_{nt}, y_n) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_0^t\int_\Omega y_{nt}y_n dxds = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|y_n(s)\|^2 ds = \frac{1}{2}\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y_n^0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da segunda integral, usando Teorema de Green 1.9, temos

$$\int_\Omega \Delta y_n y_n dx = \int_\Omega \nabla y_n \nabla y_n dx = \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx = \|y_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_0^t\int_\Omega \Delta y_n y_n dx = \int_0^t \|y_n(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

substituindo os resultados dessas integrais em (5.13) obtemos:

$$\frac{1}{2}\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y_n^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|y_n(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leq \int_0^t \int_\Omega y_n u_n dxds,$$

usando Cauchy-Scharwz e desigualdade elementar na ultima integral, obtemos:

$$\frac{1}{2}\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y_n^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|y_n(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|y_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)},$$

logo,

$$\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|y^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \int_0^t \|y_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds, \quad \forall t\in[0,T],$$

assim, pelo desigualdade de Gronwall, segue que

$$\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^T \left(\|y_n^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right), \quad \forall t\in[0,T],$$

portanto[5], existe $C>0$ (independente de u_n e y_n^0), tal que

$$\|y_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|y_n^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right), \quad \forall t\in[0,T],$$

[5] Note que, $a^2+b^2 \leq a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

o que implica,

$$\|y_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\leq C\left(\|y_n^0\|_{L^2(\Omega)}+\|u_n\|_{L^2((0,T);\Omega)}\right). \tag{5.14}$$

Agora, da linearidade do problema, temos de (5.14) que

$$\|y_n-y_m\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\leq C\left(\|y_n^0-y_m^0\|_{L^2(\Omega)}+\|u_n-u_m\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right),\quad \forall m,n\in\mathbb{N}, \tag{5.15}$$

mas, por (5.10), (5.11), (u_n) e (y_n) são sequencias de Cauchy em $L^2((0,T)\times\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Então, por (5.15), (y_n) é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$, logo, existe $y\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, tal que,

$$y_n\longrightarrow y \ \ em \ \ C^0([0,T];L^2(\Omega)),\qquad n\to+\infty. \tag{5.16}$$

Agora, para cada $n\in\mathbb{N}$, como y_n é solução do problema (5.12), por definição, dado $\tau\in[0,T]$ e $\phi\in C^0([0,\tau];H^1(\Omega))$ verificando (5.6) e (5.7), obtemos

$$-\int_0^\tau\int_\Omega(\phi_t+\Delta\phi)y_n dxdt-\int_0^T\int_\Omega u_n\phi dxdt+\int_\Omega y_n(\tau,x)\phi(\tau,x)-\int_\Omega y_n^0(x)\phi(0,x)dx=0, \tag{5.17}$$

Portanto, usando (5.16) e passando ao limite em (5.14) e (5.17), quando $n\to\infty$, segue que y é solução do problema (5.3) e verifica (5.9).

<u>Unicidade:</u> No que segue, mostraremos a unicidade de solução para o problema (5.3).

Dados $T>0$, $y^0\in L^2(\Omega)$ e $u\in L^2((0,T)\times\Omega)$, suponha que o problema (5.3) tenha duas soluções $y_1,y_2\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Defina,

$$y:=y_2-y_1\in C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

então, y é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} y_t-\Delta y=0 \text{ em } (0,T),\\ y=0, \text{ sobre } (0,T)\times\partial\Omega,\\ y(0,x)=0,\quad x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{5.18}$$

Logo, dado $\tau\in[0,T]$, para todo $\phi\in C^0([0,T];H^1(\Omega))$ que verifica (5.6), temos

$$-\int_0^\tau\int_\Omega(\phi_t+\Delta\phi)ydxdt+\int_\Omega y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx=0, \tag{5.19}$$

fixe $\tau\in[0,T]$, considere os espaços

$$X_\tau:=C^1([0,\tau];L^2(\Omega))\cap C^0([0,\tau];D(A)),$$

e

$$Y_\tau:=\{\phi\in C^0([0,\tau];H^1(\Omega));\ \ \phi \ \ verifica \ \ (5.6)\},$$

e note que X_τ é denso em Y_τ. Desse modo, (5.19) vale para todo $\phi \in X_\tau$. Ainda para $\tau \in [0,T]$ fixado, como $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$, existe $(f_n) \in D(A)$, tal que,

$$f_n \longrightarrow y(\tau,\cdot) \text{ em } L^2(\Omega), \qquad n \to \infty. \tag{5.20}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\psi_n \in C^1([0,\tau];L^2(\Omega)) \cap C^0([0,\tau];D(A))$ a única solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\psi_n = A\psi_n, \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ \psi_n(0,x) = f_n(x), \ x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{5.21}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, definindo,

$$\phi_n(t,x) := \psi_n(\tau - t, x), \quad \forall (t,x) \in (0,T)\times\Omega,$$

temos que $\phi_n \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T];D(A))$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, (5.19) vale com $\phi = \phi_n$. Por outro lado, de (5.21), temos

$$\phi_{nt} + \Delta\phi_n = -\psi_{nt} + \Delta\psi_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.22}$$

$$\phi_n(\tau,x) = \psi_n(0,x) = f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \tag{5.23}$$

desse modo, substituindo (5.22) e (5.23) em (5.19), segue que

$$\int_\Omega y(\tau,x) f_n(x)dx = 0.$$

Então, fazendo $n \to +\infty$, temos

$$\int_\Omega |y(\tau,x)|^2 dx = 0.$$

Logo, $y(\tau,\cdot) = 0$. Portanto, como $\tau \in [0,T]$ é fixo porém arbitrário segue que $y = 0$. O que prova a unicidade do problema (5.3).

∎

5.2.3 Controlabilidade Exata da Equação do Calor

Definição 5.2. *O sistema (5.1) é* ***controlável*** *se, para todo T, para todo $y^0 \in L^2(\Omega)$, para todo $\hat{u} \in L^2((0,T)\times)$, tal que,*

$$\hat{u}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega \setminus \bar{\omega}, \tag{5.24}$$

e tal que $\hat{y}$ é solução do problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} \hat{y}_t - \Delta\hat{y} = \hat{u}(t,x), \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \\ \hat{y} = 0, \ \textit{sobre } (0,T)\times\partial\Omega, \\ \hat{y}(0,x) = \hat{y}(0,\cdot)(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{5.25}$$

existe $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$, verificando (5.2), tal que, a solução y do problema de Cauchy (5.3), satisfaz $y(T,\cdot) = \hat{y}(T,\cdot)$.

Observação 5.8. *A definição (5.2) é equivalente a definição de controlabilidade nula (Ver Apêndice). De fato, considerando a definição (5.2), dados y^0 $\hat{y}^0$ em $L^2(\Omega)$, pondo $\hat{u} = 0$ e $\hat{y}(0,\cdot) = \tilde{y}^0$, temos*

$$\hat{y} = S(t)\tilde{y}^0,$$

onde $S(t)$[6] é o semigrupo fortemente contínuo associado ao operador $A = \Delta$. Logo, existe $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$, tal que

$$y(T,\cdot) = \hat{y}(T,\cdot) = S(T)\tilde{y}^0.$$

Portando, o sistema (5.1) é de controlabilidade nula.

Reciprocamente, suponha que o sistema (5.1) é de controlabilidade nula, então dados

$$y^0 \in L^2(\Omega), \quad \hat{y} \in C^0([0,T];L^2(\Omega)), \quad \hat{u} \in L^2((0,T)\times\Omega),$$

com $\hat{u}$ verificando (5.24) e $\hat{y}$ solução de (5.25), existe $\bar{u} \in L^2((0,T)\times\Omega)$ satisfazendo (5.2), tal que, a solução $\bar{y} \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ do problema de Cauchy

$$\left|\begin{array}{l} \bar{y}_t - \Delta\bar{y} = \bar{u}, \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega, \\ \bar{y} = 0 \ \textit{sobre} \ (0,T)\times\partial\Omega, \\ \bar{y}(0,x) = y^0(x) - \hat{y}(0,x), \end{array}\right.$$

satisfaz

$$\bar{y}(T,\cdot) = 0, \tag{5.26}$$

logo, definindo $u = \hat{u} + \bar{u}$ e

$$y := \hat{y} + \bar{y},$$

temos que $y \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e

$$y_t = \hat{y}_t + \bar{y}_t = \Delta\hat{y} + \hat{u} + \Delta\bar{y} + \bar{u} = \Delta(\hat{y}+\bar{y}) + u = \Delta y + u,$$

$$y = 0 \ \textit{sobre} \ (0,T)\times\partial\Omega,$$

$$y(0,x) = \hat{y}(0,x) + y^0(x) - \hat{y}(0,x) = y^0(x).$$

Assim, y é solução do problema de Cauchy (5.3) e

$$y(T,\cdot) = \hat{y}(T,\cdot) + \bar{y}(T,\cdot) = \hat{y}(T,\cdot).$$

Portanto, o sistema (5.1) é controlável conforme a definição (5.2).

Teorema 5.8. *Suponha que Ω é um conexo de classe C^2. Então, o sistema (5.1) é controlável.*

Antes de demonstrar este resultado, vamos provar alguns resultados que irá garantir a controlabilidade do sistema (5.1).

[6]De acordo com a teoria de semigrupo lembre que se u é solução do problema de Cauchy e $u_0 \in D(A)$ é a condição inicial. Então, a solução u do problema de Cauchy é dada por $u(t) = S(t)u_0$.

Proposição 5.1. *Suponha que, para todo $T > 0$, existe $M > 0$, tal que, para todo $y^0 \in L^2(\Omega)$, a solução y do problema de Cauchy*

$$\left| \begin{array}{l} y_t - \Delta y = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y = 0 \ \textit{sobre} \ (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(0,x) = y^0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{5.27}$$

satisfaz,

$$\|y(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M^2 \int_0^T \int_\omega y^2 dx dt. \tag{5.28}$$

Então, o sistema (5.1), (5.2) é controlável.

Demonstração: Mostraremos no final desta demonstração porque a desigualdade de observabilidade implica na controlabilidade nula do sistema (5.27).

Prova da desigualdade (5.28).

Vamos obter uma desigualdade de Carleman que implica a desigualdade de observabilidade (5.28).Vamos supor que $y^0 \in H^1_0(\Omega)$. Seja y a solução do problema de Cauchy (5.27). Considere ω_0 um subconjunto de ω com $\bar{\omega_0} \subset \omega$.

Lema 5.5 (**Fursikov-Imanuvilov**). *Existe $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, tal que,*

$$\psi > 0 \ \textit{em} \ \Omega, \quad \psi = 0 \ \textit{sobre} \ \partial\Omega. \tag{5.29}$$

$$|\nabla\psi(x)| > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \diagdown \omega_0. \tag{5.30}$$

Demonstração do Lemma 5.5:

Para $n = 1$ o Lema de Fursikov-Imanuvilov 5.5 é verdadeiro. De fato, neste caso, sem perda de generalidade, podemos supor $\Omega = (-1,1)$ e $\omega_0 = (-1/2, 1/2)$. Logo, considerando

$$\begin{aligned} \psi : \ \ & [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \ \longmapsto \psi(x) = 1 - x^2, \end{aligned}$$

vemos que $\psi \in C^2([-1,1])$ e verifica (5.29) e (5.30). Vamos supor que $n \geq 2$. Seja $g \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

- O conjunto $G = \{x \in \overline{\Omega}, \nabla g(x) = 0\}$ é finito e $G \subset \Omega$.
- $g > 0$ sobre Ω e $g = 0$ sobre $\partial\Omega$.

A existência de uma tal função g segue da Teoria Morse. Sejam $\{a_1, \ldots, a_k\}$ os elementos de Ω, tais que, $\nabla g(a_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$. Sejam $\gamma_i \in C^\infty([0,1]; \Omega)$, tal que,

$$\gamma_i \text{ é injetora para todo } i \in \{1, \ldots, k\}, \tag{5.31}$$

$$\gamma_i([0,1]) \cap \gamma_j([0,1]) = \varnothing, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad i \neq j, \tag{5.32}$$

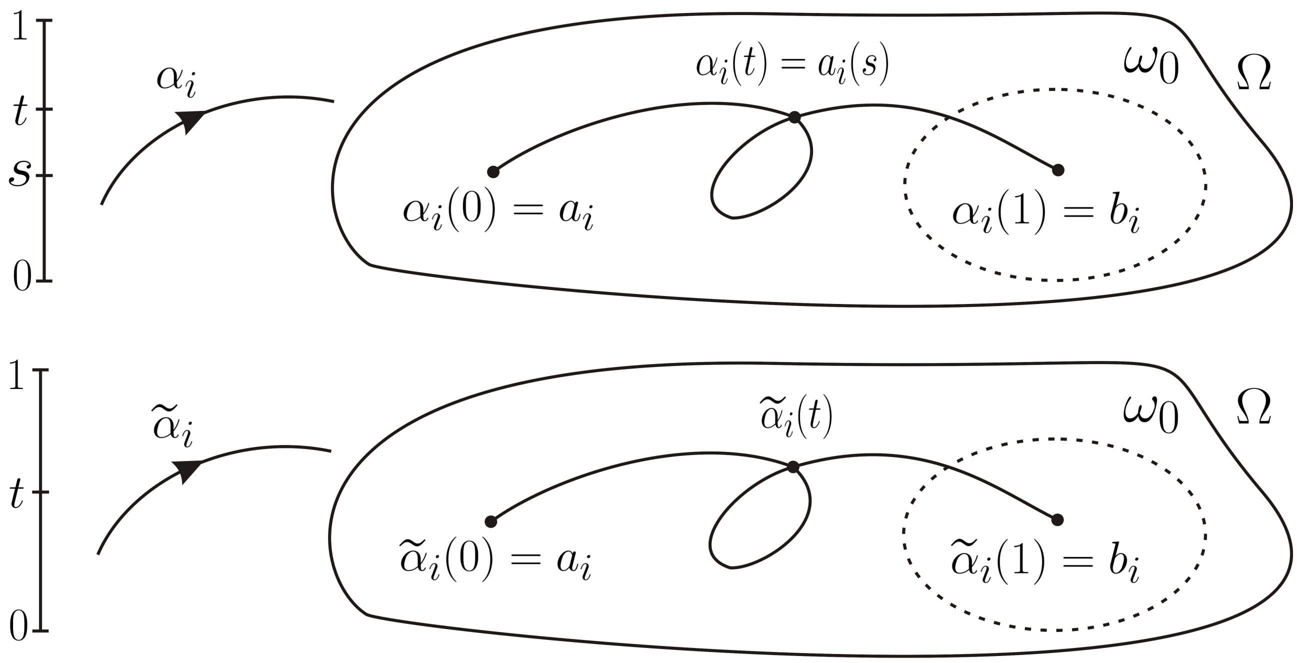
$$\gamma_i(0) = a_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}, \tag{5.33}$$

$$\gamma_i(1) = b_i \in \omega_0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{5.34}$$

Essas funções $\gamma_i' s$ existe. De fato, como Ω é aberto e conexo ele é conexo por caminhos. Logo, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe uma função contínua

$$\alpha_i : [0,1] \longrightarrow \Omega,$$

tal que $\alpha_i(0) = a_i$ e $\alpha_i(1) = b_i$. Note que se α_i não for injetiva podemos, pela conexidade de Ω, definir um caminho $\tilde{\alpha}_i$ com os mesmos extremos e injetivo.



Pelo mesmo argumento, sendo $\{1, \ldots, k\}$ finito podemos obter caminhos α, s tais que

$$\alpha_i([0,1]) \cap \alpha_j([0,1]) = \varnothing, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad i \neq j.$$

Por fim, como $[0,1]$ é compacto, podemos aproximar α_i $i \in \{1, \ldots, k\}$, por uma $\gamma_i \in C^\infty([0,1]; \Omega)$, com $\gamma_i(0) = a_i$, $\gamma_i(1) = b_i$, uniformemente. Portanto, estas funções γ_i satisfazem (5.31)$-$(5.34).

Agora, como para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\gamma_i \in C^\infty([0,1]; \Omega)$ verifica (5.31) $-$ (5.34), existe $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n ; X(x) \neq 0\} \subset \Omega. \tag{5.35}$$

$$X(\gamma_i(t)) = \gamma_i'(t), \quad i \in \{1, \cdots, k\}. \tag{5.36}$$

Seja ϕ o fluxo associado (ver (1.9)) ao campo X, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (t, x) \quad \longmapsto \phi(t, x), \end{aligned}$$

satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) = X(\phi(t, x)), \quad \phi(0, x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Da unicidade de solução local para o problema de Cauchy associado a X, temos

$$\phi(t, a_i) = \gamma_i(t), \quad \forall t \in [0, 1], \tag{5.37}$$

De (5.34) e (5.37) segue que

$$\phi(1, a_i) = \gamma_i(1) = b_i \in \omega_0, \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}, \tag{5.38}$$

e mais, das propriedades de fluxo (para mais detalhes, ver Sotomayor [31] sabemos que para todo $\tau \in \mathbb{R}, \phi(\tau, \cdot)$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, cuja inversa é $\phi(\tau, \cdot)$. Além disso, para todo $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\tau, \Omega) = \Omega \quad e \quad \phi(\tau, x) = x, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

De fato, dado $x \in \Omega$ e suponha por absurdo que $\phi(\tau, x) \notin \Omega$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$, então $X(\phi(\tau, x)) = 0$, daí

$$\phi(t, \phi(T, x)) = \psi(t, x) = \phi(t, x) = \phi(\tau, x), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) = X(\phi(t, x)), \\ \phi(0, \phi(\tau, x)) = \phi(\tau, x), \end{array} \right.$$

logo,

$$x = \phi(-\tau, \phi(T, x)) = \psi(-\tau, x) = \phi(\tau, x) \notin \Omega,$$

o que é um absurdo, pois $x \in \Omega$. Portanto, $\phi(\tau, x) \in \Omega$. Assim,

$$\phi(T, \Omega) \subset \Omega, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, dado $x \in \Omega$, pelo que já foi feito

$$y = \phi(-\tau, x) \in \Omega, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

então,

$$x = \phi(\tau, \phi(-\tau, x)) = \phi(\tau, y) \in \phi(\tau, \Omega),$$

logo,

$$\Omega \subset \phi(\tau, \Omega), \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

portanto,

$$\phi(\tau, \Omega) = \Omega, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

para x próximo a $\partial\Omega$, e por (5.35) temos $X(x) = 0$, então

$$\psi(t, x) = x, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

satisfaz,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t, x) = 0 = X(x) = X(\psi(t, x)), \\ \psi(0, x) = x, \end{cases}$$

ou seja, $\psi(t, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, concluímos que para todo $\tau \in \mathbb{R}$, existe uma vizinhança de V de $\partial\Omega$ tal que

$$\phi(\tau, x) = x, \quad \forall x \in V.$$

Agora, considere

$$\begin{aligned} \psi : \ & \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \psi(x) := g(\phi(-1, x)), \end{aligned}$$

temos que $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, pois como $\phi(-1, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(-1, \Omega) = \Omega$ e $\phi(-1, x) = x$, para todo $x \in \partial\Omega$, então $\phi(-1, \cdot) : \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Omega}$ é de classe $C^2(\bar{\Omega})$. Logo, como $g \in C^2(\bar{\Omega})$ segue que $\psi = g(\phi(-1, \cdot)) \in C^2(\bar{\Omega})$.

Dado, $x \in \Omega$, temos $\phi(-1, x) \in \Omega$ e como $g > 0$ em Ω, temos

$$\psi(x) = g(\phi(-1, x)) > 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

e $\phi(-1, x) = x$, para todo $x \in \partial\Omega$, então com $g = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos

$$\psi(x) = g(\phi(-1, x)) = g(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

por fim, onde que se $x \in \bar{\Omega} \diagdown \omega_0$, então por (5.38)

$$x \neq \phi(1, a_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\},$$

daí, como $\phi(-1, \cdot)$ é difeomorfismo,

$$\phi(-1, x) \neq \phi(-1, \phi(1, a_i)) = a_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\},$$

logo,

$$\nabla\psi(x) = \nabla g(\phi(-1, x)) \neq 0.$$

Portanto,

$$|\nabla\psi(x)|>0, \quad \forall x\in\bar{\Omega}\diagdown\omega_0,$$

o que conclui a demonstração do Lema de Fursikov-Imanuvilov 5.5.

■

Prova da Desigualdade de Observabilidade.

Fixe ψ como no Lema de Fursikov-Imanuvilov 5.5. Sejam $\alpha:(0,T)\times\bar{\Omega}\longrightarrow(0,+\infty)$ e $\phi:(0,T)\times\bar{\Omega}\longrightarrow(0,+\infty)$

$$\alpha(t,x)=\frac{e^{2\lambda\|\psi\|_{C^0(\Omega)}}-e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \forall(t,x)\in(0,T)\times\bar{\Omega}, \tag{5.39}$$

$$\phi(t,x)=\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \forall(t,x)\in(0,T)\times\bar{\Omega}, \tag{5.40}$$

onde $\lambda\in[1,+\infty)$ será escolhido posteriormente. Seja $z\in[0,T]\times\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por

$$z(t,x):=e^{-s\alpha(t,x)}y(t,x), \quad (t,x)\in(0,T)\times\bar{\Omega}, \tag{5.41}$$

$$z(0,x):=z(T,x)=0, \quad x\in\bar{\Omega}, \tag{5.42}$$

onde $s\in[1,+\infty)$ será escolhido posteriormente. Defina,

$$P_1:=-\Delta z-s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2z+s\alpha_tz, \tag{5.43}$$

$$P_2:=z_t+2s\lambda\phi\nabla\psi\nabla z+2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2z, \tag{5.44}$$

$$P_3:=-s\lambda\phi(\Delta\psi)z+s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2z, \tag{5.45}$$

Provemos que

$$P_1+P_2=P_3. \tag{5.46}$$

De fato, temos por (5.39) e (5.40)

$$\frac{\partial\alpha(t,x)}{\partial x_i}=\frac{-\lambda\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}=-\lambda\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}=-\lambda\phi(t,x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,\dots,n, \tag{5.47}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\alpha(t,x)}{\alpha x_i^2}&=\frac{-\lambda\dfrac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_i}e^{\lambda\psi(x)}-\lambda\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\lambda\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}\\&=\frac{-\lambda\dfrac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_i^2}e^{\lambda\psi(x)}-\lambda^2\left(\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\right)^2e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}\\&=-\lambda\phi(t,x)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_i^2}-\lambda^2\phi\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\right)^2, \quad i=1,\dots,n,\end{aligned} \tag{5.48}$$

então, a partir de (5.47) e (5.48), obtemos que

$$\nabla\alpha = -\lambda\phi\nabla\psi, \tag{5.49}$$

e

$$\Delta\alpha = -\lambda\phi\nabla\psi - \lambda^2\phi|\nabla\psi|^2, \tag{5.50}$$

e mais, por (5.41), segue que

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial x_i} = -s\frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i}e^{-s\alpha(t,x)}y(t,x) + e^{-s\alpha(t,x)}\frac{\partial y(t,x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{5.51}$$

e derivando novamente, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x_i^2} &= -s\frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial x_i^2}e^{-s\alpha(t,x)}y(t,x) + s^2\left(\frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i}\right)^2 e^{-2\alpha(t,x)}y(t,x)\\ &\quad - s\frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i}e^{-s\alpha(t,x)}\frac{\partial y}{\partial x_i}(t,x) - s\frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i}e^{-s\alpha(t,x)}\frac{\partial y(t,x)}{\partial x_i}\\ &\quad + e^{-s\alpha(t,x)}\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x_i^2},\end{aligned} \tag{5.52}$$

logo, por (5.51) temos:

$$\nabla z = -s(\nabla\alpha)z + e^{-2\alpha(t,x)}(\nabla y),$$

e assim, por (5.49), obtemos:

$$\nabla z = s\lambda\phi(\nabla\psi)z + e^{-s\alpha}(\nabla y), \tag{5.53}$$

$$\Delta z = -s(\Delta\alpha)z + s^2|\nabla\alpha|^2 z - 2se^{-s\alpha}(\nabla\alpha\nabla y) + e^{-2\alpha}(\Delta y).$$

Assim, por (5.52), (5.50) e (5.53) resulta que,

$$\Delta z = -s\left(-\lambda\phi\Delta\psi - \lambda^2\phi|\nabla\psi|^2\right)z + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z +$$

$$+2s\lambda\phi[\nabla\psi_0(e^{-s\alpha}(\nabla y))] + e^{-s\alpha}(\Delta y)$$

$$\Delta z = s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z +$$

$$+2s\lambda\phi[\Delta\psi(\nabla z - s\lambda\phi(\nabla\psi)z)] + e^{-s\alpha}(\Delta y)$$

$$\Delta z = s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z +$$

$$+2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) - 2s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z + e^{-s\alpha}(\Delta y)$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z +\\ &\quad + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + e^{-s\alpha}(\Delta y).\end{aligned} \tag{5.54}$$

Além disso,

$$z_t(t,x) = -s\alpha_t(t,x)e^{-s\alpha(t,x)}y(t,x) + e^{-s\alpha(t,x)}y_t(t,x),$$

então, por (5.27)$_1$ e (5.41)

$$z_t = -s\alpha_t z + e^{-s\alpha}(\Delta y), \tag{5.55}$$

logo, de (5.43), (5.44), (5.45), (5.54) e (5.55), obtemos

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= -\Delta z - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z + s\alpha_t z + z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z \\ &= -s\lambda\phi(\Delta\psi)z - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z - 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) - e^{-s\alpha}(\Delta y) \\ &- s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z + s\alpha_t z - s\alpha_t z + e^{-s\alpha}(\Delta y) + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z \\ &= -s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z = P_3, \end{aligned}$$

o que prova (5.46).

Motivação da escolha de P_1, P_2 e P_3.

Justificativa::

Da definição da função z em (5.41) tem-se que $y(t,x) = e^{s\alpha}z(t,x)$. Considere $g = e^{-s\alpha}u$ onde,

$$u = y_t - \Delta y.$$

Note que,

$$y_t = s\alpha_t e^{s\alpha}z + e^{s\alpha}z_t,$$

e

$$y_{tt} = s\alpha_{tt}e^{s\alpha}z + s\alpha_t s\alpha_t e^{s\alpha}z + s\alpha_t e^{s\alpha}z_t + s\alpha_t e^{s\alpha}z_t + e^{s\alpha}z_{tt},$$

assim obtemos:

$$\Delta y = s(\Delta\alpha)e^{s\alpha}z + s^2(\nabla\alpha)^2 e^{s\alpha}z + s(\nabla\alpha)e^{s\alpha}(\nabla z) + s(\nabla\alpha)e^{s\alpha}(\nabla z) + e^{s\alpha}(\Delta z),$$

assim, como $u = y_t - \Delta y$, temos

$$\begin{aligned} u &= s\alpha_t e^{s\alpha}z + e^{s\alpha}z_t - 2s(\nabla\alpha\nabla z)e^{s\alpha} - s(\Delta z)e^{s\alpha}z - s^2(\nabla\alpha)^2 e^{s\alpha}z - e^{s\alpha}(\Delta z) \\ &= e^{s\alpha}\left(s\alpha_t z + z^t - 2s(\nabla\alpha\nabla z) - s(\Delta\alpha)z - s^2(\nabla\alpha)^2 z - \Delta z\right). \end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{-s\alpha}$ em ambos os membros e usando o fato que $g = e^{-s\alpha}u$ temos:

$$g = s\alpha_t z + z^t - 2s(\nabla\alpha\nabla z) - s(\Delta\alpha)z - s^2(\nabla\alpha)^2 z - \Delta z,$$

agora, como

$$\nabla\alpha = -\lambda\phi\nabla\psi,$$

e

$$\Delta\alpha = -\lambda\phi\nabla\psi - \lambda^2\phi|\psi|^2,$$

temos que,

$$g = s\alpha_t z + z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + s\lambda\phi(\Delta\psi)z$$
$$+ s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z - s^2\lambda^2\phi^2(\nabla\psi)^2 z - \Delta z,$$

daí, escolhemos nosso P_1, sendo

$$P_1 = -\Delta z - s^2\lambda^2\phi^2(\nabla\psi)^2 z + s\alpha_t z,$$

logo, ficamos com

$$g = P_1 + z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z.$$

Somando $s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z$, em ambos lados temos

$$s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z + g = P_1 + z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + s\lambda\phi(\Delta\psi)z + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z,$$

daí, escolhemos P_2, sendo

$$P_2 = z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z,$$

daí, obtemos

$$P_1 + P_2 = g + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z - s\lambda\phi(\Delta z)z,$$

onde na verdade o termo do segundo membro é o nosso P_3. Ou seja:

$$P_3 = s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z - s\lambda\phi(\Delta z)z,$$

$\blacksquare$

Agora seja $Q := (0,T)\times\Omega$. De (5.46), temos

$$2\iint_Q P_1P_2\,dxdt \leq \iint_Q P_3^2\,dxdt, \tag{5.56}$$

por $(5.27)_2$, (5.41), segue que

$$z = 0 \text{ sobre } [0,T]\times\partial\Omega, \tag{5.57}$$

denotaremos por η o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Temos

$$
\begin{aligned}
2\iint_Q P_1P_2dxdt &= 2\iint_\Omega(-\Delta z - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z + s\alpha_t z)(z_t + 2s\lambda\phi(\nabla\psi\nabla z) + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z)dxdt \\
&= -2\int_0^T\int_\Omega \Delta z z_t dxdt - 4\int_0^T\int_\Omega s\lambda\phi(\Delta z)(\nabla\psi\nabla z)dxdt \\
&- 4\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\phi(\Delta z)|\nabla\psi|^2 z dxdt - 2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dxdt \\
&- 4\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)z dxdt - 4\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4 z^2 dxdt \\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega s\alpha_t z z_t dxdt + 4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda\phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dxdt \\
&+ 4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2 z^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

Agora, vamos analisar cada integral individual.

Analise da integral: $-2\int_0^T\int_\Omega \Delta z z_t dxdt.$

Usando a fórmula de integração por partes de Green, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta z z_t dx &= \sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} z_t dx = \sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\frac{\partial z}{\partial x_i} z_t d\sigma - \sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z_t}{\partial x_i}dx \\
&= -\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right]_t dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla z|^2\right)_t dx,
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

pois,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

dividindo por 2, temos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

o que implica pela regra da cadeia,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right]_t = \frac{\partial z}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z_t}{\partial x_i}\right).$$

Logo, multiplicando por -2 e integrando de 0 a T em (5.59) temos

$$-2\int_0^T\int_\Omega \Delta z z_t dxdt = \int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla z|^2\right)_t dxdt. \tag{5.60}$$

Analise da integral: $-4\int_0^T\int_\Omega s\lambda\phi(\Delta z)(\nabla\psi\nabla z)dxdt.$

Usando a fórmula de integração por partes de Green, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \phi(\Delta z)(\nabla\psi\nabla z)dxdt &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \phi\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}dxdt\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\phi\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\eta_i\right\}d\sigma dt - \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)dxdt\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\phi\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\eta_i\right\}d\sigma dt - \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial z}{\partial x_j}dxdt\\
&- \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)dxdt\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\phi\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\eta_i\right\}d\sigma dt - \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial z}{\partial x_j}dxdt\\
&- \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

note que

$$
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),
$$

daí, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \phi(\Delta z)(\nabla\psi\nabla z)dxdt &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\phi\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\eta_i\right\}d\sigma dt\\
&- \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)dxdt\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dxdt\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\phi\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\eta_i\right\}d\sigma dt - \sum_{i,j=1}^n \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)dxdt\\
&- \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\eta_j\right\}d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, multiplicando por $-4s\lambda$ e usando o fato que $\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_j} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_j}\eta_j$, temos:

$$
\begin{aligned}
-4\int_0^T\int_\Omega s\lambda\phi(\Delta z)(\nabla\psi\nabla z)dxdt &= 4\int_0^T\int_\Omega\left\{s\lambda\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right\}dxdt\\
-2\int_0^T\int_\Omega\left\{s\lambda\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)|\nabla z|^2\right\}dxdt &- 2\int_0^T\int_{\partial\Omega}s\lambda\phi\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}dxdt.
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

<u>**Analise da integral:**</u> $-4\displaystyle\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\phi(\Delta z)|\nabla\psi|^2 z dxdt.$

Usando a fórmula de integração por partes de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(\Delta z)|\nabla\psi|^2 z dx &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}|\nabla\psi|^2 z dx\\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \phi\frac{\partial z}{\partial x_i}|\nabla\psi|^2 z d\sigma - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi|\nabla\psi|^2 z\right) dx\\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi|\nabla\psi|^2\right) z dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\phi|\nabla\psi|^2\frac{\partial z}{\partial x_i}dx,\end{aligned}$$

note que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(z)^2 = 2z\frac{\partial z}{\partial x_i} \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(z)^2 = z\frac{\partial z}{\partial x_i},$$

logo,

$$\int_\Omega \phi(\Delta z)|\nabla\psi|^2 z dx = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi|\nabla\psi|^2\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(z)^2 dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \phi|\nabla\psi|^2 dx.$$

Portanto, multiplicando por $-4\lambda^2 s$ e integrando de 0 a T, obtemos:

$$\begin{aligned}-4\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\phi(\Delta z)|\nabla\psi|^2 z dx dt &= 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi|\nabla\psi|^2)\frac{\partial z^2}{\partial x_i}dxdt\\ &+ 4\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla z|^2 dxdt,\end{aligned} \tag{5.62}$$

<u>**Analise da integral:**</u> $-2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dxdt.$

Integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dt &= \phi^2|\nabla\psi|^2 z z\Big|_0^T - \int_0^T z\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^2|\nabla\psi|^2 z\right) dt\\ &= -\int_0^T z2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 z dt - \int_0^T z\phi^2|\nabla\psi|^2 z_t dt,\end{aligned}$$

somando $\int_0^T \phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dt$ em ambos os membros, conseguimos:

$$2\int_0^T \phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dt = -2\int_0^T \phi\phi_t|\nabla\psi|^2 z^2 dt,$$

multiplicando por $-s^2\lambda^2$ e integrando em Ω usando Fubini, temos:

$$-2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z z_t dxdt = 2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 z^2 dxdt. \tag{5.63}$$

<u>**Analise da integral:**</u> $-4\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z) z dxdt.$

Usando a fórmula de integração por partes de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)zdx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} \phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}zz\eta_i d\sigma - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega z\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}z\right)dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega z\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)zdx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega z\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega z\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}dx,
\end{aligned}$$

como,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\phi,$$

derivando os termos da primeira integral, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right]z^2 = 3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}z^2 + \phi^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right]z^2,$$

logo, substituindo essa igualdade na integral acima, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx &= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega 3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}z^2dx \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}zdx \\
&= -3\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2z^2dx \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dx \\
&\quad -\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx,
\end{aligned}$$

somando $\displaystyle\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx$ em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx &= -3\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2z^2dx \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \phi^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dx,
\end{aligned}$$

dividindo por 2, segue que

$$\int_\Omega \phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)zdx = -\frac{3}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega \phi^3\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2 z^2dx$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega \phi^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dx,$$

multiplicando por $-4s^3\lambda^3$ e integrando em 0 a T, concluímos:

$$-4\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\nabla z)dxdt = 6\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4z^2dxdt$$
$$+2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\phi^3\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dxdt. \tag{5.64}$$

Analise da integral: $2\int_0^T\int_\Omega s\alpha_t z z_t dxdt.$

Integrando por partes, obtemos:

$$\int_0^T \alpha_t z z_t dt = \alpha_t z z\Big|_0^T - \int_0^T z\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_t z)dt$$
$$= \alpha_t z^2\Big|_0^T - \int_0^T z\alpha_{tt}zdt - \int_0^T z\alpha_t z_t dt,$$

somando $\int_0^T \alpha_t z z_t dt$ em ambos lados, obtemos:

$$2\int_0^T \alpha_t z z_t dt = -\int_0^T z^2\alpha_{tt}dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \alpha_t z z_t dt = -\frac{1}{2}\int_0^T z^2\alpha_{tt}dt,$$

multiplicando por $2s$, integrando em Ω e usando Fubini, concluímos que:

$$2\int_0^T\int_\Omega s\alpha_t z z_t dxdt = -\int_0^T\int_\Omega s\alpha_{tt}z^2dxdt. \tag{5.65}$$

Analise da integral: $4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda\phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dxdt.$

Usando a fórmula de integração por partes de Green, obtemos:

$$\int_\Omega \phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dx = \sum_{i=1}^n\int_\Omega \phi\alpha_t z\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx$$
$$= \sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\phi\alpha_t z\frac{\partial\psi}{\partial x_i}zd\sigma - \sum_{i=1}^n\int_\Omega z\frac{\partial}{\partial_i}\left(\phi\alpha_t z\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)dx$$
$$= -\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\alpha_t\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)z^2dx - \sum_{i=1}^n\int_\Omega \phi\alpha_t\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}zdx,$$

somando $\int_\Omega \phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dx$ em ambos os membros, temos:

$$2\int_\Omega \phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dx = -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\alpha_t\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)z^2dx,$$

multiplicando por $2s^2\lambda$ e integrando em 0 a T, concluímos que

$$4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda\phi\alpha_t z(\nabla\psi\nabla z)dxdt = -2\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\alpha_t\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)z^2dxdt. \tag{5.66}$$

Portanto, substituindo (5.60) – (5.66) em (5.58) obtemos:

$$\begin{aligned}
2\int_0^T\int_\Omega P_1P_2dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla z|^2\right)_t dxdt + 4\int_0^T\int_\Omega\left\{s\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right\}dxdt\\
&- 2\int_0^T\int_\Omega\left\{s\lambda\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)|\nabla z|^2\right\}dxdt - 2\int_0^T\int_{\partial\Omega}s\lambda\phi\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}dxdt\\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi|\nabla\psi|^2)\frac{\partial z^2}{\partial x_i}dxdt + 4\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla z|^2dxdt\\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2z^2dxdt + 6\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4z^2dxdt\\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\phi^3\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)z^2dxdt - 4\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4z^2dxdt\\
&- \int_0^T\int_\Omega s\alpha_{tt}z^2dxdt - 2\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\alpha_t\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)z^2dxdt\\
&+ 4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2z^2dxdt,
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever a igualdade acima, da forma:

$$2\iint_Q P_1P_2dxdt = I_1 + I_2, \tag{5.67}$$

onde,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_Q(\alpha s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4z^2 + 4s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla z|^2)dxdt\\
&- \int_0^T\int_{\partial\Omega}\alpha s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2d\Gamma dt,
\end{aligned} \tag{5.68}$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 = \iint_Q\Bigg\{&4s\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i} - 2s\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right)|\nabla z|^2\\
&+ 2s^3\lambda^3\phi^3\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}|\nabla\psi|^2\right)\right)z^2 + 2s\lambda^2\left(\nabla(\phi|\nabla\psi|^2)\nabla z^2\right) - s\alpha_{tt}z^2\\
&- 2s^2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t)\right)z^2 + 4s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2z^2 + \alpha s^2\lambda^2 + \phi\phi_t|\nabla\psi|^2z^2\Bigg\}dxdt.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Agora, do Lema 5.5 e por (5.40), dado $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos sobre $\Omega \setminus \omega_0$

$$\frac{4\lambda \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) a_i a_j \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \phi|^2 |a|^2} \tag{5.70}$$

calculando as derivadas do produto na primeira e na segunda parcela em (5.70), obtemos:

$$\frac{4\lambda \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j x_i} \right\} a_i a_j \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right\} \right] |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \phi|^2 |a|^2}.$$

Aplicando o fato que $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lambda \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, temos

$$= \frac{4\lambda^2 \phi \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} a_i a_j \right) - 2\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 + 4\lambda \phi \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} a_i a_j \right) - 2\lambda \phi (\Delta \psi) |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2} =$$

$$= \frac{4\lambda^2 \phi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} a_j - 2\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 + 4\lambda \phi \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} a_i a_j - 2\lambda \phi (\Delta \psi) |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2} =$$

$$= \frac{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 - 2\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 + 4\lambda \phi \Delta \psi |a|^2 - 2\lambda \phi (\Delta \psi) |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2} =$$

$$= \frac{2\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 + 2\lambda \phi \Delta \psi |a|^2}{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2} =$$

$$\leq \frac{\left| 2\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2 + 2\lambda \phi \Delta \psi |a|^2 \right|}{4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} C.$$

Logo, considerando $\lambda_1 > 1$ tal que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} C < 1, \quad \forall \lambda \geq \lambda_1,$$

obtemos

$$\left| 4\lambda \left[\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) a_i a_j \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] |a|^2 \right| \leq 4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2. \tag{5.71}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, quando $\lambda > \lambda_1$, note que a igualdade ocorre para $a = 0 \in \mathbb{R}^n$, logo

$$\left| 4\lambda \left[\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) a_i a_j \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] |a|^2 \right| \leq 4\lambda^2 \phi |\nabla \psi|^2 |a|^2, \tag{5.72}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \geq \lambda_1$. E ainda, conseguimos obter

$$\frac{\left| 2\lambda^3 \phi^3 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla \psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] \right|}{\lambda^4 \phi^3 |\nabla \psi|^4} \leq C \frac{1}{\lambda},$$

assim, escolhendo $\lambda_2 > 1$, tal que

$$C\frac{1}{\lambda} < 1, \quad \forall \lambda \geq \lambda_2,$$

obtemos,

$$\left| 2\lambda^3\phi^3 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] \right| \leq \lambda^4 \phi |\nabla\psi|^4, \quad \forall \lambda \geq \lambda_2. \tag{5.73}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\frac{2\lambda^3\phi^3 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right\}}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} &= \frac{2\lambda^3\phi^3 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\}}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} + \frac{2\lambda^3\phi^3 \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nabla\psi|^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right\}}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} \\
&= \frac{2\lambda^3\phi^3 \sum_{i=1}^{n} 2|\nabla\psi| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + 2\lambda^3\phi^3 |\nabla\psi|^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} \\
&= \frac{4\lambda^3\phi^3 |\nabla\psi| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 + 2\lambda^3\phi^3 |\nabla\psi|^2 |\Delta\psi|^2}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} \\
&= \frac{4\lambda^3\phi^3|\nabla\psi||\nabla\psi|^2 + 2\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2|\Delta\psi|^2}{\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4} \\
&= \frac{4}{\lambda|\nabla\psi|} + \frac{2}{\lambda}\frac{|\Delta\psi|^2}{|\nabla\psi|^2} = \frac{1}{\lambda}\left\{ \frac{4}{|\nabla\psi|} + 2\frac{|\Delta\psi|^2}{|\nabla\psi|^2} \right\} = C\frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Com base nesses resultados, vamos considerar agora

$$\Lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\},$$

e por (5.72) e (5.73), obtemos para todo $\lambda \geq \Lambda$,

$$-4\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|a|^2 \leq 4\lambda \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) a_i a_j \right] - 2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] |a|^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n, \tag{5.74}$$

e

$$-\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4 \leq 2\lambda^3\phi^3 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right]. \tag{5.75}$$

Vamos considerar $\lambda = \Lambda$. Do Lema de Fursikov-Imanuvilov 5.5, para todo $x \in \partial\Omega$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\psi(x) = \lim_{k \to 0^-} \frac{\psi(x + k\eta) - \psi(x)}{k} = \lim_{k \to o^-} \frac{\psi(x + k\eta)}{k} \leq 0,$$

então,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{5.76}$$

agora usando (5.39), pondo $\beta(t) = t(T - t), \quad t \in (0, T)$, temos

$$\alpha_t = -\frac{\beta'}{\beta^2}\left(e^{2\lambda\|\psi\|} - e^{\lambda\psi} \right),$$

$$\alpha_{tt} = \frac{-\beta''\beta^2 + 2\beta(\beta')^2}{\beta^4}\left(e^{2\lambda\|\psi\|} - e^{\lambda\psi}\right) = \frac{2(\beta')^2 - \beta\beta''}{\beta^3}\left(e^{2\lambda\|\psi\|} - e^{\lambda\psi}\right),$$

o que implica, sendo $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$

$$|\alpha_{tt}| \leq C\frac{1}{\beta^3}, \tag{5.77}$$

também temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_t) = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_i}e^{\lambda\psi}\frac{\beta'}{\beta^2},$$

daí,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\alpha_t\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_t\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t + \phi|\Delta\psi|\alpha_t + \sum_{i=1}^{n}\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\left\{\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_i}e^{\lambda\psi}\frac{\beta'}{\beta^2}\right\} \\
&= \lambda\phi|\nabla\psi|^2|\alpha_t| + \phi|\Delta\psi||\alpha_t| + \lambda\phi|\nabla\psi|^2\frac{\beta'}{\beta^2}e^{\lambda\psi} \\
&\leq \lambda\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta}|\nabla\psi|^2\frac{|e^{2\lambda\|\psi\|} - e^{\lambda\psi}|}{\beta^2}\beta' + \frac{e^{\lambda\psi}}{\beta}|\Delta\psi|\frac{|e^{2\lambda\|\psi\|} - e^{\lambda\psi}|}{\beta^2}\beta' \\
&+ \lambda\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta}|\nabla\psi|^2\frac{\beta'}{\beta^2}e^{\lambda\psi}.
\end{aligned}$$

Como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, resulta que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)\right| \leq \frac{C}{\beta^3}, \tag{5.78}$$

e mais,

$$\phi_t = -\frac{\beta'}{\beta^2}e^{\lambda\psi},$$

assim, por (5.40),

$$\left|\phi\phi_t|\nabla\psi|^2\right| = \frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta^3}|\nabla\psi|^2 \leq \frac{C}{\beta^3}, \tag{5.79}$$

ainda por (5.40), como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n}\phi^3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla\psi|^2\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)\right| &\leq \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla\psi|^2\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)\right| \\
&= \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + |\nabla\psi|^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\right| \\
&= \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta^3}\left\{\sum_{i=1}^{n}2|\nabla\psi|\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}|\nabla\psi|^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\right\} \\
&= \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta^3}\left\{2|\nabla\psi||\nabla\psi|^2 + |\nabla\psi|^2|\Delta\psi|\right\} \\
&\leq \frac{C}{\beta^3},
\end{aligned} \tag{5.80}$$

e também, obtemos que

$$|\phi^3|\nabla\psi|^4|\leq \frac{C}{\beta^3}, \tag{5.81}$$

além disso,

$$|\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2|\leq \frac{e^{\lambda\psi}|e^{2\lambda\|\psi\|}-e^{\lambda\psi}|}{\beta^3}|\nabla\psi|^2\leq \frac{C}{\beta^3}. \tag{5.82}$$

Portanto, de (5.77) − (5.82), existe $C>0$ tal que

$$|\alpha_{tt}|+\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)\right|+|\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2|+|\phi\phi_t|\nabla\psi|^2|+\left|\sum_{i=1}^{n}\phi^3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right|+ \tag{5.83}$$

$$+|\phi^3|\nabla\psi|^4|\leq \frac{C}{t^3(T-t)^3}.$$

Agora, usando o Lema de Fursikov-Imanuvilov 5.5 e (5.40) temos para alguma constante $C>0$,

$$\left|\begin{array}{l}|\phi(\Delta\psi)|=\phi|\Delta\psi|\leq \dfrac{e^{\lambda\psi}}{\beta}|\Delta\psi|\leq \dfrac{C}{\beta},\\ |\phi|\nabla\psi|^2|=\phi|\nabla\psi|^2\leq \dfrac{e^{\lambda\psi}}{\beta}|\nabla\psi|\leq \dfrac{C}{\beta},\\ \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right|\leq \lambda\phi|\nabla\psi|^2+\phi|\nabla\psi|=\dfrac{e^{\lambda\psi}}{\beta}(\lambda|\nabla\psi|+|\Delta\psi|)\leq\dfrac{C}{\beta},\\ \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi|\nabla\psi|^2\right)\right|\leq |\nabla\psi|^2\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\right|+\phi\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla\psi|^2\right|\leq\dfrac{C}{\beta}.\end{array}\right. \tag{5.84}$$

Note que, existe $c>0$ tal que

$$\frac{1}{t^3(T-t)^3}\leq C\phi^3|\nabla\psi|^4 \text{ em } (0,T)\times\Omega\diagdown\omega_0. \tag{5.85}$$

Logo, de (5.83) e (5.84) temos:

$$\begin{aligned}\left|\iint_Q 2s^3\phi^3\lambda^4|\nabla\psi|^4z^2dxdt\right| &\leq 2\iint_Q s^3\phi^3\lambda^4|\nabla\psi|^4z^2dxdt\\ &\leq Cs^3\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\iint_Q 2s^3\lambda^4|\nabla\psi|^4z^2dxdt\geq -Cs^3\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt, \tag{5.86}$$

daí,

$$\begin{aligned}\left|\iint_Q 2s\lambda^2(\nabla(\phi|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla z^2)dxdt\right| &\leq 2\iint_Q s\lambda^2|\nabla(\phi|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla z^2|dxdt\\ &\leq 2\iint_Q s\lambda^2|\nabla(\phi|\nabla\psi|^2)||\nabla z^2|dxdt\\ &\leq Cs\iint_Q\frac{|\nabla z^2|}{t(T-t)}dxdt\\ &\leq Cs\iint_Q\frac{|\nabla z|^2+z^2}{t(T-t)}dxdt,\end{aligned}$$

assim,

$$-\iint_Q 2s\lambda^2(\nabla(\phi|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla z^2)dxdt \geq -Cs\iint_Q \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t(T-t)}dxdt, \tag{5.87}$$

e mais,

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_Q \left(-s\alpha_{tt}z^2 \; -2s^2\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)z^2 + 4s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2z^2 + 2s^2\lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2z^2\right)dxdt\right|\\
&\leq \iint_Q s|\alpha_{tt}|z^2dxdt + 2\iint_Q s^2\lambda\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)\right|z^2dxdt\\
&+4\iint_Q s\lambda^2\phi|\alpha_t||\nabla\psi|^2z^2dxdt + 2\iint_Q s^2\lambda|\phi\phi_t||\nabla\psi|^2z^2dxdt\\
&\leq C\left\{s\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt + s^2\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\right.\\
&\left.+s\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt + s^2\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\right\},
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
&\iint_Q -s\alpha_{tt}z^2 - 2s^2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_t\right)\right)z^2 + 4s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2z^2 + 2s^2\lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2z^2dxdt\\
&\geq -Cs\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^2\iint_Q \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,
\end{aligned} \tag{5.88}$$

de (5.67), (5.69), (5.75), (5.76) e (5.86) − (5.88), obtemos:

$$
\begin{aligned}
2\iint_Q P_1P_2dxdt &= I_1+I_2 \geq \iint_Q 2s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4z^2dxdt + \iint_Q 4s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla z|^2dxdt\\
&+\iint_Q\left\{4s\lambda\left(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)+2s\lambda\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)|\nabla z|^2\right)\right\}dxdt\\
&+2\iint_Q s^3\lambda^3\phi^3\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla\psi|^2\right)z^2dxdt - Cs\iint_Q\frac{|\nabla z|^2+z^2}{t(T-t)}dxdt\\
&-Cs\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^2\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\
&\geq^{(*)} -Cs^3\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt + Cs^3\int_0^T\int_{\Omega\setminus\omega_0}\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\
&-Cs^2\int_0^T\int_\omega\frac{|\nabla z|^2}{t(T-t)}dxdt + \int_0^T\int_{\omega_0}4s\lambda\left(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)dxdt\\
&-2\int_0^T\int_{\omega_0}s\lambda\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right)|\nabla z|^2dxdt - Cs\iint_Q\frac{|\nabla z|^2+z^2}{t(T-t)}dxdt\\
&-Cs\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^2\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\
&\geq^{(**)} -Cs^3\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt + Cs^3\int_0^T\int_{\Omega\setminus\omega}\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\
&-Cs^2\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{|\nabla z|^2}{t(T-t)}dxdt - Cs\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{|\nabla z|^2}{t(T-t)}dxdt\\
&-Cs\iint_Q\frac{|\nabla z|^2+z^2}{t(T-t)}dxdt - Cs\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^2\iint_Q\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,
\end{aligned}
$$

onde $(*) = (5.75) + (5.84) + (5.85) + (5.86)$ e $(**) = (5.84)$ e daí, usando o fato que $\beta(t)$ é limitada e que $s \geq 1$, somando as integrais sobre $(0,T)\times\omega_0$, obtemos $c > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
2\iint_Q P_1P_2dxdt \geq Cs^3\int_0^T\int_\Omega\frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^3\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{|\nabla z\nabla^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\
-Cs\iint_Q\frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

Além disso, por (5.41) e (5.84), usando desigualdade elementar, obtemos

$$
\begin{aligned}
\iint_Q P_3^2dxdt &= \iint_Q\left(-s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2z\right)^2dxdt\\
&\leq C\iint_Q\left\{s^2\lambda^2|\phi(\Delta\psi)|^2z^2 + s^2\lambda^4|\phi|\nabla\psi|^2z^2\right\}dxdt\\
&\leq Cs^2\lambda^2\iint_Q\frac{z^2}{\beta^2}dxdt + Cs^2\lambda^4\iint_Q\frac{z^2}{\beta^2}dxdt\\
&\leq Cs^2\iint_Q\frac{z^2}{t^2(T-t)^2}dxdt,
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

logo, de (5.89) e (5.90), usando (5.56) temos que

$$Cs^3\int_0^T\int_\Omega \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs^3\int_0^T\int_\Omega \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt - Cs\int_0^T\int_\Omega \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt$$
$$\leq Cs^2\int_0^T\int_\Omega \frac{z^2}{t^2(T-t)^2}dxdt,$$

agora dividindo por s^3C, obtemos

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt \leq C\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt + \frac{C}{s}\iint_Q \frac{z^2}{t^2(T-t)^2}dxdt$$
$$+\frac{C}{s^2}\iint_Q \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt.$$

Note agora que, para $s \geq 1$ suficientemente grande, podemos ter:

$$\frac{C}{s}\iint_Q \frac{z}{t^2(T-t)^2}dxdt + \frac{C}{s^2}\iint_Q \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt \leq C\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,$$

Portanto, existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt \leq C\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt, \tag{5.91}$$

onde C é uma constante que não depende de y^0. Agora como para $t \in \left[\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right]$, temos β^3 é limitada, segue que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega z^2 dxdt = \int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega \frac{t^3(T-t)^3}{t^3(T-t)^3}z^2 dxdt \leq \tilde{C}\int_0^T\int_\Omega \frac{z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt,$$

Então, por (5.91),

$$\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega z^2 dxdt \leq C\tilde{C}\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt$$

logo, existe $C_0 > 0$, tal que

$$\int_{T/3}^{2T/3}\int_{\omega_0} z^2 dxdt \leq C_0\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2+z^2}{t^3(T-t)^3}dxdt \tag{5.92}$$

Agora sendo $z = e^{-s\alpha}y$, temos por (5.53) e (5.92) usando a desigualdade elementar teremos

$$\begin{aligned}\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega e^{-2s\alpha}y^2 dxdt &\leq C_0\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{|s\lambda\phi(\nabla\psi)e^{-s\alpha}y + e^{-s\alpha}\nabla y|^2+e^{-2s\alpha}y^2}{t^3(T-t)^3}dxdt\\ &\leq C_0\int_0^T\int_{\omega_0} \frac{2s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2e^{-2s\alpha}y^2 + 2e^{-2s\alpha}|\nabla y|^2+e^{-2s\alpha}y^2}{t^3(T-t)^3}dxdt.\end{aligned} \tag{5.93}$$

Note que existe $C > 0$, tal que, $C\phi^2 \geq 1$, daí, existe $\tilde{C} > 0$, tal que, o numerador do lado direito dentro da integral fica assim,

$$\begin{aligned}2s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2e^{-2s\alpha}y^2 + 2e^{-2s\alpha}|\nabla y|^2+e^{-2s\alpha}y^2 &\leq \tilde{C}\phi^2e^{-2s\alpha}(y^2+|\nabla y|^2)\\ &= \tilde{C}\left(\frac{e^{2\lambda\psi}}{t^2(T-t)^2}\right)\frac{1}{e^{2s\lambda}}(|\nabla y|^2+y^2),\end{aligned}$$

e como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, existe $\tilde{C}_0$ tal que $e^{2\lambda\psi} \leq \tilde{C}_0$, ou seja,

$$\tilde{C}\left(\frac{e^{2\lambda\psi}}{t^2(T-t)^2}\right)\frac{1}{e^{2s\alpha}}(|\nabla y|^2+y^2) \leq \tilde{C}_0\frac{|\nabla y|^2+y^2}{t^2(T-t)^2e^{2s\alpha}},$$

logo, voltando a desigualdade (5.93), vamos obter

$$\begin{aligned}
\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega e^{-2s\alpha}y^2dxdt &\leq C_0\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{2s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2e^{-2s\alpha}y^2+2e^{-2s\alpha}|\nabla y|^2+e^{-2s\alpha}y^2}{t^3(T-t)^3}dxdt \\
&\leq \tilde{C}_0\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{|\nabla y|^2+y^2}{e^{2s\alpha}t^5(T-t)^5} \\
&= \tilde{C}_0\int_0^T\int_{\omega_0}\frac{t(T-t)}{e^{2s\alpha}t^6(T-t)^6}(|\nabla y|^2+y^2),
\end{aligned}\tag{5.94}$$

Para o lado esquerdo da desigualdade em (5.94), existe $C>0$, tal que, $e^{-2s\alpha}.C \geq 1, t \in [T/3, 2T/3]$. Ou seja,

$$\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega y^2dxdt \leq \int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega e^{-2s\alpha}y^2dxdt,\tag{5.95}$$

Afirmação: $e^{-2s\alpha}t^{-6}(T-t)^{-6}$ é limitado.

Portanto, existe C_1 tal que, por (5.94) e (5.95) que

$$\int_{T/3}^{2T/3}\int_\Omega y^2dxdt \leq C_1\int_0^T\int_{\omega_0}t(T-t)(|\nabla y|^2+y^2)dxdt.\tag{5.96}$$

Prova da Afirmação:: De fato, note que

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|}-e^{\lambda\psi}}{t(T-t)} \geq \frac{C}{t(T-t)}, \text{onde } C>0.$$

Assim,

$$2s\alpha(x,t) \geq \frac{2sC}{t(T-t)} \Longrightarrow \frac{1}{e^{2s\alpha(x,t)}} \leq \frac{1}{e^{\frac{2sC}{t(T-t)}}},$$

ou ainda,

$$0 \leq \frac{1}{e^{2s\alpha(x,t)}t^6(T-t)^6} \leq \frac{1}{e^{\frac{2sC}{t(T-t)}}t^6(T-t)^6},\tag{5.97}$$

mais, sabemos ainda que podemos escrever $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, ou seja,

$$e^{\left(\frac{2sC}{t(T-t)}\right)} = 1+\frac{2sC}{t(T-t)}+\cdots+\frac{(2sC)^6}{6!t^6(T-t)^6}+\cdots.\tag{5.98}$$

Portanto, de (5.97) e (5.98), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{e^{2s\alpha(x,t)}t^6(T-t)^6} \\
&= \frac{1}{\left[1+\frac{2sC}{t(T-t)}+\cdots+\frac{(2sC)^6}{6!t^6(T-t)^6}+\cdots\right]t^6(T-t)^6} \\
&= \frac{1}{t^6(T-t)^6+2sCt^5(T-t)^5+\cdots+\frac{(2sC)^6}{6!}+\cdots} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \longrightarrow 0$ ou $t \longrightarrow T$ o que mostra a afirmação desejada. ■

Agora vamos considerar $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, tal que

$$\left|\begin{array}{l} \rho = 1 \text{ em } \omega_0, \\ \rho > 0 \text{ sobre } \omega, \\ \rho = 0 \text{ em } \overline{\Omega}\diagdown\omega. \end{array}\right. \tag{5.99}$$

Multiplicando (5.27) por $\beta\rho y$ integrando em Q, temos

$$0 = \iint_Q (y_t - \Delta y)\beta\rho y dx dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \int_\Omega y_t \beta\rho y dx dt - \int_0^T \int_\Omega (\Delta y)\beta\rho y dx dt = 0. \tag{5.100}$$

<u>**Analise da 1ª integral de (5.100)**</u>

Usando as hipóteses em (5.99), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega y_t \beta\rho y dx dt &= \int_\omega \int_0^T y_t \beta\rho y dx dt \\ &= \int_\omega \left\{ y\beta\rho y\Big|_0^T - \int_0^T y(\beta' y + \beta y')\rho dt \right\} dx \\ &= -\int_0^T \int_\omega y^2 (T-2t)\rho dx dt - \int_0^T \int_\omega y_t \beta\rho y dx dt. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega y_t \beta\rho y dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega y^2 (T-2t)\rho dx dt. \tag{5.101}$$

<u>**Analise da 2ª integral de (5.100)**</u>

Note que

$$-\int_0^T \int_\Omega (\Delta y)\beta\rho y dx dt = -\int_0^T t(T-t) \int_\Omega (\Delta y)\rho y dx dt. \tag{5.102}$$

Olhando para última integral, usando o Teorema de Green 1.9, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta y)\rho y dx &= \sum_{i=1}^n \int_\omega \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}(\rho y) dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_\omega \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho y) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\rho y)\eta_i d\Gamma \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_\omega \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} y dx - \sum_{i=1}^n \int_\omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \rho dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} y \frac{\partial \rho}{\partial x_i} y\eta_i d\Gamma + \sum_{i=1}^n \int_\omega y \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} y dx - \sum_{i=1}^n \int_\omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \rho dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\omega y \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} y dx - \sum_{i=1}^n \int_\omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \rho dx \\ &= \int_\omega y^2 (\Delta\rho) dx - \int_\omega |\nabla y|^2 \rho dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_\Omega (\Delta y)\rho y dx = \int_\omega y^2(\Delta\rho)dx - \int_\omega |\nabla y|^2 \rho dx. \tag{5.103}$$

Substituindo (5.103) em (5.102), temos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega (\Delta y)\beta\rho y dx dt &= -\int_0^T t(T-t)\left\{\int_\omega y^2(\Delta\rho)dx - \int_\omega |\nabla y|^2\rho dx\right\} dt \\ &= -\int_0^T \int_\omega t(T-t)y^2(\Delta\rho)dxdt + \int_0^T \int_\omega t(T-t)|\nabla y|^2\rho dxdt. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Combinando (5.100), (5.101) e (5.104), ficamos com a expressão,

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega y^2(T-2t)\rho dxdt - \int_0^T \int_\omega t(T-t)y^2(\Delta\rho)dxdt + \int_0^T \int_\omega t(T-t)|\nabla y|^2\rho dxdt = 0.$$

Notemos que, podemos ter,

$$\int_0^T \int_\omega t(T-t)|\nabla y|^2\rho dxdt \le \int_0^T \int_\omega y^2\left[(T-2t)\rho + t(T-t)\Delta\rho\right] dxdt.$$

Assim, como $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, por (5.99), temos qu existe $C > 0$, tal que

$$\int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)|\nabla y|^2 dxdt \le C\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt, \tag{5.105}$$

ainda, podemos ver que existe $C_2 > 0$, de forma que

$$\int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)(|\nabla y|^2 + y^2)dxdt \le C_2\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt, \tag{5.106}$$

De fato, pois veja que usando (5.105) temos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)|\nabla y|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)y^2 dxdt &\le C\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt + C_1\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt \\ &\le [C_1 + C]\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt \\ &= C_2\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt. \end{aligned}$$

Portanto, de (5.96) e (5.106), obtemos

$$\int_{T/3}^{2T/3} \int_\Omega y^2 dxdt \le C_1C_2\int_0^T \int_\omega y^2 dxdt. \tag{5.107}$$

Agora, multiplicando em $(5.27)_1$ por y e integrando em Q, temos,

$$\int_0^T \int_\Omega y_t y dxdt - \int_0^T \int_\Omega (\Delta y) y dxdt = 0 \tag{5.108}$$

Analise da 1ª integral de (5.108)

Integrando por parte, obtemos

$$\int_0^T y_t y dt = y^2\Big|_0^T - \int_0^T y y_t dt,$$

ou seja,

$$2\int_0^T y_t y dt = y^2(T,x) - y^2(t,x),$$

ou ainda, integrando em Ω e dividindo por 2, temos

$$\int_0^T \int_\Omega y_t y dx dt = \frac{1}{2}\int_\Omega y^2(T,x)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega y^2(t,x)dx. \tag{5.109}$$

Analise da 2ª integral de (5.108)

Usando Green como feito varias vezes anteriormente, obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega (\Delta y) y dx dt = \int_0^T \int_\Omega |\nabla y|^2 dx dt. \tag{5.110}$$

Portanto, substituindo (5.109) e (5.110) em (5.108), ficamos com

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y^2(T,x)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega y^2(t,x)dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla y|^2 dx dt = 0,$$

mais, ainda note que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y^2(T,x)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega y^2(t,x)dx = -\int_0^T \int_\Omega |\nabla y|^2 dx dt \leq 0,$$

assim,

$$\int_\Omega y^2(T,x)dx \leq \int_\Omega y^2(t,x)dx, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.111}$$

Portanto, de (5.107) e (5.111), obtemos

$$\int_{T/3}^{2T/3} \int_\Omega y^2(T,x)dx dt \leq \int_{T/3}^{2T/3} \int_\Omega y^2(t,x)dx dt \leq C_1 C_2 \int_0^T \int_\omega y^2 dx dt.$$

Assim,

$$\frac{T}{3}\|y(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C_2 \int_0^T \int_\omega y^2 dx dt,$$

ou seja,

$$\|y(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{3C_1C_2}{T}\int_0^T \int_\omega y^2 dx dt,$$

o que prova o teorema, com $M = \sqrt{\dfrac{3C_1C_2}{T}}$.

■

Vamos mostrar agora um teorema que afirma que a desigualdade de observabilidade (5.28) implica na controlabilidade nula do sistema associado (5.27).

Teorema 5.9. *A desigualdade de* ***observabilidade***

$$\|\varphi(0)\|^2 \leq C\int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt, \tag{5.112}$$

implica na ***controlabilidade nula*** *do sistema*

$$\left| \begin{array}{l} y_t - \Delta y = u\chi_\omega \ \textit{em}\ Q, \\ y = 0 \ \textit{sobre}\ \Sigma, \\ y(0) = y^0 \ \textit{em}\ \Omega. \end{array} \right. \tag{5.113}$$

Demonstração: A demonstração será feita em duas etapas.

Etapa 1: Vamos construir uma sequências de controles $u_\epsilon \in L^2(\omega \times (0,T))$ com $\epsilon > 0$ que fornece a controlabilidade aproximada do problema (5.113) ver em Cara e Guerreiro [9]. Sejam $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$ dados. Considere o funcional

$$J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + \epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}, \tag{5.114}$$

para toda $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, onde φ é a solução do problema adjunto de (5.113) dado por:

$$\left| \begin{array}{l} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \text{ em } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{5.115}$$

Conseguimos mostrar que nosso funcional J_ϵ goza das seguintes propriedades.

J_ϵ é estritamente convexo

De fato, dados φ_1^0 e φ_2^0 em $L^2(\Omega)$ e $t \in (0,1)$, como a função $\varphi \longmapsto \varphi^2$ é estritamente convexa, a função

$$\varphi \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt$$

é estritamente convexa[7]. Além disso, a norma em $L^2(\Omega)$ é uma função convexa e o produto interno de $L^2(\Omega)$ é bilinear. Logo, denotando por φ_1 e φ_2 as respectivas soluções do problema (5.115) associadas a φ_1^0 e φ_2^0, obtemos

$$\begin{aligned} J_\epsilon\left((1-t)\varphi_1^0 + t\varphi_2^0\right) &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \left[(1-t)\varphi_1 + t\varphi_2\right]^2 dxdt + \epsilon\|(1-t)\varphi_1^0 + t\varphi_2^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left((1-t)\varphi_1(0) + t\varphi_2(0), y^0\right)_{L^2(\Omega)} \\ &< \frac{1}{2}(1-t)\int_0^T \int_\omega \varphi_1^0 dxdt + \frac{t}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi_2^0 dxdt + (1-t)\epsilon\|\varphi_1^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \epsilon t\|\varphi_2^0\|_{L^2(\Omega)} + (1-t)(\varphi_1(0), y^0)_{L^2(\Omega)} + t(\varphi_2(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \\ &= (1-t)\left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi_1^0 dxdt + \epsilon\|\varphi_1^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi_1(0), y^0)_{L^2(\Omega)}\right] \\ &+ t\left[\frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi_2^0 dxdt + \epsilon\|\varphi_2^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi_2(0), y^0)_{L^2(\Omega)}\right] \\ &= (1-t)J_\epsilon(\varphi_1^0) + tJ_\epsilon(\varphi_2^0). \end{aligned}$$

[7] A função $\varphi(s) = s^2$ é estritamente convexa, pois $\varphi''(s) = 2 > 0$.

Portanto,

$$J_\epsilon\left((1-t)\varphi_1^0+t\varphi_2^0\right)<(1-t)J_\epsilon(\varphi_1^0)+tJ_\epsilon(\varphi_2^0).$$

J_ϵ é contínuo

Com efeito, seja $(\varphi_n^0)\in L^2(\Omega)$ uma sequência e (φ_n) a sequência correspondentes das soluções do problema (5.115). Suponhamos que

$$\varphi_n^0\longrightarrow\varphi^0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Então, como o problema (5.115) é bem posto, temos

$$\varphi_n\longrightarrow\varphi \text{ em } C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

onde φ é a solução do problema (5.115) associada a φ^0, em particular, temos

$$\int_0^T\int_\omega\varphi_n^2dxdt\longrightarrow\int_0^T\int_\omega\varphi^2dxdt, \tag{5.116}$$

$$\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.117}$$

e

$$(\varphi_n(0),y^0)_{L^2(\Omega)}\longrightarrow(\varphi(0),y^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{5.118}$$

Portanto, de (5.116), (5.117) e (5.118) e da definição de J_ϵ, obtemos:

$$J_\epsilon(\varphi_n^0)\longrightarrow J_\epsilon(\varphi^0).$$

J_ϵ é coercivo

Seja $(\varphi_n^0)\subset L^2(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow+\infty, \text{ quando } n\longrightarrow+\infty. \tag{5.119}$$

Denote por $\varphi_n, n\in\mathbb{N}$, a solução de (5.115) associada a φ_n^0. Por (5.113), temos que para todo $n\in\mathbb{N}$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (5.112) e desigualdade elementar, temos

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(\varphi_n^0)&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega\varphi_n^2dxdt+\epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}+(\varphi_n(0),y^0)_{L^2(\Omega)}\\
&\overset{(5.112)}{\geq}\frac{1}{2c}\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}+(\varphi_n(0),y^0)_{L^2(\Omega)}\\
&\geq\frac{1}{2c}\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}-\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\\
&=\frac{1}{2c}\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{\sqrt{c}}\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{c}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\\
&\geq\frac{1}{2c}\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)}-\frac{\|\varphi_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2c}-\frac{c}{2}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$J_\epsilon(\varphi_n^0) \geq \epsilon\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)} - \frac{c}{2}\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.120}$$

Como $-\frac{c}{2}\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)}$ não depende de n, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (5.120) e usando (5.119) temos que

$$J_\epsilon(\varphi_n^0) \longrightarrow +\infty, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, J_ϵ é coercivo.

Com essas propriedades de J_ϵ segue por (1.11) que ele tem único mínimo que denotaremos por φ_ϵ^0, cuja solução de (5.115) associada denotaremos por φ_ϵ. Seja $y^1 = y(T)$, onde y é a solução do problema (5.113) com $u = 0$. Note que, nesse caso, se φ é a solução do problema (5.115), temos,

$$(y^1, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} = (y^0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}. \tag{5.121}$$

Afirmação: Mostraremos agora que,

$$\|y^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \Longleftrightarrow \varphi_\epsilon^0 = 0. \tag{5.122}$$

Prova da afirmação.: De fato, suponha que $\|y^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$, então para todo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\varphi^0) &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + \epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

por (5.121), tem-se usando Cauchy-Schawrz que

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\varphi^0) &\geq \epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi^0, y^1)_{L^2(\Omega)} \\ &\overbrace{\geq}^{C-S} \epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} - \|y^1\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}\big(\epsilon - \|y^1\|_{L^2(\Omega)}\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$J_\epsilon(\varphi^0) \geq 0, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Mas $J_\epsilon(0) = 0$. Portanto, como φ_ϵ^0 é o único mínimo de J_ϵ temos $\varphi_\epsilon^0 = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\varphi_\epsilon^0 = 0$, então para todo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$,

$$J_\epsilon(\varphi^0) \geq J_\epsilon(0) = 0,$$

logo,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J_\epsilon(t\varphi^0)}{t} \geq 0, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega),$$

e usando a definição do funcional J_ϵ, obtemos

$$\epsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}+(\varphi^0,y^1)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega). \tag{5.123}$$

Note que, se $y^1 = 0$. Já temos a implicação verificada, ou seja ($\varphi^0_\epsilon = 0$). Portanto, supondo que $y^1 \neq 0$, da desigualdade (5.123), escolhendo $\varphi^0 = -y^1$, obtemos:

$$\|y^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Provando a afirmação. ■

Da afirmação, concluímos que o caso $\|y^1\|_{L^2(\Omega)} > \epsilon$ ou seja, $\varphi^0_\epsilon \neq 0$ é o que nos interessa. Portanto, vamos supor que $\|y^1\|_{L^2(\Omega)} > \epsilon$. Com essa hipótese, derivando no sentido de Gateux J_ϵ em φ^0_ϵ, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = J_\epsilon(\varphi^0_\epsilon)\varphi^0 &= \frac{d}{dt} J_\epsilon(\varphi^0_\epsilon + \lambda\varphi^0)\Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_0^T \int_\omega \varphi_\epsilon \varphi dxdt + \epsilon\left(\frac{\varphi^0_\epsilon}{\|\varphi^0_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0\right)_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.124}$$

para toda $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Agoar considere o controle $u_\epsilon = \varphi_\epsilon \chi_\omega \omega$ e seja y_ϵ a solução do problema (5.113) associada a u_ϵ. Fazendo $\varphi^0 = \varphi^0_\epsilon$ em (5.124), obtemos:

$$\int_0^T \int_\omega \varphi^2_\epsilon dxdt + \epsilon\|\varphi^0_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}+(\varphi_\epsilon(0), y^0)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ou seja,

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}+(\varphi_\epsilon(0), y^0)_{L^2(\Omega)} = -\epsilon\|\varphi^0_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

logo,

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}+(\varphi_\epsilon(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

e ainda, da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que,

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq -(\varphi_\epsilon(0), y^0) \leq |(\varphi_\epsilon(0), y^0)| \leq \|\varphi_\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}\|y^0\|_{L^2(\Omega)},$$

da desigualdade de observabilidade, tem-se

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \sqrt{c}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.125}$$

onde $c > 0$ é a constante de observabilidade. Da dualidade entre os sistemas (5.113) e (5.115), temos

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi_\epsilon \varphi dxdt = \int_0^T \int_\omega u_\epsilon \varphi dxdt = (y_\epsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} - (y^0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)},$$

substituindo em (5.124), obtemos

$$0=\epsilon\left(\frac{\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega)}},\varphi^0\right)_{L^2(\Omega)}+(y_\epsilon(T),\varphi^0)_{L^2(\Omega)},\quad \forall\varphi^0\in L^2(\Omega),$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\epsilon\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}+y_\epsilon(T),\varphi^0\right)_{L^2(\Omega)}=0,\quad \forall\varphi^0\in L^2(\Omega),$$

logo,

$$\epsilon\frac{\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|}+y_\epsilon(T)=0\Longrightarrow \|y_\epsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}=\epsilon \tag{5.126}$$

Etapa 2: Vamos passar o limite quando $\epsilon\longrightarrow 0$. Como, por (5.125), temos que (u_ϵ) é limitada em $L^2(\omega\times(0,T))$, e este espaço é reflexivo, a menos de subsequência, existe $u\in L^2(\omega\times(0,T))$, tal que,

$$u_\epsilon\longrightarrow u\quad em\quad L^2(\omega\times(0,T)).$$

Multiplicando a equação $(5.113)_1$ com controle u_ϵ por y_ϵ e integrando em $\Omega\times(0,T), t\in[0,T]$, obtemos:

$$\int_0^T\int_\Omega y_{\epsilon t}y_\epsilon dxdt-\int_0^T\int_\Omega(\Delta y_\epsilon)y_\epsilon dxdt=\int_0^T\int_\omega u_\epsilon y_\epsilon dxdt,$$

integrando por partes e usando Teorema de Green 1.9, vamos obter que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y_\epsilon^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega(y^0)^2dx+\int_0^t\|y_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt=\int_0^T\int_\omega u_\epsilon y_\epsilon dxdt. \tag{5.127}$$

Usando a desigualdade elementar em (5.127), obtemos

$$\frac{1}{2}\|y_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|y_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt\le\frac{1}{2}\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\omega u_\epsilon^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\omega y_\epsilon^2dxdt.$$

Então, como (u_ϵ) é limitada em $L^2(\omega\times(0,T))$, existe $C>0$ tal que

$$\|y_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|y_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt\le C+C\int_0^t\int_\Omega y_\epsilon^2dxdt,\quad\forall t\in[0,T], \tag{5.128}$$

logo, pela desigualdade de Gronwall, existe $C_T>0$ tal que

$$\|y_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C_T,\quad\forall t\in[0,T], \tag{5.129}$$

de (5.128) e (5.129), existe $\tilde{C}_T>0$ tal que

$$\int_0^t\|y_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt\le\tilde{C}_T,\quad\forall t\in[0,T]. \tag{5.130}$$

Portanto, de (5.129) e (5.130), resulta que

$$(y_\epsilon)\ \text{ é limitada em }\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{5.131}$$

a menos de subsequência, temos

$$y_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$y_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

para algum $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ como feito em (5.9), obtemos

$$\|y_{\epsilon t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\|y_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_\epsilon\|_{L^2(\omega\times(0,T))}\right).$$

Logo,

$$(y_{\epsilon t}) \text{ é limitada em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

portanto, a menos de subsequencia, obtemos que

$$y_{\epsilon t} \longrightarrow \tilde{y} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Veremos que $\tilde{y} = y_t$. Para isso, dado $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $s \in L^2(\Omega)$,

$$\int_0^T (y_{\epsilon t}, s)\phi dt = -\int_0^T (y_\epsilon, s)\phi' dt \longrightarrow -\int_0^T (y,s)\phi' dt,$$

assim,

$$\int_0^T (\tilde{y}, s)\phi dt = -\int_0^T (y,s)\phi' dt,$$

ou seja,

$$(\tilde{y}, s) = \frac{d}{dt}(y,s) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),$$

por isso,

$$\tilde{y} = y_t \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, $y_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Desse modo,

$$y \in H^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Das convergências anteriores, temos

$$\frac{d}{dt}(y(t),s)_{L^2(\Omega)} + ((y(t),s))_{H_0^1(\Omega)} = (u\chi_\omega\omega, s), \quad \forall s \in H_0^1(\Omega), \tag{5.132}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Em resumo obtemos:

$$y_\epsilon \longrightarrow y \quad em \quad H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

onde y é a solução do problema (5.113), da limitação em (5.129) segue que

$$y_\epsilon(T) \longrightarrow y^1, \quad y^1 \in L^2(\Omega). \tag{5.133}$$

Agora, sejam $\phi \in C^1([0,T])$ com $\phi(0) = 0, \phi(T) = 1$ e $s \in H_0^1(\Omega)$. Então, multiplicando a equação (5.113), por ϕs e integrando em $\Omega \times (0,T)$, temos

$$\int_0^T \int_\Omega y_\epsilon s\phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta y_\epsilon s\phi dxdt = \int_0^T \int_\omega u_\omega s\phi dxdt,$$

integrando por partes a primeira integral, obtemos:

$$(y_\epsilon(T), s)_{L^2(\Omega)} - \int_0^T (y_\epsilon, s)\phi' dt + \int_0^T ((y_\epsilon, s))\phi dt = \int_0^T (u_\epsilon \chi_\omega, s)\phi dt.$$

Passando ao limite quando $\epsilon \longrightarrow 0$, resulta

$$(y^1, s) - \int_0^T (y, s)\phi' dt + \int_0^T ((y, s))\phi dt = \int_0^T (u\chi_\omega, s)\phi dt. \tag{5.134}$$

Por outro lado, integrando de 0 a T em (5.132), conseguimos obter

$$(y(T), s) - \int_0^T (y, s)\phi' dt + \int_0^T ((y, s))\phi dt = \int_0^T (u\chi_\omega, s)\phi dt. \tag{5.135}$$

Logo, de (5.134) e (5.135), temos

$$(y^1, s) = (Y(T), s).$$

Assim, como $s \in H_0^1(\Omega)$ é qualquer e $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, obtemos que

$$y^1 = Y(T).$$

Portanto, por (5.133), vem que

$$y_\epsilon \rightharpoonup y(T) \ \ em \ \ L^2(\Omega).$$

De (5.126) e do Teorema de Banach-Steinhaus, obtemos

$$y(T) = 0.$$

Provando assim, que a desigualdade de observabilidade do sistema (5.113) implica na controlabilidade nula desta mesma equação.

■

Capítulo 6

Controlabilidade Interna da Equação da Onda Semilinear

Neste capítulo iremos, fazer a controlabilidade exata para equação da onda semilinear com controle localizado no interior do nosso domínio Ω, onde o mesmo é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Para isto utilizaremos outro método para o estudo da controlabilidade, nesse caso o método onde é usado o Teorema do Ponto fixo de Shauder.

6.1 Formulação do Problema

Seja Ω um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Seja $\omega \subset \Omega$ uma vizinhança da fronteira Γ. Considere o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y + f(y) = h\chi_\omega \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ em } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y^1(0) = y^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Sendo f uma função localmente lipschitz.

A controlabilidade exata de (6.1) se formula da seguinte forma: Dado $T > 0$, tal que para todo par de dados iniciais e finais $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, exista um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$, tal que, a solução $y = y(x,t)$ de (6.1), verifica

$$y(T) = z^0, \quad y'(T) = z^1. \tag{6.2}$$

Observação 6.1. *Claramente ao que aconteceu no problema linear, neste caso, o problema da controlabilidade exata não se reduz em considerar o caso $z^0 = z^1 = 0$, ou seja,*

$$y(x,T,h) = 0 \text{ e } y'(x,T,h) = 0.$$

Pelo fato de $y'' - \Delta y + f(y)$ não ser linear. Teremos que provar que todo dado inicial pode ser dirigido ao dado final.

Suponha que f verifica a seguinte condição de crescimento no infinito,

$$|f'(s)| \leq C\left(1 + |s|^p\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

com,

$$p(n-2) \leq 2, \tag{6.4}$$

de maneira que (6.1) admita uma única solução local que seja contínua em $H_0^1(\Omega)$ e de classe C^1 a valores em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, suponhamos que $T > T_0$ sendo $T_0 > 0$ o tempo de controlabilidade exata da equação linear com $f \equiv 0$. Buscamos portanto um resultado que assegure que se a equação linear é controlável então a equação semilinear também será para não linearidade f em uma classe a determinar. Como mostrado anteriormente pelo Teorema capítulo 4, se $T > T_0$ com

$$T_0 = \text{diametro de } \ \Omega, \tag{6.5}$$

tem-se as estimativas:

$$\|\phi^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt, \tag{6.6}$$

e

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'|^2 dx dt, \tag{6.7}$$

para a solução da equação linear homogênea

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Tal como vimos no Teorema 2 do Capítulo 4, de (6.6) segue que a equação da onda linear com $f \equiv 0$ em (6.1) é exatamente controlável em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com controle em $L^2(\omega \times (0, T))$.

Vamos estudar a controlabilidade exata de (6.1) sobre as hipóteses de que se verifiquem as estimativas (6.6) e (6.7). O problema de controlabilidade exata de equações não lineares já tem sido abordado por diversos autores como ja foi mencionado na introdução deste trabalho.

Adotaremos um ponto de vista diferente. Desenvolvemos um método que proporciona resultados de controlabilidade exata para alguma classe de funções não lineares. Em Zuazua se introduziu um método de ponto de ponto fixo que proporciona resultados de controlabilidade exata para não linearidades f assintoticamente lineares, isto é,

$$f' \in L^{\infty}(\mathbb{R}), \tag{6.9}$$

e

$$\exists \lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s}. \tag{6.10}$$

Em seguida Zuazua introduziu um segundo esquema de ponto fixo pelo qual se demonstrou a controlabilidade em uma classe de não linearidade globalmente lipschitz. Ou seja, sem a necessidade de supor (6.10). A desvantagem deste segundo método é que o controle construído pertence a classe $H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ com $\epsilon > 0$ e não a classe ideal $L^2(\omega \times (0, T))$ correspondente ao caso linear.

6.2 Descrição do Método do Ponto Fixo

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ e definimos a função

$$g(s) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{f(s) - f(0)}{s}, & s \neq 0, \\ f'(0) & , \text{ se } s = 0, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

dado $\xi \in L^2(Q)$ qualquer, considere o sistema linearizado

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y + g(\xi) y = h\chi_{\omega} - f(0), \\ y = 0, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \end{array} \right. \tag{6.2}$$

como $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $g(\xi) \in L^{\infty}(Q)$ e tem-se

$$\|g(\xi)\|_{L^{\infty}(Q)} \leq \|f'\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}, \quad \forall \xi \in L^2(Q). \tag{6.3}$$

Suponha que o sistema (6.2) seja exatamente controlável no tempo $T > T_0$. Então, fixados $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Definimos o controle

$$h \in L^2(\omega \times (0, T)), \tag{6.4}$$

proporcionado pelo método HUM. A solução $y = y(x, t)$ de (6.2) associada a este controle h satisfaz (6.2), ou seja,

$$y(x, T, h) = z^0, \text{ e } y'(x, T, h) = z^1.$$

Definimos portanto a aplicação não linear

$$
\begin{aligned}
N: \quad L^2(Q) &\longrightarrow L^2(Q) \\
\xi &\longmapsto N(\xi) = y,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

O problema da controlabilidade exata de (6.1) se reduz a obtenção de um ponto fixo do operador N. Com efeito, se $N(\xi) = \xi = y, y = y(x,t)$ solução de (6.2) satisfaz (6.1) e também por construção (6.2). Para demonstrar a existência de um ponto fixo de N, aplicaremos o Teorema de Schauder. Recordemos o enunciado.

Teorema 6.1 (**Teorema de Schauder**). *Seja X um espaço de Banach e $N : X \longrightarrow X$ um operador contínuo e compacto. Suponhamos que exista $C \subset X$ convexo, limitado, fechado e não vazio, tal que,*

$$N(C) \subset C, \tag{6.6}$$

então, N possui ao menos um ponto fixo em C, isto é:

$$\exists \;\; x \in C \text{ tal que } N(x) = x. \tag{6.7}$$

Observação 6.2. *A hipótese (6.6) se verifica facilmente se*

$$R = \sup_{x \in X} \| N_x \|_X < \infty. \tag{6.8}$$

Com efeito, basta escolher $C = \overline{B_R(0)}$, a bola fechada de centro em zero e raio R em X, pois, se $y \in N(C)$, então existe $x \in C$, tal que, $y = N(x)$, ou seja,

$$\| y \| = \| N(x) \| \leq \sup_{x \in X} \| N(x) \|_X = R \Longrightarrow y \in C.$$

É de se esperar que o problema que queremos resolver, (6.8) se verifique com $X = L^2(Q)$. De fato, (6.3) assegura que $g(\xi)$ está uniformemente limitada em $L^\infty(Q)$. Portanto, se o controle h depende continuamente do potencial (em um sentido mais adiante), você terá uma família de controles uniformemente limitados. Finalmente, dado que os dados iniciais em (6.2) estão fixados e o potencial e controle uniformemente limitados, se terá a limitação uniforme da solução em

$$C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{6.9}$$

e em particular em $H^1(Q)$. Desta forma, você não terá so (6.8) e (6.6), mas a compacidade de N graças a imersão compacta de $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

No entanto, como veremos nesta seção, surgiram dificuldades técnicas importantes na obtenção da limitação uniforme do controle. Utilizando uma variante do método HUM, que é trabalhar em um quadro funcional diferente para o caso linear, construiremos controles uniformemente limitados em $H^{-\epsilon}(0,T; L^2(\omega))$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno.

Isto permitirá concluir a controlabilidade exata de (6.1) com controles em $H^{-\epsilon}(0,T; L^2(\omega))$.

6.3 Controlabilidade Interna da Equação da Onda com Potencial

Como observamos em (6.3) a equação (6.2) é da forma:

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y + V(x,t)y = h\chi_\omega - f(0) \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ em } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.1}$$

com $V = V(x,t) \in L^\infty(Q)$. Fixados dados finais $\{z^0, z^1\}$ resolvemos o problema

$$\left|\begin{array}{l} z'' - \Delta z + V(x,t)z = -f(0) \text{ em } Q, \\ z(T) = z^0, \quad z'(T) = z^1 \text{ em } \Omega, \\ z = 0 \text{ em } \Sigma, \end{array}\right. \tag{6.2}$$

fazendo a mudança de variável

$$p = y - z, \tag{6.3}$$

a função p satisfaz,

$$\left|\begin{array}{l} p'' - \Delta p + V(x,t)p = h\chi_\omega \text{ em } Q, \\ p = 0 \text{ em } \Sigma, \\ p(0) = y^0 - z(0), \quad p'(0) = y' - z'(0). \end{array}\right. \tag{6.4}$$

Se $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, então

$$z \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(Q)). \tag{6.5}$$

Portanto, mostrar a controlabilidade exata de (6.1) em $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ com controle em $L^2(\omega \times (0,T))$ é equivalente provar que toda solução de (6.4) pode ser conduzida ao equilíbrio no instante T.

Nosso objetivo portanto, se reduz ao estudo do sistema da forma

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y + V(x,t)y = h\chi_\omega \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ em } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.6}$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 6.2. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Seja $\omega \subset \Omega$ uma vizinhança de Γ. Suponhamos que $V = V(x,t) \in L^\infty(Q)$ e que*

$$T > T_0 = \textit{ diametro de } \Omega.$$

Então, para cada par de dados iniciais

$$\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$, tal que, a solução de (6.6) satisfaça

$$y(T) = y'(T) = 0, \tag{6.7}$$

além disso, temos:

$$\|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C\|\{y^0, y^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{6.8}$$

Demonstração: No que segue, provaremos que o método Hum será bem aplicado para resolver o problema de controlabilidade interna.

1º Etapa: Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in D(\Omega) \times D(\Omega)$ resolvemos o problema

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi + V(x,t)\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{6.9}$$

em seguida.

2º Etapa: Com a solução regular $\phi = \phi(x,t)$ de (6.9) resolvemos o problema.

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi + V(x,t)\psi = -\phi\chi_\omega \text{ em } Q, \\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0. \end{array} \right. \tag{6.10}$$

6.4 O operador Λ

Com a solução $\psi = \psi(x,t)$ de (6.10) definimos a aplicação Λ por:

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{6.1}$$

3º Etapa: Multiplicar ambos os lados de (6.9) por ψ solução de (6.10) e integre em Q, obtendo:

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega V(x,t)\phi\psi dxdt = 0. \tag{6.2}$$

Analisaremos cada integral individualmente.

Analise da 1º integral:

Note que,

$$(\phi', \psi)' = (\phi'', \psi) + (\phi', \psi'),$$

temos,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\omega \phi''\psi dxdt \int_0^T (\phi'', \psi)dt &= \int_0^T (\phi', \psi)'dt - \int_0^T (\phi', \psi')dt \\ &= (\phi'(t), \psi(t))\Big|_0^T - \int_0^T (\phi', \psi')dt \\ &= (\phi'(T), \psi(T)) - (\phi'(0), \psi(0)) - \int_0^T (\phi', \psi')dt \\ &= -(\phi^1, \psi(0)) - \int_0^T (\phi', \psi')dt,\end{aligned}$$

analisando agora essa integral de dentro, temos que

$$(\phi, \psi')' = (\phi', \psi') + (\phi, \psi''),$$

daí,

$$\begin{aligned}\int_0^T (\phi', \psi')dt = \int_0^T (\phi, \psi')dt - \int_0^T (\phi, \psi'')dt \\ &= (\phi(t), \psi'(t))\Big|_0^T - \int_0^T (\phi, \psi'')dt \\ &= (\phi(T), \psi'(T)) - (\phi(0), \psi'(0)) - \int_0^T (\phi, \psi'')dt \\ &- (\phi^0, \psi'(0)) - \int_0^T (\phi, \psi'')dt,\end{aligned}$$

substituindo esse resultado na 1 integral, temos:

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt = -(\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi'(0)) + \int_0^T (\phi, \psi'')dt. \tag{6.3}$$

<u>**Analise da 2º integral:**</u>

Note que,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt \overbrace{=}^{Green} &- \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi dxdt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi dxdt \overbrace{=}^{Green} \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt.\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt. \tag{6.4}$$

Logo, substituindo (6.3) e (6.4) em (6.2) temos

$$-(\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi'(0)) + \int_0^T \int_\Omega \phi\psi'' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi\phi dxdt + \int_0^T \int_\Omega V(x,t)\phi\psi dxdt = 0,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \int_\Omega [\psi'' - \Delta\psi + V(x,t)\psi]\, \phi dxdt = (\phi^1, \psi(0)) - (\phi^0, \psi'(0)),$$

mas, sabemos que $\psi'' - \Delta\psi + V(x,t)\psi = -\phi\chi_\omega$ e $\Omega = \omega \cup (\Omega \setminus \omega)$. Logo,

$$\int_0^T \int_\Omega [-\phi\chi_\omega]\, \phi dxdt = (\phi^1, \psi(0)) - (\phi^0, \psi'(0)).$$

Portanto, segue que

$$\int_0^T \int_\omega (\phi)^2 dxdt = (\phi^0, \psi'(0)) - (\phi^1, \psi(0)). \tag{6.5}$$

Definimos em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a semi - norma

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}_F = \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{6.6}$$

Observação 6.3. *Note que a partir de (6.6) para obter uma norma necessitamos que a solução $\phi = \phi(x,t)$ de (6.9) seja zero em $\omega \times (0,T)$, então $\phi = 0$ em Q.*

O Teorema de Holmgren 3.1 diz que existe $T_0 = T_0(\omega)$, tal que, para todo $T > T_0$ a única solução $\phi = \phi(x,t)$ de (6.9), tal que, $\phi = 0$ em $\omega \times (0,T)$ então, $\phi = 0$ é identicamente nula em Q. Em particular $\phi^0 = \phi(0) = 0$ e $\phi^1 = \phi'(0) = 0$. Logo,

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = 0 \Longrightarrow \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \text{ sobre } \omega \times (0,T) \Longrightarrow \phi = 0 \text{ em } Q.$$

Consequentemente, para $T > T_0$ a forma quadrática em (6.6) é uma norma em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Considere F sendo o complemento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Observação 6.4. *A norma em (6.6) induz em $(\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)) \times (\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega))$ o seguinte produto interno.*

$$\langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_F = \int_0^T \int_\omega \phi\xi dxdt, \tag{6.7}$$

onde $\xi = \xi(x,t)$ é solução de (6.9) correspondente ao dado inicial $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Note que, de (6.5) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\omega \phi^2 d\Gamma dt &= (\phi^0, \psi'(0)) - (\phi^1, \psi(0)) \\ &= \langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle \\ &= \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\},\end{aligned}$$

pois

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{6.8}$$

Daí,

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 d\Gamma dt = \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle. \tag{6.9}$$

Da observação (6.4) e de (6.9), segue que

$$\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle = \langle\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle_F, \tag{6.10}$$

pela desigualdade de Cauchy-Scharwz, obtemos

$$|\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle| \leq \|\{\phi^0,\phi^1\}\|_F \|\{\xi^0,\xi^1\}\|_F. \tag{6.11}$$

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ e defina

$$\begin{aligned} B: \quad & \mathcal{D}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \{\overline{\phi},\overline{\xi}\} \longmapsto B(\{\overline{\phi},\overline{\xi}\}) = \langle\overline{\phi},\overline{\xi}\rangle_F, \end{aligned}$$

onde $\overline{\phi} = \{\phi^0,\phi^1\}$, $\overline{\xi} = \{\xi^0,\xi^1\}$ e $D = \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Noite que B é bilinear contínua, por (6.11), pois

$$\|B(\overline{\phi},\overline{\xi})\|_F = |\{\overline{\phi},\overline{\xi}\}_F| \leq \|\overline{\phi}\|_F\|\overline{\xi}\|_F.$$

Daí, temos a continuidade da forma bilinear definida por Λ em $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Seja $F = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ o complemento de $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ com respeito a norma em (6.6). Com isso, a forma bilinear

$$B(\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}) = \langle\Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle,$$

tem uma extensão por continuidade ao fecho de F.

Observação 6.5. *Continuaremos a representar a extensão com a mesma notação.*

$$B: F\times F \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde,

$$B(\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}) = \langle\Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle = \langle\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle_F,$$

é uma forma bilinear contínua sobre o espaço F a qual é coerciva e simétrica. Logo, pelo Lema de Lax-Milgran, para cada $\{\psi^1,-\psi^0\}$ em F', existe único $\{\phi^0,\phi^1\}\in F$, tal que,

$$\langle\Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle = \langle\Lambda\{\psi^1,-\psi^0\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle_{F'\times F}, \quad \forall\{\xi^0,\xi^1\}\in F, \tag{6.12}$$

então, para cada $\{\psi^1,-\psi^0\}\in F'$, existe único $\{\phi^0,\phi^1\}\in F$ o qual é solução da equação

$$\Lambda\{\phi^0,\phi^1\} = \{\psi^1,-\psi^0\} \quad em \quad F', \tag{6.13}$$

na qual ocorre por (6.12).

Note que Λ é linear e por (6.13) segue que a aplicação $\Lambda : F \longrightarrow F'$ sobrejetiva.

Mostremos agora que Λ é injetiva.

Seja $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que $\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\}$ daí,

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle = \langle \{0, 0\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 d\Gamma dt = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \text{ em } \omega \times (0, T).$$

Como ϕ é solução de (6.9) pelo Teorema de Holmgren 3.1 $\phi = 0$ em Q e portanto $\phi(0) = \phi^0 = 0$ e $\phi'(0) = \phi^1 = 0$. Logo, Λ é injetora, pois $\ker \Lambda = \{0, 0\}$. Daí, conclui-se que Λ é um isomorfismo.

Vimos que por Lax-Milgran dado $\{y^1, y^0\} \in F'$, existe único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, tal que,

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}. \tag{6.14}$$

De (6.14) e do fato que

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\},$$

tem-se que

$$\psi(0) = y^0, \qquad \psi'(0) = y^1,$$

ou seja, ψ é solução de (6.10). Em (6.6) considere $h = -\phi\Big|_{\omega\times(0,T)}$, onde ϕ é solução de (6.9) por unicidade de soluções da equação da onda linear, temos que

$$\psi(x, t) = y(x, t) \text{ em } Q,$$

então,

$$y(T) = \psi(T) = 0 \text{ e } y'(T) = -\psi'(T) = 0.$$

■

Observação 6.6. *O Teorema de Holmgren assegura que dado um subconjunto aberto $\omega \subset \Omega$, existe $T_0 = T_0(\omega)$, tal que, se $T > T_0$ e $\phi = 0$ em $w \times (0, T)$ então $\phi = 0$ em Q, onde ϕ é solução do problema*

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi + V(x, t)\phi = 0 \ \ em\ Q, \\ \phi = 0 \ \ em\ \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \ em\ \Omega. \end{array}\right.$$

Proposição 6.1. *Suponhamos que se verifique as hipóteses do Teorema 6.2. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que se tem*

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt. \tag{6.15}$$

Demonstração: Sabemos que (6.15) se verifica se $V \equiv 0$. Procedemos, portanto por um método perturbativo. Escrevemos,

$$\phi = \theta + \eta,$$

onde,

$$\left| \begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta = 0 \text{ em } Q, \\ \theta = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \theta(0) = \phi^0, \quad \theta'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{6.16}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \eta'' - \Delta\eta = -V\phi \text{ em } Q, \\ \eta = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0. \end{array} \right. \tag{6.17}$$

Como $T > T_0 =$ diametro de Ω, tem-se que vale

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta|^2 dxdt,$$

pois se trata de um problema linear em θ, e va vimos que vale a desigualdade para este. Mais ainda temos que

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta|^2 dxdt \quad \leq C \int_0^T \int_\omega \left[|\phi|^2 + |\eta|^2\right] dxdt. \tag{6.18}$$

Note que basta provar que

$$\|\eta\|^2_{L^2(Q)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt, \tag{6.19}$$

ou seja, que

$$\int_0^T \int_\omega |\eta|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt.$$

Provaremos por absurdo. Se (6.19) não se verifica, então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de soluções de (6.9) correspondentes a dados iniciais $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$, tal que,

$$\int_0^T \int_\omega |\phi_n|^2 dxdt \longrightarrow 0, \tag{6.20}$$

enquanto que a sequência $\{\eta_n\}$ de soluções de (6.17) verifica

$$\|\eta_n\|_{L^2(Q)} = 1. \tag{6.21}$$

Combinando (6.18), (6.20) e (6.21). Deduzimos que,

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C.$$

Logo,

$$\{\phi_n^0, \phi_n^1\} \text{ é limitada em } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

e portanto,

$$\{\phi_n\} \text{ limitada em } L^2(Q),$$

devido as estimativas à priori da equação da onda. Estimativas clássicas da equação da onda (6.17) assegura também que

$$\{\eta_n\} \text{ é limitada em } \ H^1(Q),$$

e portanto,

$$\{\eta_n\} \ \text{ é relativamente compacta em } \ L^2(Q).$$

Extraindo, uma subsequência adequada e passando o limite, obtemos:

$$\phi_n \rightharpoonup \phi \text{ em } L^2(Q),$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é uma solução fraca de (6.9) tal que

$$\phi = 0 \text{ em } w \times (0,T), \tag{6.22}$$

devido a definição de Λ. Por outra lado,

$$\eta_n \longrightarrow \eta \text{ em } L^2(Q),$$

donde $\eta = \eta(x,t)$ é uma solução de (6.17) com

$$\|\eta\|_{L^2(Q)} = 1, \tag{6.23}$$

o resultado de continuação única de A. Ruiz em [39], assegura que a solução de (6.9) que verifica (6.22) é identicamente nula em Q. Mas, se $\phi \equiv 0$, por unicidade de solução de (6.17), deduzimos que $\eta \equiv 0$, o que contradiz (6.23). Desta forma, a demonstração da proposição (6.1) fica concluída.

■

Teorema 6.3. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ω uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$ em Ω e $T > 2\|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Suponhamos que f verifica as condições*

$$f' \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{6.24}$$

$$\textit{Existe} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \infty, \tag{6.25}$$

Então, para cada par de dados iniciais e finais $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, existe um controle* $h \in L^2(\omega \times (0,T))$*, tal que, a solução de* (6.1),

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + f(u) = h\chi_\omega \ \ em \ Q \\ u = 0 \ \ em \ \Sigma \\ u(0) = y^0, \quad u'(0) = y^1 \ \ em \ \Omega, \end{array} \right. \tag{6.26}$$

verifica (6.2),

$$u(T) = z^0, \quad u'(T) = z^1. \tag{6.27}$$

Demonstração: A demonstração se procede em duas etapas.

Etapa 1. Suponhamos que $f(s) = \alpha s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Logo, se trata portanto de um problema linear.

Aplicando o Método Hum resolvemos o problema

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{6.28}$$

em seguida,

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi + \alpha\psi = -\phi\chi_\omega \text{ em } Q, \\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0. \end{array} \right. \tag{6.29}$$

Definimos o operador

$$\Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \tag{6.30}$$

que verifica,

$$\langle \Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt. \tag{6.31}$$

A controlabilidade exata de (6.1) em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com controles em $L^2(\omega \times (0,T))$ será uma consequência de:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq C_\alpha \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt. \tag{6.32}$$

A Proposição 6.1 proporciona a estimativa quando ω é uma vizinhança de toda fronteira Γ. Porém, nesse caso particular em que o potencial é constante se tem (6.32) se ω é uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$.

Com efeito, procedemos da mesma forma da demonstração da Proposição 6.1, e deduzimos que

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt + C\|\eta\|^2_{L^2(Q)}, \tag{6.33}$$

sendo $\eta = \eta(x,t)$ a solução de

$$\left| \begin{array}{l} \eta'' - \Delta\eta = -\alpha\phi \text{ em } Q, \\ \eta = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0, \end{array} \right. \tag{6.34}$$

ou seja, nos restando provar que

$$\|\eta\|_{L^2(Q)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt, \tag{6.35}$$

que é mostrado por absurdo, como na proposição anterior. Vimos que se (6.35) não se cumpre, se obtem uma solução de (6.28) tal que

$$\phi \equiv 0 \text{ em } \omega \times (0,T), \tag{6.36}$$

e de forma que a solução η associada satisfaça

$$\|\eta\|_{L^2(Q)} = 1. \tag{6.37}$$

Pelo Teorema de Holmgren, garantimos que a solução de (6.28) é identicamente nula em Q. Assim fica assegurado a desigualdade desejada.

Etapa 2. No caso geral fixamos um estado final $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ arbitrário. Resolvemos

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi + f(\phi) = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{6.38}$$

e em seguida,

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y + f(y) = -\phi\chi_\omega \text{ em } Q, \\ y = 0 \ \ em \ \ \Sigma, \\ y(0) = z^0, \quad y'(0) = z^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{6.39}$$

Definimos o operador linear,

$$\mu : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

tal que,

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1(0), -y(0)\}.$$

O problema se reduz a provar que

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}, \tag{6.40}$$

admite uma solução $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, para cada $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Decompondo a solução y de (6.39) da seguinte forma:

$$y = \gamma + z + \eta,$$

sendo γ, z e η soluções respectivas dos seguintes problemas:

$$\left| \begin{array}{l} \gamma'' - \Delta\gamma + \alpha\gamma = -\phi\chi_\omega \text{ em } Q, \\ \gamma(T) = \gamma'(T) = 0, \\ \gamma = 0 \text{ em } \Sigma, \end{array} \right. \tag{6.41}$$

$$\left| \begin{array}{l} z'' - \Delta z + \alpha z = 0 \text{ em } Q, \\ z(T) = z^0, \quad z'(T) = z^1, \text{ em } \Omega, \\ z = 0 \; em \; \Sigma, \end{array} \right. \tag{6.42}$$

$$\left| \begin{array}{l} \eta'' - \Delta\eta + \alpha\eta = -f(y) + \alpha y \text{ em } Q, \\ \eta(T) = \eta'(T) = 0, \text{ em } \Omega \\ \eta = 0 \text{ em } \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.43}$$

O operador μ pode se escrever então da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mu\{\phi^0, \phi^1\} &= \{\gamma'(0), -\gamma(0)\} + \{z'(0), -z(0)\} + \{\eta'(0), -\eta(0)\} \\ &= \Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} + \{z'(0), -z(0)\} + G\{\phi^0, \phi^1\}, \end{aligned} \tag{6.44}$$

onde,

$$G\{\phi^0, \phi^1\} = \{\eta'(0), -\eta(0)\}.$$

Da etapa 1, se deduz que

$$\Lambda_\alpha : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

é um isomorfismo.

Da equação (6.44), temos que

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} &= \mu\{\phi^0, \phi^1\} - \{z'(0), -z(0)\} - G\{\phi^0, \phi^1\} \\ &= \{y'(0), -y(0)\} - \{z'(0), -z(0)\} - G\{\phi^0, \phi^1\} \\ &= \{y' - z'(0), z(0) - y^0\} - G\{\phi^0, \phi^1\}. \end{aligned}$$

Aplicando o inverso de Λ_α, obtemos:

$$\{\phi^0, \phi^1\} = \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1 - z'(0), z(0) - y^0\} - \Lambda_\alpha^{-1}\{\phi^0, \phi^1\}.$$

A expressão acima, nos motiva a definir o seguinte operador:

$$
\begin{aligned}
K: \quad & L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\\
& \{\phi^0,\phi^1\} \qquad \longmapsto \qquad K\{\phi^0,\phi^1\} = \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1 - z'(0), z(0)-y^0\} - \Lambda_\alpha^{-1} G\{\phi^0,\phi^1\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o problema se reduz a provar a existência de um ponto fixo do operador K. Para isso, usaremos o Teorema de Schauder.

Precisamos mostrar que o operador K é compacto. Observe que basta mostrar que,

$$
\begin{aligned}
G: \quad & B_r(0,0)\subset L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\\
& \{\phi^0,\phi^1\} \qquad \longmapsto \quad G\{\phi^0,\phi^1\} = \{\eta'(0), -\eta(0)\},
\end{aligned}
$$

é um operador contínuo e compacto. Onde B_r é a bola de centro em $\{0,0\}$ e raio r.

Multiplicando a equação $(6.39)_1$ por y' e integrando em Ω temos,

$$
\int_\Omega y''y'dx - \int_\Omega \Delta y y' dx + \int_\Omega f(y)y'dx = -\int_\Omega \phi\chi_\omega y'dx,
$$

usando o Teorema de Green 1.9, obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|y'|^2dx + \int_\Omega \nabla y\nabla y'dx + \int_\Omega f(y)y'dx = -\int_\omega \phi y'dx,
$$

ou ainda,

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|y'|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\nabla y|^2dx = -\int_\Omega f(y)y'dx - \int_\omega \phi y'dx,
$$

isolando a derivada, obtemos

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|y'|^2+|\nabla y|^2\right)dx\right] = -\int_\Omega f(y)y'dx - \int_\omega \phi y'dx,
$$

isto é,

$$
\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega f(y)y'dx - \int_\omega \phi y'dx, \tag{6.45}
$$

com,

$$
E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|y'|^2+|\nabla y|^2\right)dx. \tag{6.46}
$$

De (6.46), temos

$$
E(T) = 0. \tag{6.47}
$$

Vamos agora, conseguir uma limitação para a derivada da energia, para isso calculamos:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\omega \phi y'dx\right| &\le \int_\omega |\phi y'|dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega |y'|^2dx + \frac{1}{2}\int_\omega |\phi|^2dx\\
&\le E(t) + C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{6.48}
$$

e

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega f(y)y'dx\Big| &\leq \int_\Omega |f(y)y'|dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f(y)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |y'|^2dx \\ &\leq E(t) + C\int_\Omega |f(y)|^2dx = E(t) + C\|f(y)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.49}$$

De (6.45), (6.48) e (6.49) temos,

$$\frac{d}{dt} \leq 2E(t) + C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + C\|f(y)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

de (6.24) e (6.25), temos que

$$|f(y)| \leq C|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6.50}$$

como $p(n-2) < n$, tem-se

$$\|f(y)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |f(y)|^2dx \leq C\int_\Omega |y|^{2p}dx = C\|y\|^p_{L^{2p}(\Omega)} \leq C\|y\|^p_{H^1_0(\Omega)}, \tag{6.51}$$

pois, $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ para $p(n-2) < n$. Desde que,

$$E(t) = \frac{1}{2}\|y'\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2,$$

daí, temos ainda que

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 \leq E(t) \Longrightarrow \|y\| \leq \sqrt{2}[E(t)]^{1/2}.$$

Logo,

$$\|y\|^p \leq (\sqrt{2})^p[E(t)]^{p/2} = C[E(t)]^p, \tag{6.52}$$

substituindo (6.51) em (6.50) temos que

$$\|f(y)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C[E(t)]^p. \tag{6.53}$$

E substituindo a ultima igualdade na expressão da $\dfrac{d}{dt}E(t)$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq C\left\{E(t) + [E(t)]^p + \|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right\}.$$

Aplicando Gronwall nesta última desigualdade, temos

$$E(t) \leq C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}(T-t)e^{C(T-t)}e^{C\int_t^T [E(s)]^{p-1}ds}. \tag{6.54}$$

Desta desigualdade, se conclui que se $r > 0$ é suficientemente pequeno e $\{\phi^0,\phi^1\} \in B_r(0,0)$, então $E(t) \in L^2(0,T)$ e se tem a estimativa,

$$E(t) \leq C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,T), \tag{6.55}$$

para alguma constante $C = C(r) > 0$. De (6.55) segue que se $\{\phi^0, \phi^1\} \in B_r(0,0)$, que

$$y \text{ está limitada uniformemente em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{6.56}$$

e como $p(n-2) < n$, segue por Brezis e Cazenave [4] (Ver Lema A.3.12)) que,

$$f(y) \text{ está uniformemente limitada em } L^\infty(0,T;H^\epsilon(\Omega)), \tag{6.57}$$

para algum $\epsilon > 0$ que depende unicamente de p[1].

De fato, queremos justificar que $f(y)$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^\epsilon(\Omega))$. Mas por L. A. Medeiros [19] pg. 96 Proposição 2.6.7 e Lema A.3.12 Brezis e Cazenave [4], obtemos

$$\|f(y(t))\|_{H^\epsilon(\Omega)} \leq \|f(y(t))\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla f(y(t))| = |f'(y(t))||\nabla y(t)| \leq K|y(t)|^p\|y(t)\|.$$

Combinando (6.56) e resultados clássicos de regularidade para equação de ondas se deduz que,

$$\eta \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T;H^{1+\epsilon}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^\epsilon(\Omega)). \tag{6.58}$$

Em particular $G(B_r(0,0))$ é um conjunto limitado de $H^\epsilon(\Omega) \times H^{1+\epsilon}(\Omega)$ e portanto $G(B_r(0,0))$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Assim, como G é compacto então, segue que K também será compacto. Logo, a compacidade de K fica demonstrada.

Mostraremos agora que existe $M > 0$ tal que,

$$\|K\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq M, \quad \forall \{\phi^0, \phi^1\} \in B_r(0,0),$$

com,

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq M,$$

Sabemos que

$$K\{\phi^0, \phi^1\} = \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1, -y^0\} - \Lambda_\alpha^{-1}\{z'(0), -z(0)\} - \Lambda_\alpha^{-1}G\{\phi^0, \phi^1\},$$

daí,

$$\|K\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq \|\Lambda_\alpha^{-1}\|\|\{y^1 - z'(0), z(0) - y^0\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \|\Lambda_\alpha^{-1}\|\|G\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}.$$

Mas, note que

$$\begin{aligned} \|G\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} &\leq C\|f(y)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\||y|^p\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C\|y\|^p_{L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))} \leq C[E(t)]^{p/2}_{L^\infty(0,T)}, \end{aligned}$$

[1]Lembre que $H^\epsilon(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^\epsilon(\mathbb{R}^n)\}$ onde $H^\epsilon(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^\epsilon)^{\epsilon/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ e onde $\hat{u}$ é a transformada de Fourier de u. Como resultado de imersão temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^\epsilon(\Omega)$ para $0 \leq \epsilon \leq 1$.

pois, temos

$$\|y\|^p_{L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))} = \left[\sup_{0\le t\le T} ess\ |y(t)|_{L^{2p}(\Omega)}\right]^p.$$

Mostramos anteriormente que, $|y(t)|_{L^{2p}(\Omega)}|\le 2[E(t)]^{1/2}$. Daí,

$$\left[\sup_{0\le t\le T} ess\ |y(t)|_{L^{2p}(\Omega)}\right]^p \le \left[\sup_{0\le t\le T} ess\ (2E(t))^{1/2}\right]^p = (\sqrt{2})^p \left[\sup_{0\le t\le T} ess\ E(t)\right]^{p/2},$$

ou seja,

$$\|y\|^p_{L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))} \le C\|E(t)\|^{p/2}_{L^\infty(0,T)}.$$

Portanto, temos a estimativa,

$$\|G\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \le C\|E(t)\|^{p/2}_{L^\infty(0,T)}, \tag{6.59}$$

no qual, combinando com (6.56) temos a estimativa

$$\|G\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \le C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^p_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}, \tag{6.60}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\|E(t)\|^{p/2}_{L^\infty(0,T)} &= \left(\sup_{0<t<T} essE(t)\right)^{p/2}\\
&= \left(\sup_{0<t<T} ess\frac{1}{2}|y'|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{p/2}\\
&\overbrace{\le}^{6.56} C\left(\sup_{0<t<T} ess\frac{1}{2}|y'|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{p/2}\\
&= \tilde{C}\|y'\|^p_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\\
&\le C_0\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^p_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)},
\end{aligned}$$

sendo,

$$\gamma = \|\Lambda_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega), L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))}. \tag{6.61}$$

De (6.59) e (6.60), segue que,

$$\begin{aligned}
\|K\{\phi^0,\phi^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} &\le \|\gamma\{y^1 - z'(0), z(0) - y^0\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \gamma C_0\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{1}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + C,
\end{aligned} \tag{6.62}$$

onde C depende apenas de $\{y^0,y^1\},\{z^0,z^1\}$. Tomando $M \ge 2c > 0$, temos de (6.61) e (6.62) que,

$$\|K\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2}\|\{\phi^0\phi^1\}\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}M \le \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.$$

Aplicando o Teorema de Schauder 6.1, temos que o operador K possui um ponto fixo, ou seja

$$K\{\phi^0,\phi^1\} = \{\phi^0,\phi^1\}, \tag{6.63}$$

como queríamos mostrar. Mas de (6.63) e da definição de K, temos:

$$\{\phi^0, \phi^1\} = -\Lambda_\alpha^{-1} G\{\phi^0, \phi^1\} + \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1 - z'(0), z(0) - y^0\},$$

isto é,

$$\{\phi^0, \phi^1\} = -\Lambda_\alpha^{-1} G\{\phi^0, \phi^1\} + \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1, -y^0\} - \Lambda_\alpha^{-1}\{z'(0), -z(0)\}.$$

Aplicando Λ_α, temos:

$$\Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} = -G\{\phi^0, \phi^1\} + \{y^1, -y^0\} - \{z'(0), -z(0)\},$$

daí,

$$\{y^1, -y^0\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\} + \{\eta'(0), -\eta(0)\} + \{z'(0), -z(0)\},$$

e por (6.44),

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = G\{\phi^0, \phi^1\} + \Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} + \{z'(0), -z(0)\},$$

por isso,

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\},$$

provando o resultado desejado. Para concluir a demonstração do Teorema 6.3, usando a definição de μ,

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\},$$

e da última igualdade encontrada acima, obtemos

$$y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1. \tag{6.64}$$

Portanto, tomando $h = -\phi\chi_\omega$ em (6.26), temos que tal problema tem única solução u, daí, $u = y$, onde y é solução de (6.39). Logo, pela unicidade de soluções, concluímos que

$$u(T) = z^0, \quad u'(T) = z^1, \quad \forall T > T_0,$$

como queríamos provar.

∎

Apêndice A

Prolongamento das soluções aproximadas

No que segue, apresentaremos algumas definições e resultados que usamos na dissertação. Alguns destes resultados serão demonstrados.

A.1 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Carathéodory ?? que será utilizado no Capítulo 2. O teorema fornece a existência de solução para um problema de Cauchy em um intervalo $[0, t_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$.
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t, x), onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{A.1}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do Teorema de Carathéodory A.1 sobre Ω se:

1. f(t,x) é mensurável em t para cada x fixo
2. f(t,x) é contínua em x para cada t fixo
3. Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \forall (t, x) \in K$$

Teorema A.1 (Teorema de Carathéodory). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então, existe uma solução $x(t)$ de (A.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, onde $\beta > 0$ é uma constante positiva.*

Observação A.1. *A demostração desse teorema será feita quando f estiver definida em R : $|t - t_0| \leq a$ em $|x - \xi| \leq b$.*

Demonstração: A prova do teorema será obtida por limites de soluções aproximadas. Vamos construir a solução para $t \geq t_0$, e a construção no caso de $t \leq t_0$ é análoga. Defina $M(t)$ da seguinte forma:

$$M(t) = 0, \text{ se } t \leq t_0 \tag{A.2}$$

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds, \text{ se } t \in [t_0, t_0 + a]. \tag{A.3}$$

Note que M é contínua, não-decrescente e $M(t_0) = 0$. Por continuidade de M existe $\beta > 0$ tal que $\big(t, x_0 \pm M(t)\big) \in R$, para algum intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t + a$, onde β é uma constante positiva. Escolhendo β para que isto seja verdade, definiremos a sequência de soluções aproximadas como:

$$u_j(t) = \begin{cases} u_0, \text{ se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j} \\ u_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, u_j(s))ds, \text{ se } t_0 + \dfrac{\beta}{j} < t < t_0 + \beta. \end{cases} \tag{A.4}$$

Temos que u_1 está definida em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, para qualquer constante ξ. Fixemos $j \in \mathbb{N}$ qualquer. Daí, a primeira fórmula de ($A.4$) define u_j no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{\beta}{j}$.

Sendo $(t, \xi) \in R$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{\beta}{j}$, a segunda fórmula de ($A.4$) define u_j como uma função contínua no intervalo $t_0 + \dfrac{\beta}{j} \leq t \leq t_0 + \dfrac{2\beta}{j}$. Por outro lado, desde que $|f(t, x)| \leq m_K$ e pela definição de M, obtemos

$$|u_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right). \tag{A.5}$$

Suponha que u_j está definida para $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$. Então, a segunda fórmula de ($A.4$) define u_j para o intervalo $t_0 + \dfrac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \dfrac{(k+1)\beta}{j}$, sendo apenas necessário o integrando mensurável no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{k\beta}{j}$. Temos também que em $t_0 + \dfrac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \dfrac{(k+1)\beta}{j}$, a função u_j satisfaz a desigualdade ($A.5$), devido a $|f(t, x)| \leq m_K$ e pela definição de M. Portanto, todas as u_j são definidas como funções contínuas em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, satisfazendo

$$u_j(t) = \xi \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$$

$$|u_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) \text{ em } t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \tag{A.6}$$

Seja $\mathcal{N} = \Big\{u_j : j \geq j_0\Big\}$. Mostraremos que $\mathcal{N}$ satisfaz as hipóteses do teorema de Ascoli-Arzelá. Sendo M contínua no intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$, segue que M é uniformemente contínua. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right)\right|.$$

Pela desigualdade triangular

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, obtemos

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \epsilon,$$

mostrando que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua em $[t_0, t_0 + \beta]$. Por outro lado, dado $t \in I_a$, tem-se que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, pois m é integrável.

Então, pelo teorema de Ascoli-Arzelá ver ($A.9$), existe uma subsequência de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_j \to u \text{ uniformemente em } [t_0, t_0 + \beta].$$

Como f é contínua em x, fixado t, temos que $f(t, u_j(t)) \to f(t, u(t))$ quando $j \to \infty$. Além disso, $|f(t, u_j(t))| \leq m$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ver ($A.8$), temos

$$\lim_{j\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_j(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Então, vamos escrever

$$u_j(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_j(s))ds - \int_{t-\frac{\beta}{j}}^{t} f(s, u_j(s))ds.$$

Passando ao limite quando $j \to \infty$, a última integral se anula e assim

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

mostrando o resultado. ■

Teorema A.2 (**Teorema do prolongamento**). *Seja* $\Omega = \big[0, T\big] \times B$ *com* $T > 0$, $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\big\}$, *onde* $b > 0$ *é uma constante positiva e* $\|\cdot\|$ *a norma euclidiana do* $\mathbb{R}^n$. *Suponha que* f *é uma função que satisfaz as duas primeiras condições do teorema de Caratheodóry e que exista uma função* $m(t)$ *integrável tal que*

$$|f(t, x)| \leq m(t), m(t) \in L(0, T), \text{ para todo } (x, t) \in \Omega.$$

Seja $x(t)$ *uma solução de* ($A.1$) *e suponha que* $x(t)$ *está definida em* I, *satisfazendo* $|x(t)| \leq M$, M *independente de* I *e* $M < b$ *para todo* $t \in I$. *Então* $x(t)$ *pode ser prolongada à todo intervalo* $[0, T]$

Demonstração. Ver Coddington-Levinson [5]. □

Teorema A.3 (Aubin-Lions). *Sejam X, B e Y espaços de Banach com $X \overset{comp}{\hookrightarrow} B \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$, X e Y reflexivos. Seja $1 < p_0, p_1 < \infty$, e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{P_0}(0, T, B_0); u' \in L_1^p(0, T, B_1)\}$$

munido da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}$. Então, W é um espaço de Banach, e a imersão W em $L^{p_0}(0, T, B)$ é compacta.

Demonstração: Para prova ver Lions [34] ou Temam [29]. ■

Observação A.2. *Uma consequência do Teorema de Aubin-lions A.3 é que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T, B_0)$ tal que $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^p(0, T, B_1)$ para algum $p \geq 1$. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em W, isto é, existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge forte em $L^2(0, T, B)$.*

Corolário A.1 (Lema de Lions). *Seja (u_n) uma sequência de funções mensuráveis, limitada em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$ e converge para u quase sempre em Ω. Então,*
(i) $u_n \to u$ (forte) em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$;
(ii) $u_n \rightharpoonup u$ (fraco) em $L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver L.A.Medeiros [19] ou Lions [34]. □

Teorema A.4 (Agmon-Douglis-Niremberg). *Suponha que Ω é um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução do problema*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema A.5 (Lax-Milgran). *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $f \in H'$(espaço dual de H) existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema A.6 (Gauss-Green). *Se $u \in C^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu^i d\gamma; \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L.A. Medeiros [22]. ■

Proposição A.1. *Seja* (f_n) *uma sequência em* X'*. Então,*

i) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow$ *se, e somente se,* $f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X$*.*
ii) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$*, então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$*.*

Demonstração. Ver Brezis [3]. □

Teorema A.7. *seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_p \to 0$*. Então, existe uma subsequência* (f_{n_k}) *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*
(*a*) $f_{n_k}(x) \to f(x)$
(*b*) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N},$ *quase sempre em* Ω

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema A.8 (**Teorema da Convergência Dominada**)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz as condições:*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω*;*
2. *Existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *quase sempre em* Ω*. Então,*
$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema A.1 (**Lema de Fatou**)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz as condições*

1. *para todo* n*,* $f_n(x) \geq 0$ *quase sempre em* Ω*;*
2. $\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty$*.*

Para quase todo $x \in \Omega$*, considere* $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \infty$*. Então,*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega f \leq \liminf_n \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Proposição A.2. *O espaço* $L^p(0, T, X)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(0, T, X)$*.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4]. ■

Observação A.3. *C(K) denota o espaço das funções contínuas sobre espaços métricos compactos* K *com valores em* $\mathbb{R}$ *e* $\mathcal{L}(X, Y)$ *o conjunto das aplicações lineares de* X *em* Y*.*

Teorema A.9 (**Ascoli-Arzelà**). *Seja K um espaço métrico compacto e $\mathcal{H}$ um subconjunto limitado de $C(K)$. Suponha que $\mathcal{H}$ é uniformemente contínuo, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}$$

Então, o fecho de $\mathcal{H}$ é compacto.

Demonstração: Ver Brezis [3]. ∎

Teorema A.10 (**Hille**). *Sejam X,Y espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $f \in L^1(I,X)$, onde I é um intervalo da reta. Então, $Af \in L^1(I,Y)$ e*

$$A\left(\int_I f(s)ds\right) = \int_I (Af)(s)ds.$$

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4]. ∎

A.2 Existência de solução para o Problema Aproximado (2.1)

Voltemos agora ao nosso problema. Fazendo $v = w_j$ e substituindo $\phi_m(t)$ no problema aproximado da equação da onda, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^m g''_{jm}(t)w_i, w_j\right) + \left(\left(\sum_{i=1}^m g_{jm}(t)w_i, w_j\right)\right) = (f(t), w_j).$$

Como,

$$\left(\left(\sum_{i=1}^m g_{jm}(t)w_i, w_j\right)\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_{im}(t)w_i, w_j),$$

temos

$$g''_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) = (f(t), w_j), \quad j = 1, \cdots, m,$$

o qual é um sistema de m equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes λ_j, onde,

$$\phi_m^0 = \sum_{i=1}^m (\phi_m^0, w_i)w_j \quad e \quad \sum_{i=1}^m (\phi_m^1, w_i)w_j,$$

Podemos escrever nosso problema aproximado por

$$\sum_{j=1}^m g''_{jm}(w^j, w^i) + \sum_{j=1}^m g_{jm}((w^j, w^i)) = (f(t), w^j) \tag{A.7}$$

e sabendo que $g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, j = 1, \ldots, m$ e $g'_{jm}(0) = \beta_{jm}, j = 1, \ldots, m$, pois,

- $\phi_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{im}(t)w_j = \phi_m(0) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(0)w_j$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_{jm}-g_{jm}(0))w_j=0 \Longrightarrow \alpha_{jm}=g_{jm}(0),$$

e,

- $$\phi_{1m}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{im}(t)w_j=\phi'_m(0)=\sum_{j=1}^{m}g'_{jm}(0)w_j,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{m}(\beta_{jm}-g'_{jm}(0))w_j=0 \Longrightarrow \beta_{jm}=g'_{jm}(0).$$

Podemos escrever ($A.7$), da forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix}(w_1,w_1) & \cdots & (w_1,w_m)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (w_m,w_1) & \cdots & (w_m,w_m)\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}g''_{1m}(t)\\ \vdots\\ g''_{mm}(t)\end{bmatrix}}_{Z''_m(t)}+$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix}((w_1,w_1)) & \cdots & ((w_1,w_m))\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ ((w_m,w_1)) & \cdots & ((w_m,w_m))\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}g_{1m}(t)\\ \vdots\\ g_{mm}(t)\end{bmatrix}}_{Z_m(t)}=\begin{bmatrix}(f(t),w_1)\\ \vdots\\ (f(t),w_m)\end{bmatrix}$$

Definimos

$$Z'_m(t)=\begin{bmatrix}g'_{1m}(t)\\ \vdots\\ g'_{mm}(t)\end{bmatrix}$$

logo,

$$Z_m(0)=\begin{bmatrix}g_{1m}(0)\\ \vdots\\ g_{mm}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{1m}\\ \vdots\\ \alpha_{mm}\end{bmatrix}=Z_{0m}$$

$$Z'_m(0)=\begin{bmatrix}g'_{1m}(0)\\ \vdots\\ g'_{mm}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{1m}\\ \vdots\\ \beta_{mm}\end{bmatrix}=Z_{1m}$$

Como $\{w_j\}$ é ortonormal em $L^2(\Omega)$, temos que $A=I_m$. Logo, podemos escrever:

$$\left|\begin{array}{l} Z''_m(t)+B.Z_m(t)=F_m(t)\\ Z_m(0)=Z_{0m}\\ Z'_m(0)=Z_{1m}\end{array}\right. \tag{A.8}$$

Definindo $Y_{m1}(t) = Z_m(t), Y_{m2}(t) = Z'_m(t)$ e

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} Y_{m1}(t) \\ Y_{m2}(t) \end{bmatrix}$$

De ($A.8$) temos,

$$Y'_m(t) = \begin{bmatrix} Z'_m(t) \\ Z''_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_m(t) \\ F_m(t) - BZ_m(t) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$Y'_m(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{m1}(t) \\ Y_{m2}(t) \end{bmatrix}}_{Y_m(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_m(t) \end{bmatrix}}_{G_m(t)}.$$

Logo, encontrar solução para ($A.8$) é equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} Y'_m(t) = DY_m(t) + G_m(t), \\ Y_m(0) = Y_{0m}. \end{array} \right. \tag{A.9}$$

Vamos mostrar que ($A.9$) satisfaz as condições do Teorema de Caratheodory A.1. Seja,

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{2m+1}; |t| \leq t,\ \|x - x_0\| \leq b\},$$

como $b > 0, x_0 = Y_{0m}$. Defina,

$$\begin{aligned} h: \quad & D \longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ & (t, x) \longrightarrow h(t, x) = Dx + G_m(t), \end{aligned}$$

onde $x = Y_m(t)$.

1. Para cada x fixo, tem-se que $h(t, x)$ é mensurável, pois Dx é constante e $G_m(t)$ é mensurável, já que $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$

2. Para cada t fixo, tem-se que $h(x, t)$ é contínua, pois Dx é contínua e $G_m(t)$ é constante, logo contínua.

3. Para cada compacto $K \subset D$, vamos mostrar que existe uma função integrável $m_k(t)$ tal que

$$|h(t, x)| \leq m_k(t), \quad \forall (t, x) \in K$$

temos,

$$\begin{aligned}
|h(t,x)| &\leq |Dx|+|G_m(t)| \leq \|D\|.|x|+|G_m(t)| \\
&\leq \|D\|.|Y_m(t)|+\sum_{j=1}^{m}|(f(t),w_j)|^2 \\
&\leq \|D\|.|Y_m(t)|+m|f(t)|^2 \\
&\leq \|D\|.[|Y_m(t)-Y_{0m}|+|Y_{0m}|]+m|f(t)|^2 \\
&\leq \|D\|.[b+|Y_{0m}|]+m|f(t)|^2
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |m_k(t)|dt &= \int_0^T \Big[\|D\|.[b+|Y_{0m}]+m|f(t)|^2\Big]dt \\
&= CT + m\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \tilde{C}_T
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Caratheodory existe uma solução $Y_m(t)$ em algum intervalo $[0,t_m)$, $0 \leq t_m \leq T$, e portanto o sistema aproximado possui uma solução $u_m(t) \in [0,t_m), 0 \leq t_m \leq T$. O Teorema do prologamento permite prolongar esta solução ao intervalo $[0,T]$, $\forall T > 0$.

Apêndice B

Regularidade da solução forte

Nesta apêndice, mostraremos a regularidade da solução forte da equação da onda. Para isso note que a solução forte ϕ é o limite fraco de uma sequência de aproximações da forma

$$\phi_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t) w_i(x), \tag{B.1}$$

onde os $g_i(t), 1 \leq i \leq m$, são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(g_j''(t), v) + \Lambda_j g_j(t) = (f, w_j), \quad 1 \leq j \leq m. \tag{B.2}$$

com as condições iniciais

$$g_j(0) = (\phi^0, w_j) \quad e \quad g_j'(0) = (\phi^1, w_j). \tag{B.3}$$

Aplicaremos agora o método de variação das constantes de Lagrange, ver Kormonik [12]. A solução geral da equação homogênea associada a $(B.2)$ é da forma:

$$g_{jh}(t) = (\phi^0, w_j)\cos\sqrt{\Lambda_j t} + \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}(\phi^1, w_j)\mathrm{sen}\sqrt{\Lambda_j t}.$$

Calculando o Wronskiano W, obtemos

$$\begin{aligned} W = \begin{bmatrix} g_{j1}(t) & g_{2j}(t) \\ g_{j1}'(t) & g_{j2}'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\sqrt{\Lambda_j t} & \mathrm{sen}\sqrt{\Lambda_j t} \\ -\sqrt{\Lambda_j t}\mathrm{sen}\sqrt{\Lambda_j t} & -\sqrt{\Lambda_j t}\cos\sqrt{\Lambda_j t} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\Lambda_j t}\cos^2\sqrt{\Lambda_j t} + \sqrt{\Lambda_j t}\mathrm{sen}^2\sqrt{\Lambda_j t} = \sqrt{\Lambda_j t}. \end{aligned}$$

Assim, temos uma solução particular de $(B.2)$, é da forma

$$\begin{aligned} g_{jp}(t) &= \int_0^t \frac{\mathrm{sen}\sqrt{\lambda_j t}\cos\sqrt{\lambda_j s} - \cos\sqrt{\lambda_j t}\mathrm{sen}\sqrt{\lambda_j s}}{\sqrt{\lambda_j}}(f(s), w_j)ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t (f(s), w_j)\mathrm{sen}\sqrt{\lambda_j}(t-s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, a solução de ($B.2$) com dados iniciais ($B.3$) é dada por

$$\begin{aligned} g_j(t) &= g_{jh}(t) + g_{jp}(t) \\ &= (\phi^0, w_j)\cos\sqrt{\lambda_j t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\phi^1, w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j t}}\int_0^t (f(s), w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t}(t-s)ds, \end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq m$. Logo, substituindo em ($B.1$), a solução aproximada é dada por

$$\phi_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m}\left[(\phi^0, w_j)\cos\sqrt{\lambda_j t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j t}}(\phi^1, w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j t}}\int_0^t (f(s), w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t}(t-s)ds\right] w_i(x).$$

Encontrada explicitamente, a expressão da solução aproximada, passemos a provar a regularidade da solução forte.

- $\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

Mostremos que $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

De fato, tomando $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos

$$\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} g_i(t) w_i(x)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left|\sum_{i=n+1}^{m} g_j(t)\Delta w_i(x)\right|^2.$$

Sendo $-\Delta w_i = \lambda_i w_i$ e $\{w_j\}_j$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left|\sum_{i=n+1}^{m} g_j(t)\Delta w_i(x)\right|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |g_j(t)\lambda_i|^2.$$

Vamos analisar o último termo da igualdade anterior, com efeito:

$$\begin{aligned} |g_i(t)\lambda_i|^2 &= \left|(\phi^0, w_j)\cos\sqrt{\lambda_j t} + \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j t}}(\phi^1, w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t} + \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j t}}\int_0^t (f(s), w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t}(t-s)ds\right|^2 \\ &\leq \left(|(\phi^0, w_j)\cos\sqrt{\lambda_j t}| + \left|\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j t}}(\phi^1, w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t}\right| + \left|\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j t}}\int_0^t (f(s), w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_j t}(t-s)ds\right|\right)^2 \\ &\leq \left(|(\phi^0, w_i)\lambda_i| + \left|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)\right| + \left|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t (f(s), w_i)ds\right|\right)^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ duas vezes, obtemos:

$$|g_i(t)\lambda_i|^2 \leq 4|(\phi^0, w_i)\lambda_i|^2 + 4\left|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)\right|^2 + 2\left(\int_0^T \left|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right| ds\right)^2. \tag{B.4}$$

Como $\{w_i\}_i$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, então $\left\{\frac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ é ortonormal em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, ver M. Milla Miranda [23] Mas ainda, pode-se provar que $\left\{\frac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ é completo. Supondo f

regular, pela identidade de Parseval ver M. Milla Miranda [23], obtemos

$$\|\phi^0|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}= \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\left(\phi^0,\frac{w_i}{\lambda_i}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\right|^2,$$

e,

$$\|\phi^1\|^2= \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\left(\phi^1,\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\right|^2.$$

Como

$$\left(\left(\phi^0,\frac{w_i}{\lambda_i}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left(\Delta\phi^0,\Delta\frac{w_i}{\lambda_i}\right) = -\left(\Delta\phi^0,\frac{\lambda_i w_i}{\lambda_i}\right) = -\left(\Delta\phi^0, w_i\right)$$

e

$$\left(\left(\phi^1,\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)} = \left(\nabla\phi^1,\frac{\nabla w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -\left(\phi^1,\frac{\Delta w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -\left(\phi^1,\frac{\lambda_i w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -(\phi^1,w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

deduzimos que

$$\sum_{i=n+1}^{m}|(\Delta\phi^0,w_i)|^2\longrightarrow 0, \tag{B.5}$$

e,

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left|(\phi^1,w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2_{\mathbb{R}}\longrightarrow 0, \quad qdo\ n\to\infty.$$

Notemos agora que, sendo $f(s)\in H_0^1(\Omega)$, temos

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(f(s),\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

de onde,

$$\|f(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(f(s),\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2.$$

Como consideramos f regular, ou seja $f\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\left(\int_0^T\left|(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|ds\right)^2\leq T\int_0^T\left|(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2 ds.$$

Portanto, o último termo do lado direito de $(B.4)$ pode ser visto como,

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left(\int_0^T\left|(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|ds\right)^2\leq T\int_0^T\sum_{i=n+1}^{m}\left|(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2 ds\longrightarrow 0,\ \text{quando } m,n\to\infty. \tag{B.6}$$

Assim, por $(B.5)$ e $(B.6)$, deduzimos de $(B.4)$ que

$$|g_i(t)\lambda_i|^2\longrightarrow,\ \text{quando } m,n\to\infty,$$

e portanto, a sequência $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é tal que

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\phi_m(t)-\phi_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\to 0, \text{ quando } m,n\to\infty,$$

ou seja, $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$, logo $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente e seu limite é a solução forte $\phi\in C^0([0,T];H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$.

- $\phi^1\in C^0([0,T];H^1_0(\Omega))$.

A derivada de $(B.1)$ com respeito a t resulta:

$$\phi'_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}g'_i(t)w_i(x),$$

onde,

$$g'_i(t)=-(\phi^0,w_j)\text{sen}\sqrt{\lambda_i t}+(\phi^1,w_j)\cos\sqrt{\lambda_i t}+\int_0^t(f(s),w_i)\cos\sqrt{\lambda_i}(t-s)ds.$$

Suponhamos $m>n$, com $m,n\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\|\phi'_m(t)-\phi'_n(t)\|^2=\left\|\sum_{i=n+1}^{m}g'_i(t)w_i(x)\right\|^2=\left|\sum_{i=n+1}^{m}g'_i(t)\nabla w_i(x)\right|^2.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\|\phi'_m(t)-\phi'_n(t)\|=\sum_{i=n+i}^{m}\left|g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}\right|^2.$$

Usando os mesmos argumentos da primeira parte, para o termo do lado direito da igualdade anterior, obtemos

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left|g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}\right|^2\leq 4\left|(\phi^0,w_i)\lambda_i\right|^2+4|(\phi^1,w_i)\sqrt{\lambda_i}|^2+2\left(\int_0^T\left|(f(s),w_i)\sqrt{\lambda_i}ds\right|\right)^2.$$

Observemos que

$$(\phi^0,w_i)\lambda_i=(\Delta\phi^0,w_i),$$

da mesma forma,

$$(\phi^1,w_i)\sqrt{\lambda_i}=(\phi^1,w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

e,

$$(f(s),w_i)\sqrt{\lambda_i}=(f(s),w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Logo, de forma análoga como feito para obter $(B.5)$ e $(B.6)$, deduzimos que

$$\left|g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}\right|^2_{\mathbb{R}}\longrightarrow 0, \text{ quando } m,n\longrightarrow\infty,$$

e $(\phi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é tal que,

$$\max_{0\le t\le T}\|\phi'_m(t)-\phi'_n(t)\|^2\longrightarrow 0,\ \text{quando } m,n\longrightarrow\infty,$$

ou seja, $(\phi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H^1_0(\Omega))$ e segue que $\phi'\in C^0([0,T];H^1_0(\Omega))$, pois ϕ_m é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H^1_0(\Omega)\cap H_2(\Omega))$ logo é limitada.

Apêndice C

Sistema de Controle Linear Abstrato

Sejam H e U dois espaços de Hilbert reais. Seja $S(t), t \in [0, +\infty]$, um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares de $S(t)$. Então, $S(t)^*$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores de H. Considere A o gerador infinitesimal de $S(t)$, logo o operador linear não limitado A^* (adjunto de A) é o gerador infinitesimal de $S(t)^*$.

O domínio $D(A^*)$ é equipado com a norma $\| \ \|_{D(A^*)}$, dada por

$$\|z\|_{D(A^*)} := \|z\|_H + \|A^* z\|_H, \quad \forall z \in D(A^*).$$

Esta norma esta associada ao produto interno

$$(z_1, z_2)_{D(A^*)} := (z_1, z_2)_H + (A^* z_1, A^* z_2)_H, \quad \forall (z_1, z_2) \in D(A^*)^2$$

Como este produto interno em $D(A^*)$ é um espaço de Hilbert. Seja $D(A^*)'$ o dual de $D(A^*)$ cujo pivô é H, isto é,

$$D(A^*) \subset H \subset D(A^*)'.$$

Seja $B \in \pounds(U, D(A^*)')$, ou seja, B é uma aplicação linear contínua de U em $D(A^*)$. Então, existe $C > 0$ tal que

$$|(Bu)z| \leq C\|u\|_U \|z\|_{D(A^*)}, \quad \forall u \in U, \ \forall z \in D(A^*).$$

Vamos supor a seguinte propriedade de regularidade (também chamada condição admissível.)

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0, \quad \int_0^T \|B^* S(t)^* z\|^2\|_U^2 dt \leq C_T \|z\|_H, \quad \forall z \in D(A^*), \tag{C.1}$$

onde $B^* \in \pounds(D(A^*), U)$ é o adjunto de B. De ($C.1$), segue que os operadores

$$z \in D(A^*) \mapsto (t \mapsto B^* S(t)^* z) \in C^0([0, T]; U);$$

$$z \in D(A^*) \mapsto (t \mapsto B^* S(T-t)^* z) \in C^0([0,T];U),$$

podem ser prolongados, de modo único, as aplicações lineares contínuas de H em $L^2(0,T;U)$. Agora, sendo $S(t)^*$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos em H, (C.1) é equivalente a

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0, \quad \int_0^T \|B^* S(t)^* z\|^2\|_U^2 dt \leq C_T \|z\|_H, \quad \forall z \in D(A^*). \tag{C.2}$$

Vamos considerar o seguinte sistema de controle

$$y' = Ay + Bu, \quad \forall t \in (0,T), \tag{C.3}$$

onde, no tempo t, o controle é $u(t) \in U$ e o estado é $y(t) \in H$.

C.1 O problema de Cauchy está bem posto

Sejam $T > 0, y^0 \in H$ e $u \in U$. Considere o problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} y' = Ay + Bu(t), t \in (0,T) \\ y(0) = y^0. \end{array} \right. \tag{C.4}$$

Seja $\tau \in [0,T]$ e $\varphi : [0,\tau] \longrightarrow H$. Multiplicando em $(C.4)_1$ por φ e integrando (formalmente) de 0 a τ, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau (y'(t,x), \varphi(t))_H dt = \int_0^\tau (Ay(t,x), \varphi(t))_H dt + \int_0^\tau (Bu(t), \varphi(t))_H dt \Longrightarrow \\ &(y(\tau), \varphi(\tau))_H - (y(0), \varphi(0))_H - \int_0^\tau (y(t,x), \varphi'(t))_H dt = \int_0^\tau (y(t,x), A^*\varphi(t))_H dt \\ &+ \int_0^\tau (u(t), B^*\varphi(t))_U dt \end{aligned}$$

o que implica em,

$$(y(\tau), \varphi(\tau))_H - (y^0, \varphi(0))_H - \int_0^\tau (y(t), \varphi'(t) + A^*\varphi(t))_H dt = \int_0^\tau (y(t), B^*\varphi(t))_U dt.$$

Então. Considerando

$$\varphi(t) := S(\tau - t)^* z^\tau, \quad \forall z^\tau \in H,$$

temos

$$\varphi'(t) + A^*\varphi(t) = 0.$$

Desse modo, segue a definição de solução para o problema de Cauchy (C.4).

Definição C.1. *Sejam $T>0, y^0 \in H$ e $u \in L^2(0,T;U)$. Uma solução do problema de Cauchy ($C.4$) é uma função $y \in C^0([0,T];H)$, tal que*

$$(y(\tau),z^\tau)_H-(y^0,S(\tau)^*z^\tau)_H=\int_0^\tau (u(t),B^*S(\tau-t)^*z^\tau)_U dt, \quad \forall \tau\in[0,T], \forall z^T \in H. \tag{C.5}$$

Observação C.1. *O lado direito da igualdade em ($C.5$) está bem definida, pois ($C.1$)*

$$B^*S(\tau-t)^*z^\tau \in L^2(0,T;U),$$

para todo $\tau \in [0,T]$ e todo $z^\tau \in H$

Teorema C.1. *Seja $T>0$. Então, para todo $y^0 \in H$ e todo $u \in L^2(0,T;U)$, o problema de Cauchy ($C.4$) tem uma única solução y. Além disso, existe $C=C(T)>0$, independente de $y^0 \in H$ e de $u \in L^2(0,T;U)$, tal que*

$$\|y(\tau)\|_H \leq C(\|y^0\|_H+\|u\|_{L^2(0,T;U)}), \quad \forall \tau \in [0,\tau] \tag{C.6}$$

Demonstração: Sejam $T>0, y^0 \in H$ e $u \in L^2(0,T;U)$. Então, para todo $\tau \in [0,T]$, temos

$$\begin{aligned}
&|(y^0,S(\tau)^*z^\tau)_H+\int_0^\tau (u,B^*S(\tau-t)^*z^\tau)_U dt|\leq\\
&|(y^0,S(\tau)^*z^\tau)_H|+\int_0^\tau |(u,B^*S(\tau-t)^*z^\tau)|dt\leq\\
&\|y^0\|_H.\|S(\tau)^*z^\tau\|_H+\int_0^\tau \|u\|_U.\|B*S(\tau-t)^*z^\tau\|_U dt\leq\\
&C_1\|y^0\|_H.\|z^\tau\|_H+\|u\|_{L^2(0,T;U)}.\|B^*S(\tau-t)^*z^\tau\|_{L^2(0,T;U)}\leq\\
&C_1\|y^0\|_H.\|z^T\|_H+C_T^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(0,T;U)}.\|z^\tau\|_H, \quad \forall z^\tau \in H.
\end{aligned}$$

Considerando $k=C_1\|y^0\|_H+C_T^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(0,T;U)}>0$, vemos que

$$|(y^0,S(\tau)^*z^\tau)_H+\int_0^\tau (u,B^*S(\tau-t)^*z^\tau)_U dt|\leq k\|z^\tau\|_H, \quad \forall z^\tau \in H.$$

Logo, o segundo funcional linear é contínuo

$$\begin{aligned}
F:&H \longrightarrow \mathbb{R}\\
&z^\tau \mapsto F(z^\tau)=(y^0,S(t)^*z^\tau)_H+\int_0^\tau (u,B^*S(\tau-t)^*z^\tau)_U dt.
\end{aligned}$$

Portanto, como H é espaço de Hilbert, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $y^\tau \in H$. tal que

$$(y^\tau,z^\tau)_H=F(z^\tau)=(y^0,S(t)^*z^\tau)_H+\int_0^\tau (u,B^*S(\tau-t)^*z^\tau)_U dt, \quad \forall z^\tau \in H. \tag{C.7}$$

Isto mostra a unicidade de solução para o problema de Cauchy ($C.4$).

Agora vamos mostrar que o problema de Cauchy ($C.4$) tem solução e, esta solução verifica ($C.6$).

De fato, seja $y : [0,T] \longrightarrow H$, definida por

$$y(\tau) = y^\tau, \quad \forall \tau \in [0,T]. \tag{C.8}$$

Então, de ($C.7$) e ($C.8$), obtemos ($C.5$). Como $S(t)^*$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos em H, existe $C' > 0$ tal que

$$\|S(t)^*\|_{L(H,H)} \leq C', \quad \forall t \in [0,T]. \tag{C.9}$$

Temos

$$\begin{aligned}\|y(\tau)\|_H^2 &= |(y^0, S(\tau)^* y(\tau))_H + \int_0^\tau (u, B^* S(\tau - t)^* y(\tau))_U dt| \\ &\leq \|y^0\|_H (C' \|y(\tau)\|_H) + \|u\|_{L^2(0,T;U)} (C_T^{\frac{1}{2}} \|y(\tau)\|_H) \\ \|y(\tau)\|_H &\leq C(\|y^0\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;H)}),\end{aligned}$$

onde $c = \max\{C', C^{\frac{1}{2}}\}$, o que prova ($C.6$).

Verifiquemos que $y \in C^0([0,T]; H)$. Seja $\tau \in [0,T]$ e $(\tau_n) \subset [0,T]$ tal que

$$\tau_n \longrightarrow \tau, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.10}$$

Seja $z^\tau \in H$ e $(z^{\tau_n}) \subset H$ uma sequência tal que

$$z^{\tau_n} \longrightarrow z^\tau \text{ em } H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.11}$$

Como $S(t), t \in [0, +\infty)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos de H, então por ($C.10$).

$$S(\tau_n) y^0 \longrightarrow S(\tau) y^0 \; em \; H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.12}$$

De ($C.11$) e ($C.12$), obtemos

$$(y^0, S(\tau_n)^* z^{\tau_n})_H = (S(\tau_n) y^0, z^{\tau_n})_H \longrightarrow (S(\tau) y^0, z^\tau)_H = (y^0, S(\tau)^* z^\tau)_H. \tag{C.13}$$

Considere u prolongada a $L^2((-T,T); H)$, pondo

$$u(t) := 0, \quad t \in (-T, 0).$$

Note que, fazendo $s = \tau_n - t$, temos

$$\int_0^{\tau_n} (u(t), B^* S(\tau_n - t)^* z^{\tau_n}) dt = \int_0^T (x_n(s) u(\tau_n - s), B^* S(s)^* z^{\tau_n})_U ds, \tag{C.14}$$

e

$$\int_0^\tau (u(t), B^* S(\tau - t)^* z^\tau)_U dt = \int_0^T (x(s)u(\tau - s), B^* S(s)^* z^\tau)_U ds, \tag{C.15}$$

onde, $x_n, x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$\begin{cases} x_n(t) = 1, t \in [0, \tau_n], \\ x_n(t) = 0, t \notin [0, \tau_n], \end{cases} \tag{C.16}$$

e

$$\begin{cases} x(t) = 1, t \in [0, \tau], \\ x(t) = 0, t \notin [0, \tau]. \end{cases} \tag{C.17}$$

Logo,

$$\int_0^T \|x_n(t)u(\tau_n - t) - x(t)u(\tau - t)\|^2 dt \leq$$

$$2\int_0^T |x_n(t) - x(t)|^2 \|u(T - t)\|^2 dt + 2\int_0^T |x_n(t)|^2 \|u(\tau_n - t) - u(\tau - t)\|_U^2 dt$$

Portanto,

$$x_n(\cdot)u_n(\tau_n - \cdot) \longrightarrow x(\cdot)u(\tau - \cdot), \text{ em } L^2(0,T,U), \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.18}$$

Agora, por (C.1), sabemos que a aplicação

$$z^\tau \in H \rightsquigarrow (t \rightsquigarrow B^* S(t)^* z^\tau) \in L^2(0,T;U)$$

é contínua, logo é contínua fraca. Portanto, de (C.11) segue que,

$$B^* S(\cdot)^* z^{\tau_n} \longrightarrow B^* S(\cdot)^* z^\tau \text{ em } L^2(0,T;U), \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.19}$$

Desse modo, por (C.14), (C.15), (C.18) e (C.19)

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\tau_n} (u, B^* S(\tau_n - t)^* z^{\tau_n})_U dt = \int_0^T (x_n(s)u(\tau_n - s), B^* S(s)^* z^{\tau_n})_U ds \\ \displaystyle\int_0^T (x(s)u(\tau - s), B^* S(s)^* z^\tau)_U ds = \int_0^\tau (u(t), B^* S(\tau - t)^* z^\tau)_U dt, \quad qdo\ n \longrightarrow +\infty. \end{array} \right. \tag{C.20}$$

Então, por (C.7), (C.13) e (C.20)

$$(y(\tau_n), z^{\tau_n})_H \longrightarrow (y(\tau), z^\tau)_H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.21}$$

Mas por (C.11)

$$(y(\tau), z^{\tau_n})_H \longrightarrow (y(\tau), z^\tau)_H,$$

logo

$$(y(\tau_n) - y(\tau), z^{\tau_n})_H \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Daí,

$$(y(\tau_n) - y(\tau), z^\tau)_H = (y(\tau_n) - y(\tau), z^\tau - z^{\tau_n})_H + (y(\tau_n) - y(\tau), z^{\tau_n})_H \longrightarrow 0.$$

Portanto, como $z^\tau \in H$ é arbitrário,

$$y(\tau_n) \longrightarrow y(\tau) \text{ em } H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.22}$$

Além disso por ($C.21$), substituindo z^{τ_n} por $y(\tau_n)$ e z^τ por y^τ,

$$\|y(\tau_n)\|_H \longrightarrow \|y(\tau)\|_H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{C.23}$$

De ($C.22$) e ($C.23$). como H é um espaço de Hilbert, segue que

$$y(\tau_n) \longrightarrow y(\tau) \text{ em } H, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty,$$

o que conclui a demonstração do Teorema ($C.1$).

■

Definiremos a seguir três tipos de controlabilidade.

Definição C.2. *Seja $T > 0$. O sistema ($C.3$) é* ***exatamente controlável*** *no tempo T, se para todo $y^0 \in H$ e todo $y^1 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução y do problema de Cauchy ($C.4$), satisfaz $y(T) = y^1$.*

Definição C.3. *Seja $T > 0$. O sistema ($C.3$) é de* ***controlabilidade nulo*** *no tempo T, se, para todo $y^0 \in H$ e todo $\tilde{y}^0 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução y do problema de Cauchy ($C.4$), satisfaz $y(T) = S(T)\tilde{y}^0$.*

Observação C.2. *A terminologia "Controlabilidade nula"é justificada pelo fato que a definição ($C.3$) é equivalente, devido a linearidade do problema de Cauchy, a mesma definição supondo $\tilde{y}^0 = 0$.*

De fato, é claro que a definição ($C.3$) vale quando $\tilde{y}^0 = 0$. Então, suponha que a definição é dada pondo $y(T) = 0$. Dados $y^0, \tilde{y}^0 \in H$, seja $\tilde{y}$ a solução do problema de Cauchy.

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{y} = A\tilde{y}, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}^0. \end{array}\right.$$

Ou seja, $\tilde{y}(t) = S(t)\tilde{y}^0$. Logo, como o sistema ($C.3$) é de controlabilidade nula, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução $\bar{y}$ do problema de Cauchy.

$$\left|\begin{array}{l} \bar{y}' = A\bar{y} + Bu(t), \\ \bar{y}(0) = y^0 - \tilde{y}^0, \end{array}\right.$$

satisfaz $\bar{y}(T) = 0$. Portanto, definido

$$y := \bar{y} + \tilde{y}$$

temos que $y \in C^0([0,T];H)$,

$$y' = \bar{y}' + \tilde{y}' = A\bar{y} + Bu(t) + A\tilde{y} = A(\bar{y} + \tilde{y}) + Bu(t) \Rightarrow$$
$$y' = Ay + Bu(t),$$
$$y(0) = \bar{y}(0) + \tilde{y}(0) = y^0 - \tilde{y}^0 + \tilde{y}^0 = y^0,$$

e

$$y(T) = \bar{y}(T) + \tilde{y}(T) = S(T)\tilde{y}^0.$$

Mostrando que y é solução do problema de Cauchy ($C.4$) e satisfaz $y(T) = S(T)\tilde{y}^0$, ou seja, o sistema ($C.3$) é de controlabilidade nula conforme a definição ($C.3$).

Definição C.4. *Seja $T > 0$. O sistema ($C.3$) é* ***aproximadamente controlável*** *no tempo T, se dados $y^0, y^1 \in H$, para todo $\epsilon > 0$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução y do problema de Cauchy ($C.4$) satisfaz*

$$\|y(T) - y^1\|_H < \epsilon.$$

Note que se o sistema ($C.3$) for exatamente controlável no tempo $T > 0$, então ele também será aproximadamente controlável e de controlabilidade nula.

O seguinte Teorema nos fornece uma condição para termos uma equivalência entre controlabilidade nula e exata.

Teorema C.2. *Suponha que $S(t), t \in \mathbb{R}$, é um grupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos. Suponha que o sistema de controle ($C.3$) é de controlabilidade nula no tempo T. Então, o sistema de controle ($C.3$) é exatamente controlável no tempo T.*

Demonstração: Sejam $y^0, y^1 \in H$. Considere o problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{y}' = A\tilde{y} + Bu(t) \\ \tilde{y}(0) = y^0 - S(-T)y^1. \end{array} \right. \tag{C.24}$$

Então, como o sistema ($C.3$) é de controlabilidade nula, existe $u \in L^2(0,T;U)$, tal que a solução $\tilde{y}$ do problema de Cauchy ($C.24$) satisfaz.

$$\tilde{y}(T) = 0.$$

Logo, definindo $y \in C^0([0,T];H)$, por

$$y(t) := \tilde{y}(t) + S(t-T)y^1, \quad \forall t \in [0,T].$$

Como $S(t-T)$ é um grupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos de H, temos:

$$
\begin{aligned}
y'(t) =& \tilde{y}'(t) + \frac{d}{dt}(S(t-T)y^1) \\
&= A\tilde{y}(t) + Bu(t) + A(S(t-T)y^1) \\
&= A(\tilde{y}(t) + S(t-T)y^1) + Bu(t) \\
&= Ay + Bu(t),
\end{aligned}
$$

$$y(0) = \tilde{y}(0) + S(-T)y^1 = y^0 - S(-T)y^1 + S(-T)y^1 = y^0,$$

assim y satisfaz

$$y(T) = \tilde{y}(T) + S(T-T)y^1 = y^1.$$

Portanto, o sistema ($C.3$) é exatamente controlável no tempo T. ∎

Referências Bibliográficas

[1] BARBU,V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banch Spaces*, Editura Academiei Bucuresti România, Noordhoff International Publishing, 1976.

[2] BADIALI, M. and SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, New York, Springer, 2011.

[3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York, Springer, 2011.

[4] BREZIS, H and CAZENAVE, T., *Nonlinear Evolution Equations,* IM-UFRJ, Rio, 1994.

[5] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, (1955).

[6] CORON, Jean-Michel, *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007.

[7] DINCULEANU, R; Vector Measures,Pergamon Press, 1967.

[8] GOMES, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução,* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).

[9] FERNÁNDEZ-CARA, E. and GUERREIRO, S., *Global Carleman Inequalities for Parabolic Systems and Applications to Controllability*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[10] KORMONIK, V and ZUAZUA, E., *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure Appl. 69(1990),33-54.

[11] KORMONIK, V., *Exact Controllability and Stabilization, The muitiplier Method*, Jonh Willey and Sons and Masson, 1994.

[12] KORMONIK, V., LORETI, P. *Fourier Series in Control Theory*, Springer, 2005.

[13] LIU, Z and ZHENG, S; *Semigroups associated with Dissipative System*, Chapaman & Hall - CRC, New York, 1999.

[14] LIONS, J.L., *Quelques Methods de Resolutions des Problèms aux Limites Non-Linaires*, Dunod, Paris.1969.

[15] LIONS, J.L., *Équations aux dérivées partielles interpolation, Volume I* Euvres choisies de Jacques-Louis Lions, SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.

[16] LIONS, J.L. and MAGENES., *Problèms aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol.1, Dunod, Paris,1968.

[17] LIONS, J.L., *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués* , Tome 1, RMA 9, 1988.

[18] LIONS, J.L., *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués* , Tome 2, RMA 9, 1988.

[19] MEDEIROS, L. A, *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais,* Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006).

[20] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, Milla M., LOUREDO, A. T., *Introduction exact control theory: Method Hum,* EDUEPB, Campina Grande, 2013.

[21] MILLA M. M, *Traço para o dual dos espaços de Sobolev,* Bol. Soc. Paran.Matemática (2^a série) 11(2) (1990), p.131-157.

[22] MEDEIROS L. A. and MIRANDA M. M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos),* Editora IM-UFRJ, 5ª. edição, 2006.

[23] MIRANDA M. M., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).

[24] MIRANDA, M. M and MEDEIROS L. A., *Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations*, Ann. Fac, Sci. Toulouse 9 (1)(1988), 103-120.

[25] MARIELI M., *Controlabilidade exata na fronteira da equação da onda semilinear*, Dissertação Mestrado Acadêmico em matemática UEM - Maringá, 2006.

[26] MURILLO K. P, *Controlabilidade exata e aproximada da equação da onda linear*, Dissertação Mestrado Acadêmico em matemática UFPB - João Pessoa - PB, 2008.

[27] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations,* Springer-Verlag, New York (1983).

[28] RUSSELL D. L., *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions,* SIAM Rev. 20(1978), 639-739.

[29] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis,* Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[30] STRAUSS, W.A., *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations,* An. Acad. Brasil. Ciênc. 42(1970),645-651.

[31] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*, São Paulo, Textos Universitários d0 IME USP 2011.

[32] NEYDE F. MARTINS RIBEIRO, *Dual dos espaços $L^p(0,T,X)$ de funções vetorias*, Lisboa, 1975.

[33] EDWARDS, R.E. *Functional analysis, Theory and Aplication*, Holt, Rinehart and Winston, 1965

[34] DAUTRAY ROBERT E LIONS, *Functional and Variable methods*, Springer, Berlin, 2000.

[35] KUFNER, A. *Functions Spaces*, Mathematic Institute

[36] S. BOCHNER ANN A.E.TAYLOR, *Annals of Mathematics-2*, Vol. 39,1938.

[37] E. HEBEY, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, New York, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

[38] MATOS, M. P. *Integral de Bochner e Espaços $L^p(0,T,X)$,* Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[39] ZUAZUA, E. *Controlabilidad Exacta y Estabilizacion de la Ecuacion de Ondas,* Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense, Madri, 1990.

[40] LADYZHENSKAIA, O. A., VISIK, M. I. - *On boundary value problems for PDE and certain class of opeartors equations.* American Mathematical Society Translations Series. 2, 10 (1958).