UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALDEMIR DA SILVA

A FÓRMULA DE EULER E A MAIS BELA IDENTIDADE MATEMÁTICA

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

CUITÉ
2022

ALDEMIR DA SILVA

A FÓRMULA DE EULER E A MAIS BELA IDENTIDADE MATEMÁTICA

$$e^{i\pi}+1=0$$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Anselmo Ribeiro Lopes

CUITÉ

2022

S586f Silva, Aldemir da.

A fórmula de Euler e a mais bela identidade matemática $e^{i\pi} + 1 = 0$. / Aldemir da Silva. - Cuité, 2022.
33 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.
"Orientação: Prof. Me. Anselmo Ribeiro Lopes".
Referências.

1. Matemática. 2. Fórmula de Euler. 3. Euler - fórmula. 4. Leonhard Euler - fórmula. 5. Análise de Fourier. 6. Funções holomorfas. 7. $e^{i\pi} + 1 = 0$. I. Lopes, Anselmo Ribeiro. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

ALDEMIR DA SILVA

A FÓRMULA DE EULER E A MAIS BELA IDENTIDADE MATEMÁTICA

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 01 de Abril de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Anselmo Ribeiro Lopes (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Jorge Alves de Sousa
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Msc. Marciel Medeiros de Oliveira
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico este trabalho a Deus, que é minha fortaleza e proteção. Ao meu pai e minha mãe que batalharam para dar uma melhor educação a seus filhos, que são meu apoio sempre que os obstáculos aparecem. A minha mãe que me ensinou valores, compartilhou de meus desalentos e me incentivou a todo momento. Aos meus filhos, por me dedicarem um amor puro, que me dá forças para lutar. A minha esposa por sempre me incentivar a seguir em frente. A toda minha família, por ser meu porto seguro.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela dádiva de tornar meus sonhos realidade, trazendo-me a certeza de que posso todas as coisas naquele que me fortalece.

A minha família, pela força e incentivo, nos momentos difíceis dessa longa jornada.

Ao meu estimado professor e orientador Anselmo Ribeiro Lopes pela inigualável sabedoria e atenção dedicada a cada linha deste trabalho.

Aos paçoqueiros pelos diversos bons momentos juntos.

A todos os professores do curso de matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), que, com seus conhecimentos e experiências, contribuíram com meu conhecimento.

Enfim, a todos que contribuíram, de forma direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

“A noção de infinito, de que é preciso se fazer um mistério em matemática, resume-se no seguinte princípio: depois de cada número inteiro existe sempre um outro.”

(Jules Tannery)

RESUMO

O presente trabalho tem como propósito mostrar a origem, beleza, demonstração e algumas aplicações da Fórmula de Leonhard Euler. A abordagem traz um pouco da história, da beleza da identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ que relaciona cinco contantes das mais famosas e importantes da matemática, bem como a demonstração da fórmula e sua importância no estudo dos números complexos, funções holomorfas, na análise de Fourier, que dentre tantos auxílios é amplamente utilizada na física para a compreensão e na resolução de fenômenos ondulatórios envolvendo números complexos que resultam em Equações Diferenciais Ordinárias.

Palavras-chave: Fórmula de Euler. Identidade de Euler. Beleza matemática.

ABSTRACT

The present work aims to show the origin, beauty, demonstration and some applications of Leonhard Euler's Formula. The approach brings a bit of history, the beauty of the identity $e^{i\pi}+1=0$ that relates five of the most famous and important constants in mathematics, as well as the demonstration of the formula and its importance in the study of numbers complex, holomorphic functions, in Fourier analysis, which among many aids is widely used in physics for the understanding and resolution of wave phenomena involving complex numbers that result in Ordinary Differential Equations.

Keywords: Euler's formula. Euler's identity. Mathematical beauty.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

π	Pi, a razão entre a circuferência de um círculo e de seu diâmetro
ln	Logaritmo natural
e	Número de Euler, a base do logaritmo natural
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
i	Unidade imaginária de $\mathbb{C}$, que por definição satisfaz $i^2 = -1$
$\arg(z)$	Argumento do número complexo z
$\sum$	Somatório
arctan	Arco tangente
cos	Cosseno
sin	Seno

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em matemática, um teorema é um resultado cuja validade é garantida por uma demonstração, por exemplo, o Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos, o Teorema de Euclides que informalmente afirma que a lista de números primos continua para sempre. Muitos teoremas são relativamente simples de provar; outros, como o "Último Teorema de Fermat", podem levar muitos anos, ou mesmo séculos. Alguns teoremas são curtos e tem demonstrações mais diretas; outros podem ser extremamente tediosos e demorados, como bem abordado em (FILHO, 2007). Em geral, os matemáticos tendem a preferir demonstrações que são eficientes, engenhosas, surpreendentes ou elegantes, até mesmo aclamadas como "belas".

Surge então a pergunta:

$$\boxed{\text{Qual é o teorema mais belo da matemática?}}$$

No capítulo 2 abordaremos os aspectos históricos, a origem, e porquê a **Identidade de Euler**

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \tag{I.E}$$

é apontada como o mais belo teorema da matemática.

Já no capítulo 3 dedicamos nosso estudo a revisão de alguns tópicos dos números complexos, a demonstração da Fórmula de Euler e consequentemente a Identidade de Euler como caso particular desta. Também veremos algumas aplicações da Fórmula e da Identidade de Euler, tais como trabalhar com uma equação na forma polar de números complexos, simplificar a multiplicação ou exponenciação de números complexos, trabalhar com senos e cossenos hiperbólicos de maneira simplificada, e alguns cálculos que além de curiosos são extremamente interessantes.

2 O MAIS BELO TEOREMA DA MATEMÁTICA

2.1 Aspectos Históricos e Origem

Com a introdução dos logaritmos pelo matemático e físico escocês John Napier (1550-1617) em 1614, um grande estudo a respeito das suas propriedades surgiram, principalmente sobre logaritmos aplicados em valores negativos.

Estudamos tanto no ensino médio como na graduação (introdução ao cálculo) que $y = \ln x$ é definido para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, ou seja, no conjunto dos números reais positivos. Mas, será que podemos definir quando x é negativo?

Sem o rigor matemático necessário e hoje utilizado, essa questão causou muita divergência entre Gottfried Leibniz (1646-1716), que acreditava ser "impossível"obter logaritmo de um número negativo, e Johann Bernoulli (1667-1748) que usou a propriedade

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

para conjecturar que, para qualquer número x,

$$\begin{aligned} 2\ln(-x) &= \ln(-x) + \ln(-x) = \ln((-x)\cdot(-x)) = \ln(x^2) \\ &= \ln(x \cdot x) = \ln x + \ln x = 2\ln x, \end{aligned}$$

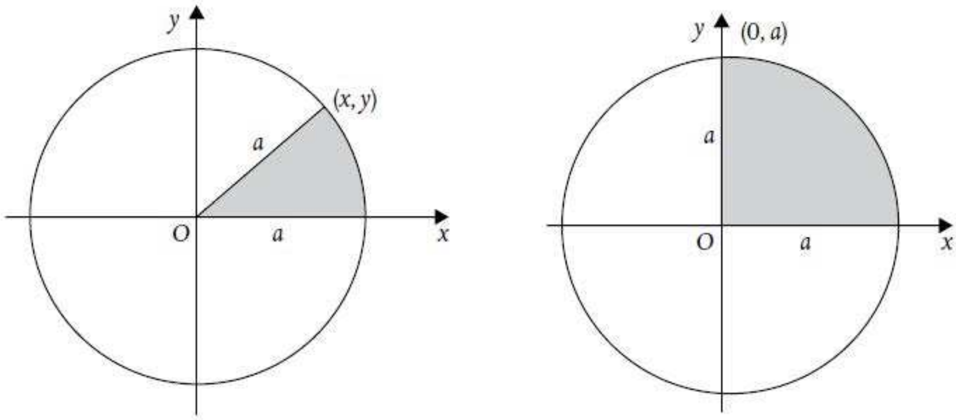
e então, $\forall x$, $\ln(-x) = \ln x$. Em particular para $x = 1$, obtemos que

$$\ln(-1) = \ln(1) = 0. \tag{2.1}$$

Em 1702 Bernoulli estava investigando a área de um setor do círculo de raio a com centro na origem O, limitada pelo eixo x e pelo segmento que une O ao ponto (x, y) no círculo (Figura 2.1-(a)), encontrando que esta área poderia ser calculada usando o logaritmo de números complexos, a saber:

$$\frac{a^2}{4i} \ln \frac{x + iy}{x - iy}. \tag{2.2}$$

Figura 2.1 – As áreas dos setores de um círculo de raio a e centro na origem O



(a) Área do setor - Bernoulli (b) Área do setor - Euler

Fonte: adaptado de (WILSON, 2018)

Sem se preocupar por enquanto com o significado do que vem a ser o logaritmo de um número complexo, Leonhard Euler (1707-1783) mais tarde observou que fazendo $x = 0$ em (2.2), o resultado é

$$\frac{a^2}{4i}\ln(-1). \tag{2.3}$$

Como, claramente para $x = 0$ a área do setor circular é não-nula (Figura 2.1-b), Euler deduziu que $\ln(-1)$ não poderia ser zero, contradizendo o resultado obtido por Bernoulli em (2.1). Na verdade, como o setor para $x = 0$ corresponde a um quarto do círculo e portanto sua área é $\pi a^2/4$. Assim, de (2.3) obtemos

$$\frac{a^2}{4i}\ln(-1) = \frac{\pi a^2}{4} \Rightarrow \ln(-1) = i\pi. \tag{2.4}$$

Embora Euler tenha escrito este último resultado explicitamente, ele não prosseguiu aplicando a exponencial para deduzir que $e^{i\pi} = -1$, que é a Identidade de Euler apresentada em (I.E). De fato, Euler frequentemente creditava a Bernoulli a descoberta desse valor para $\ln(-1)$, mas Bernoulli não o incluiu em seu artigo de 1702 ou em qualquer trabalho posterior, continuando a insistir que $\ln(-1) = 0$.

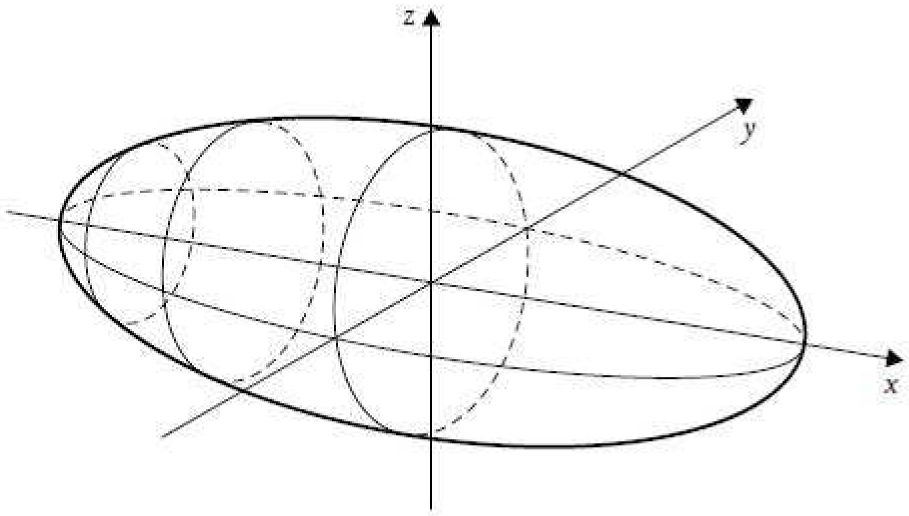
Ainda neste artigo (WILSON, 2018), um cálculo inacabado envolvendo o arctan levou Bernoulli a afirmar que "logaritmos imaginários são expressos por funções circulares reais”, eis a identidade:

$$\arctan x = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right).$$

Já a relação entre exponencial complexa e funções trigonométricas foi primeiro provada pelo matemático inglês Roger Cotes (1682-1716) em 1712 (quando Euler tinha 5 anos).

É atribuído a Roger Cotes a introdução a medidas em radianos. Durante sua curtíssima vida, ele produziu apenas um trabalho publicado, um artigo intitulado Logometria, que incluia uma discussão detalhada da espiral logarítmica (curva com equação polar $r = e^{k\theta}$, onde k é uma constante) que ocorre na natureza e já havia sido estudado por Jakob Bernoulli (1655-1705), irmão mais velho de Johann. Cotes morreu aos 33 anos e seus trabalhos matemáticos, incluindo suas descobertas sobre logaritmos e curvas geométricas, foram publicados pelo seu primo no livro Harmonia Mensuarum.

Figura 2.2 – Elipsóide de Cotes



Fonte: adaptado de (WILSON, 2018)

Cotes estava tentando encontrar a área de superfície do elipsoide obtido girando uma elipse ao redor do eixo x (Figura 2.2). Ele conseguiu encontrar duas expressões para a área procurada, uma envolvendo logaritmos e a outro envolvendo a função arcsin (função inversa do seno). Ambas estas expressões envolvendo o ângulo φ, onde $\cos\varphi = b/a$, a e b são a metade do comprimento dos eixos da elipse em destaque (mais preta).

Primeiro ele provou que a área da superfície era múltiplo de $\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e então provou que o resultado também era o mesmo múltiplo de $i\varphi$. Igualando os resultados ele deduziu a identidade

$$\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi. \tag{2.5}$$

Se ele tivesse aplicado a exponencial (o que ele não fez), teria descoberto a Fórmula de Euler na forma

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{2.6}$$

No entanto, essa fórmula somente seria oficialmente descrita por Euler em um artigo publicado em 1748 utilizando expansões de série exponenciais e expressões trigonométricas, a qual detalharemos no próximo capítulo.

2.2 A Beleza da Identidade de Euler

A beleza matemática é o prazer estético tipicamente derivado da abstração, pureza, simplicidade, profundidade ou ordem da matemática. Os matemáticos frequentemente expressam esse prazer descrevendo a matemática (ou, pelo menos, algum aspecto da matemática) como bela. Eles também podem descrever a matemática como uma forma de arte ou, no mínimo, como uma atividade criativa. Frequentemente, as comparações são feitas com música e poesia.

Bertrand Russell (1872-1970) expressou num livro de 1919 (“Mysticism and Logic: And Other Essays” – algo como “Misticismo e Lógica: e Outros Ensaios”, mais precisamente em “O Estudo da Matemática” seu senso de beleza matemática nestas palavras:

> "A matemática, vista corretamente, possui não apenas a verdade, mas a beleza suprema - uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelar para qualquer parte de nossa natureza mais fraca, sem as belíssimas armadilhas da pintura ou da música, embora sublimemente pura e capaz de uma perfeição severa, como apenas a maior arte pode mostrar. O verdadeiro espírito de deleite, a exaltação, a sensação de ser mais do que o homem, que é a pedra de toque da mais alta excelência, pode ser encontrado na matemática com tanta certeza quanto na poesia".

A Identidade de Euler (I.E) é frequentemente citada como um exemplo de profunda beleza matemática.

Figura 2.3 – Identidade de Euler, e elevado à potência de i vezes π e então mais um igual a zero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Fonte: science4all.org

Três das operações aritméticas básicas ocorrem exatamente uma vez cada: adição, multiplicação e exponenciação. Além disso, a identidade também conecta cinco das mais importantes constantes matemáticas:

- 1 - a base de nosso sistema de contagem;
- 0 - o número que expressa "nada", a cardinalidade de um conjunto vazio;
- π - a base de medição de um círculo, como por exemplo a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Além disso é um número irracional;
- e - o número ligado ao crescimento exponencial, também conhecido como número de Euler, que ocorre amplamente na análise matemática e também um número irracional, e
- i - é a unidade imaginária; é a solução da equação $x^2 + 1 = 0$ e tem a propriedade $i^2 = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$.

Para um aprofundamento e ampliação sobre cada uma dessas constantes, recomendamos as referências (WILSON, 2018), (NAHIN, 2006) e (STIPP, 2017), onde cada um ao seu estilo dedica capítulos com enfoques construtivos e históricos de cada uma delas, bem como tópicos mais avançados.

Em 1988, o matemático David Wells (1940-), que estava escrevendo para The Mathematical Intelligencer, uma revista de matemática americana, listou 24 teoremas matemáticos e fez uma pesquisa pedindo a seus leitores que escolhessem o teorema mais bonito de seu artigo (Figura 2.4), apontando a identidade de Euler como o "mais belo teorema da matemática". Em outra pesquisa de leitores conduzida pela Physics World em 2004, a identidade de Euler empatou com as equações de Maxwell (do eletromagnetismo) como a "maior equação de todos os tempos". O que poderia ser mais místico do que um número imaginário interagindo com números reais para não produzir nada? Esta pergunta foi feita por um leitor da revista Physics World em 2004 para enfatizar a beleza da Identidade de Euler.

Em 1933, com apenas 14 anos, o futuro ganhador do Prêmio Nobel de Física, Richard Feynman (1918-1988), descreveu a equação de Euler como “a fórmula mais notável da matemática” em suas famosas Feynman Lectures on Physics. Outro matemático incrível, vencedor do prêmio Abel e da Medalha Fields, Michael Atiyah (1929-2019) também descreveu a fórmula como “... o equivalente matemático da frase de Hamlet - ser ou não ser - muito curto, muito sucinto, mas ao mesmo tempo muito profundo”. O professor de matemática da Universidade de Stanford, Keith Devlin, disse: "como um soneto de Shakespeare que captura a própria essência do amor, ou uma pintura que traz à tona a beleza da forma humana que é muito mais do que apenas superficial, a equação de Euler atinge o íntimo profundezas da existência". E Paul Nahin (1940-), um professor emérito da Universidade de New Hampshire em (NAHIN, 2006), descreve a identidade de Euler como sendo "de rara beleza".

Figura 2.4 – Enquete de David Wells na revista The Mathematical Intelligencer

Are These the Most Beautiful?

David Wells

In the Fall 1988 *Mathematical Intelligencer* (vol. 10, no. 4) readers were asked to evaluate 24 theorems, on a scale from 0 to 10, for beauty. I received 76 completed questionnaires, including 11 from a preliminary version (plus 10 extra, noted below.)

One person assigned each theorem a score of 0, with the comment, "Maths is a tool. Art has beauty"; that response was excluded from the averages listed below, as was another that awarded very many zeros, four who left many blanks, and two who awarded numerous 10s.

The 24 theorems are listed below, ordered by their average score from the remaining 68 responses.

Rank	Theorem	Average
(1)	$e^{i\pi} = -1$	7.7
(2)	Euler's formula for a polyhedron: $V + F = E + 2$	7.5
(3)	The number of primes is infinite.	7.5
(4)	There are 5 regular polyhedra.	7.0
(5)	$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \pi^2/6.$	7.0
(6)	A continuous mapping of the closed unit disk into itself has a fixed point.	6.8
(7)	There is no rational number whose square is 2.	6.7
(8)	π is transcendental.	6.5
(9)	Every plane map can be coloured with 4 colours.	6.2
(10)	Every prime number of the form $4n + 1$ is the sum of two integral squares in exactly one way.	6.0
(11)	The order of a subgroup divides the order of the group.	5.3
(12)	Any square matrix satisfies its characteristic equation.	5.2
(13)	A regular icosahedron inscribed in a regular octahedron divides the edges in the Golden Ratio.	5.0
(14)	$\frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} - \ldots = \frac{\pi - 3}{4}.$	4.8
(15)	If the points of the plane are each coloured red, yellow, or blue,	4.7

David Wells

David Wells won a scholarship to Cambridge University, England, but then failed his degree, a rare achievement. Abandoning plans to become a professional mathematician, he became a school teacher, then a puzzle composer and game inventor (having once been British under-21 chess champion). More recently he has been a freelance author and lecturer, concentrating on mathematical education.

Fonte: The Springer

Poucas equações vão além dos domínios da academia, mas a identidade de Euler por exemplo já apareceu em dois episódios da série popular da televisão americana "Os Simpsons".

Figura 2.5 – A Identidade de Euler nos Simpsons

(a) A identidade de Euler em livro

(b) Personagem coadjuvante com a identidade de Euler em sua camisa

E para que não nos reste dúvidas, podemos nos perguntar: A beleza de uma equação pode ser testada? Em 2014, conforme descrito no artigo (ZEKI *et al.*, 2014), no que foi descrito como "Concurso de Beleza de uma Equação", dois neurocientistas, um físico e Michael Atiyah, usaram ressonância magnética para testar a atividade no cérebro de 15 matemáticos enquanto visualizavam cada uma das 60 equações que eles descreveram anteriormente como belas, indiferentes ou feias. Eles descobriram, que os mesmos centros emocionais do cérebro que costumam apreciar a arte estavam sendo ativados para as equações matemáticas classificadas como "belas" e sem qualquer surpresa, a equação mais consistentemente classificada como "bela" neste experimento foi a **Identidade de Euler**.

3 A FÓRMULA DE EULER E ALGUMAS APLICAÇÕES

Antes de efetivamente demonstrarmos a Fórmula de Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{F.E}$$

é interessante ao observá-la buscarmos motivação para relacionar os entes matemáticos até aqui envolvidos.

Sabemos que as funções trigonométricas sin e cos estão diretamente relacionadas ao círculo, que as funções exponencial e logaritmo natural estão relacionados a hipérbole, e o círculo e a hipérbole estão relacionados pois ambas são secções cônicas. Surge então um questionamento: existem relações diretas entre as funções exponencial, logaritmo natural e trigonométricas?

Como num trocadilho, podemos dizer que:

Na verdade, não há razões "reais ($\mathbb{R}$)" para que haja tal relação, mas há razões "complexas"($\mathbb{C}$)!

A introdução aos números complexos nos leva a tais conexões e em 1748, Leonhard Euler em sua obra monumental de análise matemática, Introductio in analysin infinitorum, nos apresentou e construiu sua teoria.

Para iniciarmos iremos relembrar aqui alguns conceitos e definições dos números complexos, bem como nos valer de resultados das séries de Taylor e Maclaurin em $\mathbb{R}$.

3.1 Números Complexos

Definição 3.1 *Um número complexo é definido pelo par* (x, y) *ordenado de números reais que satisfazem as seguintes operações de adição e multiplicação:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2 + y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2 + y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

O conjunto dos números complexos é denotado por $\mathbb{C}$ e num curso de variáveis complexas mostramos que ele é um corpo, conforme pode ser visto em (SOARES, 2009).

Observações

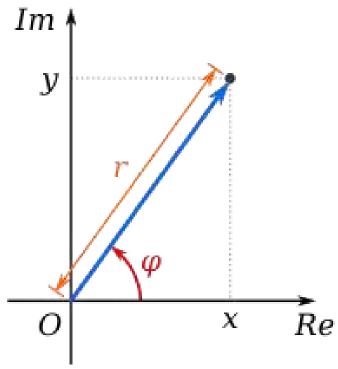
- O número complexo $(x, 0)$ é identificado como o número real x.

- O número complexo $(0,1)$ é chamado de unidade imaginária e denotada por i. É fácil verificar usando a operação de multiplicação que $i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$.
- Os números complexos da forma $z = (x,y)$ são rotineiramente denotados na sua *forma retangular* por $z = x + iy$, já que

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + y(0,1) = x + yi = x + iy,$$

donde dizemos que x é a parte real de z e y é a parte imaginária de z.
- A representação geométrica do número $z = x + iy$ no *plano complexo* são as coordenadas no plano $\mathbb{R}^2$, onde um eixo marca a parte real x e o outro marca a parte imaginária y, conforme ilustrado abaixo.

Figura 3.1 – Representação de $z = x + iy$ no plano complexo



Fonte: elaborado pelo autor (2022)

Definição 3.2 *Dado um número complexo $z = x + iy$, o módulo de z é a distância do ponto $z = (x,y)$ à origem $O = (0,0)$ do plano complexo, ou seja, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Uma outra identificação, muito útil para um número complexo não nulo é obtida através das coordenadas polares (r,φ). Recordemos que se $(x,y) \neq (0,0)$ é um ponto do plano, então a coordenada r desse ponto é sua distância à origem e a coordenada φ é o ângulo determinado pelo segmento de reta que une o ponto à origem e o semi-eixo positivo dos x, medido em radianos no sentido anti-horário, como ilustrado também na Figura 3.1.

As coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \text{ou ainda} \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \tag{3.1}$$

Logo, $z = x + iy = (x,y)$ não nulo se escreve

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.2}$$

Esta é a chamada *representação polar* ou *forma polar* de um número complexo.

Qualquer valor de φ para a qual a igualdade (3.2) se verifica, ou ainda que solucione o sistema (3.1), é chamado *um argumento* de z e usamos a notação $\varphi = \arg(z)$. Observemos que φ não é único já que, se a igualdade é verdadeira para um valor de φ (pela periodicidade de cos e sin), também o é para $\varphi + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Mas, podemos determinar φ de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \leq \varphi < 2\pi$ ou que $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Feita estas considerações, mais uma vez Euler nos impressiona. Admitindo, *a priori*, (F.E) e observando a representação polar (3.2), obtemos que

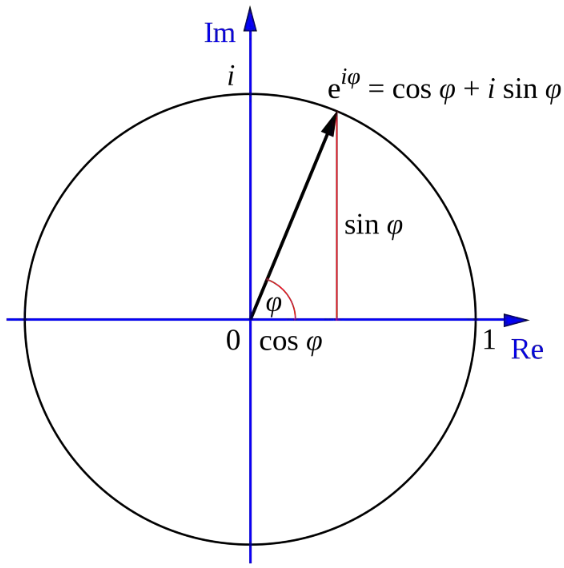
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{3.3}$$

Essa representação de um número complexo $z = x + iy$ é chamada *forma exponencial*, expressando intimamente as conexões entre número complexo, funções trigonométricas e exponencial.

3.2 Interpretações Geométricas da Fórmula e Identidade de Euler

Se em (3.3) considerarmos que $z = (x, y)$ é um número complexo cujo módulo é igual a 1, ou seja, $r = 1$, obtemos que $z = e^{i\varphi}$, e a representação geométrica da Fórmula de Euler para um ângulo qualquer é:

Figura 3.2 – Fórmula de Euler no Plano Complexo



Fonte: elaborado pelo autor (2022)

Além disso, se considerarmos $w \in \mathbb{C}$ e a multiplicação $w.e^{i\varphi}$, o resultado geométrico é o efeito de girar w no sentido anti-horário em um ângulo φ no plano complexo.

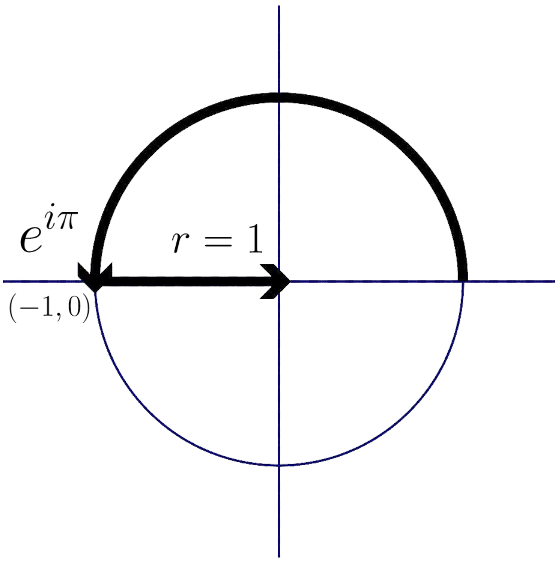
Como um caso particular, para $z = -1 + i.0 = -1$, obtemos $r = 1$ e $\varphi = \pi$, logo a forma exponencial de z é

$$-1 = e^{i\pi},$$

nossa célebre Identidade de Euler (I.E).

Desta forma, a interpretação geométrica da Identidade de Euler é expressada como o fato de $z = -1$ no plano complexo distanciar $r = 1$ da origem e π radiano ser o valor do ângulo formado com o semi-eixo x positivo.

Figura 3.3 – Interpretação Geométrica da Identidade de Euler no Plano Complexo



Fonte: elaborado pelo autor (2022)

3.3 Demonstrações da Fórmula de Euler

Existem algumas formas de demonstrar matematicamente a Fórmula de Euler (F.E). Aqui faremos duas demonstrações que utilizam conteúdo estudado em um curso de introdução ao cálculo em uma variável complexa, indicamos a referência (SOARES, 2009).

3.3.1 Demonstração usando cálculo

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, sabemos que a função exponencial complexa

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

é uma função inteira e assim como a função exponencial definida em $\mathbb{R}$, satisfaz:

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Em particular, pela regra da cadeia em $\mathbb{R}$ e $w = ix$:

$$\frac{d}{dx}e^{ix} = \frac{d}{dx}e^{w} = \frac{d}{dw}e^{w} \cdot \frac{d}{dx}(ix) = e^{w}.i = ie^{ix} \tag{3.4}$$

Consideremos agora a função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$f(x) = (\cos x - i \sin x) \cdot e^{ix}.$$

Pela regra do produto (que vale também para funções que tenham como imagem números complexos) e de (3.4) a derivada de $f(x)$ será:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= (\cos x - i\sin x) \cdot \frac{d}{dx}e^{ix} + \frac{d}{dx}(\cos x - i \sin x) \cdot e^{ix} \\
&= (\cos x - i \sin x)(ie^{ix}) + (-\sin x - i\cos x) \cdot e^{ix} \\
&= (i\cos x - i^2 \sin x) \cdot e^{ix} + (-\sin x - i\cos x) \cdot e^{ix} \\
&= (i\cos x + \sin x) \cdot e^{ix} + (-\sin x - i\cos x) \cdot e^{ix} \\
&= (i\cos x + \sin x - \sin x - i\cos x) \cdot e^{ix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é uma função constante em x e como $f(0) = (\cos 0 - i\sin 0) \cdot e^{i.0} = (1-0).1 = 1$, temos que

$$1 = (\cos x - i \sin x) \cdot e^{ix}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $\cos x + i\sin x$, obtemos

$$\begin{aligned}
\cos x + i \sin x &= (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) \cdot e^{ix} \\
&= \left(\cos^2 x - (i\sin x)^2\right) \cdot e^{ix} \\
&= (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot e^{ix} \\
&= e^{ix},
\end{aligned}$$

demonstrando assim a Fórmula de Euler (F.E). Obviamente essa é uma demonstração bem mais sofisticada do que a utilizada por Euler no século XVIII.

3.3.2 Demonstração usando série de Taylor

Comecemos relembrando as expansões em série de Maclaurin das funções reais e^x, $\cos x$ e $\sin x$,

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \tag{3.5}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{e} \tag{3.6}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.7}$$

Observando essas expansões e notando que a função exponencial cresce rapidamente para o infinito quando x se torna grande e as funções cosseno e seno oscilam sempre entre 1 e -1 parece não haver qualquer relação entre essas funções.

Surge então a engenhosidade de Euler, que em 1737, introduzindo a unidade imaginária $i=\sqrt{-1}$, e de posse do fato da função exponencial complexa ser inteira e portanto é dada por sua série de Taylor em $\mathbb{C}$ centrada em qualquer ponto z, tendo raio de convergência $R=\infty$ (Teorema 2.12, página 122 de (SOARES, 2009)), num momento de pura genialidade concluiu que poderia substituir x por ix em (3.5), obtendo:

$$e^{ix}=1+\frac{1}{1!}(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\frac{1}{6!}(ix)^6+\frac{1}{7!}(ix)^7+\cdots \tag{3.8}$$

Agora, relembrando que as potências de i são cíclicas, ou seja,

$$\begin{array}{llll} i^0=1, & i^1=i, & i^2=-1, & i^3=-i \\ i^4=1, & i^5=i, & i^6=-1, & i^7=-i \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

segue de (3.8) que:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1+\frac{i}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{i}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{i}{5!}x^5-\frac{1}{6!}x^6-\frac{i}{7!}x^7+\cdots \\ &= \underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)}_{(3.6)}+i\underbrace{\left(\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)}_{(3.7)} \\ &= \cos x+i\sin x. \end{aligned}$$

A Fórmula de Euler, uma das equações mais notáveis em toda a matemática, inclusive pela beleza dessa demonstração. Vejamos agora algumas de suas aplicações.

3.4 Algumas consequências e aplicações

A Fórmula de Euler é uma ponte entre vários assuntos ligados aos números complexos, como logaritmos complexos, números complexos em suas formas polares, etc. Há vários benefícios em mudar a abordagem do problema para trabalhar com a fórmula de Euler.

3.4.1 A Identidade de Euler

Certamente a consequência mais importante da Fórmula de Euler é a Identidade de Euler, e para tal basta escolhermos $\varphi = \pi$ em (F.E), e temos:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi == 1 + i.0 = -1, \quad \text{donde} \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Embora muito provavelmente Euler tenha feito essa dedução, ela não aparece em qualquer uma de suas publicações.

3.4.2 Teorema de Abraham de Moivre (1667-1754)

Imaginemos que queiramos elevar um número complexo $z = x + iy$ à enésima potência, ou seja, $z^n = (x+iy)^n$. Notamos que fazer esse cálculo usando a representação retangular de z renderá um enorme trabalho. Caso decidamos escrever z em sua forma polar (3.2), observamos que o cálculo será:

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \tag{3.9}$$

Por outro lado, da Fórmula de Euler (F.E), temos que

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i(n\varphi)} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Esse resultado é o Teorema de De Moivre, e usando-o em (3.9), obtemos que

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Simplificando o cálculo de z^n, já que bastará elevar seu módulo $r = |z|$ à enésima potência e multiplicar seu argumento $\varphi = \arg(z)$ por n em sua forma polar.

3.4.3 Multiplicação de números complexos

A Fórmula de Euler também nos permite simplificar a multiplicação de números complexos. Podemos observar da Definição 3.1 que na forma retangular a multiplicação é feita termo a termo, porém se considerarmos z e w complexos em suas formas polares, temos:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot s(cos\theta + i\sin\theta) \underbrace{=}_{(F.E)} re^{i\varphi} \cdot se^{i\theta} \\ &= rse^{i\varphi + i\theta} = rse^{i(\varphi+\theta)} \\ &= rs(cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)). \end{aligned}$$

E então para efetuar a multiplicação na forma polar é suficiente multiplicar os módulos e somar os argumentos dos números complexos.

3.4.4 Relacionando as funções trigonométricas e hiperbólicas

A Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \tag{3.10}$$

expressa a função exponencial em termos de $\cos x$ e $\sin x$, vejamos agora como inverter esse processo.

Para tal, vamos substituir x por $-x$ e usar que cos é uma função par, como também o fato de sin ser uma função ímpar, temos:

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x. \tag{3.11}$$

Adicionando e subtraindo (3.10) e (3.11), obtemos as duas equações:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \tag{3.12}$$

Esses resultados notáveis, mostram como a partir de números complexos podemos expressar as funções trigonométricas em termos da função exponencial.

Indo um pouco mais além, nas duas equações de (3.12), substituindo x por ix, obtemos:

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) \quad \text{e} \quad \sin(ix) = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = i \cdot \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}).$$

Relembrando as funções hiperbólicas estudadas em cálculo, essas igualdades nos dizem que:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cos(ix) \quad \text{e} \quad i\sinh x = i \cdot \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \sin(ix).$$

Multiplicando ambos os membros da segunda equação por $-i$, concluímos que

$$\cosh x = \cos(ix) \quad \text{e} \quad \sinh x = -i\sin(ix). \tag{3.13}$$

Relacionando assim de forma simples as funções trigonométricas e hiperbólicas. Esses conexões explicam por que essas funções compartilham propriedades semelhantes, como por exemplo:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cos^2(ix) - (-i\sin^2(ix)) = \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1.$$

3.4.5 e e π são números transcendentes

Um número algébrico é qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Todos os números racionais são algébricos porque qualquer fração do tipo $\frac{a}{b}$ é solução de $bx - a = 0$. Obviamente existem números irracionais que são algébricos, como por exemplo $\sqrt{2}$ que é solução de $x^2 - 2 = 0$. Mas, nem todos os números reais são algébricos, como é o caso de π e e, como iremos demonstrar. Um outro caso interessante de número algébrico é o i, já que é solução de $x^2 + 1 = 0$.

A um número real ou complexo não algébrico dá-se o nome de número transcendente.

Observemos portanto que, um número real que é transcendente é consequentemente um irracional. Desta forma, mostrando que π e e são transcendentes, somos agraciados também com a irracionalidade de ambos.

Para demonstrar o que propomos, usaremos um resultado de Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), a saber:

Teorema 3.1 (Ferdinand Lindemann, 1882) *Se r é um número algébrico real ou complexo não nulo, então e^r é transcendental.*

Para mostrarmos que e é transcendental basta tomarmos $r = 1$. Agora, suponhamos, por contradição que π seja algébrico. Sabe-se que produto de algébricos é algébrico, e portanto $i\pi$ seria algébrico. Tomando $r = i\pi$ no Teorema de Ferdinand Lindemann, podemos afirmar que $e^{i\pi}$ é transcendental. Porém, da Identidade de Euler (I.E), sabemos que $e^{i\pi} = -1$ que é algébrico. Esta contradição mostra que π não pode ser algébrico, ou seja, π é transcendental.

Ao provar a transcendência de π, Lindemann respondeu um problema de longa data dos antigos gregos, estabelecendo a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo, isto é, é impossível construir, somente com uma régua não graduada e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo.

3.4.6 *Cálculo de* $(-1)^{\pi}$

Como efetuar a operação $(-1)^{\pi}$?

Ora, π é irracional e isso faz com que nossa noção de exponenciação para $m \in \mathbb{Z}$, $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ vezes}}$, não seja compreensível.

Usando a Identidade de Euler, a solução é quase trivial, vejamos:

$$\begin{aligned}
(-1)^{\pi} &= \left(e^{i\pi}\right)^{\pi} = e^{i\pi^2} \\
&= \cos\pi^2 + i\sin\pi^2 \\
&\approx -0,903 - (0,430)i
\end{aligned}$$

3.4.7 *O que são* $\ln i$*,* i^i *e* $\sqrt[i]{i}$*?*

Vimos que qualquer número complexo não nulo pode ser escrito na forma exponencial como

$$z = re^{i\theta}.$$

Aplicando o logaritmo natural, obtemos

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg(z).$$

Esta identidade nos dá o logaritmo de qualquer número complexo z não nulo.

Mas, convém relembrar como observado na seção 3.1, que $\arg(z)$ tem infinitos valores, todos diferindo por múltiplos de 2π.

Vejamos dois casos particularmente importantes.

Quando $z = -1$, sabemos que $r = |-1| = 1$, e $\theta = \arg(-1) = \pi$ (ou $\pi + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$).

Então, o valor de $\ln(-1)$, correspondendo a $\theta = \pi$, é

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i,$$

como já haviamos visto anteriormente no capítulo 2. Além disso, a lista completa dos valores possíveis é:

$$\ldots, -5\pi i, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, 5\pi i, 7\pi i, \ldots$$

Quando $z = i$, então $r = |i| = 1$ e $\theta = \arg(i) = \pi/2$ (ou $\pi/2 + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$).

Então, o valor de $\ln i$, correspondendo a $\theta = \pi/2$, é

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i}{2}, \tag{3.14}$$

e a lista completa dos valores possíveis é:

$$\ldots, \frac{-11\pi i}{2}, \frac{-7\pi i}{2}, \frac{-3\pi i}{2}, \frac{\pi i}{2}, \frac{5\pi i}{2}, \frac{9\pi i}{2}, \frac{13\pi i}{2}, \ldots$$

Agora, usando (3.14), calculemos i^i, vejamos:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}},$$

que incrivelmente é um número real cujo cálculo é aproximadamente $0,2078795763$. Os outros valores de i^i são todos da forma $e^{-\pi/2+2k\pi}$, também todos com valores reais.

De maneira similar, usando (3.14)

$$\sqrt[i]{i} = i^{1/i} = e^{(1/i)\ln i} = e^{(1/i)(i\pi/2)} = e^{\pi/2},$$

que também é um número real, aproximadamente $4,8104773821$. Todos os outros valores de $\sqrt[i]{i}$ tem a forma $e^{\pi/2} + 2k\pi$ e também tem valores reais.

Esses resultados são realmente muito surpreendentes. Até o próprio Euler, em carta a seu colega Christian Goldbach, escreveu o seguinte sobre este último resultado: “parece-me ser muito estranho’.

E em uma de suas palestras Benjamin Peirce, o ilustre professor de matemática na Universidade de Harvard por 50 anos, ao provar que $\sqrt[i]{i} = e^{\pi/2}$ contemplou o resultado por alguns minutos, se virou para o público e disse muito lentamente: "é absolutamente paradoxal; não podemos entendê-la, e não sabemos o que significa, mas nós o provamos e, portanto, sabemos que deve ser a verdade".

E encerrando nossas aplicações, elevando ambos os membros desta igualdade a $2i$, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt[i]{i})^{2i} & = & \left(e^{\pi/2}\right)^{2i} \\ & \Downarrow & \\ i^2 & = & e^{i\pi} \\ & \Downarrow & \\ -1 & = & e^{i\pi}, \end{array}$$

o mais belo teorema da matemática novamente, a Identidade de Euler.

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho aborda a fórmula de Leonard Euler, fazendo inicialmente um breve resumo da história do mesmo destacando algumas de suas obras, dentre elas a que intitula este trabalho, fazendo uma interpelação da beleza da fórmula, salientando os números mais famosos da matemática: e, π, i, 0 e 1. Dirige a exposição de um assunto que intrigava os matemáticos de outras épocas que era a raiz quadrada de um número negativo sendo resolvido com a descoberta dos números complexos, dentro destes temos o plano complexo e as operações com os mesmos. Utilizando abordagem das séries infinitas, destacando a transformação das funções exponencial e trigonométrica em séries infinitas através do método de Taylor, com enfoque através da análise complexa, relacionando a igualdade entre as funções exponencial e a trigonométrica no domínio complexo, assim dando origem a fórmula de Euler.

A escolha do tema ocorreu de forma natural durante um vídeo em que assisti, onde um professor de matemática usava a fórmula de Euler para resolver um problema de forma trivial. Outro fator importante para a opção do tema foi a identidade de Euler, que chama atenção pelo fato de um número positivo elevado ao expoente complexo se tornar negativo, o que contradiz aquilo num primeiro olhar o que é ensinado na educação básica. Ao transcorrer deste trabalho, ficou esclarecido que a sistematização do conhecimento bem como a relação dos métodos científicos desenvolve ferramentas que facilitam o estudo de fenômenos naturais complexos. A fórmula de Euler é uma dessas ferramentas, que tem por finalidade simplificar o cálculo das Equações Diferenciais Ordinárias em relação aos fenômenos de ordem periódica.

Portanto, vemos neste trabalho que a utilização da fórmula de Euler na resolução de alguns problemas matemáticos na forma de exponenciação torna a resolução quase trivial. O caminho para o aprendizado passa obrigatoriamente pela compreensão e exploração de conceitos, primeiramente de forma concreta (lúdica e histórica), posteriormente de forma abstrata. Assim, este trabalho possibilitou o desenvolvimento crítico e investigativo, fomentando e perpetuando a busca por novos conhecimentos.

REFERÊNCIAS

FILHO, D. C. d. M. **Um convite à matemática:** fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 2. ed. Campina Grande: EDUFCG, 2007.

NAHIN, P. J. **Dr. Euler's fabulous formula:** cures many mathematical ills. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 2006.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

STIPP, D. **A Most Elegant Equation:** Euler formula and the beauty of mathematics. 1. ed. New York: Basic Books, 2017.

WILSON, R. **Euler's Pioneering Equation:** The most beautiful theorem in mathematics. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2018.

ZEKI, S.; ROMAYA, J.; BENINCASA, D.; ATIYAH, M. The experience of mathematical beauty and its neural correlates. **Frontiers in human neuroscience**, v. 8, n. 68, p. 1–12, 2014. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fnhum.2014.00068>.