



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS SÉRGIO FLORENCIO JÚNIOR

**Aplicação de Álgebra Linear: Deformações e Morfismos**

CUITÉ - PB

2022

MARCOS SÉRGIO FLORENCIO JÚNIOR

**Aplicação de Álgebra Linear: Deformações e Morfismos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

F634a Florêncio Júnior, Marcos Sérgio.

Aplicação de Álgebra Linear: deformações e morfismos. / Marcos Sérgio Florêncio Júnior. - Cuité, 2022.

94 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.

"Orientação: Profa. Márcia Cristina Silva Brito; Profa. Maria Gisélia Vasconcelos".

Referências.

1. Álgebra linear. 2. Transformação geométrica. 3. Combinação linear convexa. 4. Transformação afim. 5. Morfismo. 6. Deformações. I. Brito, Márcia Cristina Silva. II. Vasconcelos, Maria Gisélia. III. Título.

CDU 512.64(043)

MARCOS SÉRGIO FLORENCIO JÚNIOR

## **Aplicação de Álgebra Linear**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 01 de abril de 2022.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Arnaldo Silva Brito - UESPI  
Examinador

---

Profa. Maria Gisélia Vasconcelos - UFCG  
Coorientadora

---

Prof. Márcia Cristina Silva Brito - UFCG  
Orientadora

Este trabalho é dedicado à minha querida mãe.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter colocado pessoas maravilhosas em minha vida durante este processo de formação acadêmica e em segundo lugar quero agradecer também a minha mãe, Dona Josefa, que me educou e me fez ser a pessoa de que tenho orgulho hoje. Agradeço a as minhas orientadoras Márcia e Gisélia por terem aceitado meu convite e pela paciência que tiveram comigo. Por fim, agradeço aos meus grandes amigos desde a infância como, Tássio Gomes, Juan Halisson, Pedro Henrique e Raedson dos Santos e agradeço também de coração aos amigos que fiz durante o processo acadêmico pois sem eles esse trabalho não teria sido possível e vejo através deles que não se trata apenas de um curso, mas sim de uma família sendo ela composta por Marcos Vagner (parceiro pra toda hora), Leandro da Costa (sincero e acolhedor), André Macedo (gênio e disposto a ajudar), Eduardo Pinto (domina a matemática como poucos ) Anderson, Mônica Soares, William Silva (parceiros de residência).

*“O riso é a menor distância entre duas pessoas”  
(Victor Borge)*

# RESUMO

Neste trabalho estudamos aplicação de álgebra linear, para isso estudaremos algumas das transformações geométricas no plano, explorando características geométricas e algébricas. Inicialmente apresentamos algumas das principais transformações geométricas, a exemplo das Translações, Homotetias, de Cisalhamentos, das Simetrias, das Rotações, das Reflexões, das Isometrias, etc., de forma intuitiva e ilustrando com exemplos simples. Apresentamos ainda os conceitos de Morfismos e Deformações de imagens utilizando noções, por exemplo, como Combinação Linear Convexa e Transformação Afim. Através de alguns exemplos, apresentamos a importância das transformações planas na teoria da computação gráfica.

**Palavras-chave:** Transformação Geométrica. Combinação Linear Convexa. Transformação Afim. Deformações. Morfismo.

# ABSTRACT

In this work we study some of the geometric transformations in the plane, exploring geometric and algebraic features. Initially, we present some of the main geometric transformations, such as Translations, Homothetias, Shears, Symmetries, Rotations, Reflections, Isometries, etc., intuitively and illustrating with simple examples. We also present the concepts of Morphisms and Deformations of images using notions, for example, as Convex Linear Combination and Affine Transformation. Through some examples, we present the importance of plane transformations in the theory of computer graphics.

**Keywords:** Geometric Transformation. Convex Linear Combination. Affine Transformation. Deformations. Morphism.

# SUMÁRIO

	Introdução . . . . .	10
1	ESPAÇOS VETORIAIS . . . . .	11
1.1	Espaço Vetorial Real . . . . .	11
1.2	Transformação Linear . . . . .	17
2	TRANSFORMAÇÕES PLANAS E SUAS APLICAÇÕES . . . . .	32
2.1	Transformações Planas . . . . .	32
2.2	Transformações lineares geométricas do $\mathbb{R}^2$ . . . . .	33
2.3	Transformação não linear geométrica do $\mathbb{R}^2$ . . . . .	47
2.4	Aplicações . . . . .	48
3	INTRODUÇÃO A GEOMETRIA AFIM . . . . .	58
3.1	Geometrias . . . . .	58
3.2	Geometrias Euclidianas . . . . .	59
3.3	Geometria Afim . . . . .	60
4	DEFORMAÇÕES E MORFISMOS . . . . .	73
4.1	Aplicações . . . . .	82
	Conclusão . . . . .	92
	REFERÊNCIAS . . . . .	93

# INTRODUÇÃO

Álgebra Linear é um ramo da matemática que lida com equações lineares e funções lineares que são representadas através de matrizes e vetores. Ela ocupa lugar de destaque nas diversas áreas da matemática da análise à estatística, onde se utilizam, constantemente, o cálculo matricial e vetorial. A importância da álgebra linear tem crescido nas últimas décadas. Os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática, esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse. Encontramos aplicações da álgebra linear em diversas áreas de conhecimento desde a física, química, engenharia, informática, economia, biologia, medicina, bem como em ciências humanas. Com as ferramentas de álgebra linear podemos modelar problemas de jogos de estratégia, modelos econômicos de Leontief, computação gráfica, tomografia computadorizada, criptografia, genética, deformação e morfismo entre outros.

Neste trabalho daremos destaque a aplicação de Deformação e Morfismos para a manipulação de imagens. Utilizaremos os conceitos de Geometria de Operadores Lineares de  $\mathbb{R}^2$ , Independência Linear e Bases em  $\mathbb{R}^2$ .

Deformação e morfismo de imagens são técnicas usadas em muitas áreas, que vão desde efeitos especiais usados no cinema, à assistência a cirurgia plástica e ao envelhecimento de fotografias, usado para auxiliar a encontrar pessoas desaparecidas há muito tempo e também foragidos da polícia. Estas técnicas são baseadas em transformações geométricas que distorcem partes da imagem de maneiras diferentes, uma das técnicas usadas na deformação é a triangulação da imagem, que consiste em dividir a imagem em vários triângulos de formas e tamanhos diferentes, e com o movimento dos vértices geram-se distorções que por sua vez causam a deformação. O morfismo é baseado na aplicação da deformação em duas imagens e a fusão dessas deformações gerará o morfismo.

Atualmente encontramos software que permitem inúmeros tipos de mudança com a foto, como mudanças de suas proporções, rotação e entre outras alterações de imagens. Em álgebra, são transformações planas. As deformações e os morfismos estão entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagens disponíveis para a computação gráfica, neste trabalho mostramos como as transformações planas podem ser usadas para distorcer uma imagem para produzir uma deformação, a maioria dos aplicativos de computação gráfica permitem a manipulação de uma imagem de várias maneiras.

# 1 ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados básicos da Álgebra Linear que utilizaremos ao longo deste trabalho, como espaço vetorial, transformação linear e álgebra das transformações lineares. Os resultados que apresentaremos neste capítulo foram adaptados das obras de Anton et al. [1], Boldrini et al. [2], Lima et al. [8] e Steinbruch et al. [10].

## 1.1 Espaço Vetorial Real

**Definição 1.1** *Seja  $V$  um conjunto, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de **adição** e **multiplicação por escalar**, isto é*

$$\begin{array}{ccc} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \longmapsto & \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, \mathbf{v}) & \longmapsto & \alpha \cdot \mathbf{v} \end{array}$$

**Definição 1.2** *O conjunto  $V$  com essas operações é chamado **espaço vetorial real** se para todo  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  as seguintes propriedades forem satisfeitas,*

A) *Em relação à adição:*

$$A_1) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (\text{Associativa}).$$

$$A_2) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (\text{Comutativa}).$$

$$A_3) \quad \exists \mathbf{0} \in V, \text{ para todo } \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad (\text{Elemento neutro}).$$

$$A_4) \quad \forall \mathbf{u} \in V, \exists (-\mathbf{u}) \in V, \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{Elemento Oposto}).$$

M) *Em relação ao produto por escalar:*

$$M_1) \quad (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) \quad (\text{Associativa}).$$

$$M_2) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (\text{Distributiva para os escalares}).$$

$$M_3) \quad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad (\text{Distributiva para os vetores}).$$

$$M_4) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{Elemento Neutro}).$$

Neste caso, dizemos que  $(V, +, \cdot)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , denotamos simplesmente por  $V$  este espaço vetorial.

**Nota 1.** *Neste trabalho serão considerados somente espaços vetoriais reais.*

**Observação 1.1** Os elementos do espaço vetorial  $V$  serão chamados **vetores**, independentemente de sua natureza.

**Exemplo 1.1** O conjunto  $\mathbb{R}^n = \mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  é um espaço vetorial munido das operações usuais de adição e multiplicação por um número real (real) assim definidas:

Se  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \mathbf{u} &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial, denominado **espaço vetorial euclidiano**.

**Exemplo 1.2** O conjunto das matrizes  $m \times n$ ,  $V = M_{m \times n}$ , é um espaço vetorial munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

$$\begin{cases} [a_{ij}]_{m \times n} &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \\ \alpha [a_{ij}]_{m \times n} &= [\alpha a_{ij}]_{m \times n} \end{cases}$$

Mostraremos a seguir, que  $M_{m \times n}$  com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, de fato, é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Sejam  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n} \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Verificando as oito condições para  $V$  ser um espaço vetorial. Tem-se:

A) Em relação à adição:

A<sub>1</sub>) Associatividade

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \end{aligned}$$

A<sub>2</sub>) Comutativa

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

A<sub>3</sub>) Elemento neutro

Seja  $\mathbf{N} = [n_{ij}] \in M_{m \times n}$  tal que  $\forall [a_{ij}] \in M_{m \times n}$ , temos  $\mathbf{A} + \mathbf{N} = \mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned} [a_{ij}] &= [a_{ij}] + [n_{ij}] \\ &= [a_{ij} + n_{ij}] \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{ij} = a_{ij} + n_{ij} \quad \Rightarrow \quad n_{ij} = 0, \forall i, j$$

Logo, existe  $\mathbf{N} = [n_{ij}] \in M_{m \times n}$ ,  $n_{ij} = 0$  para todo  $i, j$ , ou seja

$$\mathbf{A} + \mathbf{N} = [a_{ij}] + [n_{ij}] = [a_{ij} + 0] = \mathbf{A}$$

A<sub>4</sub>) Elemento Oposto

Seja  $\mathbf{P} = [p_{ij}] \in M_{m \times n}$  tal que  $\forall \mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$ ,  $\mathbf{A} + \mathbf{P} = \mathbf{N}$

$$[a_{ij}] + [p_{ij}]$$

Assim,

$$a_{ij} + p_{ij} = n_{ij} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} + p_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{ij} = -a_{ij}, \forall i, j$$

Assim, para  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$  existe  $-\mathbf{A} = [-a_{ij}] \in M_{m \times n}$  tal que

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = 0 = \mathbf{N}$$

M) Multiplicação por um escalar

M<sub>1</sub>) Associatividade

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\mathbf{A} &= (\alpha\beta)[a_{ij}] = [(\alpha\beta)a_{ij}] = [\alpha(\beta a_{ij})] \\ &= \alpha[\beta a_{ij}] = \alpha(\beta[a_{ij}]) \\ &= \alpha(\beta\mathbf{A}) \end{aligned}$$

$M_2$ ) Distributiva

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)\mathbf{A} &= (\alpha + \beta)[a_{ij}] = [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] \\ &= \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}\end{aligned}$$

$M_3$ ) Distributiva para os vetores

$$\begin{aligned}\alpha((A + B)) &= \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] \\ &= \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}\end{aligned}$$

$M_4$ ) Elemento Neutro

$$\begin{aligned}1\mathbf{A} &= 1[a_{ij}] = [1a_{ij}] = [a_{ij}] \\ &= \mathbf{A}\end{aligned}$$

## Subespaços Vetoriais

**Definição 1.3** *Seja  $S$  um subconjunto de  $V$  espaço vetorial. Se  $S$  tem a estrutura de espaço vetorial com as operações de  $V$ , então  $S$  é **subespaço vetorial**.*

**Lema 1.1** *Seja  $S \neq \emptyset; S \subset V$  é um subespaço vetorial de  $V$  se  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  onde, para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos*

- I) *Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ , então  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$ .*
- II) *Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{u} \in S$ , então  $\alpha \cdot \mathbf{u} \in S$ .*

Note que, os subespaços vetoriais têm que conter a origem e também, todo subespaço é um espaço vetorial em si mesmo.

**Observação 1.2** *Todo espaço vetorial  $V$  admite pelo menos dois subespaços: o conjunto  $\{0\}$ , chamado subespaço zero, e o próprio espaço vetorial. Esses dois são conhecidos como os **subespaços triviais** de  $V$ .*

*Os demais subespaços são denominados **subespaços próprio** de  $V$ .*

## Base e Dimensão

**Definição 1.4** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um vetor  $v \in V$  é uma **combinação linear** dos vetores  $v_1, \dots, v_n \in V$  se existirem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

**Definição 1.5** Seja  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um subconjunto de um espaço vetorial  $V$ . O conjunto  $A$  é **linearmente independente** (ou *LI*) se  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , para  $v_i \in A$  e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , implica que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Definição 1.6** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial  $V$ . Dizemos que o conjunto  $A$  é **linearmente dependente** (ou *LD*) se não for linearmente independente.

**Definição 1.7** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial  $V$ . Dizemos que o conjunto  $A$  gera  $p$  espaço  $V$  se para todo  $v \in V$  existem  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n \in A$  tais que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . Dizemos então, que  $A$  é um **subespaço gerador** de  $V$  e o denotaremos por  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ .

**Exemplo 1.3** Considere  $\mathbb{R}^3$  como espaço vetorial e observe que o conjunto

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

e um conjunto gerador de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.8** Seja  $V$  um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto ordenado  $\beta$  é base de  $V$  quando:

- i)  $\beta$  é um conjunto linearmente independente.
- ii) O subespaço gerado por  $\beta$  é igual a  $V$ .

**Exemplo 1.4** O conjunto  $\{(1, 1), (-1, 0)\}$  é base do  $\mathbb{R}^2$ .

Se  $a(1, 1) + b(-1, 0) = (0, 0)$ , então

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

logo  $a = b = 0$ . Isto é,  $\{(1, 1), (-1, 0)\}$  é linearmente independente.

O conjunto  $[(1, 1), (-1, 0)]$  é gerador de  $V$ , pois dado  $v = (x, y) \in V$ , temos

$$(x, y) = y(1, 1) + (y - x)(-1, 0)$$

ou seja, todo vetor de  $\mathbb{R}^2$  é uma combinação linear dos vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, 0)$ .

**Definição 1.9** Se  $\beta = v_1, v_2, \dots, v_n$  é uma base do espaço vetorial  $V$ . Se  $v \in V$  então existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . O vetor  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é a representação de  $v$  na base  $\beta$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são as **coordenadas** de  $v$  na base  $\beta$ .

Na notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

**Teorema 1.1** Seja  $v \in V$  e  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de um espaço vetorial  $V$ . A representação de  $v$  na base é única.

**Demonstração:** Podemos escrever  $v \in V$  como

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

sendo  $\beta$  base de  $V$ .

Supomos que o mesmo vetor  $v$  seja escrito da forma

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n,$$

então temos que

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Daí,

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

Como  $\beta$  é base então

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_n = b_n$$

Portanto, as coordenadas de um certo vetor  $v \in V$  em uma base arbitrária é única. ■

**Definição 1.10** Seja  $e_i \in \mathbb{R}^n$ , com  $1 \leq i \leq n$ , o vetor cuja  $i$ -ésima coordenada é igual a 1 e as outras nulas. O conjunto  $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  é denominado de **base canônica** do espaço  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Transformação Linear

**Definição 1.11** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais. Uma **transformação linear** é uma função  $T : V \rightarrow W$  tal que para todo escalar  $\alpha$  e todos os vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,*

$$I) T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v});$$

$$II) T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}).$$

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear, onde  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais  $W$ . Então

$$T(\mathbf{0}_V) = T(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W,$$

onde  $\mathbf{0}_V$  indica o vetor nulo do espaço vetorial  $V$  e  $\mathbf{0}_W$  indica o vetor nulo do espaço vetorial  $W$ .

Das duas propriedades de transformação linear, obtemos que

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{u}) + T(\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  e todos escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por indução, obtemos uma relação mais geral

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{v}_i)$$

para quaisquer elementos  $v_1, \dots, v_n \in V$  e quaisquer escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

**Observação 1.3** *Uma transformação linear de  $V$  em  $V$  (é o caso de  $V = W$ ) é chamado **operador linear** sobre  $V$ .*

**Exemplo 1.5** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Considerando um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixo, porém arbitrário, definimos a seguinte transformação*

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ \mathbf{v} &\rightarrow T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \end{aligned}$$

Dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vetores em  $V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(\alpha\mathbf{u}) &= \lambda(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  é uma transformação linear.

**Definição 1.12** Uma **transformação matricial** é uma função dada por  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ , onde  $A$  é uma matriz. Mais precisamente, seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ . Então a aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\mathbf{v} \rightarrow A\mathbf{v}$  é uma transformação matricial.

**Exemplo 1.6** Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Então  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

ou seja,  $T$  é a transformação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (-y, x)$ .

**Nota 2.** Toda transformação linear entre espaços de dimensão finita têm uma representação matricial.

**Teorema 1.2** Toda transformação matricial é uma transformação linear.

**Demonstração:** Seja  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a transformação definida por  $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  em que  $A$  é uma matriz de ordem  $m \times n$ . Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são vetores-coluna de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  é um escalar qualquer, então, pelas propriedades da multiplicação de matrizes,

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= A(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{u} = T_A(\mathbf{v}) + T_A(\mathbf{u}) \\ T_A(\alpha\mathbf{v}) &= A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{v}) = \alpha T_A(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Portanto, a transformação matricial  $T_A$  é linear. ■

**Exemplo 1.7** Sejam  $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$  e  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , onde  $\mathbf{w}$  é um vetor não nulo em  $\mathbb{R}^2$ .

Dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vetores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) &= \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} + \mathbf{w} \\ &= \mathbf{u} + \mathbf{w} + \alpha\mathbf{v} \\ &= T(\mathbf{u}) + \alpha[T(\mathbf{v}) - \mathbf{w}] \\ &\neq T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  não é uma transformação linear.

**Teorema 1.3** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais, com  $\dim V$  igual a  $n$ ,  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base ordenada para  $V$  e  $w_1, w_2, \dots, w_n$  elementos arbitrários de  $W$ . Então, existe uma única transformação  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$  para  $j = 1, \dots, n$ .*

**Demonstração:** Inicialmente vamos mostrar que existe pelo menos uma transformação linear  $T$  com  $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$ .

Dado um elemento  $\mathbf{u} \in V$ , sabemos que  $\mathbf{u}$  é escrito de modo único

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Para este elemento  $\mathbf{u}$ , vamos definir uma aplicação  $T : V \rightarrow W$  da forma:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{w}_i$$

Temos que  $T$  é uma transformação bem definida. Pela definição, fica evidente que  $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ .

Para mostrar que  $T$  é uma transformação linear, sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e um elemento  $\mathbf{v} \in V$  escrito de modo único como:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n (c_i + \alpha b_i) \mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{w}_i + \alpha \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{w}_i \\ &= T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação  $T$  é linear.

Finalmente vamos mostrar a unicidade da transformação linear  $T$ . Suponha que existe uma outra transformação linear  $P : V \rightarrow W$  tal que

$P(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Desse modo, temos:

$$P(\mathbf{u}) = P\left(\sum_i^n c_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_i^n P(\mathbf{v}_i) = \sum_i^n c_i \mathbf{w}_i$$

Logo,  $P$  é exatamente a regra da transformação linear  $T$  definida acima. Portanto, provamos a unicidade da transformação linear  $T$ , o que completa a demonstração. ■

**Exemplo 1.8** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linear tal que

$$T(1, 0) = (2, 1, 0)$$

$$T(0, 1) = (0, 1, 2)$$

Os vetores  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (0, 1)$  formam a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  qualquer, temos

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Donde,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ &= x(2, 1, 0) + y(0, 1, 2) \\ &= (2x, x + y, 2y) \end{aligned}$$

Logo,  $T$  é dada por  $T(x, y) = (2x, x + y, 2y)$ .

**Exemplo 1.9** Seja  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operador linear que leva cada vetor  $v$  no vetor  $R_\theta(v)$  que dele resulta pela rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem.

Para um vetor  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  arbitrário, seja  $R_\theta(x, y) = (x', y')$ .

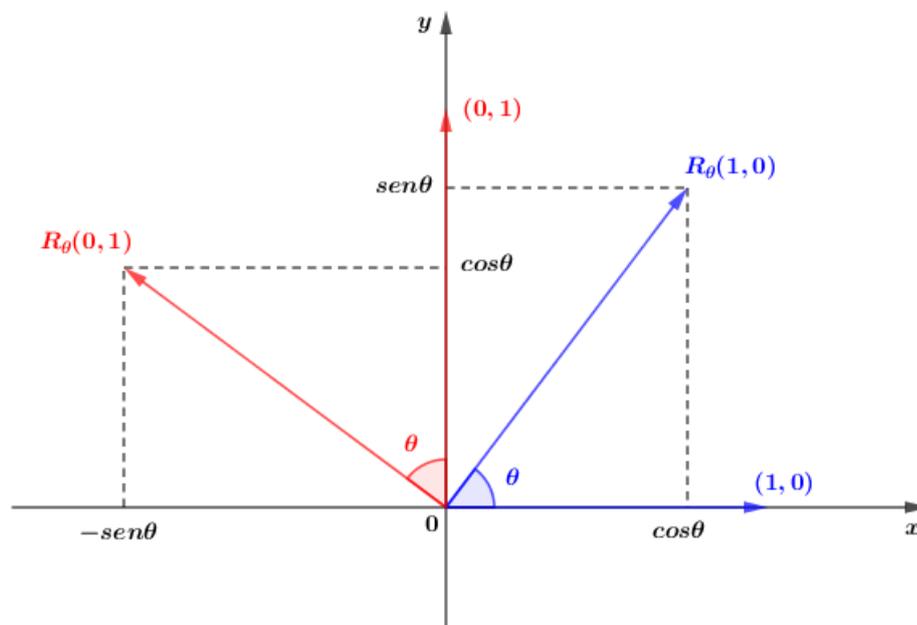


Figura 1 – Rotação de um ângulo  $\theta$

Pelas definições de seno e cosseno, o vetor unitário  $R_\theta(1, 0)$ , que forma com  $(1, 0)$  um ângulo  $\theta$ , tem coordenadas  $\cos\theta$  e  $\sin\theta$ , ou seja,  $R_\theta(1, 0) = (\cos\theta, \sin\theta)$ . Além disso, como  $(0, 1)$  forma com  $(1, 0)$  um ângulo reto,  $R_\theta(0, 1)$  também forma com  $R_\theta(1, 0)$  um ângulo reto. Logo  $R_\theta(0, 1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ .

Logo,

$$R_\theta(1, 0) = (+\cos(\theta), +\sin(\theta))$$

$$R_\theta(0, 1) = (-\sin(\theta), +\cos(\theta))$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y) &= R_\theta(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \cdot R_\theta(1, 0) + y \cdot R_\theta(0, 1) \\ &= x \cdot (+\cos\theta, +\sin\theta) + y \cdot (-\sin\theta, +\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

onde

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta;$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

**Definição 1.13** Chama-se **núcleo** de uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  ao conjunto de todos os vetores  $\mathbf{v} \in V$  que são transformados em  $\mathbf{0} \in W$ . Indica-se esse conjunto por  $N(T)$  ou  $\text{Ker}(T)$ :

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

**Proposição 1.1** O núcleo de uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Demonstração:**

1 Observe que  $0 \in N(T)$ , uma vez que  $T(0) = 0$ . Portanto  $N(T) \neq \emptyset$ .

2 Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  vetores pertencentes ao  $N(T)$ . Então  $T(\mathbf{v}_1) = 0$  e  $T(\mathbf{v}_2) = 0$ . Assim,

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = 0 + 0 = 0$$

isto é,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in N(T)$ .

3 Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{v}_1 \in N(T)$ . Isto é,  $T(\mathbf{v}_1) = 0$ , então

$$T(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha T(\mathbf{v}_1) = \alpha 0 = 0$$

isto é,  $\alpha\mathbf{v}_1 \in N(T)$ .

Portanto,  $N(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ .



**Definição 1.14** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais e  $T$  uma aplicação de  $V$  em  $W$ . Dizemos que  $T$  é uma aplicação **injetora** se, e somente se, para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , com  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$  tem-se que  $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$ . De modo equivalente,  $T$  é **injetora** se, e somente se, para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , com  $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$  implica que  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .*

**Teorema 1.4** *Seja  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então*

$$T \text{ é injetiva} \Leftrightarrow N(T) = \{\mathbf{0}\}$$

**Demonstração:**

( $\Rightarrow$ ) Vamos mostrar que se  $T$  é injetora,  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

Seja  $\mathbf{v} \in N(T)$ , isto é,  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Como  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , temos que  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Como  $T$  é injetora por hipótese,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Logo,  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Vamos mostrar que se  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ , então  $T$  é injetora.

Para isso, tomamos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  tais que  $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ . Assim, temos que

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Como  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ , obtemos

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} \in N(T) \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Logo,  $T$  é injetora, o que completa a demonstração.



**Definição 1.15** *Chama-se **imagem** de uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  ao conjunto dos vetores  $\mathbf{w} \in W$  que são imagens de pelo menos um vetor  $\mathbf{v} \in V$ . Indica-se esse conjunto por  $Im(T)$  ou  $T(V)$ :*

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$$

**Proposição 1.2** *A imagem de uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  é um subespaço vetorial de  $W$ .*

**Demonstração:**

- 1) A imagem de  $T$  não é vazia, pois  $\mathbf{0}_w$  é a imagem de  $\mathbf{0}_v$ .
- 2) Sejam  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \text{Im}T$ , assim existem vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  tais que  $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ ,  $\mathbf{v}_i \in V_i = 1, 2$ . Assim,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \Rightarrow \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \text{Im}T$$

- 3) Sejam  $\mathbf{w} \in \text{Im}T$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v} \in V$ , logo

$$\alpha\mathbf{w} = \alpha T(\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{v}) \Rightarrow \alpha\mathbf{w} \in \text{Im}T.$$

Portanto,  $\text{Im}T$  é um subespaço vetorial de  $W$ .

■

**Definição 1.16** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e  $T$  uma aplicação de  $V$  em  $W$ . Dizemos que  $T$  é uma aplicação **sobrejetiva** se, e somente se,  $\text{Im}(T) = W$ , isto é, para todo  $\mathbf{w} \in W$ , existe  $\mathbf{u} \in V$  tal que  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$ .*

**Corolário 1.1** *Se  $T : V \rightarrow W$  é linear e  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  gera  $V$ , então  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$  gera a  $\text{Im}(T)$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\mathbf{w} \in \text{Im}(T)$ . Então,  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  para algum  $\mathbf{v} \in V$ . Como  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  gera  $V$ , existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

e:

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_nT(\mathbf{v}_n)$$

Portanto,

$$\text{Im}(T) = [T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)].$$

■

**Teorema 1.5 (Teorema do núcleo e da imagem)** *Seja  $V$  um espaço de dimensão finita e  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então*

$$\dim(V) = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [3] ■

**Corolário 1.2** *Seja  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Se  $\dim V = \dim W$ , então é injetora se, e somente se,  $T$  é sobrejetora.*

**Demonstração:**

$T$  é injetora

$$\begin{aligned} \Rightarrow N(T) &= \mathbf{0} \quad (\text{Teorema 1.4}) \\ \Rightarrow 0 + \dim \text{Im}(T) &= \dim V \quad (\text{Teorema 1.5}) \\ \Rightarrow \dim \text{Im}(T) &= \dim W \quad (\text{hipotese}) \\ \Rightarrow \text{Im}(T) &= W \\ \Rightarrow T &\text{ sobrejetora} \end{aligned}$$

Reciprocamente:

$T$  é sobrejetiva

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Im}(T) &= W \\ \Rightarrow \dim \text{Im}(T) &= \dim W \\ \Rightarrow \dim \text{Im}(T) &= \dim V \quad (\text{hipotese}) \\ \Rightarrow \dim N(T) &= 0 \quad (\text{Teorema 1.5}) \\ \Rightarrow N(T) &= \{0\} \quad \text{sobrejetora} \\ \Rightarrow T &\text{ injetora} \quad (\text{Teorema 1.4}) \end{aligned}$$

**Corolário 1.3** *Se  $\dim V = \dim W$  e  $T$  é injetora, então  $T$  leva uma base em base, isto é, se  $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  base de  $V$ , então  $T(\beta) = \{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$  é uma base de  $W$ .*

**Demonstração:**

Como  $\dim V = \dim W = n$ , basta mostrar que  $T(\beta)$  é LI. Para tanto, consideremos a igualdade:

$$\alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) = 0$$

ou, pela linearidade de  $T$  :

$$T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = 0$$

Como  $T$  é injetora, vem:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0.$$

Sendo  $\beta$  uma base,  $\beta$  é LI e, portanto

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Logo,  $T(\beta)$  é uma base de  $W$ .

■

**Definição 1.17** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e  $T$  uma aplicação de  $V$  em  $W$ . Dizemos que é uma aplicação **bijetora** se, e somente se,  $T$  é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*

**Definição 1.18** *Chama-se **isomorfismo** do espaço vetorial  $V$  no espaço vetorial  $W$  a uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  que é bijetora. Nesse caso, os espaços  $V$  e  $W$ , são ditos **isomorfos**.*

*Um isomorfismo  $T : V \rightarrow V$  é denominado um **automorfismo** de  $V$ .*

**Proposição 1.3** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita. Se  $\dim V = \dim W$ , então  $V$  e  $W$  são isomorfos. Em particular, todo espaço vetorial de dimensão  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Se  $\beta = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$  é base de  $V$  e  $\gamma = \{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n\}$  uma base para  $W$ . Vamos definir uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  de seguinte forma:

$$T \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i$$

onde estamos definindo  $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ , para  $i = 1, \cdots, n$ .

Podemos verificar facilmente que  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ . De fato, considere um elemento  $\mathbf{v} \in N(T)$  que é escrito de modo único como:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{v}) = \alpha_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}_w,$$

como  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  é linearmente independente, implica em

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Portanto, provamos que  $T$  é uma transformação injetora.

Finalmente, pelo Teorema do núcleo e da imagem, tem-se que

$$\dim V = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T) \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Im}(T) = n.$$

Assim,  $\text{Im}(T) = W$ . Logo,  $T$  é uma transformação sobrejetora. Portanto, mostrando que  $T$  é um isomorfismo de  $V$  em  $W$ . ■

Seja  $T : V \rightarrow W$  um isomorfismo, isto é,  $T$  é uma transformação linear bijetora. Então, para cada elemento  $\mathbf{w} \in W$  podemos fazer a associação  $T(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{w}$  para um único elemento  $\mathbf{v} \in V$ . Desse modo, temos uma nova aplicação de  $W$  em  $V$ , tendo em vista que não teremos  $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$  com  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ , uma vez que  $T$  é injetora.

Essa nova aplicação, que vamos denotar por  $T^{-1}$ ,  $T^{-1} : W \rightarrow V$  é denominada **aplicação inversa** de  $T$ . Desse modo, temos que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad T(T^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w} \quad \text{paratodo } \mathbf{v} \in V \quad \text{e} \quad \mathbf{w} \in W$$

**Teorema 1.6** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  um isomorfismo. Então,  $T^{-1} : W \rightarrow V$  é uma transformação linear.*

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Queremos mostrar que

$$T^{-1}(\lambda \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \lambda T^{-1}(\mathbf{w}_1) + T^{-1}(\mathbf{w}_2).$$

Sejam  $\mathbf{v}_1 = T^{-1}(\mathbf{w}_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_2)$ , isto é,  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são os únicos elementos em  $V$  tais que  $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$  e  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ .

Como  $T$  é uma transformação linear, temos que

$$T(\lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Desse modo,  $\lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  é o único elemento em  $V$  que é levado pela transformação linear  $T$  no elemento  $\lambda \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  em  $W$ . Portanto

$$T^{-1}(\lambda \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \lambda T^{-1}(\mathbf{w}_1) + T^{-1}(\mathbf{w}_2),$$

provando que  $T^{-1}$  é uma transformação linear. ■

**Teorema 1.7** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finitas e  $T$  um isomorfismo de  $V$  em  $W$ . Então,  $T^{-1} : W \rightarrow V$  é também um isomorfismo.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.6, sabemos que  $T^{-1}$  é uma transformação linear. Assim, devemos mostrar que  $T^{-1}$  é bijetora.

Sejam  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  tais que  $T^{-1}(\mathbf{w}_1) = T^{-1}(\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}$ . Desse modo, temos  $T(\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1)$  e  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ . Logo,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ , pois  $T$  é uma aplicação. Portanto,  $T^{-1}$  é injetora.

Para mostrar que  $T^{-1}$  é sobrejetora basta observar que  $N(T^{-1}) = \{\mathbf{0}_w\}$ , pois  $T^{-1}$  é injetora, e ao aplicar o Teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim N(T^{-1}) + \dim \text{Im}(T^{-1}) = \dim W,$$

obtendo que  $\dim \text{Im}(T^{-1}) = \dim W = \dim V$ , pois  $V$  e  $W$  são isomorfos.

Assim,  $\text{Im}(T^{-1}) = V$ , o que completa a demonstração. ■

## Matriz de uma Transformação Linear

**Teorema 1.8** *Sejam  $V, W$  espaços vetoriais de dimensão finita e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Fixadas base  $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$  e  $\gamma = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\} \subset W$ . Então para todo  $\mathbf{v} \in V$ , vale*

$$[T]_{\gamma}^{\beta}[\mathbf{v}]_{\beta} = [T(\mathbf{v})]_{\gamma}$$

**Demonstração:** Primeiramente, como  $\mathbf{v} \in V$ , e  $\beta$  é base de  $V$ , podemos escrever  $\mathbf{v}$  como combinação linear dos vetores de  $\beta$ , isto é, existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \tag{1.1}$$

Usando (1.1) e a linearidade de  $T$ , podemos escrever:

$$T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n). \tag{1.2}$$

Cada vetor  $T(\mathbf{v}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , presente em (1.2), pertence a  $W$ ; logo, pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base  $\gamma$ . Ou seja, para cada vetor  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de  $A$ , existem escalares  $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$  tais que

$$T(\mathbf{v}_i) = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mi}\mathbf{w}_m$$

Detalhando ainda mais, temos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ T(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em (1.2), temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \alpha_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m) + (a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m) + \dots \\ &\quad + \alpha_n(a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m) \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n})\mathbf{w}_1 + (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{2n})\mathbf{w}_2 + \dots \\ &\quad + (\alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \dots + \alpha_n a_{mn})\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

O vetor  $T(\mathbf{v})$ , por sua vez, está em  $W$ . Logo, pode ser escrito em relação a base  $\gamma$ , isto é, existem escalares  $c_1, c_2, c_m$  tais que

$$T(\mathbf{v}) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_m\mathbf{w}_m \quad (1.3)$$

Comparando as expressões, concluímos que

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ c_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ &\vdots \\ c_n &= a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{aligned}$$

As igualdades acima podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Observe que os vetores-coluna que aparecem nessa igualdade são os vetores-coordenadas dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $T(\mathbf{v})$ , em relação às bases  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente. Representando a matriz  $m \times n$  por  $[T]_{\gamma}^{\beta}$ , podemos escrever a igualdade (1.5) na forma:

$$[T]_{\gamma}^{\beta}[\mathbf{v}]_{\beta} = [T(\mathbf{v})]_{\gamma}$$

■

Dizemos que a matriz  $[T]_{\gamma}^{\beta}$  é a matriz da transformação linear de  $T$  com relação as bases  $\beta$  e  $\gamma$ .

**Observação 1.4** Quando as bases são consideradas são as canônicas, dizemos que a matriz obtida é a **matriz canônica** da transformação linear.

**Exemplo 1.10** Seja  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + y, x + z)$ . Se  $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e  $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$  então

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(1, 0, 0) &= (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) \\ \mathbf{T}(0, 1, 0) &= (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) \\ \mathbf{T}(0, 0, 1) &= (0, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

Logo,

$$[\mathbf{T}]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Observação 1.5** Examinando a lei que define a transformação  $T$ , verifica-se, que sua matriz canônica fica determinada formando a primeira coluna com os coeficientes de  $x$ , a segunda com os coeficientes de  $y$  e a terceira com os coeficientes de  $z$ .

## Álgebra das Transformações Lineares

**Definição 1.19** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Denotamos por  $L(V, W)$  o conjunto de todas as transformações lineares de  $V$  em  $W$ , isto é,*

$$L(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ é uma transformação linear}\}$$

**Definição 1.20** *Dadas as transformações lineares  $T_1, T_2 \in L(V, W)$ . Definimos a **adição de transformações**  $T_1 + T_2 : V \rightarrow W$  da seguinte forma:*

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v}); \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

*A aplicação assim definida é também uma transformação linear.*

**Observação 1.6** *Sejam  $\beta$  e  $\gamma$  bases quaisquer de  $V$  e  $W$  respectivamente, então a matriz da transformação **adição** nestas bases é dada por:*

$$[T_1 + T_2]_{\gamma}^{\beta} = [T_1]_{\gamma}^{\beta} + [T_2]_{\gamma}^{\beta}$$

**Teorema 1.9**  *$L(V, W)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  com relação as operações de adição, de transformações lineares e multiplicação por escalar definidas acima.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [7] ■

**Teorema 1.10** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ , com dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Então, o espaço vetorial  $L(V, W)$  tem dimensão finita e  $\dim L(V, W) = nm$ .*

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [7] ■

**Definição 1.21** *Sejam  $V, W$  e  $U$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Considere as transformações lineares  $T_1 : V \rightarrow W$  e  $T_2 : W \rightarrow U$ . Definimos a **composição das transformações**  $T_2$  e  $T_1$ , que denotamos por  $T_2 \circ T_1 : V \rightarrow U$ , da seguinte forma:*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2(\mathbf{T}(\mathbf{v})); \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

**Observação 1.7** *Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  bases de  $V, W$  e  $U$  respectivamente, então a matriz da transformação **composta** de  $T_1$  com  $T_2$  nestas bases é dada por:*

$$[T_2 \circ T_1]_{\gamma}^{\alpha} = [T_2]_{\gamma}^{\beta} \cdot [T_1]_{\gamma}^{\alpha}$$

**Observação 1.8** *Em geral, é importante a ordem pela qual compomos as transformações lineares. Ou sejam a composição não é comutativa.*

**Teorema 1.11** *A aplicação  $T_2 \circ T_1$  é uma transformação linear de  $V$  em  $U$ .*

**Demonstração:** Sejam  $T_1 : V \rightarrow W$  e  $T_2 : W \rightarrow U$  transformações lineares,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores quaisquer em  $V$  e  $\alpha$  um escalar. Então,

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T_2(T_1(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})) \\ &= T_2(\alpha T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v})) \\ &= \alpha T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v})) \\ &= \alpha(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

■

## 2 TRANSFORMAÇÕES PLANAS E SUAS APLICAÇÕES

Nesta seção vamos nos dedicar ao estudo das transformações no plano, entende-se por transformações planas as transformações de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Deste modo veremos a seguir algumas de especial importância e suas respectivas representações geométricas. Os resultados que apresentaremos neste capítulo foram adaptados das obras de Anton et al. [1], Boldrini et al. [3], Lima et al. [7] e Steinbruch et al. [9].

### 2.1 Transformações Planas

**Definição 2.1** *Uma transformação no  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que associa a cada vetor  $v$  do plano um vetor  $v'$  tal que:*

$$T(v) = v'$$

ou

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

onde  $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , corresponde as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{Op}$ , sendo  $O$  a origem do sistema cartesiano.

Observe que o vetor  $v$  é transformado no vetor  $v'$  por uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

### Transformações Lineares Planas

**Definição 2.2** *Dizemos que uma função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma transformação linear quando*

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy),$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são números reais.

**Exemplo 2.1** *A função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (x, 2x - y)$ , é uma transformação linear, onde  $a = 1, c = 0, b = 2$  e  $d = -1$ .*

Podemos estudar as transformações lineares do plano usando também a forma matricial.

Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a transformação matricial cuja matriz canônica é

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

então

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2.2** A transformação linear  $T(x, y) = (x, 2x - y)$ , pode ser estudado como  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Transformações lineares geométricas do $\mathbb{R}^2$

### Reflexões

- a) **Reflexão em torno do eixo dos  $x$ .** Essa transformação linear leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x, -y)$ , simétrica em relação ao eixo dos  $x$ .

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow T(x, y) = (x, -y) \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

de modo que a matriz canônica  $\mathbf{T}$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- b) **Reflexão em torno do eixo dos  $y$ .** Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(-x, y)$ , simétrica em relação ao eixo dos  $y$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow T(x, y) = (-x, y) \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

c) **Reflexão na origem.** Essa transformação linear leva cada ponto  $(x, y)$  à sua imagem  $(-x, -y)$ , simétrica em relação a origem. Temos então:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (-x, -y)$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}.$$

d) **Reflexão em torno da reta  $y = x$ .** Essa aplicação linear leva cada ponto  $(x, y)$  à sua imagem  $(y, x)$ , simétrica em relação a reta  $y = x$ . Temos então:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (y, x)$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

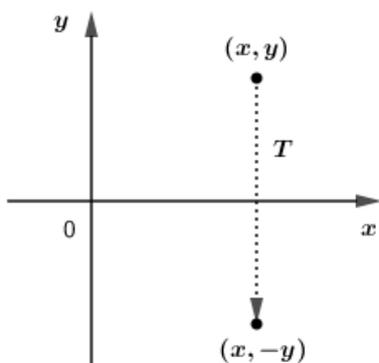


Figura 2 – Reflexão em torno do eixo dos  $x$

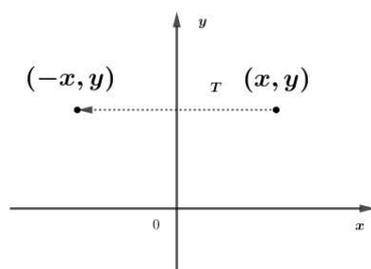


Figura 3 – Reflexão em torno do eixo dos  $y$

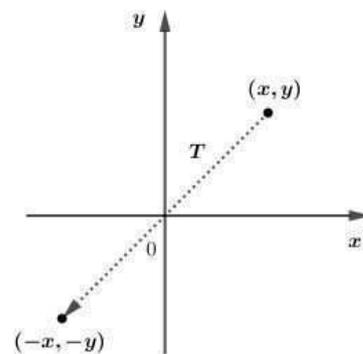


Figura 4 – Reflexão na Origem

e) **Reflexão em torno da reta  $y = -x$ .** Essa transformação linear leva cada ponto  $(x, y)$  à sua imagem  $(-y, -x)$ , simétrica em relação a reta  $y = -x$ . Ou seja,

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (-y, -x)$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$$

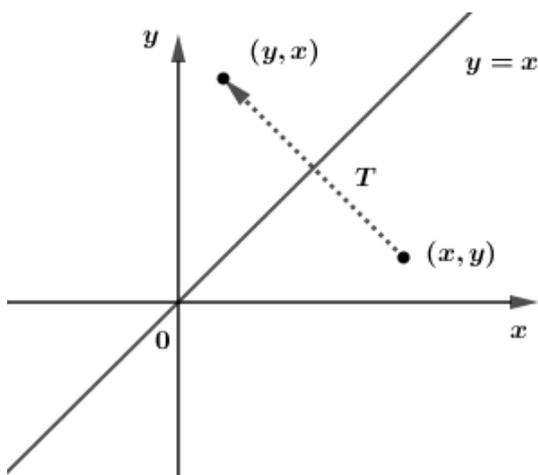


Figura 5 – Reflexão em torno da reta  
 $y = x$

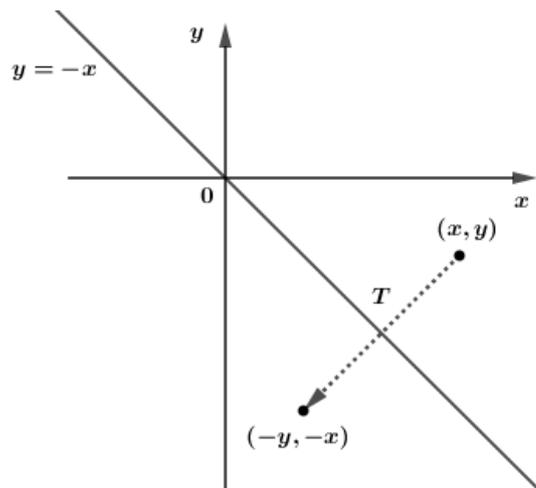


Figura 6 – Reflexão em torno da reta  
 $y = -x$

## Dilatações e Contrações

**Definição 2.3** Se  $\alpha$  é um escalar não-negativo, então a transformação

$$T(x, y) = \alpha(x, y)$$

de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  é chamada uma **homotetia de razão**  $\alpha$ . Especificamente, transformação é uma **contração** de razão  $\alpha$  se  $0 \leq \alpha < 1$  e uma **dilatação** de razão  $\alpha$  se  $\alpha \geq 1$

**Observação 2.1** O efeito geométrico de uma contração é comprimir cada vetor por um fator  $\alpha$  em todas as direções na direção da origem e o efeito geométrico de uma dilatação é esticar cada vetor por um fator  $\alpha$  em todas as direções para longe da origem.

**Observação 2.2** A contração mais extrema ocorre com  $\alpha = 0$ , caso em que  $T(x, y) = \alpha(x, y)$  reduz à transformação nula  $T(x, y) = (0, 0)$ , que comprime cada vetor a um único ponto (a origem).

Se  $\alpha = 1$  então  $T(x, y) = \alpha(x, y)$  reduz à transformação identidade  $T(x, y) = (x, y)$ , que deixa cada vetor inalterado; isto poderia ser considerado tanto uma contração quanto uma dilatação.

**a) Dilatação ou Contração na direção do vetor**

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\(x, y) &\rightarrow T(x, y) = \alpha(x, y)\end{aligned}$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$$

Observemos que:

- se  $|\alpha| > 1$ ,  $T$  dilata o vetor;
- se  $|\alpha| < 1$ ,  $T$  contrai o vetor;
- se  $\alpha = 1$ ,  $T$  é a identidade;
- se  $\alpha < 0$ ,  $T$  troca o sentido do vetor.

**b) Dilatação ou Contração na direção do eixo dos  $x$** 

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\(x, y) &\rightarrow T(x, y) = (\alpha x, y), \alpha > 0\end{aligned}$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix}.$$

**c) Dilatação ou Contração na direção do eixo dos  $y$** 

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\(x, y) &\rightarrow T(x, y) = (x, \alpha y), \alpha > 0\end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$$

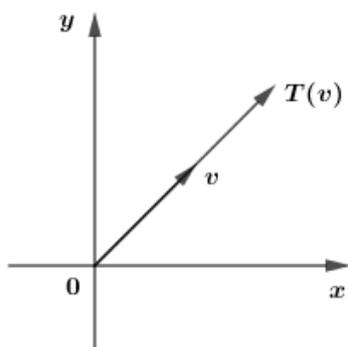


Figura 7 – Dilatação e Contração do vetor

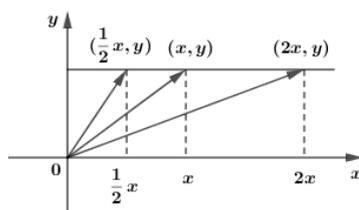


Figura 8 – Dilatação e Contração na direção do eixo  $x$

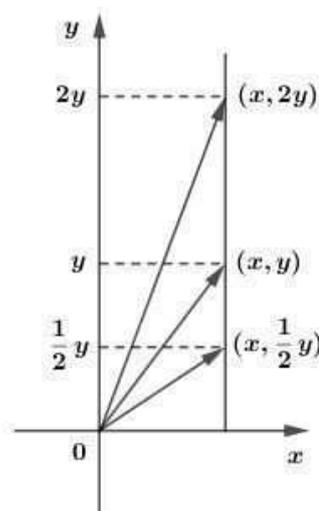


Figura 9 – Dilatação e Contração na direção do eixo  $y$

## Projeções

A transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que leva cada vetor na sua **projeção ortogonal sobre o eixo  $x$**  é chamada de projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ . Analogamente, a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo  $y$  é chamada de **projeção ortogonal sobre o eixo  $y$** .

### a) Projeção ortogonal sobre o eixo $x$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (x, 0)$$

cuja matriz canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

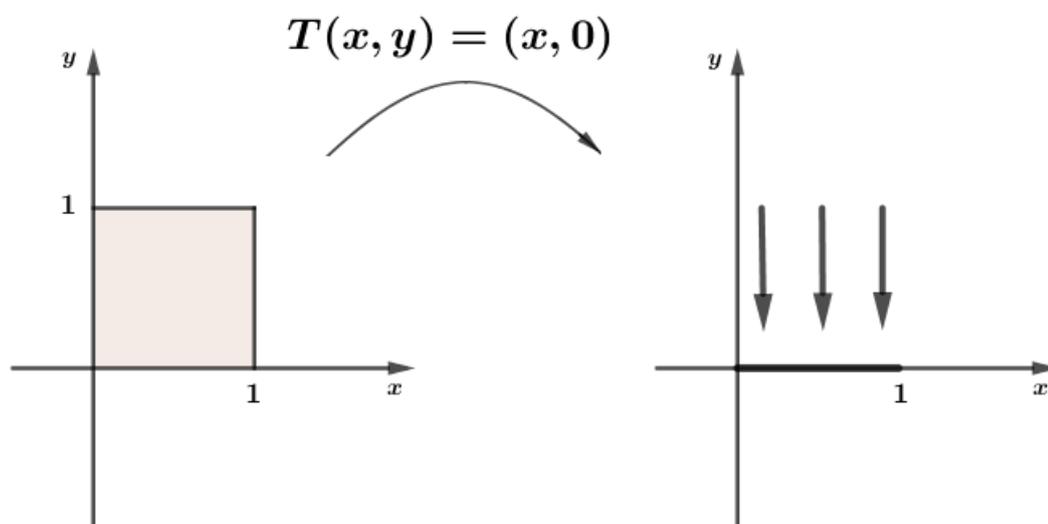


Figura 10 – Projeção no eixo  $x$

b) Projeção ortogonal sobre o eixo  $y$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (0, y)$$

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

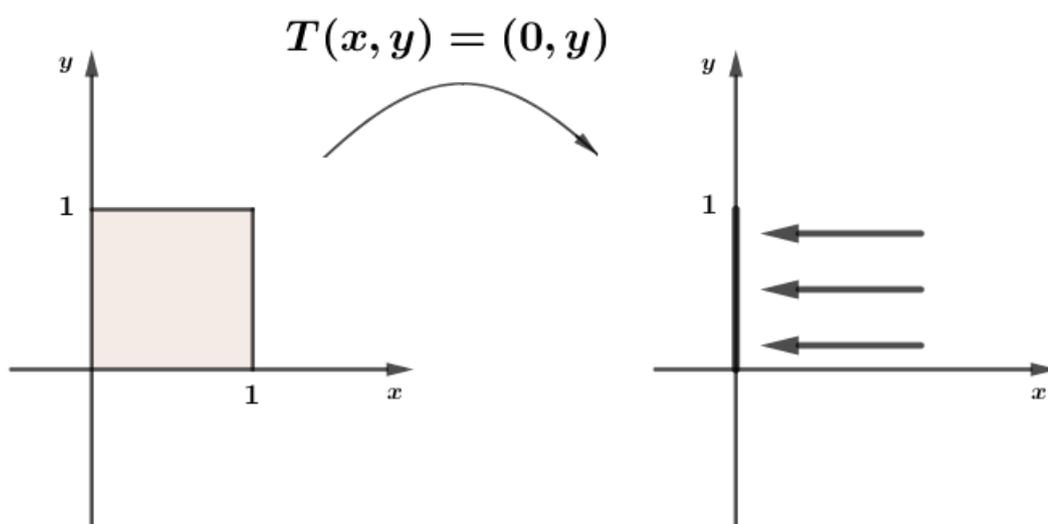


Figura 11 – Projeção no eixo  $y$

### Rotação de um ângulo $\theta$ : (no sentido anti-horário)

Uma transformação que gira cada vetor em  $\mathbb{R}^2$  por um ângulo fixado  $\theta$ , torno da origem, no sentido anti-horário, é chamado uma **rotação** em  $\mathbb{R}^2$ .

A transformação definida por:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

é uma rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário.

Em forma matricial

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz canônica é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

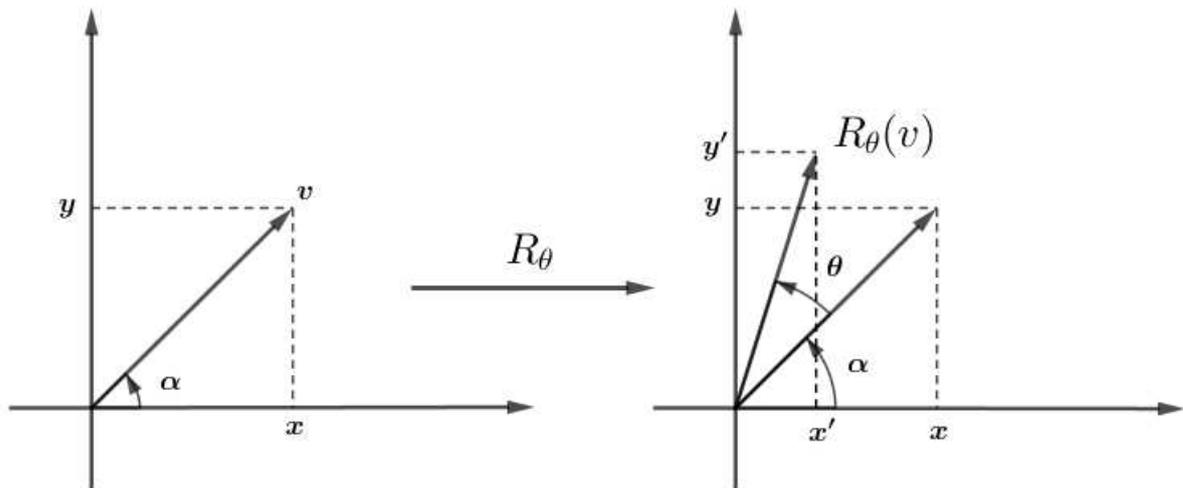


Figura 12 – Rotação de um ângulo  $\theta$

**Exemplo 2.3** Considere  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Neste caso,  $\cos\theta = 0$  e  $\sin\theta = 1$ . Então,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

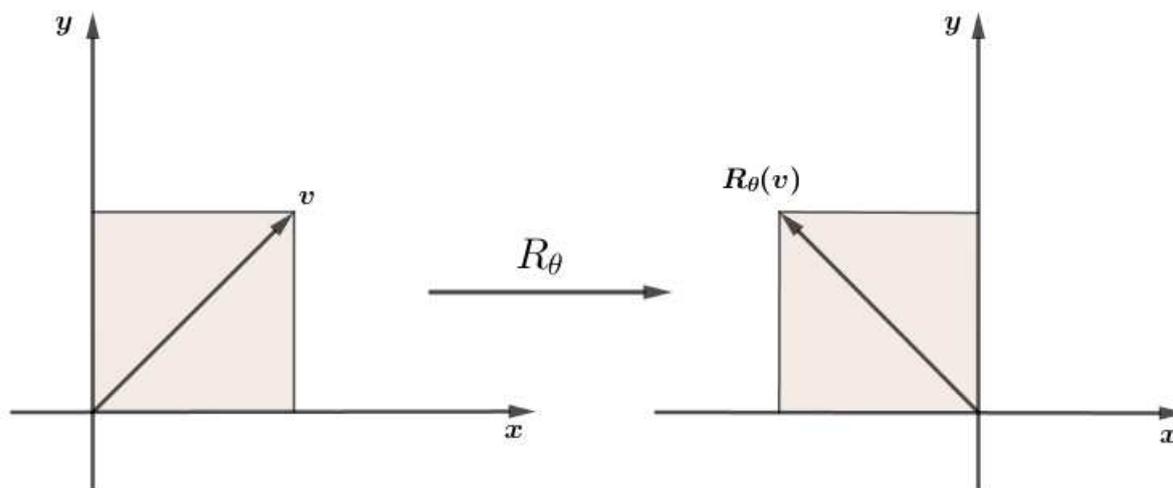


Figura 13 – Rotação de um ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$

### Cisalhamento

a) **Cisalhamento na direção do eixo dos  $x$**

A transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , isto é

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix}.$$

é chamada **cisalhamento horizontal**

Por esse cisalhamento, cada ponto  $(x, y)$  se desloca paralelamente ao eixo dos  $x$  até chegar em  $(x + \alpha y, y)$ . Com uma tal transformação, os pontos do eixo do  $x$ , permanecem onde estão, pois  $y = 0$ .

Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  sobre o quadrado unitário.

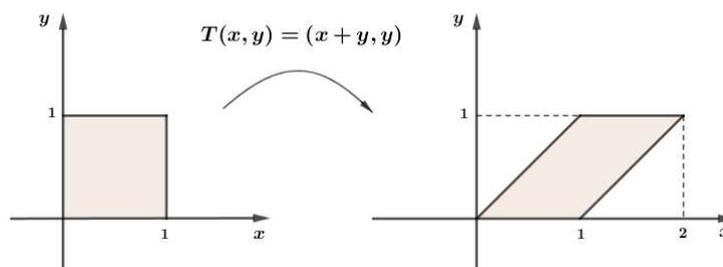


Figura 14 – Cisalhamento horizontal

O efeito do cisalhamento é transformar o quadrado no paralelogramo, de mesma base e mesma altura.

b) **Cisalhamento na direção do eixo dos  $y$** 

A transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ , isto é

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha x + y \end{bmatrix}.$$

é chamada **cisalhamento vertical**

Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  sobre o quadrado unitário.

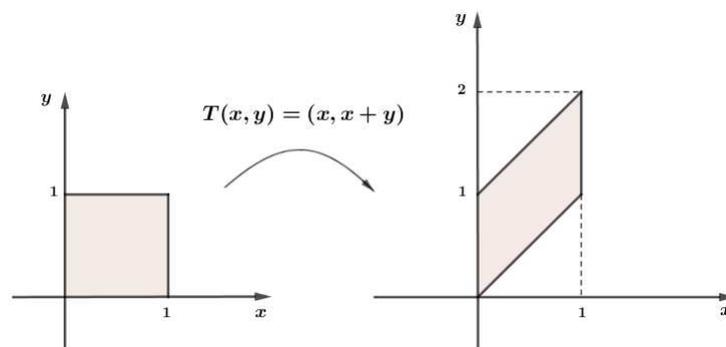


Figura 15 – Cisalhamento vertical

**Exemplo 2.4** Considere a matriz da transformação linear  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que representa um cisalhamento por um fator 2 na direção horizontal seguida de uma reflexão em torno do eixo dos  $y$ .

O cisalhamento transforma o vetor  $(x, y)$  no vetor  $(x', y')$  dado por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

já a reflexão transforma o vetor  $(x', y')$  no vetor  $(x'', y'')$  dado por

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

substituindo (2.1) em (2.2), temos:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  representa a transformação composta do cisalhamento com a reflexão.

**Exemplo 2.5** *O plano sofre uma rotação de um ângulo  $\theta$ . A seguir experimenta uma dilatação de fator 4 na direção do eixo dos  $x$ , posteriormente, uma reflexão em torno da reta  $y = x$ . Qual a matriz que representa a única transformação linear e que tem o mesmo efeito do conjunto das três transformações citadas?*

Sabemos que a matriz rotação é dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

já a dilatação transforma o vetor  $(x, y)$  no vetor  $(x', y')$  dado por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

por fim a reflexão transforma o vetor  $(x', y')$  no vetor  $(x'', y'')$  dado por:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

substituindo (2.4) e (2.3) em (2.5) temos:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ 4\cos\theta & -4\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

A matriz que representa a única transformação linear e que tem o mesmo efeito do conjunto das três transformações citadas é a matriz

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ 4\cos\theta & -4\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

**Observação 2.3** *Teríamos obtido o mesmo resultado, neste último exemplo, se tivéssemos executado a composição das três transformações citadas.*

## A Geometria de operadores matriciais de $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, discutimos mais detalhadamente os operadores de  $\mathbb{R}^2$ . As ideias aqui desenvolvidas têm aplicações importantes na Computação Gráfica.

A figura abaixo mostra uma fotografia de Albert Einstein e três modificações dessa fotografia geradas por computador, que são resultados de operadores matriciais de  $\mathbb{R}^2$

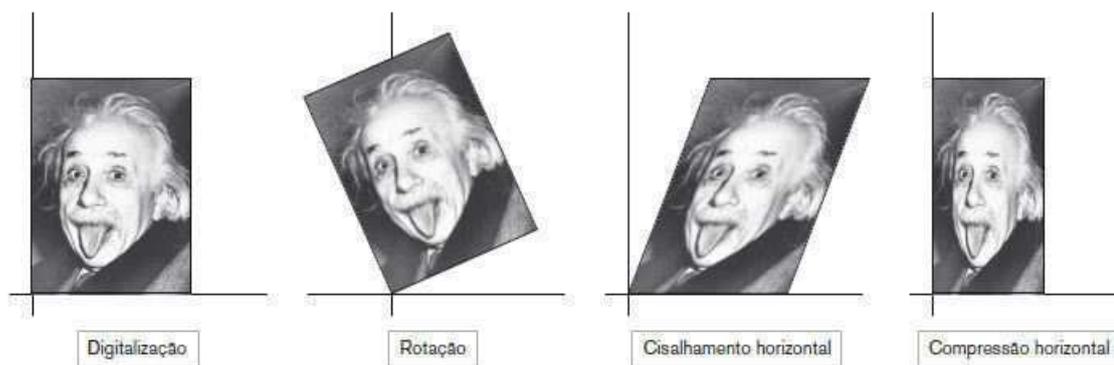


Figura 16 – Livro do Anton

**Definição 2.4** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita injetora se  $T$  aplica vetores (pontos) distintos de  $\mathbb{R}^n$  em vetores (pontos) distintos de  $\mathbb{R}^m$ .

**Observação 2.4** Segue desta definição que para cada vetor  $w$  na imagem de uma transformação linear injetora  $T$  existe exatamente um único vetor  $x$  tal que  $T(x) = w$ .

Os operadores lineares injetores de  $\mathbb{R}^2$  que aplicam vetores (pontos) distintos em vetores (pontos) distintos de especial importância.

Um exemplo de uma tal transformação é a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que rotaciona cada vetor por um ângulo  $\theta$ . É óbvio, geometricamente, que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores distintos em  $\mathbb{R}^2$  então também os vetores rotacionados  $T(\mathbf{u})$  e  $T(\mathbf{v})$  serão distintos.

**Teorema 2.1** Se  $A$  for a matriz  $n \times n$  e  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador matricial correspondente, então as afirmações são equivalentes

- a)  $A$  é invertível
- b) A imagem de  $T_A$  é  $\mathbb{R}^n$
- c)  $T_A$  é injetor.

**Demonstração:** Ver [1]



**Teorema 2.2** Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a multiplicação por uma matriz elementar, então a transformação é uma das seguintes opções:

- (a) um cisalhamento na direção de um eixo coordenado;
- (b) uma reflexão em torno de  $y = x$ ;
- (c) uma contração na direção de um eixo coordenado;
- (d) uma expansão na direção de um eixo coordenado;
- (e) uma reflexão em torno de um eixo coordenado;
- (f) uma contração ou expansão na direção de um eixo coordenado seguida de uma reflexão em torno de um eixo coordenado.

**Observação 2.5** Uma **matriz elementar** é uma matriz que difere da matriz identidade por uma única operação elementar de linha.

**Exemplo 2.6** Supondo que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sejam positivos, a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos a matriz  $A$  expressa como produto de matrizes elementares.

**Demonstração:** Como a matriz elementar  $2 \times 2$  resulta de uma única operação elementar sobre linhas na matriz identidade  $2 \times 2$ , ela deve ser de uma das seguintes formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

As primeiras duas matrizes representam cisalhamentos na direção de um eixo coordenado; e a terceira, uma reflexão em torno do de  $y = x$ . Se  $\alpha > 0$ , as duas últimas matrizes representam uma expansão ou uma contração na direção de um eixo coordenado, dependendo se  $0 \leq \alpha \leq 1$  ou  $\alpha \geq 1$ . Se  $\alpha < 0$  e se expressarmos  $\alpha = -\alpha_1$ , onde  $\alpha_1 > 0$ , então as duas últimas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Como  $\alpha_1 > 0$ , o produto em (2.6) representa uma contração ou expansão na direção  $x$  seguida de uma reflexão em torno do eixo  $y$  e (2.7) representa uma contração ou expansão na direção  $y$  seguida de uma reflexão em torno do eixo  $x$ .

No caso em que  $\alpha = -1$ , as transformações (2.6) e (2.7) são simplesmente reflexões em torno do eixo  $y$  e  $x$ , respectivamente. ■

**Observação 2.6** *As reflexões, rotações, expansões, contrações e cisalhamentos são transformações lineares injetoras. Isso é evidente geometricamente, pois todas essas transformações levam pontos distintos em pontos distintos. Isso também pode ser conferido algebricamente verificando que as matrizes canônicas dessas transformações são invertíveis.*

**Teorema 2.3** *Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a multiplicação por uma matriz invertível  $E$ , então o efeito geométrico de  $T$  é o mesmo que uma sucessão apropriada de cisalhamentos, contrações, expansões e reflexões.*

**Demonstração:** Por ser invertível,  $E$  pode ser reduzida à identidade por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas. Uma operação elementar sobre linhas pode ser efetuada pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar, de modo que existem matrizes elementares  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tais que

$$A_n \cdots A_2 A_1 E = I$$

Resolvendo em  $E$ , obtemos

$$E = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_n^{-1} I$$

ou, equivalentemente,

$$E = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_n^{-1}$$

Esta equação expressa  $E$  como um produto de matrizes elementares. O resultado segue, agora, pelo teorema 2.2. ■

Na Computação Gráfica, muitas imagens são construídas ligando pontos por seguimentos de retas. O próximo teorema ajuda atender como operadores matriciais transformam tais imagens.

**Teorema 2.4** *Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a multiplicação por uma matriz invertível, então:*

- (a) *A imagem de uma reta é uma reta;*
- (b) *A imagem de uma reta pela origem é uma reta pela origem;*

- (c) As imagens de retas paralelas são retas paralelas;
- (d) A imagem do seguimento de reta ligando P e Q é p segmento de reta ligando as imagens de P e Q;
- (e) As imagens de três pontos são colineares se, e somente se, os pontos são colineares.

**Demonstração:** Ver [1] ■

**Observação 2.7** Segue das partes (c), (d) e (e) que a multiplicação por uma matriz invertível  $2 \times 2$  leva triângulos em triângulos e paralelogramos em paralelogramos.

**Exemplo 2.7** O triângulo de vértices  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 0)$  e  $P_3(0, 1)$  é chamado o triângulo unitário. Esboce a imagem do triângulo unitário pela multiplicação por

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solução:** Pelo teorema 2.4 e como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a imagem do triângulo é um triângulo  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(1, 1)$ .

**Exemplo 2.8** A matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Leva a reta  $y = 2x + 1$  em alguma outra reta.

Seja  $(x, y)$  um ponto da reta  $y = 2x + 1$  e seja  $(x', y')$  sua imagem pela multiplicação por A. Então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= -4x' - y' \\ y &= -3x' - y' \end{aligned}$$

substituindo em  $y = 2x + 1$ , obtemos

$$-3x' - y' = 2(-4x' - y') + 1 \text{ ou equivalente } y' = -5x' + 1$$

Assim,  $(x', y')$  satisfaz

$$y = -5x + 1$$

que é a equação procurada.

## 2.3 Transformação não linear geométrica do $\mathbb{R}^2$

Uma transformação importante na computação gráfica mais que não é linear, é a transformação de translação.

### Translações

Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . Dado um elemento  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , a transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow T(x, y) = (x, y) + (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

é uma translação.

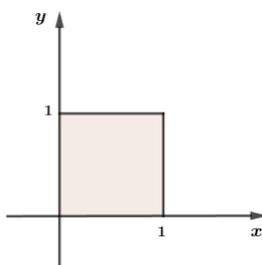
Escrevendo a translação na forma matricial temos que

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Através da translação podemos deslocar objetos no plano, nos sentidos horizontal e/ou vertical. As translações não alteram as medidas das distâncias, nem alteram as amplitudes dos ângulos dos objetos. O objeto transformado por translação mantém tamanho e forma, modificando sua localização.

É importante perceber que diferente das outras transformações mostradas neste trabalho, a translação, "não é uma aplicação linear, portanto não pode ser representada em termos de multiplicação de matrizes. Uma multiplicação de matriz mantém sempre o vetor nulo sem modificações, enquanto que a translação afeta todos os pontos, incluindo a origem que corresponde ao vetor zero".

Consideremos deslocar o quadrado da figura, três unidades para a direita e duas para cima.



Assim, gostaríamos de aplicar no quadrado a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x, y) = (x + 3, y + 2).$$

A translação não sendo uma transformação linear, não pode, então, ser representada por uma matriz quadrada de ordem 2. Entretanto, podemos obter uma representação matricial para essa transformação utilizando uma matriz de ordem  $3 \times 3$ , como descrevemos a seguir.

## 2.4 Aplicações

Nos exemplos a seguir, são apresentadas algumas operações matemáticas usadas na computação gráfica, destacando-se o uso das matrizes e das transformações lineares.

Imagine um sistema cartesiano ortogonal com a origem no centro e um ponto qualquer  $P = (x, y)$ .

Por meio de um produto de matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Obtemos um novo ponto  $P' = (x', y')$ , tal que:  $x' = ax + by$  e  $y' = cx + dy$ .

A matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é chamada de matriz de transformação no plano.

Tudo funciona como se o ponto  $P$  "fosse levado" pela matriz  $T$  para a posição do ponto  $P'$ .

Sendo assim, podemos representar matricialmente uma figura por meio da descrição dos vértices que a contém de modo que cada coluna desta matriz tenha respectivamente a primeira linha como sendo o valor  $x$  e a segunda linha como sendo o valor de  $y$ .



A Figura 18 representa os pontos da matriz transformada no plano cartesiano

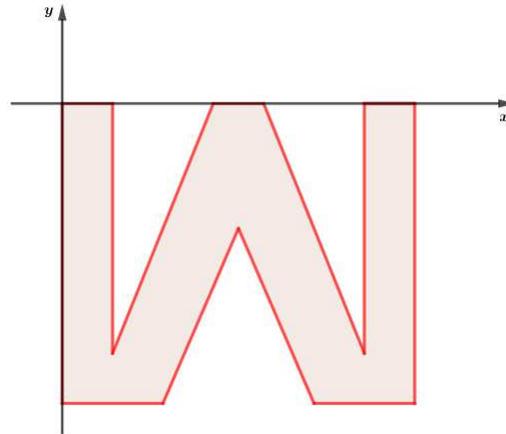


Figura 18 – Reflexão em torno do eixo  $x$ .

2) Reflexão da direção do eixo  $y$ .

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(-x, y)$ , simétrica em relação ao eixo  $y$ .

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & -6 & -6 & -7 & -7 & -5 & -3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

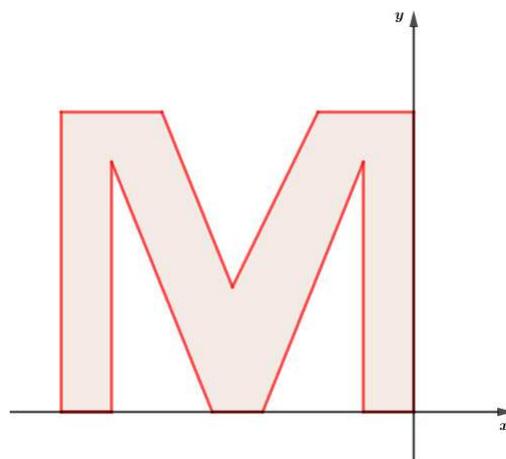


Figura 19 – Reflexão em torno do eixo  $y$ .

3) **Reflexão em torno da origem.**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(-x, -y)$ , simétrica em relação à origem.

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & -6 & -6 & -7 & -7 & -5 & -3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -6 & -6 & -2,5 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

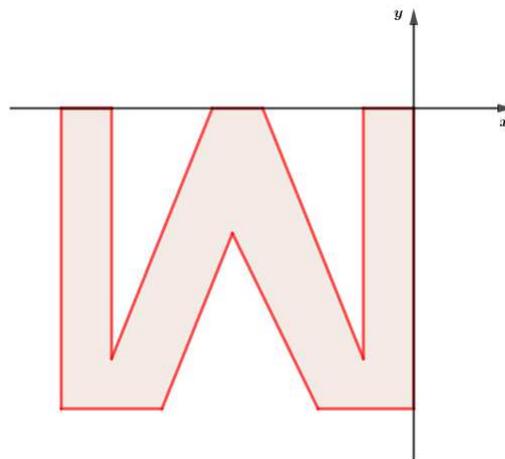


Figura 20 – Reflexão em torno da origem.

4) **Reflexão em torno da reta  $y = x$ .**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(y, x)$ , simétrica em relação a reta  $y = x$ .

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

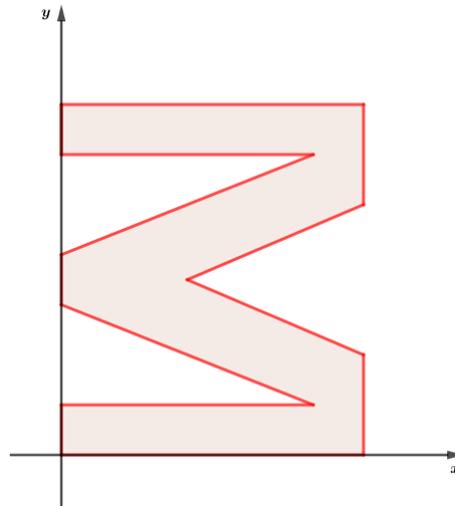


Figura 21 – Reflexão em torno da reta  $x = y$ .

5) Reflexão em torno da reta  $y = -x$ .

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(-y, -x)$ , simétrica em relação a reta  $y = -x$ .

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -6 & -6 & -2,5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & -6 & -6 & -7 & -7 & -5 & -3,5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

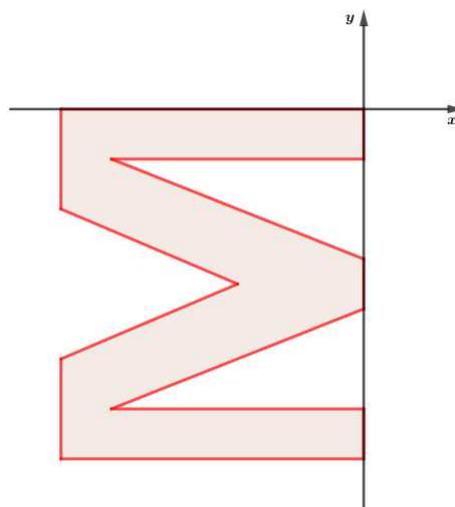


Figura 22 – Reflexão em torno da reta  $y = -x$ .

**6) Dilatação ou Contração Proporcional.**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(\alpha x, \alpha y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Aplicando uma dilatação proporcional de fator  $\alpha = 1,5$ , na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação  $\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Inicial  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Final  $\begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 1,5 & 4,5 & 6 & 9 & 9 & 10,5 & 10,5 & 7,5 & 5,25 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7,5 & 0 & 0 & 7,5 & 0 & 0 & 9 & 9 & 3,75 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

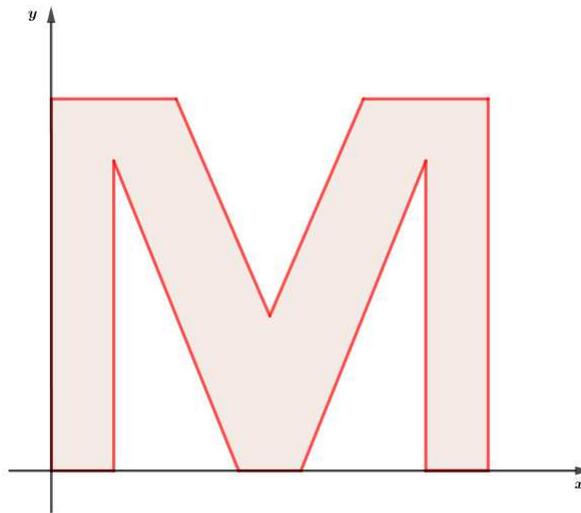


Figura 23 – Dilatação Proporcional da Figura 17 de fator  $\alpha = 1,5$

**7) Dilatação e Contração na direção do eixo  $x$ .**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(\alpha x, y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando uma dilatação na direção do eixo  $x$  de fator  $\alpha = 2$ , na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Inicial  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Final  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 & 8 & 12 & 12 & 14 & 14 & 10 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

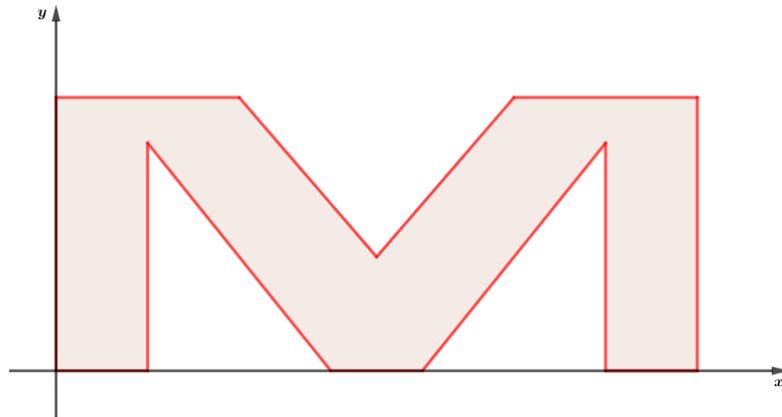


Figura 24 – Dilatação da Figura 17 na direção do eixo  $x$  de fator  $\alpha = 2$

8) Dilatação e Contração na direção do eixo  $y$ .

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x, \alpha y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Aplicando uma contração na direção do eixo  $y$  de fator  $\alpha = 0,5$ , na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Inicial  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Final  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1,25 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

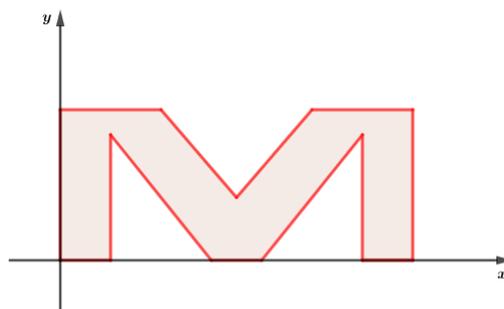


Figura 25 – Contração da Figura 17 na direção do eixo  $y$  de fator  $\alpha = 0,5$

9) **Cisalhamento Horizontal.**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x + \alpha y, y), \alpha \in \mathbb{R}$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando cisalhamento horizontal de fator de fator  $\alpha = 1$ , na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Inicial  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Final  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 3 & 4 & 11 & 6 & 7 & 13 & 11 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

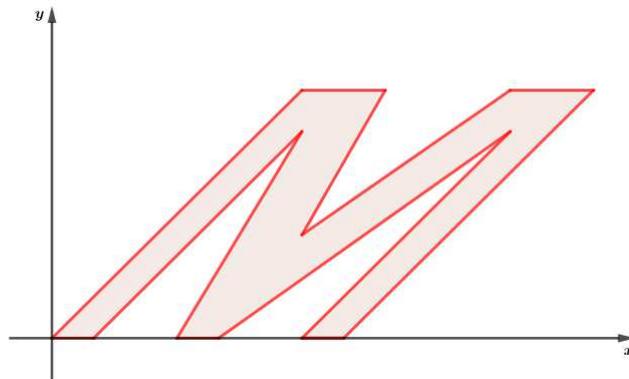


Figura 26 – Cisalhamento horizontal da Figura 17 de fator  $\alpha = 1$

10) **Cisalhamento Vertical.**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x, \alpha x + y), \alpha \in \mathbb{R}$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando cisalhamento vertical de fator de fator  $\alpha = 0.5$ , na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Inicial  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz de pontos da figura Final  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 5,5 & 1,5 & 2 & 8 & 3 & 3,5 & 9,5 & 8,5 & 4,25 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

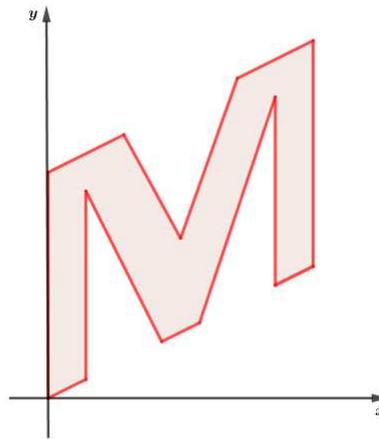


Figura 27 – Cisalhamento vertical da Figura 17 de fator  $\alpha = 0,5$ .

11) **Matriz de rotação de um ângulo  $\theta$ , em torno da origem, no sentido anti-horário.**

Essa transformação leva cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta)$ .

Sua matriz de transformação é  $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Aplicando uma rotação de  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{rad}$  na Figura 17, teremos:

Matriz de Transformação

$$\begin{bmatrix} 0,86 & -0,5 \\ 0,5 & 0,86 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,86 & -1,64 & 2,58 & 3,44 & 2,66 & 5,16 & 6,02 & 3,02 & 1,3 & 1,76 & -1,28 & -3 \\ 0 & 0,5 & 4,8 & 1,5 & 2 & 7,3 & 3 & 3,5 & 8,66 & 7,66 & 3,9 & 6,16 & 5,16 \end{bmatrix}$$

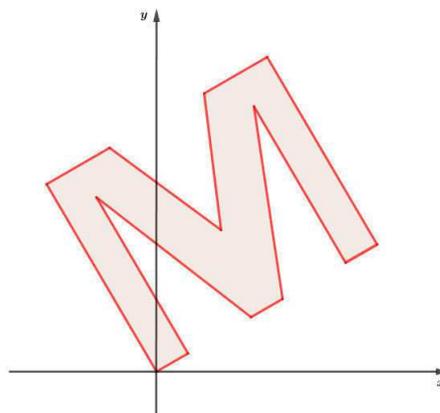


Figura 28 – Rotação de  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{rad}$ , em torno da origem, no sentido anti-horário.

12) **Matriz de translação.**

Essa transformação associa cada ponto  $(x, y)$  para sua imagem  $(x + \alpha, y + \beta)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ou  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ .

Sua matriz de transformação é implementada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Esta é uma transformação do plano onde a figura final é congruente a figura inicial deslocada  $\alpha$  unidades no eixo  $x$  e  $\beta$  unidades no eixo  $y$ .

Aplicando uma Translação segundo a coordenada  $(5, 6)$ , na Figura 17, onde a cada valor de  $x$  somamos 5 unidades e a cada valor de  $y$  somamos 6 unidades, teremos:

Matriz de Transformação	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz de pontos da figura Inicial	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2,5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$
Matriz de pontos da figura Final	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 & 9 & 11 & 11 & 12 & 12 & 10 & 8,5 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 11 & 6 & 6 & 11 & 6 & 6 & 12 & 12 & 8,5 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

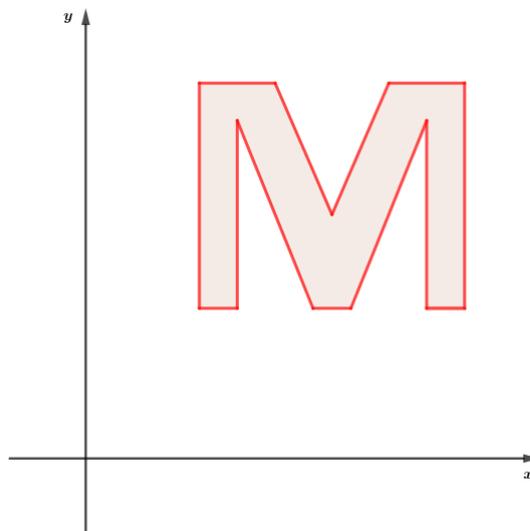


Figura 29 – Translação da Figura 17 segundo a coordenada  $(5, 6)$ .

## 3 INTRODUÇÃO A GEOMETRIA AFIM

A Geometria Afim generaliza a Geometria Euclidiana separando pontos de vetores: os vetores não tem posição fixa no espaço (sua visualização "depende de um referencial"), e pontos são posições fixas (são "referenciais" que podemos usar para visualizar vetores). Poderemos representar translações naturalmente como matrizes, e conseqüentemente como transformações afim. Os resultados que apresentaremos neste capítulo fora adaptados das obras de Brannan [4].

### 3.1 Geometrias

Uma **Geometria** consiste em um espaço, algumas propriedades que possuem as figuras neste espaço e um grupo de transformações do espaço que preservam estas propriedades.

A geometria Euclidiana Plana, usa o espaço  $\mathbb{R}^2$  e se preocupa com as propriedades das figuras que dependem da noção de distância. O grupo associado à geometria euclidiana é o grupo de isometrias no plano. As rotações, translações e reflexões são transformações da geometria euclidiana e são definidas por isometrias em  $\mathbb{R}^2$  como funções que mapeiam o  $\mathbb{R}^2$  no  $\mathbb{R}^2$  e preservam distâncias.

A Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades de figuras geométricas invariantes pelo grupo de isometrias. Estas propriedades são chamadas propriedades euclidianas.

A ideia que a geometria pode ser pensada em termos de um espaço e de um grupo agindo sobre ele, é chamado visão Kleiniana da Geometria ("**Kleinian view Geometry** ") em homenagem ao matemático que a propôs primeiro, o alemão do século 19 Felix Klein.

A visão Kleiniana da Geometria nos permite gerar muitas geometrias, de modo que as propriedades da nova geometria, serão válidas para a anterior. A intenção é expandir o estudo das geometrias via aspectos algébricos que possam ainda recuperar a Geometria Euclidiana em seus aspectos principais.

Estamos interessados em estudar o espaço  $\mathbb{R}^2$  do ponto de vista da geometria diferencial afim. O Espaço Afim é o espaço ambiente onde se definem as transformações afins as quais definem a geometria afim.

Quando estudamos a geometria no plano  $\mathbb{R}^2$ , é usado o grupo de transformações da forma  $T(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{A}$  é uma matriz invertível  $2 \times 2$ .

A geometria afim pode ser definida em  $\mathbb{R}^n$ , para qualquer  $n \geq 2$ , restringimos nossa atenção aqui ao caso em que  $n = 2$ .

Apresentaremos alguns tópicos importantes da Geometria Afim, algumas provas de teoremas não serão realizadas, e, portanto, para aqueles que tiverem interesse e curiosidade em conhecer as demonstrações, basta procurar na referência Brannan [4].

## 3.2 Geometrias Euclidianas

A geometria euclidiana em  $\mathbb{R}^2$  pode ser interpretada como um espaço  $\mathbb{R}^2$  junto com o grupo de transformações euclidianas que atuam nesse espaço.

As propriedades euclidianas das figuras são aquelas, como distância e ângulo, que são preservados por essas transformações.

A geometria Euclidiana é o estudo das propriedades de figuras invariantes pelo grupo de isometrias. Chamamos estas propriedades Euclidianas.

**Definição 3.1** Uma *isometria* (ou *movimento rígido*) de  $\mathbb{R}^2$  é uma função contínua e sobrejetiva

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distâncias.

Podemos dizer que  $f$  é uma isometria em  $\mathbb{R}^2$  se para todos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

aqui,  $d$  denota a distância.

Qualquer isometria em  $\mathbb{R}^2$  tem algumas das seguintes formas:

- Translação em  $\mathbb{R}^2$
- Reflexão em relação a uma reta em  $\mathbb{R}^2$
- Composição em torno de um ponto em  $\mathbb{R}^2$
- Composição de translações, reflexões e rotações em  $\mathbb{R}^2$

Mudança de escala e Cisalhamento não são isometrias.

O conjunto  $S(\mathbb{R}^2)$  de isometrias em  $\mathbb{R}^2$  forma um grupo com a operação de composição de funções.

**Definição 3.2** Uma *transformação euclidiana* em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  da forma

$$T(x) = \mathbf{U}x + \mathbf{a}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

onde  $\mathbf{U}$  é uma matriz ortogonal  $2 \times 2$ , e  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ .

O conjunto de todas as transformações euclidianas de  $\mathbb{R}^2$  é denotado por  $E(2)$ .

**Teorema 3.1** *Qualquer isometria de  $\mathbb{R}^2$  é uma transformação euclidiana de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e reciprocamente toda transformação euclidiana é uma isometria.*

**Demonstração:** Veja [4].

O conjunto de transformações euclidianas  $E(2)$  forma um grupo com a operação de composição de funções.

**Definição 3.3** *Uma figura  $F$  é **Euclidiana-Congruente** com uma figura  $G$  se existe uma transformação Euclidiana que transforma  $F$  sobre  $G$ .*

- Euclidiana-Congruente é uma relação de equivalência.

**Exemplo 3.1** *O conjunto de todos os segmentos de reta de comprimento 1 são Euclidianos-Congruentes.*

**Exemplo 3.2** *Todos os triângulos são não Euclidianos-Congruentes.*

### 3.3 Geometria Afim

**Definição 3.4** *Uma transformação afim de  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  da forma*

$$T(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz inversível  $2 \times 2$ , e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ .

O conjunto de todas as transformações afins de  $\mathbb{R}^2$  é denotado por  $A(2)$ .

As transformações Euclidianas são exemplos de transformações afins.

Observe que  $T$  não é uma transformação linear a menos que  $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ .

**Teorema 3.2** *O conjunto de transformações afins  $A(2)$  forma um grupo com a operação de composição de funções.*

**Demonstração:**

- **Fecho**

Sejam  $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas transformações afins, dadas por

$$T_1(x) = A_1x + b_1 \quad e \quad T_2(x) = A_2x + b_2$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são matrizes invertíveis  $2 \times 2$ .

Então, para cada  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(x) &= T_1(A_2x + b_2) \\ &= A_1(A_2x + b_2) + b_1 \\ &= (A_1A_2x) + (A_1b_2 + b_1)\end{aligned}$$

como  $A_1$  e  $A_2$  são invertíveis, segue que  $A_1A_2$  também é invertível.

Então, por definição,  $T_1 \circ T_2$  é uma transformação afim.

### • Identidade

Sejam a transformação afim dada por

$$i(x) = Ix + 0, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .

Se  $T$  é uma transformação afim, dada por

$$T(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Então, para cada  $x \in \mathbb{R}^2$

$$(T \circ i)(x) = A(Ix + 0) + b = Ax + b = T(x)$$

e

$$(i \circ T)(x) = I(Ax + b) + 0 = Ax + b = T(x)$$

Assim,  $T \circ i = i \circ T = T$ . Portanto  $i$  é a transformação identidade.

### • Inversa

Se  $T$  é uma transformação afim arbitrária dada por

$$T(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

então podemos definir outra transformação afim  $G$  por

$$G(x) = A^{-1}x - A^{-1}b, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\begin{aligned}
(T \circ G)(x) &= T(A^{-1}x - A^{-1}b) = A(A^{-1}x - A^{-1}b) + b \\
&= (AA^{-1}x - AA^{-1}b) + b \\
&= (x - b) + b \\
&= x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(G \circ T)(x) &= G(Ax + b) = A^{-1}(Ax + b) - A^{-1}b \\
&= (A^{-1}Ax + A^{-1}b) - A^{-1}b \\
&= (x + A^{-1}b) - A^{-1}b \\
&= x
\end{aligned}$$

Portanto,  $T \circ G = G \circ T = i$ . Portanto,  $G$  é o inverso de  $T$ .

- **Associatividade**

A composição de funções é sempre associativa.

Segue-se que o conjunto de transformações afins  $A(2)$  forma um grupo sob composição de funções.

□

Definimos a geometria afim como o estudo das propriedades das figuras no plano  $\mathbb{R}^2$  que são preservadas por transformações afins. Essas são chamadas propriedades afins das figuras.

## Propriedades básicas de transformações afins

1. Levam retas em retas
2. Levam retas paralelas em retas paralelas
3. Preservam razão de comprimentos ao longo de uma reta dada.

## Imagens de conjuntos sob transformações afins

A transformação inversa em  $T^{-1}$  é dada por

$$T^{-1}(x) = \mathbf{A}^{-1}x - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Usamos o símbolo  $\mathbf{x}$  e as coordenadas  $(x, y)$  para pontos no domínio de  $T$ , e usamos  $\mathbf{x}'$  e as coordenadas  $(x', y')$  para denotar a imagem de  $\mathbf{X}$  sob  $T$ .

Com essa notação, podemos reescrever as equações

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ T^{-1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}' - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Essas equações podem ser usadas para encontrar a imagem de um conjunto sob uma transformação afim.

**Exemplo 3.3** *Determine a imagem da reta  $3x - y + 1 = 0$  sob a transformação afim*

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

**Solução:** Seja  $(x, y)$  um ponto arbitrário da reta  $3x - y + 1 = 0$  e seja  $(x', y')$  a imagem de  $(x, y)$  sob a transformação afim  $T$ .

Então,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Expressando  $(x, y)$  em termos de  $(x', y')$  temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, sob o mapeamento inverso  $T^{-1}$  tem-se

$$\begin{aligned} x &= 4x' + y' + 2 \\ y &= 2x' + y' - 1 \end{aligned}$$

Como  $x$  e  $y$  são relacionados pela equação  $3x - y + 1 = 0$ , segue que  $x'$  e  $y'$  são relacionados pela equação

$$\begin{aligned} 4(4x' + y' + 2) - (2x' + y' - 1) + 1 &= 0 \\ 10x' + 2y' + 8 &= 0 \\ 5x' + y' + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a imagem da reta  $3x - y + 1 = 0$  sob  $T$  é a reta  $5x + y + 4 = 0$ .  $\square$

## Teorema Fundamental da Geometria Afim

A abordagem algébrica também pode ser usada para investigar se há uma transformação afim que mapeia uma determinada figura em outra. Se houver tal transformação, as duas figuras serão consideradas afim congruentes. Esse conceito de congruência é importante porque, as figuras que são congruentes entre si compartilham as mesmas propriedades afins.

O Teorema Fundamental da Geometria Afim afirma que quaisquer três pontos não colineares podem ser mapeados para quaisquer outros três pontos não colineares por uma transformação afim. Com este teorema temos que todos os triângulos são afim congruentes, uma vez que um triângulo é completamente determinado por seus vértices.

Primeiro, descrevemos como os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  em  $\mathbb{R}^2$  podem ser mapeados para quaisquer três pontos não colineares  $P$ ,  $Q$  e  $R$  por uma transformação afim. Essa transformação é única no sentido de que é completamente determinada pela escolha de  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .

## Método para determinar $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ .

Podemos usar métodos semelhantes para transformações lineares para determinar  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$ .

Segue de  $T(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$  que  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$ . Então  $\mathbf{b}$  é a imagem da origem sob  $T$ .

Considerando  $e$  e  $f$  as coordenadas de  $T(\mathbf{0})$ , podemos escrever

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Deste modo, de  $T(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$  temos que as imagens sob  $T$  dos pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  são dadas por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Portanto, se, além de  $T(\mathbf{0}) = (e, f)$ , sabemos que os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  são mapeados por  $T$ , então podemos determinar os valores  $a, b, c$  e  $d$ .

Temos que

$$\begin{aligned}(a, c) &= T(1, 0) - (e, f) \\ (b, d) &= T(0, 1) - (e, f)\end{aligned}$$

Segue que uma transformação afim é exclusivamente determinada por seu efeito nos três pontos não colineares  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

Em geral, se quisermos uma transformação afim  $T$  da forma

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

que mapeia  $(0, 0)$  para  $P$ ,  $(1, 0)$  para  $Q$  e  $(0, 1)$  para  $R$ , então devemos escolher  $a, b, c, d, e$  e  $f$  tal que

$$\begin{aligned}P &= T(0, 0) = (e, f) \\ Q &= T(1, 0) = (a, c) + (e, f) \\ R &= T(0, 1) = (b, d) + (e, f)\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}(e, f) &= P \\ (a, c) &= Q - P \\ (b, d) &= R - P\end{aligned}$$

Observe que quaisquer que três pontos  $P, Q$  e  $R$  determinam exclusivamente uma transformação  $T$  da forma

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

mas  $T$  é afim se a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é invertível.

Observe que as colunas de  $\mathbf{A}$  corresponde aos vetores  $Q - P$  e  $R - P$ , assim  $\mathbf{A}$  é invertível apenas se os vetores  $Q - P$  e  $R - P$  são linearmente independentes. Ou seja, desde que  $P, Q$  e  $R$  não sejam colineares.

Portanto, se,  $P, Q$  e  $R$  não são colineares, podemos usar a seguinte estratégia para encontrar uma transformação afim que mapeia  $(0, 0)$  para  $P$ ,  $(1, 0)$  para  $Q$  e  $(0, 1)$  para  $R$ .

**Estratégia:**

Para determinar uma única transformação afim  $T(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$  que mapeia  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para três pontos não colineares  $P, Q$  e  $R$ , respectivamente

1. Tome  $\mathbf{b} = P$
2. Considere  $\mathbf{A}$  como a matriz cujas colunas são dadas por  $Q - P$  e  $R - P$ .

**Exemplo 3.4** *Determine a transformação afim que mapeia os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para três pontos  $(2, 3)$ ,  $(1, 6)$  e  $(3, -1)$ , respectivamente*

**Solução:** Seja transformação afim dada por

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Isto é,

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

Dado que  $T(0, 0) = (2, 3)$  segue que

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Em seguida, de  $T(1, 0) = (1, 6)$  segue que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A primeira coluna da matriz para  $T$  é, portanto

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Em seguida, de  $T(0, 1) = (3, -1)$  segue que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A segunda coluna da matriz para  $T$  é, portanto

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Portanto, a transformação afim desejada é dada por

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

■

**Teorema 3.3** (*Teorema Fundamental da Geometria Afim*) *Sejam  $P, Q, R$  e  $P', Q', R'$  dois conjuntos de pontos não colineares em  $\mathbb{R}^2$ . Então:*

1. *Existe uma transformação afim  $T$  que satisfaz*

$$T(P) = P', \quad T(Q) = Q', \quad e \quad T(R) = R'$$

2. *A transformação Afim  $T$  é única.*

**Demonstração:** Veja [5]

■

Agora suponha que temos dois triângulos arbitrários  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ .

Pelo Teorema Fundamental existe uma transformação afim que mapeia  $A, B, C$ , para os vértices  $D, E, F$ , respectivamente.

Como essa transformação mapeia retas em retas, ela deve mapear os lados do  $\triangle ABC$  aos lados do  $\triangle DEF$ , portanto, temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.1** *Todos os triângulos são afins-congruentes.*

**Demonstração:** Segue do Teorema (3.3) e do fato de que as transformações afins levam retas em retas.

Assim, temos uma transformação afim que mapeia um triângulo, vértice a vértice, em outro triângulo. ■

Este resultado é muito diferente do que acontece na Geometria Euclidiana, onde dois triângulos são congruentes se eles tem a mesma forma e o mesmo tamanho.

**Estratégia:**

Para determinar a transformação afim  $T$  que mapeia três pontos não colineares  $P$ ,  $Q$  e  $R$  para outros três pontos não colineares  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$ , respectivamente:

1. Determine a transformação afim  $T_1$  que mapeia  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , respectivamente;
2. Determine a transformação afim  $T_2$  que mapeia  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para os pontos  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$ , respectivamente;
3. Calcule a composta  $T = T_2 \circ T_1^{-1}$ .

**Exemplo 3.5** *Determine a transformação afim que mapeia os pontos  $(2, 3)$ ,  $(1, 6)$  e  $(3, -1)$  para três pontos  $(1, -2)$ ,  $(2, 1)$  e  $(-3, 5)$ , respectivamente.*

**Solução:**

- Encontramos a transformação afim  $T_1$  que mapeia os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para três pontos  $(2, 3)$ ,  $(1, 6)$  e  $(3, -1)$ , respectivamente. Esta transformação tem a forma

$$T_1(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3-2 \\ 6-3 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Isto é,

$$T_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Encontramos a transformação afim  $T_2$  que mapeia os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  para três pontos  $(1, -2)$ ,  $(2, 1)$  e  $(-3, 5)$ , respectivamente. Esta transformação tem a forma

$$T_2(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-1 & -3-1 \\ 1+2 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Isto é,

$$T_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Encontramos a inversa de  $T_1$ .

Temos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -9 \end{pmatrix}$$

De modo que a inversa de  $T_1$  é dada por

$$T_1^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- Agora, a transformação afim  $T_2$  que mapeia os pontos  $(2, 3)$ ,  $(1, 6)$  e  $(3, -1)$  para três pontos  $(1, -2)$ ,  $(2, 1)$  e  $(-3, 5)$ , respectivamente, é dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) \\ &= T_2 \left( \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -25 \\ 96 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -33 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -24 \\ 94 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Definição 3.5 (Espaço Afim)** *Um espaço afim sobre um corpo  $K$  é uma estrutura  $(V, P, +)$ , sendo  $V$  um espaço vetorial sobre  $K$  e  $P$  um conjunto de pontos. A operação  $+$  obedece às seguintes propriedades:*

*Para todos os pontos  $a, b$  e vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ,*

$$I) a + \mathbf{0} = a,$$

$$II) (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

III) *Existe um único vetor  $\mathbf{v}$  tal que  $b = a + \mathbf{v}$  e denotamos este vetor por  $\mathbf{ab}$  ou por  $(\mathbf{b-a})$ .*

Observe que herdamos de  $V$  as operações de soma de vetores e de multiplicação por escalar. Além destas, definimos a operação de soma de ponto com vetor.

**Exemplo 3.6** *Considere o par  $(P = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2)$ , onde chamamos os elementos de  $P$  de pontos e os elementos de  $V$  de vetores. Se considerarmos nele a operação usual de soma de vetores, tanto para somar vetores como para somar pontos, temos um espaço afim.*

De forma geral, considerando em  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  a operação usual de soma de vetores, tanto para somar vetores como para somar pontos, temos que  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  é um espaço afim.

**Exemplo 3.7** *Uma reta  $r$  que não passa na origem não é um espaço vetorial, mas é um espaço afim. Seja  $s$  uma reta paralela a  $r$ , mas passando pela origem. Se olharmos os pontos de  $s$  como coordenadas de vetores, temos que  $s$  pode ser tratado como um espaço vetorial. Somamos os vetores de  $s$  aos pontos de  $r$ . Assim,  $(r, s)$  é um espaço afim.*

**Lema 3.1 (de Chasles)** *Dados três pontos  $a, b, c$  em um espaço afim,  $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} = \mathbf{ac}$ .*

**Demonstração:**

$$b = a + \mathbf{ab} \quad e \quad c = b + \mathbf{bc}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} c &= b + \mathbf{bc} \\ &= (a + \mathbf{ab}) + \mathbf{bc} \\ &= a + (\mathbf{ab} + \mathbf{bc}) \end{aligned}$$

Por outro lado como  $c = a + \mathbf{ac}$ , temos que

$$a + (\mathbf{ab} + \mathbf{bc}) = a + \mathbf{ac}$$

Portanto,

$$\mathbf{ab} + \mathbf{bc} = \mathbf{ac}$$



**Teorema 3.4** *Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n$  pontos em um espaço afim, e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  escalares cuja soma é um. Então, para quaisquer dois pontos  $q$  e  $r$  no espaço,*

$$q + \sum_i \lambda_i \mathbf{qp}_i = r + \sum_i \lambda_i \mathbf{rp}_i$$

**Demonstração:** Para quaisquer pontos  $q$  e  $r$ ,

$$\begin{aligned} q + \sum_i \lambda_i \mathbf{qp}_i &= q + \sum_i \lambda_i (\mathbf{qr} + \mathbf{rp}_i), \\ &= q + \left( \sum_i \lambda_i \right) \mathbf{qr} + \sum_i \lambda_i \mathbf{rp}_i \\ &= q + \mathbf{qr} + \sum_i \lambda_i \mathbf{rp}_i \\ &= r + \sum_i \lambda_i \mathbf{rp}_i \end{aligned}$$

■

Uma combinação afim de vetores é um tipo especial de combinação linear.

**Definição 3.6 (Combinação afim)** *Dados os vetores (ou "pontos")  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  em  $\mathbb{R}^n$  e escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , uma **combinação afim** ou **baricentro** de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  é uma combinação linear*

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

na qual os coeficientes satisfazem  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

**Definição 3.7** *Dados os vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  em  $\mathbb{R}^n$  e escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , uma **combinação convexa** de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  é uma combinação linear*

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

na qual os coeficientes satisfazem  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\forall i$ .

**Teorema 3.5** *Um ponto  $\mathbf{y}$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma combinação afim de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  em  $\mathbb{R}^n$  se e somente se  $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$  for uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$ .*

**Demonstração:** Se  $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$  for uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$ , então existem escalares  $\lambda_2, \dots, \lambda_p$  tais que

$$\mathbf{y} - \mathbf{v}_1 = \lambda_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \dots + \lambda_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1)$$

Assim,

$$\mathbf{y} = (1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{v}_p$$

e os coeficientes desta combinação linear somam 1. Assim,  $\mathbf{y}$  é uma combinação afim de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ .

Reciprocamente, suponha que

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{v}_p$$

onde  $\sum_1 \lambda_i = 1$ .

Como  $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p$  segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= (1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{v}_p \\ \mathbf{y} - \mathbf{v}_1 &= \lambda_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \dots + \lambda_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1)\end{aligned}$$

E temos que,  $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$  for uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$ .

■

Observamos que, no teorema acima, o ponto  $\mathbf{v}_1$  poderia ser substituído por qualquer dos outros pontos da lista  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ .

## 4 DEFORMAÇÕES E MORFISMOS

Os resultados que apresentaremos neste capítulo foram adaptados das obras de Anton et al. [1], CONCEIÇÃO [5] e FRIZZO [6]

### Deformação simples

Consideremos uma região triangular no plano, cujos vértices são os três pontos não colineares  $v_1, v_2$  e  $v_3$ . Vamos identificar este triângulo como o **triângulo inicial**.

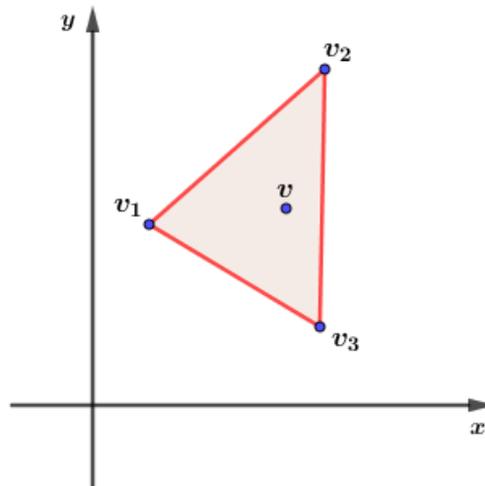


Figura 30 – Triângulo Inicial

Se  $v$  for um ponto qualquer no triângulo inicial, existem constantes únicas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$v - v_3 = c_1(v_1 - v_3) + c_2(v_2 - v_3) \quad (4.1)$$

A equação (4.1) dá o vetor  $v - v_3$  como uma única combinação linear dos dois vetores linearmente independentes  $v_1 - v_3$  e  $v_2 - v_3$  em relação a uma origem em  $v_3$ .

Podemos escrever (4.1) como

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + (1 - c_1 - c_2)v_3$$

Considerando  $c_3 = 1 - c_1 - c_2$ , temos que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 c_i = 1 \quad (4.2)$$

Se (4.2) é válida e se além disso, os coeficientes  $c_1, c_2$  e  $c_3$  forem não negativos, diremos que  $v$  é uma **combinação convexa** dos vetores  $c_1, c_2$  e  $c_3$ .

Dados três pontos não colineares  $w_1, w_2$  e  $w_3$  vértices de um triângulo denominado **triângulo final**, existe uma única **transformação afim** que transforma  $v_1$  em  $w_1$ ,  $v_2$  em  $w_2$  e  $v_3$  em  $w_3$ .

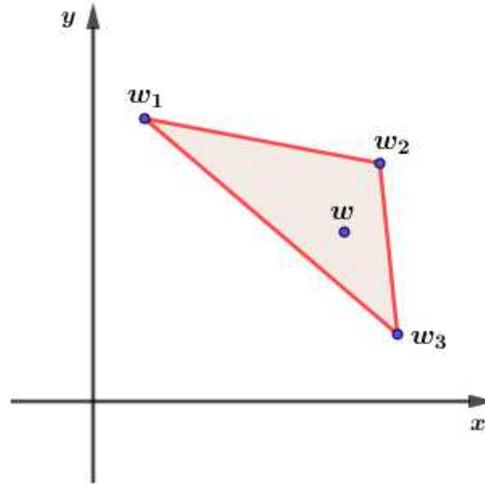


Figura 31 – Triângulo Final

Ou seja, existem uma única matriz  $2 \times 2$  invertível  $A$  e um único vetor  $b$  tais que

$$w_i = Av_i + b \quad (4.3)$$

Por esta transformação afim, a imagem  $w$  do vetor  $v$  é

$$w = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 \quad (4.4)$$

Sendo esta uma das propriedades da transformação afim, aplicamos uma mesma combinação convexa de vetores tanto ao vetor como à sua imagem pela transformação. Além disso, uma transformação afim mantém retas originalmente paralelas e preserva colinearidade entre elas.

Agora suponhamos que o triângulo inicial contenha uma imagem dentro dele. Ou seja, a cada ponto do triângulo inicial está associado a um nível de cinza, digamos, 0 para o branco e 100 para o preto, com todos os níveis de cinza variando no intervalo  $[0, 100]$ . Ou seja, é definida uma função escalar  $\rho_0$ , denominada **densidade de imagem** do triângulo inicial, de tal modo que  $\rho_0(v)$  seja o nível de cinza associado ao ponto  $v$  do triângulo inicial. Podemos definir uma imagem no triângulo final, denominada **deformação** da imagem original, definindo a densidade de imagem  $\rho_1$  do triângulo final a um ponto  $w$  do triângulo final o nível de cinza do ponto  $v$  do triângulo inicial que é transformado em  $w$ .

Em forma de equação, a densidade de  $\rho_1$  é determinada por

$$\rho_1(w) = \rho_0(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \quad (4.5)$$

Desse modo, à medida que  $c_1, c_2, c_3$  variam sobre todos os valores não negativos cuja soma é 1, a expressão (4.4) gera todos os pontos  $w$  do triângulo final e (4.5) gera os correspondentes níveis de cinza  $\rho_1(w)$  desses pontos da imagem deformada.

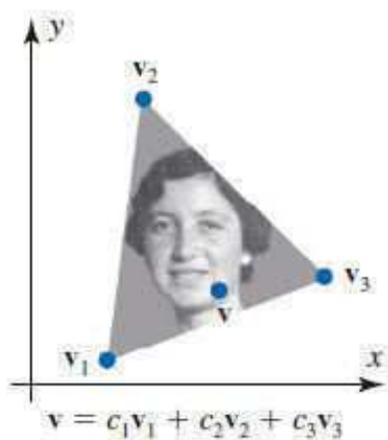


Figura 32 – Triângulo Inicial com Imagem

Fonte: Anton (2012)

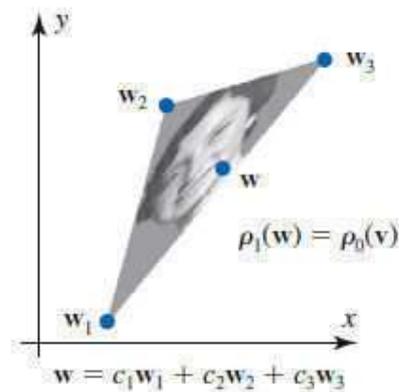


Figura 33 – Triângulo Final com Imagem

Fonte: Anton (2012)

A equação (4.5) determina uma deformação muito simples de uma imagem dentro de um único triângulo.

## Estratégia para Implementação de Morfismo

Aqui será apresentado o algoritmo de morfismo baseado na descrição de Anton e Rorres (2012), que expõe os passos a serem seguidos de forma clara e objetiva.

Precisamos escolher os elementos chave da imagem que pretende-se deformar. Essa marcação de pontos pode seguir outros critérios, de acordo com o efeito desejado. Para isso, deve-se marcar  $n$  pontos  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  na imagem, que serão chamados de pontos de vértice (ver Figura 34).

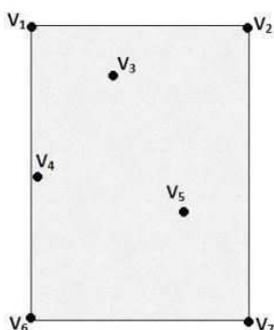


Figura 34 – Marcação de Pontos na Figura

Após escolher os pontos, é preciso executar uma triangulação da imagem (ver Figura 35), que consiste em traçar retas entre os pontos de vértice respeitando as seguintes regras:

1. As retas devem formar os lados de uma coleção de triângulos;
2. As retas não podem se cruzar;
3. Cada ponto de vértice é o vértice de pelo menos um triângulo;
4. A união dos triângulos é o retângulo. Essa regra obriga que os quatro cantos do retângulo sejam pontos de vértice;
5. A coleção de triângulos é máxima, ou seja, não restam vértices para conectar.

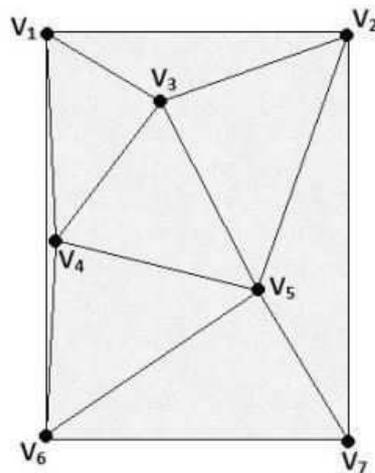


Figura 35 – Exemplo de triangulação correta

A quantidade de triângulos formados pelos  $n$  vértices é dada pela equação

$$m = 2n - 2 - k \tag{4.6}$$

onde  $k$  é o número de vértices que se encontram nas fronteiras da imagem, incluindo os 4 pontos presentes nos cantos.

A deformação na imagem é dada pelo movimento dos  $n$  vértices para as novas posições  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  (ver Figura 36), de acordo com as mudanças que deseja-se efetuar (ANTON e RORRES, 2012).

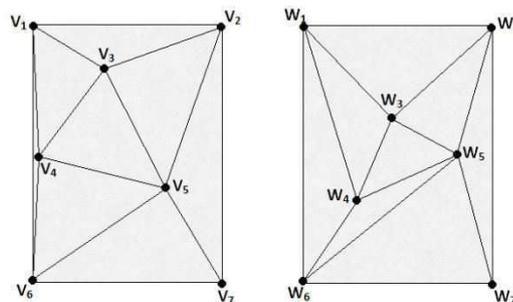


Figura 36 – Deformação entre imagens

Existem duas restrições que envolvem a movimentação dos pontos. São elas

1. Os quatro pontos que definem o retângulo devem permanecer fixos, da mesma forma que todos os pontos situados nas fronteiras da imagem também devem permanecer, ou podem no máximo mover-se para outro lugar no mesmo lado do retângulo. Todos os demais pontos devem permanecer dentro do retângulo.
2. Os triângulos formados inicialmente não podem ficar sobrepostos depois de executada a movimentação dos vértices, ou seja, os pontos não podem se movimentar de uma forma que gere cruzamento das linhas dos polígonos, como mostra a Figura 37.

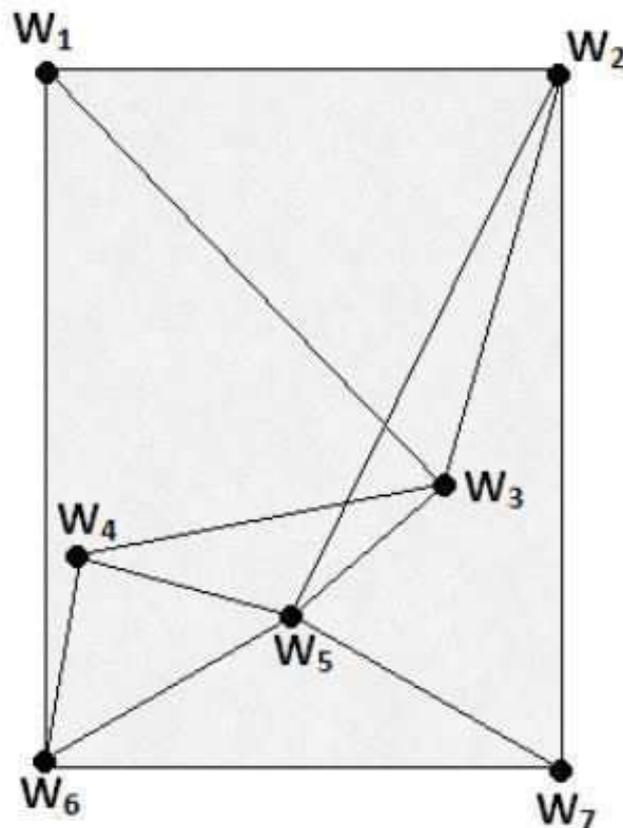


Figura 37 – Exemplo de movimentação não permitida (Cruzamento de linhas)

A primeira restrição garante que a imagem continuará com a forma retangular inicial. A segunda restrição garante que a imagem resultante não tenha um resultado artificial (ANTON e RORRES, 2012).

A Figura 38 mostra duas fotografias da mesma mulher, sendo que a Imagem inicial foi tirada 20 anos antes da Imagem Final.



Figura 38 – Duas fotografias com intervalo de 20 anos

A partir delas, foram geradas duas triangulações, uma baseada na [Imagem Inicial](#) e outra baseada na [Imagem Final](#) (ver Figura 39). Foram usados 94 vértices, que geraram 179 triângulos. Note que os pontos foram cuidadosamente escolhidos ao longo das características essenciais da imagem, como olhos, nariz, boca e cabelo (ANTON e RORRES, 2012).

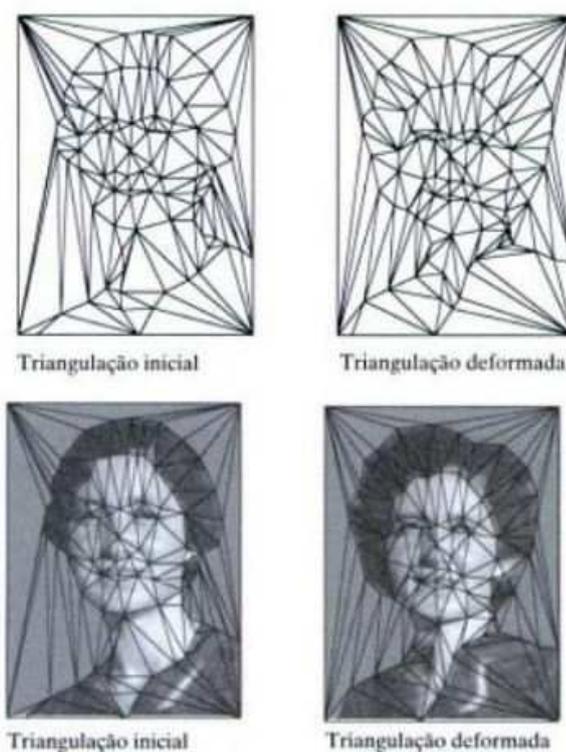


Figura 39 – Triangulação nas Imagens

A partir dessas duas triangulações, a imagem inicial foi deformada, e o resultado pode ser visto na Figura 40. É importante ressaltar que ainda não ocorreu o morfismo em si, mas sim apenas uma deformação da Imagem Inicial, que tomou a forma e as feições da Imagem Final, pois a Imagem deformada representa a mulher no seu formato mais velho, mas usando os níveis de cinza de quando era mais jovem (ANTON e RORRES, 2012).



Figura 40 – Resultado da Deformação

Deformações dependentes do tempo são geradas quando os vértices de uma imagem inicial são movidos continuamente durante um período de tempo da sua posição original até posições finais especificadas. Isso gera uma animação na qual uma imagem inicial é deformada continuamente até chegar em um estado final. A unidade de tempo escolhida varia de 0 a 1, onde  $t = 0$  corresponde a imagem inicial e  $t = 1$  corresponde a imagem final. Para mover um vértice do instante de tempo 0 para o instante de tempo 1, usam-se retas geradas por uma interpolação linear ligando as posições iniciais com as posições finais (ANTON e RORRES, 2012).

A Figura 41 mostra uma deformação dependente do tempo com 5 valores entre 0 e 1.



Figura 41 – Exemplo de Deformação no tempo

O morfismo pode ser definido como a combinação de duas deformações de duas imagens diferentes, que associam características correspondentes entre elas. Então escolhemos uma delas

para ser chamada de imagem inicial, fazendo com que a outra seja chamada de imagem final. Depois disso, gera-se uma deformação de  $t = 0$  a  $t = 1$  onde a imagem inicial será deformada para a forma da imagem final. Após isso, gera-se uma deformação de  $t = 0$  a  $t = 1$  na qual a imagem final será deformada para a forma da imagem inicial. Por fim, para gerar o morfismo propriamente dito, em cada instante  $t$  entre 0 e 1 aplica-se uma média ponderada dos níveis de cinza das duas imagens. Essa média ponderada possui o mesmo conceito do mixing, só que em vez de aplicar o mixing a toda a imagem, ele é aplicado apenas dentro de cada região deformada. Resumidamente, pode-se afirmar que o morfismo é a junção de duas técnicas, a técnica de deformação e a técnica de mixing. A Figura 42 mostra a versão com morfismo da Figura 41.



Figura 42 – Exemplo de morfismo no tempo

Os passos para produzir o morfismo são apresentados a seguir:

1. Dados uma imagem inicial  $p_0$  e uma imagem final  $p_1$ , posicionam-se  $n$  pontos de vértice  $v_1, v_2, \dots, v_n$  nas principais características da imagem inicial;
2. Posicionam-se  $n$  pontos de vértice correspondentes a  $w_1, w_2, \dots, w_n$  na imagem final nas principais características;
3. Desenha-se a malha, traçando retas entre os pontos de vértice;
4. Para cada instante de tempo  $t$  entre 0 e 1, encontra-se a posição dos vértices  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  por meio de uma interpolação linear.
5. Triangula-se o morfismo da imagem do instante  $t$  de maneira similar as triangulações das imagens inicial e final;
6. Determina-se o mapeamento (morfismo) entre a imagem inicial e imagem no instante  $t$  por meio da técnica de mapeamento.

7. Finalmente determina-se a coloração da imagem  $p_l(u)$  no ponto  $u$  do morfismo da imagem usando a equação

$$p_l(u) = (1 - t)p_0(v) + tp_1(w) \tag{4.7}$$

A Figura exemplifica os passos descritos acima

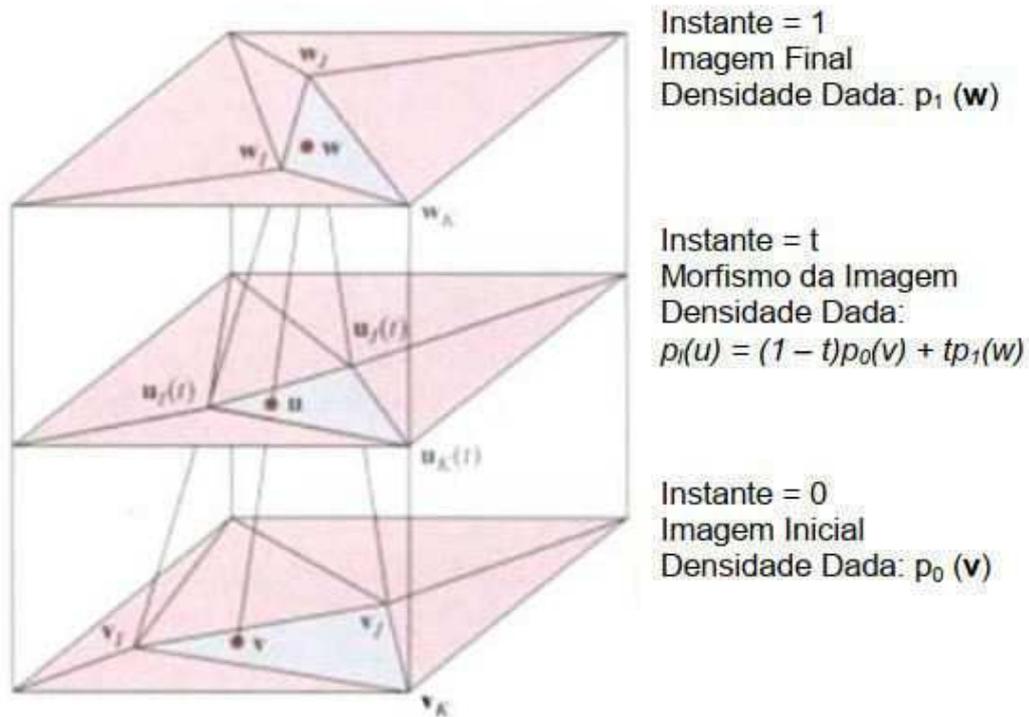


Figura 43 – Exemplificação do algoritmo de morfismo

O último passo é o que difere deformações de morfismos. O peso das cores depende do fragmento de distância que os vértices se encontram das suas origens. Por exemplo, se o vértice se movimentou um quarto do caminho até seu destino, ou seja,  $t = 0,25$ , então deve-se usar três quartos do nível de cinza da imagem inicial e apenas um quarto de cinza da imagem final. Assim, conforme o tempo avança, além da forma da imagem inicial mudar gradativamente para a forma da imagem final, as cores também vão mudando gradativamente, até chegarem nas cores da imagem final (ANTON e RORRES, 2012).

## 4.1 Aplicações

### Aplicações de Morfismos no plano

Representando os vértices da imagem inicial como uma matriz de pontos estendida  $I$  e os vértices da imagem final como uma matriz de pontos estendida  $F$ , então a matriz de Transição  $T$  entre  $I$  e  $F$  pode ser definida por:

$$T(k) = I + k(F - I), \quad k \in [0, 1]$$

Além disso, se  $k = 0$  teremos  $T(0) = I$ , se  $k = 1$  obtemos  $T(1) = F$  que são as imagens inicial e final respectivamente.

Sendo assim, para utilizar a fórmula do morfismo precisamos que a matriz de pontos estendida dos vértices da figura inicial  $I$  e a matriz estendida dos pontos de vértices da figura final  $F$  tenham a mesma ordem.

Logo, afim de verificação para efetuar o morfismo das imagens da Figura 44 e Figura 45, para  $k \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9\}$  utilizemos o programa Excel para fazer a transição de uma imagem à outra.

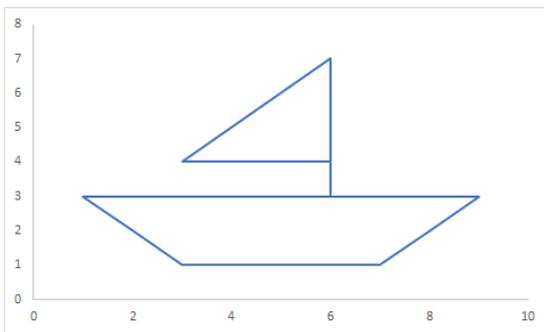


Figura 44 – Veleiro

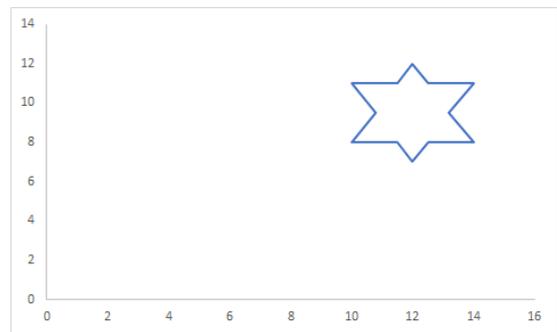


Figura 45 – Estrela

Onde as matrizes de ponto inicial e final são dadas respectivamente por:

$$I = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 6 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 10 & 11,5 & 12 & 12,5 & 14 & 13,2 & 14 & 12,5 & 12 & 11,5 & 10 & 10,8 & 10 \\ 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9,5 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 9,5 & 8 \end{pmatrix}$$

Para gerar as matrizes de pontos dos morfismos iremos agora inserir-las no Excel da seguinte maneira:

**Estratégia:**

1. Inserimos a matriz  $I$  nas células que vão de  $E2$  até  $Q3$  e a matriz  $F$  nas células que vão de  $E5$  até  $Q6$ ;
2. Na célula  $E8$  insira a fórmula  $= E\$2 + \$C8 * (E\$5 - E\$2)$
3. Na célula  $E9$  insira a fórmula  $= E\$3 + \$C8 * (E\$6 - E\$3)$
4. Selecione as células  $E8$  e  $E9$  (clikando com o botão esquerdo do mouse em  $E8$  e arrastando o mouse até  $E9$ , mantendo o botão do mouse pressionado) e copie para as células ao lado até a coluna  $Q$ , desta forma a matriz  $T(0, 1)$  estará nas células que vão de  $E8$  até  $Q9$ ;
5. Nas células  $C11, C14, C17, C20, C23, C26, C29$  e  $C32$ , inserimos os demais valores de  $k$ , respectivamente,  $0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8$  e  $0, 9$ ;
6. Para finalizar os cálculos, selecionamos as células que vão de  $E8$  até  $Q9$  (clikando com o botão esquerdo do mouse em  $E8$  e arrastando o mouse até  $Q9$ , mantendo o botão esquerdo do mouse pressionado) então clicamos, com o botão direito do mouse, nas células  $E11.E14, E17, E20, E23, E26, E29$  e  $E32$  e selecionamos colar, em cada uma delas.

Realizado o procedimento anterior obtemos as seguintes matrizes de pontos conforma podem ser vistas na Figura abaixo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
2	<b>Matriz de Pontos</b>				6	1	2	3	5	7	8	9	6	6	6	3	6	
3	<b>Figura Inicial</b>				3	3	2	1	1	1	2	3	3	5	7	4	4	
4																		
5	<b>Matriz de Pontos</b>				10	11,5	12	12,5	14	13,2	14	12,5	12	11,5	10	10,8	10	
6	<b>Figura Final</b>				8	8	7	8	8	9,5	11	11	12	11	11	9,5	8	
7																		
8				0,1	6,4	2,05	3	3,95	5,9	7,82	8,6	9,35	6,6	6,95	6,4	3,78	6,4	
9					3,5	3,5	2,5	1,7	1,7	1,85	2,9	3,8	3,9	5,6	7,4	4,95	4,4	
10																		
11				0,2	6,8	3,1	4	4,9	6,8	8,24	9,2	9,7	7,2	7,1	6,8	4,56	6,8	
12					4	4	3	2,4	2,4	2,7	3,8	4,6	4,8	6,2	7,8	5,1	4,8	
13																		
14				0,3	7,2	4,15	5	5,85	7,7	8,86	9,8	10,05	7,8	7,65	7,2	5,34	7,2	
15					4,5	4,5	3,5	3,1	3,1	3,95	4,7	5,4	5,7	6,8	8,2	5,65	5,2	
16																		
17				0,4	7,6	5,2	6	6,8	8,6	9,48	10,4	10,4	8,4	8,2	7,6	6,12	7,6	
18					5	5	4	3,8	3,8	4,4	5,6	6,2	6,6	7,4	8,6	6,2	5,6	
19																		
20				0,5	8	6,25	7	7,75	9,5	10,1	11	10,75	9	8,75	8	6,9	8	
21					5,5	5,5	4,5	4,5	5,25	6,5	7	7,5	8	9	6,75	6		
22																		
23				0,6	8,4	7,3	8	8,7	10,4	10,72	11,6	11,1	9,6	9,3	8,4	7,68	8,4	
24					6	6	5	5,2	5,2	6,1	7,4	7,8	8,4	8,6	9,4	7,3	6,4	
25																		
26				0,7	8,8	8,35	9	9,65	11,3	11,34	12,2	11,45	10,2	9,85	8,8	8,46	8,8	
27					6,5	6,5	5,5	5,9	5,9	6,95	8,3	8,6	9,3	9,2	9,8	7,85	6,8	
28																		
29				0,8	9,2	8,4	10	10,6	12,2	11,96	12,8	11,8	10,8	10,4	9,2	9,24	9,2	
30					7	7	6	6,6	6,6	7,8	9,2	9,4	10,2	9,8	10,2	8,4	7,2	
31																		
32				0,9	9,6	10,45	11	11,55	13,1	12,58	13,4	12,15	11,4	10,95	9,6	10,02	9,6	
33					7,5	7,5	6,5	7,3	7,3	8,65	10,1	10,2	11,1	10,4	10,6	8,95	7,6	
34																		

Figura 46 – Matrizes de Pontos

Por outro lado, para cada uma destas matrizes precisamos gerar um gráfico para isso, é necessário seguir as seguintes etapas:

**Estratégia:**

1. Selecione as células que contém a matriz  $I$  (de  $E2$  até  $Q3$ ), depois ao clicando em **Inserir**, em seguida, **Dispersão** nas opções de **Gráficos** e **Dispersão com linhas e retas** (sem marcadores);
2. Analogamente obtêm-se as demais imagens através do procedimento anterior.

Assim obtemos o conjunto de imagens abaixo que variam no intervalo de tempo  $k \in [0, 1]$ , ou mais especificamente, da figura inicial à final:

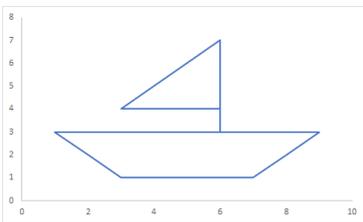


Figura 47 – Imagem para  $k = 0$

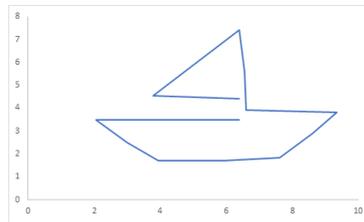


Figura 48 – Imagem para  $k = 0,1$

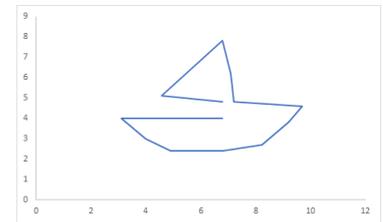


Figura 49 – Imagem para  $k = 0,2$

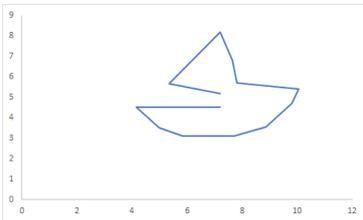


Figura 50 – Imagem para  $k = 0,3$

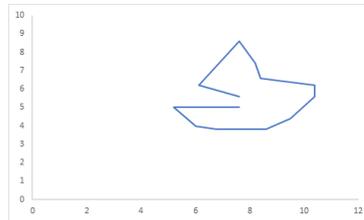


Figura 51 – Imagem para  $k = 0,4$

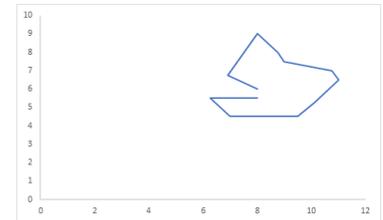


Figura 52 – Imagem para  $k = 0,5$

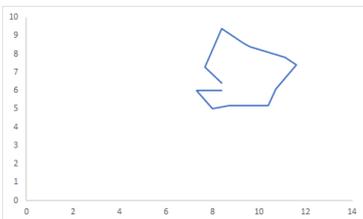


Figura 53 – Imagem para  $k = 0,6$

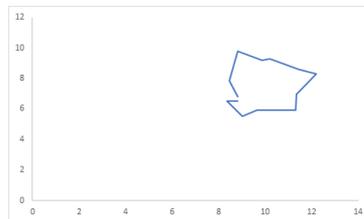


Figura 54 – Imagem para  $k = 0,7$

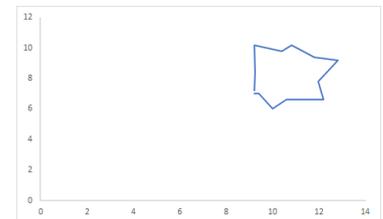


Figura 55 – Imagem para  $k = 0,8$

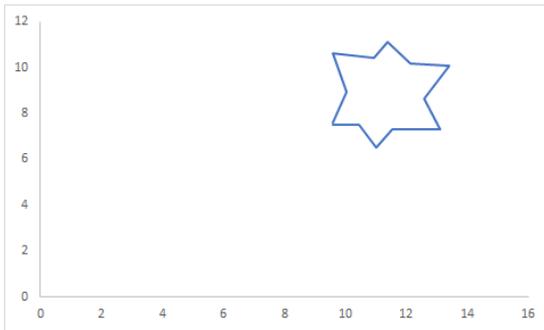


Figura 56 – Imagem para  $k = 0,9$

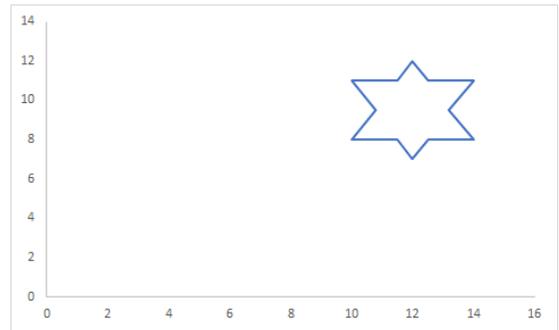


Figura 57 – Imagem para  $k = 1$

Por fim, para obtermos um processo de animação podemos fazer uma programação numa apresentação de slides através do Powerpoint que gera uma animação da transições de imagens através da ferramenta de avanço automático "**Avançar Slide Automaticamente**", ou simplesmente podemos dispor estas imagens numa apresentação e passá-las gradualmente por um processo manual.

A fim de verificação, com outra representação matricial podemos fazer determinadas distorções de uma imagem do seguinte modo:

- 1) Descreva o efeito que o cisalhamento vertical de fator  $\alpha = 2$  provoca na figura.

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 18 & 21 & 29 & 27 & 32 & 45 & 48 & 31 & 34 & 37 & 41 & 42 & 38 & 40 & 30 & 28 & 24 & 23 & 27 & 24 & 25 & 8 & 7 & 19,5 & 16 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

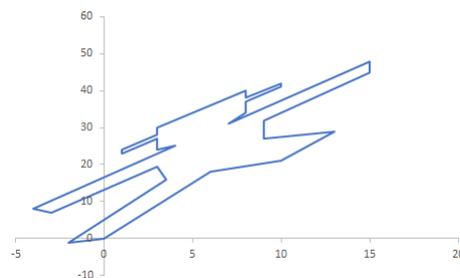


Figura 58 – Cisalhamento vertical de fator  $\alpha = 2$

2 Os seguintes pontos são vértices de uma figura, então podemos representar a matriz de pontos na planilha eletrônica e descobrir qual é figura descrita pelos pontos (0, 0), (6, 6), (10, 1), (13, 3), (9, 9), (8, 18), (8, 21), (10, 21), (10, 21), (8, 22), (8, 24), (3, 24), (3, 22), (1, 21), (3, 21), (3, 18), (4, 17), (-4, 16), (-3, 13), (3, 13, 5), (3, 5, 9), (-2, 3), (0, 0).

Isto é,

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

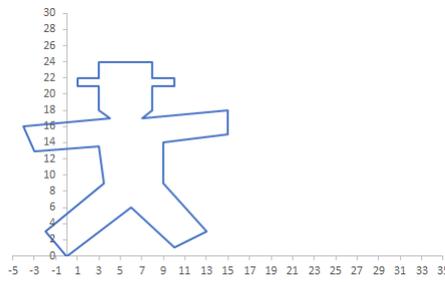


Figura 59 – Figura inicial

3. Efetuamos agora as seguintes transformações na figura do exercício anterior:

a) Contração proporcional de fator  $k = 0,5$ .

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 6,5 & 4,5 & 4,5 & 7,5 & 7,5 & 3,5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 1,5 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 1,5 & 1,5 & 2 & -2 & -1,5 & 1,5 & 1,75 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0,5 & 1,5 & 4,5 & 7 & 7,5 & 9 & 8,5 & 9 & 10,5 & 10,5 & 11 & 11 & 12 & 12 & 11 & 11 & 10,5 & 10,5 & 9 & 8,5 & 8 & 6,5 & 6,75 & 4,5 & 1,5 & 0 \end{pmatrix}$$

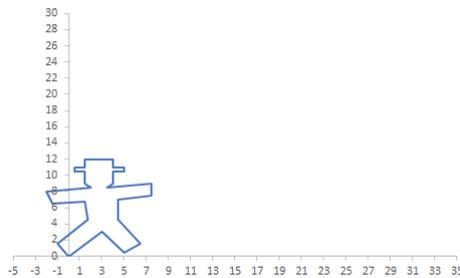


Figura 60 – Contração proporcional de fator  $k = 0,5$ .

b) Dilatação de fator  $k = 1,5$  do eixo dos  $x$ .

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 & 19,5 & 13,5 & 13,5 & 22,5 & 22,5 & 10,5 & 12 & 12 & 15 & 15 & 12 & 12 & 4,5 & 4,5 & 1,5 & 1,5 & 4,5 & 4,5 & 6 & -6 & -4,5 & 4,5 & 5,25 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

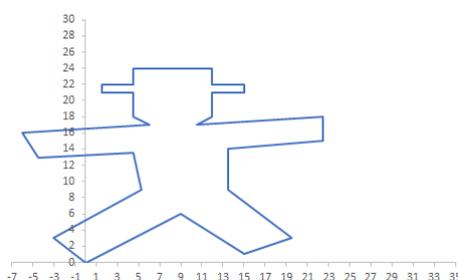


Figura 61 – Dilatação de fator  $k = 1,5$  do eixo dos  $x$

c) Rotação de um ângulo  $\theta = \pi$  no sentido anti-horário.

Matriz de Transformação 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & -3 & -9 & -14 & -15 & -18 & -17 & -18 & -21 & -21 & -22 & -22 & -24 & -24 & -22 & -22 & -21 & -21 & -18 & -17 & -16 & -13 & -13,5 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

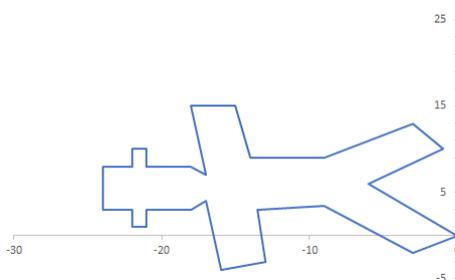


Figura 62 – Rotação de um ângulo  $\theta = \pi$  no sentido anti-horário

d) Reflexão no eixo  $y$  seguida de uma rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{Matriz de Transformação} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & -0,7 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,7 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6,3 & -7 & 0 & 3,5 & 0 & 2,1 & 7 & 7 & 9,1 & 7,7 & 8,4 & 9,8 & 11,2 & 14,7 & 13,3 & 14,7 & 14 & 12,6 & 10,5 & 9,1 & 14 & 11,2 & 7,35 & 3,85 & 3,5 & 0 \\ 0 & 8,4 & 7,7 & 11,2 & 12,6 & 16,1 & 21 & 23,1 & 16,8 & 18,2 & 20,3 & 21,7 & 22,4 & 21 & 22,4 & 18,9 & 17,5 & 16,1 & 15,4 & 16,8 & 14,7 & 14,7 & 8,4 & 7 & 11,55 & 8,75 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}$$

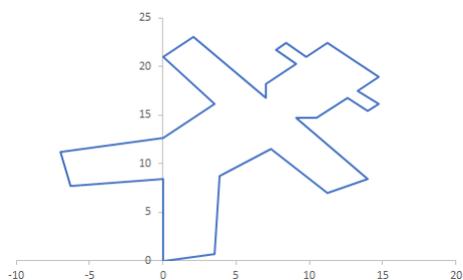


Figura 63 – Reflexão no eixo  $y$  seguida de uma rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$

e) Translação segundo a coordenada (2, 3).

$$\text{Matriz de Transformação} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & -0,7 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,7 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3,5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13,5 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontos da figura Final

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 & 15 & 11 & 11 & 17 & 17 & 9 & 10 & 10 & 12 & 12 & 10 & 10 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 6 & -2 & -1 & 5 & 5,5 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & 6 & 12 & 17 & 18 & 21 & 20 & 21 & 24 & 24 & 25 & 25 & 27 & 27 & 25 & 25 & 24 & 24 & 21 & 20 & 19 & 16 & 16,5 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

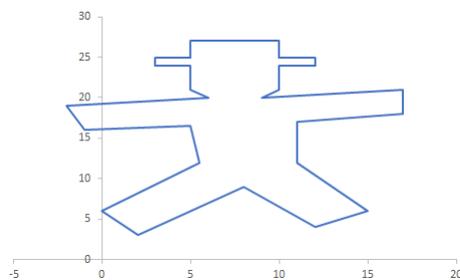


Figura 64 – Translação segundo a coordenada (2, 3)

# CONCLUSÃO

Deformação e morfismo de imagens são técnicas usadas em muitas áreas, que vão desde efeitos especiais usados no cinema, à assistência a cirurgia plástica e ao envelhecimento de fotografias, usado para auxiliar a encontrar pessoas desaparecidas há muito tempo e também foragidos da polícia. Isso é possível definindo-se características que determinam o envelhecimento e transferindo essas características a uma imagem através de um formato de malha apropriado. Para além disso, na sua construção são usados conceitos como a independência linear e combinações lineares e convexas. Concluindo, é indiscutível a contribuição de Álgebra Linear nestes conceitos, sem a qual estes dificilmente seriam desenvolvidos. No futuro, iremos presenciar a evolução e criação de vastas outras técnicas, cuja existência é permitida não só, mas principalmente, pela Álgebra Linear.

# REFERÊNCIAS

- ANTON, H. *Álgebra linear com aplicações*. 10.ed. Porto Alegre. Bookman, 2012.
- ANTON, H. *Álgebra linear contemporânea*. 8.ed. Porto Alegre. Bookman, 2007.
- BOLDRINI, J. L. *Álgebra linear*. Harper & Row do Brasil, 1980.
- BRANNAN, David A.; ESPLEN, Matthew F.; GRAY, Jeremy J. *Geometry*. In:Cambridge University Press. New York, USA. 2012.
- CONCEIÇÃO, Marcos Roberto Fonseca. *Transformações no plano : uma aplicação do estudo de matrizes com o uso de planilhas eletrônicas*. Orientador: Msc. Eneilson Campos Fontes. 2013. Dissertação(Mestrado)-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande/RS. 2013 Disponível em [http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6689/marcos\\_final.pdf?sequence=1](http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6689/marcos_final.pdf?sequence=1)
- FRIZZO, Gustavo Francisco. *Algoritmo Paralelo para Morfismo de Imagem em Arquitetura Multiprocessada* Orientador: Msc. Gilmário Barbosa dos Santos. 2011. Dissertação(Trabalho de Conclusão de Curso), Universidade do Estado de Santa Catarina/SC. 2011 Disponível em <https://github.com/gustavofrizzo/ParallelMorphing>
- GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra Linear*. 3ª ed João Pessoa: Editora Edgard Blücher Ltda, 1988.
- LIMA, E.L. *Álgebra Linear*. 7ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2008.
- SILVA, A. A. *Introdução à Álgebra Linear*. João Pessoa: Ed. Universitária/UFPB, 2007.
- STEINBRUCH, A. *Álgebra linear*. 2ª ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 1987.