



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PATRÍCIA NAIARA ARAÚJO UCHÔA

IDENTIDADES E POLINÔMIOS CENTRAIS COM INVOLUÇÃO PARA A
ÁLGEBRA $M_{1,1}(E)$

CAMPINA GRANDE – PB

2022

**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática**

Patrícia Naiara Araújo Uchôa

**Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a
Álgebra $M_{1,1}(E)$**

Trabalho apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Campina Grande - PB, fevereiro de 2022
Curso de Mestrado em Matemática

U19i Uchôa, Patrícia Naiara Araújo.
Identidades e polinômios centrais com involução para a álgebra
 $M_{1,1}(E)$ / Patrícia Naiara Araújo Uchôa. – Campina Grande, 2022.
69 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia,
2022.

"Orientação: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior".
Referências.

1. Álgebra. 2. Álgebras com Involução. 3. Identidades
Polinomiais. 4. Polinômios Centrais. I. Araújo, Gustavo da Silva.
II. Título.

CDU 512(043)

Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra $M_{1,1}(E)$

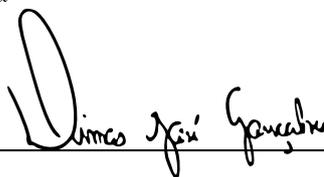
por

Patrícia Naiara Araújo Uchôa

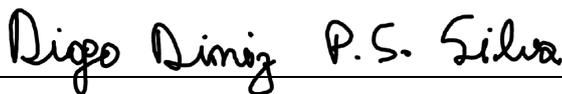
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:



Prof. Dr. Dimas José Gonçalves



Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva



Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2022

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao professor Brandão por ter aceitado orientar o trabalho. Professor, sua paciência e compreensão com todas as dificuldades que passei durante esse período de pandemia e problemas pessoais foram grandes incentivadores para mim.

Agradeço também à minha família, principalmente meus irmãos, Natália, Juliana e Cesar, que estiveram me acompanhando e incentivando durante toda essa jornada.

Agradeço também a Silmara, uma grande amiga que esteve ao meu lado durante todos os momentos dessa jornada.

Aos colegas José Lucas, Geisa e Caio, que foram extremamente acolhedores quando comecei o curso, e estavam sempre dispostos a ajudar.

Aos colegas Eduardo e José Marcos que me acompanharam em disciplinas durante a pandemia, e me fizeram sentir menos sozinha durante o tempo em que fiquei em Campina Grande. Aos professores da FECLI, Wanderlândia, Enio, Gladeston e Jeanne, que foram fundamentais nessa jornada.

Finalmente, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Obrigada!

Resumo

Neste trabalho estudamos a álgebra com involução $(M_{1,1}(E), *)$, onde $*$ é a involução induzida pela superinvolução transposição da superálgebra das matrizes de ordem 2 sobre um corpo, suas identidades polinomiais e seus polinômios centrais com involução. Nosso objetivo é determinar um conjunto finito de geradores do ideal das identidades polinomiais com involução e também um conjunto de polinômios que, junto com as identidades, geram o espaço dos polinômios centrais com involução para $M_{1,1}(E)$, sobre um corpo de característica zero.

Palavras chave: Álgebras com involução, identidades polinomiais, polinômios centrais.

Abstract

In this dissertation, we study the algebra with involution $(M_{1,1}(E), *)$, where $*$ is the involution induced by the transposition superinvolution of the superalgebra of matrices of order 2 over a field, their polynomial identities and their central polynomials with involution. Our goal is to determine a finite set of generators of the ideal of polynomial identities with involution and also a set of polynomials that, together with the identities, generate the space of the central polynomials with involution to $M_{1,1}(E)$, over a field with characteristic zero.

Key words: Algebras with involution, polynomial identities, central polynomials.

Sumário

1	Conceitos Prévios	12
1.1	Álgebras	12
1.2	PI-Álgebras	16
1.3	Álgebras com Involução	20
1.4	Polinômios *-Próprios	25
1.5	Superálgebras e Superinvoluções	29
2	Identidades Polinomiais com Involução de $M_{1,1}(E)$	31
2.1	Um T_* -Ideal Gerado por *-Identidades Polinomiais de $M_{1,1}(E)$	36
2.2	Os Geradores do Espaço $\Gamma_{l,m}(I)$	39
2.3	A Independência Linear	48
3	Polinômios Centrais com Involução para $M_{1,1}(E)$	56
3.1	Polinômios Centrais *-Próprios de $M_{1,1}(E)$	58
3.2	Polinômios *-Centrais para $M_{1,1}(E)$	64

Introdução

Um anel com identidades polinomiais (*PI-ring*) é um anel R que satisfaz uma identidade polinomial $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ para qualquer substituição das indeterminadas x_i por elementos de R . Os primeiros resultados nessa área aparecem no trabalho *Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme* de Dehn, publicado em 1922 ([3]). A introdução moderna foi iniciada por Kaplansky em 1948 com seu trabalho *Rings with a polynomial identity*, baseado nos métodos introduzidos por Jacobson, em 1945, e Levitzki, em 1946.

Existem três principais raízes da teoria de identidades polinomiais: a base da geometria projetiva, a teoria de equações e a comutatividade de anéis.

Dehn se interessou na lacuna apresentada entre os teoremas de Desargue e de Pappus, que são dois dos principais teoremas da geometria projetiva (linear). Em [9], seu trabalho de 1922, Dehn prova que qualquer teorema que leva a uma relação polinomial $\sum \alpha_{i_k} x_1^i x_2 x_1^k = 0$ (em característica zero) em um anel com divisão D , implica comutatividade e isso significa que o teorema de Pappus é válido nessa geometria.

Os resultados de Dehn em 1922 levaram para o próximo trabalho em PI-teoria, *Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie and allgemeine Zahlssysteme* de Wagner, publicado em 1936. Este trabalho é estruturado de forma parecida com trabalhos mais modernos de PI-teoria, inclusive, nele Wagner trabalha com matrizes genéricas, uma ferramenta importante no estudo da PI-teoria.

O próximo trabalho com resultados da PI-teoria e raízes na geometria é o trabalho de Hall, publicado em 1943, *Projective planes*. Esse trabalho de Hall fala sobretudo de geometria, mas apresenta alguns resultados introdutórios da PI-teoria moderna. Acreditamos que o longo espaço de tempo entre os três trabalhos citados é devido a falta de uma teoria abstrata de anéis na época.

Outra fonte importante da PI-teoria foi a generalização da lei comutativa: Em 1947, F.W. Levi afirmou que a lei comutativa $x_1 x_2 - x_2 x_1$ tem uma generalização natural nas identidades $S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, onde $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação sigma, conhecidas como identidades standard. Um anel R teria posto de comutatividade $\text{Roc} \leq n$ se satisfazia $S_n[X]$, e Levi provou que $\text{Roc}[M_n(K)] \leq n^2 - 1$. Independentemente, Kolchin trouxe para Kaplansky que o menor r_n tal que $S_{r_n}[X] = 0$ em $M_n(K)$ deve ser tal que $2n \leq r_n \leq n^2 + 1$. Isso imediatamente levantou a conjectura que $r_n = 2n$, o que foi provado em 1950 em [2], no que hoje conhecemos como o teorema de Amitsur-Levitzki.

Por fim, uma terceira fonte para a PI-teoria pode ser encontrada no trabalho *Equations over a division algebra* de Richardson, publicado em 1928, cujos problemas foram depois abordados por Littelwood em seu trabalho *Identical relations in algebra* de 1931. Seus pontos de vista levaram para a noção generalizada de identidades polinomiais, que surpreendentemente, se tornaram uma importante ferramenta ao tratar de relações racionais.

Polinômios centrais são utilizados na demonstração de certos resultados, por exemplo, em [18], Rowen mostra que todo PI anel semiprimo qualquer ideal não nulo intersecta o centro de forma não trivial. Por sua vez, esse resultado é utilizado na prova do Teorema de Posner (ver seção 1.11 de [12]). O problema de sua existência para álgebra de matrizes foi levantando por Kaplansky em [15], sendo resolvido de forma independente por Formanek em 1972 e Razmyslov em 1973. Entretanto, geradores para os polinômios centrais são conhecidos em poucos casos. Para a álgebra $M_2(K)$, os conjuntos geradores dos polinômios centrais foram determinados, quando K é um corpo de característica zero, por Okhitin em 1988, e quando K é um corpo infinito com característica $p \neq 2$ por Colombo e Koshlukov em 2004.

Atualmente, pesquisadores buscam estender resultados conhecidos para álgebras com alguma estrutura suplementar, como involuções. Por exemplo, em [22], Sviridova apresenta resultados análogos aos de Kemer para álgebras associativas com involução. Assim, a busca por identidades $*$ -polinomiais satisfeitas por uma álgebra e a busca de uma base para o espaço dos polinômios $*$ -centrais são tarefas importantes da teoria de anéis. Para a álgebra $M_n(K)$ são conhecidas uma forma concreta dos geradores do T_* -ideal para os casos quando $n = 1$ (trivial) e $n = 2$ (para $\text{char } K = 0$ isto foi feito por Levchenko em 1982 em [16], e para o caso de um corpo infinito com característica positiva, ver [8]). Já para as álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$, em [14], Ioppolo e Matino descrevem conjuntos finitos de geradores das $*$ -identidades polinomiais de $UT_2(F)$ e $UT_3(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Neste trabalho, focamos na álgebra

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0, b, c \in E_1 \right\}.$$

A involução com a qual trabalhamos é induzida por uma superinvolução de $M_2(K)$ apresentada em [13]. Ademais, em [17], Racine descreve as superinvoluções para álgebras de matrizes, e tais superinvoluções podem ser utilizadas, de modo análogo ao que é feito para $M_{1,1}(E)$, para obter involuções em $M_{p,q}(E)$.

Aqui, nossos objetivos são determinar, em característica zero, bases para o T_* -ideal de $M_{1,1}(E)$ e para o subespaço dos polinômios $*$ -centrais satisfeitos por tal álgebra.

O presente trabalho é organizado em três capítulos: no primeiro capítulo trazemos conceitos básicos importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. No segundo capítulo, provamos a existência de um conjunto finito de geradores para o T_* -ideal de $M_{1,1}(E)$, em característica zero. Por fim, tendo em mente o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores, obtemos uma base para o subespaço dos polinômios $*$ -centrais de $M_{1,1}(E)$, também em característica zero.

Capítulo 1

Conceitos Prévios

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Utilizamos como referência para este capítulo [5], [6], [11] e [19]. Lembramos que é necessário um conhecimento prévio de conceitos da Álgebra Linear no decorrer do texto e, para isso, indicamos [4] e [21] como referências.

Em todo este capítulo, K denotará um corpo.

1.1 Álgebras

Definição 1.1. Uma K -álgebra é um par (A, \cdot) , onde A é um K -espaço vetorial e \cdot é uma operação em A que é bilinear, ou seja, $\cdot : A \times A \rightarrow A$ satisfaz:

$$(i) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(ii) \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$(iii) \quad (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b),$$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Observação 1.2. (i) \cdot é chamada de produto ou multiplicação;

(ii) Para simplificar a notação, denotaremos a K -álgebra (A, \cdot) apenas por A , e o produto $a \cdot b$ por apenas ab ; também por simplicidade, usaremos a expressão álgebra em vez de K -álgebra;

(iii) Definimos $a_1 a_2 a_3$ por $(a_1 a_2) a_3$, e assim, indutivamente,

$$a_1 a_2 \cdots a_n = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$;

(iv) Dizemos que um subconjunto β é uma base da álgebra A se β é uma base de A como espaço vetorial. Similarmente, a dimensão de A é a dimensão do espaço vetorial A ;

(v) Sendo B_1 e B_2 subespaços vetoriais da álgebra A , definimos $B_1 B_2$ como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in B_1, y \in B_2\}$.

Definição 1.3. Dizemos que uma álgebra A é:

a) **Associativa**, se

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in A.$$

b) **Comutativa**, se

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in A.$$

c) **Unitária** (ou **com unidade**), se existe elemento $1 \in A$ tal que

$$1a = a1 = a, \quad \forall a \in A.$$

Vejamos alguns exemplos de álgebras a seguir:

Exemplo 1.4. Consideremos K um corpo qualquer e E uma K -álgebra associativa e unitária que possui um subconjunto enumerável $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ tal que:

(i) $e_i^2 = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$;

(ii) $e_i e_j = -e_j e_i$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$;

(iii) O conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$ é uma base de E .

Esta álgebra E é chamada de **álgebra de Grassmann** (ou álgebra exterior) de dimensão infinita. Destacamos em E os subespaços vetoriais E_0 , gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m} | m \text{ é par}\}$, e E_1 , gerado pelo conjunto $\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} | k \text{ é ímpar}\}$. Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. De $e_i e_j = -e_j e_i$ segue que

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_m})(e_{j_1} \cdots e_{j_k}) = (-1)^{mk} (e_{j_1} \cdots e_{j_k})(e_{i_1} \cdots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim, podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Tal álgebra existe, e sua construção pode ser encontrada no Exemplo 6.7 de [7].

Observa-se que $E = E_0 \oplus E_1$ define uma \mathbb{Z}_2 -graduação (ver Seção 1.5), então, para quaisquer $i, j \in \{0, 1\}$, tem-se $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$, onde $i + j$ denota a adição módulo 2.

Exemplo 1.5. Seja K um corpo. Temos que o conjunto $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K , munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa e unitária. Em $M_n(K)$ definimos as matrizes unitárias E_{ij} , a matriz que tem 1 na entrada (i, j) e zero nas demais.

Sendo A uma álgebra qualquer, temos $M_n(A)$, o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em A , $n \in \mathbb{N}$, munido do produto usual de matrizes, também é uma álgebra. Caso A seja unitária, podemos, de modo análogo, definir as matrizes unitárias E_{ij} para $M_n(A)$. Ademais,

(i) A associativa $\Leftrightarrow M_n(A)$ associativa;

(ii) A unitária $\Leftrightarrow M_n(A)$ unitária.

Exemplo 1.6. Produto tensorial de álgebras. Sejam A e B duas álgebras. O produto tensorial dos espaços vetoriais A e B , que denotamos por $A \otimes B$, é o espaço vetorial consistindo dos elementos $\sum u_i \otimes v_j$, onde $u_i \in A$ e $v_j \in B$. Temos que, para quaisquer $a, b \in A$, $c, d \in B$ e $\lambda \in K$ os elementos $a \otimes c$ (tensores), satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) $(a + b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$;
- (ii) $a \otimes (c + d) = a \otimes c + a \otimes d$;
- (iii) $a \otimes (\lambda c) = (\lambda a) \otimes c = \lambda(a \otimes c)$.

Ademais, é um fato conhecido que, se β_1 e β_2 são bases de A e B , respectivamente, então o conjunto $\beta_1 \otimes \beta_2 = \{u \otimes v \mid u \in \beta_1, v \in \beta_2\}$ é uma base de $A \otimes B$. Além disso, se V é um espaço vetorial e $f : A \times B \rightarrow V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $\varphi : A \otimes B \rightarrow V$ que satisfaz $\varphi(a \otimes b) = f(a, b)$; essa propriedade é chamada de propriedade universal.

Para definirmos uma estrutura de álgebra em $A \otimes B$, fixadas bases β_1 e β_2 de A e B , respectivamente, definimos $(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = u_1 u_2 \otimes v_1 v_2$. Temos que $A \otimes B$, munido desse produto, é uma álgebra; caso A e B sejam associativas, $A \otimes B$ também será. Ademais, se as álgebras A e B forem unitárias, então $1_A \otimes 1_B$ será a unidade de $A \otimes B$.

Para mais detalhes sobre o produto tensorial de álgebras, ver o Capítulo 4 de [7].

Observação 1.7. *Sejam A uma álgebra, $a, b, c \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Valem:*

- a) $0a = a0 = 0$;
- b) $(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = (\lambda_1 \lambda_2)ab$;
- c) $(-a)b = a(-b) = -ab$ e $(-a)(-b) = ab$;
- d) $a(b - c) = ab - bc$ e $(a - b)c = ac - bc$;
- e) Se A possui unidade, então $(-1)a = a(-1) = -a$ e $(-1)(-a) = a$;
- f) Se $A \neq 0$ e A possui unidade, então $1 \neq 0$.

Definição 1.8. Sendo A associativa e $a, b \in A$, definimos o comutador $[a, b]$ e o produto de Jordan $a \circ b$ como sendo

$$[a, b] = ab - ba \quad \text{e} \quad a \circ b = ab + ba.$$

Definimos indutivamente o comutador de comprimento n como sendo

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n],$$

para $a_i \in A$.

Observação 1.9. *Seendo A uma álgebra associativa, é fácil ver que, para quaisquer $a, b, c \in A$, vale*

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b. \tag{1.1.1}$$

Ademais, usando indução e (1.1.1), segue que

$$[a_1 a_2 \cdots a_n, c] = \sum_{i=1}^n a_1 \cdots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \cdots a_n. \tag{1.1.2}$$

Uma outra igualdade muito importante válida em álgebras associativas é a identidade de Jacobi:

$$[a_1, a_2, a_3] + [a_2, a_3, a_1] + [a_3, a_1, a_2] = 0. \tag{1.1.3}$$

Definição 1.10. Seja A uma álgebra. Dizemos que:

- a) Um subespaço vetorial B de A é uma **subálgebra** de A se B é multiplicativamente fechado, isto é, se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.
- b) Um subespaço vetorial I de A é um **ideal** (bilateral) de A , se $ax, xa \in I$ para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

Observa-se que toda subálgebra é por si uma álgebra. Seguem abaixo alguns exemplos de subálgebras:

Exemplo 1.11. O subespaço E_0 definido no Exemplo 1.4 é uma subálgebra de E .

Exemplo 1.12. O subespaço

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \text{ e } b, c \in E_1 \right\}$$

é uma subálgebra de $M_2(E)$.

Exemplo 1.13. Sendo A uma álgebra, o conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$$

é chamado **centro** de A , e é um subespaço vetorial de A . No caso de A ser associativa, tem-se que $Z(A)$ é uma subálgebra de A .

Observação 1.14. Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A . Definimos a subálgebra (resp. ideal) gerada por S como sendo a interseção de todas as subálgebras (resp. ideais) de A que contêm S .

Caso A seja uma álgebra associativa, temos que a subálgebra gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{s_1 s_2 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Já o ideal gerado por S coincide com o subespaço gerado por $\{s, as, sb, asb \mid s \in S, a, b \in A\}$.

Vamos agora definir álgebra quociente. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . Consideremos o espaço vetorial quociente A/I . Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ de A/I por \bar{a} . Temos que as operações de soma e produto por escalar em A/I são definidas por

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \lambda \bar{a} = \overline{\lambda a}$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Consideremos agora o produto

$$\begin{aligned} \cdot : A/I \times A/I &\longrightarrow A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \end{aligned}$$

Este produto está bem definido e é bilinear, logo A/I munido dele é uma álgebra, chamada **álgebra quociente de A por I** .

Observação 1.15. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . Vale que:

- a) Se A é associativa, então A/I também é.
- b) Se A é comutativa, então A/I também é.
- c) Se A possui unidade 1 , então o elemento $\bar{1}$ é unidade em A/I .

d) Sendo B um subespaço de A , com $I \subseteq B$, tem-se que B é subálgebra (resp. ideal) de A se, e somente se, B/I é subálgebra (resp. ideal) de A/I .

Definição 1.16. Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \rightarrow B$ é um **homomorfismo** de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$.

Um homomorfismo de álgebras bijetivo é chamado de **isomorfismo**; um **endomorfismo** de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A (caso este seja bijetivo, ele é chamado de **automorfismo**). Dizemos que duas álgebra A e B são *isomorfas* (e denotamos por $A \simeq B$) quando existe algum isomorfismo de A em B .

Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, o conjunto $\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, o núcleo de φ , é um ideal de A , e o conjunto $\text{Im} \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, imagem de φ , é uma subálgebra de B . Tem-se que a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \frac{A}{\ker \varphi} &\longrightarrow \text{Im} \varphi \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a) \end{aligned}$$

é bem definida e é um isomorfismo de álgebras.

1.2 PI-Álgebras

Definição 1.17. Seja $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto cujos elementos chamaremos de variáveis. A álgebra $K\langle X \rangle$ com base consistindo de todas as palavras sobre X

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{i_j} \in X, n = 0, 1, 2, \dots,$$

e multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n}, x_{i_k}, x_{j_l} \in X,$$

é chamada de **álgebra associativa livre unitária**, livremente gerada pelo conjunto X . Chamamos os elementos de $K\langle X \rangle$ de polinômios nas variáveis associativas e não-comutativas de X .

O número de variáveis que formam uma palavra é chamado de *tamanho da palavra*, sendo a palavra vazia aquela de tamanho 0 (vamos denotar esta palavra por 1). Observa-se que a palavra vazia é a unidade da álgebra $K\langle X \rangle$. Um elemento de $K\langle X \rangle$ (ou seja, um polinômio) tem a forma

$$f = \sum \alpha_m m$$

onde $\alpha_m \in K$, cada m é uma palavra sobre X , o somatório corre sobre as palavras e o conjunto $\{m \mid \alpha_m \neq 0\}$ é finito. Cada termo da forma αm é chamado de *monômio*.

O lema a seguir traz a propriedade universal das álgebras associativas livres.

Lema 1.18. *Sejam R uma álgebra associativa e unitária e $\varphi_0 : X \rightarrow R$ uma aplicação qualquer. Existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow R$ que satisfaz $\varphi(1) = 1_R$ e estende φ_0 , isto é, $\varphi|_X = \varphi_0$.*

Demonstração. Consideremos a transformação linear $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow R$ tal que

$$\varphi(1) = 1_R \quad \text{e} \quad \varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = \varphi_0(x_{i_1}) \cdots \varphi_0(x_{i_n}).$$

Temos que φ é um homomorfismo de álgebras e que estende φ_0 .

Suponha que existe $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow R$ um homomorfismo de álgebras que também satisfaz $\psi(1) = 1_R$ e que também estende φ_0 . Para qualquer gerador $x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ de $K\langle X \rangle$, segue que

$$\begin{aligned} \psi(x_{j_1} \cdots x_{j_m}) &= \psi(x_{j_1}) \cdots \psi(x_{j_m}) = \varphi_0(x_{j_1}) \cdots \varphi_0(x_{j_m}) = \\ &= \varphi(x_{j_1}) \cdots \varphi(x_{j_m}) = \varphi(x_{j_1} \cdots x_{j_m}). \end{aligned}$$

Portanto $\psi = \varphi$. ■

Seja R um álgebra associativa e unitária. Fixados $r_i \in R$, para cada $i \in \mathbb{N}$, sabemos que existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow R$ de álgebras tal que $\varphi(1) = 1_R$ e $\varphi(x_i) = r_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Sendo $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, denotamos $\varphi(f(x_1, \dots, x_n))$ por $f(r_1, \dots, r_n)$. Observe que obtemos $f(r_1, \dots, r_n)$ substituindo em x_i por r_i em f .

Definição 1.19. (i) Sejam $f = f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X \rangle$ e R uma álgebra. Dizemos que $f = 0$ é uma identidade polinomial para R se

$$f(r_1, \dots, r_m) = 0, \text{ para quaisquer } r_1, \dots, r_m \in R.$$

Normalmente dizemos apenas que f é uma identidade polinomial para R .

(ii) Se a álgebra R satisfaz uma identidade polinomial não trivial f (isto é, f é um elemento não nulo de $K\langle X \rangle$), chamamos R de **PI-álgebra**.

Exemplo 1.20. Uma álgebra R é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial

$$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2].$$

Não é difícil ver que o conjunto $T(R)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra R é um ideal de $K\langle X \rangle$. Além disso, Se $f(x_1, \dots, x_m)$ é uma identidade polinomial de R , então para quaisquer $w_1, \dots, w_m \in K\langle X \rangle$, o polinômio $f(w_1, \dots, w_m)$ é também uma identidade polinomial de R . Como todo endomorfismo de $K\langle X \rangle$ é definido pela imagem de X , segue que $T(R)$ é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$.

Definição 1.21. Dizemos que um ideal J da álgebra $K\langle X \rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(J) \subseteq J$ para todo endomorfismo φ de $K\langle X \rangle$.

Assim, dizer que um ideal J de $K\langle X \rangle$ é um T -ideal significa dizer que $f(w_1, \dots, w_m) \in J$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_m) \in J$ e $w_1, \dots, w_m \in K\langle X \rangle$. Temos então que o conjunto $T(R)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra R é um T -ideal de $K\langle X \rangle$, chamado de **T-ideal** de R .

Definição 1.22. Um polinômio $g(x_1, \dots, x_m) = 0$ é chamado de **consequência** dos polinômios $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) = 0$, $i \in J$, se qualquer álgebra satisfazendo as identidades $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) = 0$ também satisfaz a identidade $g(x_1, \dots, x_m) = 0$.

Denotamos por

$$(f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \mid i \in I)^T$$

o menor T -ideal U contendo todos os polinômios $f_i(x_1, \dots, x_{m_i})$, $i \in I$ (isto é, U é a interseção de todos os T -ideais de $K\langle X \rangle$ que contêm todos esses polinômios). Esse T -ideal coincide com o conjunto de todas as consequências das identidades $f_i = 0$, $i \in I$, e seus elementos são da forma

$$\sum u_{i_w} f_i(w_1, \dots, w_{m_i}) v_{i_w}$$

com $w_1, \dots, w_{m_i}, u_{i_w}, v_{i_w} \in K\langle X \rangle$. O ideal $(f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \mid i \in I)^T$ é chamado de T -ideal gerado pelos polinômios $f_i(x_1, \dots, x_{m_i})$, $i \in I$.

O conjunto $\{f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \mid i \in I\}$ é chamado uma base do T -ideal U , mesmo se não for um conjunto gerador minimal. Dois conjuntos de polinômios são ditos equivalentes se geram o mesmo T -ideal.

Sendo $x_i \in X$, definimos o grau de um monômio de $K\langle X \rangle$ em x_i como sendo o número de vezes que x_i aparece no monômio. Sendo $f \in K\langle X \rangle$, definimos o grau de f em x_i , denotado por $\deg_{x_i} f$, como sendo o máximo dos graus dos monômios de f em x_i .

Definição 1.23. O polinômio

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_{d_i}} \in K\langle X \rangle, \alpha_i \in K,$$

é chamado

- (i) **homogêneo de grau d em x_i** se todo monômio de f com coeficiente não nulo tem o mesmo grau d em x_i ;
- (ii) **multi-homogêneo** de multigrado (d_1, \dots, d_m) se cada variável x_i aparece o mesmo número d_i de vezes em todos os monômios (ou seja, se f é homogêneo de grau d_i em cada variável x_i);
- (iii) **multilinear** de grau m se é linear (isto é, homogênea de grau 1) em cada variável x_1, \dots, x_m .

Observe que se $f(x_1, \dots, x_m)$ é multilinear, então é escrito na forma

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}, \beta_\sigma \in K,$$

onde S_m é o grupo simétrico.

Proposição 1.24. *Seja*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^d f_i \in K\langle X \rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1 .

- (i) *Se o corpo K for infinito, então os conjuntos de polinômios $\{f_i = 0 \mid i = 0, 1, \dots, d\}$ e $\{f\}$ são equivalentes, ou seja, geram o mesmo T -ideal.*
- (ii) *Se o corpo K for infinito, então todo T -ideal de $K\langle X \rangle$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

(iii) Se K tem característica zero, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares. Consequentemente, todo T -ideal de $K\langle X \rangle$ é gerado por seus polinômios multilineares.

Demonstração. (i) Primeiramente, como $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, é imediato que f é consequência dos polinômios f_0, f_1, \dots, f_d .

Seja $U = (f)^T$ o T -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f . Tomemos $d+1$ elementos diferentes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ de K . Como U é um T -ideal,

$$f(\lambda_j x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^d \lambda_j^i f_i(x_1, \dots, x_m) \in U, \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

Segue então que

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_0 x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f(\lambda_1 x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f(\lambda_d x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x_1, \dots, x_m) \\ f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_d(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^d \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde, e os λ_i 's são dois a dois distintos, segue que ela é inversível. Logo, cada $f_i(x_1, \dots, x_m)$ pertence a U , isto é, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

(ii) Basta usar a ideia do item (i) para cada polinômio f_i , $i = 0, 1, \dots, d$, e cada uma das variáveis.

(iii) Usamos o processo de linearização. Por (i), podemos assumir que f é homogênea em cada uma de suas variáveis. Seja $\deg_{x_1} f = d$. Escrevemos $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) \in U = (f)^T$ da forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m),$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1 . Daí, $f_i \in U$, para $i = 0, 1, \dots, d$. Além disso, essas identidades são equivalentes a $f = 0$, pois

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_m),$$

e o coeficiente binomial é não nulo, pois $\text{char } K = 0$.

Como $\deg_{y_j} f_i < d$, para $i = 1, \dots, d-1$ e $j = 1, 2$, usando um argumento indutivo e repetindo o processo para cada variável, obtemos um conjunto de identidades multilineares equivalentes a $f = 0$. ■

1.3 Álgebras com Involução

Nesta seção, apresentaremos o conceito de involução, junto com algumas definições e propriedades que serão necessárias no decorrer do desenvolvimento dos próximos capítulos.

Sejam K um corpo infinito de característica diferente de 2, e a menos de menção contrária, A uma álgebra associativa e unitária.

Definição 1.25. Dizemos que uma aplicação $*$: $A \rightarrow A$ dada por $a \mapsto a^*$ é uma **involução** de A , se satisfaz, para quaisquer $a, b \in A$:

- (i) $(a^*)^* = a$;
- (ii) $(a + b)^* = a^* + b^*$;
- (iii) $(ab)^* = b^*a^*$.

Escrevemos $*$ para denotar uma dada involução de uma álgebra, e as K -álgebras com involução formam uma classe. Essas álgebras serão chamadas de $*$ -álgebras sobre o corpo K . Uma álgebra A com involução $*$ é denotada por $(A, *)$.

Observação 1.26. *Note que:*

(i) *Sendo $*$ uma involução em A , onde A é uma álgebra associativa com unidade, segue que*

$$a \cdot 1^* = (1 \cdot a^*)^* = a = (a^* \cdot 1)^* = 1^* \cdot a$$

para todo $a \in A$. Logo, $1^ = 1$.*

(ii) *Uma involução $*$ em A é uma transformação linear se, e somente se, $*$ restrita ao corpo K (isto é, ao conjunto $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$) é a aplicação identidade. Ademais, se $*$ for uma transformação linear, ela é dita **involução do primeiro tipo**; caso contrário, é dita do **segundo tipo**.*

Seja $Z(A)$ o centro da álgebra A . Definimos o conjunto

$$Z(A, *) = \{a \in Z(A); a^* = a\}.$$

Os elementos de $Z(A, *)$ são chamados de *$*$ -centrais*.

Agora, vejamos alguns exemplos de álgebras com involução.

Exemplo 1.27. *A aplicação $t : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$, definida por $A^t = a$ transposta de A , é uma involução do primeiro tipo em $M_n(K)$.*

Exemplo 1.28. *Considerando a \mathbb{C} -álgebra $M_2(\mathbb{C})$, segue que $*$: $M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

é uma involução do segundo tipo.

Exemplo 1.29. *A aplicação $s : M_{2n}(K) \rightarrow M_{2n}(K)$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix},$$

*com $A, B, C, D \in M_n(K)$ é uma involução do primeiro tipo em $M_{2n}(K)$, chamada **involução simplética**.*

Exemplo 1.30. Consideremos a álgebra

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \text{ e } b, c \in E_1 \right\}.$$

Temos que a aplicação $*$: $M_{1,1}(E) \rightarrow M_{1,1}(E)$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

é uma involução do primeiro tipo de $M_{1,1}(E)$.

De fato, para quaisquer $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{1,1}(E)$,

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^* \right]^* = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right]^* &= \begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}^*; \\ \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right]^* &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} c_1 b_2 + d_1 d_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ -(c_1 a_2 + d_1 c_2) & a_1 a_2 + b_1 c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_2 d_1 - b_2 c_1 & d_2 b_1 + b_2 a_1 \\ -c_2 d_1 - a_2 c_1 & -c_2 b_1 + a_2 a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_2 & b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^*. \end{aligned}$$

De agora em diante, o termo *involução* significará sempre *involução do primeiro tipo*.

Seja $(A, *)$ uma álgebra com involução. Dizemos que um elemento $a \in A$ é **simétrico** quando $a^* = a$; dizemos que a é **antissimétrico** quando $a^* = -a$. Denotaremos por A^+ o conjunto dos elementos simétricos, isto é, $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$. Já o conjunto dos elementos antissimétricos de A será denotado por $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$. É fácil ver que A^+ e A^- são subespaços de A , e que $A^+ \cap A^- = \{0\}$.

Ademais,

$$\begin{aligned} (a + a^*)^* &= a^* + (a^*)^* = a^* + a = a + a^* \\ (a - a^*)^* &= a^* - (a^*)^* = a^* - a = -(a - a^*). \end{aligned}$$

Logo, $a + a^* \in A^+$ e $a - a^* \in A^-$. Como $\text{char}K \neq 2$, segue que

$$a = \frac{a + a^*}{2} + \frac{a - a^*}{2}.$$

Portanto, $A = A^+ \oplus A^-$.

Exemplo 1.31. Considere a álgebra $M_{1,1}(E)$ com a involução definida no Exemplo 1.30. Temos que

$$M_{1,1}(E)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in E_0, b \in E_1 \right\}$$

$$M_{1,1}(E)^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a \in E_0, b \in E_1 \right\}$$

De fato, consideremos os conjuntos $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in E_0, b \in E_1 \right\}$ e $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a \in E_0, b \in E_1 \right\}$. Note que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Logo, $A_1 \subseteq M_{1,1}(E)^+$ e $A_2 \subseteq M_{1,1}(E)^-$.

Por outro lado, se $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{1,1}(E)^+$, então

$$\gamma^* = \gamma \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Daí, $a = d$ e $c = 0$, e assim, $\gamma \in A_1$.

Se supormos $\gamma \in M_{1,1}(E)^-$, segue que

$$\gamma^* = -\gamma \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Logo, $d = -a$ e $b = 0$. Assim, $\gamma \in A_2$.

Portanto, $M_{1,1}(E)^+ = A_1$ e $M_{1,1}(E)^- = A_2$.

Proposição 1.32. Sejam $(A, *)$ uma álgebra com involução, $a \in A^+$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in A^-$ quaisquer. Segue que

(i) $[a, b_1, \dots, b_n] \in A^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $[b_1, b_2] \in A^-$;

(iii) $b_1 \circ b_2 \in A^+$.

Demonstração. (i) Fazemos indução sobre n . Note que

$$\begin{aligned} [a, b_1]^* &= (ab_1 - b_1a)^* \\ &= b_1^*a^* - a^*b_1^* \\ &= -b_1a + ab_1 \\ &= [a, b_1]. \end{aligned}$$

Logo, $[a, b_1] \in A^+$. Supondo agora que $[a, b_1, \dots, b_n] \in A$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} [a, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}]^* &= [[a, b_1, \dots, b_n], b_{n+1}]^* \\ &= b_{n+1}^*[a, b_1, \dots, b_n]^* - [a, b_1, \dots, b_n]^*b_{n+1}^* \\ &= -b_{n+1}[a, b_1, \dots, b_n] + [a, b_1, \dots, b_n]b_{n+1} \\ &= [a, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}]. \end{aligned}$$

Portanto, $[a, b_1, \dots, b_n] \in A^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ora,

$$\begin{aligned} [b_1, b_2]^* &= (b_1b_2 - b_2b_1)^* \\ &= b_2^*b_1^* - b_1^*b_2^* \\ &= b_2b_1 - b_1b_2 \\ &= -[b_1, b_2]. \end{aligned}$$

Logo, $[b_1, b_2] \in A^-$.

(iii) Note que

$$\begin{aligned} (b_1 \circ b_2)^* &= (b_1b_2 + b_2b_1)^* \\ &= b_2^*b_1^* + b_1^*b_2^* \\ &= b_2b_1 + b_1b_2 \\ &= b_1 \circ b_2. \end{aligned}$$

Portanto, $b_1 \circ b_2 \in A^+$. ■

Definimos um **homomorfismo de álgebras com involução**

$$\varphi : (A_1, *) \rightarrow (A_2, \eta)$$

como um homomorfismo de álgebras $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ que satisfaz $\varphi(a^*) = \varphi(a)^\eta$, para todo $a \in A_1$.

Quando existe um isomorfismo nas condições acima, dizemos que as álgebras com involução $(A_1, *)$ e (A_2, η) são isomorfas, denotando por $(A_1, *) \simeq (A_2, \eta)$.

Definição 1.33. Dizemos que $I \subseteq A$ é um ideal de $(A, *)$ se I é um ideal de A e $I^* \subseteq I$.

Quando I é um ideal de $(A, *)$, também dizemos que I é um $*$ -ideal de A . Ademais, sendo I um $*$ -ideal, claramente ele induz uma involução sobre A/I , pondo $(a+I)^* = a^*+I$.

Observe que a aplicação canônica $A \rightarrow A/I$ é um $*$ -homomorfismo sobrejetivo, cujo núcleo é o $*$ -ideal I . Não é difícil ver que o núcleo de todo $*$ -homomorfismo é um $*$ -ideal.

Apresentados esses conceitos básicos, podemos começar a falar sobre identidades polinomiais e polinômios centrais com involução. Para isso, entretanto, primeiramente precisamos introduzir a ideia de álgebra associativa livre com involução.

Sejam $Y = \{y_i; i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_j; j \in \mathbb{N}\}$ conjuntos enumeráveis disjuntos de variáveis e tomemos a álgebra associativa livre unitária $K\langle Y \cup Z \rangle$. Consideremos a aplicação linear $*$: $K\langle Y \cup Z \rangle \rightarrow K\langle Y \cup Z \rangle$ que satisfaz $1^* = 1$, $y_i^* = y_i$ e $z_i^* = -z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e

$$(x_1 x_2 \cdots x_k)^* = x_k^* \cdots x_2^* x_1^*$$

para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_k \in Y \cup Z$. Sendo $m_1 = x_1 \cdots x_l$ e $m_2 = x_{l+1} \cdots x_n$ monômios quaisquer de $K\langle Y \cup Z \rangle$, note que

$$(m_1 m_2)^* = x_n^* \cdots x_{l+1}^* x_l^* \cdots x_1^* = m_2^* m_1^*.$$

Além disso, é fácil ver que $m_1^{**} = m_1$. Logo, $*$ é uma involução e $K\langle Y \cup Z \rangle$ é chamada de **álgebra associativa livre com involução**, sendo Y o conjunto das *variáveis simétricas* e Z o conjunto das *variáveis antissimétricas*. Um endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z \rangle$ é dito um **$*$ -endomorfismo** se $\varphi(y_i)$ é simétrico e $\varphi(z_i)$ é antissimétrico, para todo $i \in \mathbb{N}$; isto é equivalente a dizer que $*$ comuta com φ .

Sendo $(A, *)$ uma álgebra com involução, não é difícil ver que se $\varphi : K\langle Y \cup Z \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras com involução, então $\varphi(y_i) \in A^+$ e $\varphi(z_i) \in A^-$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, considerando $a_i \in A^+$ e $b_i \in A^-$ para $i \in \mathbb{N}$, sabemos que existe um único homomorfismo $\psi : K\langle Y \cup Z \rangle \rightarrow A$ de álgebras tal que $\psi(1) = 1_A$, $\psi(y_i) = a_i$ e $\psi(z_i) = b_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que ψ é um homomorfismo de álgebras com involução. Ademais, sendo $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) \in K\langle Y \cup Z \rangle$, denotamos $\psi(f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n))$ por $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$. Observe que obtemos $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ substituindo y_i por a_i e z_i por b_i em f , e essas substituições preservam a simetria e a antissimetria.

Agora, vamos definir identidades polinomiais e polinômios centrais para uma álgebra com involução.

Definição 1.34. Sejam $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ e $(A, *)$ uma álgebra com involução. Dizemos que f é uma identidade polinomial com involução de $(A, *)$ (ou $*$ -identidade polinomial), se $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A^+$ e $b_1, \dots, b_m \in A^-$.

Dada $(A, *)$ uma álgebra com involução, definimos

$$T_*(A) = \{f \in K\langle Y \cup Z \rangle \mid f \text{ é uma identidade para } (A, *)\}$$

o conjunto de todas as identidades com involução da álgebra $(A, *)$. De modo análogo ao caso das identidades ordinárias, é fácil verificar que $T_*(A)$ é um ideal bilateral de $K\langle Y \cup Z \rangle$.

Exemplo 1.35. Considere a álgebra $M_2(K)$ com a involução transposta (veja o Exemplo 1.27). Se A_1 e A_2 são elementos antissimétricos e B é um elemento simétrico de $(M_2(K), t)$, então $[A_1, A_2] = 0$ e $[A_2, A_1 \circ B] = 0$ (note que $(A_1 \circ B)^t = -A_1 \circ B$, logo esse produto resulta numa matriz antissimétrica). Logo,

$$0 = [A_2, A_1 \circ B] = A_1 \circ [A_2, B] - [A_1, A_2] \circ B = A_1 \circ [A_2, B].$$

Logo, os polinômios $f(y_1, z_1, z_2) = z_1 \circ [z_2, y_1]$ e $g(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ são $*$ -identidades de $(M_2(K), t)$.

Definição 1.36. Um ideal (resp. subespaço) J de $K\langle Y \cup Z \rangle$ é um T_* -ideal (resp. T_* -espaço) se $\varphi(J) \subseteq J$, para todo $*$ -endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z \rangle$.

Observe que dizer que $\varphi(J) \subseteq J$, para todo $*$ -endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z \rangle$, equivale a dizer que $f(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m) \in J$ para quaisquer $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in J$ e g_1, \dots, g_n elementos simétricos e h_1, \dots, h_m elementos antissimétricos de $K\langle Y \cup Z \rangle$. Claramente, todo T_* -ideal é um T_* -espaço.

Definição 1.37. Sejam $f = f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ e $(A, *)$ uma álgebra com involução. Diz-se que f é um **polinômio central com involução** (ou polinômio $*$ -central) para $(A, *)$ se $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in Z(A, *)$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A^+$ e $b_1, \dots, b_m \in A^-$.

Temos que o conjunto $T_*(A)$ é um T_* -ideal, enquanto o conjunto $C(A, *)$ dos polinômios centrais da álgebra $(A, *)$ é um T_* -espaço.

Dado $S = \{f_j(y_1, \dots, y_{n_j}, z_1, \dots, z_{m_j}) \mid j \in \Lambda\}$ um subconjunto de $K\langle Y \cup Z \rangle$, definimos o T_* -ideal e o T_* -espaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerados por S como sendo os subespaços de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerados por $\{p_j f_j(g_1, \dots, g_{n_j}, h_1, \dots, h_{m_j}) q_j \mid f_j \in S, p_j, q_j \in K\langle Y \cup Z \rangle, g_l \in K\langle Y \cup Z \rangle^+, h_s \in K\langle Y \cup Z \rangle^-\}$ e $\{f_j(g_1, \dots, g_{n_j}, h_1, \dots, h_{m_j}) \mid f_j \in S, g_l \in K\langle Y \cup Z \rangle^+, h_s \in K\langle Y \cup Z \rangle^-\}$, respectivamente.

A demonstração de que todo T_* -espaço e todo T_* -ideal podem ser gerados por um conjunto de polinômios multi-homogêneos (caso K seja infinito) ou multilineares (caso $\text{char}K = 0$) é análoga àquela apresentada na Proposição 1.24.

1.4 Polinômios $*$ -Próprios

Nesta seção, abordaremos os conceitos de polinômios $*$ -próprios e posto de um polinômio. Definimos um comutador de grau 1 como sendo simplesmente uma variável de $Y \cup Z$.

Definição 1.38. Um polinômio $f \in K\langle Y \cup Z \rangle$ é dito **$*$ -próprio** se f é constante ou é uma combinação linear de produtos de variáveis antissimétricas por comutadores (cujas entradas estão em $Y \cup Z$) de grau maior ou igual a 2.

Assim, o conjunto de todos os polinômios $*$ -próprios de $K\langle Y \cup Z \rangle$ é exatamente a subálgebra de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerada pelo conjunto

$$\{1\} \cup Z \cup \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid n \geq 2, x_j \in Y \cup Z\}.$$

Denotaremos por B_Y a subálgebra dos polinômios $*$ -próprios de $K\langle Y \cup Z \rangle$.

Seja $L(Y \cup Z)$ o subespaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerado por $Y \cup Z$ e pelos comutadores cujas entradas são variáveis em $Y \cup Z$, e consideremos uma base ordenada de $L(Y \cup Z)$ (ver seção 1.4 de [5]) formada por

$$y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3, \dots, u_1, u_2, u_3, \dots$$

onde $u_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$, com $x_{i_j} \in Y \cup Z$ e $k \geq 2$. Temos então, pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que existe uma base de $K\langle Y \cup Z \rangle$ formada pelos elementos

$$y_{i_1}^{n_1} y_{i_2}^{n_2} \dots y_{i_p}^{n_p} z_{j_1}^{m_1} z_{j_2}^{m_2} \dots z_{j_q}^{m_q} u_{l_1} u_{l_2} \dots u_{l_k} \quad p, q, k, n_i, m_j \geq 0.$$

Definição 1.39. Seja f um polinômio multi-homogêneo em $K\langle Y \cup Z \rangle$. Escrevendo

$$f = \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde g_a é um polinômio $*$ -próprio, definimos o **posto** de f , denotado por $r(f)$, como sendo a maior n -upla $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ na ordem lexicográfica, entre as que possuem escalar α_a diferente de zero.

Como f possui uma única expressão na forma acima, temos que $r(f)$ está bem definido. De acordo com essa definição, f é $*$ -próprio se, e somente se, $r(f) = (0, 0, \dots, 0)$. É importante observar também que a ordem lexicográfica é uma boa ordem no conjunto $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ e assim o princípio da indução é válido, sendo portanto possível fazer indução em $r(f)$.

Vejam agora uma propriedade importante dos polinômios $*$ -próprios. Considere um polinômio multi-homogêneo

$$f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) = \alpha y_1^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a \quad (1.4.1)$$

onde $\alpha, \alpha_a \in K - \{0\}$, g e g_a são próprios e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) < (b_1, b_2, \dots, b_n) = r(f)$, na ordem lexicográfica. Primeiramente, observe que quanto maior a entrada a_1 na n -upla a , menor é o grau de y_1 em g_a . Por outro lado, como em g e g_a não aparecem variáveis simétricas fora de comutadores, a substituição de y_i por $y_i + 1$ não altera esses polinômios, e assim

$$\begin{aligned} f(y_1 + 1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_m) &= \alpha (y_1 + 1)^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \\ &+ \sum_a \alpha_a (y_1 + 1)^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a. \end{aligned}$$

Observe que a componente de menor grau em y_1 deste polinômio é

$$f_1 = \alpha y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a 's tais que $a_1 = b_1$. Observe também que quando $a_1 = b_1$ temos $(b_2, \dots, b_n) > (a_2, \dots, a_n)$.

Consideremos agora o polinômio $f_1(y_1, y_2 + 1, y_3, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$ e tomemos a sua componente de menor grau em y_2 , que é

$$f_2 = \alpha y_3^{b_3} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_3^{a_3} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a 's tais que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Temos que, para $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ vale $(b_3, \dots, b_n) > (a_3, \dots, a_n)$. Continuando esse mesmo raciocínio, vamos chegar ao polinômio $f_n = \alpha g$. A partir dessas ideias, temos o resultado a seguir.

Proposição 1.40. *Sejam V um T_* -espaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$ e $f \in V$ como escrito em (1.4.1), onde K é um corpo infinito. Então $g \in V$. Ademais, se V é um T_* -ideal, então os polinômios g_a 's também estão em V . Consequentemente, todo T_* -ideal é gerado pelos seus polinômios $*$ -próprios.*

Demonstração. Como 1 é simétrico, temos que $y_1 + 1$ é simétrico, e daí o polinômio $f(y_1 + 1, y_2, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$ pertence a V . Como K é infinito, temos que $f_1 \in V$ e assim, como $y_2 + 1$ também é simétrico, temos que $f_1(y_1, y_2 + 1, y_3, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in V$. Novamente pelo fato de K ser infinito, temos que $f_2 \in V$. Seguindo esse raciocínio, chegamos que f_n pertence a V , e assim $g \in V$.

Se V é um T_* -ideal, temos $\alpha y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n} g \in V$ e portanto o somatório em (1.4.1) também pertence a V . Repetindo esse processo no somatório, concluímos que os g_a 's também estão em V , donde segue a última afirmação. ■

Observe que esse processo de “eliminação” de variáveis simétricas fora dos comutadores usado na proposição acima não funcionaria para variáveis antissimétricas, pois a substituição de z_i por $z_i + 1$ não define um $*$ -endomorfismo de $K\langle Y \cup Z \rangle$, uma vez que $z_i + 1$ não é antissimétrico.

Dados l e m inteiros não negativos, denotemos por $P_{l,m}$ o espaço dos polinômios multilineares de $K\langle Y \cup Z \rangle$ nas variáveis $y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m$. Consideremos agora o espaço

$$\Gamma_{l,m} = P_{l,m} \cap B_Y, \text{ onde } l, m \geq 0$$

de todos os polinômios $*$ -próprios multilineares em $y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m$ na álgebra $K\langle Y \cup Z \rangle$. Já vimos que se I é um T_* -ideal de $K\langle Y \cup Z \rangle$, então o conjunto $B_Y \cap I$ gera I como T_* -ideal.

Supondo agora que K tem característica zero, com base no que foi visto na Proposição 1.24, observamos que I pode ser gerado como T_* -ideal pelos seus polinômios $*$ -próprios multilineares. Assim, sendo I e J T_* -ideais de $K\langle Y \cup Z \rangle$, tem-se que

$$I = J \iff I \cap \Gamma_{l,m} = J \cap \Gamma_{l,m} \text{ para todos } l, m \geq 0.$$

Denotaremos por $\Gamma_{l,m}(I)$ o espaço vetorial quociente $\Gamma_{l,m}/(I \cap \Gamma_{l,m})$.

Sendo $(A, *)$ uma álgebra (associativa e unitária) com involução, escreve-se simplesmente $\Gamma_{l,m}(A)$ ao invés de $\Gamma_{l,m}(T_*(A))$. Se K tem característica zero, as identidades polinomiais com involução de A são determinadas pelas suas identidades $*$ -próprias multilineares, isto é, são determinadas pelos subespaços $\Gamma_{l,m} \cap T_*(A)$, com $l, m \geq 0$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que $\Gamma_{l,m}(A)$ é um S_m -módulo. Mas para isso, primeiramente definimos módulo e submódulo sobre uma álgebra.

Definição 1.41. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Definimos um A -módulo (ou módulo sobre A) como sendo um espaço vetorial M , munido de um produto

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\rightarrow M \\ (a, m) &\mapsto a \cdot m \end{aligned}$$

que, para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in K$, satisfaz:

$$(i) \quad (a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m;$$

$$(ii) \quad a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2;$$

$$(iii) \quad (\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m);$$

$$(iv) \quad a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m;$$

$$(v) \quad 1_A \cdot m = m.$$

Dizemos que um subespaço vetorial N de M é um submódulo (ou A -submódulo) de M , se $a \cdot n \in N$, para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.

Consideremos agora G um grupo e a álgebra KG (para mais detalhes sobre tal álgebra, ver [6]). Dizemos que um espaço vetorial M é um G -módulo, quando M é um KG -módulo. Sendo assim, um S_m -módulo é um módulo da álgebra KS_m .

Definimos então a operação

$$\cdot : KS_m \times \Gamma_{l,m} \rightarrow \Gamma_{l,m}$$

tal que

$$\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \cdot f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}),$$

$\alpha_\sigma \in K$.

Temos que, para quaisquer $\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma, \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma \in KS_m$, $f = f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$, $g = g(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m) \in \Gamma_{l,m}$ e $\lambda \in K$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma \right) \cdot f &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} (\alpha_\sigma + \beta_\sigma) \sigma \right) \cdot f \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} (\alpha_\sigma + \beta_\sigma) f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \cdot f + \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \cdot f; \\ \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot (f + g) &= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma [f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) + \\ &\quad + g(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})] \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot f + \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot g; \\ \left(\lambda \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot f &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot f \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \\ &= \lambda \left[\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot f \right]. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) &= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \lambda f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot (\lambda f). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot \left[\left(\sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma \right) \cdot f \right] = \\
& \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \right) = \\
& \sum_{\sigma \in S_m} \sum_{\gamma \in S_m} \alpha_\sigma \beta_\gamma f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(\gamma(1))}, \dots, z_{\sigma(\gamma(m))}) = \\
& \left(\sum_{\sigma \in S_m} \sum_{\gamma \in S_m} \alpha_\sigma \beta_\gamma \sigma \gamma \right) \cdot f = \\
& \left[\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\gamma \in S_m} \beta_\gamma \gamma \right) \right] \cdot f,
\end{aligned}$$

e, diretamente da definição de “ \cdot ”, segue que $Id \cdot f = f$. Portanto, $\Gamma_{l,m}$ é um S_m -módulo.

Agora, observe que, se $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ é uma $*$ -identidade polinomial para uma álgebra A , então $\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$, também é uma $*$ -identidade. Assim, $\Gamma_{l,m} \cap T_*(A)$ é um subespaço de $\Gamma_{l,m}$ fechado para a operação “ \cdot ”, logo, $\Gamma_{l,m} \cap T_*(A)$ é um S_m -submódulo. Daí, segue que a operação $\star : KS_m \times \Gamma_{l,m}(A) \rightarrow \Gamma_{l,m}(A)$, dada por

$$\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \right) \star \overline{f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)} = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \overline{f(y_1, \dots, y_l, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})}$$

está bem definida, e munido dela, o espaço $\Gamma_{l,m}(A)$ é um S_m -módulo.

1.5 Superálgebras e Superinvoluções

Seja A uma álgebra associativa e unitária. Uma \mathbb{Z}_2 -gradação em A é um par (A_0, A_1) de subespaços de A tais que

$$A = A_0 \oplus A_1 \quad \text{e} \quad A_i A_j \subseteq A_{i+j}$$

onde $i + j$ é a adição módulo 2. Uma *superálgebra* ou *álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada* é uma álgebra munida de uma \mathbb{Z}_2 -gradação.

Sejam E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, com sua \mathbb{Z}_2 -gradação $E = E_0 \oplus E_1$ e A uma superálgebra. Definimos o *envelope de Grassmann* $E(A)$ como $E(A) = E_0 \otimes A_0 \oplus E_1 \otimes A_1$, onde $A = A_0 \oplus A_1$ é a \mathbb{Z}_2 -gradação de A .

Exemplo 1.42. *Considere a álgebra $M_2(K)$. Os subespaços*

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in K \right\}$$

constituem uma \mathbb{Z}_2 -gradação em $M_2(K)$ (chamada de \mathbb{Z}_2 -gradação usual). Vamos denotar por $M_{1,1}(K)$ a álgebra $M_2(K)$ munida desta \mathbb{Z}_2 -gradação.

Consideremos então o envelope de Grassmann $E(M_{1,1}(K)) = E_0 \otimes A_0 \oplus E_1 \otimes A_1$. Temos que a álgebra $M_{1,1}(E)$ é isomorfa ao envelope de Grassmann $E(M_{1,1}(E))$.

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra, uma **superinvolução** em A é uma transformação linear $\circ : A \rightarrow A$ \mathbb{Z}_2 -graduada (isto é, $(A_i)^\circ \subseteq A_i$ para $i = 0, 1$) tal que $(a^\circ)^\circ = a$ para todo $a \in A$ e $(ab)^\circ = (-1)^{\|a\|\|b\|} b^\circ a^\circ$ para quaisquer $a, b \in A_0 \cup A_1$, onde

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & \text{se } a \in A_0 \\ 1, & \text{se } a \in A_1 \end{cases}.$$

Segue do Teorema 3.2 de [13] que existem apenas duas superinvoluções em $M_{1,1}(K)$, a saber, as aplicações $\circ, \diamond : M_{1,1}(K) \rightarrow M_{1,1}(K)$, definidas por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\circ = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\diamond = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Ademais, esse resultado é generalizado em [17].

Considerando as aplicações \circ e \diamond acima, definamos agora $*$: $M_{1,1}(E) \rightarrow M_{1,1}(E)$ e \sharp : $M_{1,1}(E) \rightarrow M_{1,1}(E)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = a(E_{11})^\circ + b(E_{12})^\circ + c(E_{21})^\circ + d(E_{22})^\circ = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\sharp = a(E_{11})^\diamond + b(E_{12})^\diamond + c(E_{21})^\diamond + d(E_{22})^\diamond = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Temos que essas aplicações são involuções na álgebra $M_{1,1}(E)$, induzidas pelas superinvoluções \circ e \diamond em $M_{1,1}(K)$. Observe que $*$ é a involução definida no Exemplo 1.30.

Considerando agora a transformação linear ϕ definida por

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

tem-se que ϕ é um isomorfismo das álgebras com involução entre $(M_{1,1}(E), *)$ e $(M_{1,1}(E), \sharp)$. Assim, essas álgebras satisfazem o mesmo T_* -ideal de identidades polinômiais com involução.

Esta ideia apresentada acima de definir uma involução em $M_{1,1}(E)$ a partir de uma superinvolução em $M_{1,1}(K)$, faz parte de um contexto mais geral no qual, partindo de uma superinvolução numa superálgebra, e de uma superinvolução em $E = E_0 \oplus E_1$, podemos definir uma involução no envelope de Grassmann desta superálgebra. Mais precisamente, sendo $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra, seja \bullet uma superinvolução em A . Considerando em E uma superinvolução \star (observemos que a aplicação identidade é uma superinvolução em E), temos que a aplicação linear $*$: $E(A) \rightarrow E(A)$ tal que $(a \otimes e)^* = a^\bullet \otimes e^\star$, onde $a \in A_0 \cup A_1$ e $e \in E_0 \cup E_1$, é uma involução em $E(A)$.

Para uma leitura mais aprofundada a respeito de superinvoluções e identidades polinômiais com involução em álgebras de matrizes sobre a álgebra exterior indicamos as referências [1] e [10] (seções 1 e 3).

Capítulo 2

Identidades Polinomiais com Involução de $M_{1,1}(E)$

Este capítulo tem como objetivo determinar uma base para o T_* -ideal da álgebra com involução $M_{1,1}(E)$. Para ele, usamos como referência [10].

Como visto anteriormente,

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, d \in E_0, b, c \in E_1 \right\}$$

e a involução $*$ é definida como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (veja o Exemplo 1.30). No decorrer do capítulo, K é um corpo de característica zero.

Já vimos que os subespaços dos elementos simétricos de $M_{1,1}(E)$ em relação à involução $*$ é

$$M_{1,1}(E)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \in E_0, b \in E_1 \right\},$$

enquanto o subespaço dos elementos antissimétricos é

$$M_{1,1}(E)^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}; a \in E_0, b \in E_1 \right\}.$$

Lema 2.1. $(M_{1,1}(E), *)$ satisfaz as seguintes $*$ -identidades polinomiais:

(a) $[y_1, y_2]$

(b) $z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1$

(c) $[z_1, z_2][z_3, z_4]$

Demonstração. Considere $\bar{y}_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ e $\bar{z}_j = \begin{pmatrix} c_j & 0 \\ d_j & -c_j \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, elementos simétricos e antissimétricos quaisquer de $M_{1,1}(E)$, respectivamente.

(a)

$$[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_2 b_1 + b_2 a_1 \\ 0 & a_2 a_1 \end{pmatrix} = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2 z_3} - \overline{z_3 z_2 z_1} &= \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_3 & 0 \\ d_1 c_2 c_3 - c_1 d_2 c_3 + c_1 c_2 d_3 & -c_1 c_2 c_3 \end{pmatrix} - \\ &= \begin{pmatrix} c_3 c_2 c_1 & 0 \\ d_3 c_2 c_1 - c_3 d_2 c_1 + c_3 c_2 d_1 & -c_3 c_2 c_1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(c) Note que

$$\begin{aligned} [\overline{z_1}, \overline{z_2}] &= \begin{pmatrix} c_1 c_2 & 0 \\ d_1 c_2 - c_1 d_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_2 c_1 & 0 \\ d_2 c_1 - c_2 d_1 & c_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(d_1 c_2 - c_1 d_2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$[\overline{z_3}, \overline{z_4}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(d_3 c_4 - c_3 d_4) & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $[\overline{z_1}, \overline{z_2}][\overline{z_3}, \overline{z_4}] = 0$. ■

Proposição 2.2. *Os seguintes polinômios pertencem ao ideal $T_*(M_{1,1}(E))$:*

- (i) $[y_1, z_1, z_2, z_3] - 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3]$;
- (ii) $[z_1, z_2]y_1[z_3, z_4] + [z_3, z_4]y_1[z_1, z_2]$;
- (iii) $2z_1[y_1, z_2, z_3] + [y_1, z_1, z_2, z_3] + [z_1, z_2][y_1, z_3] + [z_1, z_3][y_1, z_2] + [z_2, z_3][y_1, z_1]$;
- (iv) $2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]$;
- (v) $[y_1, z_1][y_2, z_2] + [y_1, z_2][y_2, z_1]$;
- (vi) $[y_1, z_1][y_2, z_2, z_3] - [y_1, z_2, z_1][y_2, z_3]$;
- (vii) $[z_1, z_2][y_1, z_3][y_2, z_4] - [z_1, z_4][y_1, z_2][y_2, z_3] - [z_2, z_3][y_1, z_1][y_2, z_4] + [z_3, z_4][y_1, z_1][y_2, z_2]$.

Demonstração. É suficiente e necessário considerar a avaliação das indeterminadas y_i e z_i nos elementos simétricos e antissimétricos

$$\overline{y_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix} = \alpha_i(E_{11} + E_{22}) + \beta_i E_{12}$$

e

$$\overline{z_i} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} = a_i(E_{11} - E_{22}) + c_i E_{21}$$

de $M_{1,1}(E)$, respectivamente (Lembre que $E_0 = Z(E)$ e $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E_1$). Lembremos que E_{ij} é a matriz de $M_2(K)$ tendo 1 na entrada (i, j) e zero nas demais.

Primeiramente, observe que, pela Proposição 1.32, $[\overline{z_i}, \overline{z_j}]$ é antissimétrico, enquanto $\overline{z_i} \circ \overline{z_j}$ e $[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \dots, \overline{z_{j_n}}]$ são simétricos. Ademais,

$$\begin{aligned} [\overline{z_i}, \overline{z_j}] &= a_i a_j (E_{11} + E_{22}) - a_i c_j E_{21} + c_i a_j E_{21} - a_j a_i (E_{11} + E_{22}) + a_j c_i E_{21} - c_j a_i E_{21} \\ &= 2(c_i a_j - a_i c_j) E_{21} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{z_i} \circ \overline{z_j} &= a_i a_j (E_{11} + E_{22}) - a_i c_j E_{21} + c_i a_j E_{21} + a_j a_i (E_{11} + E_{22}) - a_j c_i E_{21} + c_j a_i E_{21} \\ &= 2a_i a_j (E_{11} + E_{22}).\end{aligned}$$

Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned}[\overline{y_i}, \overline{z_j}] &= \alpha_i a_j (E_{11} - E_{22}) + \alpha_i c_j E_{21} - \beta_i a_j E_{12} + \beta_i c_j E_{11} - a_j \alpha_i (E_{11} - E_{22}) - \\ &\quad - a_j \beta_i E_{12} - c_j \alpha_i E_{21} - c_j \beta_i E_{22} \\ &= \beta_i c_j (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_i a_j E_{12}.\end{aligned}$$

Ademais, por indução em $n \geq 1$, segue que

$$[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \dots, \overline{z_{j_n}}] = (-2)^{n-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{n-1}} c_{j_n} (E_{11} + E_{22}) + (-2)^n \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_n} E_{12}. \quad (2.0.1)$$

De fato, para $n = 1$, segue do que foi visto anteriormente que $[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}] = \beta_i c_{j_1} (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_i a_{j_1} E_{12}$.

Supondo que a igualdade (2.0.1) vale para algum $k \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned}[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \dots, \overline{z_{j_k}}, \overline{z_{j_{k+1}}}] &= [[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \dots, \overline{z_{j_k}}], \overline{z_{j_{k+1}}}] \\ &= [(-2)^{k-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{k-1}} c_{j_k} (E_{11} + E_{22}), a_{j_{k+1}} (E_{11} - E_{22})] + \\ &\quad + [(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12}, a_{j_{k+1}} (E_{11} - E_{22})] + \\ &\quad + [(-2)^{k-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{k-1}} c_{j_k} (E_{11} + E_{22}), c_{j_{k+1}} E_{21}] + \\ &\quad + [(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12}, c_{j_{k+1}} E_{21}] \\ &= -(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} a_{j_{k+1}} E_{12} - (-2)^k a_{j_{k+1}} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12} + \\ &\quad + (-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} c_{j_{k+1}} E_{11} - (-2)^k c_{j_{k+1}} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{22} \\ &= (-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} c_{j_{k+1}} (E_{11} + E_{22}) + (-2)^{k+1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} a_{j_{k+1}} E_{12}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, a igualdade (2.0.1) vale para todo $n \geq 1$.

(i) Observe que

$$[\overline{y_1}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] = (-2)^2 \beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + (-2)^3 \beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12}$$

e

$$(\overline{z_1} \circ \overline{z_2})[\overline{y_1}, \overline{z_3}] = 2(a_1 a_2)(E_{11} + E_{22})(\beta_1 c_3 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 a_3 E_{12}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}[\overline{y_1}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] - 2(\overline{z_1} \circ \overline{z_2})[\overline{y_1}, \overline{z_3}] &= (-2)^2 \beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + (-2)^3 \beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12} - \\ &\quad - 4\beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 8\beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) Note que

$$\begin{aligned}[\overline{z_1}, \overline{z_2}] \overline{y_1} [\overline{z_3}, \overline{z_4}] &= 2(c_1 a_2 - a_1 c_2) E_{21} [\alpha_1 (E_{11} + E_{22}) + \beta_1 E_{12}] 2(c_3 a_4 - a_3 c_4) E_{21} \\ &= 2[(c_1 a_2 \alpha_1 - a_1 c_2 \alpha_1) E_{21} + (c_1 a_2 \beta_1 - a_1 c_2 \beta_1) E_{22}] 2(c_3 a_4 - a_3 c_4) E_{21} \\ &= 4(c_1 a_2 \beta_1 c_3 a_4 - c_1 a_2 \beta_1 a_3 c_4 - a_1 c_2 \beta_1 c_3 a_4 + a_1 c_2 \beta_1 a_3 c_4) E_{21},\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$[\bar{z}_3, \bar{z}_4]\bar{y}_1[\bar{z}_1, \bar{z}_2] = 4(c_3a_4\beta_1c_1a_2 - c_3a_4\beta_1a_1c_2 - a_3c_4\beta_1c_1a_2 + a_3c_4\beta_1a_1c_2)E_{21}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} [\bar{z}_1, \bar{z}_2]\bar{y}_1[\bar{z}_3, \bar{z}_4] + [\bar{z}_3, \bar{z}_4]\bar{y}_1[\bar{z}_1, \bar{z}_2] &= 4(c_1a_2\beta_1c_3a_4 - c_1a_2\beta_1a_3c_4 - a_1c_2\beta_1c_3a_4 + \\ &\quad + a_1c_2\beta_1a_3c_4)E_{21} + 4(c_3a_4\beta_1c_1a_2 - c_3a_4\beta_1a_1c_2 - \\ &\quad - a_3c_4\beta_1c_1a_2 + a_3c_4\beta_1a_1c_2)E_{21} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Note que

$$\begin{aligned} \bar{z}_1[\bar{y}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3] &= [a_1(e_{11} - e_{22}) + c_1E_{21}](-2\beta_1a_2c_3(E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1a_2a_3E_{12}) \\ &= -2a_1\beta_1a_2c_3(E_{11} - E_{22}) + 4a_1\beta_1a_2a_3E_{12} - 2c_1\beta_1a_2c_3E_{21} + \\ &\quad + 4c_1\beta_1a_2a_3E_{22} \\ &= -2a_1a_2\beta_1c_3(E_{11} - E_{22}) + 4a_1a_2a_3\beta_1E_{12} - 2a_2c_1\beta_1c_3E_{21} + \\ &\quad + 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22}; \\ [\bar{y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3] &= 4\beta_1a_1a_2c_3(E_{11} + E_{22}) - 8\beta_1a_1a_2a_3E_{12} \\ &= 4a_1a_2\beta_1c_3(E_{11} + E_{22}) - 8a_1a_2a_3\beta_1E_{12}; \\ [\bar{z}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_1, \bar{z}_3] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[\beta_1c_3(E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1a_3E_{12}] \\ &= 2c_1a_2\beta_1c_3E_{21} - 2a_1c_2\beta_1c_3E_{21} - 4c_1a_2\beta_1a_3E_{22} + 4a_1c_2\beta_1a_3E_{22} \\ &= 2a_2c_1\beta_1c_3E_{21} - 2a_1c_2\beta_1c_3E_{21} - 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22} + 4a_1a_3c_2\beta_1E_{22}; \\ [\bar{z}_1, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_2] &= 2a_3c_1\beta_1c_2E_{21} - 2a_1c_3\beta_1c_2E_{21} - 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1E_{22}; \\ [\bar{z}_2, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_1] &= 2a_3c_2\beta_1c_1E_{21} - 2a_2c_3\beta_1c_1E_{21} - 4a_1a_3c_2\beta_1E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1E_{22}. \end{aligned}$$

Logo,

$$2\bar{z}_1[\bar{y}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3] + [\bar{y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3] + [\bar{z}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_1, \bar{z}_3] + [\bar{z}_1, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_2] + [\bar{z}_2, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_1] = 0.$$

(iv) Note que:

$$\begin{aligned} [\bar{z}_1, \bar{z}_2]\bar{z}_3[\bar{y}_1, \bar{z}_4] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[a_3(E_{11} - E_{22}) + c_3E_{21}][\beta_1c_4(E_{11} + E_{22}) - \\ &\quad - 2\beta_1a_4E_{12}] \\ &= 2(c_1a_2a_3 - a_1c_2a_3)E_{21}[\beta_1c_4(E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1a_4E_{12}] = \\ &= 2(c_1a_2a_3\beta_1c_4 - a_1c_2a_3\beta_1c_4)E_{21} - 4(c_1a_2a_3\beta_1a_4 - a_1c_2a_3\beta_1a_4)E_{22} \\ &= 2(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} - 4(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\bar{z}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_4] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[-2\beta_1a_3c_4(E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1a_3a_4E_{12}] = \\ &= 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} - 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2[\bar{z}_1, \bar{z}_2]\bar{z}_3[\bar{y}_1, \bar{z}_4] + [\bar{z}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_4] &= 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} - \\ &\quad - 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} + \\ &\quad + 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} - \\ &\quad - 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(v) Note que:

$$\begin{aligned}
[\overline{y_1}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_2}] &= [\beta_1 c_1 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 a_1 E_{12}][\beta_2 c_2 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_2 a_2 E_{12}] \\
&= \beta_1 c_1 \beta_2 c_2 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 c_1 \beta_2 a_2 e_{12} - 2\beta_1 a_1 \beta_2 c_2 E_{12} \\
&= \beta_1 c_1 \beta_2 c_2 (E_{11} + E_{22}) - 2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_1 \beta_1 \beta_2 c_2 E_{12}; \\
[\overline{y_1}, \overline{z_2}][\overline{y_2}, \overline{z_1}] &= \beta_1 c_2 \beta_2 c_1 (E_{11} + E_{22}) - 2a_1 \beta_1 c_2 \beta_2 E_{12} - 2a_2 \beta_1 \beta_2 c_1 E_{12}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\overline{y_1}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_2}] + [\overline{y_1}, \overline{z_2}][\overline{y_2}, \overline{z_1}] = 0.$$

(vi) Segue que:

$$\begin{aligned}
[\overline{y_1}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] &= [\beta_1 c_1 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 a_1 E_{12}][-2\beta_2 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + \\
&\quad + 4\beta_2 a_2 a_3 E_{12}] \\
&= 4\beta_1 c_1 a_2 a_3 \beta_2 E_{12} - 2\beta_1 c_1 a_2 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1 a_1 a_2 \beta_2 c_3 E_{12} \\
&= 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\overline{y_1}, \overline{z_2}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_3}] &= [-2\beta_1 a_2 c_1 (E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1 a_2 a_1 E_{12}][\beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) - \\
&\quad - 2\beta_2 a_3 E_{12}] \\
&= -2\beta_1 a_2 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1 a_2 c_1 \beta_2 a_3 E_{12} + 4\beta_1 a_2 a_1 \beta_2 c_3 E_{12} \\
&= -2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
[\overline{y_1}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] - [\overline{y_1}, \overline{z_2}, \overline{z_1}][\overline{y_2}, \overline{z_3}] &= 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + \\
&\quad + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12} - [-2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + \\
&\quad + 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(vii) Note que:

$$\begin{aligned}
[\overline{z_1}, \overline{z_2}][\overline{y_1}, \overline{z_3}][\overline{y_2}, \overline{z_4}] &= 2(c_1 a_2 - a_1 c_2) E_{21} [\beta_1 c_3 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 a_3 E_{12}][\beta_2 c_4 (E_{11} + \\
&\quad + E_{22}) - 2\beta_2 a_4 e_{12}] \\
&= 2c_1 a_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} - 4c_1 a_2 \beta_1 c_3 \beta_2 a_4 E_{22} - 2a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} + \\
&\quad + 4a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 a_4 E_{22} - 4c_1 a_2 \beta_1 a_3 \beta_2 c_4 E_{22} + 4a_1 c_2 \beta_1 a_3 \beta_2 c_4 E_{22} \\
&= 2a_2 c_1 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} - 4a_2 a_4 c_1 \beta_1 c_3 \beta_2 E_{22} - 2a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} + \\
&\quad + 4a_1 a_4 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 E_{22} - 4a_2 a_3 c_1 \beta_1 \beta_2 c_4 E_{22} + 4a_1 a_3 c_2 \beta_1 \beta_2 c_4 E_{22}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\bar{z}_1, \bar{z}_4][\bar{y}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_2, \bar{z}_3] &= 2a_4c_1\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} - 4a_4a_3c_1\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 2a_1c_4\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} + \\
&+ 4a_1a_3c_4\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 4a_4a_2c_1\beta_1\beta_2c_3E_{22} + 4a_1a_2c_4\beta_1\beta_2c_3E_{22} \\
&= 2a_4c_1\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} - 4a_3a_4c_1\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 2a_1c_4\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} + \\
&+ 4a_1a_3c_4\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 4a_2a_4c_1\beta_1\beta_2c_3E_{22} + 4a_1a_2c_4\beta_1\beta_2c_3E_{22}; \\
[\bar{z}_2, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_1][\bar{y}_2, \bar{z}_4] &= 2a_3c_2\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} - 4a_4a_3c_2\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_2c_3\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} + \\
&+ 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_3c_2\beta_1\beta_2c_4E_{22} + 4a_2a_1c_3\beta_1\beta_2c_4E_{22} \\
&= 2a_3c_2\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} - 4a_3a_4c_2\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_2c_3\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} + \\
&+ 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_3c_2\beta_1\beta_2c_4E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1\beta_2c_4E_{22}; \\
[\bar{z}_3, \bar{z}_4][\bar{y}_1, \bar{z}_1][\bar{y}_2, \bar{z}_2] &= 2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} - 4a_4a_2c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} + \\
&+ 4a_3a_2c_4\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_4c_3\beta_1\beta_2c_2E_{22} + 4a_1a_3c_4\beta_1\beta_2c_2E_{22} \\
&= 2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} - 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} + \\
&+ 4a_2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_4c_3\beta_1\beta_2c_2E_{22} + 4a_1a_3c_4\beta_1\beta_2c_2E_{22}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&[\bar{z}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_1, \bar{z}_3][\bar{y}_2, \bar{z}_4] - [\bar{z}_1, \bar{z}_4][\bar{y}_1, \bar{z}_2][\bar{y}_2, \bar{z}_3] - [\bar{z}_2, \bar{z}_3][\bar{y}_1, \bar{z}_1][\bar{y}_2, \bar{z}_4] \\
&+ [\bar{z}_3, \bar{z}_4][\bar{y}_1, \bar{z}_1][\bar{y}_2, \bar{z}_2] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, os polinômios (i)-(vii) são *-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$. ■

2.1 Um T_* -Ideal Gerado por *-Identidades Polinomiais de $M_{1,1}(E)$

Seja I o T_* -ideal gerado por

$$[y_1, y_2], z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1, [z_1, z_2][z_3, z_4]$$

e pelos polinômios listados na Proposição 2.2. O principal objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Em característica zero, o T_* -ideal das *-identidades polinomiais da álgebra com involução $M_{1,1}(E)$ é gerado, como T_* -ideal, pelos polinômios*

$$[y_1, y_2], z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1, [z_1, z_2][z_3, z_4]$$

e pelos polinômios (i), ..., (vii) da Proposição 2.2. Em outras palavras, $I = T_*(M_{1,1}(E))$.

Como os geradores de I são *-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$, temos que $I \subseteq T_*(M_{1,1}(E))$. Para mostrar a inclusão contrária, primeiramente serão deduzidas algumas consequências dos geradores de I . Denotaremos por $(-1)^\rho$ o sinal da permutação ρ .

Observação 2.4. *Para quaisquer permutações $\sigma, \tau \in S_l$, o ideal I contém o polinômio*

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)}, z_{\tau(2)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] - (-1)^{\sigma\tau} [y_1, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_l, z_l].$$

De fato, sendo f_1 e f_2 elementos simétricos de $K\langle Y \cup Z \rangle$, temos que $[f_1, f_2] \in I$ e assim $f_1f_2 \equiv_I f_2f_1$ (onde \equiv_I significa congruência módulo I). Como qualquer comutador da

forma $[y_i, z_j]$ é simétrico, logo, módulo I , podemos reorganizar os comutadores de forma a ordenar os y_i 's. Assim:

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)}, z_{\tau(2)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I [y_1, z_{\tau(\sigma^{-1}(1))}] \cdots [y_l, z_{\tau(\sigma^{-1}(l))}].$$

Ora, mas segue da identidade (v) que $[y_1, z_1][y_2, z_2] \equiv_I -[y_1, z_2][y_2, z_1]$. Logo,

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)}, z_{\tau(2)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I (-1)^{\tau\sigma^{-1}} [y_1, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_l, z_l].$$

Como $(-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^\sigma$, segue o resultado.

Lema 2.5. *Para qualquer permutação $\sigma \in S_k$, o ideal I contém o polinômio*

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] - [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}].$$

Demonstração. Primeiramente, note que o comutador $[y_i, z_{j_1}, \cdots, z_{j_m}]$ é simétrico (veja a Proposição 1.32). Além disso, segue da identidade (i) que

$$[y_1, z_1, z_2, z_3] \equiv_I 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3] = 2(z_2 \circ z_1)[y_1, z_3] \equiv_I [y_1, z_2, z_1, z_3]. \quad (2.1.1)$$

Dado então qualquer $k > 2$ e $\sigma \in S_k$, como

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] = [[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k-2)}], z_{\sigma(k-1)}, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}]$$

e $[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k-2)}]$ é simétrico, usando a igualdade (2.1.1) e indução, os z_i 's podem ser organizados, ou seja,

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] \equiv_I [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}].$$

Portanto, $[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] - [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}] \in I$. ■

Lema 2.6. *O seguinte polinômio*

$$2z_2[y_1, z_1] + 2z_1[y_1, z_2] + [y_1, z_1, z_2] + [y_1, z_2, z_1]$$

é um elemento de I .

Demonstração. Para quaisquer a_1, a_2 e a_3 numa álgebra associativa, tem-se que

$$[a_1, a_2 \circ a_3] = [a_1, a_2] \circ a_3 + a_2 \circ [a_1, a_3].$$

Como $z_1 \circ z_2$ é simétrico (veja Proposição 1.32), segue que

$$[y_1, z_1] \circ z_2 + z_1 \circ [y_1, z_2] = [y_1, z_1 \circ z_2] \in I.$$

Note então que,

$$\begin{aligned} [y_1, z_1, z_2] + z_2[y_1, z_1] &= [y_1 z_1 - z_1 y_1, z_2] + z_2(y_1 z_1 - z_1 y_1) \\ &= y_1 z_1 z_2 - z_1 y_1 z_2 - z_2 y_1 z_1 + z_2 z_1 y_1 + z_2 y_1 z_1 - z_2 z_1 y_1 \\ &= [y_1, z_1] z_2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2z_2[y_1, z_1] + 2z_1[y_1, z_2] + [y_1, z_1, z_2] + [y_1, z_2, z_1] &= z_2[y_1, z_1] + [y_1, z_1] z_2 + z_1[y_1, z_2] + \\ &\quad + [y_1, z_2] z_1 \\ &= [y_1, z_1] \circ z_2 + z_1 \circ [y_1, z_2] \\ &= [y_1, z_1 \circ z_2]. \end{aligned}$$

e portanto segue o resultado. ■

Lema 2.7. *O ideal I contém o polinômio*

$$4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3].$$

Demonstração. Primeiramente, lembre que $2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3] \in I$, pela identidade (i) da Proposição 2.2. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} 4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] &= 4z_1z_2(y_1z_3 - z_3y_1) - 2(z_1z_2 - z_2z_1)(y_1z_3 - z_3y_1) \\ &= 4z_1z_2y_1z_3 - 4z_1z_2z_3y_1 - 2z_1z_2y_1z_3 + 2z_1z_2z_3y_1 + \\ &\quad + 2z_2z_1y_1z_3 - 2z_2z_1z_3y_1 \\ &= 2z_1z_2y_1z_3 - 2z_1z_2z_3y_1 + 2z_2z_1y_1z_3 - 2z_2z_1z_3y_1 \\ &= 2z_1z_2(y_1z_3 - z_3y_1) + 2z_2z_1(y_1z_3 - z_3y_1) \\ &= 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3]. \end{aligned}$$

Portanto, $4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3] \in I$. ■

Lema 2.8. *O seguinte polinômio pertence a I :*

$$[z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4].$$

Demonstração. Considere $f = [z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]$. Segue da identidade (iv) da Proposição 2.2, que, módulo I ,

$$\begin{aligned} [z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] &\equiv -2[z_2, z_3]z_1[y_1, z_4]; \\ [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] &\equiv -2[z_1, z_3]z_2[y_1, z_4]; \text{ e} \\ [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4] &\equiv -2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4]. \end{aligned}$$

Logo, módulo I ,

$$f \equiv -2[z_2, z_3]z_1[y_1, z_4] + 2[z_1, z_3]z_2[y_1, z_4] - 2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4].$$

Já da identidade (b) do Lema 2.1, segue que $z_1z_2z_3 \equiv_I z_3z_2z_1$. Daí,

$$\begin{aligned} f &\equiv_I -2([z_2, z_3]z_1 - [z_1, z_3]z_2 + [z_1, z_2]z_3)[y_1, z_4] \\ &= -2(z_2z_3z_1 - z_3z_2z_1 - z_1z_3z_2 + z_3z_1z_2 + z_1z_2z_3 - z_2z_1z_3)[y_1, z_4] \\ &\equiv_I 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f \in I$. ■

Lema 2.9. *O ideal I contém o polinômio*

$$\begin{aligned} [z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + \\ + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} f &= [z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1] - \\ &\quad - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8, segue que, módulo I ,

$$[z_1, z_2][y_1, z_3, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] \equiv -[z_2, z_3][y_1, z_1, z_4].$$

Logo, módulo I ,

$$\begin{aligned} f &\equiv [z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1] - \\ &\quad - [z_2, z_3][y_1, z_1, z_4]. \end{aligned}$$

Ora, note que:

$$\begin{aligned} [y_1, z_3, z_2] - [y_1, z_2, z_3] &= [y_1 z_3 - z_3 y_1, z_2] - [y_1 z_2 - z_2 y_1, z_3] \\ &= y_1 z_3 z_2 - z_3 y_1 z_2 - z_2 y_1 z_3 + z_2 z_3 y_1 - \\ &\quad - y_1 z_2 z_3 + z_2 y_1 z_3 + z_3 y_1 z_2 - z_3 z_2 y_1 \\ &= y_1 [z_3, z_2] - [z_3, z_2] y_1 \\ &= [y_1, [z_3, z_2]]. \end{aligned}$$

Analogamente, $[y_1, z_4, z_1] - [y_1, z_1, z_4] = [y_1, [z_4, z_1]]$. Logo, módulo I ,

$$\begin{aligned} f &\equiv [z_1, z_4][y_1, [z_3, z_2]] + [z_2, z_3][y_1, [z_4, z_1]] \\ &= [z_1, z_4]y_1[z_3, z_2] + [z_2, z_3]y_1[z_4, z_1] - [z_1, z_4][z_3, z_2]y_1 - [z_2, z_3][z_4, z_1]y_1 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

pela identidades (c) (Lema 2.1) e (ii) (Proposição 2.2), lembrando que $[z_i, z_j] = -[z_j, z_i]$. ■

2.2 Os Geradores do Espaço $\Gamma_{l,m}(I)$

O espaço vetorial de todos os polinômios *-próprios multilineares nas variáveis y_1, \dots, y_l e z_1, \dots, z_m na álgebra $F\langle Y \cup Z \rangle / I$ é o quociente $(\Gamma_{l,m} + I) / I$. Temos

$$\Gamma_{l,m}(I) = \frac{\Gamma_{l,m}}{I \cap \Gamma_{l,m}} \simeq \frac{\Gamma_{l,m} + I}{I}.$$

No restante deste capítulo, um circunflexo sobre uma variável significa que ela está faltando na expressão. Ademais, se $f \in \Gamma_{l,m}$, a sua imagem em $\Gamma_{l,m}(I)$ também será representado por f (ao invés de \hat{f}).

Primeiramente, será feito o estudo do subespaço $\Gamma_{0,m}$. Nesse caso, são considerados apenas polinômios $f(z_1, \dots, z_m)$ nas variáveis antissimétricas.

Lema 2.10. *O espaço $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1 \cdots z_m \quad \text{e} \quad z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{m-1} [z_i, z_m], \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Demonstração. Note que $[z_i, z_j] \circ z_k = [z_i, z_j]z_k + z_k[z_i, z_j] \in I$, pois

$$[z_i, z_j]z_k + z_k[z_i, z_j] = z_i z_j z_k - z_j z_i z_k + z_k z_i z_j - z_k z_j z_i$$

e $z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1 \in I$. Logo, módulo I ,

$$[z_i, z_j]z_k \equiv -z_k[z_i, z_j]. \tag{2.2.1}$$

Observe então que

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n [z_a, z_b] = z_2 z_1 z_3 \cdots z_n [z_a, z_b] + [z_1, z_2] z_3 \cdots z_n [z_a, z_b]$$

e

$$[z_1, z_2] z_3 \cdots z_n [z_a, z_b] \equiv_I (-1)^{n-2} z_3 \cdots z_n [z_1, z_2] [z_a, z_b].$$

Como o segundo membro dessa congruência pertence a I (identidade (c) do Lema 2.1), segue que

$$[z_1, z_2] z_3 \cdots z_n [z_a, z_b] \in I$$

e daí

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n [z_a, z_b] \equiv_I z_2 z_1 z_3 \cdots z_n [z_a, z_b].$$

Logo, para qualquer $\sigma \in S_n$,

$$z_{i_{\sigma(1)}} z_{i_{\sigma(2)}} \cdots z_{i_{\sigma(n)}} [z_a, z_b] \equiv_I z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_n} [z_a, z_b]. \quad (2.2.2)$$

Sejam $\sigma \in S_m - \{id\}$ e $i \in \{2, \dots, m\}$ tal que $\sigma(i-1) > \sigma(i)$. Então

$$z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(i-1)} z_{\sigma(i)} \cdots z_{\sigma(m)} = z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i-1)} \cdots z_{\sigma(m)} + z_{\sigma(1)} \cdots [z_{\sigma(i-1)}, z_{\sigma(i)}] \cdots z_{\sigma(m)}.$$

Agora, segue das congruências (2.2.1) e (2.2.2) que

$$z_{\sigma(1)} \cdots [z_{\sigma(i-1)}, z_{\sigma(i)}] \cdots z_{\sigma(m)} \equiv_I \pm z_{\sigma(1)} \cdots z_{\hat{\sigma(i)}} \cdots z_{\hat{\sigma(i-1)}} \cdots z_{\sigma(m)} [z_{\sigma(i-1)}, z_{\sigma(i)}].$$

Aplicando esta ideia repetidamente, concluímos que $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelo monômio $z_1 z_2 \cdots z_m$ e pelos polinômios $z_1 \cdots \hat{z}_a \cdots \hat{z}_b \cdots z_m [z_a, z_b]$, $1 \leq a < b \leq m$.

Suponha $a, b \neq m$. Note que

$$z_m [z_a, z_b] + z_a [z_b, z_m] - z_b [z_a, z_m] = z_m z_a z_b - z_m z_b z_a + z_a z_b z_m - z_a z_m z_b - z_b z_a z_m + z_b z_m z_a$$

pertence a I , pela identidade (b) do Lema 2.1. Logo, $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelo monômio $z_1 \cdots z_m$ e pelos polinômios $z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{m-1} [z_i, z_m]$, $i = 1, \dots, m-1$. ■

Observação 2.11. *Observando a identidade (a) do Lema 2.1 e observando que um comutador da forma $[y_{i_1}, z_{j_1}, \dots, z_{j_m}]$ é simétrico, podemos concluir que qualquer comutador $[r_1, \dots, r_h] \in F\langle Y \cup Z \rangle / I$ não nulo (onde cada r_i é uma variável) possui no máximo uma variável simétrica. Ademais, podemos supor que tal variável sempre aparece na primeira entrada. De fato, é possível mostrar que em uma álgebra associativa, o comutador $[x_1, \dots, x_n, a]$ pode ser escrito como combinação linear de comutadores da forma $[a, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$, $\sigma \in S_n$. Para $n = 2$, esse resultado é consequência direta da identidade de Jacobi (veja a Observação 1.9). Supondo que o resultado é válido para algum $n \geq 2$, segue que*

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, a] &= [[x_1, \dots, x_n], x_{n+1}, a] \\ &= -[x_{n+1}, a, [x_1, \dots, x_n]] - [a, [x_1, \dots, x_n], x_{n+1}] \\ &= [[a, x_{n+1}], [x_1, \dots, x_n]] + [[x_1, \dots, x_n, a], x_{n+1}] \\ &= -[x_1, \dots, x_n, [a, x_{n+1}]] + [[x_1, \dots, x_n, a], x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Fazendo agora $y = [a, x_{n+1}]$ e usando a hipótese de indução em $[x_1, \dots, x_n, y]$ e em $[x_1, \dots, x_n, a]$, segue o resultado.

Temos que a Observação 2.11 implica que

$$\Gamma_{l,m}(I) = 0, \text{ para todo } l > m \geq 0.$$

Em outras palavras, $\Gamma_{l,m} \subseteq I$, para todo $l > m \geq 0$.

Lema 2.12. *O espaço $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado pelo polinômio $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$.*

Demonstração. Como as variáveis simétricas só aparecem dentro de comutadores e em cada comutador só aparece no máximo uma variável simétrica, é fácil ver que $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado pelos polinômios

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}], \quad \sigma, \tau \in S_l.$$

Mas, da Observação 2.4, segue que

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I (-1)^{\sigma\tau} [y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l].$$

Portanto, $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado por $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$. ■

Agora, considere $m = l + k$, $k \geq 0$. Para qualquer permutação $\sigma \in S_{l+k}$, define-se

$$p_\sigma = [y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+k)}]. \quad (2.2.3)$$

Se $m = l + 1$, para $\sigma \in S_{l+1}$, define-se os polinômios

$$f_\sigma = z_{\sigma(1)}[y_1, z_{\sigma(2)}][y_2, z_{\sigma(3)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+1)}]. \quad (2.2.4)$$

Se $m = l + k > l + 1$ (ou seja, $k > 1$), para $\sigma \in S_{l+k}$, definem-se

$$g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+k)}]. \quad (2.2.5)$$

Lema 2.13. *Seja $l > 0$ e $k \geq 2$, segue que:*

- (1) *O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e f_τ , para $\sigma, \tau \in S_{l+1}$.*
- (2) *O espaço $\Gamma_{l,l+k}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e g_τ , para $\sigma, \tau \in S_{l+k}$.*

Demonstração. Seja $m \geq l + 1$. Os elementos de $\Gamma_{l,m}(I)$ são combinações lineares de polinômios $c_1 \cdots c_n$ ($n \geq l$), onde c_i ou é uma variável antissimétrica ou é um comutador do tipo $[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]$, com $y \in Y$ e $z_{i_1}, \cdots, z_{i_n} \in Z$. Como

$$\begin{aligned} [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}, z] &= [[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}], z] \\ &= [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]z - z[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}], \end{aligned}$$

segue que

$$[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]z = [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}, z] + z[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}].$$

Daí, qualquer elemento de $\Gamma_{l,m}(I)$ é combinação linear de polinômios $wc'_1c'_2 \cdots c'_t$, onde

$$w = z_{\beta(1)}z_{\beta(2)} \cdots z_{\beta(t)}$$

é um monômio de grau $t \geq 0$ em variáveis antissimétricas e

$$c'_i = [y_{\rho(i)}, z_{\beta(t+h_1+\cdots+h_{i-1}+1)}, \cdots, z_{\beta(t+h_1+\cdots+h_i)}]$$

é um comutador de comprimento $h_i + 1 \geq 2$, para permutações $\rho \in S_l$, $\beta \in S_m$ e $l+1$ -uplas de inteiros (t, h_1, \dots, h_l) .

Como $[y_1, y_2]$ pertence ao ideal I e cada c'_i é simétrico, podemos supor $\rho(i) = i$, $i = 1, \dots, l$. Ademais, a identidade (vi) permite supor que $h_i = 1$ para qualquer $i \geq 2$. Em outras palavras, $\Gamma_{l,m}(I)$ é gerado pelos polinômios

$$P_{t,\beta} = z_{\beta(1)} \cdots z_{\beta(t)} [y_1, z_{\beta(t+1)}, \dots, z_{\beta(m-l+1)}] [y_2, z_{\beta(m-l+2)}] \cdots [y_l, z_{\beta(m)}]$$

com $0 \leq t \leq m - l$ e $\beta \in S_m$. Observe que $P_{0,\beta} = p_\beta$.

Se $m = l + 1$, então $t \in \{0, 1\}$, assim,

$$\begin{aligned} P_{0,\beta} &= [y_1, z_{\beta(1)}, z_{\beta(2)}] [y_2, z_{\beta(3)}] \cdots [y_l, z_{\beta(l+1)}] = p_\beta \\ P_{1,\beta} &= z_{\beta(1)} [y_1, z_{\beta(2)}] [y_2, z_{\beta(3)}] \cdots [y_l, z_{\beta(l+1)}] = f_\beta. \end{aligned}$$

Agora, assumamos $m \geq l + 2$. Será denotado por W_m o subespaço de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerado pelos polinômios p_σ e g_τ , $\sigma, \tau \in S_m$. Será provado, por indução em m , que $W_m = \Gamma_{l,m}(I)$. Mas, W_m é um S_m -submódulo de $\Gamma_{l,m}(I)$ com respeito à ação natural do grupo simétrico S_m , permutando as variáveis z_1, \dots, z_m (veja no final de Seção 1.4). Assim, é suficiente mostrar que W_m contém os polinômios $P_{t,\text{Id}}$ para qualquer $1 \leq t \leq m - l$.

Se $m = l + 2$, considere os polinômios $P_{1,\text{Id}} = z_1 [y_1, z_2, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m]$ e $P_{2,\text{Id}} = z_1 z_2 [y_1, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m]$. Note que, pela identidade (iii),

$$\begin{aligned} 2P_{1,\text{Id}} &= (-[y_1, z_1, z_2, z_3] - [z_1, z_2] [y_1, z_3] - [z_1, z_3] [y_1, z_2] - \\ &\quad - [z_2, z_3] [y_1, z_1]) [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= -[y_1, z_1, z_2, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - [z_1, z_2] [y_1, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - \\ &\quad - [z_1, z_3] [y_1, z_2] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - [z_2, z_3] [y_1, z_1] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= -p_{\text{Id}} - g_{\text{Id}} - g_{\gamma_1} - g_{\gamma_2} \in W_m \end{aligned}$$

onde $\gamma_1 = (2 \ 3)$ e $\gamma_2 = (1 \ 2 \ 3)$. Logo, $P_{1,\text{Id}} \in W_m$.

Já pelo Lema 2.7, segue que

$$\begin{aligned} 4P_{2,\text{Id}} &= (2[z_1, z_2] [y_1, z_3] + [y_1, z_1, z_2, z_3]) [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= 2[z_1, z_2] [y_1, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] + [y_1, z_1, z_2, z_3] [y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= 2g_{\text{Id}} + p_{\text{Id}} \in W_m. \end{aligned}$$

Logo, $P_{2,\text{Id}} \in W_m$.

Se $m = l + k > l + 2$, então note que pela hipótese de indução,

$$z_2 z_3 \cdots z_t [y_1, z_{t+1}, \dots, z_{k+1}] [y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{k+l}]$$

é combinação linear dos polinômios

$$\begin{aligned} &[y_1, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}] [y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \text{ e} \\ &[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}] [y_1, z_{\tau(4)}, \dots, z_{\tau(k+1)}] [y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}], \end{aligned}$$

onde σ e τ são permutações do conjunto $\{2, 3, \dots, m\}$. Logo, $P_{t,\text{Id}}$ é combinação linear dos polinômios

$$\begin{aligned} &z_1 [y_1, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}] [y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \quad \text{e} \\ &z_1 [z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}] [y_1, z_{\tau(4)}, \dots, z_{\tau(k+1)}] [y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] \end{aligned}$$

onde σ e τ são permutações do conjunto $\{2, 3 \dots, m\}$.

Como $[y_1, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}]$ é simétrico, substituindo y_1 na identidade (iii) por este polinômio, e também substituindo, na mesma identidade, z_2 por $z_{\sigma(k)}$ e z_3 por $z_{\sigma(k+1)}$, e depois multiplicando por $[y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]$, obtemos o primeiro como combinação linear de polinômios de W_m .

Já para o segundo polinômio, como visto na prova do Lema 2.10, $z_1[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}] \equiv_I -[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}]z_1$. Assim, usando a identidade (iv),

$$\begin{aligned} & z_1[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \dots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] = \\ & - [z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}]z_1[y_1, z_{\tau(4)}, \dots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] = \\ & \frac{1}{2}[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \dots, z_{\tau(k)}, z_1, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] \in W_n \end{aligned}$$

pois é múltiplo escalar de algum g_γ .

Portanto, $\Gamma_{l,m}(I) = W_m$. ■

Proposição 2.14. *O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios*

- $f = z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_1 = [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_i = [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}]$ para $i = 2, \dots, l+1$.

Demonstração. De acordo com o Lema 2.13, $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios $p_\sigma = [y_1, z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_2, z_{\sigma(3)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+1)}]$ e $f_\tau = z_{\tau(1)}[y_1, z_{\tau(2)}][y_2, z_{\tau(3)}] \cdots [y_l, z_{\tau(l+1)}]$, onde $\sigma, \tau \in S_{l+1}$. A Observação 2.4 permite assumir $\sigma(2) < \sigma(3) < \dots < \sigma(l+1)$ e $\tau(2) < \tau(3) < \dots < \tau(l+1)$. Assim, os geradores são f , p_i ($i \geq 1$) e $z_j[y_1, z_1] \cdots [y_j, z_{j+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}]$, para $j > 1$. Finalmente, pelo Lema 2.6, o polinômio $z_j[y_1, z_1]$ é combinação linear (módulo I) dos polinômios $z_1[y_1, z_j]$, $[y_1, z_j, z_1]$ e $[y_1, z_1, z_j]$. Daí, usando a Observação 2.4, segue o resultado. ■

Assuma $m = l + k \geq l + 2$, e considere os subespaços $U_{l,m}$ e $V_{l,m}$ de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerados pelos polinômios p_σ e g_τ , respectivamente ($\sigma, \tau \in S_m$):

$$\begin{aligned} U_{l,m} &= \langle [y_1, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]; \sigma \in S_m \rangle \\ V_{l,m} &= \langle [z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}][y_1, z_{\tau(3)}, \dots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}]; \tau \in S_m \rangle. \end{aligned}$$

Segue do Lema 2.13 que

$$\Gamma_{l,m}(I) = U_{l,m} + V_{l,m}, \quad m \geq l + 2. \quad (2.2.6)$$

Proposição 2.15. *O espaço $U_{l,m}$ é gerado pelos polinômios*

$$P_{(j_1, \dots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$$

onde $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_l\}$ com $m = k + l$ e

- $i_1 < \dots < i_k$,
- $j_1 < \dots < j_l$.

Demonstração. Ora, pela Observação 2.4, segue que, módulo I ,

$$\begin{aligned} & [y_1, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \equiv \\ & (-1)^\gamma [[y_1, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]] \end{aligned}$$

onde γ é a permutação do conjunto $\{\sigma(k+1), \sigma(k+2), \dots, \sigma(m)\}$ que organiza-o de modo a obter $j_1 < j_2 < \dots < j_l$.

Pelo Lema 2.5, segue que, módulo I ,

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}, z_{j_1}] \equiv [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{j_1}]$$

com $i_1 < \dots < i_k$. Portanto, vale o resultado. ■

Consideramos agora o espaço $V_{l,m}$. A argumentação será iniciada com o caso mais fácil: $l = 1$, e assim $m \geq 3$.

Lema 2.16. *O espaço $V_{1,m}$ é gerado pelos polinômios*

- $G = [z_1, z_m][y_1, z_2, \dots, z_{m-1}]$;
- $G_{2;(i,j)} = [z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_m, z_j]$ ($2 \leq i < j \leq m$);
- $G_{3;(i)} = [z_2, z_i][y_1, z_3, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_m, z_1]$ ($3 \leq i \leq m$).

Demonstração. Sejam V o subespaço de $V_{1,m}$ gerado pelos polinômios do enunciado e $g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(m)}]$. O objetivo aqui é mostrar que g_σ pertence a V . Pode-se assumir $\sigma(1) < \sigma(2)$. Pelo Lema 2.5, é possível reorganizar as variáveis $z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(m-1)}$ em qualquer ordem. Logo, suponha $\sigma(3) < \dots < \sigma(m-1)$. Assim, $1 \in \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(m)\}$.

Suponha $1 = \sigma(m)$, então ou temos $g_\sigma = [z_2, z_i][y_1, z_3, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_1] = G_{3;(i)} \in V$ ou $g_\sigma = [z_i, z_j][y_1, z_2, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_1]$, com $3 \leq i < j \leq m$. Nesse último caso, obtemos pelo Lema 2.5,

$$g_\sigma = [z_i, z_j][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_2, z_1].$$

Pelo Lema 2.8, vemos claramente que g_σ é combinação linear dos polinômios

$$[z_2, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_1] \quad \text{e} \quad [z_2, z_j][y_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_1]$$

que são $G_{3;(i)}$ e $G_{3;(j)}$, respectivamente. Logo, se $\sigma(m) = 1$, então $g_\sigma \in V$.

Da mesma forma, se $1 = \sigma(3)$, então

$$[z_i, z_j][y_1, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{\sigma(m)}] = [z_i, z_j][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, z_1, z_{\sigma(m)}]$$

que é claramente combinação linear dos polinômios

$$[z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{\sigma(m)}] \quad \text{e} \quad [z_1, z_j][y_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{\sigma(m)}].$$

Logo, se $\sigma(3) = 1$, então $g_\sigma \in V$.

Por fim, analisaremos o caso em que $1 = \sigma(1)$. É suficiente mostrar que

$$[z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{\sigma(m)}] \in V.$$

Isso é claramente verdade se $m = 3$ (basta olhar o polinômio $G_{2;(i,j)}$). Logo, assumindo que $m \geq 4$, a prova é feita através de indução inversa sobre $\sigma(m)$. Se $\sigma(m) = m$, então o polinômio é um elemento de V , pois obtém-se o polinômio $G_{2;(i,m)}$.

Então, para um certo $j \geq 2$, assumimos que a hipótese é verdadeira para $\sigma(m) \geq j+1$. Considerando agora o polinômio $g = [z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_j]$, claramente, se $i < j$, está feito, pois $g = G_{2;(i,j)}$, que é um gerador de V . Suponha então $i > j$ e seja $h = \sigma(m-1)$. Se $j > h$, então $2 \leq \sigma(3) < \dots < \sigma(m-1) = h < j < i$ e daí $i = m$, $j = m-1$ e $h = m-2$ (observe que o conjunto $\{\sigma(3), \dots, \sigma(m-1), j, i\}$ tem $m-1$ elementos). Neste caso, $g = [z_1, z_m][y_1, \dots, z_{m-1}] = G$, o primeiro gerador de V .

Assuma então $j < h$. Neste caso, pelo Lema 2.9, segue que, módulo I ,

$$\begin{aligned} [z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_h, z_j] &= [[y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{\sigma(m-2)}], z_h, z_j] \\ &= [z_1, z_i][y_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_j, z_h] - [z_j, z_h][y_1, \dots, z_i, z_1] + \\ &\quad + [z_1, z_h][y_1, \dots, z_j, z_i] - [z_1, z_j][y_1, \dots, z_h, z_i]. \end{aligned}$$

A última parcela é o gerador $G_{2;(j,i)}$ de V ; a segunda parcela pertence a V pelo primeiro caso ($\sigma(m) = 1$). Por fim, a primeira e a terceira parcelas pertencem a V pela hipótese de indução. \blacksquare

Proposição 2.17. *O espaço $V_{l,m}$ ($m = l + k$ com $l \geq 2$ e $k \geq 2$) é gerado pelos seguintes polinômios:*

- (1) $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \dots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{l+k}]$;
- (2) $G_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})} = [z_1, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_{j_2}][y_2, z_{j_3}] \cdots [y_l, z_{j_{l+1}}]$
onde $2 \leq j_1 < \dots < j_{l+1} \leq m$ e $2 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq m$;
- (3) $G_{3;(j_1, \dots, j_l)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$
onde $3 \leq j_1 < \dots < j_l \leq m$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq m$;
- (4) $G_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_l, z_{j_{l-1}}]$
onde $3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} \leq m$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq m$ com $j_1 < i_{k-1}$.

Demonstração. Seja W o subespaço de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios do enunciado. Escreva $n = k+1$ e, para qualquer $A \subset \{1, \dots, m\}$ de cardinalidade n , considere o subespaço V_A de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios g_σ (polinômio (2.2.5)) tais que $\sigma(i) \in A$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. O objetivo é provar que $V_A \subseteq W$ para todo A .

Sejam $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ subconjuntos de $\{1, \dots, m\}$, onde $a_1 < \dots < a_n$ e $b_1 < \dots < b_n$. Diremos que $A \leq B$ se $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$ na ordem lexicográfica. Assim, a prova da afirmação $V_A \subseteq W$ é feita através de indução sobre A . Primeiro, considere o conjunto $A = \{1, \dots, n\}$. Se $g_\sigma \in V_A$, então, pela Observação 2.4, pode-se assumir $\sigma(n+1) < \dots < \sigma(m)$, isto é,

$$g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(n)}][y_2, z_{n+1}] \cdots [y_l, z_m].$$

Pelo Lema 2.16, $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(n)}]$ é uma combinação linear (mod I) dos polinômios

$$\begin{aligned} &[z_1, z_n][y_1, z_2, \dots, z_{n-1}]; \\ &[z_1, z_i][y_1, z_2, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, z_n, z_j] \quad (2 \leq i < j \leq n); \\ &[z_2, z_i][y_1, z_3, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n, z_1]; \quad (3 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

Assim, g_σ é uma combinação linear dos geradores de G , $G_{2;(i,j,n+1,n+2,\dots,m)}$ e $G_{3;(i,n+1,n+2,\dots,m)}$ de W , e daí $V_{\{1,\dots,n\}} \subseteq W$.

Agora, seja $A \neq \{1, \dots, n\}$ e assumamos que $V_B \subseteq W$ para qualquer $B < A$. Se $g_\sigma \in V_A$, então $A = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$. Como acima, é possível assumir $\sigma(n+1) < \dots < \sigma(m)$. Assim, se $1 \notin A$, então $1 = \sigma(n+1)$. Aplicando a Observação 2.4 em

$$[[y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(n-1)}], z_{\sigma(n)}] [y_2, z_1] [y_3, z_{\sigma(n+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]$$

segue que

$$g_\sigma = -[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(n-1)}, z_1][y_2, z_{\sigma(n)}][y_3, z_{\sigma(n+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]$$

pois apenas permutamos 1 e $\sigma(n)$. Isto significa que existe algum subconjunto B de $\{1, \dots, m\}$ tal que $1 \in B$ e $g_\sigma \in V_B$. Como $1 \in B$, temos $B < A$. Logo, $g_\sigma \in V_B \subseteq W$.

Agora será analisado o caso onde $1 \in A$. Seja $A = \{1, a_2, \dots, a_n\}$. Então, pelo Lema 2.16 e Observação 2.4, qualquer elemento de V_A é uma combinação linear (mod I) dos polinômios

- (α) $[z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{a_{n-1}}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- (β) $[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{a_n}, z_{a_j}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ ($2 \leq i < j \leq n$);
- (γ) $[z_{a_2}, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ ($3 \leq i \leq n$),

onde $b_1 < \dots < b_{l-1}$ e $\{1, \dots, m\} = \{1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$.

Agora, cada um dos polinômios anteriores será considerado separadamente.

Caso (α):

$$g = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{a_{n-1}}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_{n-1} > b_1$, então pela Observação 2.4,

$$g = -[z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{b_1}][y_2, z_{a_{n-1}}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Isso implica que $g \in V_B$, onde $B = \{1, a_2, \dots, a_{n-2}, b_1, a_n\} < A$, e assim $g \in W$ por indução.

Se $a_{n-1} < b_1$, então, como $1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < b_1 < \dots < b_{l-1}$ e $a_{n-1} < a_n$, segue que $\{1, a_2, \dots, a_{n-1}\} = \{1, 2, \dots, n-1\}$, pois

$$1 < a_2 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} \leq m - l = k = n + 1.$$

Assim,

$$g = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_2, \dots, z_{n-1}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Claramente, pode-se assumir que $a_n > n$, pois caso contrário teríamos $A = \{1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ e daí $g = G$, o gerador de W listado em (1) no enunciado. Logo, $n \in \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$ e daí $b_1 = n$. Usando a identidade (vii) (Proposição 2.2), segue que $g - g_2 - g_3 + g_4 \in I$, onde

- $g_2 = [z_1, z_n][y_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z_{a_n}][y_2, z_{n-1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $g_3 = [z_{a_n}, z_{n-1}][y_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $g_4 = [z_{n-1}, z_n][y_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z_1][y_2, z_{a_n}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$.

Nesse caso, escreve-se $g = g_2 + g_3 - g_4$ (módulo I).

Mas $g_2 = -[z_1, z_n][y_1, z_2, \dots, z_{n-1}][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$, e assim $g_2 \in V_{\{1, \dots, n\}} \subseteq W$. De modo análogo, $g_4 \in V_{\{1, \dots, n\}} \subseteq W$.

Pelo Lema 2.5, $g_3 = [z_{a_n}, z_{n-1}][y_1, z_3, \dots, z_{n-2}, z_2, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Assim, usando a identidade do Lema 2.8, segue que

$$g_3 = ([z_{a_n}, z_2][y_1, z_3, \dots, z_{n-1}, z_1] + [z_2, z_{n-1}][y_1, z_3, \dots, z_{n-2}, z_{a_n}, z_1])[y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Note que $[z_2, z_{a_n}][y_1, z_3, \dots, z_{n-1}, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ é um gerador de W do tipo (4) e $[z_2, z_{n-1}][y_1, z_3, \dots, z_{n-2}, z_{a_n}, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ é um gerador do tipo (3). Isso conclui o caso (α).

Caso (β):

$$g = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{a_n}, z_{a_j}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_j < b_1$, então o polinômio g é um gerador de W do tipo (2). Considere então $a_j > b_1$. Pela Observação 2.4, $g = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \dots, z_{a_n}, z_{b_1}][y_2, z_{a_j}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Isso implica que $g \in V_B$ para $B = \{1, a_2, \dots, a_{j-1}, b_1, a_{j+1}, \dots, a_n\} < A$. Assim, $g \in W$, por indução.

Caso (γ):

$$g = [z_{a_2}, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_i < b_1$, então $b_1 \geq 3$ e $2 \in A$. Logo, $a_2 = 2$ e g é um gerador de W do tipo (3). Agora, suponha $a_i > b_1$ e assumamos também $a_2 > b_1$, isto é, $b_1 = 2$. Usando a identidade (vii) (Proposição 2.2) segue que $h_1 - h_2 - h_3 + g \in I$, onde

- $h_1 = [z_1, z_2][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_{a_2}][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}];$
- $h_2 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{a_2}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}];$
- $h_3 = [z_2, z_{a_2}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$

Assim, pode-se escrever $g = -h_1 + h_2 + h_3$. Claramente $h_1, h_3 \in V_B$, onde $B = \{1, 2, a_2, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n\}$. Daí, como $B < A$, segue por indução que $h_1, h_3 \in W$. Analogamente, $h_2 \in V_{\{1, 2, a_3, \dots, a_n\}}$, e assim $h_2 \in W$, pois $\{1, 2, a_3, \dots, a_n\} < A$.

A última possibilidade a considerar é o caso $a_2 < b_1$. Então $a_2 = 2$ e $g = [z_2, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Lembremos que estamos assumindo $a_i > b_1$. Se $i = n$, então o polinômio g é um gerador de W do tipo (4). Sendo $i < n$, então, usando a identidade (vii) (Proposição 2.2), segue que $g = -H_1 + H_2 + H_3$, onde

- $H_1 = [z_1, z_{b_1}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}];$
- $H_2 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_{b_1}][y_2, z_2] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}];$
- $H_3 = [z_{b_1}, z_2][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$

Como acima, H_1 e H_3 são elementos de V_B para $B = \{1, 2, a_3, \dots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \dots, a_n\} < A$. Assim, por indução, $H_1, H_3 \in W$. Ademais, pela Observação 2.4,

$$H_2 = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Daí, H_2 é uma combinação linear dos polinômios

- $q_1 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_2, z_{a_n}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_2 = [z_2, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_i}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_3 = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_2, z_{a_i}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_4 = [z_1, z_2][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_n}, z_{a_i}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;

pois, pelo Lema 2.9, tem-se que $-H_2 - q_1 + q_2 - q_3 + q_4 \in I$. Pela Observação 2.4, segue que

$$q_1 = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_2, z_{b_1}][y_2, z_{a_n}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$$

isto é, $q_1 \in V_B$, onde $B = \{1, 2, a_3, \dots, a_{n-1}\} \cup \{b_1\}$. Analogamente, os polinômios q_3 e q_4 pertencem a V_C , onde $C = \{1, 2, a_3, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n\} \cup \{b_1\}$. Como $B, C < A$, segue por indução que $q_1, q_3, q_4 \in W$. Finalmente, pelo Lema 2.5,

$$q_2 = [z_2, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \dots, z_{a_{n-1}}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$$

isto é, q_2 é um gerador de W do tipo (4), o que conclui a prova. ■

2.3 A Independência Linear

Agora será provado que os geradores dos espaços $\Gamma_{l,m}(I)$ dados nos resultados anteriores são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. Para isso, consideremos as seguintes matrizes em $M_{1,1}(E)$:

$$Y_i = \begin{pmatrix} u_i & \zeta_i \\ 0 & u_i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z_i = \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix}$$

onde $u_i = e_{6(i-1)+1}e_{6(i-1)+2}$, $\zeta_i = e_{6(i-1)+3}$, $v_i = e_{6(i-1)+4}e_{6(i-1)+5}$ e $\eta_i = e_{6i}$, para $i \in \mathbb{N}$. Observe que Y_i é um elemento simétrico e Z_i é um elemento antissimétrico na álgebra com involução $(M_{1,1}(E), *)$.

Não é difícil ver que dois produtos de elementos distintos pertencentes ao conjunto $\{u_i, \zeta_i, v_i, \eta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ são iguais na álgebra exterior se têm exatamente os mesmos fatores (não necessariamente na mesma ordem). Logo, as matrizes que definimos acima serão ideais para o que faremos a seguir.

Ademais, considere o seguinte resultado de Álgebra Linear:

Lema 2.18. *Sejam V um F -espaço vetorial e W, U subespaços de V , com $U \subseteq W$. Se $S \subset V$ é um conjunto linearmente independente módulo W e gera V módulo U , então $W = U$.*

Demonstração. De fato, se $w \in W$, então existem $a_1, \dots, a_n \in F$, $s_1, \dots, s_n \in S$ e $u \in U$ tais que

$$a_1 s_1 + \dots + a_n s_n + u = w.$$

Logo, $a_1 s_1 + \dots + a_n s_n = w - u \in W$. Mas, como o conjunto S é LI módulo W , temos que cada a_i é nulo, $i = 1, \dots, n$. Assim, $w = u \in U$.

Portanto, $W = U$. ■

Nos lemas a seguir, será provado que os geradores do espaço $\Gamma_{l,m}(I)$ são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$, e assim, com auxílio do Lema 2.18, será provado que $\Gamma_{l,m} \cap I = \Gamma_{l,m} \cap T_*(M_{1,1}(E))$.

Lema 2.19. *Os seguintes polinômios*

- $z_1 \cdots z_m$;
- $q_i = z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{m-1} [z_i, z_m]$ ($i = 1, \dots, m-1$),

são linearmente independentes módulo as *-identidades de $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Observe que a entrada (1, 1) da matriz $Z_1 \cdots Z_m$ é igual a $v_1 \cdots v_m$, a entrada (2, 2) é igual a $(-1)^m v_1 \cdots v_m$ e a entrada (1, 2) é igual a zero. De fato, note que, para $n = 2$,

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} v_1 v_2 & 0 \\ \eta_1 v_2 - v_1 \eta_2 & v_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

e para n qualquer o resultado segue por indução.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} [Z_i, Z_m] &= \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_m & 0 \\ \eta_m & -v_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_m & 0 \\ \eta_m & -v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_i v_m & 0 \\ \eta_i v_m - v_i \eta_m & v_i v_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_m v_i & 0 \\ \eta_m v_i - v_m \eta_i & v_m v_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(\eta_i v_m - v_i \eta_m) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como as entradas (2, 2) e (1, 2) de $Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1}$ são $\pm v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1}$ e zero, respectivamente, segue que

$$Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1} [Z_i, Z_m] = \pm 2v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1} (\eta_i v_m - v_i \eta_m) E_{21}.$$

Logo, $z_1 \cdots z_m$ não é combinação linear módulo $T_*(M_{1,1}(E))$ dos demais polinômios, pois a entrada (1, 1) de $Z_1 \cdots Z_m$ é um monômio não nulo de E .

Por fim, fixado $i \in \{1, \dots, m\}$, note que o monômio $v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1} \eta_i v_m$ vai aparecer na entrada (2, 1) apenas do elemento $Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1} [Z_i, Z_m]$. Como esses monômios são distintos em E , e portanto linearmente independentes, os polinômios correspondentes são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. ■

Segue então dos Lemas 2.10, 2.18 e 2.19 que

$$\Gamma_{0,m}(I) = \Gamma_{0,m}(T_*(M_{1,1}(E))). \quad (2.3.1)$$

Lema 2.20. *O polinômio $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$ não pertence a $T_*(M_{1,1}(E))$.*

Demonstração. Segue que em $M_{1,1}(E)$

$$[Y_i, Z_i] = \zeta_i \eta_i (E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_i v_i E_{12}.$$

Logo, a entrada (1, 1) de $[Y_1, Z_1] \cdots [Y_l, Z_l]$ é o monômio $\zeta_1 \eta_1 \cdots \zeta_l \eta_l$, que não é nulo em E . ■

Logo, os Lemas 2.12, 2.18 e 2.20 implicam que

$$\Gamma_{l,l}(I) = \Gamma_{l,l}(T_*(M_{1,1}(E))). \quad (2.3.2)$$

Lema 2.21. *Os seguintes polinômios*

- $f = z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_1 = [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_i = [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}]$, para $i = 2, \dots, l+1$,

são linearmente independentes módulo as *-identidades de $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Inicialmente, serão calculados os polinômios $f, p_i, i \geq 1$ nas matrizes Y_i e Z_i . De forma análoga a prova do Lema 2.20, segue que $[Y_i, Z_j] = \zeta_i \eta_j (E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_i v_j E_{12}$. Deste modo, a entrada (1, 1) de $[Y_1, Z_2][Y_2, Z_3] \cdots [Y_l, Z_{l+1}]$ é $\zeta_1 \eta_2 \zeta_2 \eta_3 \cdots \zeta_l \eta_{l+1}$, enquanto sua entrada (2, 1) é zero. Assim, a entrada (2, 1) de $Z_1[Y_1, Z_2] \cdots [Y_l, Z_{l+1}]$ é $\eta_1 \zeta_1 \eta_2 \zeta_2 \eta_3 \cdots \zeta_l \eta_{l+1}$.

Por outro lado, note que a entrada (2, 1) de $[Y_1, Z_1, Z_2]$ é zero, assim como a de $[Y_1, Z_i, Z_1]$ (veja a prova da Proposição 2.2). Deste modo, usando um argumento análogo ao usado anteriormente, $p_i(Y_1, \dots, Y_{l+1}, Z_1, \dots, Z_{l+1})$ tem entrada (2, 1) nula, para todo $i = 1, \dots, l+1$. Assim, o polinômio f não é combinação linear módulo $T_*(M_{1,1}(E))$ dos polinômios $p_i, i \geq 1$.

Agora, a entrada (1, 1) de $p_i(Y_1, \dots, Y_{l+1}, Z_1, \dots, Z_{l+1})$ é $\pm 2v_i \zeta_1 \cdots \zeta_l \eta_1 \cdots \hat{\eta}_i \cdots \eta_{l+1}$. Logo, para $i = 1, \dots, l+1$, os monômios obtidos são distintos em E . Portanto, os polinômios p_i são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. ■

Segue do lema anterior, junto com o Lema 2.18 e a Proposição 2.14 que

$$\Gamma_{l,l+1}(I) = \Gamma_{l,l+1}(T_*(M_{1,1}(E))). \quad (2.3.3)$$

Proposição 2.22. *Os seguintes polinômios de $\Gamma_{1,m}$, $m \geq 3$:*

- (1) $G = [z_1, z_m][y_1, z_2, \dots, z_{m-1}]$;
- (2) $G_{2;(i,j)} = [z_1, z_i][y_1, z_2, \dots, \hat{z}_i, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_m, z_j]$, $2 \leq i < j \leq m$;
- (3) $G_{3;(i)} = [z_2, z_i][y_1, z_3, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_m, z_1]$, $3 \leq i \leq m$;
- (4) $P_{(j)} = [y_1, z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_m, z_j]$, $1 \leq j \leq m$,

geram $\Gamma_{1,m}(I)$. Ademais, eles são linearmente independentes módulo as *-identidades de $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Como $m \geq 3$, segue que

$$\Gamma_{1,m} = U_{1,m} + V_{1,m}.$$

Pela Proposição 2.15 junto com o Lema 2.16, os polinômios do enunciado geram $\Gamma_{1,m}(I)$. Basta então provar a independência linear.

Como feito anteriormente, serão calculados os polinômios dos enunciado nas matrizes Y_i e Z_i . Denota-se por \overline{G} , $\overline{G_{2;(i,j)}}$, $\overline{G_{3;(i)}}$, $\overline{P_{(j)}}$ os elementos correspondentes em $M_{1,1}(E)$.

Primeiramente, observe que a entrada (1, 1) de $\overline{P_{(j)}} = P_{(j)}(Y_1, Z_1, \dots, Z_m)$ é $(-2)^{m-1}\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v}_j \cdots v_m \eta_j$. De fato, de modo análogo à prova da Proposição 2.2, segue que

$$\begin{aligned} \overline{P_{(j)}} = [Y_1, Z_1, \dots, \hat{Z}_j, \dots, Z_m, Z_j] &= (-2)^{m-1}\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v}_j \cdots v_m \eta_j (E_{11} + E_{22}) + \\ &+ (-2)^m \zeta_1 v_1 \cdots v_m E_{12}. \end{aligned}$$

Logo, a entrada (1, 1) de $\overline{P_{(j)}}$ é não nula em E . Como os monômios $\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v}_j \cdots v_m \eta_j$ são todos distintos, segue que os polinômios $P_{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$.

Por outro lado, qualquer combinação linear dos polinômios G , $G_{2;(i,j)}$ e $G_{3;(i)}$ calculada nas matrizes Y_i e Z_i só tem como entradas possivelmente não nulas os coeficientes de E_{21} e E_{22} (observe na prova do Lema 2.19 que um comutador do tipo $[Z_i, Z_j]$ só tem o coeficiente de E_{21} não nulo). Logo, uma combinação linear não nula das matrizes $\overline{P_{(j)}}$ não pode ser combinação linear das matrizes dos tipos \overline{G} , $\overline{G_{2;(i,j)}}$ e $\overline{G_{3;(i)}}$.

Resta agora mostrar que os polinômios G , $G_{2;(i,j)}$ e $G_{3;(i)}$ são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. Para isso, considere uma combinação linear desses polinômios com coeficientes α , $\alpha_{2;(i,j)}$ e $\alpha_{3;(i)}$, respectivamente. Assuma que isto é uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Assim, quando computado nas matrizes Y_i e Z_i , segue que

$$\alpha \overline{G} + \sum_{2 \leq i < j \leq m} \alpha_{2;(i,j)} \overline{G_{2;(i,j)}} + \sum_{i=3}^m \alpha_{3;(i)} \overline{G_{3;(i)}} = 0.$$

Note que, usando um raciocínio análogo ao visto na prova do Lema 2.19 e o cálculo de $\overline{P_{(j)}}$, as entradas (2, 1) de \overline{G} , $\overline{G_{2;(i,j)}}$ e $\overline{G_{3;(i)}}$ são, com o mesmo coeficiente $2(-2)^{m-1}$, os seguintes elementos de E :

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_m - v_1 \eta_m) \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2} \eta_{m-1}$;
- $\tilde{G}_{2;(i,j)} = (\eta_1 v_i - v_1 \eta_i) \zeta_1 v_2 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_m \eta_j$;
- $\tilde{G}_{3;(i)} = (\eta_2 v_i - v_2 \eta_i) \zeta_1 v_3 \cdots \hat{v}_i \cdots v_m \eta_1$,

respectivamente.

Analisando os monômios onde a variável η_1 não aparece, segue que

$$\alpha v_1 \eta_m \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2} \eta_{m-1} + \sum_{2 \leq i < j \leq m} \alpha_{2;(i,j)} v_1 \eta_i \zeta_1 v_2 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_m \eta_j = 0.$$

Daí, para cada par (i, j) com $i < m - 1$, segue que $\alpha_{2;(i,j)} = 0$. Assim,

$$\alpha v_1 \eta_m \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2} \eta_{m-1} + \alpha_{2;(m-1,m)} v_1 \eta_{m-1} \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2} \eta_m = 0.$$

Logo, $\alpha = \alpha_{2;(m-1,m)}$, já que η_{m-1} , η_m e ζ_1 são elementos anticomutativos e v_1, v_2, \dots, v_{m-2} são elementos centrais em E .

Considere $\beta := \alpha_{2;(m-1,m)}$, logo $\alpha = \beta$ e

$$\alpha \tilde{G} + \beta \tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \sum_{i=3}^m \alpha_{3;(i)} \tilde{G}_{3;(i)} = 0. \quad (2.3.4)$$

Sendo $m > 3$, se $3 \leq i \leq m - 2$, então o monômio $v_2\eta_i\zeta_1v_3 \cdots \hat{v}_i \cdots v_m\eta_1$ aparece apenas no polinômio $\tilde{G}_{3;(i)}$. Daí, $\alpha_{3;(i)} = 0$ para qualquer $i = 3, \dots, m - 2$, e assim a equação (2.3.4) vira

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \alpha_{3;(m-1)}\tilde{G}_{3;(m-1)} + \alpha_{3;(m)}\tilde{G}_{3;(m)} = 0.$$

Portanto,

$$0 = \alpha(\eta_1v_m - v_1\eta_m)\zeta_1v_2 \cdots v_{m-2}\eta_{m-1} + \beta(\eta_1v_{m-1} - v_1\eta_{m-1})\zeta_1v_2 \cdots v_{m-2}\eta_m + \\ + \alpha_{3;(m-1)}(\eta_2v_{m-1} - v_2\eta_{m-1})\zeta_1v_3 \cdots v_{m-2}v_m\eta_1 + \alpha_{3;(m)}(\eta_2v_m - v_2\eta_m)\zeta_1v_3 \cdots v_{m-1}\eta_1.$$

Ora, como os elementos $\eta_1, \eta_2, \eta_{m-1}, \eta_m$ e ζ_1 são anticomutativos e os elementos v_1, \dots, v_m são centrais na álgebra exterior, e $\alpha = \beta$ segue que

$$\alpha_{3;(m)} = -\alpha_{3;(m-1)} \quad , \quad \alpha = -\alpha_{3;(m)} \quad \text{e} \quad \alpha = -\alpha_{3;(m-1)}.$$

Segue das duas primeiras igualdades que $\alpha = \alpha_{3;(m-1)}$ e assim concluímos que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(m-1)} = \alpha_{3;(m)} = 0$.

Por outro lado, se $m = 3$, observe que a equação (2.3.4) fica da forma

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(2,3)} + \alpha_{3;(3)}\tilde{G}_{3;(3)} = 0$$

isto é,

$$\alpha(\eta_1v_3 - v_1\eta_3)\zeta_1\eta_2 + \beta(\eta_1v_2 - v_1\eta_2)\zeta_1\eta_3 + \alpha_{3;(3)}(\eta_2v_3 - v_2\eta_3)\zeta_1\eta_1 = 0.$$

Agora, é fácil ver que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(3)} = 0$, o que conclui a demonstração. ■

Como consequência desta última proposição e do Lema 2.18, segue que

$$\Gamma_{1,m}(I) = \Gamma_{1,m}(T_*(M_{1,1}(E))), \quad m \geq 3. \quad (2.3.5)$$

Observação 2.23. *Seja $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ tal que*

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)[y_{l+1}, z_{m+1}]$$

*é uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Então $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ é também uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. De fato, considerando em f uma qualquer substituição das variáveis por elementos de $M_{1,1}(E)$ (preservando simetria e antissimetria), denotemos por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o elemento obtido. Fazendo agora as substituições*

$$y_{l+1} = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_j & -1 \end{pmatrix}$$

onde $i \neq j$ e e_i e e_j não aparecem nos elementos a, b, c e d , temos

$$\begin{pmatrix} ae_ie_j & -2ae_i + be_ie_j \\ ce_ie_j & -2ce_i + de_ie_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [y_{l+1}, z_{m+1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde concluímos que $a = c = 0$ e também $b = d = 0$.

Proposição 2.24. *Seja $m = l + k$. Se $l \geq 2$ e $k \geq 2$, então os polinômios de $\Gamma_{l,m}$:*

- (1) $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \dots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{l+k}];$
- (2) $G_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})} = [z_1, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_{j_2}][y_2, z_{j_3}] \cdots [y_l, z_{j_{l+1}}],$ onde $2 \leq j_1 < \dots < j_{l+1} \leq m$ e $2 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq m;$
- (3) $G_{3;(j_1, \dots, j_l)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}],$ onde $3 \leq j_1 < \dots < j_l \leq m$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq m;$
- (4) $G_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_l, z_{j_{l-1}}],$ onde $3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} \leq m$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq m$ com $j_1 < i_{k-1};$
- (5) $P_{(j_1, \dots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}],$ onde $j_1 < \dots < j_l \leq m$ e $i_1 < \dots < i_k \leq m,$

são os geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$. Ademais, esses polinômios são linearmente independentes módulo as *-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Como na proposição anterior, a primeira parte da afirmação é uma consequência simples da decomposição

$$\Gamma_{l,m} = U_{l,m} + V_{l,m},$$

junto com os resultados das Proposições 2.15 e 2.22. Assim, resta provar a independência linear dos polinômios dados módulo as *-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$.

Calculando um polinômio Q nas matrizes Y_i e Z_i , denota-se por \overline{Q} o elemento correspondente de $M_{1,1}(E)$. Como na Proposição 2.22, primeiro provamos que polinômios do tipo (5) são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$, e também que o subespaço gerado por esses polinômios é independente (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) do subespaço gerado pelos demais polinômios do enunciado. Para isso, como

$$\begin{aligned} [Y_1, Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}, Z_{j_1}] &= (-2)^k \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} \eta_{j_1} (E_{11} + E_{22}) + \\ &+ (-2)^{k+1} \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_{j_1} E_{12} \end{aligned}$$

e $[Y_r, Z_{j_r}] = \zeta_r \eta_{j_r} (E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_r v_{j_r} e_{12}$, $r = 2, \dots, l$, observe que a entrada (1, 1) de $\overline{P}_{(j_1, \dots, j_l)}$ é o elemento $(-2)^k \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} \eta_{j_1} \zeta_2 \eta_{j_2} \cdots \zeta_l \eta_{j_l}$ não nulo de E . Do fato desses monômios serem dois a dois distintos em E concluímos a independência linear (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) dos polinômios $P_{(j_1, \dots, j_l)}$.

Por outro lado, em qualquer combinação linear dos elementos \overline{G} , $\overline{G}_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})}$, $\overline{G}_{3;(j_1, \dots, j_l)}$, $\overline{G}_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})}$, as possíveis entradas não nulas são apenas os coeficientes de E_{21} e E_{22} (análogo à proposição anterior). Logo, temos a independência dos subespaços gerados pelos polinômios do tipo (5) e pelos polinômios dos demais tipos.

Mostremos agora a independência linear (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) dos polinômios dos tipos (1), (2), (3) e (4). Note que, usando um raciocínio análogo ao cálculo de $\overline{P}_{(j_1, \dots, j_l)}$ e à prova do Lema 2.19, segue que as entradas (2, 1) das matrizes \overline{G} , $\overline{G}_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})}$, $\overline{G}_{3;(j_1, \dots, j_l)}$ e $\overline{G}_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})}$, com mesmo coeficiente $2(-2)^{k-2}$, são, respectivamente,

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_{k+1} - v_1 \eta_{k+1}) \zeta_1 v_2 \cdots v_{k-1} \eta_k \zeta_2 \eta_{k+2} \cdots \zeta_l \eta_{k+l};$
- $\tilde{G}_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})} = (\eta_1 v_{j_1} - v_1 \eta_{j_1}) \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_{j_2} \zeta_2 \eta_{j_3} \cdots \zeta_l \eta_{j_{l+1}};$
- $\tilde{G}_{3;(j_1, \dots, j_l)} = (\eta_2 v_{j_1} - v_2 \eta_{j_1}) \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_1 \zeta_2 \eta_{j_2} \cdots \zeta_l \eta_{j_l};$

$$\bullet \tilde{G}_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})} = (\eta_2 v_{i_{k-1}} - v_2 \eta_{i_{k-1}}) \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_1 \zeta_2 \eta_{j_1} \cdots \zeta_l \eta_{j_{l-1}},$$

onde os índices satisfazem as mesmas condições apresentadas no enunciado da proposição. Denote por $\mathcal{G}_{(i)}$ o conjunto de todos os geradores do tipo (i) , para $i = 2, 3, 4$, do enunciado da proposição. Assuma que uma combinação linear

$$\alpha G + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H H + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H H + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H H \quad (2.3.6)$$

é uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Logo, segue que em E

$$\alpha \tilde{G} + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0. \quad (2.3.7)$$

Na Equação (2.3.7), considerando os monômios em que η_1 não aparece, segue que

$$\alpha w + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H w_H = 0,$$

onde

$$w = v_1 \eta_{k+1} \zeta_1 v_2 \cdots v_{k-1} \eta_k \zeta_2 \eta_{k+2} \cdots \zeta_l \eta_{k+l}$$

e $w_H = v_1 \eta_{j_1} \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_{j_2} \zeta_2 \eta_{j_3} \cdots \zeta_l \eta_{j_{l+1}}$ se $H = G_{2;(j_1, \dots, j_{l+1})} \in \mathcal{G}_{(2)}$. Daí, para qualquer $H \in \mathcal{G}_{(2)}$, segue que $\alpha_H = 0$ se $H \neq G_{2;(k, \dots, k+l)} := G_2$. Sendo $\beta = \alpha_{G_2}$, a equação (2.3.7) se torna

$$\alpha \tilde{G} + \beta \tilde{G}_2 + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0. \quad (2.3.8)$$

Agora, fixada uma sequência (j_1, \dots, j_l) , com $3 \leq j_1 < \dots < j_l \leq m-1$, e considerando os polinômios envolvidos na Equação (2.3.8), observe que o conjunto dos elementos $\eta_1, \eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_l}$ aparece somente na parcela $\tilde{H} = \tilde{G}_{3;(j_1, \dots, j_l)}$. Para ver, por exemplo, que este conjunto de elementos não aparece nas parcelas correspondentes ao $\mathcal{G}_{(4)}$, basta observar que, nas condições do enunciado para os polinômios de tipo (4), tem-se $m \in \{j_1, \dots, j_{l-1}\}$, pois $\{i_1, \dots, i_{k-1}, j_1, \dots, j_{l-1}\} = \{3, \dots, m\}$ e i_{k-1} ou j_{l-1} é o maior elemento deste conjunto.

Assim, o coeficiente α_H , com $H = G_{3;(j_1, \dots, j_l)}$, é nulo, e daí

$$\alpha \tilde{G} + \beta \tilde{G}_2 + \sum_{3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} < m} \alpha_{(j_1, \dots, j_{l-1})} \tilde{G}_{3;(j_1, \dots, j_{l-1}, m)} + \sum_{H \in \mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0 \quad (2.3.9)$$

onde $\alpha_{(j_1, \dots, j_{l-1})} = \alpha_H$ para $H = G_{3;(j_1, \dots, j_{l-1}, m)}$.

Agora, fixada a sequência de inteiros (j_1, \dots, j_{l-1}) , com $3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} \leq m-1$, considere os polinômios envolvidos na equação (2.3.9). Observe que o conjunto dos elementos $\eta_1, \eta_2, \eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_{l-1}}$ aparece apenas no polinômio $\tilde{H} = \tilde{G}_{4;(j_1, \dots, j_{l-1})}$. Logo seu coeficiente deve ser zero, donde a combinação linear em (2.3.6) vira

$$\begin{aligned} \alpha G + \beta G_2 + \sum_{3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} < m} \alpha_{(j_1, \dots, j_{l-1})} G_{3;(j_1, \dots, j_{l-1}, m)} + \\ + \sum_{3 \leq j_1 < \dots < j_{l-2} < m} \alpha_{(j_1, \dots, j_{l-2})} G_{4;(j_1, \dots, j_{l-2}, m)} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

onde $\alpha_{(j_1, \dots, j_{l-2})} = \alpha_H$ para $H = G_{4;(j_1, \dots, j_{l-2}, m)}$.

Mostremos agora a independência linear dos polinômios por indução em l (resta apenas mostrar que os coeficientes envolvidos na combinação linear (2.3.10) são nulos, pois isso já foi visto para os demais). Note que se $l = 2$, então o último somatório da combinação linear (2.3.10) some, e ela vira

$$\alpha G + \beta G_2 + \sum_{3 \leq j_1 < k+2} \alpha_{j_1} G_{3;(j_1, k+2)}.$$

Temos então uma combinação linear dos polinômios

- $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \dots, z_k][y_2, z_m]$;
- $G_2 = [z_1, z_k][y_1, z_2, \dots, z_{k+1}][y_2, z_m]$;
- $G_{3;(j_1, m)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_3, \dots, z_{j_1}, \dots, z_{m-1}, z_1][y_2, z_m]$, onde $3 \leq j_1 \leq m - 1$;

que é uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Colocando o termo $[y_2, z_m]$ em evidência e usando a observação anterior, chegamos a uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$ que é combinação linear de polinômios dentre aqueles listados no enunciado da Proposição 2.22. Assim, o caso $l = 2$ está feito.

Supondo agora $l > 2$ e observando que (2.3.10) é uma combinação linear dos polinômios

- $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \dots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_{l-1}, z_{m-1}][y_l, z_m]$;
- $G_2 = [z_1, z_k][y_1, z_2, \dots, z_{k+1}][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_{l-1}, z_{m-1}][y_l, z_m]$;
- $G_{3;(j_1, \dots, j_{l-1}, m)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_{l-1}, z_{j_{l-1}}][y_l, z_m]$, onde $3 \leq j_1 < \dots < j_{l-1} \leq m - 1$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq m - 1$;
- $G_{4;(j_1, \dots, j_{l-2}, m)} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_{l-1}, z_{j_{l-2}}][y_l, z_m]$, onde $3 \leq j_1 < \dots < j_{l-2} \leq m - 1$ e $3 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq m - 1$ com $j_1 < i_{k-1}$;

que é uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$, basta colocar o termo $[y_l, z_m]$ em evidência e usar a observação anterior para chegar a uma *-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$ que é combinação linear de polinômios dos tipos (1), (2), (3) e (4) do enunciado, para $l - 1$. Por indução, concluímos que todos os coeficientes são nulos.

Portanto, os polinômios (1)–(5) apresentados no enunciado são linearmente independentes módulo as *-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$. ■

Segue da Proposição acima e do Lema 2.18 que

$$\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}(T_*(M_{1,1}(E))), \quad m = l + k, \quad l \geq 2, \quad k \geq 2. \quad (2.3.11)$$

Portanto, as equações (2.3.1)–(2.3.3), (2.3.5), e (2.3.11) implicam que $I = T_*(M_{1,1}(E))$, já que o corpo K tem característica zero. Assim, o Teorema 2.3 fica provado.

Capítulo 3

Polinômios Centrais com Involução para $M_{1,1}(E)$

Neste capítulo, temos como objetivo encontrar uma base para o espaço dos polinômios centrais com involução de $M_{1,1}(E)$. Utilizamos como referência para ele [20]. No decorrer do capítulo, K é um corpo com $\text{char}K = 0$.

Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa e unitária com involução. Lembramos que

$$C(A, *) = \{f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in K\langle Y \cup Z \rangle \mid f(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in Z(A, *), \forall a_i \in A^+, b_j \in A^-\},$$

e um elemento de $C(A, *)$ é chamado de *polinômio central com involução*, ou simplesmente *polinômio $*$ -central* para $(A, *)$. Ademais, lembre que $C(A, *)$ é um T_* -espaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$, chamado de *espaço dos polinômios $*$ -centrais para $(A, *)$* , e $T_*(A) \subseteq C(A, *)$. No capítulo anterior determinamos os geradores de $T_*(M_{1,1}(E))$ (veja o Teorema 2.3). Neste capítulo temos como objetivo determinar um conjunto finito de geradores para os polinômios $*$ -centrais para $M_{1,1}(E)$.

Neste capítulo, $*$ indica a involução apresentada no Exemplo 1.30, $R = (M_{1,1}(E), *)$ e $I = T_*(R)$. Observemos que

$$Z(M_{1,1}(E)) = Z(M_{1,1}(E), *) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \in E_0 \right\}.$$

Dado um polinômio f de $K\langle Y \cup Z \rangle$, escrevemos $f = f_s + f_k$, onde f_s é a componente simétrica de f , enquanto f_k é a componente antissimétrica, ou seja,

$$f_s = \frac{f + f^*}{2} \quad \text{e} \quad f_k = \frac{f - f^*}{2}.$$

Observação 3.1. *Seja $f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ e suponha $(A, *)$ uma álgebra com involução.*

1) *Se $Z(A, *) = Z(A)$, então $f \in C(A, *)$ se, e somente se, $[x, f]$ é uma $*$ -identidade polinomial de $(A, *)$ para toda $x \in Y \cup Z$.*

2) *Se $f \in C(A, *)$, então $f - f^*$ é uma $*$ -identidade polinomial de $(A, *)$. De fato, temos $2f = (f + f^*) + (f - f^*)$, sendo a primeira parcela simétrica e a segunda antissimétrica. Substituindo y_i por $a_i \in A^+$ e z_i por $b_i \in A^-$, temos que $2f$ e $f + f^*$ resultam em elementos de A^+ (lembrando que $Z(A, *) \subseteq A^+$), enquanto $f - f^*$ resulta num elemento de A^- . Logo, $f - f^*$ deve resultar em 0, o que nos dá a afirmação.*

Proposição 3.2. *Seja $f = f_s + f_k \in K\langle Y \cup Z \rangle$. Se $f \in C(A, *)$, então $f_s \in C(A, *)$ e $f_k \in T_*(A)$.*

Demonstração. Se $f = f_s + f_k$, então $f^* = f_s - f_k$. Como $f - f^*$ é uma $*$ -identidade polinomial (Observação 3.1), e $f - f^* = 2f_k$, segue que $f_k = \frac{f - f^*}{2}$ é uma $*$ -identidade polinomial. Daí, $f_k \in C(A, *)$, e portanto $f_s = f - f_k$ pertence a $C(A, *)$. ■

Proposição 3.3. *Os seguintes polinômios pertencem a $C(R, *)$:*

$$(a) \ z_1 \circ z_2;$$

$$(b) \ [y_1, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)y_1;$$

Demonstração. De fato, sejam $Y_1, Z_1, Z_2, Y + Z \in R$, sendo Y_1 simétrico, Z_1 e Z_2 anti-simétricos e $Y + Z$ um elemento qualquer (lembre que $R = R^+ \oplus R^-$). Note que, como $Z_1 \circ Z_2$ é simétrico,

$$\begin{aligned} [Z_1 \circ Z_2, Y + Z] &= [Z_1 \circ Z_2, Y] + [Z_1 \circ Z_2, Z] \\ &= Z_1 \circ [Z_2, Z] + [Z_1, Z] \circ Z_2 \\ &= Z_1[Z_2, Z] + [Z_2, Z]Z_1 + [Z_1, Z]Z_2 + Z_2[Z_1, Z] \\ &= Z_1Z_2Z - Z_1ZZ_2 + Z_2ZZ_1 - ZZ_2Z_1 + \\ &\quad + Z_1ZZ_2 - ZZ_1Z_2 + Z_2Z_1Z - Z_2ZZ_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelas identidades (a) e (b) do Lema 2.1.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [[Y_1, Z_1, Z_2] - 2(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y + Z] &= [Y_1, Z_1, Z_2, Y] + [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - \\ &\quad - 2([(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y] + [(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Z]). \end{aligned}$$

Como $[Y_1, Z_1, Z_2]$ e $Z_1 \circ Z_2$ são simétricos, segue que $[Y_1, Z_1, Z_2, Y] = 0 = [(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y]$, pela identidade (a) do Lema 2.1 e pela Observação 1.9. Assim,

$$\begin{aligned} [[Y_1, Z_1, Z_2] - 2(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y + Z] &= [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - 2[(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Z] \\ &= [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - 2(Z_1 \circ Z_2)[Y_1, Z] - \\ &\quad - 2[(Z_1 \circ Z_2), Z]Y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelas identidades (a) do Lema 2.1 e (i) da Proposição 2.2, e por $Z_1 \circ Z_2$ ser central.

Portanto, os polinômios (a) e (b) pertencem a $C(R)$. ■

Seja então V o T_* -espaço em $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerado por I junto com os polinômios (a) e (b) da Proposição 3.3, ou seja, V é a soma de I com o T_* -espaço gerado por esses dois polinômios. Assim, temos $V \subseteq C(R)$. Mostraremos no fim deste capítulo que $V = C(R)$.

3.1 Polinômios Centrais *-Próprios de $M_{1,1}(E)$

Nesta seção, estudaremos os polinômios centrais *-próprios para R .

Lema 3.4. *Seja $H = s_1 \cdots s_n \in K\langle Y \cup Z \rangle$, onde cada s_i é simétrico. Temos que $Q = \frac{H+H^*}{2}$ é simétrico e $Q \equiv H \pmod{I}$.*

Demonstração. É imediato que Q é simétrico. Como $[y_1, y_2] \in I$ e $H^* = s_n \cdots s_1$, segue que $H^* \equiv H \pmod{I}$. Portanto, $Q \equiv H \pmod{I}$. ■

Proposição 3.5. *Se $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ é um polinômio central *-próprio multilinear para R que depende das variáveis em Y , então f é congruente módulo I a uma combinação linear dos polinômios*

$$P_{(j_1, \dots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}],$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$ e $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\} = \{1, \dots, m\}$.

Demonstração. Primeiramente, estamos supondo $m \geq l$, pois no caso contrário temos $f \in I$. Note que, se $m = l$, então, pelo Lema 2.12, f é um múltiplo escalar (módulo I) de $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$.

Se $m = l + 1$, então, pela Proposição 2.14, f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios

$$\begin{aligned} g &= z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], \\ p_1 &= [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3] \cdots [y_l, z_{l+1}] \text{ e} \\ p_i &= [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}], \text{ para } i = 2, \dots, l+1. \end{aligned}$$

Como consequência da Proposição 3.2, temos $f \equiv_I (f + f^*)/2$ e assim f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios $(g + g^*)/2$ e $(p_i + p_i^*)/2$, para $i = 1, 2, \dots, l+1$. Segue do Lema 3.4 que $(p_i + p_i^*)/2 \equiv_I p_i$, para $i = 1, 2, \dots, l+1$. Resta então analisar $g_s = \frac{g + g^*}{2}$. Segue que

$$\begin{aligned} g_s &= \frac{z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}] + [y_l, z_{l+1}] \cdots [y_1, z_2](-z_1)}{2} \\ g_s &\equiv_I \frac{z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}] - [y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}]z_1}{2} \\ g_s &= -\frac{[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], z_1]}{2}. \end{aligned}$$

Note que

$$[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], z_1] = \sum_{i=1}^l [y_1, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}, z_1] \cdots [y_l, z_{l+1}].$$

Daí, pela Observação 2.4 e a identidade (vi) (Proposição 2.2), o comutador $[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_l], z_1]$ é uma combinação linear, módulo I , dos polinômios p_i , $i = 2, \dots, l+1$. Assim, g_s é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios p_i , e o caso $m = l + 1$ está feito.

Por fim, se $m = l + k$, $k \geq 2$, segue do Lema 2.13 que f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios

$$\begin{aligned} p_\sigma &= [y_1, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}], \\ g_\sigma &= [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \end{aligned}$$

com $\sigma \in S_m$. De modo análogo ao que foi feito acima, concluímos que f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios $(p_\sigma + p_\sigma^*)/2$ e $(g_\sigma + g_\sigma^*)/2$. Segue do Lema 3.4 que $(p_\sigma + p_\sigma^*)/2 \equiv_I p_\sigma$. Quanto a $(g_\sigma + g_\sigma^*)/2$, temos.

$$\frac{g_\sigma + g_\sigma^*}{2} \equiv_I - \frac{[[y_1, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}], [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}]]}{2}$$

uma vez que $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}]$ é antissimétrico.

Observemos agora que

$$\begin{aligned} [[y_1, z_1, \dots, z_n], [z_a, z_b]] &= [z_b, z_a, [y_1, z_1, \dots, z_n]] \\ &= [y_1, z_1, \dots, z_n, z_a, z_b] - [y_1, z_1, \dots, z_n, z_b, z_a] \end{aligned}$$

sendo a última igualdade consequência da identidade de Jacobi. Usando então as Observações 1.9 e 2.4, e a identidade (vi) (Proposição 2.2), concluímos que $f \in U_{l,m}$, e assim usamos a Proposição 2.15. ■

Consideremos agora $l \geq 1$ um número natural, e os polinômios

$$\begin{aligned} P_1(y_2, \dots, y_{l+1}, z_1, \dots, z_{l+1}) &= [y_2, z_1, z_2][y_3, z_3] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}] \\ \text{e} \\ P_i(y_2, \dots, y_{l+1}, z_1, \dots, z_{l+1}) &= [y_2, z_i, z_1] \cdots [y_i, z_{i-1}][y_{i+1}, z_{i+1}] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}], \end{aligned}$$

para $1 < i \leq l + 1$.

Para $l \geq 1$, vamos considerar também os seguintes polinômios

$$C_l = \sum_{n=1}^{l+1} (-1)^n P_n \quad \text{e} \quad D_l = y_1 C_l - [y_1, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]. \quad (3.1.1)$$

Observemos que $C_l = C_l(y_2, \dots, y_{l+1}, z_1, \dots, z_{l+1})$.

Lema 3.6. *O *-espaço V contém os polinômios*

$$G_n(z_1, \dots, z_{2n}) = (z_1 \circ z_2)(z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n-1} \circ z_{2n})$$

e os polinômios C_l , D_l definidos em (3.1.1).

Demonstração. Claramente, G_1 pertence a V . Fazemos então indução sobre n . Considere então $H = (z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n-1} \circ z_{2n})$. Como $z_i \circ z_j$ é simétrico (Proposição 1.32), segue do Lema 3.4 que Q é simétrico e $Q \equiv H \pmod{I}$, onde $Q = \frac{H+H^*}{2}$. Assim, podemos escrever $Q = H + s$, onde $s \in I$. Substituindo y_1 por Q no polinômio (b) da Proposição 3.3, segue que

$$[Q, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)Q \in V.$$

Daí,

$$[H + s, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)(H + s) = [H, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)H + r \in V,$$

onde $r = [s, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)s \in I$.

Ora, $H \in V$, pela hipótese de indução, e daí $[H, z_1, z_2] \in I$. Logo, $-2(z_1 \circ z_2)H \in V$, e assim G_n pertence a V , para todo n .

Resta provar que C_l e D_l pertencem a V . O polinômio

$$C_1 = [y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2] \quad (3.1.2)$$

pertence a V , pois é consequência do polinômio (b) (Proposição 3.3), já que

$$[y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2] = [y_2, z_2, z_1] - 2(z_2 \circ z_1)y_2 + 2(z_1 \circ z_2)y_2 - [y_2, z_1, z_2].$$

Note que podemos substituir z_1 por $(y_1 \circ z_1)$ (que é antissimétrico) em (3.1.2), obtendo, pela identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} [y_2, z_2, y_1 \circ z_1] - [y_2, y_1 \circ z_1, z_2] &= -[z_2, y_2, y_1 \circ z_1] - [y_2, y_1 \circ z_1, z_2] \\ &= [y_1 \circ z_1, z_2, y_2]. \end{aligned}$$

Daí, o polinômio

$$\begin{aligned} [y_1 \circ z_1, z_2, y_2] &= [y_1 \circ [z_1, z_2] + [y_1, z_2] \circ z_1, y_2] \\ &= [y_1, y_2] \circ [z_1, z_2] + y_1 \circ [z_1, z_2, y_2] + [y_1, z_2] \circ [z_1, y_2] + \\ &\quad + [y_1, z_2, y_2] \circ z_1 \end{aligned}$$

pertence a V . Segue das identidades (a) (Lema 2.1) e (v) (Proposição 2.2) que

$$[y_1 \circ z_1, z_2, y_2] \equiv_I y_1 \circ [z_1, z_2, y_2] + 2[y_1, z_1][y_2, z_2]$$

lembrando que $[y_1, z_2]$ e $[z_1, y_2]$ são simétricos. Novamente pela identidade de Jacobi e pela identidade (a) do Lema 2.1

$$\begin{aligned} [y_1 \circ z_1, z_2, y_2] &\equiv_I y_1 \circ (-[z_2, y_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + 2[y_1, z_1][y_2, z_2] \\ &\equiv_I 2y_1 ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + 2[y_1, z_1][y_2, z_2]. \end{aligned}$$

Assim, como $I \subseteq V$, concluímos que

$$D_1 = y_1 ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + [y_1, z_1][y_2, z_2] \quad (3.1.3)$$

pertence a V . Para $l > 1$, substituímos y_1 por $Q_1 = \frac{Y+Y^*}{2}$, onde $Y = [y_3, z_3] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$ em (3.1.3), e de modo análogo ao que foi feito acima, obtemos que

$$Q_1 ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + [Q_1, z_1][y_2, z_2] \in V$$

e daí

$$Y ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + [Y, z_1][y_2, z_2] \in V \quad (3.1.4)$$

pois $Q_1 = Y + s_1$, com $s_1 \in I$. Como $Y = Q_1 - s_1$ e Q_1 é simétrico, concluímos que

$$Y ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) \equiv_I ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2])Y = P_2 - P_1$$

e

$$[Y, z_1][y_2, z_2] \equiv_I [y_2, z_2][Y, z_1].$$

Temos $[Y, z_1] = \sum_{i=3}^{l+1} [y_3, z_3] \cdots [y_i, z_i, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$. Ademais, para $3 \leq i \leq l+1$,

$$\begin{aligned} [y_2, z_2][y_3, z_3] \cdots [y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_i, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}] &\equiv_I \\ [y_2, z_i, z_2][y_3, z_3] \cdots [y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}] & \end{aligned}$$

usando a identidade (vi) da Proposição 2.2. Usando agora a Observação 2.4, permutando z_1 em seqüência com z_{i-1}, \dots, z_3 e z_2 , concluimos que

$$\begin{aligned} [y_2, z_i, z_2][y_3, z_3] \cdots [y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}] &\equiv_I \\ (-1)^{i-2}[y_2, z_i, z_1][y_3, z_2] \cdots [y_i, z_{i-1}][y_{i+1}, z_{i+1}] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}] &= (-1)^i P_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$[Y, z_1][y_2, z_2] \equiv_I \sum_{n=3}^{l+1} (-1)^n P_n$$

e assim segue de (3.1.4) que $C_l \in V$.

Agora, para mostrar que $D_l \in V$, observemos primeiramente que

$$\begin{aligned} [y_2, y_1 \circ z_1, z_2] &= [[y_2, y_1] \circ z_1, z_2] + [y_1 \circ [y_2, z_1], z_2] \equiv_I \\ 2[y_1[y_2, z_1], z_2] &= 2[y_1, z_2][y_2, z_1] + 2y_1[y_2, z_1, z_2] \equiv_I -2[y_1, z_1][y_2, z_2] + 2y_1[y_2, z_1, z_2] \end{aligned}$$

e

$$[y_2, z_i, y_1 \circ z_1] = [y_2, z_1, y_1] \circ z_1 + y_1 \circ [y_2, z_i, z_1] \equiv_I 2y_1[y_2, z_i, z_1]$$

devido às identidades (a) do Lema 2.1 e (v) da Proposição 2.2. Logo, substituindo z_1 por $(y_1 \circ z_1)$ em P_1 e P_i , obtemos

$$P_1(y_2, \dots, y_{l+1}, y_1 \circ z_1, \dots, z_{l+1}) \equiv_I 2y_1 P_1 - 2[y_1, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$$

e

$$P_i(y_2, \dots, y_{l+1}, y_1 \circ z_1, \dots, z_{l+1}) \equiv_I 2y_1 P_i$$

e assim $2D_l$ é congruente módulo I ao polinômio obtido de C_l pela substituição de z_1 por $(y_1 \circ z_1)$. Portanto, D_l pertence a V . ■

Sejam W_1 o subespaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerado pelos polinômios multilineares do tipo

$$G_n(z_{i_1}, \dots, z_{i_{2n}})$$

e W_2 o subespaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$ gerado pelos polinômios multilineares do tipo

$$C_l([y_{t_1}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k_1}}], y_{t_2}, \dots, y_{t_l}, z_{i_k}, z_{j_1}, \dots, z_{j_l}).$$

Observemos que W_1 e W_2 estão contidos em V (e portanto em $C(R)$) e que os elementos de $W_1 \cup W_2$ são polinômios *-próprios.

O lema a seguir lida com os polinômios *-centrais para R que dependem apenas das variáveis em Z .

Lema 3.7. *Se $f(z_1, \dots, z_m)$ é um polinômio multilinear (não-constante) *-central para R , então f é congruente módulo I a um polinômio do subespaço W_1 . Em particular, f é congruente módulo I a um polinômio de V .*

Demonstração. Note que $z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1$ é uma *-identidade polinomial de R , logo $z_{i_1} \cdots z_{i_{2n+1}}$ é congruente módulo I a um polinômio antissimétrico. De fato, como $z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3} \equiv_I z_{i_3} z_{i_2} z_{i_1}$, temos que $(z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3})^* = -z_{i_3} z_{i_2} z_{i_1}$ e daí

$$z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3} \equiv_I (z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3} - (z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3})^*)/2,$$

sendo este último antissimétrico. Agora, sendo $n \geq 1$ e supondo $z_{i_1} \cdots z_{i_{2n+1}} \equiv_I p$, com p antissimétrico, temos que

$$z_{i_1} \cdots z_{i_{2n+1}} z_{i_{2n+2}} z_{i_{2n+3}} \equiv_I p z_{i_{2n+2}} z_{i_{2n+3}}$$

sendo este último congruente módulo I a um polinômio antissimétrico, pelo raciocínio anterior.

Assim, se f tem grau ímpar, temos que $f(z_1, \dots, z_m) \equiv_I f_1(z_1, \dots, z_m)$, onde f_1 é um polinômio antissimétrico e $f_1 \in C(R)$. Pela Proposição 3.2, concluímos que f_1 pertence a I , e assim $f \in I$.

Agora, assumimos que f tem grau $2n$. Usando a igualdade

$$z_{i_1} z_{i_2} = \frac{1}{2} (z_{i_1} \circ z_{i_2} + [z_{i_1}, z_{i_2}])$$

e a *-identidade polinomial $[z_1, z_2][z_3, z_4]$, temos

$$\begin{aligned} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_{2n-1}} z_{i_{2n}} &= \frac{1}{2} (z_{i_1} \circ z_{i_2} + [z_{i_1}, z_{i_2}]) z_{i_3} \cdots z_{i_{2n}} \\ &= \frac{1}{2} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) z_{i_3} z_{i_4} \cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{2} [z_{i_1}, z_{i_2}] z_{i_3} z_{i_4} \cdots z_{i_{2n}} \\ &= \frac{1}{2} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) \frac{1}{2} (z_{i_3} \circ z_{i_4} + [z_{i_3}, z_{i_4}]) z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{2} [z_{i_1}, z_{i_2}] \frac{1}{2} (z_{i_3} \circ z_{i_4} + \\ &\quad + [z_{i_3}, z_{i_4}]) z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} \\ &= \frac{1}{4} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) (z_{i_3} \circ z_{i_4}) z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{4} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) [z_{i_3}, z_{i_4}] z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + \\ &\quad + \frac{1}{4} [z_{i_1}, z_{i_2}] (z_{i_3} \circ z_{i_4}) z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{4} [z_{i_1}, z_{i_2}] [z_{i_3}, z_{i_4}] z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} \\ &\equiv_I \frac{1}{4} ((z_{i_1} \circ z_{i_2}) (z_{i_3} \circ z_{i_4}) z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + (z_{i_1} \circ z_{i_2}) [z_{i_3}, z_{i_4}] z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}} + \\ &\quad (z_{i_3} \circ z_{i_4}) [z_{i_1}, z_{i_2}] z_{i_5} \cdots z_{i_{2n}}) \end{aligned}$$

pois $z_1 \circ z_2 \in C(R)$. Assim, continuando com o mesmo raciocínio, concluímos que

$$z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_{2n-1}} z_{i_{2n}} \equiv_I \frac{1}{2^n} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) \cdots (z_{i_{2n-1}} \circ z_{i_{2n}}) + g \quad (3.1.5)$$

onde

$$g = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} (z_{i_1} \circ z_{i_2}) \cdots \widehat{(z_{i_{2k-1}} \circ z_{i_{2k}})} \cdots (z_{i_{2n}} \circ z_{i_{2n-1}}) [z_{i_{2k-1}}, z_{i_{2k}}],$$

onde o símbolo $\widehat{}$ sobre o polinômio $(z_{i_{2k-1}} \circ z_{i_{2k}})$ significa que ele não aparece no produto.

Como $z_1 \circ z_2$ é simétrico e central, e $[z_1, z_2]$ é antissimétrico, temos $g^* \equiv_I -g$ e daí $g \equiv_I \frac{1}{2} (g - g^*)$, sendo este último polinômio antissimétrico. Daí, $f \equiv_I f_1 + g_1$, onde $f_1 \in W_1$ (e portanto f_1 é central) e g_1 é um polinômio antissimétrico.

Como f e f_1 são centrais, segue que g_1 é central e a Proposição 3.2 implica que $g_1 \in I$. ■

O próximo lema lida com os polinômios *-centrais para R que dependem apenas das variáveis em Y .

Lema 3.8. *Seja $g(y_1, \dots, y_m)$ um polinômio central não constante para R . Temos que g pertence a I .*

Demonstração. Consideramos $\bar{y}_i = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como o corpo K é infinito, podemos supor g multi-homogêneo, e daí, módulo I , $g \equiv \lambda y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$. Como

$$\bar{y}_i^{k_i} = \begin{pmatrix} 1 & k_i e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\bar{y}_1^{k_1} \dots \bar{y}_m^{k_m} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 e_1 + \dots + k_m e_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, como este elemento está em $Z(M_{1,1}(E))$ e $\text{char } K = 0$, devemos ter $k_1 \lambda = \dots = k_m \lambda = 0$. Sendo g não constante, segue que $\lambda = 0$. Portanto, $g \in I$. ■

Lema 3.9. *Se $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ é um polinômio central *-próprio multilinear para R que depende das variáveis em Y e em Z , então f é congruente módulo I a um polinômio do subespaço W_2 . Em particular, f é congruente módulo I a um polinômio em V .*

Demonstração. Denotamos por J o conjunto de l -uplas $j = (j_1, \dots, j_l)$ com $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq m$. Sendo $j = (j_1, \dots, j_l) \in J$, consideramos o polinômio

$$P_j = P_{(j_1, \dots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{j_1}] [y_2, z_{j_2}] \dots [y_l, z_{j_l}]$$

apresentado na Proposição 2.15 (onde $k = m - l$). Pela Proposição 3.5, segue que

$$f \equiv_I \sum_{j \in J} \alpha_j P_j.$$

e observemos que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Fixada uma l -upla (j_1, \dots, j_l) , se $m \in \{j_1, \dots, j_l\}$, então $j_l = m$ e daí $[y_l, z_{j_l}] = [y_l, z_m]$. Agora, se $m \notin \{j_1, \dots, j_l\}$, então $i_k = m$ e daí

$$P_{(j_1, \dots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-1}}, z_m, z_{j_1}] [y_2, z_{j_2}] \dots [y_l, z_{j_l}].$$

Como $C_l = \sum_{n=1}^{l+1} (-1)^n P_n \in V$, temos que

$$P_1(y_2, \dots, y_{l+1}, z_1, \dots, z_{l+1}) \equiv_V \sum_{n=2}^{l+1} (-1)^n P_n(y_2, \dots, y_{l+1}, z_1, \dots, z_{l+1}).$$

Substituindo y_i por y_{i-1} , para $3 \leq i \leq l+1$, y_2 por $[y_1, z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-1}}]$, z_1 por z_m e z_i por $z_{j_{i-1}}$, para $2 \leq i \leq l+1$, nesta congruência e usando a Observação 2.4 para “jogar” a variável z_m para o último comutador, concluímos que $P_{(j_1, \dots, j_l)}$ é congruente módulo $W_2 + I$ a uma combinação linear de produtos de comutadores, com o comutador $[y_l, z_m]$ como último fator de cada produto.

Assim, existe um polinômio g tal que $g[y_l, z_m]$ é multilinear e $f - g[y_l, z_m]$ pertence a $W_2 + I$. Neste caso, $g[y_l, z_m]$ é um polinômio central para R . Vamos provar então que $g \in I$.

Primeiramente, observe que, como $g[y_l, z_m]$ é multilinear, temos que z_m e y_l não aparecem em g . Suponha então que ao fazer uma certa substituição em g , obtemos $\bar{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$. Considerando agora as substituições

$$y_l = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_j & -1 \end{pmatrix}$$

onde e_i e e_j são distintos e não aparecem em a, b, c nem d , obtemos o elemento

$$\gamma = [y_l, z_m] = \begin{pmatrix} e_i e_j & -2e_i \\ 0 & e_i e_j \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\bar{g}\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i e_j & -2e_i \\ 0 & e_i e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e_i e_j & -2a e_i + b e_i e_j \\ c e_i e_j & -2c e_i + d e_i e_j \end{pmatrix} \in Z(M_{1,1}(E)).$$

Note que se $c \neq 0$, como e_i e e_j não aparecem em c , segue que $c e_i e_j \neq 0$, o que contradiz o fato de $\bar{g}\gamma$ ser central. Logo, $c = 0$, e daí $a e_i e_j = d e_i e_j$, ou seja, $(a - d) e_i e_j = 0$. Como e_i e e_j não aparecem em a nem em d , concluímos que $a - d = 0$, ou seja, $a = d$.

Por fim, devemos ter $-2a e_i + b e_i e_j = 0$ e daí $(-2a - b e_j) e_i = 0$ (lembrando que $e_i e_j = -e_j e_i$). Segue então que $-2a = b e_j$ e assim, como e_j não aparece em a nem em b , devemos ter $a = b = 0$. Logo, $\bar{g} = 0$, e portanto $g \in I$. ■

Corolário 3.10. *Se $w(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ é um polinômio central $*$ -próprio para R e w é não constante, então w é congruente módulo I a um polinômio em V . Em particular, concluímos que w pertence a V .*

Demonstração. Como $\text{char } K = 0$, podemos assumir que w é multilinear. O resultado é então direto dos Lemas 3.7 e 3.9. ■

3.2 Polinômios $*$ -Centrais para $M_{1,1}(E)$

Conforme foi dito na Seção 1.4, todo polinômio multi-homogêneo $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ em $K\langle Y \cup Z \rangle$ pode ser escrito de forma única como

$$f = \sum y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w_{\mathbf{a}} \tag{3.2.1}$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l)$ é uma l -upla de números inteiros não negativos e $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio $*$ -próprio, e o posto de f , denotado por $r(f)$, é a maior n -upla $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, na ordem lexicográfica, tal que $w_{\mathbf{a}} \neq 0$. Observe que se f é multilinear, então cada $w_{\mathbf{a}}$ é também multilinear e $a_i = 0, 1$.

Seja A uma álgebra associativa e unitária com involução. Sabemos que se escrevemos f como em (3.2.1), então f pertence a $T_*(A)$ se, e somente se, cada $w_{\mathbf{a}}$ pertence a $T_*(A)$ (veja a Proposição 1.40). Isso não vale para polinômios $*$ -centrais. Um contra-exemplo simples é o polinômio central (b) de R . Entretanto, nós temos a seguinte proposição.

Proposição 3.11. *Seja $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ como em (3.2.1). Se f é um polinômio $*$ -central de posto \mathbf{a} para uma álgebra com involução A , então o polinômio $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio $*$ -central para A .*

Demonstração. É imediato da Proposição 1.40, uma vez que $C(A, *)$ é um T_* -espaço de $K\langle Y \cup Z \rangle$. ■

O Lema a seguir nos ajudará na prova do Lema 3.13.

Lema 3.12. *Seja f um polinômio $*$ -central para R . Temos que*

$$[fy_1, z_1, \dots, z_n] \equiv_I f[y_1, z_1, \dots, z_n].$$

Demonstração. De fato, para $n = 1$, temos que

$$[fy_1, z_1] = f[y_1, z_1] + [f, z_1]y_1.$$

Como f é $*$ -central, segue que $[f, z_1] \in I$. Logo, $[fy_1, z_1] \equiv_I f[y_1, z_1]$.

Supondo que a congruência é válida para algum $n \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} [fy_1, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] &= [[fy_1, z_1, \dots, z_n], z_{n+1}] \\ &= [fy_1, z_1, \dots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}[fy_1, z_1, \dots, z_n]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} [fy_1, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] &= [fy_1, z_1, \dots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}[fy_1, z_1, \dots, z_n] \\ &\equiv_I f[y_1, z_1, \dots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}f[y_1, z_1, \dots, z_n] \\ &\equiv_I f[y_1, z_1, \dots, z_n]z_{n+1} - fz_{n+1}[y_1, z_1, \dots, z_n] \\ &= f[y_1, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}], \end{aligned}$$

pois f é $*$ -central. ■

Lema 3.13. *Sejam $w(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m) \in W_1 \cup W_2$ e $y_1^{a_1} \dots y_l^{a_l}$ um monômio. Se o produto $y_1^{a_1} \dots y_l^{a_l} w$ não pertence a V , então é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l)$.*

Demonstração. Se $w \in W_1$, então só precisamos considerar o caso $w = G_n$. Note que $(z_1 \circ z_2)y_1 - \frac{1}{2}[y_1, z_1, z_2]$ pertence a V . Suponha que, para algum $n \geq 1$,

$$G_n y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \dots, z_{2n}] \in V.$$

Substituindo z_i por z_{i+2} , para $i = 1, \dots, 2n$ no polinômio acima, segue que

$$(z_3 \circ z_4) \dots (z_{2n+1} \circ z_{2n+2})y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}] \in V.$$

Note que, como o polinômio $(z_1 \circ z_2) \circ y_1$ é simétrico, o polinômio

$$(z_3 \circ z_4) \dots (z_{2n+1} \circ z_{2n+2})((z_1 \circ z_2) \circ y_1) - \frac{1}{2^n}[(z_1 \circ z_2) \circ y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}]$$

também pertence a V .

Como $z_1 \circ z_2$ é central, segue que $[z_1 \circ z_2, y_1] \in I \subseteq V$. Por outro lado, note que

$$2(z_1 \circ z_2)y_1 = (z_1 \circ z_2) \circ y_1 + [z_1 \circ z_2, y_1].$$

Logo, $2(z_1 \circ z_2)y_1 \equiv_I (z_1 \circ z_2) \circ y_1$. Segue então que

$$[(z_1 \circ z_2) \circ y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}] \equiv_I 2[(z_1 \circ z_2)y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}].$$

Ora, mas segue do Lema 3.12 que

$$[(z_1 \circ z_2)y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}] \equiv_I (z_1 \circ z_2)[y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}],$$

logo,

$$2G_{n+1}y_1 \equiv_V \frac{2}{2^n}(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3, z_4, \dots, z_{2n+2}]. \quad (3.2.2)$$

Substituindo no polinômio acima z_1 por z_{2n+1} , z_2 por z_{2n+2} e z_i por z_{i-2} , para $i = 3, \dots, 2n+2$, como $z_i \circ z_j$ é $*$ -central e $I \subseteq V$, temos

$$G_{n+1}y_1 \equiv_V \frac{1}{2^n}(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})[y_1, z_1, z_2, \dots, z_{2n}].$$

Como $(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})y_1 - \frac{1}{2}[y_1, z_{2n+1}, z_{2n+2}] \in V$ e $[y_1, z_1, \dots, z_{2n}]$ é simétrico, segue que

$$(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})[y_1, z_1, \dots, z_{2n}] - \frac{1}{2}[y_1, z_1, \dots, z_{2n+2}] \in V.$$

Assim,

$$G_{n+1}y_1 - \frac{1}{2^{n+1}}[y_1, z_1, \dots, z_{2n+2}] \in V.$$

Logo, por indução,

$$G_n y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \dots, z_{2n}] \in V. \quad (3.2.3)$$

Como $G_n \in C(R)$, temos $G_n y_1 \equiv_I y_1 G_n$ e daí

$$y_1 G_n - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \dots, z_{2n}] \in V. \quad (3.2.4)$$

Substituindo y_1 por $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}$ nesse polinômio, concluímos que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} G_n$ é congruente módulo V a

$$f = \frac{1}{2^n}[y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}, z_1, z_2, \dots, z_{2n}].$$

Temos que

$$[y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}, z_1] \equiv_I \sum_{i=1}^l l a_i y_1^{a_1} \cdots y_{i-1}^{a_{i-1}} y_i^{a_i-1} y_{i+1}^{a_{i+1}} \cdots y_l^{a_l} [y_i, z_1]. \quad (3.2.5)$$

Como $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w$ não pertence a V , segue que f não é uma $*$ -identidade. Daí, usando (3.2.5), segue que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w$ é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que **a**.

Suponha agora que $w \in W_2$. Nesse caso, só precisamos considerar $w = C_l$. Substituindo y_1 por $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}$ em

$$D_l = y_1 C_l - [y_1, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$$

como D_l pertence a V , temos que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} C_l$ é congruente módulo V a

$$f = [y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}].$$

Como no caso anterior, f é congruente módulo I a um polinômio de posto menor que \mathbf{a} . ■

Teorema 3.14. *O *-espaço $C(R)$ é gerado por $T_*(R)$ junto com os polinômios $z_1 \circ z_2$ e $[y_1, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)y_1$. Em outras palavras, $C(R) = V$.*

Demonstração. Já temos a inclusão $V \subseteq C(R)$. Assim, só precisamos provar a inclusão inversa. Como o corpo tem característica zero, consideraremos apenas polinômios multilineares.

Seja f um polinômio *-central multilinear para R . Pelo Lema 3.8, podemos supor que f depende de variáveis em Z . Seja $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ o posto de f e escrevamos f como em (3.2.1). Temos que $w_{\mathbf{a}}$ é multilinear e, pela Proposição 3.11, $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio *-central para R . Neste caso, os Lemas 3.7 e 3.9 implicam que $w_{\mathbf{a}}$ pertence a $W_1 + I$ ou a $W_2 + I$, e usando o Lema 3.13 concluimos que ou $y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} w_{\mathbf{a}} \in V$ ou $y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} w_{\mathbf{a}}$ (e consequentemente f) é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que \mathbf{a} .

Repetindo esse argumento se necessário, concluimos que f é congruente módulo V a um polinômio *-próprio central, e portanto o resultado segue do Corolário 3.10. ■

Referências Bibliográficas

- [1] E. Aljadeff, A. Giambruno, Y. Karasik. Polynomial identities with involution, superinvolutions and the Grassmann envelope. *Proc. Amer. Math. Soc.* v. **145**, (2017), n. 5, 1843-1857.
- [2] S. A. Amitsur and J. Levitski, Minimal identities for algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* v. **1**, (1950), 449-463.
- [3] S. A. Amitsur. Polynomial identities. *Israel J. Math.* v. **19**, (1974), 183–199. <https://doi.org/10.1007/BF02756631>.
- [4] J. L. Boldrini, et al. *Álgebra Linear*, 3. ed. São Paulo: Harper & Row Brasil, 1980.
- [5] A. P. Brandão Júnior. *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas*. 2006. Tese de Doutorado (Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP.
- [6] A. P. Brandão Júnior. *Representação de grupos*. 01 de set. de 2020, 14 de dez. de 2020. 89 p. Notas de aula.
- [7] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*. Suíça: Springer International Publishing, 2014.
- [8] J. Colombo, P. Koshlukov, Identities with involution for the matrix algebra of order two over an infinite field of characteristic p. *Israel J. Math*, v. **146** (2005), 337–356.
- [9] M. Dehn. Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme, *Math. Ann.* v. **85**, (1922), 184-193.
- [10] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov. On the *-polynomial identities of $M_{1,1}(E)$. *Journal of Pure and Applied Algebra* , v. **215**, (2011), 262-275.
- [11] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*. Singapore: Springer-Verlag, 1999.
- [12] A. Giambruno, M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2005. 352p (Mathematical Surveys and Monographs. v.122)
- [13] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov. On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with involution. *J. Algebra* , v. **208**, (1998), 43-71.
- [14] A. Iopollo, F. Martino. Superinvolutions on upper-triangular matrix algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. **222**, (2018), 2022-2039.

- [15] I. Kaplansky, Problems in the theory of rings, report of a conference on linear algebras. *National Acadademy of Science - National Research Council*, v. **502**, (1957), 1-3.
- [16] D. Levchenko, Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra, *Serdica Mathematical Journal*, v.**1**, (1982), n. 8, 42–56.
- [17] M. L. Racine. Primitive superalgebras with superinvolution. *Journal of Algebra*. v. **206**, (1998), 588-614.
- [18] L. H. Rowen. Some results on the center of a ring with polynomial identity. *Bulletin of the American Mathematical Society*. v. **79**, (1973), n. 1, 219-223.
- [19] L. H. Rowen. *Polynomial Identities in Ring Theory*. New York: Academic press, INC, 1980.
- [20] D. D. P. da Silva e Silva. On the central polynomials with involution of $M_{1,1}(E)$. *Serdica Mathematical Journal*. v. **41**, (2015), n. 2-3, 277–29
- [21] A. Steinbruch, P. Winterle. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Makron Books, 1987.
- [22] I. Sviridova. *Finite basis problem for identities with involution*. 2014. Preprint, arXiv: 1410.2233.