Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Cicero Alexandre do Nascimento

Propriedade gradiente para equação de campos neurais com força externa variável

Campina Grande-PB

Dezembro/2021

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Propriedade gradiente para equação de campos neurais com força externa variável

por

Cicero Alexandre do Nascimento

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.   .

N244p Nascimento, Cicero Alexandre do.

Propriedade gradiente para equação de campos neurais com força externa variável / Cicero Alexandre do Nascimento. – Campina Grande, 2021.

110 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva".

Referências.

1. Matemática Aplicada. 2. Campos Neurais. 3. Boa Posição. 4. Atrator Global. 5. Funcional de Lyapunov. 6. Propriedade Gradiente. 7. Semicontinuidade Superior dos Atratores. I. Silva, Severino Horácio da. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Propriedade gradiente para equação de campos neurais com força externa variável

por

Cicero Alexandre do Nascimento

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

Marcone C. Pereira

Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2021

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar o meu caminho.

Aos meus pais e irmãos, por todos os ensinamentos, conselhos e assistência.

Ao professor Severino Horácio, pela orientação, motivação e paciência.

Aos meus orientadores da graduação, Tiago Alencar, Flávio França e Jocel Faustino. Também aos professores Paulo César e Ricardo Rodrigues, figuras importantes para o meu ingresso no Mestrado.

A todos os meus professores do curso de matemática da UFCG e da URCA.

Aos meus amigos da Graduação e do Mestrado, por todos os momentos que passamos juntos. Ao meu amigo Dennys José, pela companhia e ajuda durante esta fase da minha vida.

Ao apoio financeiro do CNPq.

E a todos que, de alguma maneira, contribuíram para esta conquista.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

"Acaso alguém se admira de ter frio no inverno, de ter náusea no mar, de ser sacudido numa viagem? É forte a alma diante dos males para os quais vem preparada".

Sêneca.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de evolução não local

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -a(x)u(t,x) + K(f \circ u)(t,x) + h(x, u(t,x)), t \geqslant 0, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0,\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

em um espaço de fase isométrico ao $L^p(\Omega)$, onde Ω é um aberto suave e limitado do $\mathbb{R}^n$. Aqui $u = u(t,x)$ é uma função a valores reais, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com derivada limitada e K é um operador integral com núcleo simétrico e não negativo. Provamos que o problema está bem posto, mostramos a existência de um atrator global e exibimos um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado por esta equação. Além disso, usando este funcional de Lyapunov, conseguimos mostrar que o fluxo gerado tem a propriedade gradiente e, consequentemente, o atrator global pode ser obtido como o conjunto instável dos equilíbrios. Também provamos a existência de uma solução de equilíbrio não trivial e estudamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação aos paramêtros a e h.

Palavras-chave: Campos neurais; Boa posição; Atrator global, Funcional de Lyapunov; Propriedade gradiente; Semicontinuidade superior dos atratores.

Abstract

In this work we study the non local evolution problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -a(x)u(t,x) + K(f \circ u)(t,x) + h(x,u(t,x)), t \geqslant 0, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

in a phase space isometric to $L^p(\Omega)$, where Ω is a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Here $u = u(t,x)$ is a real value function, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable function, $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable function with bounded derivative and K is an integral operator with a symmetric kernel. We prove the well posedness of problem, we prove the existence of global attractor and we exhibit a continuous Lyapunov functional for the flow generated by equation. Furthermore, using this Lyapunov functional we to prove that the flow is gradient and that there exists a non-trivial equilibrium solution. Finally, we study the upper semicontinuity of global attractors with respect to parameters a and h.

Keywords: Neural fields; Well posedness; Global attractor; Gradient property; Upper semicontinuity.

Conteúdo

Introdução

As equações Diferenciais constituem uma importante linha de pesquisas em Matemática, a qual vem ganhando bastante atenção dos pesquisadores nas últimas décadas. Um dos motivos para isso, se dá ao fato que tais equações modelam, entre outros, sistemas físicos e biológicos que dependem simultaneamente de variáveis espaciais e temporais (ver, por exemplo, [18]). Para fazer a análise desses modelos, uma das ferramentas usadas é a Teoria de Semigrupos, (ver, por exemplo, [18] e [29]).

Neste trabalho, iniciamos seguindo as referências [2], [27] e [28], para estudar alguns resultados abstratos de equações diferenciais do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

com $f : I \times X \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach e I um intervalo da reta. Aqui, apresentamos condições de existência, unicidade e diferenciabilidade da solução do problema de Cauchy associado à equação (1), e também um estudamos algumas características do semigrupo gerado por essa equação.

No decorrer do texto, aplicamos os resultados abstratos para estudar a dinâmica da equação de evolução não local

$$\partial_t u(t,x) = -a(x)u(t,x) + K(f \circ u(t,x) + h(x,u(t,x))), \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } x \in \Omega, \tag{2}$$

onde Ω é um limitado suave do $\mathbb{R}^N$, ($N \geqslant 1$), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real não linear de classe $C^1(\mathbb{R})$, $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com derivada limitada e K é um operador integral com núcleo simétrico não negativo,

$$Kv(x) := \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)v(y)dy.$$

O estudo da equação (2) foi motivado após uma breve leitura do trabalho proposto por Da Silva e Pereira, [11], onde os autores estudam o comportamento assintótico de uma equação de evolução que modela a atividade neuronal, a qual pode ser obtida como um caso particular da equação que estamos considerando em (2). Mais precisamente, em [11], eles mostram a propriedade gradiente para o fluxo gerado pela equação

$$\partial_t u(t,x) = u(t,x) + K(f \circ u(t,x)), \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } x \in \Omega.$$

O que diferencia a equação que estamos propondo, da equação estudada em [11], é que acrescentamos um amortecimento no termo linear e adicionamos mais um termo não linear para representar os estímulos externos, deixando o modelo mais realístico.

Essa dissertação está dividida da seguinte maneira: no Capítulo 1, tendo como principais referências [2], [25] e [28], apresentamos alguns conceitos e resultados sobre as derivadas de Gâteaux e Fréchet. Depois, apresentamos resultados sobre existência local(global) e unicidade de solução para o problema de Cauchy associado à equação (1).

No Capítulo 2, seguindo [2], [9] e [28], fazemos uma introdução ao estudo de semigrupos não lineares, focando nos resultados que serão utilizados no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, aplicamos os resultados abstratos dos capítulos anteriores para estudar o comportamento assintótico da equação de Campos Neurais (2). Neste capítulo, mostramos que o fluxo gerado por (2) é $C\big([0,r];L^p(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,r];L^1(\Omega)\big)$, para $r > 0$, provamos a existência de um atrator global, exibimos um funcional de Lyapunov contínuo para o fluxo gerado por (2) e usamos isso para concluir que o semigrupo gerado por (2) é gradiente. Por fim, provamos a existência de uma solução de equilíbrio não trivial para (2).

Finalmente, no Capítulo 4, estudamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação aos parâmetros a e h.

Finalmente, no Apêndice, exibimos resultados que foram utilizados no decorrer do texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Derivada de Gâteaux

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre diferenciabilidade em espaços de Banach. Mais detalhes sobre este conteúdo, sugerimos as referências [2] e [25].

Definição 1.1 *Sejam X um espaço vetorial e Y espaço vetorial topológico. Considere um operador $f : X \to Y$. Dados x e η em X, se*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} \tag{1.1}$$

existe, dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x na direção η, e $Df(x)(\eta) \in Y$ é chamada a derivada de Gâteaux de f em x na direção η.

Quando f é Gâteaux diferenciável em x para toda direção $\eta \in X$, dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x.

Denotamos por $[X, Y]$ o espaço dos operadores $T : X \to Y$.

Observação 1.2 *O operador $Df(x) : X \to Y$ que atribui para cada $\eta \in X$ o vetor $Df(x)(\eta) \in Y$ é chamado a derivada de Gâteaux de f em x. O operador $Df : X \to [X, Y]$ que atribui para cada $x \in X$ o operador $Df(x) \in [X, Y]$ é chamado a derivada de Gâteaux de f.*

Exemplo 1 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$, então $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $x = (x_1, ..., x_n) = x_1 e_1 + \cdot\ \cdot\ \cdot + x_n e_n$, assim*

$$Df(x)(e_i) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

o que implica que a derivada parcial de f com relação a x_i é a derivada de Gâteaux de f em x na direção e_i.

Exemplo 2 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ se $x = (x_1, x_2) \neq 0$ e $f(0) = 0$. Dado $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, segue que*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + t\eta_1, x_2 + t\eta_2) - f(x_1, x_2)}{t},$$

assim

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{(0 + t\eta_1)(0 + t\eta_2)}{(0 + t\eta_1)^2 + (0 + t\eta_2)^2} - f(0) \right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right].$$

Portanto $Df(0)(\eta)$ existe se, e somente se, $\eta = (\eta_1, 0)$ ou $\eta = (0, \eta_2)$.

Observação 1.3 *O Exemplo 2 deixa claro que a existência das derivadas parciais não implica na existência da derivada de Gâteaux.*

Exemplo 3 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ se $x = (x_1, x_2) \neq 0$ e $f(0) = 0$. Dado $\eta \in \mathbb{R}^2$, segue que*

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{t\eta_1 t^2 \eta_2^2}{t^2 \eta_1^2 + t^2 \eta_2^2} \right] = \frac{\eta_1 \eta_2^2}{\eta_1 + \eta_2^2}.$$

Observação 1.4 *O Exemplo 3 mostra que a derivada de Gâteaux em um ponto não é necessariamente um operador linear. De fato, dados $\eta, \xi \in X$ segue que $Df(0)(\eta) + Df(0)(\xi) = \dfrac{\eta_1 \eta_2^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \dfrac{\xi_1 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ e $Df(0)(\eta + \xi) = \dfrac{(\eta_1 + \xi_1)(\eta_2 + \xi_2)^2}{(\eta_1 + \xi)^2 + (\eta_2 + \xi_2)^2}$. Considere $\eta = (1, 0), \xi = (0, 1)$, e perceba que $Df(0)(\eta) + Df(0)(\xi) = 0$, enquanto $Df(0)(\eta + \xi) = \dfrac{1}{2}$.*

Assim, a derivada de Gâteaux nem sempre é um operador linear.

Proposição 1.5 *A derivada de Gâteaux de f em x é um operador homogêneo, ou seja, $Df(x)(\alpha\eta) = \alpha Df(x)(\eta)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: *Como $Df(x)(\eta) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + t\eta) - f(x)}{t}$, substituindo t por αt, temos que*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha\eta) - f(x)}{t\alpha} = \frac{1}{\alpha} Df(x)(\alpha\eta).$$

Logo,

$$\alpha Df(x)(\eta) = Df(x)(\alpha\eta).$$

$\square$

Proposição 1.6 *Se o funcional $f : X \to \mathbb{R}$ possui um mínimo ou um máximo em $x \in X$ e $Df(x)$ existe, então $Df(x) \equiv 0$.*

proof *Suponha que $Df(x)(\eta) > 0$, para algum $\eta \in X$. Para t suficientemente pequeno temos*

$$\frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} > 0,$$

implicando que $f(x + t\eta) > f(x)$ para $t > 0$, e $f(x + t\eta) < f(x)$ para $t < 0$. Assim, $f(x+t\eta) > f(x)$ e $f(x+t\eta) < f(x)$, contradizendo a hipótese de f possuir um mínimo ou máximo em $x \in X$. O caso em que $Df(x)(\eta) < 0$ segue de maneira análoga. Logo, $Df(x) \equiv 0$.

$\square$

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. Vamos denotar por $\mathcal{L}[X, Y]$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de X em Y. Em partícular, denotamos $\mathcal{L}[X, \mathbb{R}]$ por X' (dual topológico de X), onde seus elementos são funcionais lineares contínuos.

Proposição 1.7 *Sejam X um espaço vetorial e Y um espaço linear normado. Seja $f : X \to Y$ um operador. Dados $x, y \in X$, suponha f Gâteaux difereciável para cada ponto de $\{x + t(y - x); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ na direção $y - x$. Então para cada $\delta \in Y'$ valem:*

1. *$\delta(f(y) - f(x)) = \delta(Df(x + \theta(y - x)))(y - x))$, para algum $0 < \theta < 1$;*
2. *$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \sup\limits_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\|$.*

Demonstração: *Considere $g(t) = \delta(f(x+t(y-x)))$. Temos que $g'(t) = \delta(Df(x+t(y-x))(y - x))$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe θ, $0 < \theta < 1$, tal que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Assim, obtemos*

$$\delta(f(y)) - \delta(f(x)) = \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x)),$$

como δ é linear, segue que

$$\delta(f(y) - f(x)) = \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x)),$$

provando (1).

Agora, usando o Teorema de Hahn-Banach (ver Corolário B.2) existe $\delta \in Y'$ *tal que* $\|\delta\| = 1$ *e* $\delta(f(y) - f(x)) = \|f(y) - f(x)\|$, *e por* (1), *obtemos*

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\| &= \delta(f(y) - f(x)) \\
&= \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x)) \\
&\leqslant |\delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x))| \\
&\leqslant \|\delta\|\|Df(x + \theta(y - X))(y - x)\| \\
&= \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\| \\
&\leqslant \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\|,
\end{aligned}$$

o que prova (2).

□

1.2 Derivada de Fréchet

Nesta seção, baseado nas referências [2] e [25], vamos fazer um breve comentário sobre a derivada de Fréchet.

Definição 1.8 *Considere* $f : X \to Y$, *onde* X *e* Y *são espaços lineares normados. Dado* $x \in X$, *se existe um operador linear* $f'(x) \in \mathcal{L}[X, Y]$ *tal que*

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \ \Delta x \in X, \tag{1.2}$$

então f *é diferenciável segundo Fréchet e* $f'(x)$ *é chamada a derivada de Fréchet de* f *em* x.

O operador

$$f' : X \longrightarrow \mathcal{L}[X, Y]$$

$$x \longmapsto f'(x) : X \longrightarrow Y$$

é denotado como a derivada de Fréchet de f.

Observação 1.9 *A derivada de Fréchet,* $f'(x)$, *é por definição um operador linear contínuo, o que não necessariamente ocorre com a derivada de Gâteaux* $Df(x)$.

Observação 1.10 *Dado $\epsilon > 0$, segue de (1.2) que existe $\xi > 0$ tal que*

$$\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\| \leqslant \epsilon \|\Delta x\|, \tag{1.3}$$

para todo $\Delta x \in X$ onde $\|\Delta x\| \leqslant \xi$.

Proposição 1.11 *Se $f : X \to Y$ é Fréchet diferenciável em x, então f é contínua em x.*

Demonstração: *Por (1.3) temos que*

$$\begin{aligned} \|f(x + \Delta x) - f(x)\| - \|f'(x)(\Delta x)\| &\leqslant \|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leqslant \epsilon \|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|f(x + \Delta x) - f(x)\| &\leqslant \epsilon \|\Delta x\| + \|f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leqslant \epsilon \|\Delta x\| + \|f'(x)\| \|\Delta x\| \\ &= (\epsilon + \|f'(x)\|) \|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Assim, para $\|\Delta x\| \leqslant \delta$ obtemos

$$\|f(x + \Delta x) - f(x)\| \leqslant (\epsilon + \|f'(x)\|)\delta.$$

Logo, f é contínua em x.

□

Observação 1.12 *Fréchet diferenciabilidade implica em Gâteaux diferenciabilidade. De fato, Se $f'(x)$ existe, substituindo Δx por $t\Delta x$ em (1.2), obtemos*

$$\lim_{\|t\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x + t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)\|}{\|t\Delta x\|} = 0.$$

Quando $t \to 0$, temos que $\|t\Delta x\| \to 0$, assim

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)}{t} \right\| = 0,$$

ou seja

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\Delta x) - f(x)}{t} - f'(x)(\Delta x) \right\| = 0.$$

Com isso

$$\|Df(x)(\Delta x) - f'(x)(\Delta x)\| = 0,$$

ou melhor

$$\|(Df(x) - f(x))(\Delta x)\| = 0, \forall\ \Delta x \in X.$$

Logo, $Df(x) = f'(x)$.

Proposição 1.13 *A derivada de Fréchet é única.*

Demonstração: *Suponha que* $f_1'(x)$ *e* $f_2'(x)$ *são duas derivadas de Fréchet de* f *em* x. *Pela desigualdade triângular e a Observação 1.12, obtemos*

$$\|f_1'(x) - f_2'(x)\| \leqslant \|f_1'(x) - Df(x)\| + \|f_2'(x) - Df(x)\| = 0.$$

Assim,

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| = 0.$$

Logo, $f_1'(x) = f_2'(x)$.

□

Observação 1.14 *Se* $Df(x)$ *é um operador linear limitado, então* $f'(x)$ *existe se, e somente se, a convergência em* (1.1) *é uniforme com respeito a todo* $\eta \in X$ *com* $\|\eta\| = 1$. *Com efeito, se* $f'(x)$ *existe, pela Observação* 1.12, $Df(x) = f'(x)$. *Substituindo* $f'(x)$ *por* $Df(x)$ *e* Δx *por* $t\eta$ *em* (1.3), *obtemos*

$$\lim_{\|t\eta\| \to 0} \frac{\|f(x + t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0,$$

implicando em

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)}{t} \right\| = 0.$$

Assim,

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} - Df(x)(\eta) \right\| = 0,$$

ou seja

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t}.$$

Agora, se a convergência em (1.1) *é uniforme para todo* η*, com* $\|\eta\| = 1$*, temos*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t},$$

assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t} - Df(x)(\eta) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)}{t} \right\| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{|t|\|\eta\|} = 0,$$

implicando em

$$\lim_{\|t\eta\|\to 0} \frac{\|f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0.$$

Já que $Df(x)$ *é um operador linear limitado, temos* $Df(x) = f'(x)$*.*

Observação 1.15 *Se* $f : X \to Y$ *é Fréchet diferenciável, então pelo item* (2) *da Proposição* 1.7*, temos*

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y-x))\| \|y - x\|.$$

Exemplo 4 *Assuma que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é Frechet diferenciável em* x*, vamos calcular* $f'(x)(\eta)$*. Temos que* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$*. Já que* $\eta = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$*, onde* $e_1, \ldots, e_n$ *é base canônica de* $\mathbb{R}^n$*, é suficiente calcular* $f'(x)(e_i)$ *e substituir em* $f'(x)(\eta) = \eta_1 f'(x)(e_1) + \cdots + \eta_n f'(x)(e_n)$*. Como*

$$f'(x)(e_i) = \left(\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right),$$

segue que

$$f'(x)(\eta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Observação 1.16 *A matriz*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

é chamada de Matriz Jacobiana de f e denotamos por $J_f(x_1, \ldots, x_n)$.

Os Exemplos 2 e 3 garantem que $Df(x)$ pode existir e não ter matriz jacobiana, também pode ocorrer de a matriz jacobiana existir e $Df(x)$ não existir. Entretanto, segue o seguinte resultado.

Proposição 1.17 *Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e suponha que $Df(x)$ exista. Então, $Df(x)$ é representado pela matriz jacobiana em x se, e somente se, $Df(x)$ é um operador linear.*

Demonstração: *Suponha que $Df(x)$ é representada pela matriz jacobiana em x. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, dados $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, segue que*

$$\begin{aligned} Df(x)(\eta+\xi) &= \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1+\xi_1 \\ \vdots \\ \eta_n+\xi_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \\ &= Df(x)(\eta) + Df(x)(\xi). \end{aligned}$$

Logo, $Df(x)$ é linear.

Reciprocamente, pelo Exemplo 4, *apenas a linearidade do operador $f'(x)$ foi utilizada para obter a matriz jacobiana. Portanto, se $Df(x)$ é linear, então a matriz jacobiana existe.*

$\square$

Proposição 1.18 *Sejam X e Y espaços lineares normados. Suponha que $f : X \to Y$ é Gâteaux diferenciável em X e, além disso, que para $x \in X$ fixo:*

1. *$Df(x)(\cdot) : X \to Y$ é contínua em zero;*

2. $Df(\cdot)(\eta) : X \to Y$ é contínua em x para cada $\eta \in X$ fixo.

Então, $Df(x) \in \mathcal{L}[X,Y]$, ou seja, $Df(x)$ é um operador linear contínuo.

Demonstração: *Pela Proposição 1.5, $Df(x)$ é um operador homogêneo, isto é,*

$$\begin{aligned} Df(x)(0) &= Df(x)(0\cdot\eta) \\ &= 0\cdot Df(x)(\eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Devido ao item (1) existe $r > 0$ tal que $\|Df(x)(\eta)\| \leqslant 1$ sempre que $\|\eta\| \leqslant r$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|Df(x)(\eta)\| &= \left\| \frac{\|\eta\|}{r}\frac{r}{\|\eta\|} Df(x)(\eta) \right\| \\ &= \left\| \frac{\|\eta\|}{r} Df(x)\left(\frac{r}{\|\eta\|}\eta\right) \right\| \\ &= \frac{\|\eta\|}{r}\left\| Df(x)\left(\frac{r}{\|\eta\|}\eta\right) \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{r}\|\eta\|. \end{aligned}$$

Logo, $Df(x)$ é limitado. Agora, vamos mostrar que $Df(x)$ é aditivo, ou seja, $Df(x)(\eta_1 + \eta_2) = Df(x)(\eta_1) + Df(x)(\eta_2)$. Considere $\eta_1, \eta_2 \in X$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \Bigg\| Df(x)(\eta_1+\eta_2) &- Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2) - \left(\frac{f(x+t\eta_1+t\eta_2)-f(x)}{t}\right) \\ &+ \left(\frac{f(x+t\eta_1)-f(x)}{t}\right) + \left(\frac{f(x+t\eta_2)-f(x)}{t}\right) \Bigg\| \leqslant 3\epsilon, \end{aligned}$$

para $|t| \leqslant \tau$.
Pela desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \|Df(x)(\eta_1+\eta_2) &- Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\| - \Bigg\| \left(\frac{f(x+t\eta_1+t\eta_2-f(x)}{t}\right) \\ &- \left(\frac{f(x+t\eta_1)-f(x)}{t}\right) - \left(\frac{f(x+t\eta_2)-f(x)}{t}\right) \Bigg\| \leqslant 3\epsilon, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|Df(x)(\eta_1+\eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\| &\leqslant \frac{1}{|\,t\,|}\|f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x) \\ &- f(x+t\eta_1) + f(x) \\ &- f(x+t\eta_2) + f(x)\| + 3\epsilon. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach (ver Corolário B.2) existe $\delta \in Y'$ *tal que* $\|\delta\| = 1$ *e* $\delta(x) = \|x\|$. *Assim, pelo item* (1) *da Proposição* 1.7*, segue que*

$$\begin{aligned}\|f(x+t\eta_1 &+ t\eta_2) - f(x+t\eta_1) - f(x+t\eta_2) + f(x)\| \\ &= \delta(f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x+t\eta_1) - (f(x+t\eta_2) - f(x))) \\ &= \delta(Df(x+t\eta_1+\theta_1(t\eta_2))(t\eta_2)) - \delta(Df(x+\theta_2(t\eta_2))(t\eta_2)),\end{aligned}$$

para alguns $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. *Assim,*

$$\begin{aligned}\|f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x+t\eta_1) &- f(x+t\eta_2) + f(x)\| = t\delta(Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) \\ &- Df(x)(\eta_2) + Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)) \\ &\leqslant |t\delta(Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) - Df(x)(\eta_2) \\ &+ Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2))| \\ &\leqslant |t|\|\delta\|\|(Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) - Df(x)(\eta_2) \\ &+ Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2))\| \\ &\leqslant |t|\|(Df(x+t(\eta_1+\theta_1\eta_2))(\eta_2) - Df(x)(\eta_2)\| \\ &+ |t|\|Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\|.\end{aligned}$$

Pela hipótese (2)*, segue que*

$$\begin{aligned}|t|\|Df(x+t(\eta_1+\theta_1\eta_2))(\eta_2) - Df(x)(\eta_2)\| &+ |t|\|Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\| \\ &\leqslant 2|t|\epsilon. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Para t *suficientemente pequeno. De (1.4) e (1.5) obtemos*

$$\|Df(x)(\eta_1+\eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\| \leqslant \frac{1}{|t|}2|t|\epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon.$$

Logo, $Df(x)$ *é aditivo e, pela Proposição 1.5, homogêneo. O que mostra que* $Df(x)$ *é um operador linear.*

Portanto, $Df(x)$ *é um operador linear limitado, como queríamos.*

□

Proposição 1.19 *Sejam* X *e* Y *espaços lineares normados. Considere* $f : X \to Y$. *Suponha* $Df : X \to \mathcal{L}[X, Y]$ *e* Df *contínua em* x. *Então* $f'(x)$ *existe e* f' *é contínua em* x.

Demonstração: *Pelo Teorema de Hanh-Banach (ver Corolário B.2), e o item* (1) *da*

Proposição 1.7, segue que

$$\begin{aligned}
\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\| &= \delta(f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta))\\
&= \delta(Df(x+\theta\eta)(\eta)-Df(x)(\eta))\\
&\leqslant |\delta(Df(x+\theta\eta)(\eta)-Df(x)(\eta))|\\
&\leqslant \|\delta\|\|Df(x+\theta\eta)(\eta)-Df(x)(\eta)\|\\
&\leqslant \|Df(x+\theta\eta)-Df(x)\|\|\eta\|.
\end{aligned}$$

Como Df é contínuo em x, temos $\|Df(x+\theta\eta)-Df(x)\|\|\eta\|<\epsilon\|\eta\|$, sempre quando $\|\eta\|<r$, implicando que

$$\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\|<\epsilon\|\eta\|,$$

sempre quando $\|\eta\|<r$. Dividindo a desigualdade acima em ambos os lados por $\|\eta\|$ e passando o limite com $\|\eta\|\to 0$, obtemos

$$\lim_{\|\eta\|\to 0}\frac{\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|}<\epsilon, \forall\epsilon>0.$$

Assim

$$\lim_{\|\eta\|\to 0}\frac{\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|}=0.$$

Logo

$$Df(x)=f'(x).$$

E como Df é contínuo em x, segue que f' é contínua em x.

□

Proposição 1.20 (Regra da Cadeia) *Sejam X um espaço vetorial, Y e Z espaços lineares normados. Suponha que*

1. *$h: X\to Y$ Gâteaux diferenciável em X;*
2. *$g: Y\to Z$ Fréchet diferenciável em Y.*

Então $f=g\circ h: X\to Z$ é Gâteaux diferenciável em X e $Df(x)=g'(h(x))Dh(x)$. Se X também é um espaço linear normado e h é Fréchet diferenciável em X, então f é Fréchet diferenciável em X e $f'(x)=g'(h(x))h'(x)$.

Demonstração: *Dados* $x, \eta \in X$, *considere* $y = h(x)$ *e* $\Delta y = h(x+t\eta) - h(x)$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} &= \frac{g(h(x+t\eta))-g(h(x))}{t} \\
&= \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{t} \\
&= \frac{g'(y)(\Delta y)+g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{t} \\
&= g'(y)\left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right) \\
&+ \frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} - g'(y)\left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right) + g'(y)Dh(x)(\eta) \\
-\ & g'(y)Dh(x)(\eta) = \frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}.
\end{aligned}$$

Organizando os termos e aplicando a norma, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right. \\
&\left. -g'(y)\left(Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}\right\|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\left\| g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| \\
&-\left\| g'(y)\left(Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right)\right\| \\
&\leqslant \left\|\frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}\right\|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\left\| g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| \\
&\leqslant \|g'(h(x))\| \left\| Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right\| \\
&+ \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, pelo item (2) da Proposição 1.7, obtemos

$$\|\Delta y\| = \|h(x+t\eta) - h(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|tDf(x+\theta(t\eta))(\eta)\|,$$

assim $\|\Delta y\| \to 0$ *quando* $t \to 0$. *Agora, passando o limite em (1.6) com* $t \to 0$, *temos*

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \left\| g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} \right) \right\| \\
&\leqslant \lim_{t\to 0} \|g'(h(x))\| \left\| Dh(x)(\eta) - \frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t} \right\| \\
&+ \lim_{t,\|\Delta y\|\to 0} \frac{\|g(y+\Delta y) - g(y) - g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|} \frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|}.
\end{aligned}$$

Com isso

$$\lim_{t\to 0} \left\| g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} \right) \right\| = 0,$$

implicando que

$$g'(h(x))Dh(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t},$$

ou seja,

$$g'(h(x))Dh(x)(\eta) = Df(x)(\eta), \forall \eta \in X.$$

Logo,

$$Df(x) = g'(h(x))Dh(x).$$

Agora, considere que X *é um espaço linear normado e* h *é Fréchet diferenciável em* X. *Dados* $x, \eta \in X$, *sejam* $y = h(x)$ *e* $\Delta y = h(x+t\eta) - h(x)$. *Então,*

$$\begin{aligned}
& \frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
= \; & \frac{\|g(h(x+t\eta))-g(h(x))-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
= \; & \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)+g'(y)(\Delta y)-g'(y)h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
\leqslant \; & \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{|t|}\frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta y\|}+\frac{\|g'(y)(\Delta y)-g'(y)h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
\leqslant \; & \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|} \\
+ \; & \|g'(y)\|\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)-h'(x)(t\eta)\|}{|t|}.
\end{aligned}$$

Como $\|\Delta y\| \to 0$ quando $t \to 0$, passando o limite com $t \to 0$ na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& \lim_{t\to 0}\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
& \leqslant \lim_{t,\|\Delta y\|\to 0}\frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|} \\
& + \lim_{t\to 0}\|g'(y)\|\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)-h'(x)(t\eta)\|}{|t|}.
\end{aligned}$$

Desde que g e h são Fréchet diferenciáveis, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|}=0.$$

Portanto, f é Fréchet diferenciável e, como a derivada de Fréchet é única, segue que $f'(x)=g'(h(x))h'(x)$.

□

1.3 Semidistância de Hausdorff

Definição 1.21 *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y, z \in X$*

1. *$d(x,y) \geqslant 0$;*

2. *$d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$;*

3. *$d(x,y) = d(y,x)$;*

4. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Neste caso, o par (X,d) é chamada um espaço métrico.

Definição 1.22 *Sejam A e B subconjuntos de X, onde (X,d) é um espaço métrico. A distância entre A e B é o número*

$$d(A,B) := \inf_{x\in A}\Big\{\inf_{y\in B} d(x,y)\Big\}.$$

Definição 1.23 *Seja (X,d) um espaço métrico. Dados os subconjuntos A, B de X, o excesso ou semidistância de Hausdorff de A sobre B é definida por*

$$d_H(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b)$$

com a convenção $d_H(A,\emptyset) = +\infty$ se $A \neq \emptyset$, e $d_H(\emptyset, B) = 0$.

Proposição 1.24 *Seja (X,d) um espaço métrico.*

i) $d_H(\cdot,\cdot)$ não é simétrica; isto é, dados $A, B \in X$, $d_H(A,B)$ e $d_H(B,A)$ podem ser diferentes;

ii) Dados $A, B \in X$, $d_H(A,B) = 0$ não implica que $A = B$.

Exemplo 5 *Sejam $X = \mathbb{R}$, $A = (0,1)$ e $B = \{1\}$.*

Note que

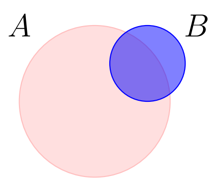
$$d(A,B) := \inf_{x\in A}\Big\{\inf_{y\in B} d(x,y)\Big\} = 0 = \inf_{x\in B}\Big\{\inf_{y\in A} d(x,y)\Big\} = d(B,A),$$

$$d_H(A,B) := \sup_{x\in(0,1)}\Big\{\inf_{y=1}|x-y|\Big\} = \sup_{x\in(0,1)}|x-1| = 1,$$

e

$$d_H(B,A) := \sup_{x=1}\Big\{\inf_{y\in(0,1)}|x-y|\Big\} = \inf_{y\in(0,1)}|1-y| = 0.$$

Exemplo 6 *Sejam $X = \mathbb{R}^2$, $A = B((0,0);2)$ e $B = B((1,1);1)$ (bolas centradas na origem e no ponto $(1,1)$ no $\mathbb{R}^2$ com raios iguais a 2 e 1, respectivamente).*



Note que

$$d(A,B) := \inf_{x\in A}\left\{\inf_{y\in B} d(x,y)\right\} = 0 = \inf_{x\in B}\left\{\inf_{y\in A} d(x,y)\right\} = d(B,A),$$

$$d_H(A,B) := \sup_{x\in A}\left\{\inf_{y\in B} d(x,y)\right\} > 0,$$

e

$$d_H(B,A) := \sup_{x\in B}\left\{\inf_{y\in A} d(x,y)\right\} > 0.$$

Proposição 1.25 *Seja (X,d) um espaço métrico. Dados os subconjuntos A, B, C de X, temos*

$$d_H(A,C) \leqslant d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

Demonstração: *Para todo $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, temos*

$$d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c).$$

Aplicando o ínfimo em relação a c e depois em b em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\inf_{c\in C} d(a,c) \leqslant \inf_{b\in B} d(a,b) + \inf_{b\in B}\inf_{c\in C} d(b,c).$$

Agora, aplicando o supremo com relação a a na desigualdade anterior, e já que $\inf\limits_{b\in B}\inf\limits_{c\in C} d(b,c) \leqslant \sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{c\in C} d(b,c)$, encontramos

$$\sup_{a\in A}\inf_{c\in C} d(a,c) \leqslant \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b) + \sup_{b\in B}\inf_{c\in C} d(b,c).$$

$\square$

Proposição 1.26 *Seja (X,d) um espaço métrico. Dados os subconjuntos A, B de X, temos*

$$d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

Demonstração: *De fato, suponha que $d_H(A,B) = 0$. Assim,*

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b) = 0,$$

ou seja,

$$\inf_{b\in B} d(a,b) = 0,\ \ \forall a \in A.$$

Considere $a \in A$ fixado. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B$ tal que

$$d(a, b_n) < \frac{1}{n}.$$

Logo, existe uma sequência $\{b_n\}$ em B tal que $b_n \to a$. Portanto $A \subset \overline{B}$. Reciprocamente, se $A \subset \overline{B}$, então

$$\inf_{b \in B} d(a, b) = 0, \ \forall a \in A$$

o que implica

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = 0.$$

Logo, $d_H(A, B) = 0$.

□

Definição 1.27 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ uma família de subconjuntos de X. Diremos que a família $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ quando*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} d_H(A_\varepsilon, A_0) = 0.$$

1.4 Teoremas de Existência e Unicidade em Espaços de Banach

Nesta seção, abordamos alguns resultados sobre existência e unicidade de solução para equações diferenciais em espaços de Banach. Para isto, seguimos as referências [2], [19] e [28].

Seja X um espaço de Banach. Considere em X a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.7}$$

com

$$\begin{aligned} f : I \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

onde f é função contínua e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Dizemos que uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é uma solução clássica de (1.7) no intervalo I se:

1. $\{(t, \phi(t)); t \in I\}$ *está contido no domínio de* f;

2. $\dfrac{d}{dt}\phi(t) = f(t, \phi(t))$, *para todo* $t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.7), com condições iniciais (t_0, x_0), *será denotado por*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \; x(t_0) = x_0, \; (t_0, x_0) \in I \times X. \tag{1.8}$$

Lema 1.28 *O problema* (1.8) *é equivalente a equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.9}$$

Demonstração: *Integrando em ambos os lados de* (1.8) *de* t_0 *a* t, *obtemos*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando em ambos os lados de (1.9), *encontramos*

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)),$$

e também temos $x(t_0) = x_0$.

□

Observação 1.29 *Se no problema de Cauchy (1.8) tivermos*

$$f(t, x) = Ax + g(t, x),$$

com $A : X \longrightarrow X$ *um operador linear limitado, então a solução de (1.8) é expressa por*

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s, x(s))ds,$$

onde e^{At} *é um operador linear limitado (ver [24]), dado por* $e^{At} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$. *Com efeito, considere*

$$\frac{dx}{dt} = At + g(t, x).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por e^{-At}, *obtemos*

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - e^{-At}Ax = e^{-At}g(t, x).$$

Note que o lado esquerdo da igualdade acima é igual a $\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right]$, *assim*

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = e^{-At}g(t,x). \tag{1.10}$$

Integrando (1.10) de t_0 *a* t, *obtemos*

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}g(s,x(s))ds.$$

Por fim, multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por e^{At}, *encontramos*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s,x(s))ds.$$

Quando $X = \mathbb{R}^n$ *e* f *é contínua, a existência de soluções locais para (1.8) segue do clássico Teorema de Peano, (ver [17]).*

Definição 1.30 *Um subconjunto* Y *de um espaço métrico* X *é dito um conjunto relativamente compacto se seu fecho é compacto.*

Teorema 1.31 (Teorema de Peano, [17]) *Considere um conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma função contínua em* Ω. *Então, para qualquer* $(t_0, x_0) \in \Omega$,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

possui pelo menos uma solução passando por (t_0, x_0), *que está definida num intervalo* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ *para algum* $\alpha > 0$.

Demonstração: *Sejam* α, β *constantes positivas, e considere o retângulo fechado* $B(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta,t_0,\alpha_0) = \{(t,x) : \ t \in I_\alpha, \ |x - x_0| \leqslant \beta\}$, $I_\alpha = I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leqslant \alpha\}$, *contido em* Ω. *Seja* $M = \sup\{|f(t,x); (t,x) \in B(\alpha,\beta)\}$. *Escolha constantes* $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ *tais que* $0 < \overline{\alpha} \leqslant \alpha, 0 < \overline{\beta} \leqslant \beta$, $M\overline{\alpha} \leqslant \overline{\beta}$, *e defina o conjunto* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ *das funções* $\phi \in C(I_{\overline{\alpha}}$ *e* $\mathbb{R}^n)$, *onde* $\phi(t_0) = x_0, |\phi(t) - x_0| \leqslant \overline{\beta}$ *para todo* $t \in I_{\overline{\alpha}}$.

Afirmação: *O conjunto* $\mathbf{A}$ *é convexo, fechado e limitado. De fato, dados* $\phi, \overline{\phi} \in \mathbf{A}$, *temos que*

$$\begin{aligned} |s\phi(t) + (1-s)\overline{\phi}(t) - x_0| &= |s\phi(t) + (1-s)\overline{\phi}(t) - (1-s)x_0 - sx_0| \\ &\leqslant s|\phi(t) - x_0| + (1-s)|\overline{\phi}(t) - x_0| \\ &\leqslant s\overline{\beta} + (1-s)\overline{\beta} \\ &\leqslant \overline{\beta}, \ \forall t \in I_{\overline{\alpha}} \text{ e } s \in [0,1] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s\phi(t_0) + (1-s)\overline{\phi}(t_0) &= sx_0 + (1-s)x_0 \\ &= x_0, \ \text{com } s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Dado $\overline{\phi} \in \overline{\mathbf{A}}$, *existe uma sequência* (ϕ_n) *em* $\mathbf{A}$ *tal que* $\phi_n \to \overline{\phi}$. *Como* $\lim_{n\to\infty} |\phi_n(t_0) - \overline{\phi}(t_0)| = 0$ *e* $\phi_n(t_0) = x_0, \forall\ n \in \mathbb{N}$, *temos* $\overline{\phi}(t_0) = x_0$. *Agora, perceba que*

$$\begin{aligned} |\overline{\phi}(t) - x_0| &= |\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) - x_0| \\ &= \lim_{n\to\infty} |\phi_n(t) - x_0| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{\beta} \\ &= \overline{\beta}, \ \forall\ t \in I_{\overline{\alpha}}. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} |\overline{\phi}(t)| &= |\overline{\phi}(t) + x_0 - x_0| \\ &\leqslant |\overline{\phi}(t) - x_0| + |x_0| \\ &\leqslant \overline{\beta} + |x_0| \\ &< \infty, \ \forall t \in I_{\overline{\alpha}}. \end{aligned}$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

Dado $\phi \in \mathbf{A}$, *defina a função* $T\phi$ *por*

$$T\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds, \ t \in I_\alpha. \tag{1.11}$$

Pelo Lema 1.28, encontrar um ponto fixo para T *é equivalente a encontrar uma solução para (1.8). A seguir, vamos utilizar o Teorema do Ponto fixo de Schauder (Ver Teorema B.6), para garantir a existência desse ponto fixo para* T.

Note que, por definição, $T\phi$, *com* $\phi \in \mathbf{A}$, *pertence a* $C(I_{\overline{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$ *e* $T\phi(t_0) = x_0$. *Agora, para* $t \in I_{\overline{\alpha}}$,

$$\begin{aligned} |T\phi(t) - x_0| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))| ds \right| \\ &\leqslant M|t - t_0| \\ &\leqslant M\overline{\alpha} \\ &\leqslant \overline{\beta}, \end{aligned}$$

ou seja, $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$. *Além disso, temos*

$$\begin{aligned} |T\phi(t) - T\phi(\bar{t})| &\leqslant \left| \int_{\bar{t}}^{t} |f(s,\phi(s))| ds \right| \\ &\leqslant M|t - \bar{t}|, \end{aligned}$$

para todo $t, \bar{t} \in I_{\overline{\alpha}}$. *Isso implica que o conjunto* $T(\mathbf{A})$ *é uma família de funções equi-contínua. Logo, pelo Teorema de Arzela-Ascoli (ver [8], p.34),* $T(\mathbf{A})$ *é relativamente compacto.*

Por fim, dados $\phi, \overline{\phi} \in \mathbf{A}$, *segue da continuidade uniforme de* $f(t,x)$ *em* $B(\alpha,\beta)$ *que para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} |T\phi(t) - T\overline{\phi}(t)| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left| f(s,\phi(s)) - f(s,\overline{\phi}(s)) \right| ds \right| \\ &\leqslant \epsilon\overline{\alpha}, \end{aligned}$$

para todo $t \in I_{\overline{\alpha}}$, *com* $|\phi(s) - \overline{\phi}(s)| \leqslant \delta$, *para todo* $s \in I_{\overline{\alpha}}$. *Assim,* T *é uma aplicação contínua, isto é, para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $T\phi - T\overline{\phi}| \leqslant \epsilon\overline{\alpha}$ *se* $|\phi - \overline{\phi}| \leqslant \delta$.

Todas as condições do Teorema do Ponto fixo de Schauder são satisfeitas, logo existe um ponto fixo em $\mathbf{A}$ *para (1.11).*

$\square$

O Teorema de Peano não é válido quando a dimensão de X *é infinita. A seguir, exibiremos um contra exemplo.*

Contra-exemplo para o Teorema de Peano em dimensão infinita (ver [3] e [14])

Considere X *o espaço de Banach contido em* l^∞, *dado por*

$$c_0 = \left\{ (x_n);\ x_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\},$$

com a norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$. *Dado* $x = (x_n) \in X = c_0$, *considere* y *como sendo a sequência* (y_n) *definida por*

$$y_n = \sqrt{|x_n| + \frac{1}{1+n}}.$$

Temos que $y_n \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, *assim* $y = (y_n) \in c_0$. *Considere* $y = f(x)$. *Desde que a funcão* $\sqrt{|x|}$ *é uniformemente contínua em* $\mathbb{R}$, *a aplicação* $x \longmapsto f(x)$ *é contínua do espaço* c_0 *nele próprio. Agora, vamos mostrar que a equação diferencial*

$$x' = f(x) \tag{1.12}$$

não possui nenhuma solução em c_0*, supondo o valor zero no instante* $t = 0$*, ou seja,*

$$x(0) = \odot, \tag{1.13}$$

onde $\odot = (0, 0, \ldots) \in c_0$*. Com efeito, suponha por absurdo que* $x(t)$ *seja uma solução do problema (1.12)-(1.13). Como (1.12)-(1.13) equivale a*

$$x'_n = f(x_n),\ x_n(0) = 0,$$

para todo n*, vamos denotar* $x(t) = (x_n(t))$*, onde cada* n*-ésima coordenada* x_n *é uma função derivável em uma vizinhança de* $t = 0$ *e satisfaz a equação diferencial ordinária unidimensional*

$$x'_n(t) = \sqrt{|x_n(t)| + \frac{1}{n+1}};\ x_n(0) = 0. \tag{1.14}$$

De (1.14) temos que $x_n(t)$ *é estritamente crescente em* t *e, como* $x_n(0) = 0$*,* $x_n(t) > 0$ *para* $0 < t < \tau$*, onde* τ *é suficientemente pequeno. Assim,*

$$x'_n(t) > \sqrt{x_n(t)},\ 0 < t < \tau,$$

ou melhor

$$\frac{x'_n(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1,\ 0 < t < \tau. \tag{1.15}$$

Integrando em ambos os lados de (1.15) de 0 *a* t*, obtemos*

$$x_n(t) > \frac{t^2}{4},\ 0 < t < \tau,\ \forall n.$$

Assim, x_n *está definida para todo* $t \in \mathbb{R}$*, e para* $0 \leqslant t < \tau$ *temos*

$$x_n(t) \geqslant \frac{t^2}{4},\ \forall n.$$

Perceba que, independente do valor de τ*, a sequência* $(x_n(t))$ *não converge para zero quando* $n \to \infty$*, contradizendo o fato que* $x(t)$ *é uma solução de (1.12)-(1.13) e também* $x(t) \in c_0$*.*

De maneira análoga o resultado é verificado para a esquerda de $t = 0$*.*

Observação 1.32 *Vimos que o Teorema de Peano não é válido para espaços de dimensão infinita quando a função* f *é apenas contínua. A seguir, acrescentando a hipótese que* f *seja localmente lipschitiziana na segunda variável, vamos provar a existência local e unicidade para o problema de Cauchy (1.8) em espaços de Banach. Aqui* *usaremos a mesma prova dada em [19], a qual repetiremos aqui para deixar o texto mais completo.*

Teorema 1.33 *Sejam X um espaço de Banach, $\delta > 0$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Suponha que numa vizinhança do ponto (t_0, x_0) a função*

$$\begin{aligned} f : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável, isto é, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant M\|x - y\|, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall x, y \in X.$$

Então, existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t);\ \ x(t_0) = x_0.$$

possui uma única solução.

Demonstração: (Existência Local e Unicidade, [19]) *Considere $\eta > 0$ e $x \in X$ tal que $\|x - x_0\| < \eta$. Como f é contínua em t dado $\xi > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t_0, x)\| \leqslant \xi \tag{1.16}$$

sempre que $|t - t_0| \leqslant \epsilon$. Desde que f é localmente Lipschitz na segunda variável, tem-se

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, x_0)\| &\leqslant M\|x - x_0\| \\ &\leqslant M\eta. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Temos também

$$\begin{aligned} \|(t, x) - (t_0, x_0)\| &= \|(t - t_0), x - x_0)\| \\ &= |t - t_0| + \|x - x_0\| \\ &\leqslant \epsilon + \eta. \end{aligned}$$

Por (1.16) e (1.17), temos

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t_0, x_0)\| &\leqslant \|f(t, x) - f(t, x_0)\| + \|f(t, x_0) - f(t_0, x_0)\| \\ &\leqslant M\eta + \xi. \end{aligned}$$

Assim, f é contínua numa vizinhança de (t_0, x_0) e, consequentemente, f é limitada nessa vizinhança. Então, existe uma constante M_1 tal que

$$\|f(t,x)\| \leqslant M_1.$$

Agora, considere $\alpha = min\{\epsilon, \eta/M_1\}$ e $C_\alpha = C([t_0-\alpha, t_0+\alpha], X)$ o espaço de Banach das funções contínuas $x : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \longrightarrow X$, com a norma

$$\|x\|_{C_\alpha} = \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \|x(t)\|.$$

Considere também $B_\eta = \{x \in C_\alpha(X); \|x-x_0\| \leqslant \eta\}$ e T um operador sobre B_η definido como

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Dado $x \in B_\eta$, obtemos

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leqslant \alpha M_1,$$

implicando que

$$\|Tx - x_0\|_{C_\alpha} = \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \|(Tx)(t) - x_0\| \leqslant \alpha M_1 \leqslant \frac{\eta}{M_1} M_1 = \eta,$$

consequentemente, $T : B_\eta \subset X \longrightarrow B_\eta$.

Sem perda de generalidade, considere que $t \geqslant t_0$. Dados x_1 e x_2 em B_η, tem-se

$$\begin{aligned} \|T(x_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\|ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|x_2 - x_1\|ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|Tx_2(t) - Tx_1(t)\| \leqslant M(t-t_0)\|x_2 - x_1\|.$$

Como

$$\begin{aligned}
\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} \big[f(s, Tx_2(s)) - f(s, Tx_1(s))\big] ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|Tx_2(s) - Tx_1(s))\| ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M^2(s - t_0)\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} ds \\
&\leqslant M^2\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds \\
&\leqslant M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha},
\end{aligned}$$

temos

$$\|T^2x_2 - T^2x_1\|_{C_\alpha} \leqslant \frac{M^2\alpha^2}{2!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.$$

Suponha que na n-ésima composição acontece a seguinte desigualdade

$$\|T^nx_2 - T^nx_1\|_{C_\alpha} \leqslant \frac{M^n\alpha^n}{n!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.$$

Então, para a (n+1)-ésima composição

$$\begin{aligned}
\|(T^{n+1}x_2)(t) - (T^{n+1}x_1)(t)\| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, T^nx_2(s) - f(s, T^nx_1(s))] ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|T^nx_2(s) - T^nx_1(s))\| ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} MM^n(s - t_0)\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} ds \\
&\leqslant M^{n+1}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds \\
&\leqslant M^{n+1} \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo, por indução, temos

$$\|T^nx_2(t) - T^nx_1(t)\|_{C_\alpha} \leqslant \frac{M^n\alpha^n}{n!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quando $n \to \infty$, *segue que* $\dfrac{(M\alpha)^n}{n!} \to 0$. *Daí, existe* $n_0 \geqslant 1$ *tal que* $\dfrac{(M\alpha)^{n_0}}{n_0!} < 1$. *Então, Pelo Teorema do Ponto Fixo para Contrações (ver B.5), existe um único* $x \in B_\eta$

tal que $(Tx)(t) = x(t)$. *Assim,*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \ com \ x(t_0) = x_0.$$

□

1.5 Resultados sobre Existência de Solução Global

Nesta seção apresentamos resultados que garantem existência de solução global para o problema de Cauchy (1.8). Os resultados apresentadas encontram-se nas referências [2] e [28], (veja também [19]).

Inicialmente, apresentamos um resultado clássico, conhecido com Lema de Gronwall (ver [27])

Lema 1.34 *Sejam* u, v *funções contínuas não negativas em* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *tais que, para* $\alpha \geqslant 0$, *satisfazem a desigualdade*

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_{a}^{t} v(s)u(s)ds, \ \ t \in [a, b]. \tag{1.18}$$

Então,

$$u(t) \leqslant \alpha \cdot exp\left(\int_{a}^{t} v(s)ds\right).$$

Quando $\alpha = 0$, *temos* $u \equiv 0$.

Demonstração: *Considere* $\alpha > 0$. *Seja*

$$w(t) = \alpha + \int_{a}^{t} v(s)u(s)ds. \tag{1.19}$$

Por (1.19) segue que $w(a) = \alpha$ *e* $w(t) \geqslant \alpha > 0$. *Derivando* $w(t)$, *encontramos*

$$w'(t) = v(t)u(t).$$

Como $u(t) \leqslant w(t)$, *devido a (1.18) e (1.19), temos*

$$w'(t) \leqslant v(t)w(t).$$

Desde que $w(t) > 0$, *tem-se*

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leqslant v(t). \tag{1.20}$$

Integrando (1.20) de a até t, obtemos

$$\int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}ds \leqslant \int_a^t v(s)ds,$$

o que implica em

$$ln(w(s)) \mid_a^t \leqslant \int_a^t v(s)ds.$$

Assim

$$ln(w(t)) - ln(w(a)) \leqslant \int_a^t v(s)ds,$$

ou seja,

$$ln\left(\frac{w(t)}{w(a)}\right) \leqslant \int_a^t v(s)ds.$$

Como $w(a) = \alpha$, segue que

$$ln\left(\frac{w(t)}{\alpha}\right) \leqslant \int_a^t v(s)ds.$$

O que implica

$$\frac{w(t)}{\alpha} \leqslant exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Logo,

$$w(t) \leqslant \alpha\ exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Já que $u(t) \leqslant w(t)$, o resultado segue para $\alpha > 0$.

Quando $\alpha = 0$, temos o seguinte

$$u(t) \leqslant \alpha'\ exp\left(\int_a^t v(s)ds\right),\ \forall\ \alpha' > 0.$$

Fazendo $\alpha' \to \alpha = 0$, obtemos

$$\lim_{\alpha' \to 0} u(t) \leqslant \lim_{\alpha' \to 0} \alpha'\ exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) = 0.$$

Como $u(t)$ é não negativa, segue que $u(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Logo, $u \equiv 0$.

□

Teorema 1.35 *(Cauchy, Lipchitz, Picard, [7]) Sejam X um espaço de Banach e $F : X \longrightarrow X$ uma aplicação tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x - y\|, \ \forall x, y \in X, L \in \mathbb{R}_+.$$

Então, para todo $x_0 \in X$, existe um único $x \in C^1([0, \infty), X)$ tal que

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \ x(0) = x_0. \tag{1.21}$$

Demonstração: *Temos que encontrar $x \in C^1([0, \infty), X])$ tal que*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds. \tag{1.22}$$

Considere o conjunto

$$E = \left\{ x \in C^1([0, \infty, X]; \ \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x(t)\| < \infty \right\},$$

onde $k > 0$ será fixado posteriormente.
Afirmação 1: *E é um espaço de Banach com a norma*

$$\|x\|_E = \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x(t)\|, \ k > 0.$$

Com efeito, seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em E. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_E = \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x_n(t) - x_m(t)\| < \epsilon,$$

implicando que

$$e^{-kt}\|x_n(t) - x_m(t)\| < \epsilon, \ \forall m \text{ e } n > n_0, \forall t \geqslant 0.$$

Note que, para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, a sequência $\{x_n(t))\}$ é de Cauchy em X. Logo, existe $x^t \in X$ tal que $x_n(t) \to x^t$ quando $n \to \infty$.

Considere a função $x : [0, \infty) \longrightarrow X$, dada por

$$x(t) = x^t = \lim_{n \to \infty} x_n(t), \forall t \geqslant 0.$$

Vamos mostrar que $\{x_n\}$ converge para x, e que $x \in E$. Como $\{x_n\}$ é de Cauchy, segue *que* $\{x_n\}$ *é limitada em* E. *Então, existe uma constante* $M > 0$ *tal que*

$$\|x_n\|_E = \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| \leqslant M,$$

implicando que

$$e^{-kt}\|x_n(t)\| \leqslant \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| = \|x_n\|_E \leqslant M.$$

Assim $e^{-kt}\|x_n(t)\| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}, t \geqslant 0$ *e* $k > 0$ *fixado. Fazendo* $n \to \infty$ *na última desigualdade, obtemos*

$$e^{-kt}\|x(t)\| \leqslant M,$$

e com isso

$$\|x\|_E = \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt}\|x(t)\| \leqslant M,$$

o que mostra que $x \in E$. *Agora, devemos somente verificar que* $\|x - x_n\|_E \to 0$, *quando* $n \to \infty$.
Dado $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [0, \infty),$$

para todo $m, n \geqslant n_0$. *Fazendo* $m \to \infty$ *na desigualdade acima, obtemos*

$$\|x(t) - x_n(t)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

para $n > n_0$, *o que implica*

$$e^{-kt}\|x(t) - x_n(t)\| \leqslant \|x(t) - x_n(t)\| < \epsilon,\ t \in [0, \infty).$$

Logo

$$\|x - x_n\|_E < \epsilon,$$

mostrando a Afirmação 1.

Agora, vamos mostrar que a função $\Phi : E \longrightarrow C^1([0, \infty), X)$ *dada por*

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds,$$

satisfaz $\Phi(E) \subset E$.

Primeiramente, note que a continuidade da Φ decorre da continuidade das funções presentes na sua definição e pelo fato de que integrais de funções contínuas são contínuas. Por fim, vamos verificar que $\|\Phi(x)\|_E < \infty$.

Temos que

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)\|_E &= \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\left(\|x_0\| + \left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\|\right)\\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\|x_0\| + \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\|.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\| &\leqslant \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds\\ &= \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s)) - F(0) + F(0)\|ds\\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\int_0^t \big[\|F(x(s)) - F(0)\| + \|F(0)\|\big]ds\end{aligned}$$

e usando o fato que

$$\|F(x(s))\| - \|F(0)\| \leqslant \|F(x(s)) - F(0)\| \leqslant L\|x(s)\|,$$

temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leqslant \int_0^t L\|x(s)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds\\ &\leqslant \int_0^t L\|x(s)\|ds + \|F(0)\|t.\end{aligned}$$

Multiplicando por e^{-kt} na desigualdade acima, obtemos

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leqslant \int_0^t Le^{-kt}\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t,$$

ou equivalentemente,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leqslant \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t. \tag{1.23}$$

Agora, considere o conjunto

$$G = \{e^{-kt}\|F(0)\|t;\ t \geqslant 0\}.$$

Provaremos que G é limitado superiormente por $\|F(0)\|/e^k$. Com efeito, considere a *função*

$$\begin{array}{rcl} g:[0,\infty) & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & g(t)=e^{-kt}\|F(0)\|t. \end{array}$$

Derivando com relação à t, obtemos

$$g'(t)=\frac{\|F(0)\|-\|F(0)\|tk}{e^{kt}},$$

implicando que $g'(t)=0$ se, e somente se, $t=\dfrac{1}{k}$.
Derivando g', encontramos

$$g''(t)=\|F(0)\|\left(\frac{-2k+k^2t}{e^{2kt}}\right).$$

Como $g(0)=0$ e $g''(1/k)<0$, segue que $t=1/k$ é um máximo global para g, o que implica G ser limitado superiormente, e que $\sup G<\infty$. *Calculando o supremo em ambos os membros da equação (1.23), obtemos*

$$\begin{aligned} \sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds+\sup G \\ &\leqslant L\|x\|_E\int_0^t e^{-kt}e^{ks}ds+\sup G \\ &= L\|x\|_E e^{-kt}\int_0^t e^{ks}ds+\sup G \\ &= L\|x\|_E\left[\frac{1}{k}-\frac{e^{-kt}}{k}\right]+\sup G. \end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{t\geqslant 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds\leqslant L\|x\|_E\frac{1}{k}+\sup G<\infty. \tag{1.24}$$

Afirmação 2: *Para $k>L$, Φ é uma contração*

De fato, note que

$$\begin{aligned} \|\Phi(x(s))-\Phi(y(s))\| &= \left\|\int_0^t \big[F(x(s))-F(y(s))\big]ds\right\| \\ &\leqslant \int_0^t L\|x(s)-y(s)\|ds. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por e^{-kt} e procedendo como *em (1.24), obtemos*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_E \leqslant \frac{L}{k}\|x - y\|_E.$$

Assim, quando $k > L$, Φ é uma contração. Logo, Φ tem um único ponto fixo x que satisfaz (1.22), e por conseguinte é solução de (1.21).

□

Teorema 1.36 *Sejam X um espaço de Banach, e suponha que $f : [t_0, \infty)\times X \longrightarrow X$ é contínua e $\|f(t,x)\| \leqslant g(t, \|x\|)$, para todo $(t, r) \in [t_0, \infty)\times X$, onde $g : [t_0, \infty)\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e $g(t, r)$ é não-decrescente em $r \geqslant 0$, para cada $t \in [t_0, \infty)$. Então, se a solução maximal $r(t, t_0, r_0)$ do problema de valor inicial*

$$r' = g(t, r);\ r(t_0) = r_0, \tag{1.25}$$

existe em $[t_0, \infty)$, o intervalo maximal de existência de qualquer solução $u(t, t_0, u_0)$ do problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ t \geqslant t_0,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.26}$$

com $\|x_0\| \leqslant r_0$, também contém $[t_0, \infty)$.

Demonstração: *Considere $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ uma solução de (1.26), com $\|x_0\| \leqslant r_0$, que existe sobre o intervalo $[t_0, \beta)$, com $t_0 < \beta < \infty$, onde β não pode ser estendido. Seja $m(t) = \|x(t)\|$ para $t_0 \leqslant t_0 < \beta$. Temos que*

$$\begin{aligned} m(t+h) - m(t) &= \|x(t+h)\| - \|x(t)\| \\ &\leqslant \|x(t+h) - x(t)\|, \end{aligned}$$

assim

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} \leqslant \frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h},\ (h > 0). \tag{1.27}$$

Fazendo $h \to 0^+$ em (1.27) e usando a hipótese dada, obtemos

$$\begin{aligned} d^+m(t) &\leqslant \|x'(t)\| \\ &= \|f(t, x(t))\| \\ &\leqslant g(t, \|x(t)\|) \\ &= g(t, m(t)),\ t_0 \leqslant t < \beta, \end{aligned}$$

onde $d^+m(t)$ é a derivada à direita de $m(t)$. Ademais, $m(t_0) = \|x(t_0)\| = \|x_0\| \leqslant r_0$.

Deste modo,

$$m(t) - m(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} g(s, m(s))ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} m(t) &\leqslant m(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, m(s))ds \\ &\leqslant r_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, \|x(s)\|)ds. \end{aligned}$$

Perceba que $r_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s, \|x(s)\|)ds$ *é uma solução do problema escalar do tipo (1.25), com* $g(t,r) = g(t, \|x(t)\|)$. *Assim,*

$$\|x(t)\| \leqslant r(t), \;\; t_0 \leqslant t < \beta.$$

Agora, vamos mostrar que $\lim\limits_{t\to\beta^-} x(t)$ *existe e pertence a* X. *Como* $g(t,r)$ *é não-crescente em* $r \geqslant 0$, *para quaisquer* t_1 *e* t_2 *tais que* $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \beta$, *temos*

$$\begin{aligned} \|x(t_2) - x(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds \right\| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} g(s, \|x(s)\|)ds \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} g(s, r(s))ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} r'(s)ds. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant r(t_2) - r(t_1).$$

Como $\lim\limits_{t\to\beta^-} r(t)$ *existe e é finito, tomando os limites* $t_1, t_2 \to \beta^-$, *temos* $\|x(t_2) - x(t_1)\| \to 0$. *Pelo critério de Cauchy para funções (ver [21]), deduzimos que* $\lim\limits_{t\to\beta^-} x(t)$ *existe.*

Agora, seja $x(\beta) = \lim\limits_{t\to\beta^-} x(t)$, *e considere o problema de Cauchy*

$$x' = f(t,x), \;\; x(\beta) = x_\beta \tag{1.28}$$

onde x_β *é a condição inicial em* $t = \beta$. *Como a solução local de qualquer ponto em* $[t_0, \infty) \times X$ *existe,* $x(t)$, *solução de (1.28), existe em uma vizinhança de* β, *ou seja,* *o intervalo de definição da solução pode ser estendido além de* β, *contradizendo a hipótese. Logo, qualquer solução de (1.26) existe sobre* $[t_0, \infty)$.

$\square$

Capítulo 2

Atratores Globais para Semigrupos

Neste Capítulo, apresentamos alguns resultados sobre a teoria de semigrupos não lineares. Em particular, estudamos um resultado abstrato sobre a existência de um conjunto atrator global.

2.1 Semigrupos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre a teoria de semigrupos. Para isto, seguimos as referências [2], [9] e [28].

Definição 2.1 *Sejam X um espaço métrico completo e $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Um C^r- Semigrupo, $r \geqslant 0$, é uma família de operadores (não necessariamente lineares) $T(t) : X \to X, t \geqslant 0$, que satisfazem as seguintes propriedades.*

1. $T(0) = I$;

2. $T(t+s) = T(t)T(s), t \geqslant 0, s \geqslant 0$.

3. *$T(t)x$ é contínua em t e x, e tem derivada de Fréchet contínua em x até a ordem r, para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.*

Proposição 2.2 *Seja X um espaço de Banach. Se $F : X \to X$ é uma função globalmente Lipschitz, então a solução do problema de Cauchy*

$$x' = F(x), \ x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

define um C^0-semigrupo $T(t) : X \to X, t \geqslant 0$.

Demonstração: *A solução do problema (2.1) existe pelo Teorema 1.21. O problema (2.1) é equivalente a equação*

$$x(t) = x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t F(x(x))ds.$$

Dado $x_0 \in X$, *defina* $T(t)x_0 = x(t) = x(t, x_0), t \geqslant 0$. *Temos que*

$$T(0)x_0 = x(0, x_0) = x_0.$$

Como isto vale para qualquer $x_0 \in X$, *temos que* $T(0) = I$. *Agora, para cada* $t, \tau \geqslant 0$ *e* $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} T(t+\tau)x_0 &= x(t+\tau, x_0) = x(t, x(\tau, x_0)) \\ &= T(t)x(\tau, x_0) = T(t)T(\tau)x_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(t+\tau) = T(t)T(\tau).$$

Por fim, precisamos mostrar que $T(t)x_0$ *é contínuo em* t *e em* x_0, *e tem derivada de Fréchet contínua em* x *até a ordem* r, *para* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$. *A continuidade em* t *segue da própria definição de* $T(t)x_0$. *Agora, dados* $x_0, y_0 \in X$, *temos que*

$$\begin{aligned} \|T(t)x_0 - T(t)y_0\| &\leqslant \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|F(T(s)x_0) - F(T(s)y_0)\| ds \\ &\leqslant \|x_0 - y_0\| + \int_0^t C\|T(s)x_0 - T(s)y_0\| ds, \end{aligned}$$

onde C *é a constante de Lipschitz de* F. *Pelo Lema de Gronwall, temos*

$$\|T(t)x_0 - T(t)y_0\| \leqslant \|x_0 - y_0\| e^{Ct}.$$

Logo, a continuidade de $T(t)$ *em* x_0 *segue naturalmente.*

□

Seja $x_0 \in X$. *A órbita positiva iniciando em* x_0, *denotada por* $\gamma^+(x_0)$, *é definida como*

$$\gamma^+(x_0) = \{T(t)x_0, t \geqslant 0\}.$$

Uma solução global de $\{T(t); t \geqslant 0\}$ *passando por* $x \in X$ *é uma função contínua* $\phi : \mathbb{R} \to X$ *tal que* $\phi(0) = x$ *e*

$$T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s), s \in \mathbb{R} \ e \ t \geqslant 0.$$

Os operadores $T(t)$ *não são necessariamente injetivos, assim se existir uma solução global ela nem sempre é única. Quando existe uma solução global* $\phi : \mathbb{R} \to X$ *por*

$x \in X$, definimos a órbita completa de x relativa à solução global ϕ como

$$\gamma_\phi(x) := \{\phi(t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, para $t \in \mathbb{R}$, denotamos

$$(\gamma_\phi)_t^-(x) := \{\phi(s); s \leqslant t\},$$

e definimos a órbita negativa terminando em x_0 relativa à solução ϕ como sendo

$$(\gamma_\phi)_t^-(x) := \{\phi(s); s \leqslant 0\}.$$

Observação 2.3 *Quando os operadores $T(t)$ são injetivos isso equivale a "unicidade para trás" do sistema dinâmico. Neste caso, denotamos por $T(-t)$ sua inversa que leva $T(t)X$ em X. Quando essa família de operadores satisfaz a Definição 2.1 é chamado de C^r-grupo.*

Alguns subconjuntos possuem propriedades bastante importantes na Teoria de Semigrupos e, alguns destes conjuntos, definimos a seguir.

Definição 2.4 *O conjunto ω-**limite** de um subconjunto B de X, $\omega(B)$, é definido como*

$$\omega(B) := \cap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)},$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_t^+(B) &= \cup_{x \in B} \gamma_t^+(x) \\ &= \cup_{x \in B} \{T(s)x; s \geqslant t\}. \end{aligned}$$

Definição 2.5 *O conjunto α-**limite** de um subconjunto B de X relativo a solução ϕ, $\alpha(B)$, é definido como*

$$\alpha(B) := \cap_{t \leqslant 0} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(B)},$$

onde

$$\gamma_\phi^-(B) = \cup_{x \in B} (\gamma_\phi)_t^-(x).$$

*O próximo resultado vai exibir uma caracterização para conjuntos ω-limite e α-**limite**.*

Lema 2.6 *Seja $x_0 \in X$. Então, $x_0 \in \omega(B)$ se, e somente se, existe uma sequência*

$\{x_n\}$ *em* B *e uma sequência* $t_n \to +\infty$ *tal que*

$$T(t_n)x_n \to x_0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Analogamente, $x_0 \in \alpha(B)$ *se, e somente se, existe uma sequência* $\{y_n\} \subset B$ *e uma sequência* $t_n \to -\infty$*, tal que*

$$T(t_n)y_n \to x_0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração: *Dado* $x_0 \in \omega(B)$*, temos*

$$x_0 \in \overline{\gamma_t^+(B)}, \forall t \geqslant 0.$$

Assim, existe uma sequência $\{a_n\}$ *em* $\gamma_t^+(B)$*,* $t \geqslant 0$*, tal que* $a_n \to x_0$ *quando* $n \to +\infty$*. Daí, existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow \|a_n - x_0\|_X < 1.$$

Como $a_{n_1} \in \gamma_t^+(B)$*, segue que* $a_{n_1} = T(t_1)x_1$*, para algum* $t_1 \geqslant 0$ *e algum* $x_1 \in B$*. Considere* $\overline{x}_1 = a_{n_1}$*.*

Como $x_0 \in \overline{\gamma_t^+(B)}, t \geqslant 1$*, existe uma sequência* $\{b_n\}$ *em* $\gamma_t^+(B)$*, com* $b_n \to x$*. Assim, existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *com* $n_2 \geqslant n_1$ *tal que*

$$n \geqslant n_2 \Longrightarrow \|b_n - x_0\|_X < \frac{1}{2}.$$

Já que $b_{n_2} \in \gamma_t^+(B), t \geqslant 1$*, existem* $t_2 \geqslant 1$ *e* $x_2 \in B$ *tal que* $b_{n_2} = T(t_2)x_2$*. Considere* $\overline{x}_2 = b_{n_2}$*. Repetindo esse raciocínio, obtemos uma sequência* $\{\overline{x}_n\}$ *com* $\overline{x}_n = T(t_n)x_n, t_n \geqslant n-1, x_n \in B$*, onde para qualquer* $\epsilon > 0$*, existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geqslant N_0 \Longrightarrow \|\overline{x}_n - x_0\|_X < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Logo, existem sequências $\{x_n\}$ *em* B *e* $t_n \to +\infty$ *tal que* $T(t_n)x_n \to x_0$ *quando* $n \to +\infty$*.*

Reciprocamente, se $T(t_n)x_n \to x_0$ *quando* $t_n \to +\infty$*, podemos obter (passando para uma subsequência se necessário)* $t_n \geqslant n, \forall n \in \mathbb{N}$ *e*

$$x_0 \in \overline{\{T(t_n)x_n, n \geqslant 0\}}.$$

Como toda subsequência de $\{T(t_n)x_n, n \geqslant 0\}$ *também converge para* x_0*, segue que*

$$x_0 \in \overline{\{T(t_n)x_n, n \geqslant s\}}, \forall s \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$x_0 \in \overline{\{T(t_n)x_n, n \geqslant s\}} \subset \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Portanto,

$$x_0 \in \cap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

De modo análogo, mostra-se o caso para o $\alpha(X)$. Para mais detalhes (ver [26]).

□

Definição 2.7 *Um ponto fixo, estacionário ou de equilíbrio do semigrupo $T(t)$ é um ponto $u_0 \in X$ tal que*

$$T(t)u_0 = u_0, \forall\ t \geqslant 0.$$

Definição 2.8 *Um conjunto $B \subset X$ é positivamente invariante sob o semigrupo $T(t)$ se*

$$T(t)B \subset B, \forall t \geqslant 0.$$

Definição 2.9 *Um conjunto $B \subset X$ é negativamente invariante sob o semigrupo $T(t)$ se*

$$T(t)B \supset B, \forall t \geqslant 0.$$

Definição 2.10 *Um conjunto $B \subset X$ é um conjunto invariante sob o semigrupo $T(t)$ se B é positivamente e negativamente invariante sob $T(t)$, ou seja,*

$$T(t)B = B, \forall t \geqslant 0.$$

O lema abaixo nos fornece uma importante informação sobre conjuntos invariantes. Faremos aqui a demonstração dada em [2].

Lema 2.11 *Um conjunto $A \subset X$ é invariante se, e somente se, para qualquer $x \in A$, existe uma órbita completa por x, $\gamma_\phi(x)$, tal que $\gamma_\phi(x) \subset A$.*

Demonstração: *Suponha que A seja invariante, ou seja, $T(t)A = A$, para todo $t \geqslant 0$. Dado $x \in A$, existe $x_1 \in A$ tal que*

$$T(1)x_1 = x.$$

Como $x_1 \in A$, *existe* $x_2 \in A$ *tal que*

$$T(1)x_2 = x_1,$$

e assim por diante. Fazendo $x_0 = x$, *construimos uma sequência* (x_n) *de pontos de* A *tal que*

$$T(1)x_{n+1} = x_n, \ \ \text{para } n \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Note que, utilizando (2.2), temos

$$\begin{aligned}
T(n)x_n &= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{n \text{ vezes}} x_n \\
&= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{(n-1) \ \text{ vezes}} x_{n-1} \\
&= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{(n-2) \ \text{ vezes}} x_{n-2} \\
&\ \ \vdots \\
&= T(1)x_1 \\
&= x.
\end{aligned}$$

Defina $\phi : (-\infty, \infty) \longrightarrow X$ *por*

$$\phi = \begin{cases} T(t)x, \ \text{se } t \geqslant 0 \\ T(n+t)x_n, \ \text{se } t \in [-n, -n+1), \ \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $s \in [-n, -n+1)$. *Se* $t \geqslant -s$, *então*

$$\begin{aligned}
T(t)\phi(s) &= T(t)T(n+s)x_n \\
&= T(t+s+n)x_n \\
&= T(t+s)T(n)x_n \\
&= T(t+s)x \\
&= \phi(t+s).
\end{aligned}$$

Se $s \in [-k, -k+1)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *e usando (2.2), então*

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= T(k+s)x_k \\
&= T(k+s)T(1)x_{k+1} \\
&= T(k+s+1)x_{k+1} \\
&\vdots \\
&= T(k+j+s)x_{k+j},
\end{aligned}$$

onde $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Se* $n \geqslant k$ *e* $j = n - k$, *então*

$$\phi(s) = T(n+s)x_n \text{ se } s \in [-k, -k+1).$$

Agora, quando $t < -s$, *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$0 \leqslant k < n-1 \ \mathit{1} \ -1 \leqslant \tau \leqslant 0$$

onde

$$-s = t + k - \tau. \tag{2.3}$$

Então

$$\begin{aligned}
T(t)\phi(s) &= T(t)T(n+s)x_n \\
&= T(t+s+n)x_n \\
&= T(n-(k-\tau))x_n.
\end{aligned}$$

Assim, por (2.3) e que $n = j + k$, *com* $j = 1$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
T(t)\phi(s) &= T(1+k-(k-\tau))x_{k+1} \\
&= T(1+\tau)x_{k+1} \\
&= T(1+t+k+s)x_{k+1}.
\end{aligned}$$

Observe que de (2.3) tem-se $t + s \in [-(1+k), -k)$. *Logo, pela definição de* ϕ *temos*

$$T(1+t+k+s)x_{k+1} = \phi(t+s).$$

Portanto, em todos os casos $\phi(\mathbb{R}) \subset A$.

Reciprocamente, quando $t = 0$ *tem-se* $T(0)A = A$. *Considere* $t > 0$. *Dado* $x \in A$, *existe uma órbita completa* $\phi : (-\infty, \infty) \longrightarrow A$ *tal que*

$$\phi(0) = x \text{ e } T(\tau)\phi(s) = \phi(\tau + s), \text{ para } \tau \geqslant 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\tau = t$ *e* $s = 0$*, temos*

$$T(t)x = T(t)\phi(0) = \phi(t) \in A,$$

ou seja, $T(t)x \in A$*. Logo,* $T(t)A \subset A$*. Para a inclusão contrária, note que dado* $x \in A$*, tomando* $\tau = t$ *e* $s = -t$*, obtemos*

$$\begin{aligned} T(t)\phi(-t) &= \phi(t-t) \\ &= \phi(0) \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo, $A \subset T(t)A$*. Das inclusões acima, concluímos que* $T(t)A = A$*, para* $t \geqslant 0$*.*

□

Lema 2.12 *Seja* $\{T(t); t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X*. Se* $B \subset X$*, então* $\omega(B)$ *é positivamente invariante, isto é,* $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ *para todo* $t \geqslant 0$*. Se* B *é tal que* $\omega(B)$ *é compacto e atrai* B*, então* $\omega(B)$ *é invariante.*

Demonstração: *Se* $\omega(B) = \varnothing$*, o resultado é imediato. Caso contrário, dado* $y \in \omega(B)$*, existem sequências* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n = y.$$

Usando a continuidade de $T(t)$ *e fixando um* $t \geqslant 0$*, obtemos*

$$T(t)y = \lim_{n\to+\infty} T(t + t_n)x_n,$$

ou seja, $T(t)y \in \omega(B)$*. Logo,*

$$T(t)\omega(B) \subset \omega(B).$$

Agora, assuma que $\omega(B)$ *é compacto e atrai* B*. Então, dado* $x \in \omega(B)$*, existem sequências* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *com* $t_n \to +\infty$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ *tal que*

$$T(t_n)x_n \to x, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Fixando $t \in \mathbb{R}^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t, \forall n \geqslant n_0$. Assim,

$$T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \to x, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, temos que

$$dist(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Daí, pela Proposição 2.25, existe uma subsequência $\{T(t_{n_k} - t)x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Se

$$T(t_{n_k} - t)x_{n_k} \to y,$$

então $y \in \omega(B)$ e, por unicidade dos limites, $T(t)y = x$. Logo, $\omega(B) \subset T(t)(\omega(B))$. Portanto,

$$\omega(B) = T(t)\omega(B).$$

□

Lema 2.13 *Sejam $\{T(t); t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ um subconjunto conexo tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Então, $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração: *Como $\omega(B) = \cap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é conexo para cada $t \geqslant 0$, pois $[0, \infty) \times X \ni (s, x) \longrightarrow T(s)x \in X$ é contínua e leva o conexo $[t, \infty) \times B$ sobre o conexo $\gamma_t^+(B)$, segue que $\omega(B)$ é conexo.*

□

Lema 2.14 *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, para algum $t_0 \geqslant 0$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Demonstração: *Temos que $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não vazio e compacto, para cada $t \geqslant t_0$. Pela propriedade da interseção finita (ver [22], p.16), segue que*

$$\omega(B) = \cap_{t \geqslant t_0} \overline{\gamma^+(B)}$$

é não vazio e compacto.

Agora, suponha que $\omega(B)$ não atrai B. Então, existem sequências $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n, t_n \geqslant 0\}$ com $t_n \to +\infty$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ *é compacto e* $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ *para algum* $n_1 \in \mathbb{N}$*, existem subsequências* $\{t_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $\{x_{n_j}\} \subset B$ *tal que* $\{T(t_{n_j})x_{n_j}\}$ *converge para algum* $y \in X$*. Logo,*

$$y \in \omega(B) \quad e \quad d(y, \omega(B))) \geqslant \epsilon_0,$$

absurdo!

Portanto, $\omega(B)$ *atrai* B*.*

Segue do Lema 2.12 que $\omega(B)$ *é invariante.*

□

Lema 2.15 *Seja* $x \in X$*, e suponha que exista uma solução global* $\phi : \mathbb{R} \to X$ *por* x *tal que* $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ *seja compacto. Então ,* $\alpha_\phi(x)$ *é não-vazio, compacto e invariante.*

Demonstração: *A demostração é semelhante ao do Lema 2.14. Para mais detalhes ver [26].*

□

2.2 Existência de atrator global

Nesta seção, voltamos nossa atenção para conjuntos que apresentam características especiais. Em particular, estamos interessados em conjuntos compactos e invariantes sob a ação de um semigrupo. Para isto nos baseamos nas referências [2], [9] e [28].

Definição 2.16 *Um conjunto* $A \subset X, A \neq \varnothing$*, é dito atrator sob o semigrupo* $\{T(t); t \geqslant 0\}$ *se:*

1. A *é um conjunto invariante sob* $T(t)$*;*

2. A *possui uma vizinhança aberta* $\mathcal{U}$ *tal que, para todo* $u_0 \in \mathcal{U}$*,* $T(t)u_0$ *tende para* A *quando* $t \to +\infty$*, ou seja,*

$$d(T(t)u_0, A) \to 0, \quad quando \quad t \to +\infty.$$

A distância no item (2) é a distância de um ponto a um conjunto, dada por

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Quando A é um atrator, a maior vizinhança aberta $\mathcal{U}$ que satisfaz (2) é chamada de bacia de atração de A. Um conjunto A atrai uniformemente um conjunto $B \subset \mathcal{U}$ se

$$d_H(T(t)B, A) \to 0, \quad \textit{quando} \ \ t \to \infty,$$

onde $d_H(B_0, B_1)$, é a semidistância entre dois conjuntos (B_0 e B_1), definida como

$$d_H(B_0, B_1) = \sup_{x \in B_0} \inf_{y \in B_1} d(x, y).$$

Neste caso, dizemos que A atrai B.

Definição 2.17 *Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um atrator global (ou universal) para o semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ quando $\mathcal{A}$ é o maior (no sentido de inclusão de conjuntos) atrator compacto que atrai os conjuntos limitados de X.*

Definição 2.18 *Sejam $B \subset X$ e $\mathcal{U}$ um conjunto aberto de X contendo B. Dizemos que B é absorvente em $\mathcal{U}$ se a órbita de qualquer subconjunto limitado de $\mathcal{U}$ entra em B após um certo tempo, ou seja, se para todo $B_0 \subset \mathcal{U}$, B_0 limitado, existe $t_1(B_0)$ tal que*

$$T(t)B_0 \subset B, \ \forall t \geqslant t_1(B_0).$$

Quando B é absorvente em $\mathcal{U}$ dizemos que B absorve os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$.

Lema 2.19 *A existência de um atrator global $\mathcal{A}$ sob o semigrupo $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ implica na existência de um conjunto absorvente.*

Demonstração: *Sabendo que $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados de X, dado $C \subset X$, C limitado, existe t_0 tal que $T(t)B$ entra numa vizinhança aberta de $\mathcal{A}$, para todo $t \geqslant t_0$. Assim, essa vizinhança aberta será um conjunto absorvente desse sistema.*

□

Observação 2.20 *A recíproca do Lema 2.19 não é verdadeira.*

Definição 2.21 *Um semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é dito eventualmente limitado se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \geqslant 0$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.*

Definição 2.22 *Um semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é dito assintoticamente compacto se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \geqslant 0$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.*

Definição 2.23 *Um semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é ponto dissipativo se existe um subconjunto $B \subset X$ que atrai pontos de X.*

Proposição 2.24 *Seja $\{T(t); t \geqslant 0\}$ um semigrupo em um espaço métrico X. Suponha que $\{T(t_n)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{T(t_n)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitada em X, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X e $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Então $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração: *Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)(B) \subset B$, para todo $t \geqslant 0$. Como $T(t)(B) \subset B$, segue que $\omega(B) \subset B$, e pelo Lema 2.14, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Logo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é assintoticamente compacto.*

□

Proposição 2.25 *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência em X tal que*

$$dist(x_n, K) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente. Dado um semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ e K um subconjunto compacto de X, se K atrai um conjunto compacto K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.

Demonstração: *Primeiramente, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tal que*

$$d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}.$$

Como K é compacto podemos assumir, passando a uma subsequência, se necessário, que $y_{n_m} \to y_0$ para algum $y_0 \in K$. Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leqslant d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \to 0 \text{ quando } m \to +\infty.$$

Logo, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Agora, dado $\epsilon > 0$, considere a $\dfrac{\epsilon}{2}$ vizinhança de K, denotada por $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K)$. Então, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \ \forall t \geqslant t_0.$$

Assim, $\cup_{t\geqslant t_0} T(t)K_1$ está contido em uma união finita de bolas de raio ϵ.

Como $\cup_{0\leqslant t\leqslant t_0} T(t)K_1$ é compacto e ϵ é arbitrário, segue que

$$\gamma^+(K_1) \cup K$$

é compacto. Logo, $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Por fim, temos que $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ é compacto e não-vazio, para todo $t \geqslant 0$, e $\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)}$ para $s \leqslant t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t \geqslant 0}$ possui a propriedade da interseção finita. Daí

$$\omega(K_1) = \cap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \varnothing.$$

Dados $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K),$$

assim $dist(y, K) \leqslant \epsilon$ e como ϵ é arbitrário, segue o resultado.

□

Lema 2.26 *Seja $\{T(t); t \geqslant 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K é compacto, então $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração: *Como $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X. Considere o conjunto*

$$U = \{x \in B; \gamma^+(x) \subset B\}.$$

Temos que U é limitado, absorve pontos de X e

$$\gamma^+(U) = U.$$

Também temos

$$T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) = T(t)(\overline{U}) \subset \overline{\gamma^+(U)}, t \geqslant 0,$$

e que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é assintoticamente compacto. Assim, existe um conjunto compacto K, com

$$K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U},$$

tal que K atrai U. Portanto K atrai pontos de X.

Afirmação: *existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(U)$ é limitado para algum $t \geqslant 0$.*

De fato, suponha que isto não ocorra. Então, existem sequências $\{x_n\} \subset X, x_n \to$

$y \in K$ e $t_n \to +\infty$ tal que $\{T(t_n)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado. Considere o conjunto

$$A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, $\overline{A}$ é compacto e $\gamma_t^+(A)$ é não limitado para cada $t \geqslant 0$. Absurdo, pois o semigrupo é assintoticamente compacto.

Seja V uma vizinhança de K e $t_v \geqslant 0$ tal que $\gamma_{t_v}^+(V)$ é limitado. Como K atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x > 0$ tal que

$$T(t)(O_x) \subset \gamma_{t_v}^+(V) \text{ para } t \geqslant t_x,$$

ou seja, $\gamma_{t_v}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Assim, $\gamma_{t_v}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é compacto dissipativo.

□

Proposição 2.27 *Seja X um espaço métrico e $\{T(t); t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X. Se K é compacto e atrai a sí mesmo sob a ação de $\{T(t); T \geqslant 0\}$, então*

$$\omega(K) = \cap_{t \geqslant 0} T(t)K.$$

Demonstração: *Por definição de ω-limite, temos*

$$\cap_{t \geqslant 0} T(t)K \subset \omega(K).$$

Agora, vamos provar a inclusão contrária. Pela Proposição 2.25, com $K_1 = K$, temos que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Pelo Lema 2.14, $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K.

Logo,

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K, \forall t \geqslant 0.$$

□

Teorema 2.28 *Um semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t); t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração: *Como $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado, segue do Lema 2.26 que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é compacto dissipativo.*

Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere o conjunto

$$B = \{x \in C; \gamma^+(x) \subset C\}.$$

Temos que B absorve subconjuntos compactos de X, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B.

Logo K atrai subconjuntos compactos de X.

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto e invariante. Se $J \subset X$ é compacto, $\omega(J) \subset K$ e, consequentemente,

$$\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K, \ \forall s \geqslant 0.$$

Pela Proposição 2.27

$$\omega(J) \subset \cap_{s \geqslant 0} T(s)K = \omega(K).$$

Assim, $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, temos que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Como $\omega(B)$ é compacto e invariante, segue que $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e, consequentemente, $\mathcal{A}$ atrai B.

Reciprocamente, se $\{T(t); t \geqslant 0\}$ tem um atrator global, é fácil perceber que ele é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto, onde a última característica segue da Proposição 2.24.

□

2.3 Sistemas Gradientes

Os semigrupos Gradientes são uma classe de semigrupos que permite, através de suas caracteristicas, descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores. Em particular, sugerimos a referência [9] para quem se interessar em aprofundar o estudo neste tema.

Definição 2.29 *Seja $T(t) : X \to X, t \geqslant 0, r \geqslant 0$, um C^r-semigrupo. Uma função $V : X \to \mathbb{R}$ é chamada de funcional de Lyapunov para o semigrupo se:*

1. *$V(x)$ é limitado inferiormente;*

2. *$V(x) \to +\infty$, quando $|x| \to +\infty$;*

3. $V(T(t)x)$ é não crescente em t para todo $x \in X$;

4. Se x é tal que $T(t)x$ está definida para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio, ou seja, $T(t)x = x, \forall t \geqslant 0$.

Definição 2.30 *Um semigrupo $T(t) : X \to X, t \geqslant 0, r \geqslant 0$, é um sistema gradiente se*

1. Cada órbita positiva limitada é pré-compacta;

2. existe um funcional de Lyapunov para $T(t)$.

Lema 2.31 *Sejam $\{T(t); t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradiente e $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$. Então, o $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Se existir uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to X$ por x então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$.*
Se $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é gradiente, tem atrator global $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ só possui pontos isolados, então $\mathcal{E}$ é finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Ademais, se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global por x, então $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.

Demonstração: *Como $T(t)$ é um semigrupo gradiente, existe um funcional de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$. O conjunto $V(\overline{\{T(t)x; t \geqslant 0\}})$ é compacto, pois as órbitas positivas são pré-compactas. Assim, o conjunto*

$$V(\{T(t)x; t \geqslant 0\})$$

é limitado inferiormente, ou seja, existe uma constante c tal que

$$V(T(t)x) > c, \forall t \geqslant 0, x \in X.$$

Suponha que $V(T(t)x)$ é não constante. Sabendo que V é não crescente ao longo das órbitas, temos

$$V(T(t)x) \to c, \text{ quando } t \to +\infty.$$

Dado $y \in \omega(x)$, existe uma sequência $t_n \to +\infty$ tal que

$$T(t_n)x \to y.$$

Considere $T(t)y$, para algum $t \geqslant 0$. Pela continuidade de $T(t)$, obtemos

$$T(t)T(t_n)x \to T(t)y.$$

Usando a continuidade de V, temos

$$V(T(t)T(t_n)x) \to V(T(t)y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(T(t)y) &= \lim_{n\to+\infty} V(T(t)T(t_n)x) \\ &= \lim_{n+\infty} V(T(t+t_n)x) \\ &= c, \end{aligned}$$

ou seja, $V(T(t)y) = c$, *para todo* $t \geqslant 0$ *e para todo* $y \in \omega(x)$. *Logo, por unicidade dos limites,* $V(T(t)y) = V(y)$. *Como* V *é um funcional de Lyapunov para* $T(t)$, *segue da Definição 2.29 item (4), que* y *é ponto de equilíbrio. Portanto,*

$$\omega(x) \subset \mathcal{E}.$$

Suponha que exista uma solução $\phi : \mathbb{R} \to X$ *por* x. *Dado* $y \in \alpha_\phi(x)$, *existe uma sequência* $t_n \to -\infty$ *tal que* $T(t_n)x \to y$ *quando* $n \to +\infty$. *Considere uma sequência* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $t_{n-1} - t_n \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$. *Como* $V(T(t)x)$ *é não crescente, dado* $t \in (0,1)$, *temos*

$$\begin{aligned} V(T(t_{n-1})x) &\leqslant V(T(t_n+1)x) \\ &\leqslant V(T(t_n+t)x) \\ &\leqslant V(T(t_n)x), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pela continuidade de V,

$$V(T(t_n+t)x) \to V(y), \text{ quando } n \to +\infty.$$

Além disso,

$$V(T(t_n+t)x) \to V(T(t)y), \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, $V(T(t)y) = V(y)$, *ou seja,* $y \in \mathcal{E}$. *Portanto,*

$$\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}.$$

Agora, assuma que o semigrupo é gradiente, $\mathcal{A}$ *é um atrator global e* $\mathcal{E}$ *é um conjunto discreto. Como* $\mathcal{E}$ *é discreto, segue que* $\mathcal{E}$ *é compacto, pois* $\mathcal{E}$ *é fechado e* $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. *Suponha que* $\mathcal{E}$ *não seja finito. Assim, existe uma cobertura aberta para* $\mathcal{E}$ *que não possui uma subcobertura finita. A saber, basta escolher a cobertura formada por abertos disjuntos cada qual centrado em um ponto distinto de* $\mathcal{E}$. *Absurdo, pois* $\mathcal{E}$ *é compacto.*

Por fim, o $\omega(x)$ *é unitário porque ele é conexo. Caso contrário, o* $\omega(x)$ *seria um conjunto discreto formado por no mínimo dois elementos, onde seria possível exibir* *uma cisão não trivial. Para o caso do $\alpha_\phi(x)$ a justificativa é análoga.*

$\square$

Teorema 2.32 *Suponha que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ seja um semigrupo gradiente, eventualmente limitado e assintoticamente compacto cujo conjunto dos pontos de equilíbrio $\mathcal{E}$ seja limitado. Então $\{T(t); t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) = \Big\{ y \in X; \text{ existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow X \text{ por } y$$

$$\text{tal que } \phi(t) \to \mathcal{E} \text{ quando } t \to -\infty \Big\}$$

Demonstração: *Como $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x. Desde que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é gradiente, $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, o semigrupo $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é ponto dissipativo. Logo, pelo Teorema 2.28, $\{T(t); t \geqslant 0\}$ tem um atrator global.*

Agora, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to X$ por x. Sabendo que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, pois $\mathcal{A}$ é compacto, temos $\alpha_\phi(x) \neq \varnothing$. Assim

$$\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}.$$

Logo, $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Quando $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ por x e

$$\phi(t) \to \mathcal{A} \text{ quando } t \pm \infty.$$

Como $\phi(\mathbb{R})$ é invariante e limitado, concluímos que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ e, consequentemente, $x \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$. Portanto,

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}).$$

$\square$

Capítulo 3

Existência de Atrator Global para Equação de Campos Neurais

Neste Capítulo, motivados pelo estudo feito em [11] e técnicas usadas em [5] e [11], estudamos o comportamento assintótico da equação não local

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -a(x)u(t,x) + K(f \circ u)(t,x) + h(x,u(t,x)), \tag{3.1}$$

onde Ω *é um domínio limitado suave do* $\mathbb{R}^N$, $(N \geqslant 1)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função de classe* $C^1(\mathbb{R})$, $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função continuamente diferenciável com derivada limitada e* K *é um operador integral, com núcleo simétrico e não negativo, dado por*

$$Kv(x) := \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)v(y)dy. \tag{3.2}$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} J(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)dx = 1.$$

A dinâmica de equações de evolução como em (3.1) já são bem conhecidas. Entretanto, o modelo apresentado aqui possui novidades, pois a equação (3.1) inclui um termo de amortecimento na parte linear e mais uma função não linear representando um campo externo, estendendo os modelos considerados em [1], [15], e [11] - [12], que podem ser obtidos de (3.1) com $a \equiv 1$ *e* h *uma constante não negativa.*

Na equação (3.1), $u(t,x)$ *denota o potencial médio da membrana de um pedaço de tecido nervoso localizado na posição* x *no tempo* $t \geqslant 0$. *A função de conexão* J *determina o acoplamento entre os elementos na posição* x *com o elemento da posição* y, *representando as conexões sinápticas entre as células nervosas. A função não-negativa* $f(u)$ *descreve a taxa local de produção ou diminuição de atividade neuronal correspon-*

dente a um nível de atividade u. E $h(x,u)$ denota os estímulos externos envolvidos, os quais estamos considerando que dependem da posição e do potencial.

A equação (3.1) tem um diferencial com relação aos modelos já analisados na literatura devido aos termos $a(x)$ e $h(x,u(t,x))$. A presença do termo de amortecimento $a(x)$ nos deixa na condição em que o potencial decai com velocidade $\dfrac{1}{a(x)}$, embora tenha uma taxa de crescimento proporcional a uma função não linear f que depende dos pontos em uma vizinhança de x através da função de conectividade J. A adição do termo $h(x,u)$ significa que o campo externo está dependendo da posição x e da potência neuronal u, enquanto nos trabalhos prévios o potencial decai com taxa constante e o campo externo é, em geral, considerado constante.

A ideai básica da formulação do problema em (3.1) é encontrar uma maneira abstrata de impor condições de fronteira de Dirichlet em equações de evolução não locais (ver [10]). O problema (3.1) também é uma maneira de descrever o modelo neural com excitação de curto alcance e inibição de longo alcance.

Neste capítulo, mostramos que o problema de Cauchy associado à equação (3.1) está bem posto no espaço de fase X, que é isométrico ao espaço $L^p(\Omega)$. Provamos a existência de um atrator global e exibimos um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado por esta equação. Além disso, usando as propriedades do atrator global e do funcional de Lyapunov, verificamos que o fluxo gerado por (3.1) tem a propriedade gradiente no sentido de [16].

3.1 Boa posição

Considere, para qualquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o subespaço X de $L^p(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X = \{u \ \in \ L^p(\mathbb{R}^N);\ u(x) = 0,\ se\ x \ \in \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

O espaço X é canonicamente isomorfo ao espaço $L^p(\Omega)$, e vamos identificar os dois espaços, sem mais comentários. Também vamos usar a mesma notação para a função definida em $\mathbb{R}^N$ e sua restrição a Ω, afim de simplificar a notação.

Para obter a boa posição de (3.1), consideramos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

onde a aplicação $F : X \longrightarrow X$ é definida por

$$F(u)(x)=\begin{cases}-a(x)u(t,x)+K(f\circ u)(t,x)+h(x,u(t,x)), & x\ \in\Omega\\ 0, & x\ \in\mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{cases}\tag{3.4}$$

Lema 3.1 *Seja K a aplicação definida em (3.2) e $\|J\|_r:=\sup\limits_{x\in\Omega}\|J(x,.)\|_{L^r(\Omega)}$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Se $u\in L^p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, então $Ku\in\ L^\infty(\Omega)$,*

$$|Ku(x)|\leqslant\|J\|_q\|u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ x\ \in\ \Omega,\tag{3.5}$$

onde $1\leqslant q\leqslant\infty$ é o expoente conjugado de p, e

$$\|Ku\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|J\|_1\|u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|u\|_{L^p(\Omega)}.\tag{3.6}$$

Além disso, se $u\in L^1(\Omega)$, então $Ku\in\ L^p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, e

$$\|Ku\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|J\|_p\|u\|_{L^1(\Omega)}\tag{3.7}$$

Demonstração: *Primeiramente, usando a desigualdade de Hölder, vamos provar a desigualdade (3.5). Para isto, note que*

$$\begin{aligned}|Ku(x)| &= \left|\int_\Omega J(x,y)u(y)dy\right|\\ &\leqslant \int_\Omega|J(x,y)||u(y)|dy\\ &\leqslant \|J(x,\cdot)\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leqslant \|J\|_q\|u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ x\in\ \Omega.\end{aligned}$$

Agora, considere que $1<p<\infty$. Utilizando a seguinte igualdade

$$|J(x,y)u(y)|=|J(x,y)|^{\frac{1}{q}}\cdot|J(x,y)|^{\frac{1}{p}}\cdot|u(x,y)|,$$

e usando novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega|J(x,y)u(y)|dy &= \int_\Omega|J(x,y)|^{\frac{1}{q}}|J(x,y)|^{\frac{1}{p}}|u(x,y)|dy\\ &\leqslant \left[\int_\Omega|J(x,y)|dy\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega|J(x,y)||u(y)|^pdy\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \|J\|_1^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega|J(x,y)||u(y)|^pdy\right]^{\frac{1}{p}},\ \forall\ x\ \in\ \Omega.\end{aligned}$$

Elevando ambos os lados a p *e integrando em relação à* x*, encontramos*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy\right]^p dx &\leqslant \|J\|_1^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dxdy \\
&= \|J\|_1^{\frac{p}{q}} \int_\Omega |u(y)|^p \int_\Omega |J(x,y)|dxdy \\
&\leqslant \|J\|_1^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega |u(y)|^p dy \\
&\leqslant \|J\|_1^p \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $\dfrac{p}{q} + 1 = p$*, pois* p *e* q *são expoentes conjugados. Daí, elevando ambos os membros a* $\dfrac{1}{p}$*, obtemos*

$$\begin{aligned}
\|Ku\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|J\|_1 \|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Quando $p = 1$*, temos, sem dificuldades, que*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Ku(x)|dx &= \int_\Omega \left|\int_\Omega J(x,y)u(y)dy\right| dx \\
&\leqslant \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dxdy \\
&= \int_\Omega |u(y)| \int_\Omega |J(x,y)|dxdy \\
&\leqslant \|J\|_1 \int_\Omega |u(y)|dy \\
&= \|J\|_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leqslant \|u\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para finalizar a desigualdade (3.6), considere $p = \infty$*. Então,*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy &= \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dy \\
&\leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |J(x,y)|dy \\
&\leqslant \|J\|_1 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Em seguida, para provar a desigualdade (3.7), considere $1 < p < \infty$. *Então,*

$$\begin{aligned}
|Ku(x)| &\leqslant \int_\Omega |J(x,y)u(y)^{\frac{1}{p}}u(y)^{\frac{1}{q}}|dy \\
&= \int_\Omega |J(x,y)u(y)^{\frac{1}{p}}||u(y)^{\frac{1}{q}}|dy \\
&\leqslant \left[\int_\Omega |J(x,y)|^p|u(y)|dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |u(y)|dy\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |J(x,y)|^p|u(y)|dy\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Elevando ao expoente p e integrando em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Ku(x)|^p dx &\leqslant \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)|^p|u(y)|dxdy \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \int_\Omega |u(y)| \int_\Omega |J(x,y)|^p dxdy \\
&\leqslant \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|J\|_p^p \int_\Omega |u(y)|dy \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|u\|_{L^1(\Omega)} \|J\|_p^p \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p+q}{q}} \|J\|_p^p \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{p} \|J\|_p^p.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|K\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|J\|_p \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Quando $p = 1$, *é análogo ao item (3.6). Por último, considere* $p = \infty$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy &\leqslant \int_\Omega \|J(x,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}|u(y)|dy \\
&\leqslant \|J\|_\infty \int_\Omega |u(y)|dy \\
&= \|J\|_\infty \|u\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição: *Seja E um espaço normado, dizemos que a função* $F : E \longrightarrow E$ *é localmente Lipschitz se, para qualquer* $x_0 \in E$, *existem uma bola* $B = \{x \in E; \|x - x_0\| < b\}$ *e uma constante C tal que, se* $x, y \in B$, *então*

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$

Dizemos que F é Lipschitz em conjuntos limitados se a bola B, da definição anterior, *pode ser escolhida como qualquer bola limitada em E.*

Proposição 3.2 *Suponha, além das hipóteses do Lema 3.1, que a função h seja limitada e possui derivada limitada, e que a função f satisfaz a seguinte condição,*

$$|f(x)| \leqslant C_1(1+|x|^p), \forall\ x \in \mathbb{R}\ e\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Então a função F dada em (3.4) está bem definida em $L^p(\Omega)$. Se f é localmente limitada, então a função F está bem definida em $L^\infty(\Omega)$. Agora, se

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C_2\left(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1}\right)|x-y|,$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a função F é continuamente Lipschitziana em conjuntos limitados de $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Se $p=\infty$, isso é verdade se f é localmente Lipschitziana.

Demonstração: *Considere $1 \leqslant p < \infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$, então*

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant \int_\Omega C_1\left(1+|u(x)|^p\right)dx \\ &\leqslant C_1\left(|\Omega|+\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando as desigualdades (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|Kf(u)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|J\|_p\|f(u)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leqslant C_1\|J\|_p\left(|\Omega|+\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Além disso, também temos

$$\begin{aligned} \|-a(\cdot)u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |a(x)u(x)|^p dx \\ &\leqslant \int_\Omega \|a\|^p_{L^\infty(\Omega)}|u(x)|^p dx \\ &= \|a\|^p_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u(x)|^p dx \\ &= \|a\|^p_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

e, por último, considerando $v \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \|h(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)}-\|h(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|h(\cdot,u)-h(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C_h\|u-v\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C_h\|u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde C_h *é a constante de Lipschitz da função* h*. Daí, pelo fato de* h *ser uma função limitada,*

$$\|h(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|h(\cdot,0)\|_{L^p(\Omega)} + C_h\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Logo, F *é uma função bem definida no espaço* $L^p(\Omega)$*.*

Para $p=\infty$*, basta notar que*

$$|a(x)u(x)| < \infty;\ |h(x,u(x))| \leqslant |h(x,0)| + C_h|u(x)| < \infty, \forall x \in \Omega,$$

e, para a parcela da função F *dada por* $K(f\circ u)$*, utilizando o item (3.5) (ver Lema 3.1), obtemos*

$$|K(f(u(x))| \ \leqslant \ \|J\|_q\|f(u)\|_{L^p(\Omega)} < \infty,\ \forall\ x \in \Omega.$$

Diante disso, concluímos que F *é uma função bem definida no espaço* $L^\infty(\Omega)$*.*

Agora, suponha que

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C_2\left(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1}\right)|x-y|,$$

com $1<p<\infty$*. Então, dados* $u,v\in L^p(\Omega)$*, usando a desigualdade de Hölder, obtemos*

$$\begin{aligned}
\|f(u)-f(v)\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant \int_\Omega C_2\left(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)|u-v|dx \\
&\leqslant C_2\left[\int_\Omega \left(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |u-v|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C_2\left[\|1\|_{L^q(\Omega)}+\|u^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}+\|v^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}\right]\|u-v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= C_2\left[|\Omega|^{\frac{1}{q}}+\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}+\|v\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right]\|u-v\|_{L^p(\Omega)}, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde q *é o expoente conjugado de* p*. (Vale salientar que a última passagem é verdadeira devido ao fato que* $(p-1)q=p$*).*

Pelas desigualdades (3.7) e (3.9), temos que

$$\begin{aligned}
\|K(f(u)-f(v)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|J\|_p\|f(u)-f(v)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leqslant C_2\|J\|_p\left[|\Omega|^{\frac{1}{q}}+\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}+\|v\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right]\|u-v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\|a(\cdot)(u-v)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u-v\|_{L^p(\Omega)}$$

e

$$\begin{aligned}\|h(\cdot,u)-h(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left[\int_\Omega |h(x,u(x))-h(x,v(x))|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \left[\int_\Omega C_h^p|u(x)-v(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= C_h\|u-v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Das estimativas acima segue que F é lipschitziana em conjuntos limitados de $L^p(\Omega)$. Para $p=1$, o resultado segue naturalmente.

Por fim, suponha que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant R$, $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant R$, e M seja a constante de Lipschitz de f no intervalo $[-R,R]\subset\mathbb{R}$. Assim,

$$|f(u(x))-f(v(x))| \leqslant M|u(x)-v(x)|, \forall\ x\in\Omega.$$

Daí,

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M\|u-v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Utilizando o (3.6), obtemos

$$\|K(f(u)-f(v))\|_{L^\infty(\Omega)} \quad\leqslant\quad M\|J\|_1\|u-v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Além do mais, pelas hipóteses sobre as funções a e h, deduzimos que

$$\|a(\cdot)(u-v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u-v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$\|h(\cdot,u)-h(\cdot,v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_h\|u-v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Verificando, assim, o caso para $p=\infty$.

□

Observação 3.3 *Da Proposição 3.2 e do Teorema 1.33, segue que a equação (3.4) tem uma única solução local para cada condição inicial em X. Para estudarmos a existência de solução global, precisamos do seguinte resultado. (Ver Teorema 1.36)*

Teorema 3.4 *Seja X um espaço de Banach, e suponha que $g:[t_0,\infty)\times X\longrightarrow X$ é uma função contínua e $\|g(t,u)\|\leqslant h(t,\|u\|)$, para todo $(t,u)\ \in[t_0,\infty)\times X$, onde $h:[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ é contínua e $h(t,r)$ é não-decrescente em $r\geqslant 0$, para cada $t\ \in[t_0,\infty)$. Então, se a solução maximal $r(t,t_0,r_0)$ do problema de valor inicial*

$$r'=h(t,r),\ \ r(t_0)=r_0$$

existe em $[t_0, \infty)$, o intervalo maximal de existência de qualquer solução $u(t, t_0, u_0)$ do problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = g(t, u),\ t > t_0,\ u(t_0) = u_0,$$

com $\|u_0\| \leqslant r_0$, também contém $[t_0, \infty)$.

Corolário 3.5 *Suponha, além das hipóteses da Proposição 3.2, que f satisfaz*

$$|f(x)| \leqslant k_2 + k_1|x|, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

com k_1 e k_2 constantes positivas. Então, o problema (3.3) tem uma única solução global definida para qualquer condição inicial em X, na qual é dada, com $t \geqslant t_0$, pela "Fórmula da Variação das Constantes", por

$$u(t,x) = \begin{cases} e^{-a(x)(t-t_0)}u_0(x) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-a(x)(t-s)}\left[K(f \circ (u(s,\cdot)))(x) + h(x, u(s,x))\right] ds, & se\ x \in \Omega \\ 0, & se\ x \in \Omega^c. \end{cases} \tag{3.11}$$

Demonstração: *Usando a Proposição 3.2, temos que o lado direito de (3.4) é Lipschitz em conjuntos limitados de X e, consequentemente, o problema de Cauchy (3.3) está bem posto em X com uma única solução $u(t, x)$, dado por (3.11).*
Suponha que $1 \leqslant p < \infty$. Por (3.6) e (3.10), segue que

$$\begin{aligned} \|K(f \circ u)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|f \circ u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}} + k_1\|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\|h(\cdot, u)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_h\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|h(\cdot, 0)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Então,

$$\|F(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}} + \|h(\cdot,0)\|_{L^p(\Omega)} + (k_1 + 1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} + C_h)\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Agora, defina a função $\Phi : [t_0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$

$$\Phi(t, r) = k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}} + \|h(\cdot, 0)\|_{L^p(\Omega)} + (k_1 + 1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} + C_h)r,$$

para todo $(t, r) \in [t_0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Temos que a equação (3.3) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4, e a existência da solução global segue naturalmente.

□

3.2 Suavidade da solução

Proposição 3.6 *Sejam Y e Z espaços lineares normados, $F : Y \longrightarrow Z$ uma aplicação, e suponha que a derivada de Gateaux de F, $DF : Y \longrightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$, existe e é contínua em $y \in Y$. Então, a derivada de Fréchet F' de F existe e é contínua em $y \in Y$.*

Proposição 3.7 *Suponha, além das hipóteses do Corolário 3.5, que a função f é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e f' satisfaz a condição*

$$|f'(x)| \leqslant C_3 \left(1 + |x|^{p-1}\right), \tag{3.12}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $1 \leqslant p < \infty$. Se

$$|\partial_2 h(x, y)| \leqslant \alpha(1 + |y|^{p-1}),\ \ \alpha > 0,$$

então a função $F : X \longrightarrow L^1(\Omega)$, dada em (3.4), é continuamente Fréchet diferenciável com derivada $DF : X \longrightarrow \mathcal{L}(X, L^1(\Omega))$ dada por

$$DF(u)v(x) := \begin{cases} -a(x)v(x) + K\left(f'(u)v\right)(x) + \partial_2 h(x, u(x))v(x), & x \in \ \Omega \\ \ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Além disso, para $p = \infty$, temos que F é diferenciável como função de X em X, com derivada $DF : X \longrightarrow \mathcal{L}(X, X)$ dada por (3.13).

Demonstração: *Como f é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, segue que a derivada de Gateaux de F é dada por (3.13). De fato,*

$$\begin{aligned} DF(u)v(x) \ &:= \ \lim_{t\to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \\ &= \ \lim_{t\to 0} \frac{-a(x)(u(x) + tv(x)) + a(x)u(x)}{t} \\ &+ \ \lim_{t\to 0} \frac{K(f \circ (u + tv)(x) - K(f \circ u)(x)}{t} \\ &+ \ \lim_{t\to 0} \frac{h(x, u(x) + tv(x)) - h(x, u(x))}{t} \\ &= \ -a(x)v(x) + K(f'(u)v)(x) + \partial_2 h(x, u(x))v(x), \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

O operador $DF(u)$ é um operador linear em X. De fato, dados $v,\ w \in X$ e

$\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} DF(u)(\alpha v(x)+w(x)) &= -a(x)(\alpha v(x)+w(x)) + K(f'(u)(\alpha v+w))(x) \\ &+ \partial_2 h(x,u(x))(\alpha v(x)+w(x)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} K(f'(u)(\alpha v+w))(x) &= \int_\Omega J(x,y)f'(u(y))(\alpha v(y)+w(y))dy \\ &= \alpha\int_\Omega J(x,y)f'(u(y))v(y)dy + \int_\Omega J(x,y)f'(u(y))w(y)dy \\ &= \alpha K(f'(u)v)(x) + K(f'(u)w)(x), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} DF(u)(\alpha v(x)+w(x)) &= \alpha\big[-a(x)v(x)+K(f'(u)v)(x)+\partial_2 h(x,u(x))v(x)\big] \\ &- a(x)w(x)+K(f'(u)w)(x)+\partial_2 h(x,u(x))w(x) \\ &= \alpha DF(u)v(x) + DF(u)w(x). \end{aligned}$$

Agora, suponha que $1 \leqslant p < \infty$ e q seja seu expoente conjugado. Dado $u \in L^p(\Omega)$, como $(p-1)q = p$ e que $p/q = p-1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f'(u)\|_{L^q(\Omega)} &\leqslant \left[\int_\Omega C_3^q\left(1+|u|^{p-1}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C_3|\Omega|^{\frac{1}{q}} + C_3\left[\int_\Omega |u|^p dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_3\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right) \\ &= C_3\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontramos

$$\begin{aligned} \|f'(u)v\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant \|f'(u)\|_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C_3\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\right)\|v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por (3.7), temos

$$\begin{aligned} \|K(f'(u)v)\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant \|J\|_1\|f'(u)v\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leqslant C_3\|J\|_1\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\right)\|v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\|\partial_2 h(\cdot,u)v)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\partial_2 h(x,u(x))v(x))|dx \\
&\leqslant \left[\int_\Omega |\partial_2 h(x,u(x))|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |v(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left[\int_\Omega |\alpha(1+|u(x)|^{p-1})|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leqslant \alpha\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right)\|v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} &= \|-av + K(f'(u)v) + \partial_2 h(\cdot,u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leqslant C\|v\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $C = Max\{(C_3\|J\|_p + \alpha)\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right), \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. *Mostrando que* $DF(u)$ *é um operador linear limitado.*

Agora, suponha que $u_1, u_2, v \in L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$. *Usando (3.7) e a desigualdade de Hölder, temos*

$$\begin{aligned}
\| &\quad (DF(u_1) - DF(u_2))\, v\|_{L^1(\Omega)} = \|K\left[(f'(u_1) - f'(u_2))\, v\right] \\
+ &\quad \partial_2 h(\cdot,u_1)v - \partial_2 h(\cdot,u_2)v\|_{L^1(\Omega)} \\
\leqslant &\quad \|K\left[(f'(u_1) - f'(u_2))\, v\right]\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_2 h(\cdot,u_1)v - \partial_2 h(\cdot,u_2)v\|_{L^1(\Omega)} \\
\leqslant &\quad \|J\|_1 \|\left(f'(u_1) - f'(u_2)\right) v\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_2 h(\cdot,u_1)v - \partial_2 h(\cdot,u_2)v\|_{L^1(\Omega)} \\
\leqslant &\quad \|J\|_1 \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_2 h(\cdot,u_1) - \partial_2 h(\cdot,u_2)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para provar a continuidade do operador de Gateaux, precisamos mostrar que

$$\|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0$$

e

$$\|\partial_2 h(\cdot,u_1) - \partial_2 h(\cdot,u_2)\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

quando $\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Temos que

$$|f'(u_1)(x) - f'(u_2)(x)|^q \leqslant \left[C_3\left(2 + |u_1(x)|^{p-1} + |u_2(x)|^{p-1}\right)\right]^q$$

e

$$|\partial_2 h(\cdot,u_1) - \partial_2 h(\cdot,u_2)|^q \leqslant \left[\alpha\left(2 + |u_1(x)|^{p-1} + |u_2(x)|^{p-1}\right)\right]^q.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f'(u_1)(x) - f'(u_2)(x)|^q dx &\leqslant \int_\Omega \left[C_3\left(2 + |u_1(x)|^{p-1} + |u_2(x)|^{p-1}\right)\right]^q dx \\ &\leqslant C_3^q\left[\|2 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}\right]^q \\ &\leqslant C_3^q\left[\|2\|_{L^q(\Omega)} + \|u_1^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|u_2^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}\right]^q \\ &= C_3^q\left[2|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u_1\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} + \|u_2\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right]^q.\end{aligned}$$

De maneira análoga, encontramos uma desigualdade semelhante para $|\partial_2 h(\cdot, u_1) - \partial_2 h(\cdot, u_2)|^q$. *De fato,*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\partial_2 h(\cdot, u_1) - \partial_2 h(\cdot, u_2)|^q &\leqslant \int_\Omega \left[\alpha\left(2 + |u_1(x)|^{p-1} + |u_2(x)|^{p-1}\right)\right]^q dx \\ &\leqslant \alpha^q\left[2|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u_1\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} + \|u_2\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right]^q.\end{aligned}$$

Como o lado direito de ambas as desigualdade são integráveis, o resultado segue usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Pela Proposição 3.6, temos que $F : X \longrightarrow L^1(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *é Fréchet diferenciável com derivada contínua em cada ponto* $x \in X$.

Agora, vamos mostrar o caso para $p = \infty$. *Temos que* $|f'(u)|$ *é limitado por alguma constante* C_4, *para cada* $u \in L^\infty(\Omega)$. *Assim,*

$$\|f'(u)v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_4\|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

e, pela desigualdade (3.6), vemos que

$$\|K(f'(u)v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_4\|J\|_1\|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por último, note que

$$\begin{aligned}\|\partial_2 h(\cdot, u)v)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \|\alpha(1 + |u|^{p-1})v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \|\alpha(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1})v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \alpha(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1})\|v\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\| - av + K(f'(u)v) + \partial_2 h(\cdot, u)v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

onde $C = Max\{C_4\|J\|_1, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, \alpha(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1})\}$.

Dados $u_1, u_2, v \in L^\infty(\Omega)$, *temos que*

$$\begin{aligned}\| \left(DF(u_1) - DF(u_2)\right) v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|K\left[\left(f'(u_1) - f'(u_2)\right) v\right] \\ &+ \partial_2 h(\cdot, u_1)v - \partial_2 h(\cdot, u_2)v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \|J\|_1 \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &+ \|\partial_2 h(\cdot, u_1) - \partial_2 h(\cdot, u_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)},\end{aligned}$$

e a continuidade de DF *segue da continuidade de* f' *e* $\partial_2 h$.

Portanto, segue da Proposição 3.6 que $F : X \longrightarrow X$ *é Fréchet diferenciável com derivada contínua.*

□

Observação 3.8 *Pela Proposição 3.7 segue que o fluxo gerado por (3.3) é* $C([0, r]; L^p(\Omega)) \cap C^1([0, r]; L^1(\Omega))$, *para* $r > 0$. *(Ver [18])*

3.3 Existência do atrator global

Nesta seção, vamos provar a existência de um atrator global $\mathcal{A}$ *em* X, *para o fluxo* $T(t)$ *gerado por (3.3), que atrai subconjuntos limitados de* X.

Inicialmente denotamos por $a_0 = \inf_{x \in \Omega} |a(x)|$, *o qual surge no lema abaixo.*

Lema 3.9 *Suponha que as hipóteses da Proposição 3.7 sejam satisfeitas com a constante* k_1 *de (3.10) satisfazendo* $a_0 - (k_1 + C_h) > 0$ *e* $|h(x, 0)| \leqslant \lambda$ *para todo* $x \in \Omega$. *Então a bola de* $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *centrada na origem com raio* $\dfrac{(1+\delta)(k_2+\lambda)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{a_0 - (k_1 + C_h)}$, *onde* k_1 *e* k_2 *são as constantes que aparecem em (3.10) e* δ *é qualquer número positivo, absorve subconjuntos limitados de* X *sob o semigrupo* $T(t)$ *gerado por (3.3).(Com* $|\Omega|^{\frac{1}{p}}$ *substituindo por 1 quando* $p = \infty$*).*

Demonstração: *Seja* $u(t, x)$ *a solução de (3.3) com condição inicial* u_0. *Então, para* $1 \leqslant p < \infty$, *temos*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t,x)|^p dx &= \int_\Omega p|u(t,x)|^{p-1} sgn\left(u(t,x)\right) u_t(t,x) dx \\ &= -p\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^p sgn\left(u(t,x)\right) dx \\ &+ p\int_\Omega |u(t,x)|^{p-1} sgn\left(u(t,x)\right) K\left(f(u(t,x))\right) dx \\ &+ p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t)) h(x, u(x,t)) dx,\end{aligned}$$

onde $sgn(u(t,x))$ representa o sinal da função u.
Usando a desigualde de Hölder, a estimativa (3.6) e a condição (3.10), obtemos

$$\int_\Omega |u(t,x)|^{p-1} sgn(u(t,x)) K(f\circ u)(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_\Omega (|u(t,x)|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |K(f\circ u)(t,x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_\Omega |u(t,x)|^p\right)^{\frac{1}{q}} \|J\|_1 \|(f\circ u)(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\\
&\leq \left(\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-1}\left(k_1\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} + k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right),
\end{aligned}$$

onde q é o expoente conjugado de p. Em seguida, como $a_0 = \inf_{x\in\Omega}|a(x)|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^p sng(u(t,x))dx &\geqslant a_0\int_\Omega |u(t,x)|^p dx\\
&= a_0\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega |u(t,x)|^{p-1} sgn(u(t,x)) h(x,u(t,x))dx$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left[\int_\Omega |u(t,x)|^{q(p-1)}dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |h(x,u(t,x))|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \left[\int_\Omega |u(t,x)|^p dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |C_h|u(t,x)| + h(x,0)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \|u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\left[C_h\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} + \lambda|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right],
\end{aligned}$$

onde $|h(x,0)|\leqslant\lambda, \forall x\in\Omega$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant -pa_0\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} + pk_1\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}\\
&+ pC_h\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} + pk_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + p\lambda|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\\
&= p\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}\left[-a_0 + k_1 + C_h + \frac{(k_2+\lambda)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}}\right].
\end{aligned}$$

Seja $\epsilon = a_0 - (k_1 + C_h) > 0$. *Então, sempre que*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \geqslant (1+\delta)\frac{(k_2+\lambda)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{\epsilon},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant p\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}\left(-\epsilon + \frac{\epsilon}{\delta+1}\right)\\ &= -p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}} \leqslant -p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon.$$

Integrando em ambos os lados de 0 a t a desigualdade anterior e resolvendo a integral, obtemos

$$ln\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} - ln\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant -p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon t,$$

e consequentemente

$$ln\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant -p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon t + ln\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados na desigualdade acima, encontramos

$$e^{ln\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}} \leqslant e^{-p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon t + ln\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)}}.$$

Logo,

$$\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant e^{-p\frac{\delta}{1+\delta}\epsilon t}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Portanto, segue o resultado para $1 \leqslant p < \infty$. *Como as estimativas são uniformes em* p, *o resultado é válido para* $p = \infty$, *tomando o limite com* $p \longrightarrow \infty$.

□

Teorema 3.10 *Além das condições do Lema 3.9, suponha que* $\|J_{x_i}\|_p = \sup_{x\in\Omega}\|\partial_{x_i} J(x,\cdot)\|_{L^q(\Omega)} < +\infty$, $|\partial_i h(x,u(t,x))| \leqslant \beta_h|u(t,x)| + \alpha_h$, *com* $i = 1, 2$ *e* $\beta_h, \alpha_h > 0$ *e* $a_0 - (\beta_h M + \alpha_h) > 0$, *onde* $M = \dfrac{(k_2+\lambda)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{a_0 - (k_1 + C_h)}$. *Então, existe um atrator global* $\mathcal{A} \subset L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, *para o semigrupo* $\{T(t), t \geqslant 0\}$ *gerado por (3.3), e* $\mathcal{A}$ *está* *contido na bola centrada na origem de* $L^p(\Omega)$ *e raio* $\dfrac{(k_2+\lambda)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{a_0-(k_1+C_h)}$.

Demonstração: *Vamos mostrar que o semigrupo tem um conjunto compacto atraente em* $L^p(\Omega)$ *com* $1 \leqslant p < \infty$. *Seja* $u(t,x)$ *a solução de (3.3), com condição inicial* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. *Por (3.14), temos que* $\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M$, *para* t *suficientemente grande. Além disso, usando o Teorema de Schwarz (ver [20], p. 147), obtemos*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^p dx &= p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_{x_i}\partial_t u(t,x)dx \\
&= p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_{x_i}\big[-a(x)u(t,x) \\
&+ K(f(u(t,\cdot)))(x) + h(x,u(t,x))\big]dx \\
&= -p\int_\Omega \partial_{x_i}a(x)\cdot|\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))u(t,x) \\
&- p\int_\Omega a(x)|\partial_{x_i}u(t,x)|^p dx \\
&+ p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_{x_i}K(f(u(t,\cdot)))(x)dx \\
&+ p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x)\partial_1 h(x,u(t,x))dx \\
&+ p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_2 h(x,u(t,x))\partial_{x_i}u(t,x)dx.
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-p\int_\Omega \partial_{x_i}a(x)|\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))u(t,x)dx \\
&\leqslant -p\|\partial_{x_i}a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))u(t,x)dx \\
&\leqslant p\|a\|_{w^{1,\infty}(\Omega)}\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leqslant pM\|a\|_{w^{1,\infty}}\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Também temos,

$$
\begin{aligned}
&p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_{x_i}K(f(u(t,x)))dx \\
&\leqslant p\left[\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |\partial_{x_i}K(f(u(t,x)))|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}K(f(u(t,x)))\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por (3.7) e (3.8), (com J_{x_i} no lugar de J), encontramos

$$\begin{aligned}
& p\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_{x_i}K(f(u(t,x)))dx \\
& \leqslant p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|J_{x_i}\|_p\|f(u)\|_{L^1(\Omega)} \\
& \leqslant p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|J_{x_i}\|_p\left(k_2|\Omega|+k_1\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\
& \leqslant p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|J_{x_i}\|_p\left(k_2|\Omega|+k_1M^p\right).
\end{aligned}$$

Em seguida, usando a hipótese que

$$|\partial_i h(x,u(t,x))|\leqslant \beta_h|u(t,x)|+\alpha_h, \text{ com } i=1,2 \text{ e } \beta_h,\alpha_h>0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_1 h(x,u(t,x))dx \\
& \leqslant \left[\int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{q(p-1)}dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |\partial_1 h(x,u(t,x))|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
& \leqslant \|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\left[\int_\Omega |\beta_h|u(t,x)|+\alpha_h|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
& \leqslant \left[\beta_h M+\alpha_h|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right]\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(t,x))\partial_2 h(x,u(t,x))\partial_{x_i}u(t,x)dx \\
& = \int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^p\partial_2 h(x,u(t,x))dx \\
& \leqslant \int_\Omega |\partial_{x_i}u(t,x)|^p|\beta_h|u(t,x)|+\alpha_h|dx \\
& \leqslant (\beta_h M+\alpha_h)\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Das desigualdades acima, segue que

$$\frac{d}{dt}\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\left[\beta_h M+\alpha_h-a_0+\frac{\theta}{\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}}\right],$$

onde $\theta = M\|a\|_{w^{1,\infty}(\Omega)}+\|J_x\|_p\left(k_2|\Omega|+k_1M^p\right)+\left(\beta_h M+\alpha_h|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right)$.

Seja $\epsilon = a_0-(\beta_h M+\alpha_h)$. *Então, sempre que* $\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\geqslant \frac{1}{\epsilon}\theta(1+\mu),\ \mu>0,$

teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant p\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}\left(-\epsilon+\frac{\epsilon}{1+\mu}\right)\\ &= -\frac{\mu\epsilon p}{1+\mu}\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Daí

$$\|\partial_{x_i}u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant e^{-\frac{\mu\epsilon p}{1+\mu}t}\|\partial_{x_i}u_0\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Pelo Lema 3.9 e a desigualdade (3.15), concluímos que, para $\mu > 0$, *existe uma bola centrada na origem que absorve subconjuntos limitados de* $W^{1,p}(\Omega)$ *sob a ação do semigrupo* $T(t)$ *gerado por (3.3). Como* $W^{1,p}(\Omega)$ *está imerso compactamente em* $L^p(\Omega)$, *para* $1 \leqslant p < \infty$, *temos a existência de um conjunto atraente compacto em* $L^p(\Omega)$. *Portanto, o resultado segue do Teorema 2.28.*

□

3.4 Existência de um Funcional de Lyapunov.

Nesta seção, exibimos um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado pela equação (3.3).

Motivados por funcionais energias de [11] e [13], definimos o funcinal $\mathcal{F} : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, *dado por*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \int_\Omega\Bigg[-\frac{1}{2}S(x)\int_\Omega J(x,y)S(y)dy+\int_0^{S(x)} a(x)f^{-1}(r)dr\\ &- \int_0^{u(x)} f'(s)h(x,s)ds\Bigg]dx,\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $S(x) = f(u(x))$.

Teorema 3.11 *Além das hipóteses do Teorema 3.10, assuma que* $|f(x)| \leqslant b$, *para todo* $x \in \Omega$ *e* $\displaystyle\int_0^b |f^{-1}(r)|dr < L < \infty$, *onde* $b, L > 0$. *Então, o funcional dado em (3.16) está bem definido e é contínuo na topologia de* $L^p(\Omega)$.

Demonstração: *Primeiramente, vamos mostrar que o funcional está bem definido em* *todo espaço de fase $L^p(\Omega)$. De fato,*

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(u)| &\leqslant \int_\Omega \left[\left|-\frac{1}{2}S(x)\right| \int_\Omega |J(x,y)||S(y)|dy + \left|\int_0^{S(x)} a(x)f^{-1}(r)dr\right|\right] dx \\
&+ \int_\Omega \left|\int_0^{u(x)} f'(s)h(x,s)ds\right| dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(k_1|u(x)|+k_2)\int_\Omega |J(x,y)|(k_1|u(y)|+k_2)dy\right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\|a\|_{L^\infty(\Omega)}L + \|h\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_0^{u(x)} |f'(s)|ds\right] dx.
\end{aligned}
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |J(x,y)|(k_1|u(y)|+k_2)dy &= k_1\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy + k_2\int_\Omega |J(x,y)|dy \\
&\leqslant k_1\|J\|_q\|u\|_{L^p(\Omega)} + k_2\|J\|_1 \\
&\leqslant k_1\|J\|_q\|u\|_{L^p(\Omega)} + k_2 < \infty
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (k_1|u(x)|+k_2)\,dx &= \int_\Omega k_1|u(x)|dx + k_2|\Omega| \\
&\leqslant k_1|\Omega|^{\frac{1}{q}}\|u\|_{L^p(\Omega)} + k_2|\Omega| \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por último, usando (3.12), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{u(x)} |f'(s)|ds &\leqslant C_3\int_0^{u(x)} (1+|s|^{p-1})ds \\
&= C_3\int_0^{u(x)} ds + C_3\int_0^{u(x)} |s|^{p-1}ds \\
&\leqslant C_3\left(|u(x)| + \frac{|u(x)|^p}{p}\right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^{u(x)} |f'(s)| ds dx &\leqslant \int_\Omega C_3 \left(|u(x)| + \frac{|u(x)|^p}{p} \right) dx \\
&= C_3 \int_\Omega |u(x)| dx + C_3 \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{p} dx \\
&\leqslant C_3 |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \frac{C_3}{p} \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\mathcal{F}(u)| < \infty, \forall\ u \in L^p(\Omega).$$

Para provar a segunda parte do resultado usaremos fortemente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema A.9).

Seja (u_n) *uma sequência convergindo para* u *na norma de* $L^p(\Omega)$*. Assim, existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *tal que*

$$u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)\ q.s.\ em\ \Omega.$$

Como f *é contínua, temos que*

$$S_{n_k}(x) = f(u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(u(x)) = S(x)\ q.s\ em\ \Omega.$$

Daí,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{S_{n_k}(x)} a(x) f^{-1}(r) dr = \int_0^{S(x)} a(x) f^{-1}(r) dr.$$

Agora, usando a desigualdade abaixo,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{S_{n_k}(x)} a(x) f^{-1}(r) dr \right| &\leqslant \int_0^b \|a\|_{L^\infty(\Omega)} |f^{-1}(r)| dr \\
&< L \|a\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \int_0^{S_{n_k}} a(x) f^{-1}(r) dr dx = \int_\Omega \int_0^{S(x)} a(x) f^{-1}(r) dr dx.$$

Em seguida, note que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}S_{n_k}(x)\int_\Omega J(x,y)S_{n_k}(y)dy &\leqslant \left|-\frac{1}{2}S_{n_k}(x)\int_\Omega J(x,y)S_{n_k}(y)dy\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}b\left|\int_\Omega J(x,y)bdy\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}b^2\int_\Omega |J(x,y)|dy \\
&\leqslant \frac{b^2}{2},
\end{aligned}$$

assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega J(x,y)S_{n_k}(y)dy = \int_\Omega J(x,y)S(y)dy.$$

Das convergência acima, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega\left[-\frac{1}{2}S_{n_k}(x)\int_\Omega J(x,y)S_{n_k}(y)\right]dy = \int_\Omega\left[-\frac{1}{2}S(x)\int_\Omega J(x,y)S(y)dy\right]dx.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\int_0^{u_{n_k}(x)} f'(s)h(x,s)dsdx - \int_\Omega\int_0^{u(x)} f'(s)h(x,s)dsdx\right| \\
&\leqslant \int_\Omega\left|\int_0^{u_{n_k}(x)} f'(s)h(x,s)ds - \int_0^{u(x)} f'(s)h(x,s)ds\right|dx.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left|\int_0^{u_{n_k}(x)} f'(s)h(x,s)ds - \int_0^{u(x)} f'(s)h(x,s)ds\right|dx \\
&\leqslant \int_\Omega\int_{u_{n_k}(x)}^{u(x)} |f'(s)h(x,s)|dsdx,
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_{u_{n_k}(x)}^{u(x)} |f'(s)h(x,s)|dsdx &\leq \|h\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_\Omega\int_{u_{n_k}(x)}^{u(x)} |f'(s)|dsdx \\
&\leq C_3\|h\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_\Omega\int_{u_{n_k}(x)}^{u(x)}\left(1+|s|^{p-1}\right)dsdx.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\Omega}\int_{u_{n_k}(x)}^{u(x)}\left(1+|s|^{p-1}\right)dsdx=\left[\int_{\Omega}|u(x)-u_{n_k}(x)|dx+\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p-|u_{n_k}(x)|^p}{p}dx\right],$$

Usando a última equação, as desigualdades acima e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|\int_{\Omega}\int_0^{u_{n_k}(x)}f'(s)h(x,s)dsdx-\int_{\Omega}\int_0^{u(x)}f'(s)h(x,s)dsdx\right|$$

$$\leqslant C_3\|h\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left[|\Omega|^{\frac{1}{q}}\|u_{n_k}-u\|_{L^p(\Omega)}+\frac{1}{p}\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-\|u_{n_k}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\right]\to 0,$$

quando $k\to+\infty$*. Em função disso, concluímos que*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega}\int_0^{u_{n_k}(x)}f'(s)h(x,s)ds\longrightarrow\int_{\Omega}\int_0^{u(x)}f'(s)h(x,s)ds.$$

Logo, $\mathcal{F}(u_{n_k})$ *é uma sequência tal que toda subsequência possui uma subsequência convergente para* $\mathcal{F}(u)$*.*

Portanto,

$$\mathcal{F}(u_n)\longrightarrow\mathcal{F}(u),\ quando\ n\ \longrightarrow+\infty.$$

$\square$

Teorema 3.12 *Além das hipóteses do Teorema 3.11, suponha que* f *possui derivada positiva. Seja* $u(t,\cdot)$ *uma solução de (3.3). Então* $\mathcal{F}(u(t,\cdot))$ *é diferenciável com respeito à* t *e*

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}=-\int_{\Omega}\left[-a(x)u(t,x)+K(f\circ u)(t,x)+h(x,u(t,x))\right]^2f'(u(t,x))dx\leqslant 0.$$

Demonstração: *Seja* φ *dada pelo integrando em (3.16), isto é,*

$$\begin{aligned}\varphi(s,x) &= -\frac{1}{2}S(s,x)\int_{\Omega}J(x,y)S(s,y)dy+\int_0^{S(s,x)}a(x)f^{-1}(r)dr\\ &- \int_0^{u(s,x)}f'(r)h(x,r)dr,\end{aligned}$$

onde $S(s,x)=f(u(s,x))$*.*

Usando as hipóteses sobre f*, temos que*

$$\left\|\frac{\partial\varphi(s,\cdot)}{\partial s}\right\|_{L^1(\Omega)}<\infty,\ \forall\ s\in\mathbb{R}^+.$$

Logo, podemos derivar (3.16) sob o sinal da integração. Daí

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t,\cdot)) = \\
&\int_\Omega \Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)\int_\Omega J(x,y)S(t,y)dy - \frac{1}{2}S(t,x)\int_\Omega J(x,y)\frac{\partial S}{\partial t}(t,y)dy\Big]dx \\
&+\int_\Omega \Big[a(x)f^{-1}(S(t,x))\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) - f'(u(t,x))h(x,u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\Big]dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)S(t,y)\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)dydx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)S(t,x)\frac{\partial S}{\partial t}(t,y)dydx \\
&+\int_\Omega a(x)f^{-1}(S(t,x))\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)dx - \int_\Omega f'(u(t,x)h(x,u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)S(t,y)\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)dydx = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x,y)S(t,x)\frac{\partial S}{\partial t}(t,y)dydx,
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t,\cdot)) = \\
&= \int_\Omega\int_\Omega -\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)J(x,y)S(t,y)dydx + \int_\Omega a(x)f^{-1}(S(t,x))\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)dx \\
&-\int_\Omega f'(u(t,x))h(x,u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx \\
&= -\int_\Omega \Big[-a(x)u(t,x) + \int_\Omega J(x,y)S(t,y)dy + h(x,u(t,x))\Big]\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)dx \\
&= -\int_\Omega \left[-a(x)u(t,x) + K(f\circ u)(t,x) + h(x,u(t,x))\right] f'(u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx \\
&= -\int_\Omega \left[-a(x)u(t,x) + K(f\circ u)(t,x) + h(x,u(t,x))\right]^2 f'(u(t,x))dx
\end{aligned}
$$

Como $f' > 0$, segue o resultado.

□

Corolário 3.13 *Se $\mathcal{F}(T(t)u) = \mathcal{F}(u), \forall\ t \in \mathbb{R}$, então u é um ponto de equilíbrio para $T(t)$.*

Demonstração: *De fato, se $\mathcal{F}(u(t,\cdot)) = \mathcal{F}(u)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, então $\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(u(t,\cdot)) = 0$. Assim,*

$$
-\int_\Omega \left[-a(x)u(t,x) + K(f\circ u)(t,x) + h(x,u(t,x))\right]^2 f'(u(t,x))dx = 0
$$

o que implica em

$$[-a(x)u(t,x) + K(f \circ u)(t,x) + h(x,u(t,x))]^2 = 0, \;\; q.s. \;\; em \; \Omega.$$

Então

$$-a(x)u(t,x) + K(f \circ u)(t,x) + h(x,u(t,x)) = 0, \;\; q.s. \;\; em \; \Omega.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0.$$

Portanto, u é um ponto de equilíbrio para $T(t)$.

□

Proposição 3.14 *Assuma as mesmas hipótese do Teorema 3.12. Então o fluxo gerado por (3.3) é gradiente.*

Demonstração: *Note que:*

1. *A pré-compacidade das órbitas segue da existência do atrator global;*

2. *Das propriedades provadas para $\mathcal{F}$, temos que ele é um funcional de Lyapunov.*

Logo, o fluxo gerado por (3.3) é gradiente.

□

Da Proposição 3.14 e do Teorema 2.32 temos o seguinte resultado:

Corolário 3.15 *O atrator global dado no Teorema 3.10 pode ser caracterizado como o conjunto instável dos equilíbrios, isto é,*

$$\mathcal{A} = W^u(E),$$

onde $E = \{u \in L^p(\Omega); a(x)u(x) = K(f \circ u)(x) + h(x,u(x))\}$.

3.5 Existência de equilíbrios

Nesta seção vamos provar a existência de uma solução de equilíbrio não trivial para o fluxo gerado por (3.3).

Observação 3.16 *Suponha que f é globalmente Lipschitziana e $\frac{1}{a_0}(C_h + \|J\|_1 C_f) < 1$, onde C_h e C_f são as constantes de Lipschiz de h e f, respectivamente. Existe um único ponto $u \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$0 = -a(x)u(x) + K(f \circ u)(x) + h(x, u(x)).$$

De fato, seja $G(u) = \frac{1}{a(x)}\big[K(f \circ u)(x) + h(x, u(x))\big]$. Dados $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\|G(u_1) - G(u_2)\|_{L^p(\Omega)} &= \Bigg\| \frac{1}{a(x)}\big[K(f \circ u_1)(x) + h(x, u_1(x)) \\
&- K(f \circ u_2)(x) - h(x, u_2(x))\big] \Bigg\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{1}{a_0}\Big[\|J\|_1 \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^p(\Omega)} + C_h \|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)}\Big] \\
&\leqslant \frac{1}{a_0}(C_h + \|J\|_1 C_f)\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, F é uma contração.

Pelo Teorema do Ponto Fixo para Contração, existe um único ponto fixo para a função G. Portanto, existe uma única solução de equilíbrio para o semigrupo gerado por (3.3).

Agora, sem as condições da Observação 3.16, podemos provar a existência de uma solução não trivial para o fluxo gerado por (3.3). Para isto, usamos o funcional de Lyapunov dado na seção anterior e o Princípio da Invariância de La Salle (ver [18]).

Teorema 3.17 *(Princípio da Invariância de La Salle) Seja V um Funcional de Lyapunov definido em um espaço métrico C, defina $E = \{x \in C; V' = 0\}$ e M o conjunto invariante maximal em E. Se $\{T(t)x_0, t \geqslant 0\}$ estiver contido em um conjunto compacto C, então*

$$T(t)x_0 \longrightarrow M, \text{ quando } t \longrightarrow \infty.$$

Demonstração: *(Ver [18], Teorema 4.3.4., p. 92).*

Proposição 3.18 *Além das hipóteses do Teorema 3.12, suponha que $f(0) = 0, h(x, 0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e que*

$$\left| \int_0^{f(b)} \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} f^{-1}(r)dr \right| < \frac{(f(b))^2}{2} + \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} \{h(x, y)\} f(b), \qquad (3.17)$$

para algum $b \in \mathbb{R}$. Então, existe $u_1 \in L^p(\Omega)$ tal que $\mathcal{F}(u_1) < \mathcal{F}(0) = 0$.

Demonstração: *Considere* $u_1(x) = b$, *para todo* $x \in \Omega$, *e* $f(u_1) = f(b) = c$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_1) &= \int_\Omega \Bigg[-\frac{1}{2} f(b) \int_\Omega J(x,y) f(b) dy + \int_0^{f(b)} a(x) f^{-1}(r) dr \\
&- \int_0^b f'(s) h(x,s) ds \Bigg] dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left[-\frac{1}{2} c \int_\Omega J(x,y) c dy + \left| \int_0^c \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} f^{-1}(r) dr \right| \right] dx \\
&- \int_\Omega \left[\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} \{h(x,y)\} \int_0^b f'(s) ds \right] dx \\
&\leqslant \int_\Omega \Bigg[-\frac{1}{2} c^2 + \left| \int_0^c \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} f^{-1}(r) dr \right| \\
&- \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} \{h(x,y)\} c \Bigg] dx \\
&= \left(-\frac{c^2}{2} + \left| \int_0^c \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} f^{-1}(r) dr \right| - \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} \{h(x,y)\} c \right) |\Omega|.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (3.17), temos que

$$\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(0) = 0. \tag{3.18}$$

□

Teorema 3.19 *A solução do problema de Cauchy com condição inicial* $u_1 = b$, *tende para uma solução de equilíbrio não trivial.*

Demonstração: *Devido a existência do atrator global, temos que as órbitas positivas são pré-compactas, ou seja, o conjunto* $\{T(t)u_1, t \geqslant 0\}$ *está contido em um compacto. Pelo Princípio da Invariância de La Salle,* $T(t)u_1$ *tende para uma solução de equilíbrio quando* $t \longrightarrow +\infty$. *Como o Funcional de Lyapunov é não-crescente ao longo das órbitas e* $F(u_1) < F(0)$, *segue que a solução trivial* $u \equiv 0$ *não está contida no* $\omega(u_1)$, *devido a (3.18). Logo, existe uma solução de equilíbrio não trivial para o fluxo gerado pela equação dada.*

□

Capítulo 4

Semicontinuidade superior dos atratores globais com relação aos parâmetros a e h

Nesta seção, vamos denotar por $\mathbb{A}$ e $\mathbb{H}$ as classes de todas as funções a e h, respectivamente, que satisfazem as condições exigidas no decorrer das seções anteriores. O semigrupo em $L^p(\Omega)$, $\{T(t); t \geqslant 0\}$, gerado por (3.3), é dado por

$$T(t)u(x) = u(t,x),$$

para qualquer $x \in \Omega$ e $t \geqslant 0$, onde

$$u(t,x) = e^{-a(x)(t-t_0)}u_0(x) + \int_{t_0}^{t} e^{-a(x)(t-s)}\left[K(f \circ u(s,x)) + h(x,u(s,x))\right] ds.$$

Proposição 4.1 *Sob as condições do Teorema 3.10, fixado $a_* \in \mathbb{A}$, para o dado inicial do problema de Cauchy (3.3) em um conjunto limitado de $L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, segue que $u_a(t,x)$ converge para $u_{a_*}(t,x)$ em $L^p(\Omega)$, quando $a \in \mathbb{A}$ converge para a_* em $L^\infty(\Omega)$, com $t \in [t_0, b],\ b < \infty$.*

Demonstração: *Sejam $u_a(t,x)$ e $u_{a_*}(t,x)$ as soluções de (3.3), com os parâmetros a e a_*, respectivamente, e com mesma condição inicial $u_0 \in B$, onde $B \subset L^p(\Omega)$ limitado, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u_{a_*}(t,x)}{\partial t} &= -a(x)u_a(t,x) + K(f \circ u_a(t,x)) + h(x,u_a(t,x)) \\ &+ a_*(x)u_{a_*}(t,x) - K(f \circ u_{a_*}(t,x)) - h(x,u_{a_*}(t,x)). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Integrando de t_0 a t em ambos os lados de (4.1) e organizando os membros da equação, obtemos

$$
\begin{aligned}
u_a(t,x) - u_{a_*}(t,x) &= \int_{t_0}^{t} \left[a_*(x)u_{a_*}(s,x) - a(x)u_a(s,x)\right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[K(f\circ u_a(s,x)) - K(f\circ u_{a_*}(s,x))\right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[h(x,u_a(s,x)) - h(x,u_{a_*}(s,x))\right] ds.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u_a(t,\cdot) - u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a_*(\cdot)u_{a_*}(s,\cdot) - a(\cdot)u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|K\left[f\circ u_a(s,\cdot)) - f\circ u_{a_*}(s,\cdot))\right]\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|\left[h(\cdot,u_a(s,\cdot)) - h(\cdot,u_{a_*}(s,\cdot))\right]\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
\|u_a(t,\cdot) - u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a_*(\cdot)\left(u_{a_*}(s,\cdot) - u_a(s,\cdot)\right)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|(a_*(\cdot) - a(\cdot))u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|K\left[f\circ u_a(s,\cdot) - f\circ u_{a_*}(s,\cdot)\right]\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|h(\cdot,u_a(s,\cdot)) - h(\cdot,u_{a_*}(s,\cdot))\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\leqslant \|a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{t_0}^{t} \|u_{a_*}(s,\cdot) - u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \|a(\cdot) - a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{t_0}^{t} \|u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|K\left[f\circ u_a(s,\cdot) - f\circ u_{a_*}(s,\cdot)\right]\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ C_h \int_{t_0}^{t} \|u_a(s,\cdot) - u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\big\|K\big[f\circ u_a(s,\cdot) - f\circ u_{a_*}(s,\cdot)\big]\big\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant C_2\|J\|_p \Bigg[|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \\
&+ \|u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\Bigg] \|u_a(s,\cdot) - u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}
$$

segue que

$$\begin{aligned}\|u_a(t,\cdot)-u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|a(\cdot)-a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{t_0}^t \|u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+ \left(\|a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}+C_h\right)\int_{t_0}^t \|u_a(s,\cdot)-u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+ \int_{t_0}^t \theta\|u_a(s,\cdot)-u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds,\end{aligned}$$

onde $\theta = C_2\|J\|_p\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}}+\|u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}+\|u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right)$.

Na existência do conjunto absorvente as estimativas são uniformes com relação ao parâmetro a. *Daí, podemos supor que existe uma constante* $\beta > 0$ *tal que*

$$\|u_a(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}, \|u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} < \beta, \forall t \geqslant 0.$$

Assim, considerando a constante $\beta_1 = \|a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}+C_h+C_2\|J\|_p\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}}+2\beta^{\frac{p}{q}}\right)$, *obtemos*

$$\|u_a(t,\cdot)-u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \beta\|a(\cdot)-a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{t_0}^t ds+\beta_1\int_{t_0}^t \|u_a(s,\cdot)-u_{a_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds.$$

Pela desigualdade de Grönwall generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_a(t,\cdot)-u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \beta\|a(\cdot)-a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}(t-t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta_1 ds}\\ &= \beta(t-t_0)\|a(\cdot)-a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}e^{\beta_1(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Como $t \in [t_0, b]$, *segue que*

$$\|u_a(t,\cdot)-u_{a_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \beta(b-t_0)e^{\beta_1(b-t_0)}\|a(\cdot)-a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Logo, a convergência ocorre naturalmente.

□

Proposição 4.2 *Sob as mesmas condições do Teorema 3.10, fixado* $h_* \in \mathbb{H}$, *para um dado inicial do problema de Cauchy (3.3) em um conjunto limitado de* $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *segue que* u_h *converge para* u_{h_*} *em* $L^p(\Omega)$ *quando* $h \in \mathbb{H}$ *converge para* h_* *em* $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, *com* $t \in [t_0, b], b < \infty$.

Demonstração: *Sejam* $u_h(t,x)$ *e* $u_{h_*}(t,x)$ *as soluções de (3.3), com os parâmetros* h *e* h_*, *respectivamente, e com mesma condição inicial* $u_0 \in B$, *onde* $B \subset L^p(\Omega)$ *limitado,* *temos que*

$$\begin{aligned}
\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}\|K\left(f\circ u_h(s,\cdot)-f\circ u_{h_*}(s,\cdot)\right)\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&+ \int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}\|h(\cdot,u_h(s,\cdot))-h_*(\cdot,u_h(s,\cdot))\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&+ \int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}\|h_*(\cdot,u_h(s,\cdot))-h_*(\cdot,u_{h_*}(s,\cdot))\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&\leqslant \int_{t_0}^t (e^{a_0(t-s)}C_2\|J\|_p\Bigg[|\Omega|^{\frac{1}{q}}+\|u_h(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\\
&+ \|u_{h_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\Bigg]\|u_{h_*}(s,\cdot)-u_h(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)})ds\\
&+ \int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}\|(h-h_*)(\cdot,u_h(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&+ \int_{t_0}^t C_{h_*}e^{a_0(t-s)}\|u_h(s,\cdot)-u_{h_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds,
\end{aligned}$$

onde C_{h_*} é a constante de Lipschitz de h_*.

Na existência do conjunto absorvente as estimativas são uniformes com relação ao parâmetro h. Assim, existe uma constante $\beta>0$ tal que

$$\|u_h(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)},\|u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}<\beta,\forall t\geqslant 0.$$

Agora, considere a constante $\beta_1=C_{h_*}+C_2\|J\|_p\left(|\Omega|^{\frac{1}{q}}+2\beta^{\frac{p}{q}}\right)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \beta_1\int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}\|u_h(s,\cdot)-u_{h_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&+ |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_{t_0}^t e^{a_0(t-s)}ds.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por e^{-a_0t}, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{-a_0t}\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_{t_0}^t e^{-a_0s}ds\\
&+ \beta_1\int_{t_0}^t e^{-a_0s}\|u_h(s,\cdot)-u_{h_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&\leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left(\frac{e^{-a_0t_0}-e^{-a_0t}}{a_0}\right)\\
&+ \beta_1\int_{t_0}^t e^{-a_0s}\|u_h(s,\cdot)-u_{h_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Grönwall generalizada, temos

$$\begin{aligned} e^{-a_0 t}\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left(\frac{e^{-a_0 t_0}-e^{-a_0 t}}{a_0}\right)e^{\int_{t_0}^{t}\beta_1 ds} \\ &= |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left(\frac{e^{-a_0 t_0}-e^{-a_0 t}}{a_0}\right)e^{\beta_1(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{a_0 t}$, obtemos

$$\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left(\frac{e^{-a_0 t_0}-e^{-a_0 t}}{a_0}\right)e^{\beta_1(t-t_0)+a_0 t}.$$

Por fim, como $t\in[t_0,b]$, segue que

$$\|u_h(t,\cdot)-u_{h_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\left(\frac{e^{-a_0 t_0}-e^{-a_0 b}}{a_0}\right)e^{\beta_1(b-t_0)+a_0 b}.$$

Assim, o resultatado é obtido naturalmente.

□

No resultado a seguir, consideramos o parâmetro $\Lambda=(a,h)$ no espaço métrico $L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$, com a métrica dada por

$$d(\Lambda,\ \Lambda_*)=\|a-a_*\|_{L^\infty(\Omega)}+\|h-h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}. \tag{4.2}$$

Pelas Proposições 4.1 e 4.2, é fácil ver o seguinte corolário:

Corolário 4.3 *Assuma as mesmas condições do Teorema 3.10. Fixado $\Lambda_*=(a_*,h_*)$, para cada dado inicial do problema Cauchy (3.3) em um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$, segue que $u_\Lambda(t,\cdot)$ converge para $u_{\Lambda_*}(t,\cdot)$ em $L^p(\Omega)$ quando $\Lambda\in\mathbb{A}\times\mathbb{H}$ converge para Λ_* em $L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$, com $t\in[0,b]$, e $b<\infty$.*

Demonstração: *Sejam $u_\Lambda(t,x)$ e $u_{\Lambda_*}(t,x)$ as soluções de (3.3), com os parâmetros Λ e Λ_*, respectivamente, e com mesma condição inicial $u_0\in B$, onde $B\subset L^p(\Omega)$ limitado. Temos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\Lambda(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial u_{\Lambda_*}(t,x)}{\partial t} &= -a(x)u_\Lambda(t,x)+K(f\circ u_\Lambda(t,x))+h(x,u_\Lambda(t,x)) \\ &+ a_*(x)u_{\Lambda_*}(t,x)-K(f\circ u_{\Lambda_*}(t,x))-h_*(x,u_{\Lambda_*}(t,x)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integrando de t_0 a t em ambos os lados de (4.3) e organizando os membros da equação, *obtemos*

$$
\begin{aligned}
u_\Lambda(t,x) - u_{\Lambda_*}(t,x) &= \int_{t_0}^{t} \left[a_*(x)u_{\Lambda_*}(s,x) - a(x)u_\Lambda(s,x)\right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[K(f\circ u_\Lambda(s,x)) - K(f\circ u_{\Lambda_*}(s,x))\right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[h(x,u_\Lambda(s,x)) - h_*(x,u_{\Lambda_*}(s,x))\right] ds.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\|u_\Lambda(t,\cdot) - u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a_*(\cdot)u_{\Lambda_*}(s,\cdot) - u_\Lambda(\cdot)u_a(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|K\left[f\circ u_\Lambda(s,\cdot)) - f\circ u_{\Lambda_*}(s,\cdot))\right]\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|\left[h(\cdot,u_\Lambda(s,\cdot)) - h_*(\cdot,u_{\Lambda_*}(s,\cdot))\right]\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u_\Lambda(t,\cdot) - u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a_*(\cdot)\left(u_{\Lambda_*}(s,\cdot) - u_\Lambda(s,\cdot)\right)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|(a_*(\cdot) - a(\cdot))u_\Lambda(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|K\left[f\circ u_\Lambda(s,\cdot) - f\circ u_{\Lambda_*}(s,\cdot)\right]\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|h(\cdot,u_\Lambda(s,\cdot)) - h_*(\cdot,u_\Lambda(s,\cdot))\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|h_*(\cdot,u_\Lambda(s,\cdot)) - h_*(\cdot,u_{\Lambda_*}(s,\cdot))\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\leqslant \|a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{t_0}^{t} \|u_{\Lambda_*}(s,\cdot) - u_\Lambda(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ \|a(\cdot) - a_*(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{t_0}^{t} \|u_\Lambda(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|h - h_*\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \int_{t_0}^{t} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} C_2\|J\|_p \Bigg[|\Omega|^{\frac{1}{q}} + \|u_\Lambda(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \\
&+ \|u_{\Lambda_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \Bigg] \|u_\Lambda(s,\cdot) - u_{\Lambda_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&+ C_{h_*} \int_{t_0}^{t} \|u_\Lambda(s,\cdot) - u_{\Lambda_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Então, usando (4.2) e o fato que

$$\|u_\Lambda(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} < \beta, \quad e \quad \|u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} < \beta, \forall\ t \geqslant 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\|u_\Lambda(t,\cdot) - u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant M\|\Lambda - \Lambda_*\|_{L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_{t_0}^{t} ds \\ &+ C_0\int_{t_0}^{t}\|u_\Lambda(s,\cdot) - u_{\Lambda_*}(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}ds,\end{aligned}$$

onde $M = max\{\beta, |\Omega|^{\frac{1}{p}}\}$ *e* $C_0 = \left[\|a_*\|_{L^\infty(\Omega)} + C_{h_*} + C_2\|J\|_p\left(|\Omega|^{\frac{1}{p}} + 2\beta^{\frac{p}{q}}\right)\right]$.

Portanto, pela desigualdade generalizada de Grönwall, obtemos

$$\|u_\Lambda(t,\cdot) - u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M(t-t_0)\|\Lambda - \Lambda_*\|_{L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}e^{C_0(t-t_0)}.$$

Como $t \in [t_0, b]$, *segue que*

$$\|u_\Lambda(t,\cdot) - u_{\Lambda_*}(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M(b-t_0)\|\Lambda - \Lambda_*\|_{L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}e^{C_0(b-t_0)}.$$

Logo, o resultado é obtido naturalmente.

Observação 4.4 *Fixado* $\Lambda_* \in \mathbb{A}\times\mathbb{H}$, *para* $\Lambda \in \mathbb{A}\times\mathbb{H}$ *suficientemente próximo de* Λ_* *em* $L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$, *a família de atratores globais* $\{\mathcal{A}_\Lambda; \Lambda \in \mathbb{A}\times\mathbb{H}\}$ *é uniformemente limitado em* Λ.

De fato, como $\mathcal{A}_\Lambda$ *está contido em uma bola com um raio que depende continuamente de* Λ, *existe um subconjunto limitado de* $L^p(\Omega)$ *que contém os atratores* $\mathcal{A}_\Lambda$.

Teorema 4.5 *Sob as mesmas hipóteses do Corolário 4.3, a família de atratores globais* $\{\mathcal{A}_\Lambda; \Lambda \in \mathbb{A}\times\mathbb{H}\}$ *é semicontínua superiormente em* $\Lambda = \Lambda_*$.

Demonstração: *Como* $\mathcal{A}_\Lambda$ *é invariante,* $T_\Lambda(t)\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{A}_\Lambda$ *para qualquer* $\Lambda \in \mathbb{A}\times\mathbb{H}$ *e*

$$\begin{aligned}dist_H(\mathcal{A}_\Lambda, \mathcal{A}_{\Lambda_*}) &\leqslant dist_H(T_\Lambda(t)\mathcal{A}_\Lambda, T_{\Lambda_*}(t)\mathcal{A}_\Lambda) + dist_H(T_{\Lambda_*}(t)\mathcal{A}_\Lambda, \mathcal{A}_{\Lambda_*}) \\ &= \sup_{a_\Lambda\in\mathcal{A}_\Lambda} dis(T_\Lambda(t)a_\Lambda, T_{\Lambda_*}(t)a_\Lambda) + dist_H(T_{\Lambda_*}(t)\mathcal{A}_\Lambda, \mathcal{A}_{\Lambda_*}).\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, *pelo Corolário 4.3, temos*

$$\sup_{a_\Lambda\in\mathcal{A}_\Lambda} dis(T_\Lambda(t)a_\Lambda, T_{\Lambda_*}(t)a_\Lambda) < \frac{\epsilon}{2},$$

para qualquer Λ *suficientemente próximo de* Λ_* *em* $L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$. *Pela definição de atrator global e a Observação 4.4, existe um subconjunto limitado* B_0 *em* $L^p(\Omega)$ *tal* *que*

$$dist_H(T_{\Lambda_*}(t)\mathcal{A}_{\Lambda}, \mathcal{A}_{\Lambda_*}) \leqslant dist_H(T_{\Lambda_*}(t)B_0, \mathcal{A}_{\Lambda_*}) < \frac{\epsilon}{2},$$

para t suficientemente grande. Portanto, para qualquer Λ suficientemente próximo de Λ_* em $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ e t suficientemente grande, obtemos

$$dist_H(\mathcal{A}_{\Lambda}, \mathcal{A}_{\Lambda_*}) < \epsilon.$$

□

Apêndice A

Uma rápida explanação sobre os espaços L^p e suas propriedades

Seguindo [4] e [7], apresentamos definições e resultados sobre a Teoria da Medida. Aqui, X denota um conjunto não-vazio qualquer.

Definição A.1 *Uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra sobre X se:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{X}$;
2. *Se $A \in \mathcal{X}$, então o complementar $A^c \in \mathcal{X}$;*
3. *Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.*

Um espaço mensurável é um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ sobre X.

Definição A.2 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$.*

Se desejarmos, podemos trocar a desigualdade $>$ por $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$, na definição anterior. (ver [4], Lema 2.4).

Definição A.3 *Uma função $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow [0, \infty]$ é uma medida se:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $\mu(A) \geqslant 0, \ \forall A \in \mathcal{X}$
3. *Se (A_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{X}$, então*

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Uma medida μ é dita σ-finita se existe uma sequência de conjuntos (A_n) em $\mathcal{X}$ tal que

$$X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \ \text{e} \ \mu(A_n) < \infty, \ \forall n.$$

Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$, onde X é um conjunto, $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra sobre X, e μ é uma medida definida sobre X.

Observação A.4 *Quando usarmos a expressão que dada afirmação é válida $\mu-$quase sempre ($\mu-$q.s.) ou a menos de um conjunto de medida nula, essa afirmação é satisfeita para todo $x \in X \setminus N$, onde $N \in \mathcal{X}$ e $\mu(N) = 0$.*

Vamos denotar por $L^1(X, \mu)$, ou apenas $L^1(X)$, o espaço das funções integráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com a norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu.$$

Definição A.5 *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Definimos o conjunto*

$$L^p(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \text{é mensurável e} \ |f|^p \in L^1(X)\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição A.6 *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ com $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(X)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: *Primeiro, vamos mostrar a seguinte afirmação: Dados A e B números não negativos e $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, temos que*

$$A \cdot B \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{A.1}$$

Com efeito, considere a função $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha}$$

onde $0 < \alpha < 1$. *Temos que*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \alpha - \alpha t^{\alpha-1} \\ &= \alpha\left(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Perceba que $\varphi'(1) = 0$; $\varphi'(t) < 0$, *para* $0 < t < 1$; $\varphi'(t) > 0$, *para* $t > 1$. *Com isso,* $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ *para* $t \geqslant 0$, *ou seja,*

$$\alpha t - t^{\alpha} \geqslant \alpha - 1,$$

implicando que

$$t^{\alpha} \leqslant \alpha t + 1 - \alpha.$$

Dados $a,\ b \geqslant 0$ *e* $t = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0$, *temos*

$$\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + (1-\alpha),$$

assim,

$$a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Tomando

$$\alpha = \frac{1}{p},\ \ a = A^p \ \text{ e } b = B^q$$

e devido que $1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$, *temos*

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (B^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q,$$

ou melhor,

$$A \cdot B \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Agora, considere $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$ *com* $\|f\|_{L^p},\ \|g\|_{L^q} > 0$. *Usando (A.1) com*

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \ \text{ e } B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} &= \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \\
&\leqslant \frac{1}{q}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.
\end{aligned}$$

Integrado em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}}\int |f(x)g(x)|d\mu &\leqslant \frac{1}{p\|f\|\|_{L^p}^p}\int |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_{Lq}^q}\int |g(x)|^q d\mu \\
&= \frac{1}{p\|f\|_{L^p}^p} \cdot \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q\|g\|_{L^q}^q} \cdot \|g\|_{L^q}^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^q}.$$

Logo, $fg \in L^1$ *e* $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$. *Quando* $\|f\|_{L^p} = 0$ *ou* $\|g\|_{L^q} = 0$, *tem-se* $fg = 0 \in L^1$ *e* $\|fg\|_{L^1} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} = 0$.

□

Proposição A.7 *(Desigualdade de Minkowski) Se* $f, g \in L^p, 1 \leqslant p < \infty$, *então* $f+g \in L^p$ *e*

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Demonstração: *Quando* $p = 1$, *segue que*

$$\begin{aligned}
\int |f+g|d\mu &\leqslant \int (|f|+|g|)d\mu \\
&= \int |f|d\mu + \int |g|d\mu \\
&= \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Assim, temos o resultado. Para $p > 1$, *note que*

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\leqslant (|f|+|g|)^p \\
&\leqslant [2\sup\{|f|,|g|\}]^p \\
&\leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).
\end{aligned}$$

Como $f, g \in L^p$, temos que $f+g \in L^p$. Ademais,

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &= |f+g|^{p-1}|f+g| \\
&\leqslant (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \\
&= |f||f+g|^{p-1}+|g||f+g|^{p-1}. \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Perceba que $|f+g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$. Então, por (A.2) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p d\mu \\
&\leqslant \int |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}d\mu \\
&= \|(|f||f+g|^{p-1})\|_{L^1} + \|(|g||f+g|^{p-1})\|_{L^1} \\
&\leqslant \|f\|_{L^p}|f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} + \|g\|_{L^p}\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \\
&= (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} &= \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|f+g\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\||f+g|\|_{L^p} \leqslant (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})\|f+g\|_{L^p}^{p-1},$$

implicando que

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}.$$

□

Definição A.8 *Uma sequência (f_n) em L^p é uma sequência de Cauchy em L^p se para todo $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geqslant N$, temos*

$$\|f_n - f_m\|_{L^p} < \epsilon.$$

Teorema A.9 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja (f_n) uma sequência de funcões integráveis que converge quase sempre para uma função mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo n, então f é* *integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: *(Ver [4]), p.44, Teorema 5.6).*

Teorema A.10 *O espaço $L^p, 1 \leqslant p < \infty$, é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração:*(Ver [4], p.59, Teorema 6.14).*

Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Dizemos que f é limitada μ-q.s. se existe $c \geqslant 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant c, \ \forall x \in X \setminus N,$$

onde $N \in \mathcal{X}$ é o conjunto $N = \{x \in X; |f(x)| > c\}$ e $\mu(N) = 0$.

Considere o conjunto

$$L^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ é mensurável e limitada } \mu - q.s.\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\ c; \ |f(x)| \leqslant c \ \mu - q.s. \text{ sobre } X\}. \tag{A.3}$$

Observação A.11 *Se $f \in L^\infty$, então*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \ \mu - q.s.$$

Com efeito, pela definição de ínfimo, existe uma sequência $\{c_n\}$ tal que $c_n \to \|f\|_\infty$, e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x)| \leqslant c_n \ \mu - q.s.,$$

isto é,

$$|f(x)| \leqslant c_n, \ \forall x \notin N_n, \text{ onde } N_n \in \mathcal{X} \text{ com } \mu(N_n) = 0.$$

Considere o conjunto $N = \cup_{n=1}^\infty N_n$. Temos que $N \in \mathcal{X}, \ \mu(N) = 0$ e

$$|f(x)| \leqslant c_n, \ \forall x \notin N, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, através do limite, temos $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$*, para todo* $x \in N$.

Teorema A.12 *O espaço* $L^\infty(X)$ *é um espaço de Banach com a norma (A.3).*

Demonstração: *(Ver [4], p.61, Teorema 6.16).*

Apêndice B

Alguns resultados de Análise Funcional

Neste apêndice exibimos resultados clássicos da análise funcional que foram usados nesta dissertação.

Um espaço vetorial normado X será um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e X' é o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos (dual topológico de X) com a norma

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |\varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in X'$$

Teorema B.1 (Teorema de Hanh-Banach) *Seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo, onde G é um subespaço de um espaço vetorial normado X. Então, existe um funcional linear contínuo $\varphi_1 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração: *(Ver [6]).*

Corolário B.2 (Ver [6],p.60) *Seja X um espaço vetorial normado. Para todo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi_1 \in X' = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração: *Seja G um subespaço de X, onde G é formado por todos os elementos $x = ax_0$ com $a \in \mathbb{K}$. Considere o funcional linear*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$$

dado por

$$\varphi(x) = \phi(ax_0) = a\|x_0\|. \tag{B.1}$$

φ é limitado e $\|\varphi\| = 1$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\varphi(ax_0)| \\ &= |a|\|x_0\| \\ &= \|ax_0\| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

e

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |\varphi(x)| \quad = 1.$$

Logo, φ é um funcional linear limitado. Pelo Teorema B.1 existe um funcional linear contínuo $\overline{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ onde a restrição a G é igual a φ e $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1$. De (B.1) temos que

$$\overline{\varphi}(x_0) = \|x_0\|.$$

$\square$

B.1 Teorema do Ponto Fixo para Contrações

Definição B.3 *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \longrightarrow X$ é uma contração se existe $\lambda, 0 \leqslant \lambda < 1$, tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leqslant \lambda d(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Teorema B.4 (Lema da Contração, [27]) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \longrightarrow X$ uma contração. Então existe um único ponto fixo p, por F, ou seja, existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$. Ademais, p é um atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$, onde $F^n(x)$ é definido como $F(F^{n-1}(x))$.*

Demonstração: *Seja $x \in X$. Vamos denotar*

$$x_1 = F(x), \ x_2 = F(x_1) = F(F(x)) = F^2(x), \ \cdots, \ x_n = F^n(x), \ \cdots; \ n \in \mathbb{N}.$$

Afirmação: *A sequência (x_n) é de Cauchy. De fato, como F é contração, existe λ,*

$0 \leqslant \lambda < 1$, tal que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(F(x_n), F(x_{n-1})) \\ &\leqslant \lambda d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Para $n = 1$, segue que

$$d(x_2, x_1) \leqslant \lambda d(x_1, x_0).$$

Supondo por indução a desigualdade

$$d(x_{r+1}, x_r) \leqslant \lambda^r d(x_1, x_0),$$

para um certo $r \in \mathbb{N}$, e usando o fato que F é contração, temos

$$\begin{aligned} d(x_{r+2}, x_{r+1}) &= d(F^{r+2}(x), F^{r+1}(x)) \\ &= d(F(F^{r+1}(x)), F(F^r(x))) \\ &= d(F(x_{r+1}), F(x_r)) \\ &\leqslant \lambda d(x_{r+1}, x_r) \\ &\leqslant \lambda \cdot \lambda^r d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^{r+1} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Agora, dados $n, r \in \mathbb{N}$ e usando (B.2), obtemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leqslant d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}), x_{n+1} + \cdots + d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) \\ &\leqslant \big[\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+r-1}\big] d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n \big[1 + \lambda + \cdots + \lambda^{r-1}\big] d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Sabendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, a sequência (x_n) é de Cauchy e, como X é completo, essa sequência converge para um ponto $p \in X$.
Temos que p é o ponto fixo de F. Com efeito,

$$\begin{aligned} F(p) &= F(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Ademais, p é o único ponto fixo de F. De fato, suponha que $p, q \in X$ são pontos fixos *de F. Então*

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(F(p)), F(q)) \\ &\leqslant \lambda d(p,q), \end{aligned}$$

implicando que

$$(1-\lambda)d(p,q) \leqslant 0.$$

Como $(1-\lambda) > 0$, segue que $d(p,q) = 0$, ou seja, $p = q$.

□

Corolário B.5 *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é contínua, F^m é uma contração, para algum m, então existe um único ponto fixo p para F. Ademais, p é um atrator de F.*

Demonstração: *Seguimos a prova apresentada em [27]. Seja p o ponto fixo atrator de F^m garantido pelo teorema anterior. Considere $n = mk + l$ com $0 \leqslant l < m$. Dado $x \in X$, temos que $F^l(x)$ é um ponto de X. Como p é atrator de F^m, segue que*

$$(F^m)^k(F^l(x)) \to p, \text{ quando } k \to \infty.$$

Note que $F^n(x) = F(^m)^k(F^l(x))$ e que $k \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$F^n(x) \to p, \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja, p é um atrator de F. Por fim, $F(p) = p$. De fato,

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} F^n(F(p)) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(F^n(p)) \\ &= F(\lim_{n\to\infty} F^p(p)) \\ &= F(p). \end{aligned}$$

□

B.2 Teorema do Ponto fixo de Schauder

Teorema B.6 *Se $\mathbf{A}$ é um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach X e $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ é contínua, então f possui um ponto fixo em $\mathbf{A}$.*

Demonstração: *(Ver [17], p. 10).*

Corolário B.7 *Se* $\mathbf{A}$ *é um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach* X *e* $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *é completamente contínua, então* f *possui um ponto fixo em* $\mathbf{A}$.

Demonstração: *(Ver [17], p. 10).*

B.3 Espaço $W^{1,p}$

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Definição B.8 *(Ver [7]) O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Bigg\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi,$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, 2, ..., n \Bigg\}$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ *é o espaço das funções* C^∞ *com suporte compacto.*

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *definimos* $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n$. *O espaço* $W^{1,p}(\Omega)$ *é equipado com a norma*

$$\|u\|_{w^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Teorema B.9 (Rellich-Kondrachov, [7]) *Suponha que* Ω *é limitado e de classe* C^1. *Então, ocorre as seguintes injeções compactas:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},\ \text{ se } p < n;$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, +\infty), \text{ se } p = n;$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),\ \text{ se } p > n.$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *é injeção compacta para todo* p.

Demonstração: *(Ver [7], p.285, Teorema 9.16).*

Teorema B.10 *O espaço das funções* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Além disso, se* $u \in C_c^\infty(\Omega)$, *então* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *com* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: *(Ver [23], pags. 33 e 39, Teoremas 3.1.2 e 3.1.6).*

Bibliografia

[1] *Amari, S.; Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields, Biol. Cybernetics* **27** *(1977) 77-87.*

[2] *Almeida, B. A. S., Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2015).*

[3] *Aragão, G. S., Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2006).*

[4] *Bartle, R. G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Jonh Wiley and Sons, New York, 1995.*

[5] *Bezerra, F. D. M., Sastre-Gomez, S. and da Silva, S.H., Upper semicontinuity for a class of nonlocal evolution equations with Neumann condition. Applicable Analalysis, 100, N. 09 (2019) 1889-1904.*

[6] *Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E., Fundamentos de Análise Funcional, SBM, Rio de Janeiro, 2012*

[7] *Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, 2010.*

[8] *Carracelas, M. P. S., Compacidade e Equicontinuidade, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, (2020).*

[9] *Carvalho, A. N., Langa, J. A., Robinson, J.; Attractors For Infinite-Dimensional Nonautonomous Dynamical Systems. New York (NY): Springer Science and Business Media; 2012.*

[10] *Cortaza, C., Elgueta, M., Rossi, J. D.; A non-local diffusion equation whose solutions develop a free boundary. Ann. Henri Poincaré,***2***, n. 2 (2005) 269-281.*

[11] *Da Silva, S.H. and Pereira, A. L.; Asymptotic behavior for a nonlocal model of neural fields. São Paulo J. Math. Sci., 9, (2015) 181-194.*

[12] *Da Silva, S.H. and Pereira A.L.; Global attractors for neural fields in a weighted space. Matemática Contemporanea, 36 (2009) 139-153*

[13] *Da Silva S.H.; Properties of an equation for neural fields in a bounded domain. Electronic Journal of Differential Equations, 2012, no. 42, (2012) 1-9*

[14] *Dieudonné, J., Deux Exemples Singuliers D'équations Difféntielles, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), v.12, p. 38-40, 1950.*

[15] *French, D. A., Identification of a Free Energy Functional in an Integro-Differential Equation Model for Neuronal Network Activity. Applied Mathematics Letters; 17 (2004) 1047- 1051.*

[16] *Hale, J. K., Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, American Mathematical Society, Rhode Island, 1988.*

[17] *Hale, J.K., Ordinary Differential Equations,2^{a} ed. Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.*

[18] *Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.*

[19] *Ladas, G. E., Laksmikantham, V., Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York, 1972. (Mathematics in Science and Engineering, v. 85).*

[20] *Lima, E. L., Curso de Análise vol. 2, 11^{a} ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2018.*

[21] *Lima, E. L., Espaços Métricos, 4^{a} ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2011.*

[22] *Luz, S. M., Conjuntos Compactos, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, (2000).*

[23] *Marques, A. C., Noções de Teoria das Distribuições e uma Introdução aos Espaços de Sobolev, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Amapá, Macapá, (2018).*

[24] *Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, 1983.*

[25] *Rall, L. B., Nonlinear Functional Analysis and Applications, Academic Press, New York - London, 1971*

[26] Silva, J. S., Existência de Atratores Global e Exponencial para Equação de Campos Neurais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2021).

[27] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979

[28] Tavares, H. S., Conjuntos Invariantes para Tricotomia Exponencial e Aplicações a Campos Neurais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2016).

[29] Temam, R., Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2^a ed., Springer, New York, 1997.