



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Identificação de Modelos de Baixa Ordem Baseados em Funções de Laguerre e Kautz com Polos Otimizados

Renato Augusto Lira de Andrade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Prof. Péricles Rezende Barros, Ph.D.
Orientador

Prof. Rafael Bezerra Correia Lima, D.Sc.
Orientador

Campina Grande – PB
Março - 2019

A553i Andrade, Renato Augusto Lira de.
Identificação de modelos de baixa ordem baseados em funções de Laguerre e Kautz com polos otimizados / Renato Augusto Lira de Andrade. – Campina Grande, 2019.

88 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2019.

"Orientação: Prof. Dr. Péricles Rezende Barros, Prof. Dr. Rafael Bezerra Correia Lima".

Referências.

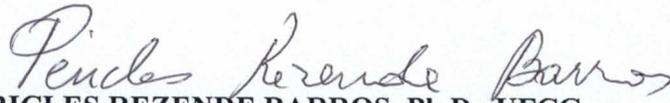
1. Identificação de Sistemas. 2. Funções de Base Ortonormais.
3. Otimização de Polos. I. Barros, Péricles Rezende. II. Lima ,
Rafael Bezerra Correia. III. Título.

CDU 681.5.015(043)

**"IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE BAIXA ORDEM BASEADOS EM FUNÇÕES DE
LAGUERRE E KAUTZ COM POLOS OTIMIZADOS"**

RENATO AUGUSTO LIRA DE ANDRADE

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 28/03/2019


PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG
Orientador(a)


RAFAEL BEZERRA CORREIA LIMA, D.Sc., UFCG
Orientador(a)


ALEXANDRE CUNHA OLIVEIRA, D.Sc., UFCG
Examinador(a)


JOSÉ SÉRGIO DA ROCHA NETO, D.Sc., UFCG
Examinador(a)

CAMPINA GRANDE - PB

Agradecimentos

Aos meus familiares, especialmente meu pai Davi, minha mãe Sara e minha irmã Beatriz, por todo o apoio incondicional e pela torcida constante pelo meu sucesso nessa jornada. Também sou grato de maneira especial à minha avó Maria da Paz, pelas orações e palavras de incentivo.

Aos meus orientadores, professores Péricles Rezende Barros e Rafael Bezerra Correia Lima, pelo trabalho de orientação e acompanhamento, pela cobrança e pelo suporte, que resultaram na produção deste trabalho de dissertação.

Agradeço aos componentes da banca, professores José Sérgio da Rocha Neto e Alexandre Cunha Oliveira, pelas suas contribuições para enriquecer este trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Aos funcionários da COPELE, pelos serviços prestados e pela assistência prestativa.

Aos meus colegas do LIEC, Antonio Julio, Charles, Alequine, Anna Paula, Antônio Agripino, Lucas, Clarisse, Moisés, professor George Acioli, pela colaboração ao longo do percurso do mestrado e pela amizade desenvolvida.

Aos meus colegas de apartamento, Ezequiel e João Heli, pelos bons momentos de amizade e convivência diária.

Aos amigos e irmãos da Primeira Igreja Batista de Campina Grande, por me proporcionarem um ambiente nesta cidade para aperfeiçoar a fé e viver a experiência de fazer parte de uma família em Cristo.

A Deus, pela experiência de poder fazer esse mestrado na área de conhecimento que desejava, nessa cidade, com essas pessoas. Por cada momento vivido nesse período, tanto no ambiente acadêmico como fora dele. Por cada novo dia, pelo cuidado e provisão diárias que me trouxeram até aqui e que me fazem prosseguir.

Resumo

Modelos de baixa ordem são muito utilizados na área de controle de sistemas. Enquanto a simplicidade que lhes é intrínseca é desejável por fins práticos, ainda é necessário que os modelos sejam representações precisas do sistema estudado, isto é, que haja um nível mínimo de concordância entre as dinâmicas do modelo gerado e da planta real.

Representações com funções de base ortonormais pode ser úteis na obtenção de tais modelos por meio de uma estrutura de modelo de resposta ao impulso finita, cuja utilização permite desfrutar de vantagens numéricas por ser linear nos parâmetros e estimar a resposta do sistema com dinâmica diferente da do ruído, diminuindo os erros de modelagem, além de possibilitar de modo simples a inclusão de conhecimento prévio sobre o sistema. Porém, uma escolha adequada dos polos é crucial neste processo.

Neste trabalho de dissertação, estudam-se duas situações em que, a partir de dados de entrada e saída da resposta ao degrau do sistema, modelos de funções de base ortonormais de baixa ordem são gerados de modo a satisfazer condições de optimalidade do erro de estimativa em relação aos polos escolhidos. No primeiro caso, apresenta-se a possibilidade gerar modelos de Laguerre com atraso cujos polos são calculados de modo a satisfazer os critérios de otimalidade.

No segundo, propõem-se dois métodos para gerar modelos de Kautz de segunda ordem e parâmetros reais, visando a modelar sistemas com polos dispersos que apresentam dinâmicas mais complexas induzidas por zeros. São desenvolvidas também as soluções analíticas dos problemas de otimização que geram os critérios utilizados.

Palavras-chave: identificação de sistemas; funções de base ortonormais; otimização de polos.

Abstract

Low-order models are largely used in the system control area. While their intrinsic simplicity is desirable for practical purposes, the models still need to be accurate representations of the studied system, *i.e.* a minimal level of agreement between the generated model dynamics and those of the real plant is required.

Representations with orthonormal basis functions may be useful in the obtainment of such models by means of finite impulse response model structure, whose utilization allows to take advantage of numerical benefits due to its linear-in-the-parameters characteristic and to the fact it models the system response with dynamics different to those of the noise, which helps to diminish modelling errors. Furthermore their use also allows the inclusion of prior knowledge in a simple manner. Nevertheless an adequate choice of the functions poles is crucial in this process.

In this dissertation work two situations are studied, in which low-order orthonormal basis functions models are generated, from the system step response input-output data, so as to satisfy optimality conditions of the estimate error relative to the chosen poles. In the first case, the possibility of generating Laguerre models plus time-delay whose poles are computed so that they satisfy the optimality conditions is presented.

In the second case, two methods are proposed to generate second-order Kautz models with real poles, aiming at modelling systems with sparse poles that present more complex zero-inducted dynamics. The analytic solutions for the optimization problems that raise the criteria used in the methods are also developed.

Keywords: system identification; orthonormal basis functions; pole optimization.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Motivação	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Contribuição	4
1.4	Revisão Bibliográfica	4
1.5	Organização do Texto	6
2	Identificação de Sistemas	8
2.1	Introdução	8
2.2	Modelos de Sistemas Dinâmicos	8
2.2.1	FIR	10
2.2.2	ARX	11
2.2.3	ARMAX	12
2.2.4	OE	13
2.2.5	BJ	14
2.3	Método dos Mínimos Quadrados	14
2.4	Polarização e Variância	18
2.5	Conclusão	20
3	Bases Ortonormais	21
3.1	Introdução	21
3.2	Conceitos	22
3.3	Métodos de Obtenção de Bases Ortonormais	24
3.3.1	Procedimento de Gram-Schmidt	24
3.3.2	Realização em Espaço de Estados Balanceada na Entrada	25
3.4	Filtros Passa-tudo	26
3.5	Redes de filtros passa-tudo ortogonais	27
3.6	Funções de Base Ortonormais em Tempo Contínuo	29
3.7	Estimação de Parâmetros com Funções de Base Ortonormais	31

3.8	Seleção de Bases Ortonormais para Identificação de Sistemas	32
3.9	Comparações entre Diferentes Métodos	35
3.9.1	Simulações Numéricas	35
3.9.2	Resultados	39
3.10	Conclusão	47
4	Identificação com OLPTDs	50
4.1	Introdução	50
4.2	Condições para Estimação Ótima de Polos de Laguerre	51
4.3	Modelos de Laguerre com Atraso de Baixa Ordem Ótimos	53
4.4	Simulações Numéricas	54
4.5	Resultados Experimentais	58
4.6	Conclusão	61
5	Identificação com Funções de Kautz a Dois Parâmetros Reais	63
5.1	Introdução	63
5.2	Posição Ótima de um Par de Polos Reais a uma Razão Fixa	64
5.3	Razão Ótima Entre Dois Polos Reais em Torno de um Ponto Fixo	68
5.4	Estimação em dois passos de modelos de Kautz a dois parâmetros reais	70
5.5	Questões de Implementação	71
5.6	Simulações Numéricas	71
5.7	Conclusão	79
6	Conclusão e Trabalhos Futuros	80
	Referências Bibliográficas	83

Lista de Tabelas

2.1	Alguns modelos SISO caixa-preta comuns como casos especiais da equação (2.4).	10
3.1	Configurações escolhidas na identificação dos processos com cada um dos métodos utilizados.	39
3.2	Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre com aplicação de degrau unitário na entrada.	40
3.3	Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF com aplicação de degrau unitário na entrada.	40
3.4	Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre com aplicação de ruído branco na entrada.	46
3.5	Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF com aplicação de ruído branco na entrada.	46
3.6	Melhores números de condicionamento das matrizes de correlação resultantes da utilização dos métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre quando aplicados um degrau e um ruído branco como sinal de entrada.	47
3.7	Melhores números de condicionamento das matrizes de correlação resultantes da utilização dos métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF quando aplicados um degrau e um ruído branco como sinal de entrada.	47
4.1	Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos 1 a 3. . .	56
4.2	NRMSE gerados pelas respostas ao degrau dos Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos 1 a 3.	56
4.3	Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos A, B e C. . .	61
4.4	NRMSE gerados pelas respostas ao degrau dos modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos A, B e C.	61
5.1	Valores das variáveis envolvidas na obtenção dos modelos Kautz-PR para os quatro processos analisados.	74

- 5.2 Modelos de Laguerre de 2^a ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_1(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau. 75
- 5.3 Modelos de Laguerre de 2^a ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_2(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau. 77
- 5.4 Modelos de Laguerre de 2^a ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_3(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau. 79

Lista de Figuras

2.1	Estrutura do modelo ARX.	11
2.2	Estrutura geral dos modelos de erro na equação. O modelo ARMAX é obtido fazendo $D = 1$	12
2.3	Estrutura do modelo OE.	14
2.4	Estrutura do modelo BJ.	15
3.1	Redes de filtros passa-tudo em cascata.	27
3.2	Funções de Laguerre com um polo em $a = 0,92$ e número de funções igual a 5 (tracejado e pontilhado), 20 (pontilhado) e 60 (cheio). O gráfico acima mostra a resposta ao impulso das funções (com eixo horizontal deslocado para facilitar a visualização) e o gráfico abaixo mostra a energia acumulada das funções correspondentes.	34
3.3	Gráficos dos modelos estimados para o processo 4.	41
3.4	Gráficos dos modelos estimados para o processo 9.	42
3.5	Gráficos dos modelos estimados para o processo 6.	44
3.6	Gráficos dos modelos estimados para o processo 2.	45
4.1	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 1. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	55
4.2	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 2. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	55
4.3	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 3. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	56

4.4	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD de 1ª ordem com atraso e sem atraso estimados para o processo 3. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem com atraso (pontilhada grossa) e 1ª ordem sem atraso (tracejada-pontilhada).	57
4.5	Diagrama da planta termoeétrica baseada no efeito Peltier usada nos experimentos.	58
4.6	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo A. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	59
4.7	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo B. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	60
4.8	Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo C. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).	60
5.1	Gráfico de $c_1c_a + c_2(c_b - c_c + c_d)$ em função de p para a aplicação da otimização da posição ao processo $G_3(s)$. A cruz vermelha destaca o ponto escolhido.	73
5.2	Gráfico de $c_1c_a + c_2(c_b - c_c + c_d)$ em função de r para a aplicação da otimização da razão ao processo $G_3(s)$. A cruz vermelha destaca o ponto escolhido.	73
5.3	Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_1(s)$	74
5.4	Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_1(s)$	75
5.5	Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_2(s)$	76
5.6	Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_2(s)$	77
5.7	Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_3(s)$	78
5.8	Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_3(s)$	78

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Muitas aplicações industriais de controle, especialmente aquelas envolvendo sistemas estáveis superamortecidos, ou são baseados em modelos de baixa ordem ou tornam-se significativamente mais simples e computacionalmente mais baratos com o seu uso, sendo diversas técnicas de sintonia de controladores PID (SKOGESTAD, 2003) (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2004) bons exemplos desse caso — a expressão "baixa ordem" frequentemente refere-se a números de ordem até 2.

Funções de base ortonormais (OBFs, do inglês *Orthonormal Basis Functions*) aparecem como possibilidades para gerar tais modelos, já que a expansão em OBFs permite a descrição das respostas ao impulso por meio de combinações lineares das respostas ao impulso das funções de base, inclusive com vantagens numéricas, devido à característica ortonormal, que torna possível o cálculo dos coeficientes por meio de análise de correlação e a realização de estimativas por meio de mínimos quadrados com baixos números de condicionamento (HOF et al., 2000).

A estrutura de modelo FIR (do inglês *Finite Impulse Response*) é normalmente explorada por apresentar a vantagem de não modelar o ruído com a mesma dinâmica do sistema, reduzindo assim os chamados erros de polarização. A base mais comumente utilizada para esta estrutura de modelo é a baseada em trens de impulso atrasados e requer um número elevado de parâmetros para ser descrita, pois há a necessidade de uma amostragem adequada e de pontos suficientes para alcançar o tempo de estabelecimento do sistema.

A desvantagem é que o conhecimento prévio é não apenas possível de ser incluído, mas também crucial para a obtenção de pequenos erros de modelagem devido à polarização com um reduzido número de parâmetros, já que a quantidade de funções de base necessárias para realizar uma boa estimativa associada à proximidade dos seus polos dos

polos "verdadeiros" do sistema. Existe um conjunto ótimo de polos que fornece a melhor aproximação possível (SILVA, 2000) (MALTI; D.; RAGOT, 1999), cuja escolha requer um processo não necessariamente direto e simples, dado que o problema de otimização do qual esse conjunto é solução é não-linear e pode apresentar muitos mínimos locais.

Dentre as possibilidades de OBFs, as funções de Laguerre são mais utilizadas, portanto, devido à sua simplicidade, oriunda do fato de basear-se em apenas um único polo, o que gera um problema de otimização unidimensional e que deve satisfazer condições de otimalidade analíticas simples (CLOWES, 1965) (KING, 1969) (WANG; CLUETT, 1994). A inclusão de atraso de transporte ao modelo também é realizável, de modo que se pode explorar esse recurso para facilitar a aproximação de sistemas com ordens mais elevadas (SANTOS, 2013).

Porém, tal simplicidade pode também ser uma limitação, já que ela é responsável por uma redução do potencial de geração de boas aproximações com funções de Laguerre com um número pequeno de parâmetros caso os polos "verdadeiros" do sistema sejam dispersos, principalmente se dinâmicas mais complexas induzidas por zeros estiverem presentes. Estratégias para lidar com tais possibilidades têm utilizado um conjunto de polos logaritmicamente distribuídos ao longo do eixo real: (SHEN et al., 2017) sugere uma estimação com uma combinação de funções de primeira ordem com atraso, que não são ortonormais, enquanto (YONEYA; ONO, 2006) propõe uma função de custo composta, com contribuições agregadas de erros calculados com funções de Laguerre baseadas em polos diferentes. Contudo, estas estratégias demandam o uso de um número elevado de polos a fim de aumentar a probabilidade de ter os polos escolhidos próximos aos polos do sistema. Encontrar os polos ótimos de funções de base ortonormais mais complexas que as de Laguerre, *e.g.* as funções de Kautz, apesar de ser computacionalmente mais custoso, permitiria a obtenção de modelos de ordem mais baixa.

1.2 Objetivos

Os objetivos nesse trabalho são:

- Propor um algoritmo para obtenção de modelos de funções de Laguerre ótimas com atraso e avaliar os modelos obtidos;
- Desenvolver uma solução analítica para um problema de otimização em duas etapas cujo resultado é utilizado na obtenção de modelos de Kautz com polos reais e avaliar os modelos obtidos.

1.3 Contribuição

Descreve-se como contribuição produzida com este trabalho: a apresentação de uma metodologia prática para a geração de modelos de Laguerre com atraso de baixa ordem com polo ótimo a partir de dados experimentais; e o desenvolvimento da solução analítica para o problema de otimização da posição e da razão entre dois polos reais, resultando em métodos para a obtenção de modelos de Kautz a partir de dados experimentais.

A produção deste trabalho de dissertação também resultou na publicação dos artigos:

- ANDRADE, Renato A. L. de; BARROS, Péricles. R.; LIMA, Rafael B. C. Identification of low order Laguerre plus time-delay models with optimal pole estimation. *12th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, including Biosystems (DYCOPS 2019)* 2019, Florianópolis, Brasil.
- ANDRADE, Renato A. L. de; BARROS, Péricles. R.; LIMA, Rafael B. C. Identification of second-order Kautz models by two-step pole location optimisation. *17th European Control Conference (ECC19)* 2019, Nápoles, Itália.

1.4 Revisão Bibliográfica

A teoria de Bases Ortonormais é clássica e começou a ser desenvolvida já no século XIX (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005). Porém, seu estudo continua sendo aprofundado e novas aplicações propostas em diversas áreas, estando algumas destas mais avançadas em relação à popularidade e proporção de utilização.

Na área de identificação de sistemas, as funções de base ortonormais vêm sendo utilizadas com o propósito de incluir conhecimento prévio sobre os polos do sistema e reduzir o número de parâmetros calculados, tanto nos casos de única entrada e única saída (SISO, do inglês *Single-Input Single-Output*) quanto de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multi-Input Multi-Output*). A identificação em tempo discreto para um tipo genérico de OBF no domínio do tempo é tratada, por exemplo, em (AKCAY, 2000) (JURÁCKOVÁ; KOZÁK, 2000) (LEMMA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2010), com o caso MIMO sendo estudado em (NINNESS; GOMEZ; WELLER, 1995). Em (HOOG et al., 2002), utiliza-se a estratégia de identificação em subspaços. Já o caso da identificação no domínio da frequência é analisado em (NINNESS, 1996) (SCHIPP et al., 1996). Outros trabalhos tratam também de questões como completude, erros de modelagem e a utilidade das funções de base ortonormais como ferramentas de análise, contexto em que a análise de transformação tem destaque (HOF; HEUBERGER; BOKOR, 1995) (WAHLBERG, 1999) (HOF et al., 2000). Em (CHEN; LJUNG, 2015) se analisa um caso de identificação regularizada com funções de base ortonormais.

Apesar da questão computacional a ser considerada no caso da necessidade de se ter de realizar integrações numéricas, podem ser encontradas vantagens na prática da identificação no domínio do tempo contínuo, como a possibilidade de evitar os problemas numéricos da superamostragem aos quais a identificação no tempo discreto está passível de sofrer. Casos desse tipo são analisados no domínio do tempo em (GOODWIN; NINNESS; POOR, 1992) (AOUN et al., 2003) (GARNIER, 2015). Em (AKCAY; NINNESS, 1999), modela-se o sistema considerando-se a entrada variável entre as amostragens, enquanto em (YU et al., 2017) estuda-se mais uma vez a identificação em subespaços. No correspondente caso da identificação no domínio da frequência no plano s , trabalhos dedicados a esta possibilidade são (VOORHOEVE et al., 2014) (AKCAY; NINNESS, 1999) (GILLBERG, 2006). Em (CHOU; VERHAEGEN; JOHANSSON, 1999), utilizam-se aproximações discretas de funções contínuas para continuar trabalhando com dados amostrados, enquanto em (VAU; BOURLÈS, 2017), procura-se evitar problemas numéricos com superamostragem mesmo usando uma abordagem discreta. A questão do projeto do sinal de entrada ótimo para a identificação é discutida em (ABRASHOV et al., 2018), enquanto (OLIVIER, 1994) propõe um método de identificação *online* com funções de Laguerre.

Dentre as OBFs, as mais simples são as funções de Laguerre e Kautz, as quais são, por consequência, as mais exploradas, com diversos trabalhos voltados para o desenvolvimento de técnicas e algoritmos de identificação específicos para essas funções de base, muitas vezes como um passo anterior à generalização para funções mais gerais. Mais uma vez, pode-se encontrar pesquisas relacionadas à identificação no tempo discreto (NURGES, 1985) e contínuo (CLEMENT, 1982), com subespaços (HAVERKAMP et al., 1997) e no domínio da frequência (BOKOR; SCHIPP, 1998). Em (YONEYA; ONO, 2006), apresenta-se um uso diferente das funções de Laguerre, pois em vez de se utilizarem GOBFs com polos reais, se utiliza uma função de custo composta, gerada pela soma das contribuições de erros gerados por aproximações com funções de Laguerre com polos diferentes, no cálculo dos parâmetros por mínimos quadrados, de modo que a estimativa final seja uma combinação linear das funções envolvidas. Em (AOUN et al., 2007), desenvolve-se um método de gerar funções de Laguerre de ordens fracionais. Modelos de ordens reduzida são obtidos por meio dos métodos sugeridos em (ANES; BOUZRARA; RAGOT, 2018) (WANG; JIANG; KONG, 2016) (MANNGÅRD; TOIVONEN, 2018). Em (MBAREK et al., 2015), aplica-se um modelo MIMO ARX (autorregressivo com entrada exógena) com funções de Laguerre e propõe-se um método de otimização de polos de Laguerre para utilizar-se conjuntamente.

A questão da escolha dos polos é muito importante quando se utilizam funções de base ortonormais, pois dela depende a taxa de convergência dos parâmetros e, conseqüentemente, o número de parâmetros necessários para obter uma estimativa com um dado erro

de aproximação. Os precursores da análise de otimização de polos das OBFs foram os trabalhos (CLOWES, 1965), que mostrou a relação da proximidade do polo das funções de Laguerre com a taxa de convergência dos coeficientes da expansão nessas funções, e (KING, 1969). Partindo desse princípio da necessidade de otimizar os polos, já foram propostos, por exemplo, métodos analíticos (WAHLBERG, 1999) (SILVA, 2000), métodos baseados na resposta ao degrau ou ao impulso (FU; DUMONT, 1993), métodos de otimização (SILVA, 2000) (NAJEH et al., 2017) (TANGUY et al., 2015) e experimento do relé (GALDINO, 2012).

A quantificação do atraso ou a sua estimativa em modelos de ordem reduzida também é um tema recorrente na área de identificação com OBFs e é tratado em (HIDAYAT; MEDVEDEV, 2012a), (HIDAYAT; MEDVEDEV, 2012b), (SANTOS, 2013), (WANG; JIANG; KONG, 2016). Em (BEAUDUIN; FUJIMOTO, 2017), utiliza-se uma estratégia com funções no domínio da frequência para simultaneamente estimar os polos ótimos iterativamente e calcular o atraso do modelo.

Uma aplicação específica na qual as funções de base ortonormais têm-se mostrado úteis é a identificação de estruturas flexíveis (ZIAEI; WANG, 2006) (NALBANTOĞLU; BOKOR; BALAS, 1997) (NALBANTOĞLU et al., 2003) e outros sistemas mecânicos (SILVA, 2011a). Em (EVERS; JAGER; OOMEN, 2018), as OBFs são utilizadas como uma ferramenta especificamente para incluir conhecimento prévio sobre um sistema termodinâmico. As aplicações também se estendem à área de controle, com métodos desenvolvidos de projeto de controladores PID (ZERVOS; BÉLANGER; DUMONT, 1988) (TABATABAEI, 2016) e controle preditivo, seja na definição do modelo que provê a predição dos valores de saída (KHAN; ROSSITER; VALENCIA-PALOMO, 2011) (ELSHAFEI; DUMONT; ELNAGGAR, 1994), seja como uma ferramenta para diminuir o custo computacional do cálculo da variável manipulada (WANG, 2009) (ZHENG et al., 2017).

1.5 Organização do Texto

Neste capítulo foi apresentada uma breve revisão bibliográfica a respeito das aplicações de bases ortonormais na área de identificação de sistemas de controle e os objetivos desejados com a realização deste trabalho. No capítulo 2, apresenta-se uma revisão teórica dos conceitos básicos sobre funções de base ortonormais. No capítulo 3, também é realizada uma revisão dos fundamentos da teoria de identificação de sistemas, além de se mostrar exemplos de aplicação das funções de base ortonormais nesse contexto a fim de ilustrar os procedimentos necessários e verificar as vantagens discutidas previamente. Também são feitas comparações com outros métodos de identificação baseados em funções de bases diversas. No capítulo 4, é discutida com mais detalhes a importância da escolha ótima

dos polos das funções ortonormais, sendo apresentada a solução analítica do problema de otimização que permite a obtenção de polos ótimos para modelos com funções de Laguerre e um algoritmo demonstrando como gerar modelos de Laguerre com atraso, os quais são então avaliados quanto à sua capacidade de modelagem. No capítulo 5 mostra-se um caso em que funções de Laguerre de baixa ordem podem não ser suficientes para uma modelagem acurada e apresenta-se como solução um método de otimização em duas etapas para a geração de modelos de Kautz com polos reais distintos, juntamente com as demonstrações das soluções para os problemas de otimização envolvidos e a avaliação dos modelos encontrados. Enfim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas com este trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Identificação de Sistemas

2.1 Introdução

A Identificação de Sistemas é definida por (LJUNG, 1987) como sendo a área de conhecimento por meio da qual se "constroem" ou selecionam modelos de sistemas dinâmicos para servir a certos objetivos". Ele destaca também que o modelo não se trata de uma tentativa de obter uma representação perfeita do sistema em questão, mas de descrever as dinâmicas de interesse para a aplicação que se deseja realizar com ele. Essa, portanto, é uma questão que se deve ter em mente durante o processo de identificação de sistemas: o modelo precisa ser apenas complexo o suficiente para atender às necessidades da aplicação.

Tendo definido esse conceito fundamental, pode-se partir para a apresentação de alguns modelos típicos de sistemas dinâmicos, também descritos em (LJUNG, 1987). Neste capítulo, além desses modelos, será apresentado o método dos mínimos quadrados aplicado à identificação de sistemas e discutidas de forma conceitual as questões da polarização e da variância.

2.2 Modelos de Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser representado por um modelo linear invariante no tempo:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t), \quad (2.1)$$

em que $G(q)$ e $H(q)$ representam as respostas ao impulso (infinitas) do sistema modelado e da perturbação e o erro $e(t)$ é especificado pela sua função de densidade de probabilidade (PDF). Esta corresponderia a uma representação "completa" do sistema. Assume-se normalmente que o erro seja gaussiano, de modo que este pode ser descrito pelos seus

primeiro e segundo momentos (média e variância). Por não ser normalmente exequível a representação da resposta ao impulso infinita, utilizam-se representações com um número finito de parâmetros, como funções de transferência ou matrizes de espaço de estados.

Para os casos em que não é possível ou prático obter um valor para esses parâmetros a partir das características físicas do sistema, faz-se necessário realizar um processo de identificação para determiná-los. Nessas situações, o que se tem é um conjunto de modelos possíveis para representar um sistema, e o processo de identificação constitui-se de um mecanismo para selecionar um desses modelos que seja adequado ao propósito da aplicação. Sendo os parâmetros a ser determinados definidos pelo vetor θ , pode-se re-escrever a equação (2.1) como:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t). \quad (2.2)$$

Para realizar o processo de identificação, uma das estratégias possíveis é utilizar o método de predição do erro. Nesse caso, a partir do modelo que se deseja obter, encontra-se uma equação de um preditor da saída a partir dos valores obtidos para instantes anteriores, e calcula-se o erro entre a saída medida e a saída prevista. O passo seguinte constitui-se na utilização do método dos mínimos quadrados para encontrar um modelo em que este erro seja minimizado. A partir da equação (2.2), uma forma geral para este preditor é dada por:

$$\hat{y}(t, \theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(t). \quad (2.3)$$

Alguns modelos são chamados de caixa-preta, pois não levam em conta a estrutura física do sistema mas, a partir de dados coletados da entrada e da saída, procura-se encontrar valores ótimos para os parâmetros do modelo. Utilizando o modelo de funções de transferência, eles são especificados por meio de polinômios — ou matrizes polinomiais, nos casos MIMO — do operador de atraso discreto no tempo q^{-1} . O caso mais geral possível envolve cinco polinômios:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t). \quad (2.4)$$

Nos casos em que a dinâmica do sistema contém um atraso de resposta d instantes de amostragem, o polinômio $B(q)$ pode ser definido como sendo igual a $q^{-d}\bar{B}(q)$, de modo que a equação geral do modelo, para mostrar explicitamente esse atraso, pode ser re-escrita como:

$$A(q)y(t) = q^{-d}\frac{\bar{B}(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t). \quad (2.5)$$

Atribuindo o valor unitário a alguns desses polinômios, obtém-se representações mais específicas. Na tabela 2.1 são apresentados alguns dos modelos mais comuns que se

Tabela 2.1: Alguns modelos SISO caixa-preta comuns como casos especiais da equação (2.4).

Polinômios da Eq. (2.4) Utilizados	Nome da Estrutura do Modelo
B	FIR (resposta ao impulso finita)
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (erro na saída)
BFCD	BJ (Box-Jenkins)

Fonte: (LJUNG, 1987)

descrevem como casos específicos do modelo geral descrito.

A seguir serão fornecidos mais detalhes a respeito da forma do preditor de alguns desses modelos. Alguns deles como o FIR, o ARX e o ARMAX formam a chamada família dos modelos com erro na equação, pois o erro entra diretamente na equação a diferenças que relaciona a entrada com a saída. Já aqueles que não apresentam essa característica, como o OE e o BJ, pertencem à família dos modelos com erro na saída.

2.2.1 FIR

Partindo da equação (2.4), atribui-se o valor 1 a todos os polinômios exceto $B(q)$ e obtém-se então o modelo FIR (resposta ao impulso finita, do inglês *Finite Impulse Response*):

$$y(t) = B(q)u(t) + e(t). \quad (2.6)$$

Como $G(q) = B(q)$ e $H(q) = 1$, conclui-se que o preditor para o caso FIR é dado por:

$$\hat{y}(t, \theta) = B(q)u(t). \quad (2.7)$$

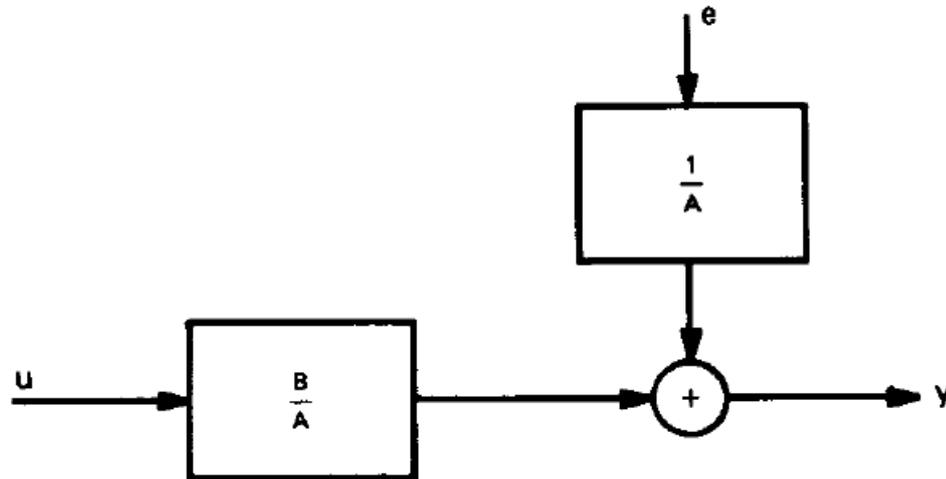
O vetor θ é dado por:

$$\theta = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}]^T,$$

em que n_b é o grau do polinômio $B(q)$. Construindo o vetor de dados:

$$\psi(t) = [u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n_b)],$$

Figura 2.1: Estrutura do modelo ARX.



Fonte: (LJUNG, 1987)

pode-se definir uma regressão linear re-escrevendo a equação do preditor como:

$$\hat{y}(t, \theta) = \psi(t)^T \theta. \quad (2.8)$$

2.2.2 ARX

O modelo ARX (autorregressivo com entrada exógena, do inglês *AutoRegressive with eXogenous input*) é representado pela equação:

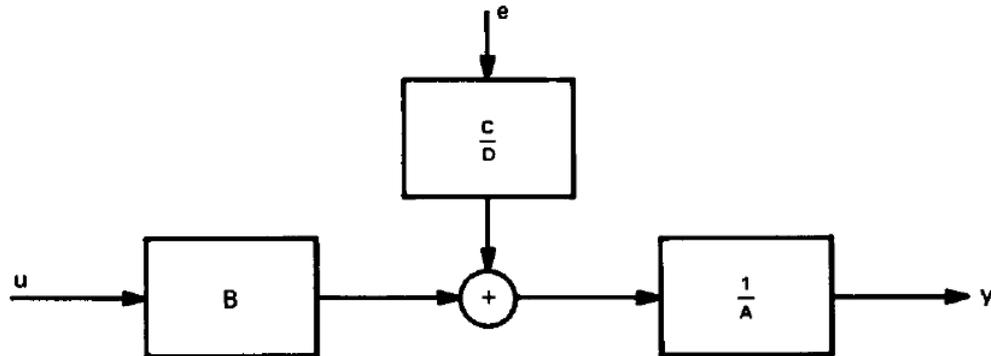
$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t), \quad (2.9)$$

em que n_a e n_b são os graus dos polinômios $A(q)$ e $B(q)$, respectivamente. Representando-o segundo o modelo geral, tem-se:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t). \quad (2.10)$$

de modo que $G(q) = B(q)/A(q)$ e $H(q) = 1/A(q)$ (figura 2.1). Observa-se que neste caso, assume-se que o ruído é filtrado pela dinâmica do sistema antes de ser adicionado à saída. Apesar de esta não ser a representação mais fidedigna da realidade, este modelo costuma ser aplicado com frequência por permitir a aplicação direta de uma regressão linear, o que outras estruturas, que modelam o ruído com dinâmica diferente da do sistema, não fornecem diretamente.

Figura 2.2: Estrutura geral dos modelos de erro na equação. O modelo ARMAX é obtido fazendo $D = 1$.



Fonte: (LJUNG, 1987)

O preditor do modelo ARX é então dado por:

$$\hat{y}(t, \theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t). \quad (2.11)$$

A regressão linear é obtida definindo os parâmetros:

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b}]^T \quad (2.12)$$

e o vetor de dados:

$$\psi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \ u(t-1) \dots u(t-n_b)]. \quad (2.13)$$

2.2.3 ARMAX

O modelo ARMAX (autorregressivo com média móvel e entrada exógena, do inglês *AutoRegressive Moving Average with eXogenous input*) é representado pela equação:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c), \quad (2.14)$$

em que n_c é o grau do polinômio $C(q)$. Representando-o segundo o modelo geral, tem-se:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (2.15)$$

de modo que $G(q) = B(q)/A(q)$ e $H(q) = C(q)/A(q)$ (figura 2.2).

O preditor nesse caso é dado por:

$$\hat{y}(t, \theta) = \frac{B(q)}{C(q)}u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right]y(t). \quad (2.16)$$

Não é possível gerar uma regressão linear nessa situação. Porém, pode-se gerar uma regressão pseudolinear. Multiplicando a equação (2.16) por $C(q)$ e adicionando $1 - C(q)\hat{y}(t, \theta)$ em ambos os lados, tem-se:

$$\hat{y}(t, \theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) + [C(q) - 1][y(t) - \hat{y}(t, \theta)]. \quad (2.17)$$

Definindo o erro de predição:

$$\epsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t, \theta), \quad (2.18)$$

determina-se então o vetor de parâmetros θ e o vetor de dados:

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b} \ c_1 \dots c_{n_c}]^T \quad (2.19)$$

$$\psi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \ u(t-1) \dots u(t-n_b) \ \epsilon(t-1) \dots \epsilon(t-n_c)] \quad (2.20)$$

2.2.4 OE

O modelo OE (erro na saída, do inglês *Output Error*) procura resolver a questão da filtragem do ruído com a dinâmica do sistema. Este modelo é representado pelas equações:

$$w(t, \theta) + f_1 w(t-1, \theta) + \dots + f_{n_f} w(t-n_f, \theta) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

$$y(t) = w(t) + e(t), \quad (2.21)$$

em que n_f é o grau do polinômio $F(q)$. Representando-o segundo o modelo geral, tem-se:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t). \quad (2.22)$$

de modo que se obtém $G(q) = B(q)/F(q)$ e $H(q) = 1$ (figura 2.3).

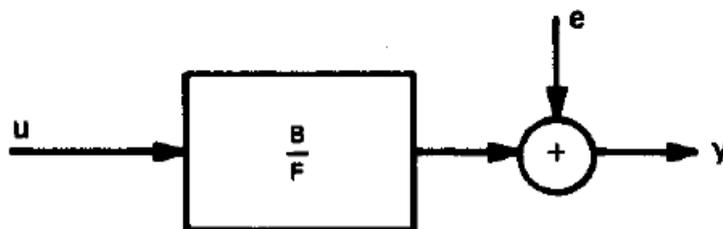
O preditor nesse caso é dado por:

$$\hat{y}(t, \theta) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) = w(t, \theta). \quad (2.23)$$

Os vetores de parâmetros e de dados são:

$$\theta = [b_1 \dots b_{n_b} \ f_1 \dots f_{n_f}]^T \quad (2.24)$$

Figura 2.3: Estrutura do modelo OE.



Fonte: (LJUNG, 1987)

$$\psi(t) = [u(t-1) \dots u(t-n_b) - w(t-1) \dots - w(t-n_a)]. \quad (2.25)$$

Nota-se que o valor predito $\hat{y}(t, \theta) = w(t)$ depende dos valores passados de $w(t)$, revelando a natureza não-linear da estrutura de modelo OE.

2.2.5 BJ

Descrevendo o erro na saída por meio de um modelo ARMA (autoregressivo com média móvel, do inglês *AutoRegressive Moving Average*), obtém-se o modelo BJ (Box-Jenkins). Pode-se representá-lo, segundo o modelo geral, por meio da equação:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t). \quad (2.26)$$

Analisando as funções de transferência $G(q)$ e $H(q)$, observa-se que o preditor para este caso é dado por:

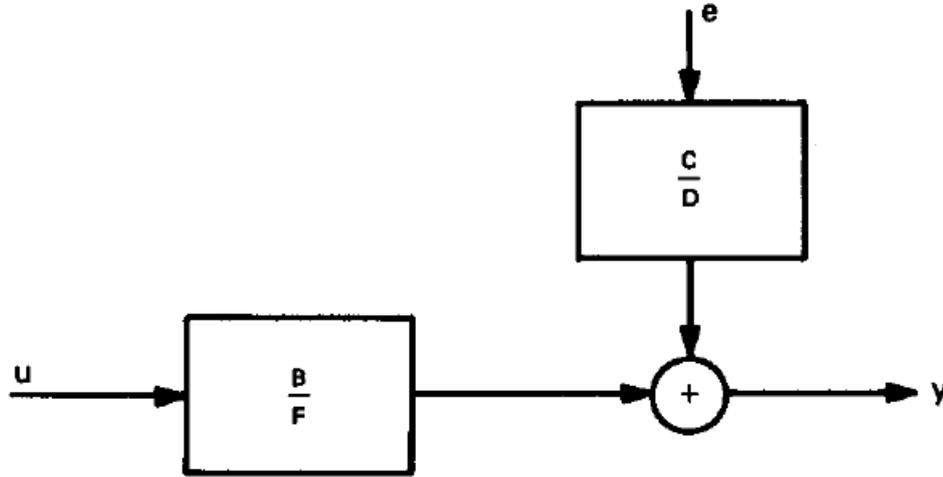
$$\hat{y}(t, \theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y(t). \quad (2.27)$$

Não serão apresentadas as formas do vetor de dados nem do vetor de parâmetros para esse caso, mas o procedimento para defini-los é semelhante aos dos outros casos desenvolvidos precedentemente. Sendo uma estrutura de modelo mais complexa que abrange o caso OE, observa-se também neste caso a natureza não-linear do processo de identificação.

2.3 Método dos Mínimos Quadrados

Quando se tem um conjunto de dados de entrada e saída, pode-se utilizar o método dos mínimos quadrados para encontrar um operador de transferência discreto que o descreva. Utilizando a estrutura de modelo ARX como exemplo (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011),

Figura 2.4: Estrutura do modelo BJ.



Fonte: (LJUNG, 1987)

tem-se:

$$G_p(q) = \frac{y_u(q)}{u(q)} = \frac{b_0 + b_1q^{-1} + \dots + q_mz^{-m}}{1 + a_1q^{-1} + \dots + a_mz^{-m}}q^{-d} \quad (2.28)$$

de um determinado sistema, em que $u(t)$ é a entrada do processo, $y_u(t)$ é a saída verdadeira, ou seja, sem interferência de perturbação, e d é um valor inteiro que especifica o atraso na resposta do sistema. Escrevendo a equação (2.28) na forma de equação a diferenças, obtém-se:

$$\begin{aligned} y_u(t) + a_1y_u(t-1) + \dots + a_my_u(t-m) \\ = b_0u(t-d) + b_1u(t-d-1) + \dots + b_mu(t-d-m). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Durante o processo de medição, contudo, não se consegue medir $y_u(t)$, mas em vez disso, mede-se um valor $y(t)$ corrompido pela perturbação $n(t)$, isto é:

$$y(t) = y_u(t) + n(t), \quad (2.30)$$

o que nos leva a assumir $y(t)$ como uma estimativa de $y_u(t)$ e os parâmetros que serão identificados como estimativas dos parâmetros reais. A equação (2.29) é, portanto, reescrita para o caso dos parâmetros estimados como:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_my(t-m) \\ - b_0u(t-d) - b_1u(t-d-1) - \dots - b_mu(t-d-m) = e(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que a existência do erro $e(t)$ é uma consequência da utilização de valores estimados da saída em vez dos valores reais. Os termos que se somam a $y(t)$ na equação (2.31) compõem o chamado *preditor de um passo à frente*. Como o nome sugere, estes termos apresentam uma previsão do valor $y(t)$ a partir dos dados de $y(t)$ e $u(t)$ disponíveis até o instante $t - 1$, sendo $e(t)$ a diferença entre o valor previsto e o efetivamente medido. Os dados de entrada e saída e os parâmetros são agrupados, respectivamente, em um vetor $\psi(t)$ e um vetor $\hat{\theta}(t)$, de forma que o erro descrito na equação 2.31 pode ser expresso, de forma concisa, como:

$$e(t) = y(t) - \psi^T(t)\hat{\theta}(t), \quad (2.32)$$

o qual, para o caso utilizado, é linear em seus parâmetros e pode, assim, ser utilizado para estimação de parâmetros por meio de métodos diretos. Para um sistema de ordem m , nota-se por meio da equação 2.28 que existem $2m$ parâmetros e, conseqüentemente, a regressão linear requer a utilização de ao menos $2m$ equações. Porém, um número N muito maior de equações é normalmente utilizado — tornando o sistema hiperdeterminado — para que o efeito da perturbação $n(t)$ seja atenuado.

Os valores da saída, os vetores de dados e os erros podem ser agrupados em matrizes, tal que:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(m+d) \\ y(m+d+1) \\ \vdots \\ y(m+d+N-1) \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi^T(m+d) \\ \psi^T(m+d+1) \\ \vdots \\ \psi^T(m+d+N-1) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e(m+d) \\ e(m+d+1) \\ \dots \\ e(m+d+N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{y} - \Psi\hat{\theta}.$$

Tendo determinado a equação do erro, determina-se a função de custo como sendo a soma do quadrado dos erros obtidos nas N equações, ou, equivalentemente, como a norma do vetor de erros \mathbf{e} :

$$V = \sum_{k=m+d}^{m+d+N-1} e^2(t) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}. \quad (2.34)$$

Aplicando a primeira derivada em relação a $\hat{\theta}$ e igualando-a a zero, encontramos que o $\hat{\theta}$ que minimiza V é:

$$\hat{\theta} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi \mathbf{y} \quad (2.35)$$

e, calculando a segunda derivada, descobrimos que esta é constante e igual a $\Psi^T \Psi$. A partir dessas informações, concluímos que, para que seja possível encontrar um valor $\hat{\theta}$ que minimize a função de custo V , é necessário que $\Psi^T \Psi$ seja definida positiva, ou seja,

$\det(\Psi^T \Psi) > 0$. As condições para que $\Psi^T \Psi$ seja definida positiva estão estreitamente ligadas às características do sinal de entrada $u(t)$ e do sistema.

O método apresentado pode ser modificado para que a estimativa dos parâmetros seja realizada de modo recursivo, o que permite a utilização do método para aplicações *online*, por exemplo. Se a matriz $(\Psi^T \Psi)^{-1}$ for chamada de \mathbf{P} , podemos reescrever a estimativa θ como (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011):

$$\hat{\theta}(t) = \mathbf{P}(t) \Psi(t) \mathbf{y}(t), \quad (2.36)$$

de onde se obtém que:

$$\mathbf{P}^{-1}(t) \hat{\theta}(t) = \Psi(t) \mathbf{y}(t), \quad (2.37)$$

Para encontrar $\hat{\theta}(t+1)$, pode-se usar o fato de $\Psi(t+1)$ ser composto por $\Psi(t)$ acrescido da linha $\psi^T(t+1)$, valendo o mesmo fato, de forma análoga, para $\mathbf{y}(t+1)$. Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t+1) &= \mathbf{P}(t+1) \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \psi^T(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}(t+1) (\Psi(t) \mathbf{y}(t) + \psi^T(t+1) y(t+1)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Utilizando a equação 2.37 para substituir o termo $\Psi(t) \mathbf{y}(t)$ e somando $\hat{\theta}(t)$ e o seu simétrico, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t+1) &= \hat{\theta}(t) + (\mathbf{P}(t+1) \mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{I}) \hat{\theta}(t) \\ &\quad + \mathbf{P}(t+1) \psi(t+1) y(t+1). \end{aligned} \quad (2.39)$$

De modo semelhante, pode-se realizar a substituição de $\Psi(t+1)$ para calcular $\mathbf{P}(t+1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+1) &= \left(\begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \psi(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \psi(t+1) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{P}^{-1}(t) + \psi(t+1) \psi^T(t+1))^{-1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

equação que pode ser utilizada para substituir o valor de $\mathbf{P}^{-1}(t)$ na equação 2.39 e obter:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \mathbf{P}(t+1) \psi(t+1) \left(y(t+1) - \psi(t+1)^T \hat{\theta}(t) \right), \quad (2.41)$$

que é a estimativa do $\hat{\theta}(t+1)$ a partir dos dados fornecidos no instante t e da estimativa anterior $\hat{\theta}(t)$. Ainda é necessário, porém, encontrar a matriz $\mathbf{P}(t+1)$. Em vez de realizar as duas inversões de matrizes indicadas na equação (2.40), utiliza-se do chamado teorema

da inversão de matrizes e chega-se à equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+1) &= \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\psi(t+1) \\ &\quad (\psi^T(t+1)\mathbf{P}(t)(\psi(t+1)+1))^{-1}\psi^T(t+1)\mathbf{P}(t), \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que o termo a ser invertido é um escalar, exigindo-se, portanto, um esforço computacional muito menor quando comparado à situação anterior de duas inversões de matrizes a serem realizadas.

Multiplicando a última equação por $\psi^T(t+1)$, define-se o vetor:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \mathbf{P}(t+1)\psi^T(t+1) \\ &= \frac{1}{(\psi^T(t+1)\mathbf{P}(t)\psi(t+1)+1)^{-1}}\mathbf{P}(t)\psi(t+1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

e, então, ele é substituído nas equações de $\hat{\theta}(t+1)$ e $\mathbf{P}(t+1)$, obtendo:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \gamma(t) \left(y(t+1) - \psi(t+1)^T \hat{\theta}(t) \right) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{P}(t+1) = (\mathbf{I} - \gamma(t)\psi^T(t+1)) \mathbf{P}(t), \quad (2.45)$$

A aplicação do método dos mínimos quadrados recursivo constitui-se, enfim, da utilização sequencial das equações (2.43), (2.44) e (2.45), nesta ordem.

2.4 Polarização e Variância

A identificação de um sistema inclui a tarefa de estipular qual a estrutura de modelo mais apropriada para o caso em questão. Neste ponto, é preciso decidir se um modelo mais simples é suficiente ou a adoção de um modelo mais complexo se faz necessária. Dentre as várias conotações que o termo "complexidade" pode assumir, dentro do contexto de modelagem de processos dinâmicos ele é expresso basicamente pelo número de parâmetros utilizados para descrever tal processo (NELLES, 2001). Esta definição não é completamente rígida, pois, por vezes, um modelo com menos parâmetros pode possuir características que o tornem mais complexos. Todavia, como regra geral, mais parâmetros indicam maior complexidade. A referência (NELLES, 2001) será utilizada para basear a explicação sobre este assunto.

O problema da determinação do número de parâmetros de um modelo encontra-se no chamado *dilema de polarização e variância*. Para explicá-lo, define-se as variáveis: y_u , saída verdadeira; y , saída medida; n , ruído; e \hat{y} , a saída estimada pelo modelo. Estando o ruído descorrelacionado das saídas reais e estimadas, o cálculo do valor esperado

do erro fornece:

$$E\{e^2\} = E\{(y - \hat{y})^2\} = E\{(y_u + n - \hat{y})^2\} = E\{(y_u - \hat{y})^2\} + E\{n^2\}, \quad (2.46)$$

de onde se conclui que uma parcela do erro se deve à própria presença do ruído na medição, de forma que haverá erros ainda que a estimativa seja perfeita. Considerando o erro de estimativa, pode-se decompô-lo ainda:

$$\begin{aligned} E\{(y_u - \hat{y})^2\} &= E\{[y_u - E\{\hat{y}\}] - (\hat{y} - E\{\hat{y}\})\}^2 \\ &= E\{[y_u - E\{\hat{y}\}]^2\} + E\{[(\hat{y} - E\{\hat{y}\})]^2\} \\ &= [y_u - E\{\hat{y}\}]^2 + E\{[(\hat{y} - E\{\hat{y}\})]^2\}, \end{aligned}$$

em que se utiliza os fatos que o primeiro termo do lado direito da equação é determinístico e que $E\{[(\hat{y} - E\{\hat{y}\})]$, que aparece nos termos cruzados, é igual a zero. Os termos dessa expressão podem ser substituídos por palavras da seguinte maneira:

$$(\text{erro do modelo})^2 = (\text{erro de polarização})^2 + \text{erro de variância}. \quad (2.47)$$

O erro de polarização constitui-se do erro existente devido à incapacidade do modelo de representar com exatidão os dados coletados para a realização da estimativa — o chamado *conjunto de dados de treino*. Essa incapacidade ocorre, em sistemas lineares, quando o número de parâmetros escolhido não é compatível com a ordem do sistema. Nesse caso, mesmo a estimativa ótima não eliminará o erro do modelo. Esse caso é conhecido como subajuste (*underfitting*). O erro de polarização diminui até que haja parâmetros suficientes para descrever perfeitamente o processo, ou seja, a estimativa é igual ao valor verdadeiro da saída e o erro de polarização é nulo. No caso de sistemas não-lineares, um modelo linear não será capaz de fornecer uma estimativa perfeita por mais que se aumente o número de parâmetros, o que leva a uma situação de saturação. Conhecimentos prévios a respeito das características físicas não-lineares do sistema, quando incluídos no modelo, podem ajudar a reduzir o erro de polarização nesses casos.

Embora se possa pensar que a solução para a obtenção de uma boa modelagem seja aumentar o número de parâmetros tanto quanto os limites computacionais permitam, é necessário considerar a influência do ruído. Este é responsável por introduzir incertezas na estimativa, gerando o erro de variância. A utilização de um estimador consistente — isto é, cujo erro de estimativa diminua à medida que se aumenta o número de amostras utilizadas no processo de estimação — permitiria a obtenção de erro de variância nulo para um conjunto infinito de dados. Em contra-partida, um modelo com um número

de parâmetros tão grande quanto o número de amostras irá representar não somente o sistema, mas também a realização do ruído inserida nos dados coletados. Esta situação se torna evidente quando se utiliza o chamado *conjunto de dados de teste* para validar o modelo. Um modelo que utilize um número de parâmetros próximo ao número de amostras se ajustará muito bem aos dados de treino, mas não aos dados de teste, pois nestes está introduzida uma outra realização do ruído. Esse caso é conhecido como sobreajuste (*overfitting*).

Dessas informações se conclui que é necessário buscar um compromisso para evitar tanto o subajuste como o sobreajuste. O princípio da parcimônia (LJUNG, 1987) fornece uma boa diretriz para essa decisão quando sugere que, dentre um conjunto de modelos que pode representar com precisão um dado sistema, aquele com menor número de parâmetros é a melhor opção.

2.5 Conclusão

O conceito e alguns aspectos relativos ao processo de identificação de sistemas foram apresentados neste capítulo. Foram apresentadas algumas estruturas de modelos dinâmicos, as quais divergem, por exemplo, com relação à facilidade para sua utilização e também em relação ao nível de verossimilhança com a realidade do sistema físico analisado, principalmente no que se refere à maneira de lidar com a presença do ruído na estimativa. Foi mostrado também que, diante de um conjunto de dados de entrada e saída e tendo selecionado uma estrutura de modelo, é possível estimar os parâmetros do modelo para um determinado sistema com o método dos mínimos quadrados, seja de modo não-recursivo, com uma quantidade suficiente de dados para atenuar o efeito do ruído na estimativa, ou recursivo, o qual é especialmente utilizado em aplicações de identificação *online*.

Por fim, apresentou-se o que são os chamados erros de polarização e de variância, os quais devem ser levados em consideração no momento de decidir o número de parâmetros que se deseja utilizar para modelar um sistema. Enquanto um maior número de parâmetros permite capturar mais dinâmicas do sistema, diminuindo o erro de polarização, uma quantidade excessivamente elevada de parâmetros não atenua o efeito do ruído na estimativa. É necessária, então, atenção à relação de compromisso que essa situação impõe, a qual é resumida pelo princípio da parcimônia.

Capítulo 3

Bases Ortonormais

3.1 Introdução

A identificação de sistemas é uma área em que se têm encontrado importantes aplicações para as funções de base ortonormais. Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica para justificar as vantagens de sua utilização nesse contexto. Porém, pode-se antecipar superficialmente essa motivação por meio de uma outra analogia com a geometria.

Suponha-se que se deseja encontrar uma equação de uma elipse. Nesse caso, deve ser escolhido um sistema de coordenadas de referência. A vantagem da ortogonalidade se mostra no fato de que, quando se deseja calcular uma distância entre dois pontos a partir da norma de um vetor, uma simples relação de Pitágoras permite resolver o problema, enquanto seria necessário utilizar a lei dos cossenos no caso de eixos não ortogonais. Garantida a ortogonalidade, pode-se facilitar ainda mais a expressão da equação por meio da escolha de uma base adequada, nesse caso, que coincida com os eixos da elipse, de forma a eliminar os termos cruzados. Analogamente, a utilização de funções de base ortonormais apropriadas permite uma redução significativa no número de parâmetros necessários para descrever o sistema, além de requerer também um esforço computacional bem menor para a sua identificação (NURGES, 1985) (SILVA, 2011b). Segundo (WAHLBERG, 1999), "a ideia básica é mapear o sistema para um novo domínio de modo que a energia da resposta ao impulso do sistema transformado esteja concentrada na sua fase inicial".

A não ser em um caso muito específico — e improvável — da escolha dos polos das funções ortonormais como sendo iguais aos polos do sistema, a combinação linear destas funções não conseguirá fornecer mais do que uma aproximação do sistema real. Retomando o exemplo da elipse, é como se esta não estivesse no plano cartesiano definido: o máximo que se consegue é uma equação da sua projeção sobre o plano, em vez de uma equação que a defina perfeitamente. Mesmo assim, a redução no número de parâmetros pode ser tão significativa que há uma certa flexibilidade para incertezas na escolha dos

polos (HOF; HEUBERGER; BOKOR, 1995) (CLEMENT, 1982), de forma que constitui parte relevante nesse processo de escolha a inclusão de conhecimentos prévios sobre o sistema. Sugere-se em (NALBANTOGLU et al., 2003) e (HOF; HEUBERGER; BOKOR, 1995), por exemplo, a possibilidade de se realizar um passo preliminar de identificação para se ter uma estimativa inicial dos polos.

A teoria de bases ortonormais apresentada neste capítulo baseia-se principalmente em (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005), (HOF et al., 2000) e (WAHLBERG, 1999). Serão definidas e apresentadas as propriedades dos chamados filtros passa-tudo e sua importância dentro do contexto de bases ortonormais racionais, serão descritos dois métodos de obtenção de funções de base ortonormais e serão apresentados os tipos mais comuns de filtros desse tipo. Por fim, serão evidenciadas questões importantes para se considerar quando se selecionam funções de base ortonormais para a identificação de sistemas e apresentados alguns exemplos de aplicações.

Segue-se também a notação utilizada em (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005) para diferenciar entidades não-ortonormais das ortonormais: as entidades não-ortonormais são indicadas por meio de uma barra superior acima da variável que a denomina, enquanto as entidades ortonormais não são dotadas dessa barra.

3.2 Conceitos

Funções de base são chamadas ortonormais quando atendem, como o nome sugere, a dois requisitos: que elas sejam ortogonais e que suas normas sejam unitárias. São dadas, portanto, algumas definições que se fazem necessárias para especificar o que isso significa nesse contexto.

Escolhendo-se duas funções $X(z)$ e $Y(z)$, $z \in \mathbb{C}$ (plano complexo) em $\mathcal{H}_2(\mathbb{E})$ — espaço Hardy de funções integráveis no círculo unitário \mathbb{T} e analíticas no seu exterior \mathbb{E} —, o *produto interno* entre elas é definido como:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) Y^*(e^{i\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} X(z) Y^*(1/z^*) \frac{dz}{z}, \quad (3.1)$$

em que $*$ indica o complexo conjugado. Nos casos em que o produto se dá entre matrizes de funções $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{H}_2^{n \times p}(\mathbb{E})$ e $\mathbf{Y}(z) \in \mathcal{H}_2^{m \times p}(\mathbb{E})$, se usa o *Gramiano cruzado* ou *produto externo*:

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} \mathbf{X}(z) \mathbf{Y}^*(1/z^*) \frac{dz}{z}. \quad (3.2)$$

O uso de $*$ nesse caso indica a transposição complexa conjugada, ou transposição

Hermitiana:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}.$$

sendo a transposição simples, não-conjugada, representada por A^T . Vale notar que a integral é realizada sobre o círculo unitário, implicando que $|z| = 1$ e $1/z^* = z$; e, para os casos em que uma função $Y(z)$, por exemplo, tem coeficientes reais, $Y^*(1/z^*) = Y^T(1/z)$.

Definido o conceito de produto interno, pode-se então fornecer a definição de norma. Como em outros contextos, existem vários tipos de norma, mas quando não se especifica a qual tipo se faz referência, normalmente se trata da norma 2. A *norma* de uma dada função $X(z) \in \mathcal{H}_2(\mathbb{E})$ é definida como:

$$\|X\|_2 = \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}. \quad (3.3)$$

Agora pode-se fornecer uma definição matemática de *ortonormalidade*. Duas funções $X_1(z)$ e $X_2(z)$ são consideradas *ortonormais* quando elas são ortogonais e têm norma unitária, ou seja:

$$\langle X, Y \rangle = 0, \quad \|X\| = \|Y\| = 1. \quad (3.4)$$

Um exemplo simples de funções ortonormais é dado à medida que se define a resposta ao impulso de um sistema. Em um sistema linear discreto no tempo definido como:

$$y(t) = G(q)u(t), \quad (3.5)$$

$u(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é o sinal de saída, $G(q)$ é operador de transferência da entrada para a saída e q é o operador de deslocamento para frente no tempo — correspondentemente, q^{-1} é operador de atraso no tempo. A *resposta ao impulso* de sistemas estáveis é dada por:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k} u(t), \quad G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k}, \quad (3.6)$$

em que os coeficientes g_k são chamados de *parâmetros de Markov* do sistema. Ao operador de transferência se associa, no domínio da frequência, a *função de transferência*:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}, \quad (3.7)$$

sendo a resposta em frequência do sistema dada por $G(e^{i\omega})$, $\omega \in [-\pi, \pi]$. Para sistemas multivariáveis, $G(z)$ será uma matriz de funções de transferência.

Ao analisarmos a função de transferência $G(z)$, verificamos, com o auxílio do Teorema

do Resíduo, que as funções z^{-k} , $k = 1, 2, \dots, \infty$, que a compõem são ortonormais, isto é:

$$\langle z^{-k}, z^{-l} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} z^{-k} z^l \frac{dz}{z} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}. \quad (3.8)$$

A função de transferência $G(z)$ também pode ser obtida a partir da representação em espaço de estados de um sistema. A um dado sistema:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

associa-se uma função de transferência igual a:

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B. \quad (3.9)$$

Por fim, define-se o que venha a ser *convergência* e *completude*. Sendo conhecidos os parâmetros de Markov de uma função, esta é dita *convergente* se for verdade que:

$$\|G\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2} < \infty, \quad (3.10)$$

ou seja, se a soma infinita tiver um resultado finito. O conceito de *completude* refere-se à possibilidade de se tornar o erro entre o valor exato e o aproximado da resposta em frequência tão pequeno quanto se deseje por meio da utilização de mais parâmetros.

3.3 Métodos de Obtenção de Bases Ortonormais

3.3.1 Procedimento de Gram-Schmidt

O *procedimento de Gram-Schmidt* é um método sistemático de obter funções de base ortonormais a partir de bases não-ortonormais. A ideia explorada neste procedimento pode, novamente, ser mais facilmente compreendida por meio de uma analogia com a geometria. Para definir um espaço n -dimensional, são necessários n vetores, os quais não são necessariamente ortogonais. Pode-se determinar um vetor \mathbf{v}_1 a partir da normalização de $\bar{\mathbf{v}}_1$, ou seja $\mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{v}}_1 / \|\bar{\mathbf{v}}_1\|$, o qual tem norma unitária. Sabe-se que é ortogonal o vetor que leva da extremidade da projeção de um vetor $\bar{\mathbf{v}}_2$ sobre outro vetor \mathbf{v}_1 até a extremidade do vetor $\bar{\mathbf{v}}_2$. Logo, pode-se obter um vetor \mathbf{k}_2 ortogonal a \mathbf{v}_1 por meio da subtração de $\bar{\mathbf{v}}_2$ pela sua projeção sobre \mathbf{v}_1 . Este último vetor \mathbf{k}_2 também pode ser normalizado, obtendo-se então $\mathbf{v}_2 = \mathbf{k}_2 / \|\mathbf{k}_2\|$. Se se deseja obter outros vetores unitários ortogonais a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2

em outras dimensões, basta repetir o procedimento para cada novo vetor utilizado.

O mesmo processo se aplica no caso em que se utilizam espaços de funções. Nesse caso, considerando que se tenha duas funções linearmente independentes $\bar{F}_1(z)$ e $\bar{F}_2(z)$ que formam uma base em $\mathbb{H}_2(E)$, determina-se que um dos vetores da nova base de funções ortonormais procurada consistirá no vetor $K_1(z) = \bar{F}_1(z)$ normalizado, ou seja:

$$F_1(z) = \frac{K_1(z)}{\|K_1(z)\|}. \quad (3.11)$$

Definindo uma função $\|K_2(z)\|$ como sendo a subtração de $\bar{F}_2(z)$ pela sua projeção sobre $F_1(z)$, obtida por meio do produto interno, tem-se:

$$K_2(z) = \bar{F}_2(z) - \langle \bar{F}_2(z), F_1(z) \rangle,$$

a qual é ortogonal a $F_1(z)$. Portanto, para obter uma função $F_2(z)$ ortonormal a $F_1(z)$, basta dividir $K_2(z)$ pela sua norma,

$$F_2(z) = \frac{K_2(z)}{\|K_2(z)\|}. \quad (3.12)$$

No caso de haver outras funções $\bar{F}_k(z)$, $k = 3, 4, \dots, n$, o procedimento pode ser repetido para cada uma delas, de modo a se obter as funções $F_k(z)$, $k = 3, 4, \dots, n$.

3.3.2 Realização em Espaço de Estados Balanceada na Entrada

Utilizando a representação em espaço de estados, tem-se um outro modo de derivar uma base ortonormal para um dado espaço, a qual será chamada *realização em espaço de estados balanceada na entrada*. Dada uma base formada pelas funções $\{\bar{F}_1(z) \dots \bar{F}_n(z)\}$, determina-se uma representação em espaço de estados tal que:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \quad (3.13)$$

tenha funções de transferência da entrada para os estados dadas por:

$$\bar{V}(z) = [\bar{F}_1(z) \dots \bar{F}_n(z)]^T = (zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}. \quad (3.14)$$

O passo seguinte consiste em calcular a *matriz de covariância dos estados*, ou *Gramiano de controlabilidade* \bar{P} , por meio da resolução da equação de Lyapunov:

$$\bar{P} = \bar{A}\bar{P}\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T, \quad (3.15)$$

para a qual se deve encontrar uma — pois existem várias possibilidades — matriz T que seja raiz quadrada de \bar{P}^{-1} , de modo que $T\bar{P}T^T = I$. Esta matriz T deve, então, ser usada para realizar uma transformação de estados $x(t) = T\bar{x}(t)$, tal que se obtenha como consequência a representação:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = T\bar{A}T^{-1}, B = T\bar{B}, \quad (3.16)$$

com funções de transferência da entrada para os estados dadas por:

$$V(z) = [F_1(z) \ \dots \ F_n(z)]^T = (zI - A)^{-1}B, \quad (3.17)$$

as quais representam uma base ortonormal para o espaço definido por $\{\bar{F}_1(z) \ \dots \ \bar{F}_n(z)\}$. Para essa nova base, o Gramiano de controlabilidade é a matriz identidade.

3.4 Filtros Passa-tudo

O *filtro passa-tudo* $G_b(z)$ é dado, na sua forma mais geral em que se admite a utilização de múltiplos polos e zeros possivelmente complexos, a qual pode ser desenvolvida a partir do procedimento de Gram-Schmidt, por:

$$H(z) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1 - \xi_i^* z}{z - \xi_i} \right], \quad (3.18)$$

cuja representação nessa forma de produtório é conhecida como *produto de Blaschke*. Como o próprio nome sugere, funções desse tipo apresentam resposta em frequência $|H(e^{i\omega})| = 1 \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}$. Além disso, satisfazem a condição:

$$H(z)H^*(1/z^*) = 1 \quad (3.19)$$

e apresentam a propriedade de projeção.

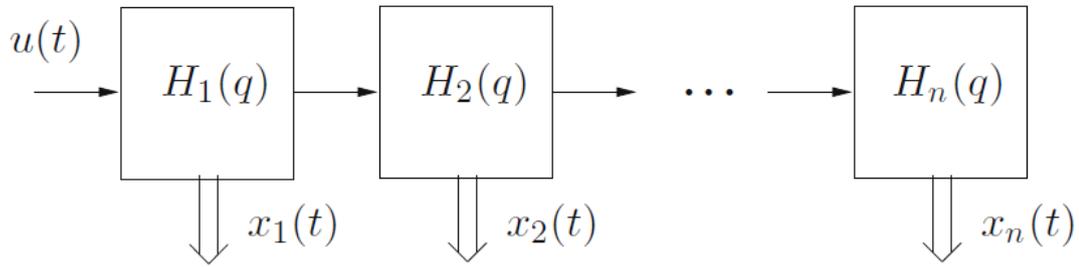
Filtros passa-tudo são identificados como ortogonais se possuem uma representação em espaço de estados por matrizes (A, B, C, D) que seja ortogonal, ou seja, que satisfaça a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = I. \quad (3.20)$$

Tal representação apresenta Gramiano de controlabilidade igual à matriz identidade. Esta característica é válida também para os casos multivariáveis.

A propriedade passa-tudo e a ortogonalidade se mantêm quando filtros passa-tudo ortogonais são conectados, seja essa conexão em cascata (figura 3.1) ou de realimentação.

Figura 3.1: Redes de filtros passa-tudo em cascata.



Fonte: (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005)

3.5 Redes de filtros passa-tudo ortogonais

Algumas redes de filtros passa-tudo — isto é, filtros passa-tudo conectados em cascata — são mais comumente utilizadas. São estas:

- Redes de Resposta ao Impulso Finita (FIR): uma sequência de m atrasos discretos $H_i(z) = z^{-1}$ que formam $H(z) = z^{-m}$. O vetor de estados é definido por:

$$x(t) = [u(t-1)u(t-2)\dots u(t-n)]^T \quad (3.21)$$

e as matrizes de estado da representação ortogonal da rede são:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1), \quad D = 0. \quad (3.22)$$

- Redes de Laguerre: formadas por n filtros passa-tudo de primeira ordem

$$H_i(z) = \frac{1-az}{z-a}, \quad -1 < a < 1, \quad (3.23)$$

os quais têm representação ortogonal em espaço de estados da forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

As correspondentes funções de transferência da entrada para os estados são:

$$F_k(z) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{z-a} \left[\frac{1-az}{z-a} \right]^{k-1}. \quad (3.25)$$

- Redes de Kautz a dois parâmetros: formadas por filtros de segunda ordem em cascata:

$$H_i(z) = \frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c}, \quad -1 < b < 1, -1 < c < 1, \quad (3.26)$$

com representação ortogonal em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} b & c\sqrt{1-b^2} & \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2} \\ \sqrt{1-b^2} & -bc & -b\sqrt{1-c^2} \\ \hline 0 & \sqrt{1-c^2} & -c \end{array} \right) \quad (3.27)$$

As correspondentes funções de transferência da entrada para os estados são:

$$\begin{aligned} F_{2k-1}(z) &= \frac{\sqrt{1-c^2}(z-b)}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{k-1} \\ F_{2k}(z) &= \frac{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-b^2}}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

- Funções de base ortonormais generalizadas (GOBF): como nos casos anteriores, a estrutura corresponde a filtros passa-tudo em cascata, com a diferença de que, para as funções de base ortonormais generalizadas, os filtros base têm ordem n_b . É possível, porém, fatorá-los em filtros de primeira ordem com polos reais (como nas redes de Laguerre) ou de segunda ordem com pares reais ou complexos conjugados (como nas redes de Kautz).
- Funções de Takenaka-Malmquist: o caso mais geral em que todos os filtros passa-tudo podem ter polos distintos, sendo os filtros de ordem um ou dois. As funções de transferência da entrada para os estados para esse caso são:

$$F_k(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_k|^2}}{z-\xi_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left[\frac{1-\xi_i^* z}{z-\xi_i} \right] \quad (3.29)$$

3.6 Funções de Base Ortonormais em Tempo Contínuo

O raciocínio sobre as funções de base ortonormais desenvolvido até este ponto limitou-se à abordagem no tempo discreto, mas pode ser seguido de modo semelhante se a abordagem contínua é utilizada. A seguir serão apresentadas, de modo sucinto, algumas equações relacionadas às funções de base ortonormais no tempo contínuo correspondentes às equações mostradas anteriormente para o caso discreto. Os polos ξ deverão ser entendidos como valores complexos na forma $\xi = -\alpha \pm \beta i$, $\alpha, \beta > 0$, sendo o valor absoluto dado por $\gamma = |\xi| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Escolhendo-se duas funções $X(s)$ e $Y(s)$, $s \in \mathbb{C}$ (plano complexo) em $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ — espaço Hardy de funções integráveis no eixo imaginário e analíticas no semi-plano direito do plano complexo \mathbb{C}^+ —, o *produto interno* entre elas é definido como:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(i\omega)Y^*(i\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}^+} X(s)Y^*(-s^*)ds. \quad (3.30)$$

Nos casos em que o produto se dá entre matrizes de funções $\mathbf{X}(s) \in \mathcal{H}_2^{n \times p}(\mathbb{C}^+)$ e $\mathbf{Y}(s) \in \mathcal{H}_2^{m \times p}(\mathbb{C}^+)$, se usa o *produto externo* é dado por:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}^+} \mathbf{X}(s)\mathbf{Y}^*(-s^*)ds. \quad (3.31)$$

A integral nesse caso é realizada sobre o eixo imaginário, implicando que $Re(s) = 0$ e $-s^* = s$; e, para os casos em que uma função $Y(s)$, por exemplo, tem coeficientes reais, $Y^*(-s^*) = Y^T(-s)$. Os conceitos de convergência e completude, assim como os procedimentos para obtenção de funções de base ortonormais a partir de funções de base não-ortonormais, se mantêm inalterados.

Quanto aos filtros passa-tudo, estes têm como característica a forma em produto de Blaschke:

$$H(s) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{s + \xi_i^*}{s - \xi_i} \right], \quad (3.32)$$

cuja resposta em frequência é dada por $|H(i\omega)| = 1 \forall \omega \in \mathbb{R}$, e satisfazem a condição:

$$H(s)H^*(-s^*) = 1. \quad (3.33)$$

Já as redes de filtros passa-tudo são definidas da seguinte maneira:

- Redes de Laguerre: formadas por n filtros passa-tudo de primeira ordem

$$H_i(s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (3.34)$$

os quais têm representação ortogonal em espaço de estados da forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \sqrt{2\alpha} \\ -\sqrt{2\alpha} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

As correspondentes funções de transferência da entrada para os estados são:

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s + \alpha} \left(\frac{s - \alpha}{s + \alpha} \right)^{k-1}. \quad (3.36)$$

- Redes de Kautz a dois parâmetros: formadas por filtros de segunda ordem em cascata. Sendo os polos dados por $\xi = -\alpha \pm \beta i$:

$$H_i(s) = \frac{s^2 - 2\alpha s + \gamma^2}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2}, \quad \alpha > 0, \quad (3.37)$$

com representação ortogonal em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -\alpha & \gamma - \alpha & \sqrt{2\alpha} \\ -(\gamma + \alpha) & -\alpha & \sqrt{2\alpha} \\ \hline -\sqrt{2\alpha} & -\sqrt{2\alpha} & 1 \end{array} \right) \quad (3.38)$$

As correspondentes funções de transferência da entrada para os estados são:

$$\begin{aligned} F_{2k-1}(z) &= \frac{\sqrt{2\alpha}(s + \gamma)}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2} \left(\frac{s^2 - 2\alpha s + \gamma^2}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2} \right)^{k-1} \\ F_{2k}(z) &= \frac{\sqrt{2\alpha}(s - \gamma)}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2} \left(\frac{s^2 - 2\alpha s + \gamma^2}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2} \right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

- Funções de Takenaka-Malmquist: o caso mais geral em que todos os filtros passado podem ter polos distintos, sendo os filtros de ordem um ou dois. As funções de transferência da entrada para os estados para esse caso são:

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2\alpha_k}}{s + \xi_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left[\frac{s - \xi_i^*}{s + \xi_i} \right]. \quad (3.40)$$

3.7 Estimação de Parâmetros com Funções de Base Ortonormais

A propriedade de ortonormalidade das funções de base ortonormais (OBFs, do inglês *Orthonormal Basis Functions*) oferece uma possibilidade interessante: qualquer função pode ser decomposta como uma combinação linear de OBFs ponderadas e os pesos, ou coeficientes, podem ser determinados por meio de projeção ortogonal da resposta ao impulso sobre cada OBF independentemente. Considerando um sistema linear invariante no tempo (LTI, do inglês *Linear Time-Invariant*), representado pelo operador de transferência $G(q)$, este pode ser escrito como uma expansão em OBFs infinita:

$$G_0(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(q), \quad (3.41)$$

em que os parâmetros c_k são dados por:

$$c_k = \langle G_0, F_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(t) f_k(t), \quad (3.42)$$

sendo $g_0(t)$ a resposta ao impulso discreta de $G_0(q)$ e $f_k(t)$ a resposta ao impulso discreta de $F_k(q)$, ambas iguais à transformada Z inversa dos seus equivalentes no domínio da frequência.

Em aplicações reais, um número finito de funções deve ser usado e, então, obtém-se:

$$G_n(q) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(q). \quad (3.43)$$

Dentro do contexto de identificação de sistemas com uma estrutura de modelo OBF-FIR, os parâmetros são desconhecidos, levando à seguinte descrição:

$$G(q; \theta) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(q), \quad (3.44)$$

com o vetor de parâmetros θ como uma variável do modelo dada por:

$$\theta = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n. \quad (3.45)$$

Em vez de valores de entrada atrasados, o vetor de dados é composto pelo vetor de entrada filtrado por cada uma das OBFs. É importante lembrar que as OBFs têm resposta ao impulso infinitas por natureza, fato que requer atenção a alguns detalhes que serão tratados com mais atenção na próxima seção. A partir dos pontos de dados coletados

$\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$, o erro de saída predito é então computado por meio de:

$$\varepsilon(t; \theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (3.46)$$

$$\varphi(t) = \Gamma_n(q)u(t), \quad \Gamma_n(q) = [F_1(q) \ F_2(q) \ \dots \ F_n(q)]^T.$$

O vetor de parâmetros θ é então estimado por meio da estratégia de mínimos quadrados, em que a soma do quadrado dos erros preditos é usada como função de custo do seguinte problema de otimização:

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2. \quad (3.47)$$

Por meio de uma regressão linear simples, um sistema de equações normais tais como:

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right] \cdot \hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (3.48)$$

$$\hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t), \quad (3.49)$$

gera a solução ótima, contanto que a inversa apresentada exista.

Quanto à consistência da estimativa, se o sistema "verdadeiro" $G_0 \in \mathcal{G}$ e o sinal de entrada é persistentemente excitante (BAI; SASTRY, 1985) de ordem suficientemente alta, então $G(q, \hat{\theta}_N)$ terá uma estimativa consistente de G_0 , em que \mathcal{G} é um conjunto de modelos formados por expansões em séries finitas em $\{F_k(q)\}$ (HOF et al., 2000).

3.8 Seleção de Bases Ortonormais para Identificação de Sistemas

Dentro de um contexto prático de identificação de sistemas, é necessário lidar com a limitação do comprimento finito da sequência de dados disponível. O uso de sequências relativamente curtas levanta preocupações como as relacionadas à influência possivelmente não desprezível das condições iniciais, ao modo de lidar com os casos em que o sistema apresenta atrasos e a captura do ganho estático (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

A respeito da localização dos polos das funções ortonormais escolhidas, sabe-se que quanto mais próximos estes estiverem dos polos "verdadeiros" do sistema, melhor, pois menos funções serão necessárias para a obtenção de uma boa aproximação. Se isso não ocorre, a utilização de mais funções permite, em teoria, a redução do erro de aproxima-

ção. Esse acréscimo de funções à base ortonormal, contudo, é limitada. Tomando como exemplo as funções de Laguerre em tempo discreto, quando $\omega - > 0$, é válida a seguinte aproximação:

$$F_k(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{e^{i\omega} - a} \left[\frac{1 - ae^{i\omega}}{e^{i\omega} - a} \right]^{k-1} \approx \frac{\sqrt{1-a^2}}{e^{i\omega} - a} e^{-T_a i\omega(k-1)}, \quad T_a = \frac{1+a}{1-a} \quad (3.50)$$

Ou seja, quando $\omega - > 0$, as funções de Laguerre podem ser aproximadas por sistemas de primeira ordem com atraso aproximado de $(k-1)T_a$. Isto quer dizer que, à medida que a ordem da função aumenta, a distribuição da energia do sistema é deslocada para instantes posteriores, deixando, assim, de concentrar-se nos primeiros instantes. Uma característica das funções de base ortonormais é que a sua energia é igual a 1. Quando se lida com uma janela de tempo finita, essa característica se perde a partir de um certo valor de $k-1$ (figura 3.2), conduzindo a uma condição de mal condicionamento. O problema imposto por essa situação se torna mais evidente quando o sistema possui polos lentos, implicando a escolha de um valor maior de a e, conseqüentemente, a obtenção de valores mais elevados de T_a .

A utilização de funções com mais graus de liberdade (por exemplo, Kautz, GOBF, Tanekana-Malmquist) confere maior flexibilidade para que se possa melhorar a aproximação dos polos verdadeiros, principalmente nos casos em que estes estão relativamente distantes, diminuindo assim, o erro de polarização. Vale ressaltar também que a escolha dos polos se reflete também na variância da estimativa. Sabendo que n é a ordem do modelo e N o número de pontos de dados utilizado, tem-se:

$$\text{Var}\{G(e^{i\omega}, \hat{\theta}_N)\} \rightarrow \frac{1}{N} \frac{\Phi_v(e^{i\omega})}{\Phi_u(e^{i\omega})} \sum_{k=1}^n |F_k(e^{i\omega})|^2, \quad (3.51)$$

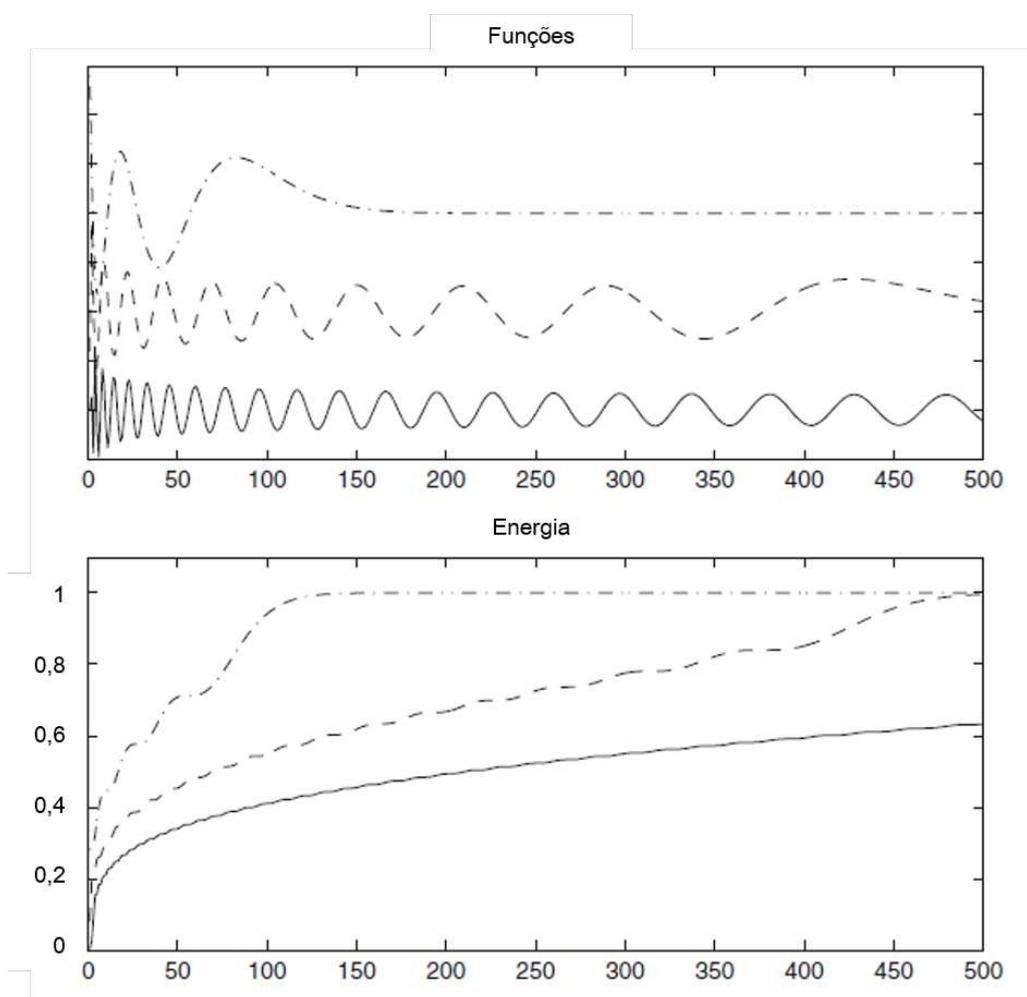
de onde se conclui que as funções de base ortonormais constituem uma ponderação na frequência da variância da estimativa.

A questão das condições iniciais é importante porque, no caso das funções de base ortonormais, o seu horizonte de energia é infinito, de modo que toda medição:

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(q)u(t) + e(t)$$

terá sofrido influência de todas as entradas desde $t = -\infty$. Logo, é necessário avaliar se esta influência é desprezível. Novamente, essa questão se torna mais importante na presença de polos lentos. Uma estratégia para se incluir as condições iniciais na identificação sem comprometer a propriedade do modelo de linearidade nos parâmetros consiste em incluí-las na lista de parâmetros a serem identificados. Claramente, tal ação repercute em

Figura 3.2: Funções de Laguerre com um polo em $a = 0,92$ e número de funções igual a 5 (tracejado e pontilhado), 20 (pontilhado) e 60 (cheio). O gráfico acima mostra a resposta ao impulso das funções (com eixo horizontal deslocado para facilitar a visualização) e o gráfico abaixo mostra a energia acumulada das funções correspondentes.



Fonte: (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005)

um aumento da ordem do sistema.

Para os casos em que os dados não contêm informação em baixa frequência suficiente, podem-se acrescentar conhecimentos prévios sobre o ganho estático do sistema por meio da inclusão de restrições ao problema dos mínimos quadrados. Essa estratégia, que pode assumir uma característica mais rígida ou mais flexível quanto à conformidade com o valor pré-estabelecido do ganho estático, também permite que se mantenha a estrutura linear nos parâmetros.

Ainda de maneira semelhante — sem abrir mão da linearidade nos parâmetros —, para os casos em que o sistema possui atraso mas este não é bem conhecido, pode-se estimá-lo, por meio de uma identificação com abordagem discreta, utilizando algumas funções $F_i(z) = z^{-i}$, $i = 1, \dots, k$, de modo que os parâmetros associados c_1, \dots, c_k possam assumir valor zero.

Por fim, vale dizer que o processo de escolha dos polos pode ser realizado de modo iterativo. Partindo de uma situação de total desconhecimento a respeito dos polos verdadeiros do sistema, é possível selecionar uma base de Laguerre com $a = 0$, por exemplo, e identificar o sistema; dessa identificação se obterá uma estimativa melhor dos polos do sistema por meio de uma redução de modelos. Não há garantia de convergência, porém, para muitos casos, o polo converge para a escolha ótima com a repetição deste processo.

3.9 Comparações entre Diferentes Métodos

Particularmente, alguns processos apresentam dificuldades maiores para a realização de uma boa estimativa, tais como atrasos, polos múltiplos e zeros. Polos distribuídos esparsamente no plano complexo também representam uma dificuldade maior pelo fato de requererem que uma ampla faixa de frequências seja analisada, o que pode significar a necessidade de um aumento no número de parâmetros.

Nesta seção, apresenta-se uma análise comparativa entre cinco métodos de identificação: um baseado em funções de primeira ordem com atraso, três baseados em funções de base ortonormais e um baseado em filtros de frequência amostrados. Simulações serão utilizadas para elucidar como certos fatores — tais como a escolha dos polos das funções de base, o número de funções utilizadas e o sinal de entrada utilizado — influenciam na identificação de uma gama de processos com características distintas, sendo o conhecimento prévio existente acerca dos processos apenas a constante de tempo aproximada e o tempo de estabelecimento.

3.9.1 Simulações Numéricas

As funções de base utilizadas neste estudo foram:

- Funções de primeira ordem com atraso: os sistemas são modelados por um somatório de FOPTDs com polos diversos, distribuídos logaritmicamente ao longo do eixo real (SHEN et al., 2017), no caso deste trabalho, com fator de multiplicação entre polos consecutivos igual a 2. O método de identificação é semelhante ao usado no caso das OBFs, com o destaque para a inclusão do atraso na estimativa. Este não é calculado por meio do método dos mínimos quadrados, mas é calculado por meio de uma varredura dentro de um intervalo pré-especificado. Algo importante de se ressaltar sobre essa base é que ela é formada por funções não ortonormais, de modo que atenção especial será dada ao número de condicionamento das matrizes de correlação dos mínimos quadrados.
- Funções de base ortonormais com polos distribuídos: a ideia de se distribuir os polos utilizada em (SHEN et al., 2017) já havia sido explorada em (YONEYA; ONO, 2006), em que se define uma função de custo como uma composição de funções de custo cujos erros são calculados para aproximações de Laguerre com polos diferentes, também distribuídos logaritmicamente. Neste trabalho, apresenta-se uma adaptação desse método de identificação, pois, em vez dessa função de custo composta, são utilizadas funções de Takenaka-Malmquist com polos igualmente distribuídos logaritmicamente, com fator de multiplicação entre polos igual a 2. O desempenho numérico dessas funções será diretamente comparado com o das FOPTDs.
- Funções de Legendre: também são funções ortonormais com polos reais distribuídos, porém a distribuição dos polos segue uma outra lei de formação — no caso discreto, $\xi_k = (2 - \lambda(2k+1))/(2 + \lambda(2k+1))$, sendo λ um parâmetro pré-determinado chamado de polo de Legendre (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).
- Funções de Laguerre com estimativa de polo ótimo com atraso: as funções de base ortonormais, apresentadas neste capítulo, podem ter seu desempenho melhorado se os polos escolhidos para gerarem as funções estiverem próximos aos polos "verdadeiros" do sistema identificado. A seleção de tais polos será analisada com mais detalhes no capítulo seguinte, porém, pode-se adiantar que, para um certo número de polos utilizados, existe um conjunto ótimo que reduz os erros de aproximação ao mínimo possível. Neste caso, serão utilizadas funções de Laguerre cujo único polo, repetido nos casos de ordem maior que 1, é escolhido de acordo com certos critérios de otimalidade que permitem defini-lo (CLOWES, 1965) (WANG; CLUETT, 1994).
- Filtros de frequências amostradas (FSF): no modelo FSF (do inglês *Frequency Sampling Filters*), os parâmetros correspondem à resposta em frequência discreta do processo — de modo que também se trata de um modelo não-paramétrico — e os

vetores de regressão são obtidos passando o sinal de entrada por um conjunto de filtros passa-faixa estreitos. O modelo FSF (WANG; CLUETT, 1997) se trata de uma transformação linear do modelo FIR e compartilha portanto, de algumas semelhanças. A principal delas seria o fato de que ambos os modelos requerem apenas o tempo de acomodação T_s do sinal de saída como informação *a priori*. Para evitar a utilização de um número desnecessário de parâmetros e também para diminuir a influência do ruído na estimativa, que costuma ser mais relevante em frequências mais elevadas, procura-se determinar uma ordem efetiva do modelo, que está associada à frequência a partir da qual a contribuição à resposta em frequência se torna pouco significativa.

Os cinco métodos de identificação foram aplicados a dados extraídos por meio da simulação de nove processos. A seguinte nomenclatura será utilizada: FIR-FOPTD, para referir-se aos modelos baseados em funções de primeira ordem com atraso; GOBF-Log, para referir-se a modelos GOBF com polos reais distribuídos logaritmicamente; Legendre, para referir-se aos modelos que utilizam funções de Legendre; Laguerre, para referir-se aos modelos que utilizam funções de Laguerre com polo ótimo; e FSF, para referir-se aos modelos baseados em filtros de frequências amostradas. A identificação com OBFs foi realizada usando a abordagem discreta no tempo. O último processo apresenta um sobressinal devido ao efeito dos zeros no semiplano esquerdo. Os quatro últimos processos foram adaptados de (SHEN et al., 2017) e os cinco primeiros, mais rápidos, foram extraídos de (SKOGESTAD, 2003). Estes processos foram escolhidos para proporcionar a verificação do desempenho de cada método diante de uma variedade de dinâmicas. As funções de transferência dos processos simulados são:

- Processo 1: $G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)}$
- Processo 2: $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$
- Processo 3: $G(s) = \frac{e^{-2,5s}}{1,5s+1}$
- Processo 4: $G(s) = \frac{2(15s+1)}{(20s+1)(s+1)(0,1s+1)^2}$
- Processo 5: $G(s) = \frac{-2s+1}{(s+1)^3}$
- Processo 6: $G(s) = \frac{2(-16704s^3 - 247s^2 + 50s + 1)}{(116s+1)(33s+1)(25s+1)(18s+1)(0,1s+1)}$
- Processo 7: $G(s) = \frac{400s^2 + 62s + 1}{((24s+1)(82s+1)(100s+1))}$

- Processo 8: $G(s) = \frac{(60s + 1)(30s + 1)}{(24s + 1)(82s + 1)(100s + 1)}$
- Processo 9: $G(s) = \frac{(160s + 3)(45s + 1)(201s + 1)}{(110s + 1)(53s + 1)(30s + 1)(84s + 1)}$

A simulação de cada processo foi realizada considerando que duas informações *a priori* sejam conhecidas sobre o sistema: o tempo de estabelecimento e a constante de tempo dominante T . Foram realizadas então simulações com um tempo de amostragem $T_s = 0,05T$. À saída é somado um ruído branco com desvio padrão de $\sigma = 0,02$. No caso do processo 4, que apresenta uma variação acentuada na resposta, começando com um rápido crescimento e seguindo com uma evolução mais lenta em direção ao estado estacionário, a constante de tempo foi estimada a partir do trecho inicial do experimento.

Quanto às configurações da aplicação de cada método:

- Tanto as FOPTDs quanto as GOBF-Log foram utilizadas com os mesmos três grupos de cinco polos, cada um cobrindo um intervalo distinto do semi-eixo negativo do plano s . Os valores dos polos são progressões geométricas de razão 2, de modo que cada uma delas pode ser caracterizada pelo polo inicial τ_1 . O valor usado para τ_1 nos três conjuntos foi dado em função da constante de tempo T estimada: $\tau_1 = 0,05T$, $\tau_1 = 0,1T$ e $\tau_1 = 0,5T$. O aumento no valor de τ_1 implica que os polos das funções de estimação serão mais rápidos. Como a identificação ocorre no domínio do tempo discreto, os polos $\tau_k, k = 1 : 5$, que são definidos no domínio do tempo contínuo, são convertidos por meio da relação $\tau_{k,discreto} = e^{-\tau_{k,contnuo}Ts}$;
- A aplicação das funções de Legendre também foi feita com três conjuntos de cinco polos, caracterizados pelo valor λ do polo de Legendre: $\lambda = 0,01$, $\lambda = 0,05$ e $\lambda = 0,18$. O aumento no valor de λ também implica que os polos das funções de base serão mais rápidos;
- No caso da identificação com funções de Laguerre com polo ótimo, foram realizadas estimativas com três números N de funções: $N = 3$, $N = 8$ e $N = 12$;
- A identificação com FSFs também foi realizada com três valores n de ordem efetiva de modelo: $n = 15$, $n = 41$ e $n = 131$.

Alguns dos métodos apresentados dependem da satisfação de algum critério otimização. Mais especificamente, a identificação com funções de Laguerre depende da escolha do polo ótimo, e a identificação com FOPTDs depende da escolha do atraso L que minimiza o erro. Apesar de computacionalmente caro, o método chamado *gridding* é por vezes utilizado, por questões de praticidade e simplicidade, para resolver determinados problemas de otimização escapando de mínimos locais (HIDAYAT; MEDVEDEV, 2012a)

(SHEN et al., 2017). Portanto, os dois problemas de minimização apresentados foram resolvidos com base na escolha de um intervalo de busca pré-fixado e na avaliação da função de custo para um determinado número de pontos nesse intervalo. No caso da escolha do atraso das FOPTDs, a soma dos erros quadrados foi avaliada para todos os valores de atraso no intervalo e foi escolhido o que produzia a menor soma. Já na escolha do polo de Laguerre ótimo, foram buscados os pontos que satisfaziam a condição de otimalidade — que, vale lembrar, será apresentada no capítulo 4 — e, dentre eles, o que gerava a menor soma dos erros quadrados.

O método de estimação com FOPTDs apresenta uma vantagem em relação aos métodos com funções de base ortonormais: por realizar uma estimativa com funções de primeira ordem com atraso, caso o processo identificado possua de fato um atraso, a escolha do valor de L que torna o erro mínimo levará em conta esse atraso real. Quando se utilizam funções de base ortonormais, é necessário incluir um número maior de funções para que se obtenha uma estimativa equivalente, o que automaticamente remete ao problema do aumento da variância devido ao ruído. Pelo fato de a estratégia de verificação do atraso mais adequado também poder ser utilizada na identificação com OBFs, esta foi realizada incluindo restrições rígidas de atraso, de forma que fosse levado em conta o mesmo atraso L escolhido para a identificação com FOPTDs.

Na tabela 3.1 pode-se ver um resumo das configurações utilizadas para cada método.

Tabela 3.1: Configurações escolhidas na identificação dos processos com cada um dos métodos utilizados.

Método	Configuração		
	1	2	3
FIR-FOPTD	$\tau_1 = 0,01/T$	$\tau_1 = 0,05/T$	$\tau_1 = 0,1/T$
GOBF-Log	$\tau_1 = 0,01/T$	$\tau_1 = 0,05/T$	$\tau_1 = 0,1/T$
Legendre	$\lambda = 0,01$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,1$
Laguerre	$n = 3$	$n = 6$	$n = 10$
FSF	$n = 9$	$n = 41$	$n = 131$

3.9.2 Resultados

Nas tabelas 3.2 e 3.3 são mostrados os resultados obtidos em simulações de resposta a um degrau unitário. O ajuste das estimativas foi calculado utilizando o erro médio quadrático normalizado (em inglês, NRMSE).

Primeiro são analisados os resultados da tabela 3.2, que se referem aos métodos que utilizam conjuntos fixos de cinco polos. Escolhendo a taxa de amostragem e os polos, em função dela, segundo o critério apresentado, ao menos uma das três sequências de polos

Tabela 3.2: Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre com aplicação de degrau unitário na entrada.

Processo	FIR-FOPTD			GOBF-Log			Legendre		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,88134	0,88434	0,91435	0,85559	0,86615	0,91348	0,88237	0,91111	0,90918
2	0,93789	0,93538	0,93728	0,93754	0,93479	0,93728	0,93744	0,93715	0,70865
3	0,93789	0,93803	0,93782	0,93522	0,93552	0,93722	0,93616	0,93719	0,92369
4	0,75712	0,80554	0,76710	0,76029	0,78612	0,76684	0,78830	0,63255	0,52440
5	0,92316	0,91409	0,95156	0,90906	0,90294	0,95150	0,93306	0,93808	0,62157
6	0,89213	0,91009	0,92507	0,89025	0,91092	0,92374	0,92048	0,92421	0,80197
7	0,92267	0,92387	0,92535	0,91631	0,91970	0,92504	0,92215	0,92500	0,92397
8	0,92608	0,92603	0,92626	0,91940	0,92129	0,92593	0,92336	0,92453	0,88420
9	0,86091	0,87482	0,87413	0,85320	0,85097	0,86881	0,85483	0,77831	0,61792

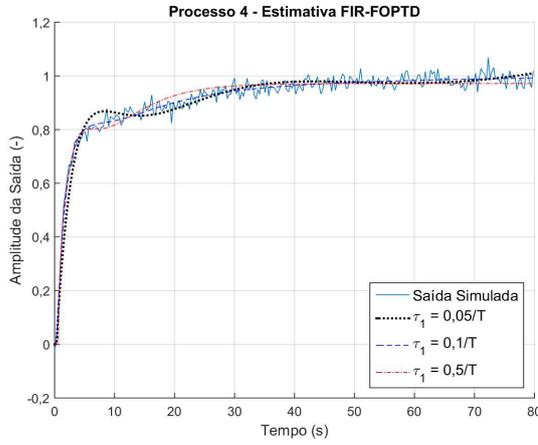
Tabela 3.3: Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF com aplicação de degrau unitário na entrada.

Processo	Laguerre			FSF		
	1	2	3	1	2	3
1	0,85978	0,91402	0,91454	0,89520	0,92333	0,98798
2	0,93746	0,93777	0,93843	0,93793	0,94604	0,97592
3	0,93481	0,93749	0,93920	0,92282	0,94460	0,97687
4	0,68818	0,74265	0,81346	0,47259	0,80365	0,83720
5	0,94589	0,95394	0,95447	0,94296	0,95971	0,98236
6	0,90401	0,92467	0,92629	0,90428	0,93535	0,98197
7	0,92150	0,92573	0,92711	0,92330	0,95475	0,99060
8	0,92109	0,92612	0,93207	0,91697	0,93924	0,99756
9	0,72825	0,63048	0,86694	0,66398	0,87946	0,91563

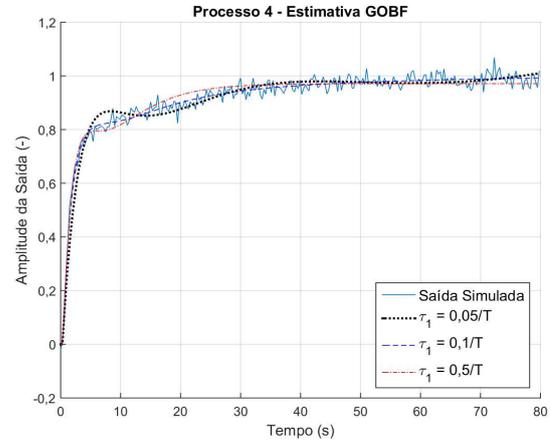
conduz à obtenção da melhor estimativa possível, que é bem próxima daquela obtida com os outros métodos. Nos processos, porém, com dinâmicas menos suaves, como o 4 e 9 (figuras 3.3 e 3.4, respectivamente), que têm, respectivamente, uma mudança drástica na taxa de variação durante a subida e um sobressinal, as FOPTDs produzem uma estimativa mais acurada. Uma explicação possível para essa leve superioridade seria o fato de o atraso utilizado na restrição das OBFs ser aquele determinado como ótimo para as FOPTDs, não sendo necessariamente ótimos para as funções de Laguerre também.

As funções de Legendre, quando se utiliza o polo $\lambda = 0,18$, não são capazes de aproximar bem as curvas de resposta ao degrau. O que se nota é que os polos usados nesse caso se estendem por quase todo o intervalo $[0; 1]$ do plano z , mas estão muito dispersos uns dos outros, impedindo a obtenção de uma boa estimativa, pois os polos das funções de base não ficam próximos o suficiente dos polos reais. Vê-se, então, que, do ponto de vista da possibilidade de estimar um processo genérico com um conjunto fixo e reduzido de polos, é melhor utilizar um conjunto de polos que se estendem por um intervalo menor,

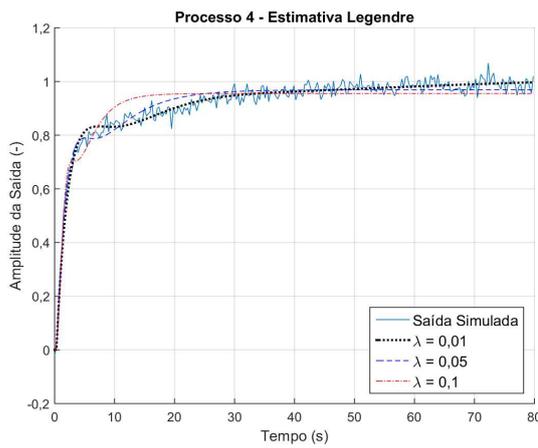
Figura 3.3: Gráficos dos modelos estimados para o processo 4.



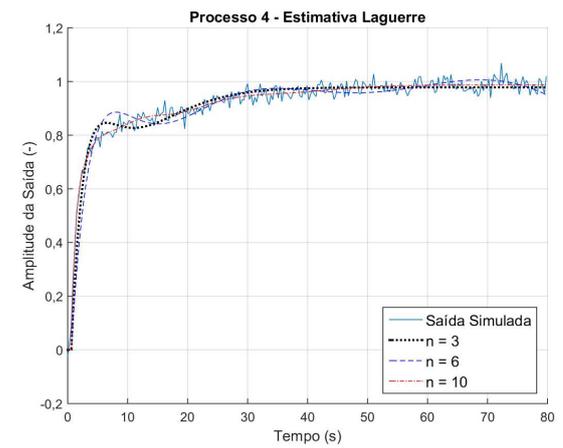
(a) FIR-FOPTD



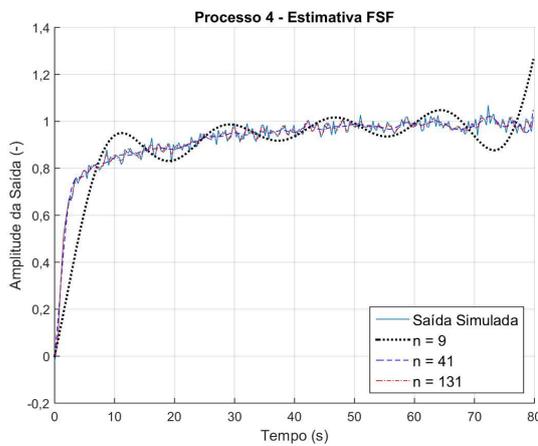
(b) GOBF-Log



(c) Legendre

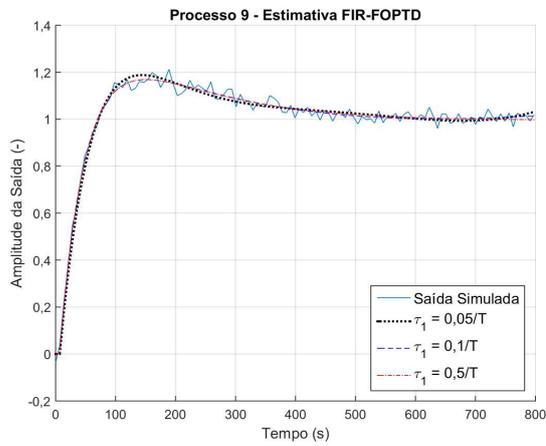


(d) Laguerre

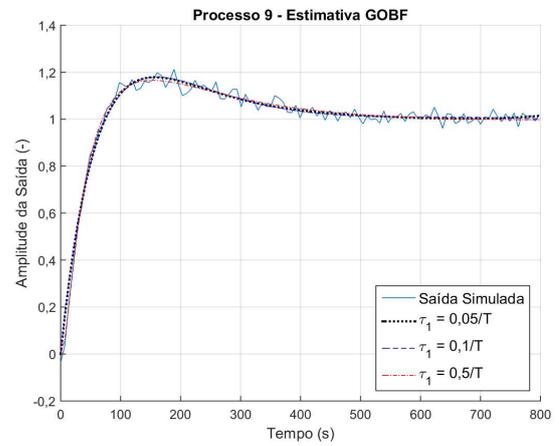


(e) FSF

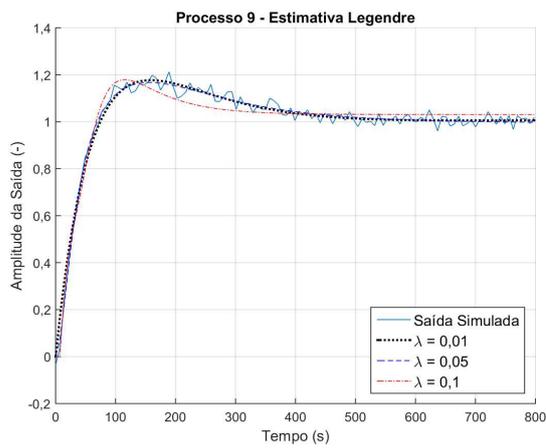
Figura 3.4: Gráficos dos modelos estimados para o processo 9.



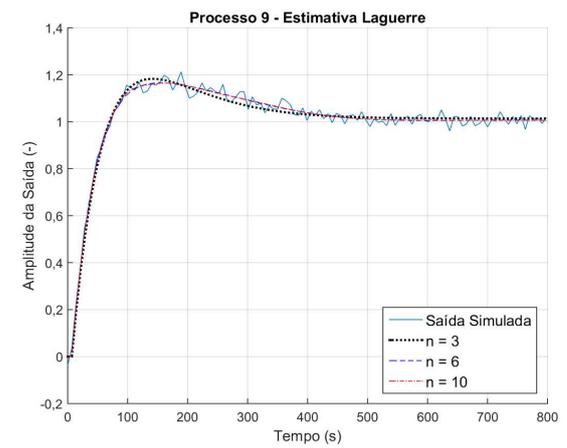
(a) FIR-FOPTD



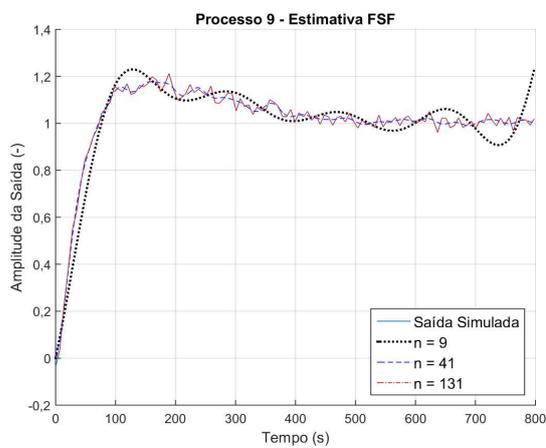
(b) GOBF-Log



(c) Legendre



(d) Laguerre



(e) FSF

como os gerados pela progressão geométrica de $r = 2$, mesmo que seja necessário estimar mais de uma vez com conjuntos distintos de polos para as funções de base.

Quanto às estimativas com funções de Laguerre e FSFs, analisadas pela tabela 3.3, faz-se uma avaliação da quantidade de parâmetros necessários para equiparar o ajuste obtido com as melhores estimativas dos outros três métodos. Com FSFs, os resultados obtidos com o uso de nove parâmetros se mostram comparáveis aos conseguidos com os demais métodos na maior parte dos casos, à exceção dos casos dos processos 4 e 9, cujas dinâmicas distintas já foram evidenciadas. Se for considerado o fato de que os parâmetros são complexos conjugados, pode-se até mesmo assumir que o número total de parâmetros necessários é equivalente aos dos demais processos nos processos de dinâmicas suaves.

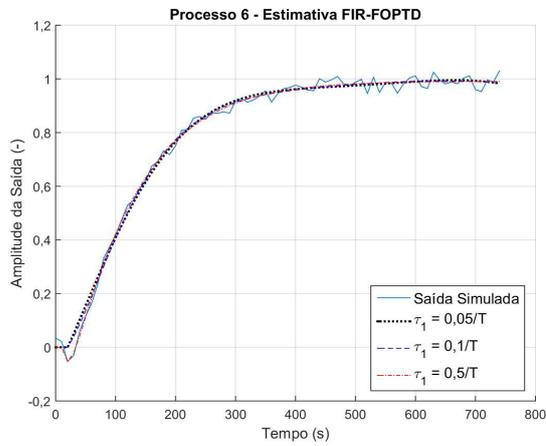
Com funções de Laguerre, além desses dois processos, que requerem dez parâmetros para que se tenha uma estimativa adequada, o processo 6 (figura 3.5) também gera uma estimativa equivalente apenas quando se utilizam seis parâmetros. Os três processos, além dos zeros, têm polos espalhados ao longo do eixo real, o que implica uma dificuldade para aproximar com poucos parâmetros mesmo que se utilize o polo ótimo. Para processos com dinâmicas mais suaves e polos mais concentrados, porém, o método das funções de Laguerre mostra-se equivalente ou até mesmo superior aos demais no que se refere ao número de parâmetros requeridos, pois é capaz de gerar uma estimativa com ajuste semelhante com apenas três parâmetros.

Vale lembrar que, de acordo com o princípio da parcimônia (LJUNG, 1987), o fato de as estimativas com esses métodos serem melhores com um maior número de parâmetros é esperado e não significa que seja necessariamente melhor utilizá-las, pois elas são mais influenciadas pela realização do ruído presente no experimento. No processo 2 (figura 3.6), por exemplo, nota-se que o ajuste do modelo com funções de Laguerre com três parâmetros e o modelo FSF com nove parâmetros já equiparam os dos demais modelos com número fixo de parâmetros. Utilizar modelos com mais parâmetros, portanto, poderia levar à obtenção de modelos menos representativos do processo em questão.

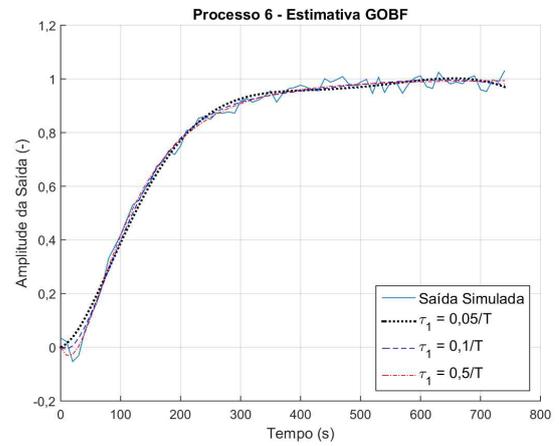
Sabendo-se que o degrau uma entrada não persistentemente excitante para boa parte dos processos identificados, foram feitas simulações tendo um ruído branco de desvio padrão $\sigma = 2$ como sinal de entrada, sendo os resultados obtidos mostrados nas tabelas 3.4 e 3.5. Devido à baixa relação sinal ruído, o melhor ajuste diminui para alguns métodos e em alguns dos processos, como no caso do processo 2 e do método GOBF-Log no processo 3 e do método FIR-FOPTD no processo 6. O método Laguerre é o que menos sofre perdas no ajuste das estimativas, enquanto o método GOBF-Log apresenta reduções mais constantes.

Apesar da perda nos valores dos ajustes — que pode ser amenizada com o aumento do desvio padrão do sinal de entrada —, há uma melhora significativa no que se refere

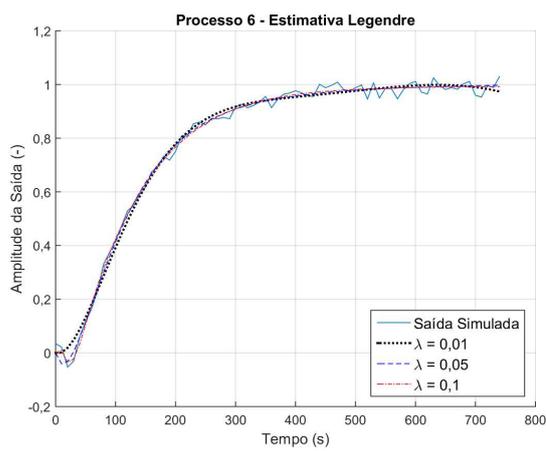
Figura 3.5: Gráficos dos modelos estimados para o processo 6.



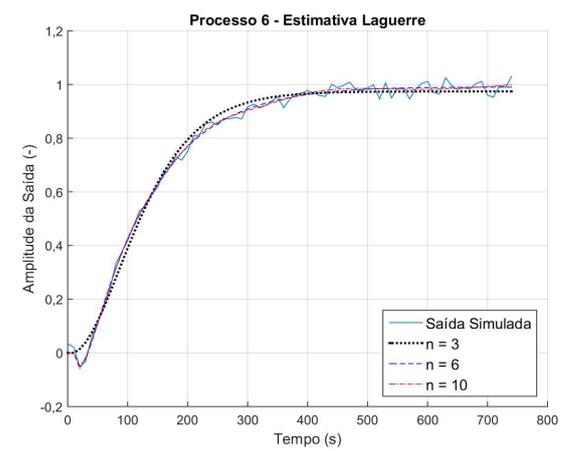
(a) FIR-FOPTD



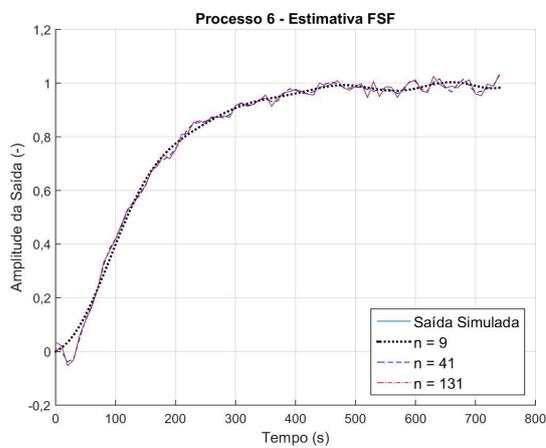
(b) GOBF-Log



(c) Legendre

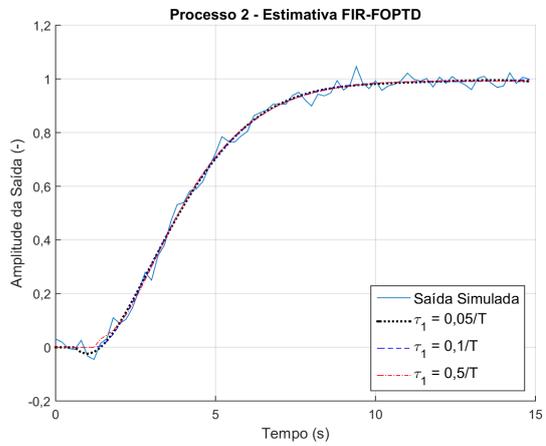


(d) Laguerre

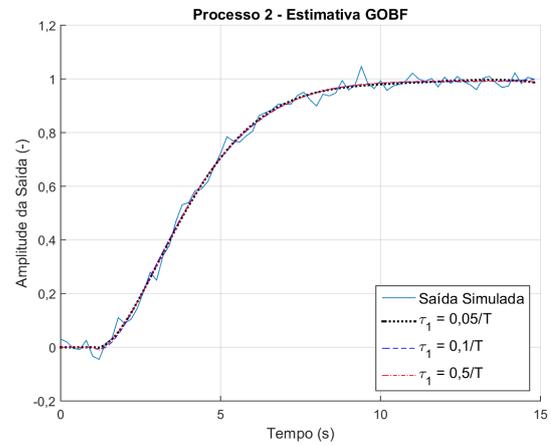


(e) FSF

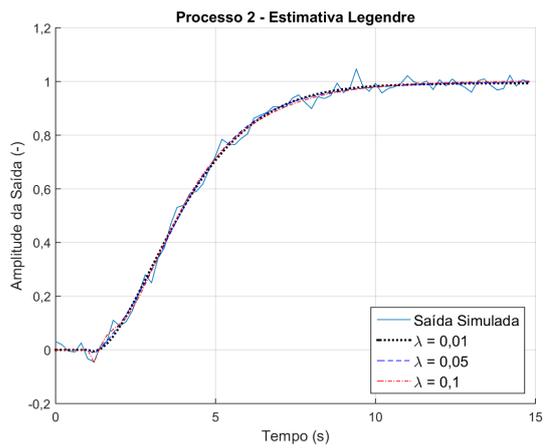
Figura 3.6: Gráficos dos modelos estimados para o processo 2.



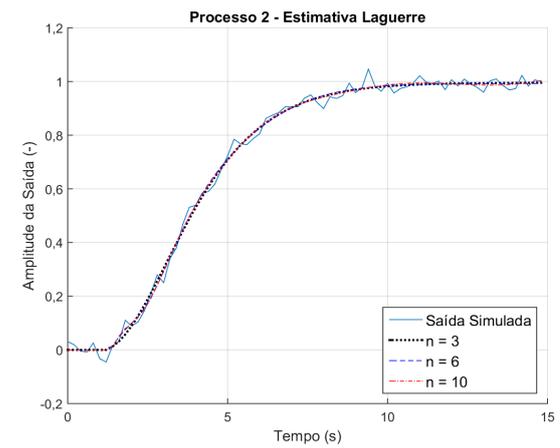
(a) FIR-FOPTD



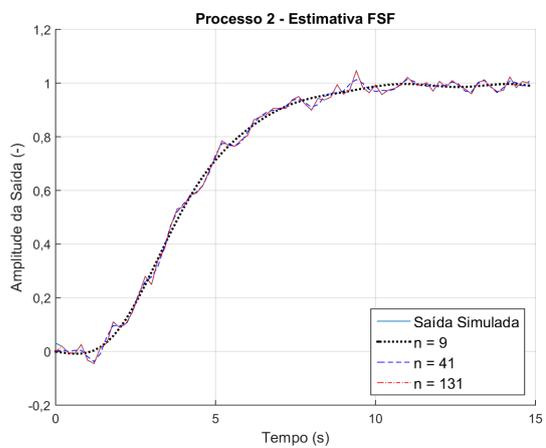
(b) GOBF-Log



(c) Legendre



(d) Laguerre



(e) FSF

Tabela 3.4: Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre com aplicação de ruído branco na entrada.

Processo	FIR-FOPTD			GOBF-Log			Legendre		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,65167	0,68372	0,93890	0,48929	0,57286	0,91579	0,71321	0,92085	0,94010
2	0,81332	0,78531	0,85958	0,80437	0,77444	0,85736	0,85940	0,84778	0,10473
3	0,90682	0,90971	0,91051	0,52144	0,54889	0,76373	0,58921	0,83918	0,86715
4	0,60968	0,63873	0,89590	0,44996	0,44730	0,86736	0,54605	0,86931	0,91763
5	0,58736	0,59698	0,93820	0,48174	0,53683	0,93512	0,80829	0,91573	0,03488
6	0,36908	0,57936	0,80974	0,35005	0,63193	0,85364	0,80750	0,89311	0,80120
7	0,79326	0,81533	0,86860	0,67968	0,73139	0,89187	0,79021	0,89157	0,89278
8	0,91596	0,92170	0,92407	0,61696	0,63518	0,78262	0,66743	0,85792	0,85329
9	0,87819	0,95714	0,96037	0,61427	0,61397	0,79423	0,64418	0,86768	0,90534

Tabela 3.5: Ajuste NRMSE dos modelos obtidos com os métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF com aplicação de ruído branco na entrada.

Processo	Laguerre			FSF		
	1	2	3	1	2	3
1	0,89502	0,92982	0,94115	0,58721	0,93722	0,96804
2	0,83724	0,86669	0,86700	0,82622	0,87186	0,89493
3	0,56190	0,84180	0,90356	0,11596	0,60355	0,77214
4	0,84476	0,90281	0,92820	0,69915	0,51147	0,88868
5	0,91205	0,94355	0,94782	0,58183	0,94638	0,96131
6	0,81434	0,85920	0,90664	0,46228	0,87386	0,93367
7	0,85263	0,89620	0,89870	0,77460	0,91124	0,99249
8	0,66540	0,87860	0,92295	0,64914	0,84573	0,95737
9	0,72760	0,91444	0,92799	0,39876	0,70733	0,94451

ao condicionamento das matrizes de correlação em cada método quando se muda o sinal de entrada de um degrau para um ruído branco, ou seja, quando se utiliza um sinal de entrada mais persistentemente excitante. Nas tabelas 3.6 e 3.7 são mostrados os melhores valores de condicionamento obtidos com cada método.

De modo geral, a utilização do ruído branco como sinal de entrada permite a redução do número de condicionamento de ao menos duas ordens de grandeza. Algo importante de se observar é o fato de os métodos baseados no uso de funções ortonormais apresentarem números de condicionamento muito mais baixos que os obtidos quando se utiliza o método FIR-FOPTD, cujas funções de primeira ordem com atraso não apresentam a qualidade da ortonormalidade. Confirma-se também os resultados previstos em (HOF et al., 2000) acerca do condicionamento próximo unitário quando o sinal de entrada é um ruído branco. Então, apesar de demonstrar um desempenho aparentemente melhor no que diz respeito aos ajustes, nota-se que os modelos obtidos pelo método FIR-FOPTD são mais sensíveis a variações provocadas pela presença de uma realização diferente do ruído.

Tabela 3.6: Melhores números de condicionamento das matrizes de correlação resultantes da utilização dos métodos FIR-FOPTD, GOBF-Log e Legendre quando aplicados um degrau e um ruído branco como sinal de entrada.

Processo	FIR-FOPTD		GOBF-Log		Legendre	
	Degrau	Ruído Branco	Degrau	Ruído Branco	Degrau	Ruído Branco
1	1,6133E+06	1,2338E+04	8,1406E+02	5,8277E+00	1,9362E+03	1,6392E+00
2	1,9167E+06	1,0823E+04	3,3387E+04	3,9606E+00	1,8845E+04	2,2508E+00
3	1,7400E+06	1,7542E+04	3,6250E+04	1,9993E+01	2,6769E+04	2,9636E+00
4	1,8787E+06	1,0085E+04	6,1817E+02	1,9354E+00	2,4222E+03	1,2582E+00
5	1,9671E+06	1,5337E+04	1,7124E+03	2,1048E+00	3,5025E+02	1,2431E+00
6	1,9671E+06	1,3260E+04	1,7124E+03	1,1133E+01	3,5025E+02	1,5906E+00
7	2,2430E+06	2,3209E+04	4,3451E+02	2,8826E+00	8,1667E+02	2,1155E+00
8	1,6133E+06	1,2592E+04	8,1406E+02	2,1827E+00	1,9362E+03	1,5782E+00
9	2,9124E+06	1,7123E+04	1,3799E+03	2,2082E+00	5,3727E+02	1,3216E+00

Tabela 3.7: Melhores números de condicionamento das matrizes de correlação resultantes da utilização dos métodos Laguerre (polo ótimo) e FSF quando aplicados um degrau e um ruído branco como sinal de entrada.

Processo	Laguerre		FSF	
	Degrau	Ruído Branco	Degrau	Ruído Branco
1	3,4641E+02	1,5019E+00	3,2457E+02	7,0794E+01
2	2,7963E+04	2,7197E+00	3,2079E+02	3,0025E+02
3	3,2872E+04	4,1131E+00	3,2079E+02	8,7135E+02
4	4,2699E+02	1,1797E+00	3,1543E+02	2,7171E+01
5	1,9225E+02	1,4798E+00	3,2079E+02	3,6950E+02
6	1,9225E+02	1,9711E+00	3,2079E+02	1,1121E+03
7	9,7928E+01	2,0419E+00	3,3172E+02	3,9973E+02
8	1,1151E+02	1,5106E+00	3,2457E+02	2,6848E+03
9	3,6637E+02	1,1900E+00	3,1823E+02	1,0997E+01

O método FSF constitui-se uma exceção, não apresentando variações importantes nos números de condicionamento, visto que a estimativa com uma ordem efetiva de modelo baixa — os modelos com melhor número de condicionamento são os de nove parâmetros — já cumpre o papel de reduzir a influência dos termos de alta frequência, que são os responsáveis pelo mal-condicionamento da matriz.

3.10 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados conceitos básicos concernentes às funções de base ortonormais e alguns exemplos ilustrativos de sua aplicação para identificação de sistemas. Pode-se notar que bases deste tipo de função são de fácil construção e que a sua utilização beneficia-se da propriedade de projeção dos filtros passa-tudo, os quais, quando têm uma

representação ortogonal, podem ser conectados em redes sem perder as características de ser passa-tudo e ortogonal.

Categorias bem definidas de funções de base ortonormais estão especificadas, conforme o grau de complexidade. O aumento deste último, por sua vez, também confere maior flexibilidade ao modelo para identificar o sistema com a utilização de menos parâmetros, pois permite escolher polos mais próximos dos polos verdadeiros. Como em qualquer processo de identificação, a utilização de um conjunto finito de dados impõe certas restrições à aplicação destas funções, as quais, porém, podem ser contornadas e consideradas na solução pelo método dos mínimos quadrados sem perder a característica de linearidade nos parâmetros, o que representa uma vantagem significativa.

Foram realizadas simulações de experimentos de identificação em malha aberta, tendo como sinais de entrada o degrau e o ruído branco, e cinco métodos foram avaliados com base nos dados de entrada e saída gerados. Nove processos com características distintas foram avaliados e considerou-se haver o conhecimento prévio de uma estimativa do tempo de estabelecimento e da constante de tempo dominante do processo. Para processos com dinâmicas variáveis causadas pela presença de zeros ou atrasos, as constantes de tempo foram escolhidas com base nas dinâmicas mais rápidas observadas.

É possível observar que os métodos que utilizam um conjunto de polos distribuídos ao longo do eixo real não possibilitam a utilização de um único conjunto de cinco polos para identificar um processo qualquer adequadamente, mas a realização de diversas estimativas com conjuntos de polos que cobrem intervalos distintos do eixo torna possível a obtenção de um modelo adequado mesmo que não se tenha nenhum conhecimento prévio acerca do processo além de uma estimativa da constante de tempo, a qual é utilizada tanto para definir a taxa de amostragem quanto para definir os polos das funções de base no plano s .

Os modelos FIR-FOPTD, apesar de fornecerem estimativas com ajustes melhores que os métodos baseados em OBFs em muitos casos, por apresentarem um número de condicionamento da matriz de correlação muito maior, está muito mais suscetível a variações devido ao ruído presente na saída. No caso da entrada ser um ruído branco, o condicionamento nos métodos com funções ortonormais é quase unitário, enquanto no método das FOPTDs é de ordem de grandeza 10^4 .

Quando se compara os métodos anteriores com os de Laguerre e FSF, observa-se que, para processos com dinâmicas mais suaves e polos relativamente próximos, é possível utilizar poucos parâmetros para identificar os processos de forma equivalente, mas a presença de zeros no processo, a ocorrência de sobressinal ou uma distribuição esparsa dos polos verdadeiros requer um número maior de funções no modelo. Com funções de Laguerre, mediante o esforço computacional para determinação do polo ótimo, pode-se obter um

modelo equivalente aos dos métodos com polos distribuídos com um número igual ou menor de parâmetros. Os modelos FSF apresentam, quando utilizados sem nenhum artifício para lidar com o ruído, oscilações significativas na resposta ao degrau, mas podem ser utilizados com uma ordem efetiva baixa nos processos com dinâmicas mais suaves.

Capítulo 4

Identificação com OLPTDs

4.1 Introdução

Funções de Laguerre podem ser consideradas um caso especial das chamadas funções de base ortonormais generalizadas (HOF et al., 2000). Funções pertencentes a esta categoria são geradas por meio da utilização de filtros passa-tudo, cuja propriedade de projeção é usada para garantir que todas as funções sejam ortogonais umas em relação às outras. Funções ortonormais podem também ser sistematicamente derivadas, por exemplo, de um conjunto genérico de funções por meio do procedimento de Gram-Schmidt. A flexibilidade para espalhar os polos permite melhorar a qualidade do modelo, mas a complexidade do problema de otimização dos polos das GOBFs (MALTI; D.; RAGOT, 1999) torna o uso de funções menos flexíveis, como as funções de Laguerre, mais atrativos: embora o cálculo do polo ótimo de Laguerre ainda demande a resolução de um problema de otimização não-linear, este é unidimensional, o que o torna muito mais viável e prático.

Em trabalhos anteriores, foi sugerida a estimação de modelos preliminares para obter uma aproximação razoável para o polo ótimo de Laguerre (SANTOS; BARROS, 2012). Nesta seção, sugere-se um algoritmo, executado com o auxílio de ferramentas já existentes, para gerar um modelo de Laguerre com atraso de baixa ordem ótimo diretamente a partir da resposta ao degrau do sistema, com um conhecimento prévio mínimo sobre o sistema. Em vez de estimar o polo de Laguerre a partir de modelos prévios, este é calculado a partir dos próprios dados adquiridos usando as condições de otimalidade do polo de Laguerre. A inclusão do atraso aumenta as possibilidades de obtenção de bons modelos de baixa ordem. Pelo fato de, apesar de requerido, ser desconhecido, seu valor é determinado por meio de uma busca, em que modelos são estimados com valores de atraso diferentes e é escolhido aquele que gera a melhor aproximação, assim como realizado em (HIDAYAT; MEDVEDEV, 2012a) e (SHEN et al., 2017). As estimativas dos parâmetros do modelo são realizadas por meio da abordagem em tempo discreto e modelos de tempo contínuo

são derivados em seguida por meio de mapeamento de polos de zeros.

4.2 Condições para Estimação Ótima de Polos de Laguerre

Um aspecto importante de se levar em consideração quando identificando com OBFs é o fato de que o número de funções requeridas para reduzir o erro até um certo nível depende dos valores escolhidos para os polos. De modo geral, quanto mais próximos os polos escolhidos estão dos polos "verdadeiros", menor o erro de modelagem. No caso das funções de Laguerre, há um valor real para o polo de Laguerre que gera a melhor aproximação com o mesmo número de funções. Dado um conjunto de dados de entrada e saída $u(t)$ e $y(t)$, o polo ótimo de Laguerre pode ser encontrado por meio de uma análise das condições em que ele ocorre (WANG; CLUETT, 2000).

Seja a expansão de Laguerre de um sistema discreto, sujeito a um entrada do tipo ruído branco com variância unitária. Tornando explícita a dependência do parâmetro a , tem-se:

$$G_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(a) F_k(z; a), \quad (4.1)$$

em que:

$$F_k(z; a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{z-a} \left(\frac{1-a}{z-a} \right)^{k-1} \quad (4.2)$$

são as transformadas Z das sequências de Laguerre $f_k(t, a)$ e:

$$c_k(a) = \langle G_0, F_k(z; a) \rangle = \langle g_0, f_k(t; a) \rangle. \quad (4.3)$$

Se o erro da resposta ao impulso quando a série é truncada em n termos é dado por:

$$\varepsilon(t; n, a) = g_0(t) - \sum_{k=1}^n c_k(a) F_k(t; a). \quad (4.4)$$

Devido à ortonormalidade das funções de Laguerre, tem-se:

$$\|\varepsilon(t; n, a)\|^2 = \|g_0\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2(a). \quad (4.5)$$

Para encontrar os valores c_k que minimizam o erro, é necessário, então, derivar a

equação (4.5) com relação a a :

$$\frac{\partial \|\varepsilon_g(\cdot; n, a)\|^2}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^n c_k(a) \frac{\partial c_k(a)}{\partial a}. \quad (4.6)$$

Os parâmetros c_k são funções lineares de $F_k(z; a)$. Logo, das derivadas destas últimas, dadas por:

$$\frac{\partial F_k(z; a)}{\partial a} = \frac{kF_{k+1}(z; a) - (k-1)F_{k-1}(z; a)}{1-a^2}, \quad (4.7)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial c_k(z; a)}{\partial a} = \frac{k c_{k+1}(z; a) - (k-1) c_{k-1}(z; a)}{1-a^2} \quad (4.8)$$

e, finalmente, substituindo este último resultado em (4.6):

$$\frac{\partial \|\varepsilon_g(\cdot; n, a)\|^2}{\partial a} = -\frac{2n}{1-a^2} c_n(a) c_{n+1}(a). \quad (4.9)$$

Igualando a zero a expressão da equação (4.9) conduz à condição:

$$c_n(a) c_{n+1}(a) = 0, \quad (4.10)$$

que está associada à existência de um mínimo ou máximo local. Normalmente, os mínimos locais são encontrados quando $c_{n+1} = 0$ e os máximos locais quando $c_n = 0$ ((HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005). Se o sinal de entrada não for um ruído branco, as normas usadas forem de um grau maior que 2, o desenvolvimento matemático apresenta variações mas leva às mesmas condições (SILVA, 2000).

Em uma aplicação em que o sistema "verdadeiro" não seja conhecido e deseje-se obter um modelo diretamente a partir dos dados coletados, uma função analítica para o cálculo dos coeficientes não está disponível e é necessário realizar um procedimento de estimação para obtê-los. Um método de *gridding*, em que o intervalo de busca — que pode ser restrito ao intervalo (0,1) no caso de tempo discreto — é uma alternativa prática, apesar de computacionalmente cara, de encontrar o polo ótimo diminuindo o risco de cair num mínimo local. A fim de utilizá-lo, deve-se dividir o intervalo em subintervalos de comprimento pré-especificado e examinar onde o produto entre os coeficientes c_n e c_{n+1} muda de sinal. Já que a derivada (4.9), que dá origem à condição de otimalidade (4.10), tem um sinal negativo, o polo ótimo deve ser encontrado no meio de uma transição de valor positivo para negativo.

4.3 Modelos de Laguerre com Atraso de Baixa Ordem Ótimos

O modelo de tempo discreto de ordem n a ser identificado é dado por:

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(z), \quad (4.11)$$

com base nas funções $F_k(z)$ definidas como:

$$F_k(z) = z^{-d} \frac{\sqrt{1-a^2}}{z-a} \left(\frac{1-az}{z-a} \right)^{k-1}, \quad (4.12)$$

em que d é o número de amostras correspondentes ao atraso.

Embora o objetivo seja o de gerar um modelo baseado em pouca informação *a priori*, alguns itens ainda são necessários para o projeto do experimento, especificamente: uma estimativa inicial do tempo de acomodação e da constante de tempo dominante do sistema, que são importantes, respectivamente: para definir a duração do experimento, de modo que se possa ter uma estimativa de boa qualidade do ganho estático; e o tempo de amostragem, especificado como 10% da constante de tempo dominante do sistema. Estas informações são facilmente obtidas de um experimento de resposta ao degrau. No caso discreto no tempo, a determinação da taxa de amostragem é de vital importância para que o polo ótimo não fique muito próximo do círculo unitário e, conseqüentemente, seja mais difícil de se estimar e mais sensível a erros numéricos e influência do ruído (CLARKE; GAWTHROP, 1979). O atraso d é definido como o valor que provê a melhor aproximação; então, outra informação requerida para o processo de identificação é o intervalo de busca para este atraso d .

Considerando essas questões, propõe-se um algoritmo para estimar modelos de Laguerre ótimos (OLPTD, do inglês *Optimal Laguerre Plus Time-Delay*), o qual é descrito a seguir:

1. Obter uma resposta ao degrau do processo a ser estimado;
2. Estimar a constante de tempo dominante;
3. Re-amostrar, caso necessário, os dados coletados de modo que o tempo de amostragem seja aproximadamente 10% da constante de tempo dominante estimada;
4. Selecionar o intervalo de busca para a estimação do atraso;
5. Estimar os coeficientes do modelo de Laguerre com atraso com uma ordem desejada calculando o polo ótimo a partir dos dados coletados;

6. Selecionar o modelo com o atraso que fornece a melhor aproximação.

4.4 Simulações Numéricas

O desempenho do método sugerido foi analisado por meio de simulações numéricas com três processos com diferentes características. Os processos usados nas simulações, apresentados em tempo contínuo, foram:

- Processo 1: $G_1(s) = \frac{400s^2 + 62s + 1}{(24s + 1)(82s + 1)(100s + 1)}$
(superamortecido com polos distribuídos);
- Processo 2: $G_2(s) = \frac{-2s + 1}{(s + 1)^3}$ (fase não-mínima);
- Processo 3: $G_3(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}$ (quarta ordem com polo único).

O método fornece modelos discretos no tempo. Para comparar com os processos de tempo contínuo, os modelos identificados foram convertidos para modelos de tempo contínuo por meio de mapeamento de polos e zeros do plano z para o plano s . Cada processo foi submetido a uma entrada de degrau unitário e a saída foi corrompida com um ruído branco de variância $0,15^2$. As constantes de tempo e os tempos de estabelecimento pré-estimados usados foram:

- Processo 1: $T = 220$ s e $T_{st} = 800$ s;
- Processo 2: $T = 2$ s e $T_{st} = 15$ s;
- Processo 3: $T = 2$ s e $T_{st} = 15$ s.

Nas Figuras 4.1 a 4.3, são apresentadas as saídas simuladas e os modelos estimados para cada processo. Na Tabela 4.1 estão disponíveis os modelos de tempo contínuo encontrados, calculados e na Tabela 4.2 os erros médios quadráticos normalizados (NRMSE, do inglês *Normalized Root Mean Square Error*), calculados em relação à resposta ao degrau verdadeira. Além dos modelos de 1^a e 2^a ordem, que seriam aqueles normalmente considerados de baixa ordem, modelos de 3^a ordem também foram estudados.

Para processos de fase mínima superamortecidos, o modelo OLPTD de 1^a ordem, que é estruturalmente idêntico ao modelo de primeira ordem com atraso tipicamente utilizado, pode gerar aproximações precisas em casos como o do processo 1. Os modelos de 2^a ordem, por outro lado, são capazes de aproximar bem, e com um valor de atraso baixo, os processos 2 e 3, que apresentam, respectivamente, um atraso aparente e uma

Figura 4.1: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 1. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).

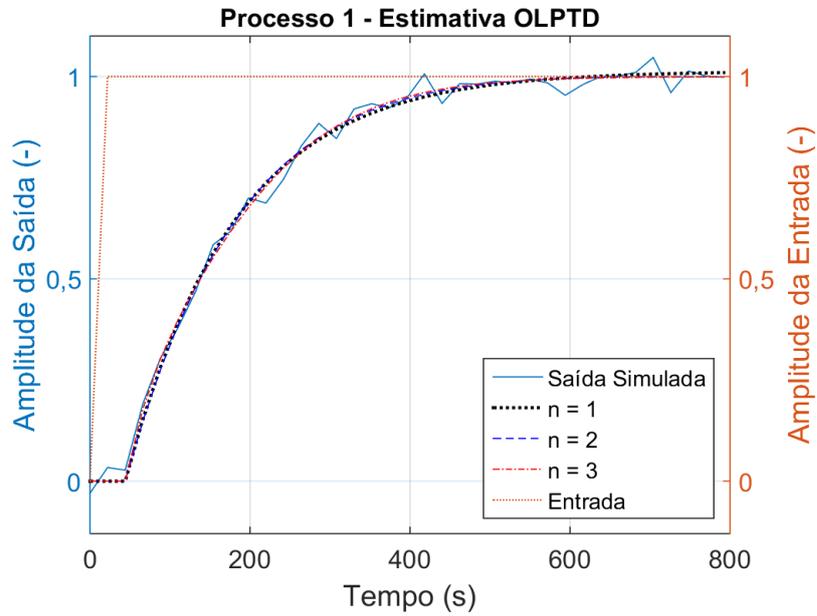


Figura 4.2: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 2. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).

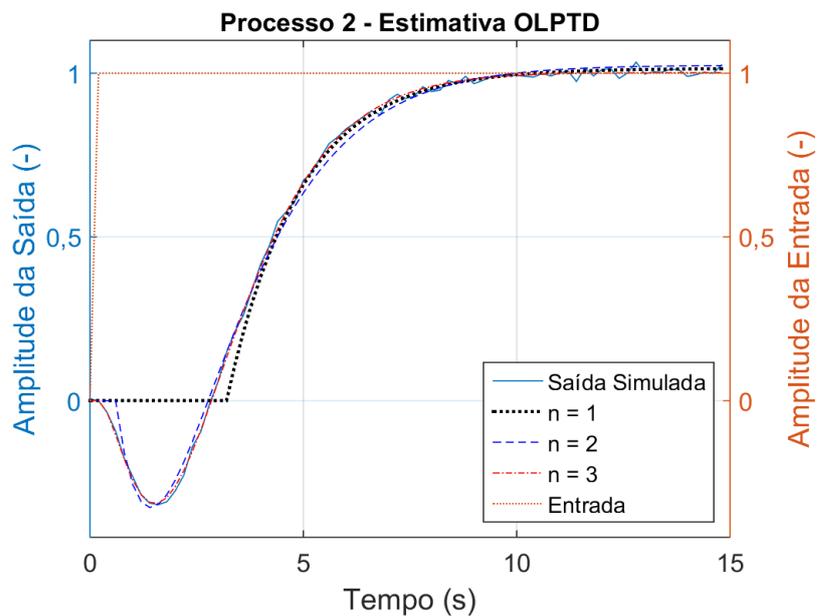


Figura 4.3: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo 3. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).

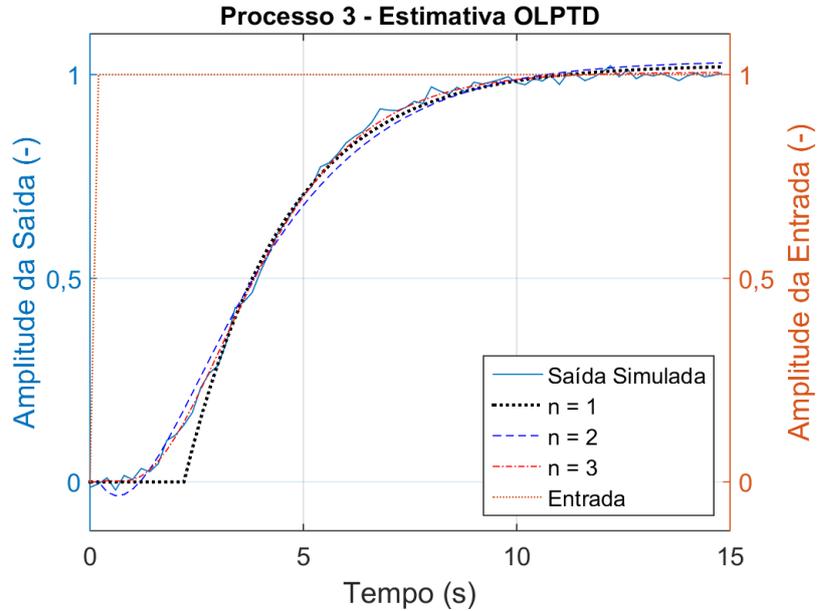


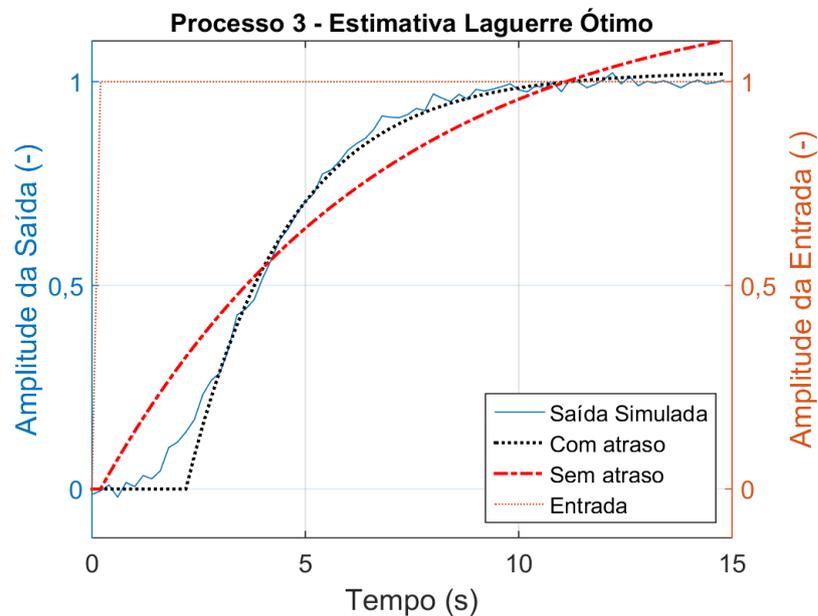
Tabela 4.1: Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos 1 a 3.

Tipo	Processo 1	Processo 2	Processo 3
OLPTD-1	$\frac{1,014}{135,4s+1} e^{-22s}$	$\frac{1,015}{1,716s+1} e^{-3s}$	$\frac{1,024}{2,399s+1} e^{-2s}$
OLPTD-2	$\frac{258,3s+0,9891}{(188,8s+1)^2} e^{-22s}$	$\frac{-1,968s+1,025}{(1,436s+1)^2} e^{-0,4s}$	$\frac{-0,008156s+1,01}{(1,565s+1)^2} e^{-s}$
OLPTD-3	$\frac{2651s^2+67,5s+0,9993}{(64,24s+1)^3} e^{-22s}$	$\frac{(0,0178s+1)(2,0004s-1)}{(1,008s+1)^3}$	$\frac{0,116s^2+0,0206s+1,001}{(1,147s+1)^3} e^{-0,8s}$

Tabela 4.2: NRMSE gerados pelas respostas ao degrau dos Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos 1 a 3.

Tipo	Processo 1	Processo 2	Processo 3
OLPTD-1	0,9195	0,7604	0,8946
OLPTD-2	0,9208	0,9261	0,9336
OLPTD-3	0,9254	0,9561	0,9380

Figura 4.4: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD de 1ª ordem com atraso e sem atraso estimados para o processo 3. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída simulada (sólida), modelos de 1ª ordem com atraso (pontilhada grossa) e 1ª ordem sem atraso (tracejada-pontilhada).

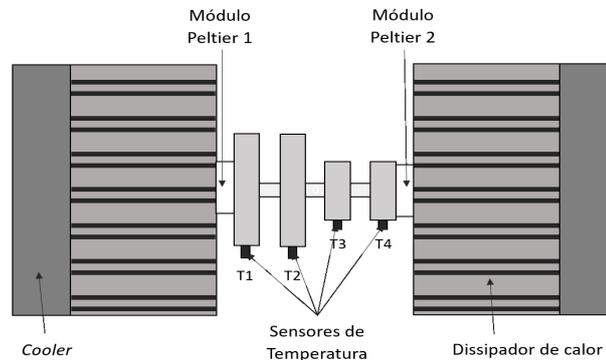


resposta reversa inicial devido à presença de um zero no semiplano direito do plano s . Esta flexibilidade do modelo de segunda ordem consiste em uma vantagem significativa para o uso deste tipo de funções de base no contexto de identificação. Esta flexibilidade torna-se ainda mais significativa se modelos de 3ª ordem forem utilizados, os quais permitem a obtenção de aproximações bem acuradas em tais casos mesmo sem atraso, ou seja, com apenas três parâmetros.

Quando se analisam os modelos de tempo contínuo gerados, é possível observar a proximidade dos polos ótimos com o polo múltiplo do processo $s = -1$ nos casos 2 e 3 para os processos de 3ª ordem. Um atraso de dois instantes de amostragem foi incluído no modelo de segunda ordem para $G_3(s)$, o que fez o polo ser diferente, mas o erro na "partida" da resposta é compensado pela melhor conformidade durante a subida.

Ainda sobre o caso 3, que inclui um atraso aparente, observa-se que, devido à inclusão do atraso, é possível aproximar a resposta ao degrau por meio de um modelo de 1ª ordem. Na figura 4.4 são mostradas as respostas ao degrau do modelo OLPTD de 1ª ordem e de um modelo de Laguerre ótimo de 1ª ordem sem atraso. Pode-se observar que a inclusão do atraso, neste caso, é essencial para que a utilização de um modelo de ordem reduzida seja possível.

Figura 4.5: Diagrama da planta termoeétrica baseada no efeito Peltier usada nos experimentos.



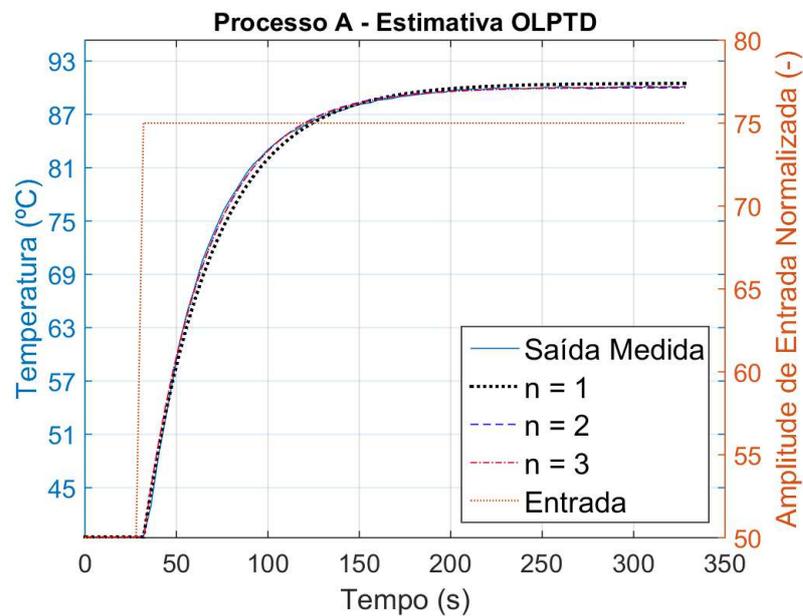
4.5 Resultados Experimentais

Os modelos OLPTD foram avaliados também por meio de resultados experimentais. Os experimentos foram conduzidos em uma planta termoeétrica baseada no efeito Peltier composta por quatro discos, dispostos em paralelo e conectados por um eixo axial, dois dos quais — mais especificamente, os das extremidades — estão em contato com módulos Peltier que podem ser sujeitos a tensão elétrica (4.5). Esta tensão causa, devido ao efeito Peltier (MACDONALD, 1962), uma transferência de calor de um lado do módulo para o outro e, então, a temperatura do sistema pode ser manipulada por meio da tensão aplicada às suas extremidades. A aplicação da tensão de entrada e medição da temperatura são realizados com o auxílio de um PLC e são manipuladas ou monitoradas no computador via comunicação OPC. O computador envia um valor de entrada normalizado dentro da faixa de 0 – 100, que é convertido no PLC e enviado como um sinal de 0 – 10 V. A temperatura é medida por sensores LM-35 e o valor adquirido pela entrada analógica do PLC é convertido para o valor de temperatura correspondente antes de ser enviado para o computador.

Os processos sujeitos aos experimentos foram aqueles envolvendo apenas uma entrada, a saber, a tensão elétrica no módulo Peltier 2, e três saídas: a temperatura T4 no disco onde a entrada é aplicada (processo A), a temperatura T3 no disco adjacente (processo B) e a temperatura T1 no disco na extremidade oposta (processo C). É característico do sistema em questão que quanto mais longe um disco está da fonte elétrica, menor é o ganho estático e maior é o atraso aparente do processo SISO correspondente, o que significa que diferenças significativas podem ser encontradas entre os três processos SISO considerados.

Cada processo, inicialmente em estado estacionário a um valor de entrada normalizada de 50, foi sujeito a uma entrada em degrau de amplitude +25 no instante $t = 30$ s. Tanto

Figura 4.6: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo A. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).



os dados de entrada quanto os de saída sofreram tratamento prévio para iniciar a partir de zero e foram re-amostrados de acordo com a constante de tempo pré-estimada escolhida. Então, modelos de 1ª, 2ª e 3ª ordem foram estimados. As constantes pré-estimadas T e os tempos de estabelecimento T_{st} usados nos cálculos dos modelos foram:

- Processo A: $T = 40$ s e $T_{st} = 325$ s;
- Processo B: $T = 200$ s e $T_{st} = 650$ s;
- Processo C: $T = 230$ s e $T_{st} = 850$ s.

As Figuras 4.1 a 4.3 apresentam as saídas medidas e os modelos OLPTD estimados para cada processo. Na Tabela 4.3, estão disponíveis os modelos de tempo contínuo obtidos e na Tabela 4.4 os erros médios quadráticos normalizados (NRMSE), calculados em relação à resposta ao degrau medida. As escalas dos gráficos são diferentes por questões de visualização.

Os processos B e C apresentam um atraso aparente, que é a causa de o modelo de primeira ordem ter um ajuste menor. O atraso calculado permitiu, com o custo de ignorar a variação inicial, modelar a dinâmica ascendente semelhante a de processos de primeira ordem e o ganho estático. Os modelos de 2ª e 3ª ordem fornecem aproximações muito similares devido às dinâmicas simples dos processos. As não-linearidades, mais evidentes

Figura 4.7: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo B. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).

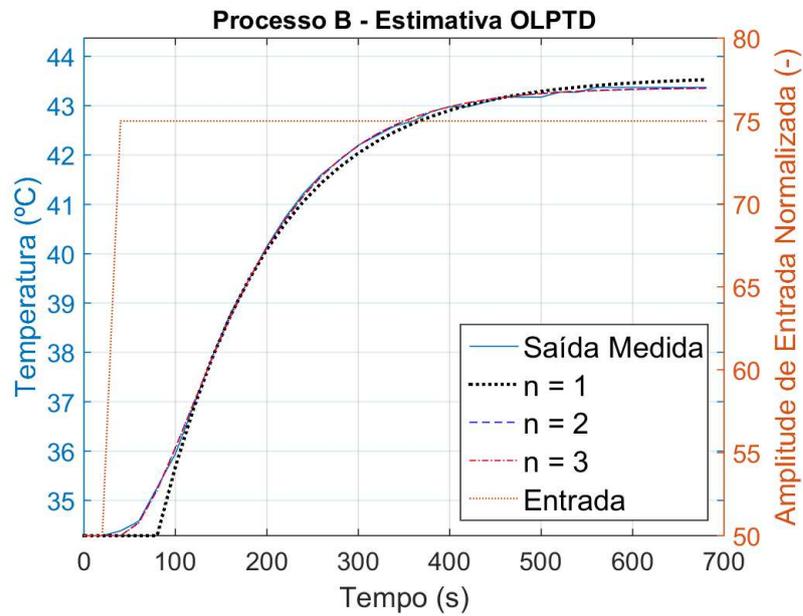


Figura 4.8: Respostas ao degrau dos modelos OLPTD estimados para o processo C. Curvas: entrada (pontilhada fina), saída medida (sólida), modelos de 1ª ordem (pontilhada grossa), 2ª ordem (tracejada) e 3ª ordem (tracejada-pontilhada).

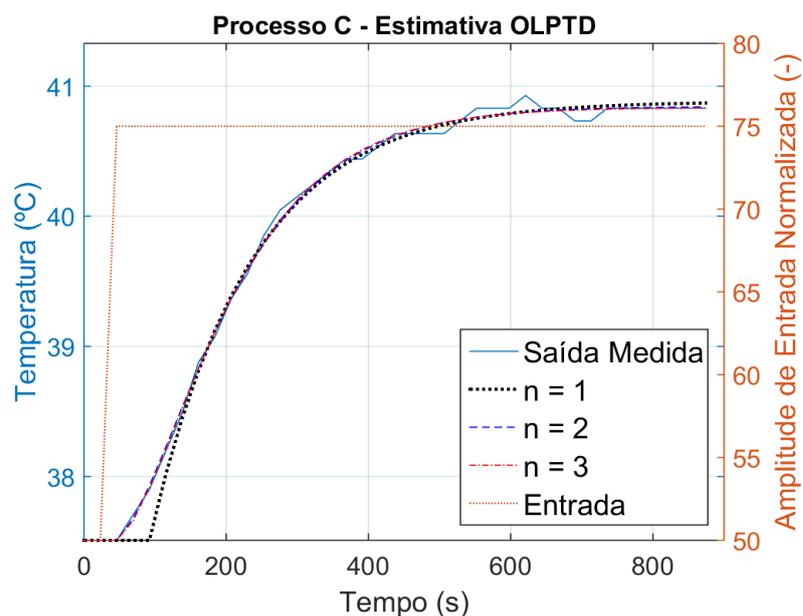


Tabela 4.3: Modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos A, B e C.

Tipo	Processo A	Processo B	Processo C
1-OLPTD	$\frac{2,042}{37,96s+1}$	$\frac{0,3724}{123,1s+1} e^{-40s}$	$\frac{0,135}{141,5s+1} e^{-46s}$
2-OLPTD	$\frac{56,27s+2,022}{(31,29s+1)^2}$	$\frac{-0,2215s+0,3633}{(72,88s+1)^2}$	$\frac{1,507s+0,1334}{(92,57s+1)^2}$
3-OLPTD	$\frac{6376s^2+219,2s+2,03}{(47,97s+1)^3}$	$\frac{-30,87s^2+26,35s+0,3631}{(72,88s+1)^3}$	$\frac{105,5s^2+14,03s+0,133}{(92,57s+1)^3}$

Tabela 4.4: NRMSE gerados pelas respostas ao degrau dos modelos OLPTD de tempo contínuo estimados para os processos A, B e C.

Tipo	Processo A	Processo B	Processo C
OLPTD-1	0,9235	0,9594	0,9601
OLPTD-2	0,9391	0,9855	0,9857
OLPTD-3	0,9594	0,9774	0,9779

com as variações de temperatura mais altas, foram bem modeladas mesmo sem a inclusão do atraso.

4.6 Conclusão

Neste capítulo, foi apresentada uma metodologia prática para a construção de modelos de Laguerre com atraso de baixa ordem ótimos com base na resposta ao degrau de um processo. Estes modelos usam uma estimativa do polo ótimo calculada diretamente a partir dos dados coletados e requer, como conhecimento prévio, apenas estimativas não necessariamente muito acuradas do tempo de acomodação e da constante de tempo dominante do sistema, os quais podem ser extraídos do próprio experimento de identificação. Por causa da abordagem discreta, o polo ótimo pode ser procurado dentro de um intervalo fixo dentro do círculo unitário. O atraso é incluído na estimação de parâmetros e é escolhido como o valor que fornece a melhor estimativa dentro de um faixa pré-definida.

Nas simulações numéricas e experimentos realizados, os modelos de primeira ordem beneficiaram-se das vantagens de condicionamento numérico derivadas das propriedades de ortonormalidade das funções de Laguerre, mas também foi possível gerar com eles aproximações significativas, pela inclusão do atraso, de processos com atraso aparente, como a simulação numérica 3. Os modelos de segunda ordem mostraram ser suficientemente flexíveis para modelar a influência de polos múltiplos e zeros no processo. Esta característica é útil para proporcionar o uso de um único método para estimação de uma ampla variedade de sistemas e é uma vantagem quando comparado com muitos métodos de estimação de modelos de baixa ordem que requerem um método específico para cada tipo de sistema. O atraso incluído no modelo promoveu um melhoramento adicional na

aproximação da resposta ao degrau com relação a funções de base ortonormais convencionais. Modelos de terceira ordem foram levados em consideração e a inclusão de um termo de atraso para compensar dinâmicas de alta ordem não tendeu a aumentar significativamente a acurácia dos modelos nos casos estudados, em que atrasos reais não foram analisados, mas apenas atrasos aparentes.

Capítulo 5

Identificação com Funções de Kautz a Dois Parâmetros Reais

5.1 Introdução

Em situações em que as dinâmicas a ser modeladas sejam mais complexas, a simplicidade encontrada nas funções de Laguerre torna-se uma limitação, pois torna-se mais difícil de se gerar boas aproximações com um número reduzido de parâmetros. Um exemplo de situação desse tipo ocorre quando os polos do sistema são dispersos e zeros estão presentes. Do mesmo modo que condições de otimalidade são deduzíveis analiticamente para estimações com funções de Laguerre, há condições que são satisfeitas quando dois polos reais são usados simultaneamente, o que caracteriza o uso de funções de Kautz a dois parâmetros reais. A complexidade computacional cresce rapidamente à medida que o número de polos aumenta, já que o problema de otimização é agora multidimensional.

Neste capítulo, propõe-se uma abordagem em dois passos para encontrar polos de Kautz a dois parâmetros reais quase ótimos. Esta abordagem consiste em reduzir o problema a um grau de liberdade por vez, ou seja, problemas de otimização unidimensionais consecutivos: o primeiro visa a encontrar uma região onde um par de polos a uma razão fixa é ótimo; o segundo é usado para encontrar a distância ótima entre os polos. Apenas o caso de tempo contínuo será provado aqui, porém, analogamente ao que é observado em (SILVA, 1994), as condições permanecem as mesmas independentemente de se utilizar uma abordagem contínua ou discreta.

5.2 Posição Ótima de um Par de Polos Reais a uma Razão Fixa

Um procedimento similar ao seguido em (CLOWES, 1965) e (KING, 1969) será usado para obter as condições de otimalidade para o caso onde tem-se um par de polos a uma dada razão e deseja-se encontrar a sua localização ótima quanto ao erro de aproximação gerado pelo modelo correspondente. Utilizando a notação descrita nos capítulos anteriores, sejam os polos das referidas funções de Kautz a dois parâmetros reais, aqui denotadas por $L(s)$, definidos como $\{\xi_{2k-1} = -\alpha_1, \xi_{2k} = -\alpha_2 \mid k = 1, 2, \dots, n/2\}$. As funções, então, são definidas como:

$$L_{2k-1}(s) = \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{s + \alpha_1} \left(\frac{s - \alpha_1}{s + \alpha_1} \frac{s - \alpha_2}{s + \alpha_2} \right)^{k-1} \quad (5.1)$$

$$L_{2k}(s) = \frac{\sqrt{2\alpha_2}}{s + \alpha_2} \frac{s - \alpha_1}{s + \alpha_1} \left(\frac{s - \alpha_1}{s + \alpha_1} \frac{s - \alpha_2}{s + \alpha_2} \right)^{k-1}. \quad (5.2)$$

Sejam $\alpha_1 = p$ e $\alpha_2 = rp$, onde r é constante e p é a variável a ser otimizada. Então, uma expansão em funções de Kautz baseadas nesses polos seria:

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k^T V_k(s), \quad (5.3)$$

em que,

$$V_k(s) = [L_{2k-1}(s), L_{2k}(s)]^T \quad (5.4)$$

$$L_{2k-1}(s) = \frac{\sqrt{2p}}{s + p} \left(\frac{s - p}{s + p} \frac{s - rp}{s + rp} \right)^{k-1} \quad (5.5)$$

$$L_{2k}(s) = \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \left(\frac{s - p}{s + p} \frac{s - rp}{s + rp} \right)^{k-1} \quad (5.6)$$

e

$$K_k = [c_{2k-1}, c_{2k}]^T. \quad (5.7)$$

Uma expansão finita obtida por meio de um truncamento da expansão (5.3) em n termos é definida como:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n/2} K_k^T V_k(s). \quad (5.8)$$

O objetivo aqui é aproximar o sistema com dois polos, o que corresponde a estabelecer

que $n = 2$. Então, a aproximação desejada é dada por:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= K_1^T V_1(s) \\ &= [c_1, c_2][L_1(s), L_2(s)]^T \\ &= c_1 L_1(s) + c_2 L_2(s) \end{aligned} \quad (5.9)$$

O erro de aproximação $E(s)$ no domínio da frequência é dado por:

$$E(s) = G(s) - G_1(s), \quad (5.10)$$

cujo quadrado da norma induzida pelo produto interno (3.30) é igual a:

$$\begin{aligned} |E(s)|^2 &= |G(s) - G_1(s)|^2 \\ &= \langle G(s) - G_1(s), G(s) - G_1(s) \rangle. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Devido à ortonormalidade das funções $V_k(s)$:

$$\begin{aligned} \langle G(s), G_1(s) \rangle &= \langle G(s), K_1^T V_1(s) \rangle \\ &= \llbracket G(s), V_1(s) \rrbracket K_1 \\ &= K_1^T K_1 = \|K_1\|^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \langle G_1(s), G_1(s) \rangle &= \langle K_1^T V_1(s), K_1^T V_1(s) \rangle \\ &= K_1^T \llbracket V_1(s), V_1(s) \rrbracket K_1 \\ &= K_1^T K_1 = \|K_1\|^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$(5.14)$$

Logo, o desenvolvimento de (5.11) leva a:

$$\begin{aligned} |E(s)|^2 &= |G(s)|^2 - \|K_1\|^2 - \|K_1\|^2 + \|K_1\|^2 \\ &= |G(s)|^2 - \|K_1\|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Seja o problema de minimizar o erro $|E(s)|^2$. Fazendo explícita a dependência do parâmetro p , o problema de minimização pode ser descrito por:

$$\min_p |E(s,p)|^2 = \min_p |G(s)|^2 - \|K_1(p)\|^2. \quad (5.16)$$

Como $G(s)$ é constante em relação a p , o problema pode ser posto de outra maneira,

i.e. como um problema de maximizar $\|K_1(p)\|^2$:

$$\min_p |E(s,p)|^2 = \min_p |G(s)|^2 - \|K_1(p)\|^2 \Leftrightarrow \max_p \|K_1(p)\|^2. \quad (5.17)$$

A norma quadrada de $K_1(p)$ é, então, definida como a função de custo $V(p)$ a ser maximizada. Substituindo $K_1(p)$ pelo vetor que ele representa, tem-se:

$$V(p) = \|K_1(p)\|^2 = \|[c_1(p), c_2(p)]\|^2 = c_1(p)^2 + c_2(p)^2. \quad (5.18)$$

Derivando $V(p)$ e igualando-o a zero (de agora em diante, o parâmetro p será deixando implícito por conveniência):

$$\frac{dV}{dp} = 2c_1 \frac{dc_1}{dp} + 2c_2 \frac{dc_2}{dp} = 0. \quad (5.19)$$

Valendo-se da propriedade de ortonormalidade das funções de base utilizadas, a derivada dos coeficientes c_1 e c_2 com relação a p para este caso pode ser encontrada por correlação por meio de:

$$\frac{dc_i}{dp} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \frac{dL_i(-j\omega)}{dp} d\omega, \quad i = 1, 2. \quad (5.20)$$

É possível notar que a relação entre as derivadas de c_i e $L_i(s)$ é linear. Portanto, se alguma relação linear for encontrada entre as derivadas das funções ortonormais, esta relação é também válida para as derivadas dos coeficientes correspondentes.

Multiplicando-se as derivadas por $2p$, tem-se:

$$\begin{aligned} 2p \frac{dL_1(s)}{dp} &= 2p \frac{d}{dp} \left(\frac{\sqrt{2p}}{s+p} \right) \\ &= 2p \frac{\frac{1}{2\sqrt{2p}} 2(s+p) - \sqrt{2p}}{(s+p)^2} \\ &= 2p \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{s+p-2p}{(s+p)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2p}}{s+p} \frac{s-p}{s+p}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 2p \frac{dL_2(s)}{dp} &= 2p \frac{d}{dp} \left(\frac{\sqrt{2pr} s - p}{s + rp s + p} \right) \\
 &= 2p \frac{1}{2\sqrt{2p}} \frac{2r(s + rp) - r\sqrt{2rp}}{(s + rp)^2} \frac{s - p}{s + p} + \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \frac{-(s + p) - (s - p)}{(s + p)^2} \\
 &= 2p \frac{r}{\sqrt{2rp}} \frac{s + rp - 2rp}{(s + rp)^2} \frac{s - p}{s + p} + \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \frac{-2s}{(s + p)^2} \\
 &= \frac{2rp}{s + rp} \frac{s - rp}{s + rp} \frac{s - p}{s + p} - \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \frac{2s}{(s + p)^2} \\
 &= \frac{2rp}{s + rp} \frac{s - rp}{s + rp} \frac{s - p}{s + p} - \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \left[\frac{2s}{(s + p)^2} + \frac{(s - p)^2}{(s + p)^2} - \frac{(s - p)^2}{(s + p)^2} \right] \\
 &= \frac{2rp}{s + rp} \frac{s - rp}{s + rp} \frac{s - p}{s + p} - \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \left[\frac{(s + p)^2}{(s + p)^2} - \frac{(s - p)^2}{(s + p)^2} \right] \\
 &= \frac{2rp}{s + rp} \frac{s - rp}{s + rp} \frac{s - p}{s + p} - \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} + \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \frac{(s - p)^2}{(s + p)^2}. \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Definam-se as seguintes funções auxiliares:

$$L_a(s) = \frac{\sqrt{2p} s - p}{s + p s + p} \tag{5.23}$$

$$L_b(s) = \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \left(\frac{s - p s - rp}{s + p s + rp} \right) \tag{5.24}$$

$$L_c(s) = \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \tag{5.25}$$

$$L_d(s) = \frac{\sqrt{2rp}}{s + rp} \left(\frac{s - p}{s + p} \right)^2. \tag{5.26}$$

Estas funções são definidas porque, embora elas sejam baseadas nos mesmos polos usados na expansão ortonormal (5.3), eles não pertencem a ela, o que é claro a partir de uma comparação com as formas gerais (5.5) e (5.6). Todavia, estas funções podem ser consideradas parte de outras expansões ortonormais e a realização do produto interno delas com a função $G(s)$ fornece os coeficientes associados aos termos de tais expansões.

Estes coeficientes auxiliares são definidos como:

$$c_a = \langle G(s), L_a(s) \rangle \quad (5.27)$$

$$c_b = \langle G(s), L_b(s) \rangle \quad (5.28)$$

$$c_c = \langle G(s), L_c(s) \rangle \quad (5.29)$$

$$c_d = \langle G(s), L_d(s) \rangle \quad (5.30)$$

As derivadas das funções $L_1(s)$ e $L_2(s)$ com relação a p podem ser escritas como:

$$\frac{dL_1(s)}{dp} = \frac{1}{2p} L_a(s) \quad (5.31)$$

$$\frac{dL_2(s)}{dp} = \frac{1}{2p} [L_b(s) - L_c(s) + L_d(s)] \quad (5.32)$$

A partir da relação de linearidade entre as funções e seus coeficientes correspondentes, tem-se:

$$\frac{dc_1}{dp} = \frac{1}{2p} c_a \quad (5.33)$$

$$\frac{dc_2}{dp} = \frac{1}{2p} (c_b - c_c + c_d). \quad (5.34)$$

Substituindo (5.33) e (5.34) em (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dp} &= 2c_1 \frac{1}{2p} c_a + 2c_2 \frac{1}{2p} (c_b - c_c + c_d) = 0 \\ c_1 c_a + c_2 (c_b - c_c + c_d) &= 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

encontra-se a condição de otimalidade para a alocação do par de polos reais a uma razão fixa.

5.3 Razão Ótima Entre Dois Polos Reais em Torno de um Ponto Fixo

Agora estuda-se a possibilidade de calcular os polos variando a razão entre eles. Considere-se um valor fixo p_m ; os polos das funções ortonormais serão então determinados com base em p_m , a saber, $\alpha_1 = p_m/\sqrt{r}$ and $\alpha_2 = p_m\sqrt{r}$, de modo que p_m é a média geométrica entre

dois polos cuja razão é igual a r . Então, as funções $L_1(s)$ e $L_2(s)$ são definidas como:

$$L_1(s) = \frac{\sqrt{2p_m/\sqrt{r}}}{s + p_m/\sqrt{r}} \quad (5.37)$$

$$L_2(s) = \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}}. \quad (5.38)$$

Similarmente, a função de custo é agora:

$$\frac{dV}{dr} = 2c_1 \frac{dc_1}{dr} + 2c_2 \frac{dc_2}{dr} \quad (5.39)$$

O próximo passo é, então, calcular as derivadas de (5.37) e (5.38) e usar a relação de linearidade entre eles e seus correspondentes coeficientes para determinar as derivadas dos últimos. O procedimento para calcular as derivadas é análogo ao caso anterior com p como a variável de otimização, de modo que os resultados finais serão apresentados diretamente. As derivadas das funções de base são:

$$\frac{dL_1}{dr} = -\frac{1}{4r} \frac{\sqrt{2p_m/\sqrt{r}}}{s + p_m/\sqrt{r}} \frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dr} &= \frac{1}{4r} \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \frac{s - p_m\sqrt{r}}{s + p_m\sqrt{r}} \frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}} \\ &- \frac{1}{4r} \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} + \frac{1}{4r} \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \left(\frac{s - p_m\sqrt{r}}{s + p_m\sqrt{r}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Mais uma vez, funções auxiliares são definidas, a saber:

$$L_a(s) = \frac{\sqrt{2p_m/\sqrt{r}}}{s + p_m/\sqrt{r}} \frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}} \quad (5.42)$$

$$L_b(s) = \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \left(\frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}} \frac{s - p_m\sqrt{r}}{s + p_m\sqrt{r}} \right) \quad (5.43)$$

$$L_c(s) = \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \quad (5.44)$$

$$L_d(s) = \frac{\sqrt{2p_m\sqrt{r}}}{s + p_m\sqrt{r}} \left(\frac{s - p_m/\sqrt{r}}{s + p_m/\sqrt{r}} \right)^2, \quad (5.45)$$

das quais se obtêm os correspondentes coeficientes c_a , c_b , c_c e c_d .

Substituindo estes resultados na função de custo (5.39):

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= 2c_1 \frac{1}{4r} c_a + 2c_2 \frac{1}{4r} (c_b - c_c + c_d) = 0 \\ c_1 c_a + c_2 (c_b - c_c + c_d) &= 0.\end{aligned}\tag{5.46}$$

Fica claro que a mesma condição de otimalidade usada para a otimização da localização na seção anterior é válida para a otimização da distância nesta seção, independentemente da diferença na variável de otimização. É interessante notar que igualar o primeiro termo da equação, $c_1 c_a$, a zero é equivalente a satisfazer a condição para obtenção de polos ótimos de Laguerre apresentado no capítulo anterior, sendo o segundo termo um complemento originado do fato de haver dois polos sendo alocados.

5.4 Estimação em dois passos de modelos de Kautz a dois parâmetros reais

O primeiro método de estimação proposto consiste em uma combinação das duas estimativas apresentadas. Inicialmente, deve-se fixar uma razão entre os polos e aplicar as condições de otimalidade (5.36) para encontrar a posição ótima para este par de polos. Esta razão não deve ser muito grande; sugere-se o uso de uma razão de 2. Em seguida, deve-se computar a média geométrica entre os dois pontos e usar esse valor como o valor de referência para aplicar as condições de otimalidade (5.46) para encontrar a razão ótima entre os polos. Essa metodologia, de agora em diante chamada de Kautz-PR (Posição-Razão), provavelmente não fornecerá os polos de Kautz ótimos, porém, fornecerá uma aproximação quase-ótima que será suficiente para prover boas aproximações em caso de ocorrência de polos esparsos e zeros no sistema identificado.

Uma outra possibilidade sugerida para realizar estimação em dois passos é substituir o primeiro passo por uma estimação do polo de Laguerre de um modelo de segunda ordem — o que é conceitualmente equivalente a realizar uma otimização da posição de polos de Kautz para uma razão unitária, mas oferece vantagens de implementação no que se refere à complexidade, como mencionado na introdução deste capítulo. Este polo pode então ser usado como o ponto de referência para encontrar a razão ótima usando as condições (5.46). Este segundo método será referido como Kautz-LR (Laguerre-Razão).

5.5 Questões de Implementação

Como pode-se notar das condições de otimalidade (5.36) e (5.46), a otimização dos polos em relação a uma variável requer o cálculo de seis coeficientes. Se forem calculados analiticamente, o produto interno é a solução para encontrar seus valores por correlação. Assumindo que a função de transferência $G(s)$ do sistema verdadeiro é desconhecida e que se deva calcular os coeficientes a partir dos dados de entrada e saída, os coeficientes são obtidos a partir de estimativas de mínimos quadrados. Não é possível calculá-los todos com uma única estimativa pelo fato de não pertencerem à mesma expansão em OBFs, mas eles podem ser agrupados de tal modo que precise-se calcular o mínimo possível de parâmetros para cada ponto analisado.

Sejam p_1 e p_2 variáveis genéricas usadas para indicar os polos da expansão de Kautz — na otimização da posição, $p_1 = p$ e $p_2 = rp$, enquanto, na otimização da razão, $p_1 = p/\sqrt{r}$ e $p_2 = p\sqrt{r}$. Os coeficientes c_1 e c_2 são realmente parte da expansão de Kautz e são calculados juntamente fazendo — de acordo com a notação apresentada nas equações (2.32) e (2.33) — $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_1(s), L_2(s)]$. As funções auxiliares $L_a(s)$ e $L_d(s)$ podem ser consideradas parte de uma expansão ortonormal baseada em um conjunto de polos dados por $\{\xi_1 = \xi_2 = p_1, \xi_3 = p_2\}$, tal que $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\sqrt{2p_1}}{s+p_1}, L_a(s), L_d(s)]$, e os coeficientes c_a e c_d são dados no segundo e no terceiro parâmetros estimados. A mesma estratégia pode ser usada para calcular c_b e c_c : eles podem ser considerados como o terceiro e o primeiro coeficientes, respectivamente, de uma expansão ortonormal envolvendo o conjunto de polos $\{\xi_1 = p_2, \xi_2 = p_1, \xi_3 = p_2\}$, tal que $\gamma(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_c(s), \frac{\sqrt{2p_1}}{s+p_1} \frac{s-p_2}{s+p_2}, L_b(s)]$.

Outra questão a ser tratada é o intervalo de busca. Para a otimização da posição no domínio do tempo contínuo, tendo definido uma estimacão da constante de tempo do processo T , sugere-se procurar o polo ótimo p dentro do intervalo $[-5/T, -0,5/T]$, o que corresponde a procurar no entorno do polo dominante estimado. Quanto à otimização da razão, o intervalo sugerido é $[0,1^2; 5^2]$, em que a forma quadrática deve-se ao fato dos polos serem dados como funções de \sqrt{r} . No domínio do tempo discreto, o intervalo de busca para otimização da razão é indiferente, enquanto parece suficiente, tendo definido o tempo de amostragem T_s como $0,1T$, realizar a otimização da posição procurando p no intervalo $[0,4; 1]$.

5.6 Simulações Numéricas

Exemplos são usados para ilustrar a aplicação dos métodos de otimização propostos e para comparar os resultados àqueles obtidos com modelos de Laguerre ótimos de 2ª ordem. Três processos foram sujeitos a uma entrada em degrau unitário e tiveram sua constante

de tempo dominante T estimada por meio de observação da resposta ao degrau. A identificação foi realizada no domínio do tempo contínuo.

Os processos analisados e os correspondentes parâmetros de simulação foram:

- $G_1(s) = \frac{s+1}{2s^2+3s+1}$, $T = 3$ s;
- $G_2(s) = \frac{(10s+1)(100s+1)}{(s+1)(30s+1)(1000s+1)}$, $T = 1200$ s;
- $G_3(s) = \frac{8(0,25s+1)(s+1)(2,5s+1)}{(s+1)(4s+1)(s^2+6s+10)}$, $T = 18$ s;
- $G_3(s) = \frac{0,2s^2+0,3s+0,7}{s^3+3s^2+2,7s+0,7} = \frac{0,2856(s^2+1,5s+3,5)}{(0,646s+1)(s+1)(2,211s+1)}$, $T = 1,5$ s;

Para tornar mais claro como a otimização em duas etapas ocorre, dá-se primeiro uma descrição mais detalhada do procedimento usando como exemplo o processo $G_3(s)$. Na figuras 5.1 e 5.2, pode-se observar os gráficos gerados pela avaliação das funções no termo do lado esquerdo das equações (5.36) e (5.46) para 60 valores de p e r , respectivamente, distribuídos linearmente ao longo dos intervalos sugeridos, a saber, $[-5/T; -0,5/T] = [-3,333; -0,3333]$ e $[0,1; 6]$. Os pontos de interesse na curva são aqueles onde elas cruzam o eixo horizontal, *i.e.* onde elas satisfazem a condição de otimalidade. Se há mais de um cruzamento de zero, avalia-se os erros nestes pontos para selecionar o ótimo global dentro do intervalo.

Para o método Kautz-PR, uma vez que é selecionado o p ótimo para a otimização da posição, usa-se este valor como o p_m para a otimização da razão. Os polos obtidos após a otimização da razão com $r = 2$ foram $p = -2,386$ e $rp = -4,771$ (figura 5.1), resultando em uma média geométrica de $p_m = -3,374$. Em seguida, em torno deste último valor foi realizada uma otimização da razão, resultando, então, em uma razão $r = 0,04$ (figura 5.2) e polos $p_m/\sqrt{r} = -16,87$ e $p_m\sqrt{r} = -0,6747$.

Aplicando o método Kautz-LR ao mesmo processo $G_3(s)$, o ponto p_m é obtido a partir da otimização do polo ótimo de Laguerre de segunda ordem, de onde se tem que $p_m = -0,8602$. A otimização da razão realizada em seguida gera uma razão $r = 10,24$ e os polos $p_m/\sqrt{r} = -0,2688$ e $p_m\sqrt{r} = -2,753$.

Na tabela 5.1 apresentam-se os valores das variáveis envolvidas durante a execução dos métodos que geram os modelos Kautz-PR e Kautz-LR, respectivamente. Os polos dos modelos não estão incluídos nessa tabela e serão apresentados mais à frente, quando forem mostrados os modelos obtidos.

A amplitude do erro no domínio do tempo entre a resposta ao degrau verdadeira e as saídas de cada modelo foi avaliado por meio do erro médio quadrático (MSE, do

Figura 5.1: Gráfico de $c_1c_a + c_2(c_b - c_c + c_d)$ em função de p para a aplicação da otimização da posição ao processo $G_3(s)$. A cruz vermelha destaca o ponto escolhido.

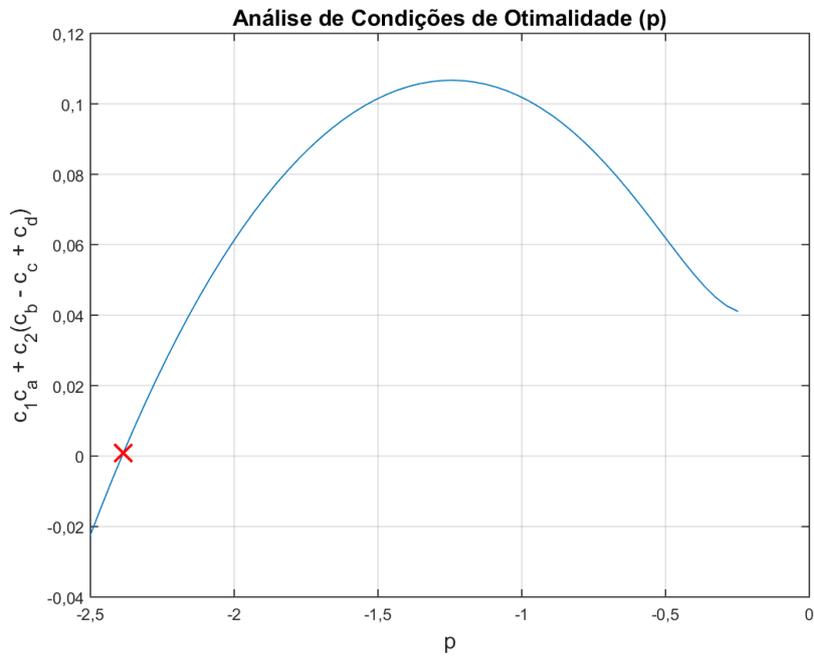


Figura 5.2: Gráfico de $c_1c_a + c_2(c_b - c_c + c_d)$ em função de r para a aplicação da otimização da razão ao processo $G_3(s)$. A cruz vermelha destaca o ponto escolhido.

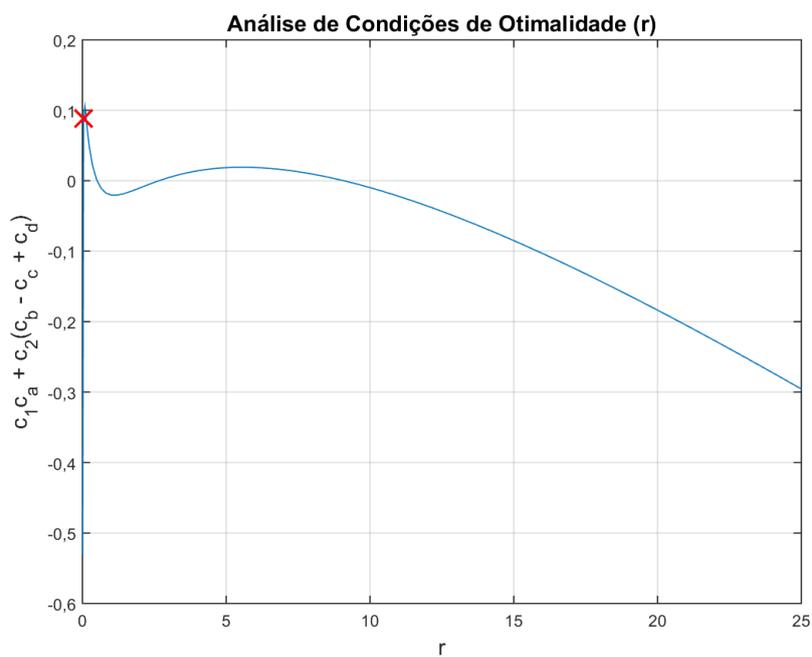


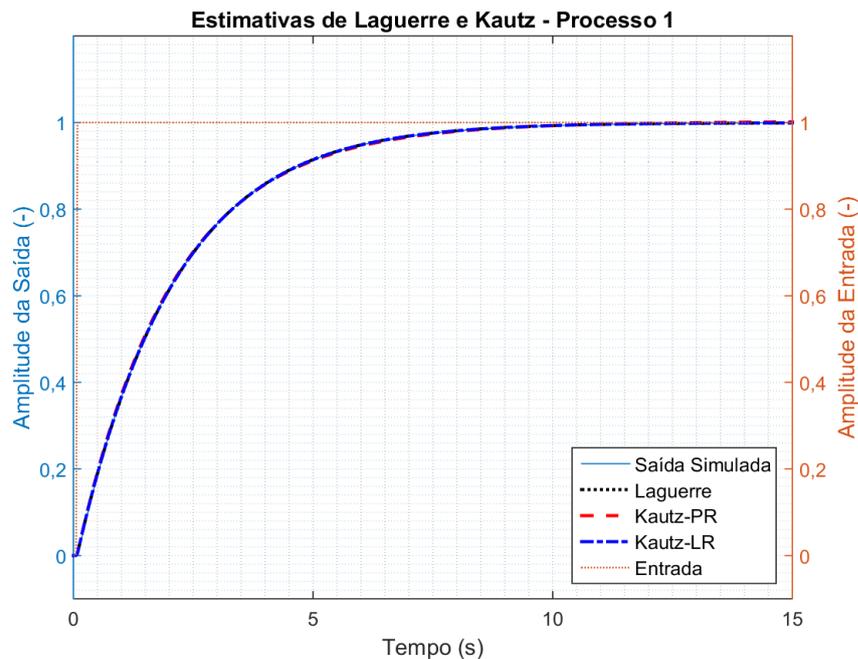
Tabela 5.1: Valores das variáveis envolvidas na obtenção dos modelos Kautz-PR para os quatro processos analisados.

Processo	Kautz-PR			Kautz-LR		
	Polos Intermediários (p e rp)		Média geométrica (p_m)	Razão (r)	Polo de Laguerre 2 ^a ordem (p_m)	Razão (r)
$G_1(s)$	-0,2429	-0,4859	-0,3436	2,25	-0,5480	1
$G_2(s)$	-0,002069	-0,004138	-0,002926	10,24	-0,002069	0,49
$G_3(s)$	-2,386	-4,771	-3,3738	0,04	-2,386	10,24

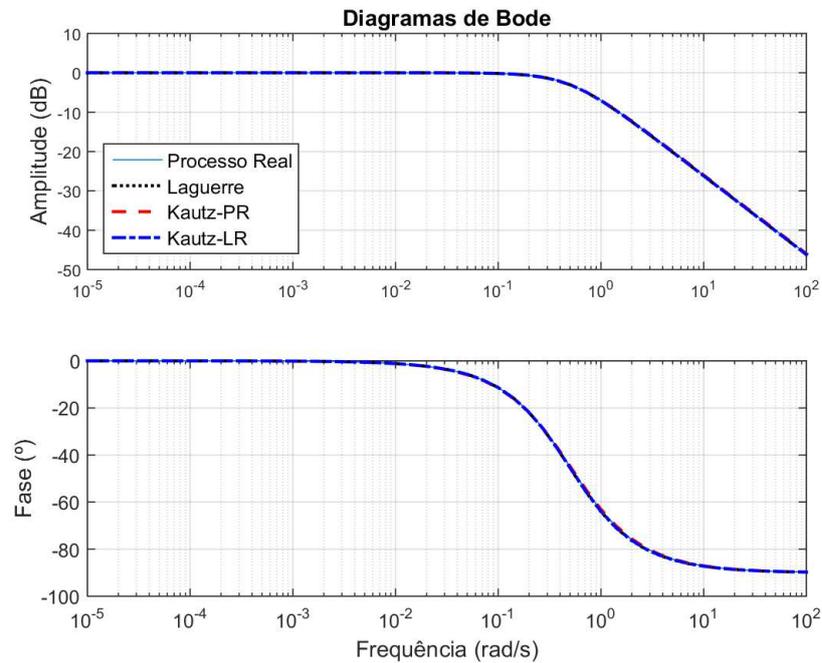
inglês *Mean Square Error*), dado por $MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{verdadeiro_i} - y_{modelo_i})^2$. Já a medida da amplitude do erro no domínio da frequência foi calculado por meio da equação $MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(j\omega_i) - G_{model}(j\omega_i)|^2$, em que $|\cdot|$ significa a amplitude do argumento complexo. Em ambos os casos, quanto maior a estimativa, mais próximo de 0 é o MSE.

Na figura 5.3, mostra-se a resposta ao degrau do processo verdadeiro e as dos modelos de Laguerre e de Kautz estimados para o processo $G_1(s)$, enquanto, na figura 5.4, pode-se observar os diagramas de Bode correspondentes. Os modelos de Kautz obtidos por meio dos métodos Kautz-PR e Kautz-LR são mostrados na tabela 5.2, assim como os modelos de Laguerre de 2^a ordem para comparação.

Figura 5.3: Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2^a ordem e de Kautz para o processo $G_1(s)$.



Este exemplo é apresentado apenas com dois objetivos. O primeiro é o de evidenciar que o uso do método apresentado pode não ser tão útil em casos em que o sistema

Figura 5.4: Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_1(s)$.

 Tabela 5.2: Modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_1(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau.

Tipo	Modelo	MSE no Domínio do Tempo	MSE no Domínio da Frequência
Processo $G_1(s)$	$\frac{s+1}{2s^2+3s+1}$	0	0
Laguerre 2ª ordem	$\frac{1,565s+1}{(1,785s+1)^2}$	0,0005425	0,001344
Kautz-PR	$\frac{4,243s+1}{(1,941s+1)(4,367s+1)}$	0,001838	0,002979
Kautz-LR	$\frac{1,640s+1}{(1,825s+1)^2}$	0,0004529	0,001079

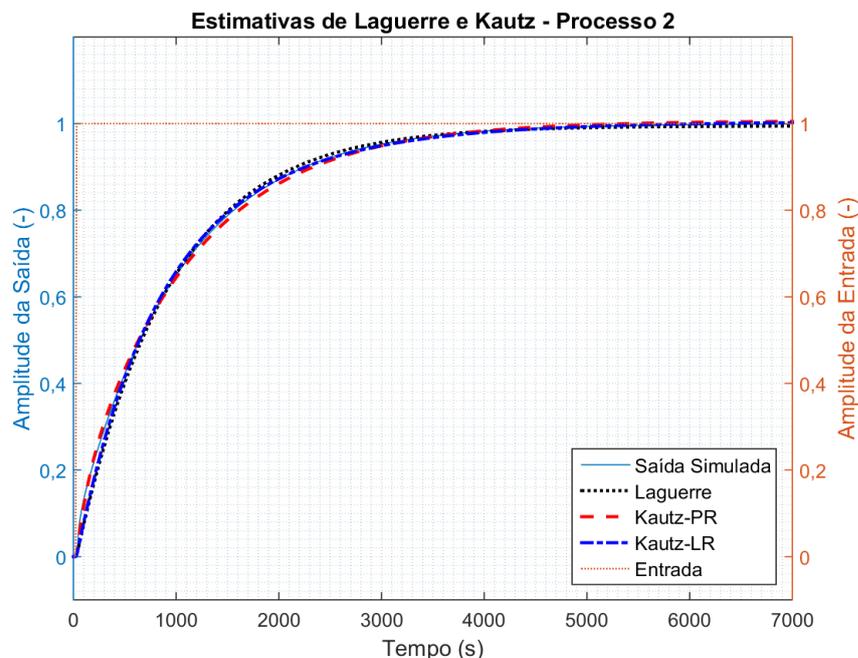
apresenta uma dinâmica muito simples. No caso do processo $G_1(s)$, o ajuste encontrado com o modelo de Laguerre já é muito baixo, de ordem de grandeza 10^{-4} , de modo que nem a melhora obtida com o modelo Kautz-LR nem a piora observada com o modelo Kautz-PR podem ser percebidas facilmente nem significam uma diferença significativa no modelo identificado. Devido aos custos computacionais associados aos métodos desenvolvidos, o modelo de Laguerre seria, nesse caso, muito mais conveniente de ser utilizado.

O segundo objetivo é o de mostrar que os métodos de otimização unidimensional utilizados conduzem, de fato, a estimativas bem próximas dos valores ótimos para os polos, nesse caso, o polo de Laguerre. Focalizando no caso do método Kautz-PR, que utiliza as duas otimizações estudadas neste capítulo, o modelo gerado por ele conduziu

a um polo muito próximo do polo ótimo de Laguerre. O método Kautz-LR, para esses casos, parece ser mais recomendável por utilizar o polo ótimo de Laguerre como ponto de partida, possibilitando a obtenção de uma razão igual a 1 na etapa em que esta variável é otimizada caso um modelo de 2ª ordem de Laguerre seja, de fato, suficiente para modelar o processo.

Na figura 5.5, mostra-se a resposta ao degrau do processo verdadeiro e as dos modelos de Laguerre e de Kautz estimados para o processo $G_2(s)$, enquanto, na figura 5.6, pode-se observar os diagramas de Bode correspondentes. Os modelos de Kautz obtidos por meio dos métodos Kautz-PR e Kautz-LR são mostrados na tabela 5.3, assim como os modelos de Laguerre de 2ª ordem para comparação.

Figura 5.5: Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_2(s)$.



Apesar da ordem de grandeza dos erros ainda ser baixa nesse caso, a diferença entre os modelos observada na tabela é também visível nos gráficos. Para esse caso em que o processo apresenta polos e zeros espalhados, nota-se que ambos os modelos de Kautz geram erros de aproximação menores que o modelo de Laguerre. É possível observar no gráfico de Bode (figura 5.6) que apenas as dinâmicas em baixa frequência puderam ser capturadas, mas o modelo Kautz-PR, que não parte do polo de Laguerre para a otimização da razão, aproxima a dinâmica por uma faixa de frequência cerca de uma oitava maior e isto lhe permite gerar uma MSE menor.

Na figura 5.7, mostra-se a resposta ao degrau do processo verdadeiro e as dos modelos de Laguerre e de Kautz estimados para o processo $G_3(s)$, enquanto, na figura 5.4, pode-se

Figura 5.6: Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_2(s)$.

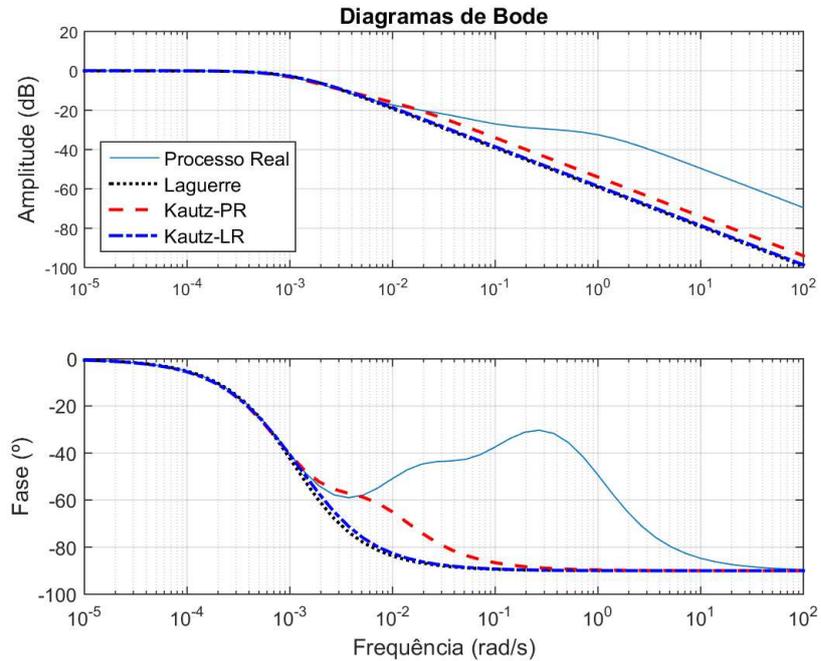


Tabela 5.3: Modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_2(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau.

Tipo	Modelo	MSE no Domínio do Tempo	MSE no Domínio da Frequência
Processo $G_2(s)$	$\frac{(10s + 1)(100s + 1)}{(s + 1)(30s + 1)(1000s + 1)}$	0	0
Laguerre 2ª ordem	$\frac{929,4s + 1}{(919,1s + 1)^2}$	0,007180	0,02524
Kautz-PR	$\frac{231,4s + 1}{(106,8s + 1)(1093s + 1)}$	0,005516	0,01798
Kautz-LR	$\frac{1055s + 1}{665,3s + 1)(1358s + 1)}$	0,004701	0,02327

observar os diagramas de Bode correspondentes. Os modelos de Kautz obtidos por meio dos métodos Kautz-PR e Kautz-LR são mostrados na tabela 5.4, assim como os modelos de Laguerre de 2ª ordem para comparação.

A dinâmica do processo $G_3(s)$ apresenta uma mudança atípica na taxa de variação da saída. Esta é a situação para a qual se pensou ser melhor utilizar modelos de Kautz, de modo que o potencial dos métodos apresentados se mostra de fato neste terceiro caso.

O modelo de Laguerre dá uma aproximação com $MSE = 0,03209$ no domínio do tempo. Pode-se notar na tabela 5.4 que o Kautz-PR neste caso captura a dinâmica com maior precisão que o modelo de Laguerre, com uma redução de aproximadamente 23% na MSE. Com o modelo Kautz-LR, a melhora alcançada é notável: a MSE obtida corresponde

Figura 5.7: Respostas ao degrau dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_3(s)$.

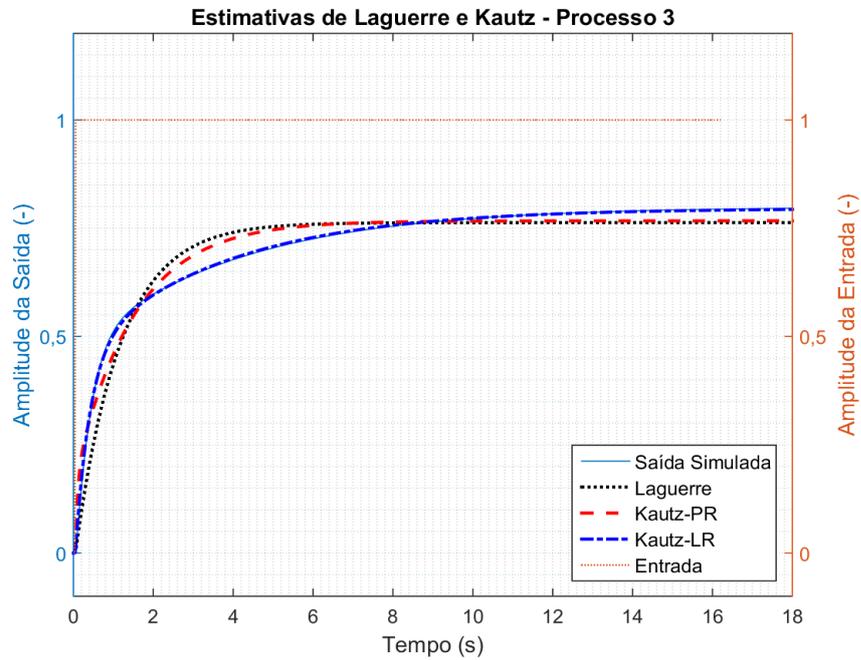
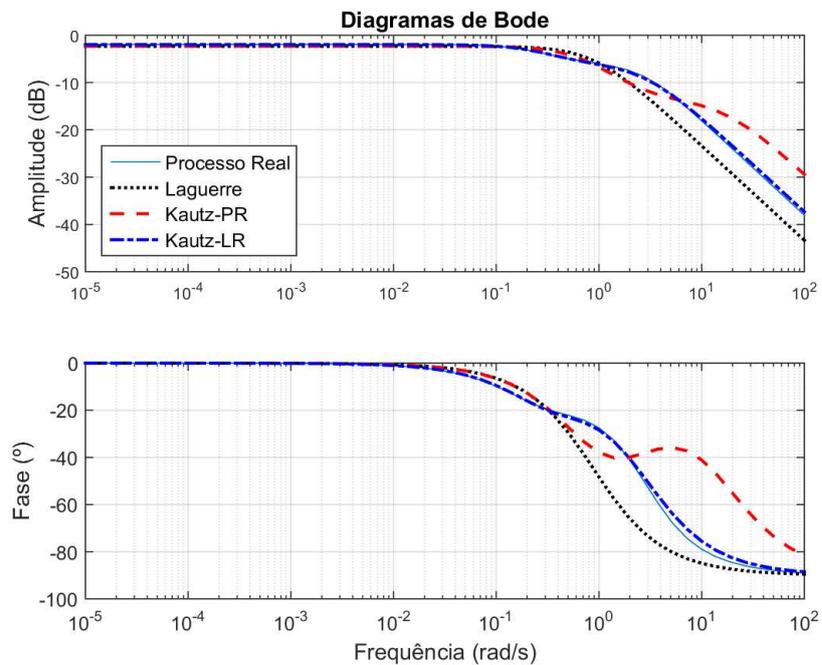


Figura 5.8: Diagramas de Bode dos modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz para o processo $G_3(s)$.



a aproximadamente 7,5% da MSE registrada com o modelo de Laguerre. No domínio da frequência, pode-se perceber reduções semelhantes, as quais são verificadas também nos gráficos, em que o modelo Kautz-LR captura tanto as variações de todo o regime

Tabela 5.4: Modelos de Laguerre de 2ª ordem e de Kautz a dois parâmetros reais estimados para o processo $G_3(s)$ e o MSE gerado por suas respostas ao degrau.

Tipo	Modelo	MSE no Domínio do Tempo	MSE no Domínio da Frequência
Processo $G_3(s)$	$\frac{(0,2s^2 + 0,3s + 0,7)}{(s + 1,5477)(s + 1)(s + 0,4523)}$	0	0
Laguerre 2ª ordem	$\frac{(1,123s + 1)}{(1,123s + 1)^2}$	0,03209	0,05881
Kautz-PR	$\frac{0,3932s + 1}{(0,05928s + 1)(1,482s + 1)}$	0,02482	0,05491
Kautz-LR	$\frac{2,309s + 1}{(0,3632s + 1)(3,720s + 1)}$	0,002378	0,005901

transitório do processo quanto o ganho estático.

5.7 Conclusão

Neste capítulo, foram desenvolvidas as condições para otimização unidimensional de um par de polos reais e estas foram usadas para definir métodos para estimar modelos de Kautz a dois parâmetros reais. Foram encontradas condições de otimalidade para a posição de dois polos a uma razão fixa e para a razão entre dois polos centrados, por média geométrica, em um dado ponto de referência. O ponto de referência para a otimização da razão pode ser a média geométrica dos dois polos definidos pela otimização da posição, o que caracteriza o método Kautz-PR, ou a o polo ótimo de Laguerre de 2ª ordem, caracterizando o método Kautz-LR.

Enquanto esses métodos não fornecem os polos de Kautz a dois parâmetros reais de fato ótimos, ambos são capazes de gerar estimativas melhores que modelos de Laguerre de 2ª ordem, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência, de modo que, para processos com resposta ao degrau não-oscilatória, os métodos geram modelos melhores, do ponto de vista de erros de estimação, que modelos de Laguerre tanto quanto maiores forem as mudanças nas taxas de variação da resposta ao degrau do processo, as quais podem estar presentes quando o processo identificado tem polos esparsos e zeros.

Capítulo 6

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, foram estudadas as características fundamentais das funções de base ortonormais e suas aplicações na área de identificação de sistemas. Pode-se confirmar por meio de exemplos como a propriedade de ortonormalidade permite desfrutar de vantagens numéricas que possibilitam a obtenção de modelos simples e bem representativos dos processos estudados. Especialmente, ilustrou-se a necessidade de uma escolha ótima dos polos das funções de base ortonormais para que o número de parâmetros do modelo obtido possa ser reduzido.

Com base nos exemplos comparativos do capítulo 3, observou-se que a inclusão do atraso no modelo de baixa ordem ampliava a sua capacidade de representação do processo identificado. Então, propôs-se, no capítulo 4, um método prático para a obtenção de tais modelos de Laguerre de baixa ordem com atraso ótimos. O procedimento apresentado possibilita a geração de modelos diretamente a partir dos dados de entrada e saída da resposta ao degrau, requerendo apenas uma estimativa da constante de tempo do processo, a qual pode ser obtida com base nos próprios dados. As bem conhecidas condições de otimalidade são utilizadas para encontrar o polo ótimo de Laguerre, de modo que o número reduzido de parâmetros seja útil para o maior número possível de aplicações. Por meio das simulações e experimentos realizados, pode-se obter com os modelos de primeira ordem a capacidade de aproximação estendida a modelos com atrasos aparentes, possível por causa da inclusão do atraso no modelo. Os modelos de segunda ordem apresentaram um ótimo desempenho nos casos estudados, de modo que pouca vantagem foi observada na possibilidade analisada de se utilizar modelos de terceira ordem. Vale destacar que, em relação a outros métodos de identificação de modelos de segunda ordem, modelos de funções de base ortornormais são aplicados a uma gama de processos mais larga sem necessitar de processos distintos de identificação para cada tipo de processo, pois os filtros passa-tudo que as constituem incluem zeros no modelo.

Nas simulações numéricas e experimentos realizados, enquanto os modelos de primeira

ordem beneficiaram-se apenas das vantagens de condicionamento numérico derivadas das propriedades de ortonormalidade das funções de Laguerre. Os modelos de segunda ordem mostraram ser suficientemente flexíveis para modelar a influência de polos múltiplos e zeros no processo. Esta característica é útil para proporcionar o uso de um único método para estimação de uma ampla variedade de sistemas e é uma vantagem quando comparado com muitos métodos de identificação de modelos de baixa ordem que requerem um método específico para cada tipo de sistema, *e.g.* bajarangbali2014identification . O atraso incluído no modelo promoveu um melhoramento adicional na aproximação da resposta ao degrau com relação a funções de base ortonormais convencionais. Modelos de terceira ordem foram levados em consideração e a inclusão de um termo de atraso para compensar dinâmicas de alta ordem não tendeu a aumentar significativamente a acurácia dos modelos nos casos estudados, em que atrasos reais não foram analisados, mas apenas atrasos aparentes.

No caso específico de processos cujas respostas ao degrau apresentam mudanças severas na taxa de variação devido ao espalhamento dos polos e à influência de zeros, a utilização de modelos de Kautz em vez de modelos de Laguerre foi apresentada como possibilidade de solução. Nesse caso, para continuar desfrutando do benefício da otimalidade dos polos sem requerer a utilização de métodos de otimização não-linear muito complexos, foi sugerida uma abordagem de otimização em duas etapas de otimização unidimensional. Foram apresentados dois métodos, que consistem primeiramente em encontrar a posição ótima de um par de polos a razão fixa (Kautz-PR) ou do polo de Laguerre de segunda ordem (Kautz-LR) para, em seguida, calcular a razão ótima entre os polos. Não necessariamente os métodos fornecem os polos ótimos de Kautz e não foi percebida uma predominância de um deles no que se refere à capacidade de gerar erros de estimação menores, mas ambos foram considerados capazes de, nas condições específicas para as quais foram sugeridos, gerar modelos melhores que modelos de Laguerre, com reduções de erro potencialmente elevadas, como observado em um dos casos analisados, onde foi vista uma redução de mais de 90%.

Baseados nos avanços realizados até aqui, como possibilidades de trabalhos futuros, elencam-se os seguintes pontos:

- Os métodos desenvolvidos poderiam ser melhorados ao incorporar características vantajosas utilizadas em um método e não utilizadas no outro e também com aperfeiçoamentos mais especificamente ligados ao processo de otimização. No caso das OLPTDs, a identificação direta de modelo em tempo contínuo também poderia ser utilizada para gerar uma estimativa mais fina do atraso, já que este não seria limitado à escolha do tempo de amostragem, o qual é, por sua vez, limitado também pela dinâmica do sistema. Os métodos de otimização para a geração de modelos

de Kautz já foram implementados no domínio tempo contínuo, porém poderiam também incorporar o atraso para se beneficiar das vantagens que justificaram o uso das OLPTDs. Para o próprio cálculo do atraso, que foi realizado por meio de uma busca, podem ser realizados esforços para incorporá-lo na estimativa dos mínimos quadrados.

- É possível notar que todo o desenvolvimento foi realizado para modelos SISO, então, as implicações que a expansão da utilização desses métodos para a geração de modelos MIMO teriam na questão da estimativa do atraso e na otimização dos polos seria um passo natural a ser seguido para tornar os métodos mais generalistas.
- O uso do método de otimização *gridding*, usado simplesmente para eliminar a necessidade de uma definição precisa das condições iniciais, é prático para garantir a obtenção da solução ótima global. Porém, este poderia ser substituído por procedimentos de otimização mais eficientes *e.g.* (DAM et al., 2001) (BELT; BRINKER, 1996).
- Neste trabalho foi dado um foco em identificação de sistemas com base na resposta ao degrau pelo fato de ser um dos sinais mais simples e utilizados na indústria, mas outros sinais de entrada podem ser explorados como o gerado pelo método do relé e o multissenso clipado apresentado em (WANG; CLUETT, 2000).
- Existem métodos analíticos bem definidos para projeto de controladores PID e MPC, por exemplo, com base em expansões de funções de base ortonormais, inclusive para o caso MIMO, *e.g.* (TABATABAEI, 2016) (AYADI; BRAIEK, 2005) (MACHADO; GIVIGI, 2018) (DUBRAVIĆ; SEHIĆ, 2012). Pesquisas posteriores podem verificar o impacto que a inclusão do atraso teria em aplicações de controle baseadas em modelos de baixa ordem.

Referências Bibliográficas

- ABRASHOV, S. et al. Optimal input design for continuous-time system identification. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 60, p. 92–99, 2018.
- AKCAY, H. Discrete-time system modelling in lp with orthonormal basis functions. *Systems and Control Letters*, v. 39, n. 5, p. 365 – 376, 2000.
- AKCAY, H.; NINNESS, B. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems. *Signal Processing*, v. 77, n. 3, p. 261 – 274, 1999.
- ANES, A. E.; BOUZRARARA, K.; RAGOT, J. Reduced model of linear systems via laguerre filters. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 40, n. 5, p. 1510–1520, 2018.
- AOUN, M. et al. Orthonormal basis functions for modeling continuous-time fractional systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 36, n. 16, p. 1333 – 1338, 2003. 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2003), Rotterdam, The Netherlands, 27-29 August, 2003.
- AOUN, M. et al. Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation. *Automatica*, v. 43, n. 9, p. 1640 – 1648, 2007.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Revisiting the ziegler–nichols step response method for pid control. *Journal of process control*, Elsevier, v. 14, n. 6, p. 635–650, 2004.
- AYADI, B.; BRAIEK, N. B. MIMO pid controllers synthesis using orthogonal functions. In: *IFAC 16th World Congress, International Federation of Automatic Control*. Prague, República Tcheca: Elsevier, 2005. v. 38, n. 1.
- BAI, E.; SASTRY, S. Persistency of excitation, sufficient richness and parameter convergence in discrete time adaptive control. *Systems and Control Letters*, v. 6, p. 153–163, 08 1985.
- BEAUDUIN, T.; FUJIMOTO, H. Identification of system dynamics with time delay: a two-stage frequency domain approach. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 50, n. 1, p. 10870 – 10875, 2017. 20th IFAC World Congress.
- BELT, H. J. W.; BRINKER, A. C. den. Laguerre filters with adaptive pole optimization. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Circuits and Systems Connecting the World. ISCAS*. Atlanta, EUA: IEEE, 1996. v. 2, p. 37–40.
- BOKOR, J.; SCHIPP, F. Approximate identification in laguerre and kautz bases. *Automatica*, v. 34, n. 4, p. 463 – 468, 1998.

CHEN, T.; LJUNG, L. Regularized system identification using orthonormal basis functions. In: *European Control Conference (ECC)*. Linz, Áustria: IEEE, 2015.

CHOU, C. T.; VERHAEGEN, M.; JOHANSSON, R. Continuous-time identification of siso systems using laguerre functions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 47, n. 2, p. 349–362, 1999.

CLARKE, D. W.; GAWTHROP, P. J. Self-tuning control. In: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. [S.l.]: IET, 1979. v. 126, n. 6, p. 633–640.

CLEMENT, P. R. Laguerre functions in signal analysis and parameter identification. *Journal of the Franklin Institute*, v. 313, n. 2, p. 85 – 95, 1982.

CLOWES, G. Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal laguerre functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 10, n. 4, p. 487–489, 1965.

DAM, H. H. et al. Optimum pole position for digital laguerre network with least square error criterion. In: _____. *Optimization Methods and Applications*. Boston, EUA: Springer US, 2001. p. 321–330.

DUBRAVIĆ, A.; SEHIĆ, Z. Using orthonormal functions in model predictive control. *Tehnickivjesnik*, v. 19, n. 3, p. 513–520, 2012.

ELSHAFEI, A.-L.; DUMONT, G. A.; ELNAGGAR, A. Adaptive gpc based on laguerre-filters modelling. *Automatica*, v. 30, n. 12, p. 1913 – 1920, 1994.

EVERS, E.; JAGER, B. de; OOMEN, T. Improved local rational method by incorporating system knowledge: with application to mechanical and thermal dynamical systems. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 51, n. 15, p. 808–813, 2018.

FU, Y.; DUMONT, G. A. On determination of laguerre filter pole through step or impulse response data. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 26, n. 2, Part 5, p. 35 – 39, 1993. 12th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic control.

GALDINO, J. F. *Identificação de Sistemas com Bases de Funções de Laguerre*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 02 2012.

GARNIER, H. Direct continuous-time approaches to system identification. overview and benefits for practical applications. *European Journal of control*, Elsevier, v. 24, p. 50–62, 2015.

GILLBERG, J. *Frequency Domain Identification of Continuous-Time Systems: Reconstruction and Robustness*. Tese (Doutorado) — Dissertacao de Mestrado: Institutionen för systemteknik, 2006.

GOODWIN, G.; NINNESS, B.; POOR, V. Choice of basis functions for continuous and discrete system modelling. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 25, n. 15, p. 287–292, 1992.

HAVERKAMP, B. R. J. et al. Continuous-time subspace model identification method using laguerre filtering. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 30, n. 11, p. 1093 – 1098, 1997. IFAC Symposium on System Identification.

HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. Van den; WAHLBERG, B. (Ed.). *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. [S.l.]: Springer, 2005.

HIDAYAT, E.; MEDVEDEV, A. Continuous time-delay estimation in laguerre domain - revisited. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 16, p. 155 – 160, 2012. 16th IFAC Symposium on System Identification.

HIDAYAT, E.; MEDVEDEV, A. Laguerre domain identification of continuous linear time-delay systems from impulse response data. *Automatica*, v. 48, n. 11, p. 2902 – 2907, 2012.

HOF, P. M. J. V. D.; HEUBERGER, P. S. C.; BOKOR, J. System identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, v. 31, n. 12, p. 1821 – 1834, 1995. Trends in System Identification.

HOF, P. Van den et al. Modelling and identification with rational orthogonal basis functions. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 33, n. 15, p. 445 – 455, 2000. 12th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2000).

HOOG, T. J. D. et al. Minimal partial realization from generalized orthonormal basis function expansions. *Automatica*, v. 38, n. 4, p. 655 – 669, 2002.

ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. [S.l.]: Springer, 2011.

JURÁCKOVÁ, L.; KOZÁK, V. Performance improvement of modeling using orthonormal functions. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 33, n. 13, p. 131 – 136, 2000. IFAC Conference on Control Systems Design (CSD 2000).

KHAN, B.; ROSSITER, J. A.; VALENCIA-PALOMO, G. Exploiting kautz functions to improve feasibility in mpc. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 6777 – 6782, 2011. 18th IFAC World Congress.

KING, J. Optimum pole positions for laguerre-function models. *Electronics Letters*, v. 5, n. 23, p. 601–602, November 1969.

LEMMA, D.; RAMASAMY, M.; SHUHAIMI, M. System identification using orthonormal basis filters. *Journal of Applied Sciences(Faisalabad)*, Asian Network for Scientific Information, v. 10, n. 21, p. 2516–2522, 2010.

LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Prentice Hall, 1987.

MACDONALD, D. K. C. *Thermoelectricity: An Introduction to the Principles*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1962.

MACHADO, J. B.; GIVIGI, S. Model predictive control system based on ladder-structured gobf models. In: *2018 IEEE Canadian Conference on Electrical & Computer Engineering (CCECE)*. Quebec, Canada: IEEE, 2018. p. 1–4.

MALTI, R.; D., M.; RAGOT, J. Optimum generalized orthonormal basis networks for a class of discrete-time systems. *14th IFAC World Congress, Beijing, Chia, 5-9 July*, v. 32, n. 2, p. 1773 – 1778, 1999.

- MANNGÅRD, M.; TOIVONEN, H. T. Identification of low-order models using laguerre basis function expansions. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 51, n. 15, p. 72–77, 2018.
- MBAREK, A. et al. Laguerre-based modelling and predictive control of multi-input multi-output systems applied to a communicating two-tank system (ctts). *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, v. 39, 11 2015.
- NAJEH, T. et al. New methods of laguerre pole optimization for the arx model expansion on laguerre bases. *ISA Transactions*, v. 70, n. Supplement C, p. 93 – 103, 2017.
- NALBANTOĞLU, V.; BOKOR, J.; BALAS, G. System identification with orthonormal basis functions: An application to flexible structures. In: *IFAC Proceedings Volumes*. Budapeste, Hungria: Elsevier, 1997. v. 30, n. 16, p. 383–388. IFAC Symposium on Robust Control Design.
- NALBANTOĞLU, V. et al. System identification with generalized orthonormal basis functions: an application to flexible structures. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 3, p. 245 – 259, 2003. Advances in Automotive Control.
- NELLES, O. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*. [S.l.]: Springer, 2001.
- NINNESS, B. Frequency domain estimation using orthonormal bases. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 29, n. 1, p. 4309 – 4314, 1996. 13th World Congress of IFAC.
- NINNESS, B.; GOMEZ, J.-C.; WELLER, S. MIMO system identification using orthonormal basis functions. In: IEEE. *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*. New Orleans, EUA, 1995. v. 1, p. 703–708.
- NURGES, U. On the use of the laguerre model for the identification of discrete-time systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 18, n. 5, p. 1739 – 1742, 1985. 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation.
- OLIVIER, P. Online system identification using laguerre series. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, IET, v. 141, n. 4, p. 249–254, 1994.
- SANTOS, J. a. B. M. D. *Identificação de sistemas utilizando modelos em bases de funções ortonormais com atraso*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, 02 2013.
- SANTOS, J. B. M.; BARROS, P. R. Preliminary process information and its use in obf-td model estimation. *16th IFAC Symposium on System Identification*, Elsevier, v. 45, n. 16, p. 1808–1813, 2012.
- SCHIPP, F. et al. Identification in generalized orthogonal basis - a frequency domain approach. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 29, n. 1, p. 4315 – 4320, 1996. 13th World Congress of IFAC.
- SHEN, W. et al. Identification of FIR models using basis models of first-order plus time-delays. In: *Advanced Control of Industrial Processes (AdCONIP)*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2017. p. 239–244.

- SILVA, S. D. Non-parametric identification of mechanical systems by kautz filter with multiple poles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 1103–1111, 2011.
- SILVA, S. D. Non-parametric identification of mechanical systems by kautz filter with multiple poles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, n. 4, p. 1103 – 1111, 2011.
- SILVA, T. O. E. Optimality conditions for truncated laguerre networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 9, p. 2528–2530, 1994.
- SILVA, T. Oliveira e. Optimal pole conditions for laguerre and two-parameter kautz models: A survey of known results. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 33, n. 15, p. 457 – 462, 2000. 12th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2000).
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of process control*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 291–309, 2003.
- TABATABAEI, M. Pid controller design based on laguerre orthonormal functions. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, v. 18, n. 4, p. 65–76, 2016.
- TANGUY, N. et al. Parameter optimization of orthonormal basis functions for efficient rational approximations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 16, p. 4963 – 4970, 2015. ISSN 0307-904X.
- VAU, B.; BOURLÈS, H. Laguerre based predictors in discrete-time recursive algorithms: A solution for open-loop identification under oversampling. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 50, n. 1, p. 12911 – 12918, 2017. 20th IFAC World Congress.
- VOORHOEVE, R. et al. On numerically reliable frequency-domain system identification: new connections and a comparison of methods. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 47, n. 3, p. 10018 – 10023, 2014. 19th IFAC World Congress.
- WAHLBERG, B. Orthonormal basis functions models: A transformation analysis. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 32, n. 2, p. 4123 – 4128, 1999. 14th IFAC World Congress.
- WANG, L. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Englewood Cliffs, EUA: Springer, 2009.
- WANG, L.; CLUETT, W. R. Optimal choice of time-scaling factor for linear system approximations using laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 7, p. 1463–1467, July 1994.
- WANG, L.; CLUETT, W. R. Frequency-sampling filters: An improved model structure for step-response identification. *Automatica*, v. 33, n. 5, 1997.
- WANG, L.; CLUETT, W. R. *From Plant Data to Process Control: Ideas for Process Identification and PID Design*. [S.l.]: Taylor and Francis, 2000.
- WANG, X.; JIANG, Y.; KONG, X. Laguerre functions approximation for model reduction of second order time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 353, n. 14, p. 3560 – 3577, 2016.

YONEYA, A.; ONO, T. Multi-laguerre approach to identify plant with widely spread poles. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 39, n. 1, p. 867 – 872, 2006. 14th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation.

YU, C. et al. Subspace identification of continuous-time models using generalized orthonormal bases. In: IEEE. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. Melbourne, Australia, 2017. p. 5280–5285.

ZERVOS, C.; BÉLANGER, P.; DUMONT, G. A. On pid controller tuning using orthonormal series identification. *Automatica*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 165–175, 1988.

ZHENG, Y. et al. A distributed model predictive control based load frequency control scheme for multi-area interconnected power system using discrete-time laguerre functions. *ISA Transactions*, v. 68, n. Supplement C, p. 127 – 140, 2017.

ZIAEI, K.; WANG, D. W. L. Application of orthonormal basis functions for identification of flexible-link manipulators. *Control Engineering Practice*, v. 14, n. 2, p. 99 – 106, 2006. Special Section on Advances in Control Education.