UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FILIPE ALVES DANTAS

ANÁLISE CONCEITUAL DE LIMITE E CONTINUIDADE A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS E DA VISÃO DOS DISCENTES

CUITÉ-PB

2022

FILIPE ALVES DANTAS

ANÁLISE CONCEITUAL DE LIMITE E CONTINUIDADE A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS E DA VISÃO DOS DISCENTES

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ-PB

2022

D192a Dantas, Filipe Alves.

Análise conceitual de limite e continuidade a partir dos livros didáticos e da visão dos discentes . / Filipe Alves Dantas. - Cuité, 2022.

47 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".

Referências.

1. Cálculo. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. Ensino de cálculo. 4. Livro didático - análise conceitual - limite. 5. Livro didático - análise conceitual - continuidade. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 510.56(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

ANÁLISE CONCEITUAL DE LIMITE E CONTINUIDADE A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS E DA VISÃO DOS DISCENTES

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Aprovado em: 17/08/2022

BANCA EXAMINADORA

Célia Maria R. Franco

Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco
Orientador

Aluska Dias Ramos de Macedo Silva

Profa. Dra. Aluska Dias Ramos de Macedo Silva
Examinador

Aluizio Freire da S. Junior

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior
Examinador

CUITÉ-PB

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e perseverança para alcançar meus objetivos e conseguir chegar até este momento tão especial para mim. Agradeço também a minha família, em especial minha mãe Edilma, meu pai Cícero e meu avô José, por ter me apoiado e me aconselhado sempre para bons caminhos, como também não mediram esforços para me ajudar a chegar até aqui. Não poderia esquecer da minha namorada Rafaela, que em todo este percurso sempre me ajudou como pode em todos os momentos em que precisei, sempre me aconselhando e me apoiando.

A minha orientadora Célia Maria, por ter me orientado e ajudado a realizarmos este trabalho, por toda paciência, compreensão e cuidado que teve. Sou grato a todos os professores que pude ter contato nas disciplinas, não posso citar nomes, pois todos foram importantes na minha formação, alguns mais próximos outros nem tanto, mas todos contribuíram efetivamente cada um do seu jeito. Deixo meus agradecimentos também a todos os colaboradores do campus, que mantem o ambiente sempre harmonioso e propício para o ensino, sendo assim todos importantes nesse processo.

Aos meus amigos de curso que sempre me apoiaram e contribuíram para que eu chegasse até aqui, em especial meus amigos Leandro, William, Marcos, Eduardo, Francisco, Carlos entre outros, queria poder citar todos, mas saibam que sou extremamente grato pela amizade e parceria que criamos durante esse período, torço sempre por vocês.

Enfim agradeço a todos que torceram e contribuíram comigo, deixo aqui meu muito obrigado!

“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário”

Stubby Currence

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise de conceitos do Cálculo Diferencial tais como limite e continuidade, como também, investigar a percepção desses conceitos por parte dos alunos. Inicialmente apresentamos o desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, no qual foi abordado dos primeiros registros até o seu grande desenvolvimento no século XVII. Posteriormente, foi realizada uma consulta a três livros didáticos de Cálculo, onde analisamos e discutimos como cada um aborda os conceitos de Limite e Continuidade. Finalmente apresentamos e discutimos os resultados da pesquisa feita com 20 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química da Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité-PB. Na pesquisa buscamos investigar qual a imagem conceitual que os alunos tinham em relação aos conteúdos de Limite e Continuidade. Diante dos resultados obtidos, foi possível observar que boa parte dos alunos manifestaram uma imagem conceitual equivocada sobre o conteúdo, o que aponta possíveis dificuldades que envolvem o ensino e a aprendizagem de Cálculo.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Imagem conceitual; Livro didático; Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

This work aims to present an analysis of Differential Calculus concepts such as limit and continuity, as well as to investigate the students' perception of these concepts. Initially we present the historical development of Differential and Integral Calculus, in which it was approached from the first records until its great development in the 17th century. Subsequently, we consulted three Calculus textbooks, where we analyzed and discussed how each one approaches the concepts of Limit and Continuity. Finally, we present and discuss the results of the research carried out with 20 students from the Mathematics, Physics and Chemistry Degree courses at the Federal University of Campina Grande, Cuité-PB campus. In the research, we sought to investigate the conceptual image that the students had in relation to the contents of Limit and Continuity. In view of the results obtained, it was possible to observe that a good part of the students expressed a mistaken conceptual image about the content, which points out possible difficulties involving the teaching and learning of Calculus.

Key words: Differential and integral calculus; conceptual image; textbook; teaching calculus.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral, como outras diversas áreas da matemática, foi e ainda continua sendo uma ferramenta importantíssima no desenvolvimento dos povos. Desde a antiguidade até os dias atuais vem contribuindo para a solução de diversos problemas da matemática e de outras áreas do conhecimento tais como: engenharia, física e química.

Considerando a importância do estudo do Cálculo, a disciplina é componente curricular obrigatório de diversos cursos superiores. Geralmente chamada de Cálculo Diferencial e Integral I, é ofertada no início dos cursos e nela é abordado os conceitos fundamentais do Cálculo: limite, continuidade, derivada e integral.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é vista por grande parte dos alunos como um desafio, visto que eles apresentam dificuldades no decorrer da disciplina e muita das vezes acabam desistindo ou reprovando. Diversos estudos sobre o tema revelam essa tensão na disciplina de Cálculo. Resende (2003) em sua tese de doutorado revela que nos anos de 1996 a 2000 na Universidade Federal Fluminense (UFF), a taxa de não-aprovação na disciplina de Cálculo variou de 45% a 95%, taxa essa, preocupante devido ao baixo nível de aprovação.

Estudos mais recentes também evidenciam o baixo desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo. Almeida (2016) afirma que, no segundo semestre de 2015, o percentual de alunos da engenharia retidos nas disciplinas de Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) foi de aproximadamente 55%. No mesmo sentido Rosa et al. (2019) revelam dados preocupantes, no período de 2010 a 2016 na Universidade Federal de Goiás (UFG), a taxa de reprovação nas disciplinas de Cálculo I foi 65%.

Os dados fornecidos pela Pró-Reitoria de Ensino da UFCG (PRE), referentes à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na UFCG Campus Cuité (CES), nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química no período compreendido entre o primeiro semestre de 2017 até o segundo semestre de 2019, apontam resultados semelhantes aos citados anteriormente. No período de 2017 a 2019, a taxa de aprovação foi de aproximadamente 24%, e a de retenção 76%. Que consiste dos alunos que reprovaram por nota, falta ou trancaram a disciplina.

Percebe-se, portanto, realidades semelhantes quanto ao índice de retenção na disciplina de Cálculo mesmo em cenários diferentes, considerando universidades distintas localizadas em outros Estados do país. Desta forma, consideramos importante analisar e discutir sobre conceitos fundamentais do Cálculo, como também investigar de que forma os alunos interpretam tais conceitos. Com este trabalho, pretende-se identificar indícios ou falhas que possam ser alvo de reflexões ou de pesquisas futuras sobre ensino e aprendizagem de Cálculo.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo é feita uma revisão histórica do Cálculo Diferencial e Integral, fazendo uma construção desde os primeiros registros na antiguidade até o desenvolvimento e difusão no século XVII. No segundo capítulo analisamos três livros didáticos de Cálculo, destacando a abordagem dos conceitos de limite e continuidade, como também, exercícios e problemas. No terceiro e último capítulo, apresentamos os resultados e discussão da pesquisa realizada com os alunos. Finalmente, nas considerações finais, abordamos a importância do trabalho, o cumprimento dos objetivos e a análise do trabalho como um todo.

Diante disso o trabalho pretende alcançar os seguintes objetivos.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL: Discutir e analisar a abordagem de conceitos fundamentais do cálculo, como Limite e Continuidade, em três exemplares de livros didáticos e investigar qual a percepção dos alunos sobre tais conceitos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Apresentar o desenvolvimento histórico e um breve levantamento bibliográfico sobre as dificuldades no ensino do Cálculo;
- Apresentar a abordagem de três livros didáticos sobre os conteúdos de limite e continuidade;
- Investigar, por meio de uma pesquisa com discentes dos Cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química do CES/UFCG, qual a percepção dos alunos sobre conceitos fundamentais do Cálculo, como Limite e Continuidade;
- Discutir os resultados da pesquisa realizada com os discentes.

1. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CÁLCULO

O Cálculo Diferencial e Integral se desenvolveu bastante no século XVII através das contribuições de Newton e Leibniz, porém os conceitos formalizados por eles já vinham sendo estudados desde a antiguidade por diversos matemáticos, físicos, astrônomos e filósofos nos seus respectivos trabalhos.

Diferentemente de como é tratado nos livros de cálculo que estudamos hoje, o desenvolvimento histórico do Cálculo desenrolou-se de forma adversa, surgindo primeiro o Cálculo Integral através da necessidade de calcular áreas, volumes e comprimentos. Os conceitos de derivação foram criados posteriormente sendo resultados de problemas envolvendo tangentes a curvas, máximos e mínimos. E por último, só no século XIX, a definição moderna de Limite foi estabelecida (EVES, 2011).

Nesse sentido, Eudoxo de Cnidus (c.408-355 a.C) foi um matemático e astrônomo da Academia de Platão que deu grande contribuição para a criação dos conceitos do Cálculo, no qual criou o Método da Exaustão, que consistia em calcular medidas de figuras curvilíneas usando polígonos inscritos. Essa ideia já existia, porém Eudoxo trouxe ferramentas que fizeram o procedimento ser mais rigoroso (MOL,2013).

Arquimedes (287-212 a.C) foi um matemático, filósofo, físico, engenheiro e astrônomo Grego que também contribuiu para essa evolução, aperfeiçoando o método da exaustão que foi utilizado no seu trabalho sobre o método de equilíbrio para calcular área de regiões delimitadas, sendo semelhante ao cálculo integral (MOL, 2013).

O período compreendido entre as descobertas de Arquimedes na Idade Antiga até os tempos modernos, os conceitos de integração não foram devidamente utilizados, somente por volta da metade do século XIV os trabalhos de Arquimedes chegaram a Europa e apenas no século XVII passaram a ser estudados, porém matemáticos da idade Moderna como Simon Stevin (1548-1620) e Luca Valerio (1552-1618) utilizaram em seus estudos procedimentos semelhantes ao método da exaustão (EVES, 2011).

Um dos primeiros estudiosos da idade Moderna a apresentar ideias relacionadas aos infinitésimos foi o engenheiro Johann Kepler (1571-1630), no qual o mesmo necessitava de procedimentos de integração para o cálculo de áreas em seus trabalhos, porém não tinha apreço pelo método da exaustão devido o mesmo requerer muito tempo. Para Kepler uma circunferência era um polígono regular de infinitos lados, portanto o círculo era composto de uma infinidade de triângulos delgados.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi um matemático Italiano que também deu contribuições para o desenvolvimento do Cálculo, em seu trabalho intitulado de *Geometria indivisibilibus* publicado em 1635, apresentou o *método dos indivisíveis* muito parecido com o de Arquimedes, no qual considerava que "uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas" (EVES, 2011, p.425).

Outros, tais como Evangelista Torricelli, Pierre de Fermat, John Wallis e St. Vincent de Gregory, planejaram técnicas de quadratura e/ou de cubatura que se aplicavam a regiões ou a sólidos específicos. Mas nenhum deles usou limites. Os resultados estavam quase todos corretos, mas cada um dependia de uma argumentação não algébrica, recorrendo à intuição geométrica ou filosófica, questionável em algum ponto crítico. A necessidade para os limites era justa, mas não reconhecida.

O Cálculo, às vezes, foi também descrito como o estudo das curvas, das superfícies, e dos sólidos. O desenvolvimento da geometria desses objetos floresceu seguindo a invenção da geometria analítica com Pierre de Fermat e René Descartes.

Os primeiros conceitos relacionados à diferenciação que vemos hoje nos cursos e livros de cálculo se originaram de problemas relacionados ao traçado de tangentes e a determinação de máximos e mínimos de funções, essas considerações já haviam sido notadas pelos gregos, porém de forma muito confusa e somente no século XVII Pierre de Fermat (1601-1665) trouxe ideias mais claras sobre o método diferencial.

Fermat foi um advogado e político Francês, nunca atuou profissionalmente como matemático, porém deu contribuições relevantes para diversas áreas como a Teoria dos números, geometria analítica e o cálculo diferencial, sendo um dos mais importantes matemáticos do seu tempo. A principal contribuição de Fermat para o cálculo foi o método para encontrar máximos e mínimos de funções polinomiais e também desenvolveu um método para encontrar tangentes que remete ao que conhecemos hoje por derivada de uma função, ele estava tentando mostrar exatamente que nos pontos de máximo ou de mínimo a reta tangente à curva é horizontal, isto é, tem inclinação zero (MOL,2013). Outra descoberta de Fermat foi um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. O método de Fermat consistia em achar a subtangente relativa ao ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo (EVES, 2011).

Ainda no século XVI tivemos dois matemáticos ingleses que deram contribuições para os conceitos do cálculo e são considerados precursores de Isaac Newton: John Wallis e Isaac Barrow. John Wallis (1616-1703) foi um matemático e professor de geometria, em seu trabalho *Arithmetica Infinitorum* apareceu pela primeira vez o símbolo de ∞ para evidenciar o infinito, como também deu contribuições importantes para a teoria da integração (MOL, 2013).

Isaac Barrow (1630-1677) foi um matemático e professor, diferentemente de Wallis deu contribuições voltadas para a teoria da diferenciação, desenvolvendo um método para encontrar tangentes muito parecido com os procedimentos modernos e similar aos de Fermat. Barrow também foi considerado o primeiro a perceber que a integração e diferenciação são operações inversas que é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* no qual foi enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow (MOL,2013; EVES, 2011).

Durante o século XVII, diversos geômetras planejaram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a determinadas curvas. Mas nenhum deles percebeu a necessidade da ideia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para conseguir os próprios resultados, que estavam corretos, embora sem o rigor possibilitado pelo limite. Segundo Fulini (2016, p.40) “O século XVII foi um grande marco para o surgimento do Cálculo. Grandes estudiosos, como Cavalieri, Torricelli, Barrow, Descartes, Fermat e Wallis, preparavam o caminho, para que Newton e Leibniz chegassem a descoberta do Cálculo.”.

Verdadeiramente, o século XVII foi um período de grandes avanços no estudo do cálculo diferencial e integral, já existiam vários resultados relacionados ao cálculo de áreas, tangentes e ideia de limite, porém ainda faltava algo que deixasse esses processos mais precisos e úteis. Segundo Eves (2011, p.435) “Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. ” E exatamente nesse sentido que Newton e Leibniz trabalharam, para que o cálculo fosse mais manipulável e proveitoso.

Isaac Newton (1642-1727), foi um físico Inglês, filho de um proprietário agrícola, sua família queria que o mesmo seguisse os passos do pai, porem desde novo se interessava muito por fazer experiências e criar brinquedos engenhosos. Aos 18 anos Newton ingressou no Trinity College em Cambridge, no qual foi aluno de Barrow e teve a oportunidade de ler obras de diversos matemáticos importantes como os *Elementos* de Euclides, *La géométrie* de Descartes e também trabalhos de Wallis, Kepler e Viète.

Newton escreveu obras importantes que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo que conhecemos hoje, com base nos princípios de Barrow e Wallis ele aprimorou os conceitos sobre infinitesimais calculando a taxa de variação em momentos, também concluiu que o cálculo da área sob uma curva é dado pelo processo inverso a derivação, ou seja, a integral.

Sua principal obra relacionada a matemática foi o método dos fluxos que equivale ao atual cálculo diferencial. Segundo Eves (2011, p.439) "Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis". As quantidades variáveis eram chamadas de *fluente* e a taxa de variação de *fluxo* do fluente, hoje essa notação usada por Newton é equivalente a $\frac{dy}{dt}$ no qual *t* representa o tempo, no qual era usado como uma variável universal (EVES,2011).

O método dos fluxos ainda foi utilizado por Newton em diversos problemas do cálculo, como determinar máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão, convexidade e concavidade de curvas, como também em outro trabalho seu conhecido como *método das primeiras e últimas razões* no qual trazia processos de derivação e mesmo sem ter uma definição formal de limite Newton já tinha uma noção intuitiva sobre.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), foi um filósofo alemão, considerado o grande gênio do século XVII por ter uma vasta gama de conhecimentos em diversas áreas, sendo considerado detentor de um conhecimento universal. Leibniz deu grandes contribuições no desenvolvimento do cálculo e juntamente com Newton são considerados os "pais" do cálculo.

Ainda no século XVI Leibniz já havia obtido resultados parecidos com os de Newton sobre o cálculo infinitesimal, porém muitos trabalhos não foram publicados, sendo registrado apenas em diários pessoais. Para Leibniz, a diferenciação (derivada) era o princípio fundamental do cálculo. Segundo Fulini (2016, p.44) "Para Leibniz, a ideia central do Cálculo era a diferencial, que para ele, era uma diferença entre dois valores infinitamente próxima de uma variável".

Diferentemente de Newton, Leibniz se preocupava muito em utilizar uma notação coerente, assim criou a notação dy para diferencial que indicava a menor diferença entre valores vizinhos da variável y, criou também o símbolo da integral $\int$, um S de *summa* (soma) para indicar a soma de todas as áreas infinitesimais , como também deduziu muitas regras da diferenciação. Essas notações e regras criadas por Leibniz foram incorporadas a matemática e até os dias de hoje são ferramentas efetivamente utilizadas em diversas áreas como a física, matemática, engenharia entre outras.

Segundo (MOL, 2013, p.108) Leibniz chamou seu método para calcular tangentes de *calculus diferentialis*, e o método para calcular áreas e volumes de *calculus summatorius ou integralis* e dessa sua nomenclatura surgiu o nome "Cálculo Diferencial e Integral", nome pelo qual é conhecido até os dias de hoje. Leibniz foi muito feliz ao criar suas notações e regras, o simbolismo criado pelo mesmo era mais claro e descrevia melhor os problemas do que os métodos utilizados por Newton, mesmo que fossem usados para a resolução de problemas parecidos.

Há uma grande discussão sobre a invenção do cálculo, porém Newton e Leibniz criaram o cálculo separadamente, onde os primeiros raciocínios são atribuídos a Newton e as primeiras publicações foram de Leibniz. Newton, pelo fato de ser físico, tinha um raciocínio mais aprofundado dos problemas e Leibniz era mais versátil em seus estudos, tendo mais apego pela simbologia e regras, sendo assim, Newton e Leibniz foram muito importantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral e trouxeram resultados e simbologias que contribuíram para o desenvolvimento de diversas ciências.

Depois de Newton e Leibniz o desenvolvimento cálculo foi praticamente nulo por mais de um século, por volta de 1700 a maioria dos conceitos estudados hoje já era conhecidos. O primeiro trabalho sobre cálculo foi publicado no ano de 1696 pelo francês Marquês de L'Hôpital (1661-1704), no qual escreveu seu livro baseado nos estudos fornecidos pelos irmãos Bernoulli, os Suíços Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748).

Nesse livro intitulado de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão de linhas curvas), L'Hôpital expôs a teoria do cálculo diferencial, assim contribuindo para a expansão do cálculo de Leibniz, visto que os irmãos Bernoulli eram colaboradores do mesmo. Ainda nesse livro L'Hôpital apresentou uma regra para determinar o limite de frações, onde o numerador e denominador tendem para $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, regra essa que até os dias de hoje é conhecida por Regra de L'hôpital, porém a mesma foi criada por Johann Bernoulli.

Os irmãos Bernoulli tiveram um papel fundamental no desenvolvimento do cálculo, segundo Mol (2013, p.117) “Os irmão Bernoulli foram responsáveis pelo desenvolvimento de grande parcela do conteúdo hoje presente nos livro de cálculo”, verdadeiramente, pois Jean Bernoulli ofereceu suas descobertas a L’Hôpital em troca de salário, onde o mesmo utilizaria essas informações em seu livro citado anteriormente.

Jakob Bernoulli em seu trabalho *Acta Eruditorum* introduziu a palavra integral que mais tarde Leibniz passaria a usar também, como também contribuiu para a matematização da física utilizando as concepções do cálculo diferencial e integral, dando origem as equações diferenciais, assunto pelo qual se dedicou e ficou conhecido no ramo, hoje as equações do tipo $y' + P(x) = Q(x)y$ são conhecidas como “equações de Bernoulli”. Da família Bernoulli ainda podemos citar Daniel Bernoulli (1700-1780) filho de Johann, Daniel utilizou as ideias de Newton em conjunto com as de Leibniz contribuindo para a evolução da Física-Matemática e também foi um pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais.

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático e físico Suíço, considerado um dos matemáticos mais produtivos de seu tempo, Euler deu contribuições para diversas áreas da matemática, estudou séries infinitas, desenvolveu a teoria das equações diferenciais e implantou notações utilizadas até hoje. Segundo Mol (2013, p.119) “Seu aspecto mais relevante, no entanto, é o fato de ser o primeiro texto em que a noção de função aparece como elemento central da análise matemática”.

Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783) foi um matemático Francês que deu contribuições nos conceitos de limite, para d’Alembert uma diferencial era uma grandeza infinitamente pequena de duas grandezas finitas, para ele a noção de limite era o verdadeiro fundamento do cálculo, o mesmo considerava as grandezas infinitesimais utilizadas por Newton e Leibniz uma base fraca para o cálculo.

A Italiana Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) foi uma linguista, filosofa e matemática, Agnesi em 1748 publicou o trabalho intitulado *Instituzíoní Analitiche* dividido em dois volumes. No primeiro abordou aritmética, álgebra, trigonometria, geometria analítica e o cálculo diferencial e integral, no segundo volume tratou sobre séries infinitas e equações diferenciais. Essa obra de Agnesi é considerada um dos primeiros livros do cálculo diferencial e integral, no qual uniu as ideias de Newton e Leibniz.

O italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi um matemático e, juntamente com Euler, foi considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Lagrange se mostrava insatisfeito com os fundamentos da análise, em seu trabalho *Théorie des fonctions analytiques* expôs que as operações do cálculo diferencial e integral poderiam ser efetuadas sem o uso de limites ou infinitesimais através de manipulação algébrica usando as séries de potências, porém esse método era falho, pois nem toda função possui desenvolvimento em série de potências. Lagrange introduziu a notação $f'(x)$ para indicar a derivada da função $f(x)$, como também deu contribuições no desenvolvimento das equações diferenciais parciais (MOL,2013; EVES, 2011).

O Francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um dos principais matemáticos do século XIX e foi um dos pioneiros no estudo da análise matemática. Cauchy publicou livros que deram padrão ao cálculo estudado hoje, criou e demonstrou diversos resultados do cálculo. Apoiado na ideia de d'Alembert, Cauchy mostrou que o conceito de limite era a ideia central do cálculo. Para ele "quando valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam infinitamente de um valor fixo, de maneira a diferir deste por tão pouco quando se queira, este último é chamado limite de todos os outros. " (MOL, 2013, p.123). A definição de Cauchy ainda tinha falhas e foi melhorada por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), a partir da definição de Cauchy, Weierstrass chegou a definição de limite que conhecemos hoje.

Cauchy ainda apresentou definições sobre função contínua muito parecida com a que conhecemos hoje. Definiu derivada de uma função e criou uma definição de integral independente. Segundo Eves (2011, p.532) "Cauchy preferiu definir a integral definida como o limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero, de modo muito parecido com o que fazemos hoje". Cauchy ainda demonstrou a relação entre sua definição de integral e a antiderivada utilizando o teorema do valor médio.

Bernard Bolzano (1781-1848) foi um padre tcheco, e foi considerado um dos primeiros estudiosos a tentar elucidar os conceitos do cálculo, juntamente com Weierstrass tiveram muita influência na construção de teorias mais sólidas no cálculo, o que era antes apenas noções intuitivas, agora esses conceitos estavam sendo tratados de forma generalizada. O formalismo de Weierstrass lhe deu o reconhecimento de "pai da análise moderna", devido ao grande cuidado de como o mesmo tratava suas definições.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), foi um matemático alemão que também deu contribuições importantes na fundamentação do cálculo e uma das principais e mais conhecidas é o conceito de integral, que hoje recebe o nome de integral de Riemann. Portanto o século XIX ficou marcado como um período de fundamentação do cálculo diferencial e integral, pois, até o momento, o assunto era tratado de forma intuitiva e sem o devido rigor. Diante disto, as definições e generalizações deram ao cálculo uma base mais convincente.

2. ANÁLISE DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE NOS LIVROS DE CÁLCULO

O livro didático é um dos principais recursos utilizados pelos professores nos cursos de cálculo, é através do mesmo que o professor se baseia para construir os conceitos pretendidos na disciplina, como também para os alunos, servindo como um guia de estudo para acompanhar o trabalho do docente e também como fonte de problemas e exercícios que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem.

Para Dominguini (2010, p.7), "O material representa, no contexto da educação formal, uma ferramenta de grande potencial do processo de ensino-aprendizagem; um orientador das práticas pedagógicas".

Diante disso, neste capítulo analisaremos os conceitos de Limite e Continuidade em três livros de Cálculo Diferencial e Integral disponíveis na Biblioteca do CES/UFCG. Denotaremos os mesmos por livros "A", "B" e "C", a fim de não fazer uma análise tendenciosa, pois, não temos como objetivo favorecer ou criticar as obras analisadas. Destacaremos os principais pontos de cada um, observando a introdução dos conceitos, como cada autor aborda as definições, problemas e exercícios propostos e, quando necessário, será apresentado recortes originais de imagens retiradas da obra para serem analisadas e comentadas.

2.1-ANÁLISE DO LIVRO A

No livro "A" o conteúdo de Limite e Continuidade é abordado no terceiro capítulo, logo após os assuntos de números reais e funções, visto que é necessário compreender esses conceitos para desenvolver o estudo abordado no capítulo. Os conteúdos foram distribuídos ao longo de 54 páginas e divididos por seções onde, ao final de cada seção são propostos exercícios que auxiliam na compreensão e também na prática dos conceitos apresentados.

2.1.2-INTRODUÇÃO DOS CONCEITOS

De início o livro aborda o conceito de Limite, no qual é introduzido através de uma noção intuitiva. Para isto, o autor utilizou sucessões numéricas e construiu tabelas atribuindo valores para x e avaliando o comportamento das funções nesses pontos.

Inicialmente faremos algumas considerações. Sabemos que, no conjunto dos números reais, podemos sempre escolher um conjunto de números segundo qualquer regra preestabelecida.

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

(1) 1, 2, 3, 4, 5, ...

(2) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...

(3) 1, 0, −1, −2, −3, ...

(4) 1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, ...

Figura 1-Noção intuitiva de Limite- livro A

Nessas sucessões numéricas é possível observar o comportamento de cada função. No exemplo (1) nota-se que a sucessão cresce indefinidamente, ou seja, $f(x) \to +\infty$. Em (2) as frações se aproximam cada vez mais de 1, portanto, $f(x) \to 1$. Em (3) percebe-se que a sucessão decresce indefinidamente, logo, $f(x) \to -\infty$ e por fim na sucessão (4) observa-se que a mesma oscila, assim não tende para um determinado limite.

Exemplo 1:

Seja $y = 1 - 1/x$ (ver Figura 3.1 e Tabela 3.1).

Tabela 3.1

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1.000	...

x	−1	−2	−3	−4	−5	...	−100	...	−500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

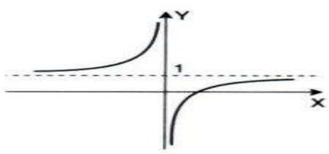

Figura 2-Noção intuitiva de limite- livro A

Neste caso o livro traz uma função pré-determinada, atribui valores a x e acha sua correspondência em y. Com a utilização do gráfico proporciona uma visualização do comportamento da função quando os valores de x crescem ou decrescem, ou seja, quando $x \to \pm\infty$ o limite da função dada é 1, ou na notação de limite, $\lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$.

Após apresentar toda teoria relacionada à Limite, o conceito de Continuidade é introduzido de forma sucinta remetendo aos conceitos de Limite vistos anteriormente, fazendo assim uma ligação entre os conteúdos e utilizando as técnicas e definições estudadas anteriormente para a construção do conceito de Continuidade.

> Quando definimos $\lim_{x \to a} f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a, mas diferentes de a. Em muitos exemplos vimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ pode existir, mesmo que f não seja definida no ponto a. Se f está definida em a e $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(a)$.
>
> Quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ diremos, de acordo com a definição a seguir, que f é contínua em a.

Figura 3-Introdução ao conceito de continuidade-Livro A

2.1.3 ABORDAGEM DO CONTEÚDO E DEFINIÇÕES

Para introduzir a definição formal de limite, o autor faz uma análise de um exemplo intuitivo feito anteriormente, no qual fundamenta as ideias intuitivas de forma rigorosa, inserindo a notação de ε e δ, como também, mostra esses conceitos graficamente, sendo assim, melhora o entendimento geral da definição que virá posteriormente.

O autor define limite da seguinte forma:

Definição 2.1: Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto, possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Após apresentar a definição formal de limite, o livro traz exemplos resolvidos mostrando o passo a passo de como utilizar a definição para mostrar o limite indicado no exemplo. Em seguida são apresentadas e demostradas as propriedades dos Limites, os conceitos de Limites Laterais, Limites infinitos e Limites no infinito e, por último, apresenta-se a definição de função contínua.

A definição de continuidade é dada por meio das condições citadas abaixo:

Definição 2.2: Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) f é definida no ponto a;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$ Existe;

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

Após definir continuidade, o autor traz o esboço de gráficos de funções que não são contínuas, como também resolve exemplos onde verifica-se as condições de continuidade e faz análise das propriedades e do comportamento dessas funções no gráfico, proporcionando ao leitor um entendimento algébrico e gráfico.

2.1.4-EXEMPLOS E EXERCÍCIOS

O livro utiliza diversos exemplos após a introdução de cada conceito, fazendo as soluções graficamente e de forma analítica, utilizando as técnicas introduzidas em cada tópico do capítulo. O livro conta com uma boa quantidade de exercícios, onde no capítulo de Limite e Continuidade são propostos mais de 100 exercícios, sendo dispostos ao final de cada seção e contemplando os conceitos vistos anteriormente.

Os exercícios seguem o mesmo sentido dos exemplos resolvidos, abrange da noção intuitiva até as definições formais. Alguns exigem mais atenção e tempo para compreender, porém outros visam mais a prática e a repetição. O autor também estimula o uso de tecnologias para construir e analisar o comportamento de funções e seu respectivo limite.

Dentre as centenas de exercícios propostos, destacamos alguns e vamos solucioná-los abaixo.

Exercício 1: Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 5$ e que é igual a 7.

Solução: Escrevendo o enunciado em notação de limite temos:

$$\lim_{x \to 3} 4x - 5 = 7$$

Pela definição (1) devemos mostrar que, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, tal\ que\ |(4x - 5) - 7| < \varepsilon\ sempre\ que\ 0 < |x - 3| < \delta$

Examinando a desigualdade envolvendo ε temos:

$$|(4x-5)-7| < \varepsilon$$

$$|4x-5-7| < \varepsilon$$

$$|4x-12| < \varepsilon$$

$$|4(x-3)| < \varepsilon$$

$$4|x-3| < \varepsilon \Longrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Logo, sempre que x satisfaz $0 < |x-3| < \delta$, então:

$$|(4x-5)-7| = 4|x-3| < \delta \Longrightarrow 4|x-3| < 4\delta$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, temos

$|(4x-5)-7| = 4|x-3| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |(4x-5)-7| < \varepsilon$, como queríamos provar.

Exercício 2: Investigue a continuidade nos pontos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Solução: Sabemos que para uma função ser contínua, tem que satisfazer a definição (2.2).

Note que, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \neq f(0) = 0$.

Deste modo, $f(x)$ não satisfaz a propriedade c) da definição de continuidade (2.2), portanto $f(x)$ não é contínua em $x = 0$.

b) $f(x) = x - |x|\ em\ x = 0$

Solução: Verificando as propriedades da definição (2.2), temos que $f(x)$ está definida em $x = 0$ e, portanto, (a) é satisfeita. Verificaremos agora se o limite de $f(x)$ existe quando $x \to 0$. Devido a definição de módulo calcularemos os limites laterais,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + x) = 0$$

como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, temos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, portanto $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Exercício 3: Fazer o gráfico das funções $y = f(x)$ dadas, explorando escalas para visualizar melhor o gráfico numa vizinhança da origem. Observando o gráfico, qual sua conjectura sobre $\lim_{x \to 0} f(x)$? Comprove analiticamente se sua conjectura é verdadeira.

a) $f(x) = sen\frac{1}{x}$

Solução: No gráfico abaixo podemos observar o comportamento da função quando x se aproxima de 0.

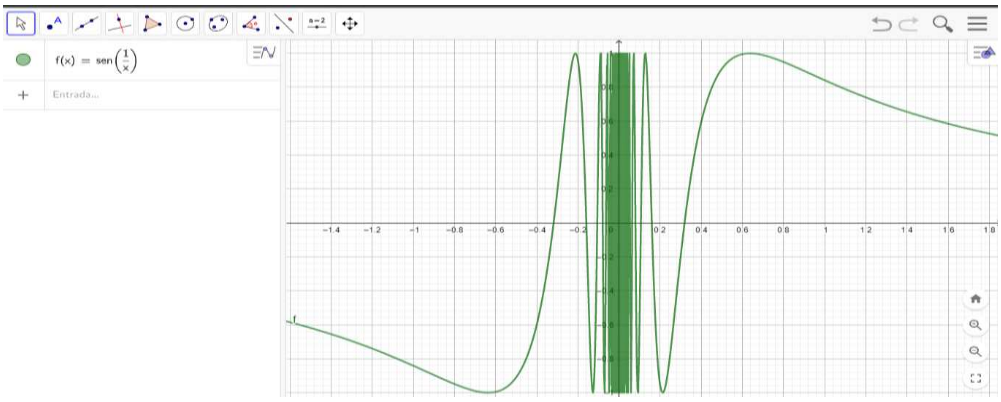

Figura 4-Exercício 3

Como podemos observar no gráfico, o $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, pois a função quando se aproxima de 0 oscila entre 1 e -1, logo o limite não existe.

2.2-ANÁLISE DO LIVRO B

O livro B aborda o conceito de Limite e Continuidade no terceiro capítulo, logo após o conteúdo de números reais e funções, semelhantemente ao livro A. Verifica-se que essa ordem dos conteúdos é intencional, visto que, é necessário dominar esses conceitos para o entendimento e os cálculos envolvendo Limite e Continuidade. Todo conteúdo foi distribuído ao longo de 66 páginas e subdividido em seções, nas quais foram abordados os conceitos, exemplos e exercícios.

2.2.1-INTRODUÇÃO DOS CONCEITOS

Diferentemente do livro analisado anteriormente, o livro B introduz inicialmente o conceito de Continuidade através de uma noção intuitiva, onde o autor apresenta a ideia através de gráficos exemplificando o conceito. Segundo o autor, uma função contínua em um ponto do seu domínio, é aquela que não apresenta um "salto" neste ponto.

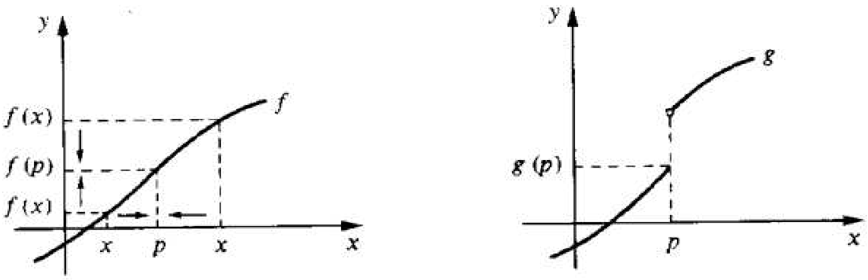

Figura 5-Noção intuitiva de continuidade-Livro B

Após apresentar os gráficos acima, o livro reforça a ideia de continuidade relacionada ao "salto" na função. Como podemos observar na Figura 5, a função f é contínua, pois não apresenta salto em seu gráfico, já a função g não é continua, pois contém um salto em seu gráfico. O autor ainda introduz nessa parte a ideia de aproximação pelo lado esquerdo e direito, fazendo uma analogia ao conceito de limite que virá posteriormente.

O conceito de limite é introduzido de maneira intuitiva em paralelo com o conceito de Continuidade. Logo após mostrar exemplos envolvendo funções contínuas, o livro insere a notação de limite da forma simbólica $\lim_{x \to p} f(x) = L$, como também exemplifica duas situações envolvendo limites, como apresentado na Figura 6.

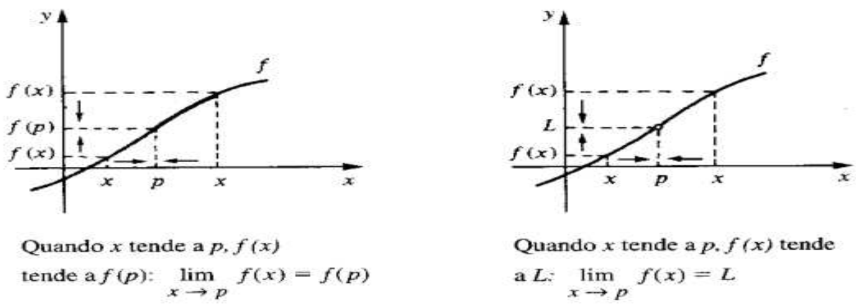

Figura 6-Introdução ao conceito de limite-Livro B

Na primeira situação (Figura 6a), quando o limite é o ponto aplicado na função, observa-se um caso de continuidade que mais adiante na definição formal pode ser retomado esse raciocínio. No segundo caso (Figura 6b), nota-se que a função, mesmo sendo descontinua, o limite indicado naquele ponto existe e é igual a um certo valor "L". O autor também usa tabelas para aplicar valores na função, assim obtendo o gráfico e calculando o limite de forma intuitiva.

2.2.2- ABORDAGEM DO CONTEÚDO E DEFINIÇÕES

Diferentemente do livro analisado anteriormente, após a noção intuitiva de Continuidade e Limite, construída baseada na análise de gráficos e tabelas, o autor faz uso de uma notação mais formal e define função contínua da seguinte maneira:

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{existe } \delta > 0 (\delta \text{ dependendo de } \varepsilon), \text{tal que,} \\ \text{para todo } x \in D(f), \\ \qquad p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \end{cases}$$

Em seguida, conclui que uma função é dita Contínua se a mesma for Contínua em todos os pontos do seu domínio. Destaca-se que essa definição de Continuidade apresentada no livro B é bastante abstrata, quando comparada com a Definição 2.2 dada no Livro A, podendo dificultar o entendimento do aluno.

A definição de Limite é abordada após desenvolver toda parte de Continuidade. O livro considera e analisa situações de funções que satisfazem ou não as propriedades descritas no livro.

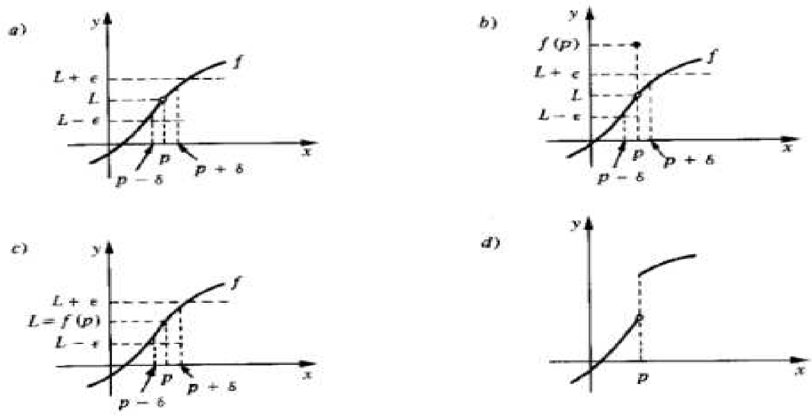

Figura 7-Definição de limite-Livro B

Analisando a Figura 7, observa-se que as situações (a) e (b) apresentam funções que não são contínuas em p, porém o Limite existe. No caso (c) a função é Contínua e o limite em p é igual a $f(p)$ e no caso (d) a função apresentada não existe o limite em p e consequentemente não é contínua. A partir dessa análise, o livro faz uma construção em etapas, utilizando de recursos gráficos e demonstrativos para chegar a definição formal de limite semelhante à Definição (2.1) apresentada no livro A.

2.2.3-EXEMPLOS E EXERCÍCIOS

Após definir os conceitos, o livro apresenta diversos exemplos resolvidos, porém diferentemente do Livro A analisado anteriormente, os exemplos são mais abstratos. Parecido com o livro A, este também apresenta uma boa quantidade de exercícios, ao todo são mais de 70, sendo dispostos ao final de cada tópico estudado.

Os exercícios seguem o mesmo contexto dos exemplos, fazendo o uso de muitas demonstrações e sendo pouco usada as noções intuitivas e gráficas, como também, não estimula o uso de tecnologias e ferramentas computacionais nos exercícios e exemplos.

Dentre muitos exercícios propostos, destacamos alguns e vamos solucioná-los abaixo:

Exercício 1: Prove, pela definição que a função dada é contínua no ponto dado.

a) $f(x) = 4x - 3 \ em \ p = 2$

Solução: Devemos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |4x - 3 - 5| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |4(x - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ temos que,

$$|x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

Logo, f é contínua em $p = 2$.

Exercício 2: Calcule e justifique.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Solução: Ao aplicarmos o limite observamos que,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

Observe que temos uma indeterminação, neste caso, podemos multiplicar pelo conjugado para sair da indeterminação, fazendo isso obtemos,

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{(x - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Agora podemos aplicar o limite normalmente, logo

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

Portanto o $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$.

2.3 ANÁLISE DO LIVRO C

O livro C contempla os conteúdos de limite e continuidade no segundo capítulo, sendo apresentado após o capítulo de funções. Assim, também percebe-se a necessidade de revisar funções antes de iniciar o estudo de Limite e Continuidade. O capítulo foi distribuído ao longo de 64 páginas e subdividido por seções nas quais apresentam os conceitos, definições, exemplos e exercícios.

2.3.1-INTRODUÇÃO DOS CONCEITOS

O livro inicia o capítulo fazendo um breve resumo do que será estudado, como também enfatiza a importância da aplicabilidade desses conceitos de limite na parte geométrica, na qual resulta no conceito de derivada. De fato, o limite é um conceito de extrema importância no Cálculo, e é interessante a forma como o livro introduz o capítulo, dando ênfase a parte prática e a utilidade desses conceitos no cotidiano.

TABELA 2.1 Velocidades médias em pequenos intervalos de tempo

Velocidade média: $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{4{,}9(t_0+h)^2-4{,}9t_0^{\,2}}{h}$

Duração do intervalo de tempo h	Velocidade média de duração h começando em $t_0 = 1$	Velocidade média no intervalo de duração h começando em $t_0 = 2$
1	14,7	24,5
0,1	10,29	20,09
0,01	9,849	19,649
0,001	9,8049	19,6049
0,0001	9,80049	19,60049

Figura 8-Introdução ao conceito de limite -livro C

Inicialmente o livro introduz exemplos envolvendo velocidade média e instantânea que levam ao conhecimento alvo (Limite), esses exemplos induzem o leitor a compreender a noção de limite de forma prática. Em um exemplo introdutório sobre velocidade instantânea chega-se a uma divisão por zero, onde não é possível fazer essa divisão, porém mostra-se a possiblidade de considerar números tão próximos de zero quanto quisermos e assim chegando a um determinado valor limite para velocidade.

Este exemplo mostra a ideia básica de Newton e Leibniz: Calcule a razão $\frac{S_2-S_1}{T_2-T_1}$ para um intervalo de tempo muito curto. Para todos os efeitos, esta razão é a velocidade no instante t_1 e também no instante t_2, pois são muito próximos!! Assim, a velocidade instantânea de um corpo é dada aproximadamente por $\frac{S_2-S_1}{T_2-T_1}$ quando a diferença $t_2 - t_1$, for pequena.

Após explanar os exemplos introdutórios o livro define limite informalmente na forma simbólica $\lim_{x \to x0} f(x) = L$ e expõe exemplos de funções enfatizando o conhecimento do conceito de forma algébrica e geométrica, fazendo o uso de gráficos e tabelas para explicar a ideia de limite como sendo uma aproximação infinitamente pequena de um determinado ponto.

Para introduzir o conceito de função Contínua o Livro C faz uma breve contextualização do assunto, utiliza gráficos e exemplos para a compreensão do conteúdo. Podemos citar algumas ideias que esse livro associa ao conceito de Continuidade, como uma curva não interrompida, uma função que os valores não saltam e uma função na qual podemos desenhá-la no gráfico sem levantar o lápis do papel. Esses exemplos abordados podem proporcionar um melhor entendimento do conteúdo, visto que, o conceito apresentado apenas de maneira abstrata pode impactar no aprendizado de forma negativa.

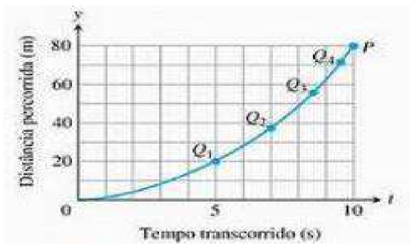

Figura 9-Introdução ao conceito de Continuidade-Livro C

2.3.2-ABORDAGEM DO CONTEÚDO E DEFINIÇÕES

A definição formal de limite é apresentada baseada na noção intuitiva que foi vista anteriormente e explanada através de exemplos, porém as expressões utilizadas na definição formal são agora generalizadas de maneira formal, onde possibilita que seja utilizada em qualquer situação envolvendo limite.

Através de um exemplo o livro introduz o cálculo do limite utilizando desigualdade para mostrar que se quisermos saber o limite de $f(x) = L$, devemos mostrar que a distância entre $f(x)$ e L deve ser menor que qualquer erro, ou seja, o $|f(x) - L| < \varepsilon$ e que o x deve ser mantido próximo a x_0 , que na definição corresponde a desigualdade $|x - x_0| < \delta$ .A partir dessas análises e exemplos o livro define limite formalmente de maneira semelhante a Definição (2.1) vista no livro A.

A definição de função contínua é apresentada após um exemplo e não é descrita da forma abstrata como no livro B. O livro C resume a definição a um teste de continuidade, semelhante ao que o livro A descreve como definição de continuidade.

2.3.3-EXEMPLOS E EXERCÍCIOS

O livro apresenta uma vasta gama de exemplos e exercícios. Após cada tópico estudado, são apresentados diversos exemplos resolvidos de forma detalhada descrevendo o passo a passo de cada resolução, de forma que o leitor compreenda a solução. Assim como no Livro A, o Livro C também incentiva em algumas questões o uso de tecnologias para resolver exercícios.

Os exercícios são dispostos ao final de cada seção e abordam desde os conceitos mais básicos até os mais complicados, sendo assim considerados equilibrados. Ao final do capítulo também traz diversos exercícios, sejam eles práticos, avançados ou utilizando ferramentas tecnológicas. O que chama atenção no Livro C analisado é a quantidade e a qualidade dos exercícios, pois ao final de cada tópico é proposto em média 50 exercícios que mesclam entre desenvolver a prática, usar tecnologias, como também, exercícios que exigem um pouco mais do aluno.

Dentre muitos exercícios propostos, destacamos alguns e vamos solucioná-los abaixo:

Exercício 1: Para a função $f(t)$ aqui ilustrada (Figura 7), encontre os seguintes limites ou explique porque eles não existem.

a) $\lim\limits_{t \to -2} f(t)$ **b)** $\lim\limits_{t \to -1} f(t)$ **c)** $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$

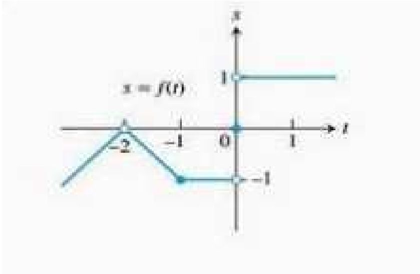

Figura 10-exercício-Livro C

Solução:

a) Note que, quando t se aproxima de -2 tanto pela esquerda quanto pela direita o s tende para 0, logo $\lim_{t \to -2} f(t) = 0$.

b) Observe que, quando t se aproxima de -1 por ambos os lados o s tende para -1, logo $\lim_{t \to -1} f(t) = -1$

c) Neste caso, quando t se aproxima de 0 pela esquerda s tende a -1 e quando t se aproxima de 0 pela direita s tende a 1, portanto como os limites laterais diferem o $\lim_{t \to 0} f(t)$ não existe!

Exercício 2: Nos exercícios 1-4, diga se a função traçada é continua em [-1,3]. Se não, onde ela deixa de ser contínua e por quê?

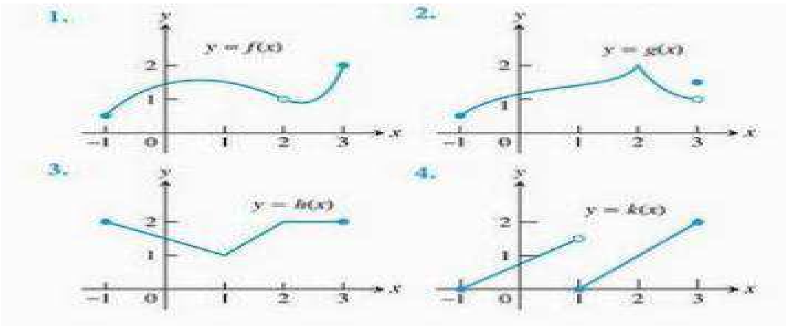

Figura 11-Exercício-Livro C

Solução:

1) Note, que a função não está definida em $x = 2$, logo não é contínua.
2) Neste caso a função está definida em [-1,3], porém o $\lim_{x \to 3} g(x)$ difere de $g(3)$, logo não é contínua.
3) Neste caso a função é contínua, pois não apresenta salto em sua imagem.

4) Temos aqui um caso parecido com a questão 2), pois $k(x)$ está definida em [-1,3], porém o $\lim_{x \to 1} k(x)$ não existe, portanto a função é descontínua em $k = 1$.

2.4-CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE OS LIVROS ANALISADOS

Consideramos que ao analisarmos um livro devemos observar vários aspectos como, por exemplo, o público alvo. O modo como cada obra apresenta o conteúdo pode ser de difícil compreensão para um público, como pode ser fácil para outro. Da mesma forma são as impressões sobre cada livro, isso pode variar de pessoa para pessoa, visto que, a forma como analisamos pode favorecer obra X ou Y, por apreço a determinada metodologia empregada no livro.

Os três livros analisados apresentam basicamente a mesma estrutura. Nos livros A e B, os conteúdos de Limite e Continuidade são abordados no terceiro capítulo, após os capítulos de Números Reais e Funções. Já no livro C, os conteúdos de Limite e Continuidade são apresentados no segundo capítulo, após o capítulo de funções. Percebe-se que essa disposição é intencional, pois os conceitos de números reais e funções são conteúdos preliminares para compreender Limite e Continuidade.

A organização dos capítulos também é parecida, apresentam as definições intuitivas, exemplos, definição formal e, no final, exercícios de fixação. A disposição dos conceitos é semelhante nos livros A e C, nos quais é apresentado o conteúdo de limite e posteriormente continuidade. Já no livro B, acontece o inverso, primeiramente é abordado o conceito de Continuidade e, em paralelo, apresenta-se o conceito de Limite.

Em relação a apresentação dos conteúdos, no livro A aborda muitos exemplos envolvendo gráficos e tabelas, que pode contribuir para um melhor entendimento. No livro B, os conceitos são tratados de maneira mais formal e abstrata. No livro C, os conteúdos são introduzidos através de situações problemas e aplicações, o que pode ser considerado uma motivação, pois o leitor percebe a utilidade e a importância de estudar tal conteúdo.

Nos três livros analisados os exercícios propostos seguem o padrão dos exemplos, o que difere é a quantidade. Os livros A e C apresentam bastante exercícios, com representações gráficas, aplicações e uso de tecnologias. Desta forma, incentiva o leitor para o uso de ferramentas computacionais no ensino e aprendizagem do Cálculo. No livro B os exercícios abordam mais demonstrações e questões que promovem o cálculo mecânico e repetitivo.

Na tabela 1, apresentamos um resumo das principais características dos livros analisados no trabalho.

LIVRO	PÚBLICO ALVO	INTRODUÇÃO DOS CONCEITOS	ABORDAGEM DO CONTEÚDO E DEFINIÇÕES	EXEMPLOS E EXERCÍCIOS
Livro A	Cursos de Matemática, Química, Física e Engenharia.	Através de uma noção intuitiva, utilizando sucessões numéricas e tabelas.	Através de exemplos gráficos e analíticos.	Os exemplos e exercícios, abrangem da noção intuitiva até as definições formais e utilização de ferramentas tecnológicas.
Livro B	Cursos de Matemática e Estatística.	Através de uma noção intuitiva, onde o autor apresenta a ideia por meio de gráficos exemplificando o conceito.	Os conceitos são tratados de maneira mais formal e abstrata.	Os exercícios abordam mais demonstrações e questões que promovem o cálculo mecânico e repetitivo.
Livro C	Professores, estudantes e profissionais das áreas de ciências e engenharia.	Situações problemas e aplicações.	As definições formais são construídas baseada nas noções intuitivas e assim generalizadas.	Os exemplos e exercícios, abrangem da noção intuitiva até as definições formais e utilização de ferramentas tecnológicas.

Tabela 1-Comparativo dos Livro A, B e C.

Estas foram nossas considerações sobre os livros analisados. Notamos que cada livro atende as suas propostas, porém cada um com suas peculiaridades. Foi possível perceber variações na forma de apresentar os conteúdos, o que pode facilitar ou dificultar o entendimento e a formação da imagem conceitual de Limite e Continuidade.

3. PESQUISA COM OS DISCENTES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como foi apresentado na análise dos livros, os autores abordam tanto a Noção Intuitiva de Limite como a Definição Formal. Em geral, os professores de Cálculo I também fazem essas duas abordagens. Destaca-se que, a transição do intuitivo para o formal causa bastante impacto no processo de ensino aprendizagem de Limite e, portanto, tem sido alvo de estudo de pesquisadores, como por exemplo, Abreu (2011).

Tendo como base a análise dos livros e a metodologia descrita em Abreu (2011), elaboramos a seguinte questão investigativa:

Qual a imagem conceitual que o aluno tem sobre o tema Limite e Continuidade?

Tall e Vinner (1981) definem imagem conceitual como uma estrutura cognitiva que está relacionado a determinado conceito, nela está inclusa todas imagens e ideias que o indivíduo associa a um conteúdo, ou seja, a imagem conceitual é um conjunto de concepções intuitivas pela qual se compreende determinado conceito matemático.

A definição conceitual é uma forma de expressar a compreensão de conceitos matemáticos. Segundo Tall e Vinner (1981) a definição conceitual é modo como descrevemos determinado conceito, ou seja, é o meio pelo qual expressamos a nossa imagem conceitual de maneira mais formal. Uma definição conceitual pessoal pode diferir da definição conceitual formal, esta última sendo uma definição conceitual que é aceita pela comunidade matemática em geral.

Este trabalho tem um caráter investigativo e apresenta uma pesquisa quantitativa e qualitativa, pois além de apresentar resultados quantitativos, discutiremos e analisaremos a imagem conceitual manifestada pelos alunos. De acordo com Creswell (2007), esse tipo de pesquisa é considerado um método misto, ou seja, é feito a análise dos dados de modo qualitativo e quantitativo.

Para a realização da referida pesquisa, foi criado um questionário através da plataforma Google Formulários e o mesmo enviado pelos grupos de WhatsApp para os alunos. A amostra foi coletada com alunos de períodos aleatórios dos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química, pois são cursos que tem o Cálculo Diferencial e Integral I como disciplina obrigatória. Desta forma, considerou-se na amostra alunos que estão atualmente matriculados na disciplina ou que já concluiram a disciplina e estão mais avançados no curso.

O questionário foi disponibilizado para os alunos no final do mês de março de 2022 e ficou aberto para respostas até o mês de junho. Coletamos 20 respostas, das quais 14 foram de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, 5 de licenciatura em Física e 1 de licenciatura em Química. Os alunos que colaboraram com a pesquisa estão atualmente matriculados na disciplina de de Cálculo Diferencial e Integral I ou já concluiram a disciplina e estão mais avançados no curso.

Para coleta de dados, foram propostas três questões abertas adaptadas de Abreu, O. H (2011), que serão detalhadas a seguir.

Pergunta 1: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Limite. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor.

Pergunta 2: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Limite. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.

Pergunta 3: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Função Contínua. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função é contínua em um certo valor da variável independente.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo avaliar a imagem conceitual que os alunos participantes construiram no decorrer do curso sobre Limite e Continuidade. As perguntas abordaram os conceitos de maneira intuitiva, de forma que o aluno não precisasse responder utilizando fórmulas ou uma linguagem rigorosamente matemática.

3.1. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A partir de agora, faremos uma analise quantitativa e qualitativa das respostas dos discentes. Primeiramente apresentaremos os resultados quantitativos. Posteriormente, faremos uma análise mais aprofundada discutindo algumas respostas, com relação ao tipo, repetição e peculiaridades de algumas.

Pergunta 1: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Limite. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor.

Nesta primeira pergunta queríamos que o aluno expressasse a noção intuitiva de limite sobre quando a variável independente tende a um certo valor, os valores correspondentes na imagem da função se aproximam de um ponto específico.

Inicialmente examinaremos as respostas considerando-as aceitáveis ou não. Buscamos reconhecer como aceitável todas as que se aproximaram de uma resposta ideal.

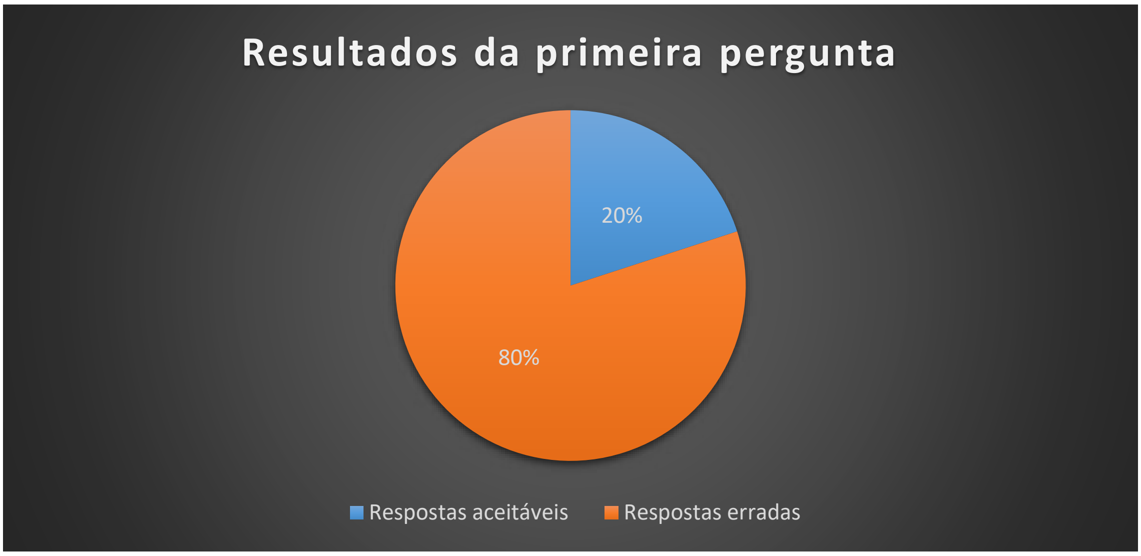

Figura 12-Gráfico da análise da primeira pergunta

Como podemos observar no gráfico da Figura 12, apenas 20% dos participantes apresentaram uma resposta aceitável diante da Pergunta 1. Temos que 80% apresentaram respostas diversas. Dentre os principais motivos pelos quais não julgamos as respostas corretas, foi o não entendimento do que é variável independente. Foi possível observar em diversas respostas que os alunos não têm uma noção clara sobre o conceito de variável dependente/independente.

Na Tabela 2 iremos classificar as respostas com relação a imagem conceitual que os entrevistados apresentaram em suas explicações. Faremos uma análise qualitativa e quantitativa, levando em consideração o tipo de resposta, a fim de verificar a concepção do discente com relação ao conceito de limite de uma função em um ponto.

TIPO DE RESPOSTA	PERCENTUAL
A forma de como a função se comportará	10%
Quando os limites laterais tenderem a um mesmo valor	20%
A função se aproxima de um determinado valor	25%
A função está definida nesse intervalo	5%
Tende/aproxima desse valor, mas não assume	15%
Quando a variável se aproxima do ponto a função se aproxima do valor da imagem	10%
Tem um limite no qual se pode chegar	5%
Tendendo a variável para o seu limite sem atingir esse certo valor, o resultado se torna e permanece menor que qualquer valor predeterminado, por menor que seja.	5%
Não entendi esse assunto	5%
TOTAL	**100%**

Tabela 2-Análise da pergunta-1

Como podemos observar na Tabela 2, 25% dos alunos associaram o conceito de limite a uma aproximação de um determinado valor. Muitos livros iniciam o conteúdo de limite calculando valores de uma dada função na vizinhança de um ponto e mostram aproximações pela direita e pela esquerda para introduzir a noção intuitiva. O que pode explicar o percentual expressivo para este tipo de resposta. É importante ressaltar que 15% também relacionaram o conceito de limite a "tender/aproximar" e relataram que "se aproxima, porém não assume esse valor" sem, contudo, especificar se esse valor refere-se à variável independente ou ao limite da função.

De outra forma, 20% relataram que a função tem limite quando os limites laterais tenderem ao mesmo valor. Esta resposta também foi obtida na pesquisa realizada por Abreu (2011), onde foi observada em 25% das respostas. Das respostas acima, 10% apresentaram uma imagem conceitual razoável sobre o que foi perguntado, no qual responderam que, quando a variável (independente) se aproxima do ponto, a função se aproxima do valor da imagem, desde que a função seja definida neste ponto. Vale salientar que pode existir o Limite em um ponto que a função não está definida, portanto a resposta não apresenta uma imagem clara sobre o que foi perguntado.

Por outro lado, tivemos um tipo de resposta (5%) no qual o aluno apresentou uma definição conceitual pessoal: “Tendendo a variável para o seu limite sem atingir esse certo valor, o resultado se torna e permanece menor que qualquer valor predeterminado, por menor que seja”. Podemos observar que a linguagem utilizada pelo aluno, mesmo sendo confusa, remete à definição formal de limite, porém diverge da definição aceita pela comunidade matemática em geral. Portanto, trata-se de uma definição equivocada.

Outras respostas apresentadas foram: “a forma de como a função se comportará” (10%), “tem um limite no qual se pode chegar” (5%), “a função está definida nesse intervalo” (5%), “não entendi esse assunto” (5%), portanto tivemos 25% de respostas que não apresentaram uma imagem conceitual compreensível sobre o que foi questionado.

De modo geral, boa parte dos alunos manifestaram uma imagem conceitual equivocada. Foi possível perceber que eles não têm uma ideia clara sobre a diferença entre variável dependente e independente, visto que em muitas respostas foi apresentado apenas a palavra variável sem distinguir se era dependente ou independente. Essa realidade também foi comprovada por Abreu (2011), onde obteve resultados análogos.

Pergunta 2: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Limite. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.

Nesta pergunta queríamos que o aluno explanasse de forma intuitiva a sua compreensão sobre limite infinito e limite no infinito. Isto é, quando a variável independente cresce indefinidamente, a função cresce ou decresce indefinidamente.

Como feito na primeira pergunta, inicialmente examinaremos as respostas considerando-as aceitáveis ou não.

Figura 13-Gráfico da análise da segunda pergunta

Como podemos observar na Figura 13, tem-se que apenas 5% das respostas da segunda pergunta são consideradas aceitáveis. Percebemos que muitos alunos apresentaram respostas incompletas e não conseguiram manifestar uma imagem conceitual do conteúdo abordado. Semelhante à primeira pergunta, os alunos confundiram os conceitos de variável dependente e independente, como pode ser observado na Tabela 3.

TIPO DE RESPOSTA	PERCENTUAL
Quando a função vai para infinito	15%
A função pode crescer para mais ou menos infinito	15%
Quando tende a 0 se aproxima do infinito	10%
Quando a variável da função vai para o infinito	15%
Quando a variável cresce a função vai para o infinito	5%
Esboçou uma imagem totalmente fora de contexto	40%
TOTAL	100%

Tabela 3-Análise da pergunta-2

Podemos destacar na Tabela 3 que o maior percentual foi de respostas fora de contexto, ou seja, os alunos não manifestaram uma imagem conceitual aceitável sobre limite infinito e limite no infinito. Como podemos observar na Tabela 3, muitos apresentaram respostas incompletas: “A função vai para infinito” (15%), “A função pode crescer para mais ou menos infinito" (15%). Interessante observar que 10% relataram que "Quando tende a 0 se aproxima do infinito". Esta resposta provavelmente está relacionada com um resultado clássico da teoria de limites infinitos, que afirma que : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \pm\infty$. Este é um exemplo muito citado em livros e notas de aula.

Na resposta "entendo que a variável está indo para o infinito", não fica claro se o aluno se refere à variável independente e também não foi explicado o que acontecerá com o comportamento da função.

Outras respostas não pontuadas na Tabela 3 foram: "Se trata de uma função crescente", "A função não é limitada superiormente". Isto nos mostra uma associação com outros conceitos matemáticos e evidencia que eles não têm uma imagem conceitual clara sobre o tema abordado.

Pergunta 3: No decorrer da disciplina de Cálculo você, provavelmente, conheceu o conceito de Função Contínua. Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números ou simbologia matemática, o que você entende por: Uma função é contínua em um certo valor da variável independente.

Na última pergunta queríamos que o aluno expusesse a imagem conceitual de continuidade de uma função em um ponto, sem que houvesse a inserção de simbologia matemática ou números.

Na Figura 14 apresentamos o percentual de respostas que consideramos aceitáveis ou não. Como nas outras perguntas, buscamos considerar aceitáveis todas as que se aproximassem de uma "resposta ideal", baseada na noção intuitiva dos conceitos.

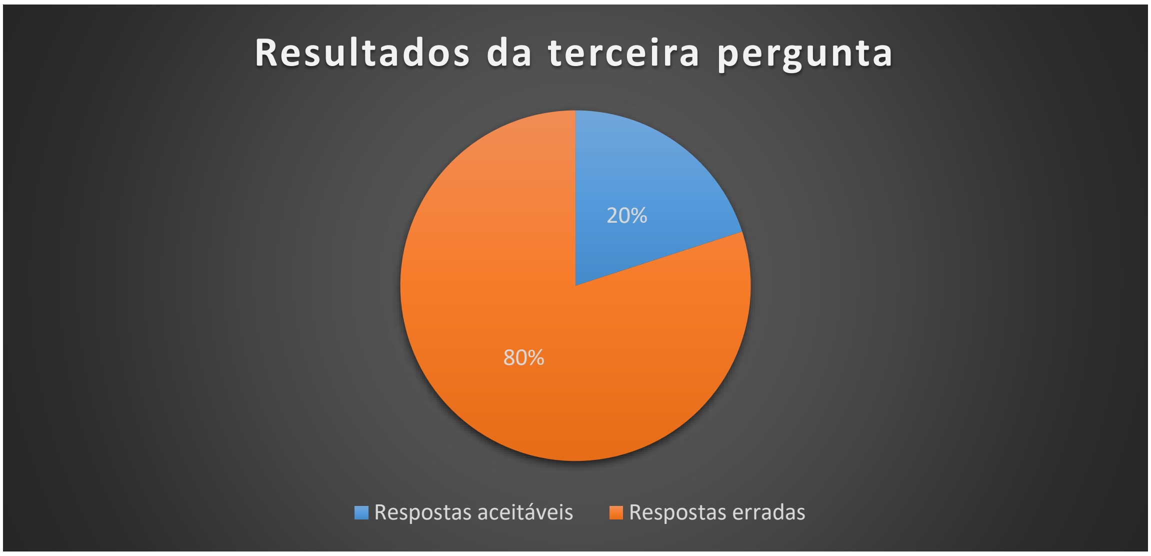

Figura 14-Gráfico da análise da pergunta 3

Conforme constatamos na Figura 14, 20% das respostas são consideradas aceitáveis, onde os participantes manifestaram a noção intuitiva que eles têm em relação ao conceito de continuidade de uma função. Das respostas que foram consideradas erradas (80%), destaca-se que muitos alunos têm alguma noção sobre o conteúdo, porém não conseguem manifestar, ou não compreenderam a pergunta.

Na Tabela 4 apresentamos detalhadamente as respostas.

TIPO DE RESPOSTA	PERCENTUAL
Pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel	10%
Quando a função estiver definida para um certo valor/sem interrupções	25%
A função está definida naquele ponto, o limite da função aplicada no ponto existe e a função aplicada no ponto é igual ao valor do limite.	15%
Que o limite existe nesse ponto	15%
Quando os valores empregados corresponderem na imagem	15%
Esboçou uma imagem totalmente fora de contexto	20%
TOTAL	**100%**

Tabela 4-Análise da pergunta-3

Podemos destacar que boa parte dos participantes (25%), manifestaram a seguinte imagem conceitual: “quando a função estiver definida em um certo valor ou não haja interrupções na mesma”. Assim como nas respostas das perguntas 1 e 2 os alunos não distinguiram as variáveis, não fica claro essa “interrupção”, que provavelmente refere-se ao gráfico da função.

Observa-que que 15% expressaram uma definição conceitual na resposta quando responderam: “A função está definida naquele ponto, o limite da função aplicada no ponto existe e a função aplicada no ponto é igual ao valor do limite”. Neste caso, a definição conceitual apresentada coincide com a definição conceitual que é aceita pela comunidade matemática em geral.

As respostas que relacionaram a continuidade ao limite existir (15%) e a correspondência de valores na imagem (15%), podem estar relacionadas a definição ou teste abordado nos livros, porém são incompletas.

Vale ressaltar que 10% responderam que “pode ser desenhada sem retirar o lápis do papel”, que corresponde à imagem conceitual que o aluno tem com relação ao tema abordado. Em alguns livros é comum encontrar essa característica do gráfico de uma função contínua e, além disso, nas expressões tais como: “salto no gráfico da função”, “buraco no gráfico da função”, são frequentemente utilizadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscamos discutir sobre alguns conceitos básicos do Cálculo, como Limite e Continuidade. Para isso, fizemos uma análise de três livros didáticos de Cálculo, no qual discutimos como cada exemplar aborda tais conceitos. Fizemos também uma pesquisa, onde analisamos de modo quantitativo e qualitativo a percepção dos alunos com relação a imagem conceitual de Limite e Continuidade.

Diante da análise dos livros didáticos, podemos perceber que os mesmos apresentam estruturas semelhantes, cada um com suas peculiaridades. Com relação a abordagem dos conceitos, um contém uma linguagem mais rigorosa, exercícios e exemplos mais complexos, enquanto os outros dois buscam abordar os conceitos com uma linguagem mais simples, representações gráficas e problemas aplicados.

Vale salientar que esses conceitos são vistos no início dos cursos de Cálculo, portanto, uma linguagem mais rigorosa pode dificultar no entendimento desses conceitos. Porém destacamos que isso pode variar de pessoa para pessoa, pois a maneira de compreender determinado assunto é diferente. Diante disso fica a critério do professor escolher o livro que melhor for atendê-lo diante das necessidades e desenvoltura da turma.

Através da pesquisa, conseguimos observar que grande parte dos entrevistados apresentam uma certa dificuldade em manifestar a imagem conceitual que eles têm sobre Limite e Continuidade, mesmo sendo cobrado apenas a forma intuitiva e sem simbologia matemática. Esta dificuldade pode ser bem mais profunda quando se trata de definição formal.

Diante disso, podemos perceber que muitos dos conceitos e noções abordadas nos livros didáticos foram observados nas respostas dos alunos, sendo assim relevante a análise. A parte histórica traz uma fundamentação de onde e como surgiram essas definições e conceitos estudados, portanto, servem como embasamento e motivação para os alunos.

Por fim, consideramos que os resultados desta pesquisa, podem servir como base para pesquisas futuras, buscando identificar as possíveis causas do problema, como também sugerir ações que possam melhorar o ensino e aprendizagem do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em cálculo I.** Ouro Preto. 2011. Dissertação (Mestrado profissional em educação matemática). Universidade Federal de Ouro Preto.

ALMEIDA, W. Q. **Dificuldades dos alunos no aprendizado de cálculo diferencial e integral I: uma reflexão.** Belo Horizonte. 2016. Monografia (especialização em matemática). Universidade Federal de Minas Gerais.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto** John W. Creswell: tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DOMINGUINI, Lucas. Fatores que evidenciam a necessidade de debates sobre o livro didático. **Congresso Internacional de Filosofia e Educação.** Caxias do Sul-RS, 2010. Disponível em: https://www.ucs.br/ucs/tplcinfe/eventos/cinfe/artigos/artigos/arquivos/eixo_tematico7/Fatores%20que%20Evidenciam%20a%20Necessidade%20de%20Debates%20sobre%20o%20Livro%20Didatico.pdf . Acesso em: 22 agosto. 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução HYGINO H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FULINI, M. O. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. São João Del-Rei. 2016. Monografia (graduação em licenciatura em matemática). Universidade Federal de São João Del-Rei.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. Belo Horizonte. CAED-UFMG, 2013.

REZENDE, W. M. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N. J., CUNHA, M. O. **Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática.** São Paulo: Escrituras Editora, 2003. p.313-336. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/lca19.pdf .Acesso em: 06 abril. 2022.

ROSA, C. de M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. dos. Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**. Campinas, SP, v. 5, n 019023, p.1-16, 2019. Disponível em:

https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8653091 .Acesso em: 2 jul. 2022.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity.** Londres: Kluwer, p. 151-169, 1981.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE. **Pró-Reitoria de Ensino/Dados abertos**. Cuité, 2022. Disponivel em: https://pre.ufcg.edu.br/pre/dados-abertos . Acesso em: 30 jun. 2022.