Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Educação e Saúde
Unidade Acadêmica de Física e Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

Vandermir Santos Silva

Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e aplicações

Cuité-PB

2022

Vandermir Santos Silva

Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e aplicações

TCC apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Glageane da Silva Souza

Cuité-PB

2022

S586e Silva, Vandermir Santos.

Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e aplicações. / Vandermir Santos Silva. - Cuité, 2022.
48 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.
"Orientação: Profa. Dra. Glageane da Silva Souza".
Referências.

1. Equações diferenciais. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. 4. Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. 5. Lei de resfriamento de Newton. 6. Sistema massa mola. 7. Modelagem matemática. 8. Linearidade. 9. Perícia criminal - aplicação. I. Souza, Glageane da Silva. II. Título.

CDU 517.91(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e aplicações

Vandermir Santos Silva

TCC apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Glageane da Silva Souza

Aprovado pela seguinte banca examinadora:

Glageane da Silva Souza

Profa. Dra. Glageane da Silva Souza - UFCG/Câmpus Cuité

Orientadora

Célia Maria R. Franco

Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG/Câmpus Cuité

Avaliadora

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Digite o texto aqui

Profa. Msc. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG/Câmpus Cuité

Avaliadora

Cuité-PB

19 de agosto de 2022

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e sustentado e por ter estado comigo em todas as etapas dessa jornada e principalmente por ter permitido que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais Domicio e Marina, meus eternos professores que me educaram e me apoiaram a seguir nos estudos. Aos meus irmãos Vanilson, Vandeilson e Valk que também ingressaram na faculdade, pelo companheirismo e incentivo nos estudos. Ao meu outro irmão Vandecio, a sua esposa e filha: Patrícia e Rihana respectivamente, pelo acolhimento em sua casa durante as viagens entre Damião e Cuité. E a minha irmã Maria da Vitória e seu esposo Aristelson que também me ajudaram sempre que precisei em deslocamento e tudo mais. Além das especificações, agradeço a minha família por ser minha base e me incentivar em todos os momentos da vida.

Um agradecimento muitissímo especial a minha orientadora, professora Glageane da Silva Souza que aceitou fazer parte da construção desse trabalho, pelas orientações, pelos ensinamentos e pela humanidade.

As professoras Célia Maria Rufino Franco e Maria de Jesus Rodrigues da Silva que aceitaram o convite para fazer parte da banca examinadora, para avaliar e dar suas contribuições para esse trabalho.

Aos demais professores que compõem o corpo docente do Centro de Educação e saúde (CES) pelos ensinamentos adquiridos ao longo dessa caminhada de graduação e pelo empenho em formar profissionais cada vez mais capacitados.

A todos os meus amigos e colegas, aos que iniciaram o curso comigo e também aos que conheci durante a graduação ao decorrer das disciplinas, pelos conhecimentos compartilhados, pelo companheirismo tanto nas horas boas como nas horas difíceis e pelos momentos vividos.

Em especial ao meu amigo Marcos Antônio, sempre compartilhamos nossos conhecimentos e quase sempre trabalhamos juntos nas disciplinas tanto da Matemática pura como nas diciplinas de educação. Brincavamos de quem conseguia fechar cada período com o CRA mais alto. Brincadeiras a parte, mas isso me motivava a estudar e a me empenhar mais nas disciplinas.

Enfim, sou muitíssimo grato a todos que contribuíram direto ou indiretamente para a minha formação.

Este trabalho é dedicado a todos os que me ajudaram direto ou indiretamente ao longo desta caminhada, em especial a minha família que é a minha base.

"A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o Universo."

(Galileu Galilei)

Resumo

Este trabalho traz um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias, onde inicialmente é apresentado um pouco sobre o surgimento e estudo dessas equações, bem como os principais nomes que deram suas contribuições para o seu desenvolvimento. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre as equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, onde apresentamos suas principais definições: classificação quanto ao tipo, ordem e linearidade, existência de solução, problemas de valor inicial, e os principais métodos para encontrar soluções para esses tipos de equações. Como aplicação, fizemos um estudo sobre a Lei de Resfriamento de Newton e apresentamos um problema com aplicação na perícia criminal. Trabalhamos também com o sistema massa mola modelado através de uma equação diferencial de segunda ordem, dando enfoque no sistema massa mola amortecido, e apresentamos um problema que envolve os três possíveis tipos para o movimento amortecido: super amortecido, criticamente amortecido e não amortecido. Percebemos então a importância do estudo das Equações Diferenciais não apenas para a matemática, mas também para outras áreas do conhecimento, visto que permite modelar diferentes situações estudadas por essas áreas.
Palavras-chaves: Equações Diferenciais Ordinárias, Lei de Resfriamento de Newton, Sistema Massa Mola, Modelagem Matemática.

Abstract

This work presents a study on ordinary differential equations, where initially a little about the emergence and study of these equations is presented, as well as the leading names that gave their contributions to their development. Bibliographic research was carried out on first and second-order ordinary differential equations, where we present their main definitions: classification as to type, order, and linearity, the existence of solution, initial value problems, and the main methods to find solutions for these types of equations. As an application, we did a study on Newton's Law of Cooling and presented a problem with application in criminal expertise. We also work with the spring-mass system modeled through a second-order differential equation, focusing on the damped mass-spring system. We present a problem that involves the three possible types of the damped motion: super damped, critically damped, and undamped. We then realized the importance of studying Differential Equations not only for mathematics but also for other areas of knowledge, since it allows modeling different situations studied by these areas.
Keywords: Ordinary Differential Equations. Newton's Law of Cooling. Spring-Mass System, Mathematical Modeling.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Desde os povos antigos, o surgimento dos primeiros artifícios matemáticos, como por exemplo a criação do primeiro sistema numeral, foi desenvolvido com base nos problemas que a sociedade enfrentava naquela época, então apesar da matemática moderna ter esse aspecto teórico, ela está intimamente ligada com a matemática aplicada (Modelagem) desde o início das civilizações (BIEMBENGUT; NELSON, 2000).

Assim, entende-se que "A modelagem consiste, essencialmente na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (BASSANEZI, 2002, p. 24). Portanto, percebemos que a aplicação matemática não apenas torna seu aprendizado mais significativo como também facilita a compreensão no processo de ensino e aprendizagem.

Logo, as Equações Diferenciais Ordinárias é um ramo da matemática de grande importância devido a sua interdisciplinaridade, uma vez que permite modelar diversas situações estudadas nas diferentes áreas do conhecimento como a Biologia, Física, Química, Engenharia entre outras.

Este trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica acerca das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e algumas aplicações. O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo é abordado o contexto histórico que envolve o estudo das EDO's. Como surgiu através do estudo do Calculo Diferencial por Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton até a estruturação e organizaçao dessa área matemática como à conhecemos hoje. Traremos também uma introdução sobre essas equações e sobre suas classificações quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

No capítulo 2 faremos um estudo bibliográfico sobre as EDO's de primeira e segunda ordem que servirá como base para entedimento de suas aplicações. Discutiremos sobre o Problema de Valor Inicial (PVI), e também sobre os diferentes métodos para encontrar soluções tanto das ED's de primeira ordem como das ED's de segunda ordem.

No capítulo 3 traremos uma aplicação de EDO de primeira ordem através da Lei de Resfriamento de Newton, a qual nos diz que a taxa de variação de um corpo em resfriamento, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Assim, será contextualizado o estudo da Lei de Resfriamento de Newton e será apresentado um exemplo de aplicação na perícia criminal modelado através de uma Equação Diferencial de primeira ordem separável.

Ainda no capítulo 3 apresentamos uma aplicação de EDO de segunda ordem. A Equação Diferencial Ordinária será deduzida através da Segunda Lei de Newton, visto que, através da segunda derivada da posição de um bloco suspenso por uma mola chegamos em uma EDO de segunda ordem. Será apresentado um exemplo mostrando essa aplicação de um sistema massa mola amortecido para melhor compreensão do leitor.

Capítulo 1

Notas Históricas

1.1 Contexto Histórico

O surgimento das Equações Diferenciais se deu em decorrência do desenvolvimento de outra área matemática também muito importante, o Cálculo Diferencial, ou como era mais conhecido na época, o Cálculo Infinitesimal. O surgimento do estudo do Cálculo compreende-se entre o século XVII e inicío do século XVIII, e tem como precursores nomes de grandes cientistas como: Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727), e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que foram os principais estudiosos que se dedicaram ao estudo de taxas de variação de grandezas.

Pierre de Fermat nasceu na região de Basca, e teve uma educação privilegiada graças ao fato de seu pai ser um rico mercador de peles, estudou direito em Tolouse, onde também estudou Matemática. Em 1629 Fermat iniciou a restauração de obras perdidas da antiguidade, e ao trabalhar com a obra de Apollonius, desenvolveu um importante trabalho para calcular máximos e minímos, intitulado Métodos para Determinar Máximos e Mínimos e Tangentes a Linhas (BOYER; MERZBACH, 2019).

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe na Inglaterra, foi criado e educado por sua avó até os seus 14 anos de idade. Aos 18 anos, Newton foi aceito na Universidade de Cambridge, ou mais especificamente no Trinity College, onde passou 4 anos e em 1665 recebeu o grau de Bacharel em Artes. Teve aulas com o Professor Isaac Barrow (1630-1677), de quem se tornou amigo, o que culminou posteriormente para que Barrow o incentivasse no desenvolvimento das aptidões matematemáticas que Newton já apresentava.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig, na Alemanha. Estudou na Universidade de Leipzig e concluiu seu Doutorado em Direito no ano de 1666 na Universidade de Nuremberg. Estudou ainda Teologia, Matemática, Filosofia e Linguistica, por esse motivo foi reconhecido por muitos como gênio universal de sua época. Em decorrência de suas viagens para Londres conheceu nomes como Christiaan Huygens (1629-1695) Robert Boyle (1627-1691), que foram os principais responsaveis por despertarem em Leibniz seu interesse pela matemática.

Boyce e DiPrima (1985) citam que os trabalhos desenvolvidos por Newton no cálculo e os princípios básicos da mecânica deram base para a aplicação das equações diferenciais no século seguinte. Além do mais, ele definiu as equações diferenciais de primeira ordem como sendo

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e ainda desenvolveu um método usando séries infinitas para resolver esse último tipo de equação.

Leibiniz, teve grandes avanços em seus estudos sobre cálculo e chegou aos mesmos resultados que Newton de forma independente, e fez a publicação do seu trabalho em 1684. Conhecendo a importância de uma boa notação matemática, Leibniz é o responsável pela notação de integral e da derivada (dy/dx) como a conhecemos hoje. Além do mais, desenvolveu o método de separação de variáveis, e também o procedimento para reduzir equações homogêneas em equações separáveis. Leibniz manteve correspondências com os irmãos Bernoulli o que possibilitou resolver muitos problemas envolvendo as equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

No século seguinte, foi a vez dos irmãos Bernoulli fazerem aplicações das equações diferenciais na astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli(1654-1705) descreveu o movimento planetário através das equações diferenciais baseado no conceito de gravidade desenvolvido por Newton.

Johann Bernoulli (1667-1748) resolveu a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$$

em 1694, e utilizou os trabalhos de cálculo e os princípios de mecânica, ambos desenvolvidos por Leibniz, para modelar os fenômenos físicos através de equações diferenciais e encontrar suas soluções. Ainda da família Bernoulli, Daniell Bernoulli (1700-1782) filho de Johann despertou o interesse pelas equações diferenciais parciais e suas aplicações, e "é seu nome que está associado à equação de Bernoulli em mecânica dos fluidos"(BOYCE; DIPRIMA, 1985, p. 21).

Leonhard Euler (1707-1783) foi um exímio matemático do século XVIII, desenvolveu o trabalho intitulado *Introdução à Análise dos Infinitos* que é um dos grandes pilares da matemática moderna, e ainda fez diversas contribuições em outras áreas matemáticas. No âmbito das equações diferenciais, Euler conseguiu identificar as condições para que uma equação diferencial de primeira ordem seja dita exata, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes e em 1743 encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes e estendeu esse resultado para as equações não homogêneas. Sendo assim, Euler é considerado um dos principais responsáveis pelos métodos introdutórios de solução de equações diferenciais utilizados hoje (BOYER; MERZBACH, 2019).

Nascido em Beaumont-en-Auge em Normandia, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) estudou no colégio de Caen onde despertou seus interesses pela matemática. Desenvolveu um método para a conversão de uma equação diferencial em uma equação algébrica e que ficou conhecido como *a transformada de Laplace*, embora esse método tenha sido utilizado para resolver EDO's de segunda ordem apenas mais tarde, entre o século XIX e o início do século XX.

Outro nome importante na história das equações foi Alexis Claude Clairaut (1713-1765) que observou que as derivadas mistas de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} de uma determinada função $f(x, y)$ são na maioria das vezes iguais, a partir disso ele concluiu que $M_y \equiv N_x$ e determinou esse último resultado como critério para identificar quando equações do tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y) = 0$$

são exatas ou não (BOYER; MERZBACH, 2019).

Um dos grandes feitos realizados no século XVIII foi o fato da descoberta de grupos de equações diferenciais que podem ser resolvidas por intermédio de artifícios matemáticos simples, como por exemplo: as equações de Bernoulli, o grupo das equações do tipo $y = xy' + f(y')$ a equação diferencial de Clairaut que apresenta uma solução singular e a equação de d'Alembert do tipo:

$$y = xf(y') + f(y'),$$

que ficou conhecida por esse nome exatamente por que o matemático d'Alembert (1717-1783) encontrou a solução singular para esse tipo de equação (BOYER; MERZBACH, 2019).

Com o surgimento das variáveis complexas no século XIX e graças a nomes como Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857) e Lipschitz (1832-1903) foram desenvolvidos muitos teoremas para a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais de primeira ordem, e nesse período os estudos das equações diferenciais se voltaram para uma análise mais qualitativa.

Mesmo com os diferentes métodos analíticos citados acima, ainda havia uma gama de equações diferenciais que não possui soluções, embora no início do século XX houvesse métodos de integração númérica para o estudo dessas equações, mas esses métodos eram limitados devido a quantidade de cálculos que deviam ser realizados a mão. Portanto, com o avanço tecnológico nos últimos tempos têm-se cada vez mais computadores mais potentes que permitem o estudo desses problemas que podem ser investigados com mais efetividade (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

1.2 Preliminares

Antes de falarmos das EDO's propriamente ditas vamos falar de um conceito elementar muito importante, que é sobre variável dependente e variável independente.

Dizemos que uma variável de uma determinada equação é uma variável independente quando ela pode assumir qualquer valor arbitrário. Já quando uma variável de uma equação depende dos valores de outra variável então ela é dita variável dependente.

Exemplo 1.2.1

$$y^2 = x + 10.$$

Neste caso, o x é a variável indepedente e o y a variável dependente já que depende dos valores de x.

Exemplo 1.2.2

$$x' + 10 = u - u^2.$$

Onde o x é a variável dependente e o u é a variável independente.

Sendo assim, uma Equação Diferencial pode ser definida como uma equação que envolve uma função desconhecida que dependa de uma única variável independente ou de várias variáveis independentes e suas derivadas.

Exemplo 1.2.3 *As equações abaixo são exemplos de equações diferenciais:*

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{dt^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2}$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + P(P + 1)y = 0 \tag{1.3}$$

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + (t^2 - p^2)x = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.5}$$

As equações diferenciais podem ser classificadas com relação ao tipo, a ordem e a linearidade.

1.3 Classificação quanto ao tipo

As equações diferenciais podem ser classificadas em dois tipos: Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP's).

Definição 1.3.1 *Uma Equação Diferencial Ordinária é aquela que contém somente derivadas ordinárias da função y e que depende unicamente de uma variável independente x. A fórmula geral de uma EDO é do tipo:*

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0.$$

Exemplo 1.3.2 *As equações (1.1), (1.3) e (1.4) são exemplos de equações diferenciais ordinárias.*

Definição 1.3.3 *Uma Equação Diferencial Parcial é aquela que envolve uma função de duas ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes e suas derivadas parciais.*

Exemplo 1.3.4 *As equações (1.2) e (1.5) são exemplos de equações diferenciais parciais.*

Neste trabalho focaremos no estudo das equações diferenciais ordinárias.

1.4 Classificação quanto a ordem

A ordem de uma equação diferencial é por definição a maior ordem da derivada presente nesta equação.

Exemplo 1.4.1 *A equação (1.1) é uma EDO de primeira ordem, pois envolve apenas a primeira derivada de y, enquanto as equações (1.3) e (1.4) são exemplos de EDO's de segunda ordem.*

1.5 Classificação quanto a linearidade

Definição 1.5.1 *Uma EDO é linear quando a função f é uma função linear nas variáveis $y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^n}$. Mais especificamente, uma equação diferencial linear pode ser escrita na forma:*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x).$$

As EDO's lineares apresentam duas importantes características:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau;

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Quando uma equação diferencial ordinária não é linear, então chamamos ela de **não linear**.

Exemplo 1.5.2 *A equação $y'' + y = 0$ é uma EDO de segunda ordem e linear.*

Exemplo 1.5.3 *Já a equação $y' = \cos y + e^x$ é uma EDO de primeira ordem não linear, por causa do termo $(\cos y)$.*

Exemplo 1.5.4 *E a equção $y' + y'' + y^3 = 0$ é uma EDO de segunda ordem não linear por causa do termo (y^3).*

1.6 Solução de uma EDO

Vamos considerar a seguinte EDO

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.6}$$

dizemos que uma função ϕ, definida em um intervalo I, é solução da equação (1.6) se ϕ possui derivada até a n-ésima ordem e satisfaz

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

Exemplo 1.6.1 *Verifique se a seguinte função $y = e^{-2x}$ é solução da equação indicada abaixo no interalo de $(-\infty, +\infty)$,*

$$y' + y = -e^{-2x}.$$

Solução: *Vamos inicialmente calcular a primeira derivada de y. Assim,*

$$y' = -2e^{-2x}.$$

Substiuindo na equação $y' + y = e^{-2x}$ temos:

$$(-2e^{-2x}) + (e^{-2x}) = -e^{-2x} \Rightarrow$$
$$-e^{-2x} = -e^{-2x}$$

Logo como a igualdade é satisfeita então $y = e^{-2x}$ é solução de $y' + y = -e^{-2x}$.

Exemplo 1.6.2 *Verifique se $y = xe^x$ é solução da equação*

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Solução: *Como $y = xe^x$ possui derivada segunda então analisaremos se a equação é satisfetia.*

Das derivadas temos:

$$y' = xe^x + e^x \qquad e \qquad y'' = xe^x + 2e^x.$$

Assim, substituindo na equação,

$$(xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

logo, concluímos que $y = xe^x$ é solução de $y'' - 2y' + y = 0$ no intervalo de $(-\infty, +\infty)$.

1.6.1 Soluções Explícitas e Implícitas

Uma solução explícita é aquela em que a variável dependente pode ser expressa apenas em função da variável independente. Vimos nos dois últimos exemplos duas soluções $y = e^{-2x}$ e $y = xe^x$ das equações $y'' - 2y' + y = 0$; $y' + y = -e^{-2x}$ respectivamente. Dizemos então que essas são soluções explícitas de suas respectivas equações pois a variável y está expressa unicamente em função da variável x.

Nem sempre quando utilizamos um método para resolver uma ED iremos encontrar uma solução explícíta, assim, podemos encontrar uma expressão do tipo $G(x, y) = 0$ que representa uma solução implícita ϕ.

Vamos definir formalmente uma solução implícita de uma equação diferencial:

Definição 1.6.3 *Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária em um itervalo I, quando existe pelo menos uma função ϕ que satisfaça a relação, bem como a equação diferencial em I.*

Exemplo 1.6.4 *Analisaremos se a relação $x^2 + y^2 = 25$ é uma solução implícita da equação*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.7}$$

no intervalo $-5 < x < 5$.

Vamos então calcular a derivada da expressão acima:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Isolando o $\frac{dy}{dx}$ teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Vemos então que quando calculamos a derivada implicitamente da expressão $x^2 + y^2 = 25$ e isolamos o dy/dx encontramos exatamente a igualdade presente em 1.7, logo constatamos implicitamente que a relação dada é solução de 1.7.

Capítulo 2

Equações Diferenciais

2.1 Equações diferenciais de 1ª ordem

Após definirmos uma solução de uma equação diferencial vamos apresentar agora algumas definições e métodos de soluções de uma EDO de primeira ordem. No geral, para se encontrar a solução de uma ED deve-se saber reconhecer o seu tipo e saber aplicar um método de resolução (ZILL, 2003).

A forma geral de uma EDO de primeira ordem e linear é dada por:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \tag{2.1}$$

onde $p(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas dadas.

O próximo passo consiste em mutiplicar ambos os lados da equação (2.1) por uma função inderteminada $\mu(x)$, logo

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x). \tag{2.2}$$

Observemos que o lado esquerdo de (2.2) pode ser escrito como a regra da derivada do produto

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

desde que,

$$\frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)p(x)y$$

ou ainda,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x).$$

Agora supondo que $\mu(x) > 0$ chegamos no seguinte resultado

$$\frac{\frac{d\mu(x)}{dx}}{\mu(x)} = p(x).$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\ln \mu(x) = \int p(x)\, dx$$

ou podemos escrever ainda como,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}. \tag{2.3}$$

Logo a função μ é determinada pela integral da função $p(x)$ e é denominada de **fator integrante**.

Assim, voltando para a equação (2.2) teremos que

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)g(x).$$

Vamos utilizar novamente o Teorema Fundamental do Cálculo e chegamos que

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)\, dx + c$$

ou ainda,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)\, dx + c\right]. \tag{2.4}$$

Logo a equação (2.4) é denominada de solução geral da EDO (2.1).

Vamos resolver um exemplo para entendermos como utilizar a equação (2.4) para encontrar a solução de uma EDO.

Exemplo 2.1.1 *Encontre a solução geral da equação $x'(t) - 2tx(t) = e^{t^2+t}$.*
Solução: *Temos que $p(t) = -2t$ e $g(t) = e^{t^2+t}$.*

Vamos determinar agora o fator integrante para a equação dada,

$$\mu(t) = e^{\int (-2t)\, dt} = e^{-2\int t\, dt} = e^{-t^2}.$$

Agora substituindo na equação (2.4) ficamos com

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t^2}} \left[\int (e^{-t^2} \cdot e^{t^2+t})\, dt + c \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t^2}} \left[\int (e^{t})\, dt + c \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t^2}} (e^{t} + c)$$

$$x(t) = e^{t+t^2} + ce^{t^2}.$$

■

2.1.1 Problema de Valor Inicial

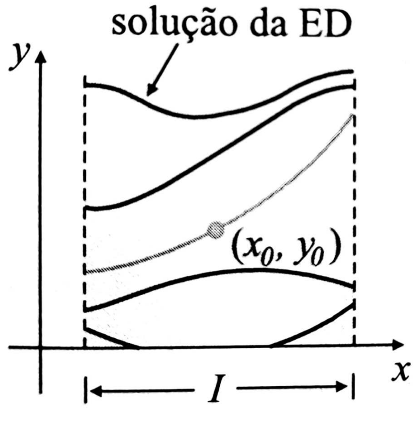
A equação (2.4) nos fornece uma famiília de soluções para uma EDO de primeira ordem, onde a constante c pode assumir qualquer valor. Para encontrarmos uma solução particular devemos assumir algumas condições prescritas, ou seja,

$$\begin{cases} resolver : \dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y) \\ sujeito\ a : y(x_0) = y_0 \end{cases} . \tag{2.5}$$

Donde x_0 pertence a um intervalo I. A equação (2.5) é chamada de **problema de valor inicial (PVI)**.

Geometricamente temos:

Figura 2.1: PVI de primeira ordem.



Fonte: (ZILL, 2003, p. 15).

Ou seja, estamos interessados em encontrar uma solução da equação diferencial no intervalo I que passe pelo ponto (x_0, y_0).

2.1.2 Existência e unicidade de solução

O teorema a seguir nos permite averiguar se existe solução única para uma equação diferencial de primeira ordem a partir de uma problema de valor inicial.

Teorema 2.1.2 *Considerando o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y)\,, \quad y(x_0) = y_0.$$

Então se as funções f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas na região do plano

$$R = \{(x,\, y) : a < x < b,\, c < y < d\}\,,$$

que contém o ponto $(x_0,\, y_0)$, então o PVI possui uma única solução $y = \phi(x)$.

As condições do teorema 2.1.2 são suficientes mas não necessárias, ou seja, se caso as funções f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não forem contínuas na região R dada então nada pode ser afirmado acerca da solução do PVI.

2.1.3 Equações separáveis

Uma equação de primeira ordem é dita separável quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}. \tag{2.6}$$

Se multiplicarmos os dois lados da equação por dx e por $h(y)$ temos que

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Integrando, temos

$$\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx + C \tag{2.7}$$

a equação (2.7) é a solução geral de (2.6).

Em outras palavras, para resolvermos uma equação separável isolamos a variável y no lado esquerdo e a variável x no lado direito da equação e, por fim, integramos os dois lados da equação.

Exemplo 2.1.3 *Resolva a equação* $(1+x)dy - ydx = 0$.
Solução: *Podemos reescrever a equação como*

$$(1+x)dy = ydx,$$

dividindo agora $(1+x)$ *e* y *temos*

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x},$$

integrando ambos os lados teremos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c_1 \Rightarrow$$

$$y = e^{\ln|1+x|+c_1} = \pm e^{c_1}(1+x) = C(1+x),$$

observe que podemos reescrever $\pm e^{c_1}$ *como uma constante genérica* C.

2.1.4 Equações homogênea

Uma função f é dita homogênea de grau k quando satisfaz a seguinte propriedade $f(tx,\, ty) = t^k f(x,\, y)$, sendo k um número real.

Então podemos definir uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$M(x,\, y)dx + N(x,\, y)dy = 0, \tag{2.8}$$

como sendo **equação homogênea** quando os coeficientes M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

A equação (2.8) pode ainda ser reescrita como

$$f(x,\, y) = -\frac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)}.$$

Encontramos uma solução para uma ED homogênea transformando a equação (2.8) por meio de uma substituição, ou seja, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y) = t^0 f(x,\, y) = f(tx,\, ty).$$

Tomando $t = \dfrac{1}{x}$ teremos que:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1,\, \frac{y}{x}\right).$$

Fazendo a substituição $y = zx$ temos que:

$$\frac{dy}{dx} = f(1,\, z).$$

Podemos definir o dy/dx através da derivada do produto, assim

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Substituindo na equação anterior teremos:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(1,\, z)$$

ou ainda,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(1,\, z) - z}{x}. \tag{2.9}$$

Note que a equação (2.9) é uma equação separável, então usando o método específico para esse tipo de equação e fazendo a substituição de z por $t = \dfrac{y}{x}$ encontramos a solução para a equação (2.8).

2.2 Equações lineares de segunda ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right). \tag{2.10}$$

Em geral, a equação (2.10) pode ser escrita ainda como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x), \tag{2.11}$$

uma vez que $f\left(x,\, y,\, \dfrac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x) - q(x)y$.

Definimos um problema de valor inicial para uma EDO de segunda ordem da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\, y,\, \dfrac{dy}{dx}\right) \\ y(x_0) = y_0, \;\; \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_0' \end{cases}, \tag{2.12}$$

onde y_0 e y_0' são números arbitários dados. Dessa maneira, estamos interessados em encontrar uma curva integral que passe pelo ponto $(x_0,\, y_0)$ e que tenha inclinação (coeficiente angular) y_0'.

2.2.1 Existência e unicidade

Teorema 2.2.1 *Sejam as funções p,q e g contínuas em um intervalo aberto I. Se x_0 é um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução para o problema de valor inicial (2.12) nesse intervalo.*

Exemplo 2.2.2 *Verificamos que ambas as funções $y_1 = \sin x$ e $y_2 = \cos x$ são soluções da equção*

$$y'' + y = 0$$

porém quando imposta as condições $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ apenas $y_1 = \sin x$ é solução da equação satisfazendo as condições iniciais.

Na equação (2.11) quando $g(x)$ é identicamente nula então é dita **homogênea**. Em contra partida, quando $g(x) \neq 0$ então a equação é dita **não homogênea**.

2.2.2 Solução geral das equações lineares

Supondo que conhecemos duas soluções particulares de uma equação linear, então a diferença entre elas será a solução da equação homogênea associada:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0. \tag{2.13}$$

Assim, sendo y_h a solução geral da equação homogênea e y_p uma solução particular da equação não homogênea, então temos que

$$y_g = y_p + y_h,$$

é a solução geral da equação não homogênea.

Logo, para resolvermos uma equação não homogênea temos que saber primeiramente resolver uma equação homogênea associada, comumente chamada de equação reduzida.

2.2.3 Equações lineares homogêneas

Já vimos que uma equação homogênea de segunda ordem tem a forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.14}$$

Teorema 2.2.3 (Princípio da superposição:) *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (2.14) então a combinação linear*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{2.15}$$

também é solução para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Demonstração: Como y_1 e y_2 são soluções da EDO então, segue que

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0,$$

considerando a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ teremos

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{e} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Agora, substituindo y, y' e y'' na equação (2.14), então

$$c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1y_1'' + c_2y_2'' + pc_1y_1' + pc_2y_2' + qc_1y_1 + qc_2y_2$$

$$= c_1y_1'' + pc_1y_1' + qc_1y_1 + c_2y_2'' + pc_2y_2' + qc_2y_2$$

$$= c_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{0} + c_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{0}$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

■

Vamos focar agora em encontrar as constantes c_1 e c_2 de maneira que a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ seja solução do PVI. Para isso utilizaremos as condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}.$$

Vamos calcular o determinante constituído pelos coeficientes, ou seja,

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0).$$

Logo, se $W \neq 0$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidas de forma que satisfaçam o PVI acima.

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{W} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}.$$

Se $W = 0$ então os denominadores irão zerar, ou seja, é impossível determinar c_1 e c_2.

Definição 2.2.4 *O determinante W é chamado de **Wronskiano** das soluções y_1 e y_2.*

Exemplo 2.2.5 *Considere as funções x^2, x e 1. Obtenha o Wronskiano para essas funções.*

Solução: *Vamos montar a matriz composta pelas funções e suas derivadas:*

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (2+0+0) = -2$$

Logo temos que $W = -2$

■

2.2.4 Dependência e independência linear

Sejam as funções f e g definidas em intervalo I, dizemos que essas funções são **linearmente dependentes (LD)** nesse intervalo I se existirem constantes k_1 e k_2 (que não podem ser ambas nulas) tal que

$$k_1 f + k_2 g = 0, \quad \forall x \in I.$$

Dizemos que f e g são **linearmente independentes (LI)** se não forem LD.

Teorema 2.2.6 (Conjunto fundamental de soluções:) *Se* y_1 *e* y_2 *são soluções da equação:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

sobre um intervalo (α, β) *onde* $W \neq 0$*, então a família de soluções* $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *com coeficientes arbitrários* c_1 *e* c_2 *inclui todas as soluções da EDO homogênea.*

Demonstração: A demonstração será omitida aqui mas pode ser consultada em (ZILL, 2003, p. 146). ■

Teorema 2.2.7 *Se* y_1 *e* y_2 *são soluções da equação* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *sobre um intervalo* (α, β)*, então elas são linearmente dependente sobre este intervalo se, e somente se,* $W = y_1y_0' - y_1'y_2$ *for nulo.*

Demonstração: Consultar em ((KENT; B; SNIDER, 2012, p. 118). ■

2.2.5 Método de d'Alambert

Esse método nos permite encontrar uma solução y_2 para uma EDO de segunda ordem homogênea a partir de uma solução já conhecida y_1.

Seja y_1 solução (não nula) da equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.16}$$

fazendo a substituição $y_2 = vy_1$ então teremos:

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \ \text{ e } \ y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

Substituindo agora em (2.16) temos:

$$(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + p(x)(v'y_1 + vy_1') + q(x)(vy_1) = 0 \Rightarrow$$

$$v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) + v(\underbrace{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1}_{=0}) = 0;$$

já que y_1 é solução da equação. Então ficamos com

$$v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0,$$

como $y_1 \neq 0$

$$v'' + v'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right) = 0,$$

supondo que v' seja não nulo então,

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p(x).$$

Pelo cálculo diferencial e integral temos que:

$$\ln|v'| = -2\ln|y_1| - \int p(x)\,dx,$$

ou ainda,

$$v = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\,dx.$$

2.2.6 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Considere a equação:

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.17}$$

com a, b e c constantes reais. Escolheremos estrategicamente a função $y = e^{rx}$ como solução para esse tipo de equação, devido o fato das derivadas da função exponencial não serem linearmente independente dela mesma, ou seja, são multiplas escalares.

Assim,

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx} \quad \text{e} \quad y'' = r^2 e^{rx},$$

substituindo em (2.17) temos:

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0,$$

como a função exponencial nunca se anula então

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Essa equação é chamada de equação **característica** associada a (2.17).

Ao resolvermos esse polinômio podemos encontrar duas raízes reais iguais, duas raízes reais e distintas ou duas raízes complexas. Vamos estudar os três casos.

1º caso - raízes reais diferentes: vamos denotar as raízes por $r_1 \neq r_2$. Então teremos que $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$. Calculando o Wronskiano temos:

$$W = e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x} - r_1 e^{r_1 x} e^{r_2 x} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0.$$

Logo, com y_1 e y_2 são LI. então $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução geral de (2.17).

2º caso - raízes reais iguais: Neste caso as raízes da equação característica serão iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$ e teremos apenas uma solução para a equação, logo utilizaremos o método de d'Alambert para encontramos a outra solução:

$$y_2 = vy_1,$$

onde $v = \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$.

Para encontramos y_2 vamos reescrever a equação característica como $y'' + \dfrac{b}{a}y' + \dfrac{c}{a}y = 0$. Assim,

$$v = \int \frac{1}{e^{-\frac{b}{a}x}}\, e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}\, dx = \int e^{\frac{b}{a}x}\, e^{-\frac{b}{a}x}\, dx = x,$$

logo $y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$. Portanto como y_1 e y_2 são LI então a solução geral é dada por:

$$y_g = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

3º caso - raízes complexas: Se $b^2 - 4ac < 0$ então a equação característica possui duas raízes complexas

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

e as soluções são da forma $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$.

Vamos utilizar a fórmula de Euler para determinar as funções y_1 e y_2, ou seja,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

substituindo r_1 em y_1 temos:

$$y_1 = e^{(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a})x} = e^{-\frac{b}{2a}x} e^{i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x} \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right).$$

Logo,

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right);$$

$$y_2 = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right).$$

Serão as soluções reais da equação característica. E como temos que $W(y_1, y_2) \neq 0$ então a combinação

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é a solução geral que estavamos interessados.

Capítulo 3

Aplicações das equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo vamos apresentar aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e alguns exemplos auxiliares dessas aplicações.

3.1 Lei de resfriamento de Newton

Segundo Souza (2007), Newton publicou anonimamente um artigo que tinha como título "Scala Graduum Caloris", onde descreveu um método para medir temperaturas de até 1000 °C, atividade impossível de ser realizada pelos termômetros daquela época.

Newton percebeu que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional a diferença entre a temperatura desse corpo com ambiente. Matematicamente temos:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a). \tag{3.1}$$

Neste caso, estamos considerando T a temperatura de um corpo em um instante t, a derivada (dT/dt) representa a taxa de variação de temperatura, T_a é a temperatura ambiente e k é a constante de proporcionalidade.

Notamos também que quando a temperatura ambiente é maior que a temperatura do corpo $(T_a > T)$ então teremos $dT/dt > 0$, e quando a temperatura ambiente é menor que a temperatura do corpo então $dT/dt < 0$.

Para a aplicação desse conceito considera-se duas hipoteses:

(i) que a temperatura seja a mesma em todos os pontos do corpo estudado e que essa temperatura dependa do tempo;

(ii) que a temperatura do meio ambiente permaneça a mesma durante o experimento, em outras palavras, que seja constante.

Note que (3.1) é uma EDO de primeira ordem separável, ou seja, podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\frac{1}{(T - T_a)} dT = -kdt.$$

Utilizando o cálculo integral temos,

$$\int \frac{1}{(T - T_a)}\, dT = \int -k\, dt.$$

Resolvendo a integral acima ficaremos com:

$$\ln|T - T_a| + c_1 = -kt + c_2$$

ou,

$$\ln|T - T_a| = -kt + c_2 - c_1.$$

Como a diferença entre duas constantes continua sendo uma constante, então denotaremos c_1 e c_2 como $C = c_1 + c_2$. Assim,

$$\ln|T - T_a| = -kt + C.$$

Utilizaremos a propriedade de logaritmos $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$. Logo

$$|T - T_a| = e^{-kt+C},$$

retirando o módulo escrevemos

$$T - T_a = \pm e^{-kt+C} \Rightarrow$$

$$T - T_a = \pm e^{-kt} e^{C},$$

reescrevendo

$$T - T_a = \pm e^{C} e^{-kt}.$$

Mais uma vez como $\pm e^C$ é constante, então escreveremos apenas C,

$$T - T_a = Ce^{-kt} \Rightarrow$$

$$T = T_a + Ce^{-kt},$$

esta é a solução geral para equação diferencial ordinária (3.1).

Considerando o PVI abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases},$$

ou seja, a partir da temperatura inicial do corpo conseguimos determinar a constante C que aparece na solução:

$$T_0 = T_a + Ce^{-0t} \Rightarrow$$

$$C = T_0 - T_a.$$

Logo, a solução do PVI é

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

A lei de resfriamento de Newton é válida apenas quando a diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente não é tão alta, visto que, uma vez que isso ocorre, pode influenciar no resultado final (OSSANI et al., 2009).

Vamos então estudar um problema que aborda a Lei de Resfriamento de Newton aplicada a perícia criminal. Esse problema foi adaptado de (SÁ, 2019, p. 41).

Exemplo 3.1.1 *Um corpo é encontrado as 5 horas da manhã com uma temperatura de 30°C e as 7 horas apresenta uma temperatura de 20°C. Moradores do local disseram que ouviram disparos de arma de fogo por volta das 2hs e também em torno de 4hs da madrugada. A polícia prendeu o suspeito A e o suspeito B, autores dos disparos respectivamente. Qual deles deve ser indiciado por assassinato se a temperatura ambiente no local do crime era de 15°C?*

Solução: *Vamos separar os dados do problema:*

$$T(0) = 30^{\circ} \text{ (1}^{\underline{a}} \text{ medição);}$$
$$t = 2 \text{ horas;}$$
$$T_a = 15^{\circ};$$

$$T(2) = 20°(2^{\underline{a}}\ \textit{medição}).$$

A equação que nos fornece a solução do PVI é dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Vamos substituir os dados fornecidos no problema:

$$T(2) = 15 + (30 - 15)e^{-2k} \Rightarrow$$

$$20 = 15 + 15e^{-2k} \Rightarrow$$

$$5 = 15e^{-2k} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} = e^{-2k}.$$

Aplicando ln *nos dois lados da equação temos:*

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2k \Rightarrow$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-2} \Rightarrow$$

$$k \simeq 0.5493.$$

Então a função que determina a temperatura do corpo em qualquer instante é dada por:

$$T(t) = 15 + 15e^{-0.5493t}.$$

Vamos considerar que a temperatura normal do corpo seja $T = 37°$ *e o instante* $t = 0$ *então,*

$$30 = 15 + (37 - 15)e^{-0.5493t} \Rightarrow$$

$$15 = 22e^{-0.5493t} \Rightarrow$$

$$\frac{15}{22} = e^{-0.5493t}.$$

Vamos aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da equação. Assim,

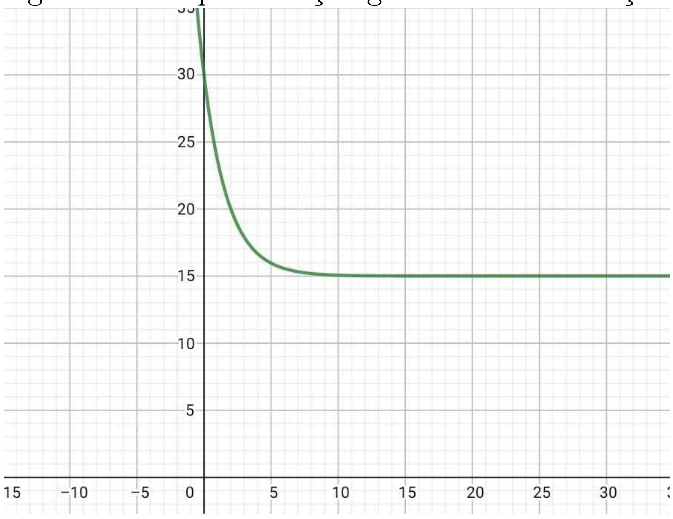
$$\ln\left(\frac{15}{22}\right) = -0.5493t \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{15}{22}\right)}{-0.5493} \Rightarrow$$

$$t \simeq 0.7 = 42\ \textit{minutos}.$$

Assim, como a vítima foi encontrada as 5 horas e ela foi morta a aproximadamente 42 minutos atrás, então sua morte ocorreu por volta das 4h 18min. Logo o suspeito B deve ser indiciado pelo assassinato.

Figura 3.1: Representação geométrica da solução.



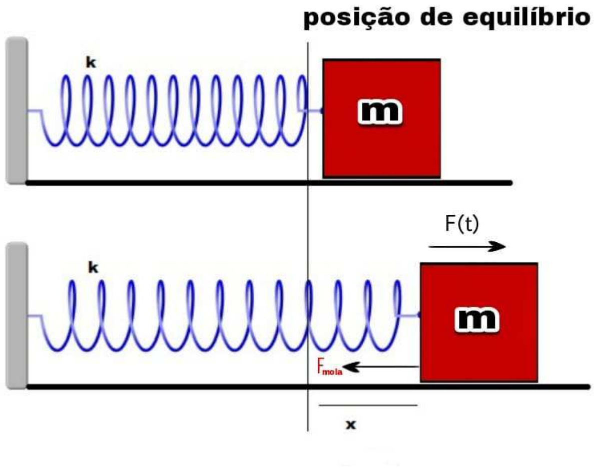
Fonte: Autoria própria

Podemos observar graficamente que em $T(0)$ e em $T(2)$ a temperatura do corpo é 30°C e 20° C respectivamente, assim como o problema havia nos fornecido. Além do mais, observamos que a partir das 10/11 horas após a hora da morte a temperatura do corpo se iguala a temperatura ambiente 15° C.

3.2 Sistema massa-mola

Vamos considerar a situação ilustrada abaixo: um bloco de massa m fixada em uma extremidade da mola e suspenso em um plano horizontal. Vamos considerar ainda que a masa da mola seja desprezível e representaremos a sua elasticidade pela constante k.

Figura 3.2: Sistema massa-mola.



Fonte: Autoria própria

Vamos então modelar esse sistema utilizando uma ED de segunda ordem linear.

Observemos na figura 3.2 que quando exercemos uma força $F(t)$ o bloco sofre um deslocamento (denotado por x), a mola é esticada e exerce uma força F_{mola} contrária ao deslocamento. Essa força que a mola exerce sobre o bloco é diretamente proporcional ao deslocamento, ou seja,

$$F_{mola} = -kx. \tag{3.2}$$

A contante k representa a elasticidade da mola e o sinal de menos é devido a força da mola atuar contrária a força externa. A equação (3.2) é conhecida como a **Lei de Hooke**.

Além do mais, consideramos ainda a força de atrito entre o bloco e o solo, onde essa força é proporcional a velocidde do bloco, ou seja,

$$F_{atrito} = -b\frac{dx}{dt}. \tag{3.3}$$

A constante b representa o coeficiente de amortecimento e o sinal de menos se dá também pelo fato dessa força atuar contrária a força externa.

A segunda Lei de Newton nos diz que o somatório de todas as forças que atuam sobre um bloco é igual a massa multiplicado pela aceleração desse bloco. Matematicamente temos:

$$\sum \overrightarrow{F} = ma. \tag{3.4}$$

Lembremos que a aceleração é dada pela derivada segunda da posição. Então expressaremos $a = d^2x/dt^2$. Assim, substituindo a força externa aplicada ao bloco, a força de atrito e a força da mola na equação (3.4) temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F(t),$$

ou,

$$mx'' + bx' + kx = F(t). \tag{3.5}$$

Desse modo, a equação que modela o sistema massa-mola é uma EDO linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.

3.2.1 Sistema massa-mola amortecido

Na equação (3.5) quando não temos nenhuma força externa atuando sobre o bloco então temos um **Movimento Livre Amortecido** e a equação que modela esse sistema é uma EDO de segunda ordem homogênea, ou seja,

$$mx'' + bx' + kx = 0.$$

Então a equação auxiliar associada é dada por

$$mr^2 + br + k = 0, \tag{3.6}$$

e suas raízes são dadas por:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Como vimos no capítulo anterior a solução de 3.6 denpederá do discriminante $b^2 - 4mk$ e teremos três casos distintos:

Caso I: Quando $b^2 - 4mk > 0$ então dizemos que o sistema é **super amortecido**

e teremos duas raízes reais e distintas dadas por:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}; \;\; r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Assim, sua solução é dada por

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Caso II: Se $b^2 - 4mk = 0$ então teremos um sistema **criticamente amortecido** e teremos raízes reais e repetidas dadas por $-\dfrac{b}{2m}$. A solução geral é dada por $x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$ ou,

$$x(t) = e^{-(\frac{b}{2m})t}(c_1 + c_2 t).$$

Caso III: E por fim, quando $b^2 - 4mk < 0$ então o sistema é dito **não amortecido** e teremos duas rízes complexas $\alpha \pm i\beta$, onde

$$\alpha = -\frac{b}{2m}; \;\; \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

Assim a solução geral para esse caso será $x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$.

Exemplo 3.2.1 *(KENT; B; SNIDER, 2012, p. 168) Suponha que o movimento de um sistema massa-mola com amortecimento é governado por*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 25y = 0; \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

Encontre a equação do movimento e esboce seu gráfico para os três casos em que b=6, 10 e 12.

Solução: *A equação auxiliar é dada por* $r^2 + br + 25 = 0$, *e suas raízes são*

$$r = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 100}}{2}.$$

I: *Quando* $b = 6$ *então teremos:*

$$-\frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{6^2 - 100}}{2} = -3 \pm \frac{\sqrt{-64}}{2} = -3 \pm 4i.$$

Como são duas raízes complexas então temos o movimento não amortecido. Onde $\alpha = -3$, $\beta = 4$ *e neste caso a solução geral será* $y(t) = c_1 e^{-3t} \cos 4t + c_2 e^{-3t} \sin 4t$. *Vamos então definir as constantes* c_1 *e* c_2 *a partir das condições iniciais:*

$$y(0) = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = 1.$$

Para determinarmos c_2 vamos utilizar $y'(t)$, ou seja,

$$y'(t) = -4c_1e^{-3t}\sin 4t - 3c_1e^{-3t}\cos 4t + 4c_2e^{-3t}\cos 4t - 3c_2e^{-3t}\sin 4t \Rightarrow$$

$$y'(0) = -4c_1e^{0}\sin 0 - 3c_1e^{0}\cos 0 + 4c_2e^{0}\cos 0 - 3c_2e^{0}\sin 0 \Rightarrow$$

$$0 = -3c_1 + 4c_2 \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{3}{4}.$$

Logo temos:

$$y(t) = e^{-3t}\cos 4t + \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t.$$

II: *Quando $b = 10$ teremos:*

$$-\frac{10}{2} \pm \frac{\sqrt{10^2 - 100}}{2} = -5.$$

Temos então um caso criticamente amortecido e sua solução geral é da forma

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-5t}.$$

Usando as condições iniciais temos

$$y(0) = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^0 \Rightarrow$$

$$c_1 = 1$$

Calculando a derivada:

$$y'(t) = -5c_1e^{-5t} - 5tc_2e^{-5t} + c_2e^{-5t}.$$

Assim,

$$y'(0) = -5c_1e^0 - 5 \cdot 0c_2e^0 + c_2e^0 \Rightarrow$$

$$0 = -5c_1 + c_2 \Rightarrow$$

$$c_2 = 5.$$

Assim, a solução será:

$$y(t) = (1 + 5t)e^{-5t}.$$

III: *Quando $b = 12$ teremos o seguinte:*

$$-\frac{12}{2} \pm \frac{\sqrt{12^2 - 100}}{2} = -6 \pm \frac{\sqrt{44}}{2} = -6 \pm \sqrt{11}.$$

Como são duas raízes reais e distintas então dizemos que o sistema é superamortecido e a solução será:

$$y(t) = c_1 e^{(-6+\sqrt{11})t} + c_2 e^{(-6-\sqrt{11})t}.$$

Definindo as constantes:

$$1 = c_1 e^0 + c_2 e^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2.$$

Calculando a derivada temos

$$y'(t) = (-6+\sqrt{11})c_1 e^{(-6+\sqrt{11})t} + (-6-\sqrt{11})c_2 e^{(-6-\sqrt{11})t}.$$

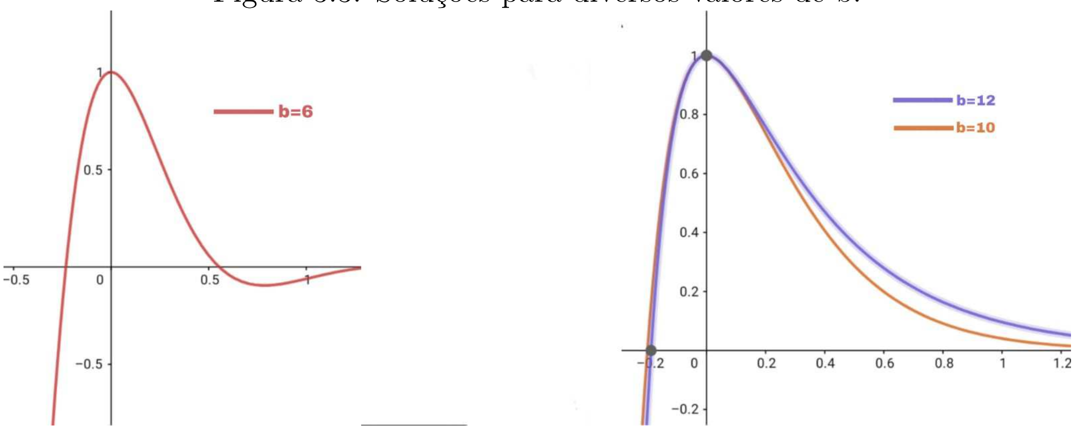
Assim,

$$0 = (-6+\sqrt{11})c_1 e^0 + (-6-\sqrt{11})c_2 e^0 \Rightarrow$$
$$(-6+\sqrt{11})c_1 + (-6-\sqrt{11})c_2 = 0.$$

Donde encontramos $c_1 = \dfrac{11+6\sqrt{11}}{22}$ *e* $c_2 = \dfrac{11-6\sqrt{11}}{22}$ *e a solução será dada por:*

$$y(t) = \frac{11+6\sqrt{11}}{22} e^{(-6+\sqrt{11})t} + \frac{11-6\sqrt{11}}{22} e^{(-6-\sqrt{11})t}.$$

Figura 3.3: Soluções para diversos valores de b.



Fonte: Autoria própria

Percebemos então que quando o sistema é não amortecido ($b = 6$*) então ocorre oscilação e o sistema demora mais a entrar em repouso. Já quando é criticamente amortecido (*$b = 10$*) não há oscilação, assim como no superamortecido (*$b = 12$*), porém no superamortecido ele morre mais devagar do que se fosse criticamente amortecido.*

Em termos de aplicabilidade para um sistema de suspensão de um automóvel por exemplo, o sistema mais indicado seria o criticamente amortecido, pois ao passar por algum obstáculo não haverá oscilação e o sistema voltará á posicão de equilíbrio mais rapidamente.

Já no caso do sistema superamortecido o sistema também não irá oscilar porém ao passar por dois obstáculos sucessivos por exemplo, ao chegar no segundo as molas ainda estarão comprimidas e não conseguirão absorver os impactos por completo.

Conclusão

Mediante a elaboração desse trabalho podemos perceber a importância que as Equações Diferenciais apresentam, não apenas para a matemática, mas também para as diversas áreas do conhecimento, uma vez que nos permite modelar e estudar uma gama de situações, que envolvem variações em função do tempo, e que possui diversas aplicações.

Buscamos fazer um estudo sobre o contexto histórico que envolve as equações diferenciais trazendo os principais nomes que contribuíram para seu desenvolvimento. Também tratamos um pouco sobre as EDO's de primeira e segunda ordem e apresentamos os principais métodos de resolução que precisaríamos para trabalhar suas aplicações.

Percebemos também como o avanço da computação no século XX pôde ter contribuído no estudo das equações diferenciais, visto que, ao se trabalhar com estes modelos, nos deparamos com cálculos trabalhosos para serem realizados a mão, porém, com o uso das ferramentas que possuímos hoje em dia essa tarefa se torna mais rápida e prática.

Além disso, através das representações geométricas espera-se que tenha contribuído para a compreensão na interpretação dos resultados obtidos na resolução dos problemas propostos.

Por fim, consideramos que os objetivos foram alcançados e esperamos que outras pessoas, através desse trabalho, possam aprimorar seus conhecimentos sobre esse tema de grande importância e que sirva de base para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; NELSON, H. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Blucher, 2019.

KENT, N. R.; B saff. E.; SNIDER, A. D. **Equações Diferenciais**. 8ª. ed. São Paulo: Pearson education do Brasil, 2012.

OSSANI, S. et al. **Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem**. 2009.

SÁ, M. S. d. **Equaçoes Diferenciais Ordinárias: Aplicaçoes e uma proposta de intervençao no ensino básico**. Mestrado Profissional em Matemática, 2019.

SOUZA, L. F. Um experimento sobre a dilatação térmica e a lei de resfriamento. 2007. 25 f. **TCC (Graduação)-Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ**, 2007.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São paulo: Thomson, 2003. v. 3.