



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Tese de Doutorado

Contribuições à Codificação de Canal por Matrizes *Wavelet*

João Fonseca Neto

Campina Grande – PB
Fevereiro – 2018

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI
Departamento de Engenharia Elétrica – DEE
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPgEE

Contribuições à Codificação de Canal por Matrizes *Wavelet*

João Fonseca Neto

Tese de Doutorado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (COPELE) da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências, no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação.
Linha de Pesquisa: Eletrônica e Telecomunicações.

Francisco Marcos de Assis, Dr.
Leocarlos Bezerra da Silva Lima, Dr.

Orientadores

Campina Grande, Paraíba, Brasil
28 de Fevereiro de 2018

©João Fonseca Neto – joao.fonseca@ee.ufcg.edu.br

F676c Fonseca Neto, João.
Contribuições à codificação de canal por matrizes wavelet / João
Fonseca Neto. - Campina Grande, 2018.
109 f.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco Marcos de Assis, Prof. Dr. Leocarlos
Bezerra da Silva Lima".

Referências.

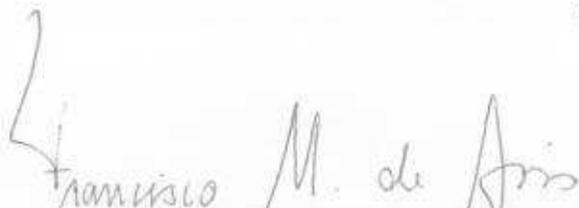
1. Wavelet. 2. Codificação de Canal. 3. Canais com Desvanecimento.
4. Comunicações Móveis. 5. Desempenho de Sistemas de Comunicação
Digital. I. Assis, Francisco Marcos de. II. Lima, Leocarlos Bezerra da Silva.
III. Título.

CDU 621.3.048(043)

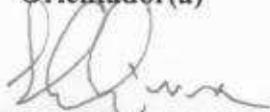
"CONTRIBUIÇÕES À CODIFICAÇÃO DE CANAL POR MATRIZES WAVELET"

JOÃO FONSECA NETO

TESE APROVADA EM 06/04/2018



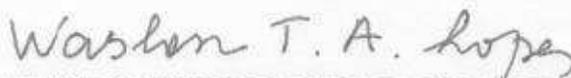
FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFCG
Orientador(a)



LEOCARLOS BEZERRA DA SILVA LIMA, D.Sc., UFCG
Orientador(a)



BARTOLOMEU FERREIRA UCHÔA FILHO, Dr., UFSC
Examinador(a)



WASLON TERLLIZZIE ARAÚJO LOPES, D.Sc., UFPB
Examinador(a)



EDSON GUEDES DA COSTA, D.Sc., UFCG
Examinador(a)



HELDER ALVES PEREIRA, Dr., UFCG
Examinador(a)

LUIZ FELIPE QUEIROZ SILVEIRA, D.Sc., UFRN
Examinador(a)

CAMPINA GRANDE - PB

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese a todos que confiam em mim, especialmente à minha mãe, Maria Zelita Lima Fonseca; meu filho, Vinícius S. B. Espinheira Fonseca; meu pai (em memória), Manoel Espinheira Fonseca; meu irmão, Manoel Espinheira Fonseca Filho e à minha namorada, Júnia Carvalho Amaral.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Francisco Marcos de Assis pelos ensinamentos, orientação, confiança e apoio sempre demonstrados.

Especialmente ao professor Leocarlos Bezerra da Silva Lima pela confiança, apoio, orientação, amizade, participação nos trabalhos desenvolvidos. Além do reconhecimento de que sem sua incomensurável ajuda, esta tese jamais seria concluída.

Aos colegas professores do Instituto Federal de Sergipe (IFS) que diretamente ou indiretamente me possibilitaram dispor de tempo para me dedicar exclusivamente aos estudos.

Ao Magnífico Reitor do Instituto Federal de Sergipe, Prof. Ailton Ribeiro de Oliveira, e sua equipe, que me possibilitaram, efetivamente, iniciar, cursar e concluir este doutorado.

Ao Instituto Federal de Sergipe e à Universidade Federal de Campina Grande (UFCG).

Em fim, a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

A codificação de canal de comunicação digital, por matrizes *wavelet*, CWC, tem como principais vantagens: a reduzida complexidade computacional para codificar e decodificar a informação e a facilidade para a adaptação das taxas de codificação. Porém, apesar de várias publicações sobre o tema, havia alguns pontos em aberto, que precisavam ser atacados, dentre eles: sistematização matemática do processo; ampliação da eficiência espectral; além de comparar, por simulações, seu desempenho, em termos da taxa de erro de *bits*, em relação a outros sistemas que transmitem sobre canal com desvanecimento plano, para verificar a sua competitividade e empregabilidade em sistemas de comunicação digitais, atuais. Para a realização dos objetivos propostos, adotou-se, como metodologia, o estudo sobre a técnica de codificação de canais por matrizes *wavelet*, revisão bibliográfica sobre as técnicas de codificação de canais, atualmente em uso e a implementação de algoritmos e o desenvolvimento de programas computacionais, empregados nas simulações, em linguagem *Python*. Na codificação CWC, utilizam-se matrizes *wavelets* reais planas derivadas de uma matriz de Haar. As principais contribuições desta tese são: 1) descrição algébrica geral do processo de CWC; 2) aumento da eficiência espectral para até 4 *bits/s/Hz*; 3) avaliação da eficácia e empregabilidade dos sistemas CWC, sobre canais com desvanecimento plano e sujeito a ruídos gaussianos (AWGN); 4) realização de decodificação de sequência; 5) extensão dos resultados obtidos anteriormente, com taxa de codificação unitária, para taxas de codificação 1/2 e 1/4. Neste estudo, os símbolos de entrada do codificador são complexos, produzindo símbolos *wavelet* complexos. Além da codificação e decodificação serem descritas algebricamente, é formulada uma função distribuição de probabilidade dos símbolos codificados, que é utilizada para calcular a energia média de constelações propostas para a transmissão dos símbolos *wavelet*. O desempenho do sistema, em canal Rayleigh plano, é analisado e comparado com sistema de codificação de bloco espaçotemporal (STBC), com diversidade dois. Para a realização da decodificação de sequência, desenvolveu-se um procedimento para obter a treliça correspondente à codificação *wavelet*. Os resultados das simulações mostram que para uma relação sinal-ruído, $E_b/N_0 < 15$ dB, o CWC, com eficiência espectral de 1 *bit/s/Hz*, tem desempenho compatível com o sistema STBC, com duas antenas de transmissão e uma de recepção, utilizado como referência, e que o aumento da eficiência espectral, aplicando-se um processo de formatação de dados antes da codificação CWC, degrada o desempenho do sistema, quando o número de *bits*, n_b , é superior a quatro. De forma geral, conclui-se que os sistemas CWC podem ser utilizados, como alternativa, em sistemas de comunicações digitais, atuais.

Palavras-chave: Canais com desvanecimento, Codificação de canal, Comunicações móveis, Desempenho de sistemas de comunicação digital, *Wavelets*.

Abstract

The channel code by wavelet matrices, for digital communications, WCC, has the following advantages: the reduced computational complexity to encode and decode the information and the ease of adaptation of the coding rates. However, in spite of several publications on the subject, there were some open points that needed to be attacked, among them: mathematical systematization of the process, increase in spectral efficiency, and to compare, by simulations, its performance, in terms of the error rate of bits, relative to other systems that transmit over flat fading channel, to verify their competitiveness and employability in current digital communication systems. In order to achieve the proposed objectives, we used as methodology study the channel-coding technique by wavelet matrices, a literature review on channel coding techniques currently in use and the implementation of algorithms and the development of computer programs in the Python language, for simulations. In WCC coding, real planar wavelets matrices derived from a Haar matrix are used. Thus, the main contributions of this thesis are: 1) general algebraic description of the WCC process; 2) increase in spectral efficiency for up to 4 bits/s/Hz; 3) evaluation of the effectiveness and employability of WCC systems, on flat fading and Gaussian noise (AWGN) channels; 4) execution of sequence decoding; 5) extension of previously obtained results, with unit coding rate, for coding rates $1/2$ and $1/4$. In this study, the encoder input symbols are complex producing complex wavelet symbols. Besides coding and decoding are been described algebraically, a probability distribution function of the coded symbols is formulated, and used to calculate the average energy of constellations proposed for the transmission of the symbols. The performance of the system, in Rayleigh flat channel, is analyzed and compared with space-time block coding (STBC) system, with two diversity. In order to perform the sequence decoding a procedure was developed to obtain a trellis corresponding to the wavelet coding. The results of the simulations show that for a signal to noise ratio, $E_b/N_0 < 15$ dB, the WCC, with spectral efficiency of 1 bit/s/Hz, has compatible performance with STBC used as a reference and that increasing the spectral efficiency by applying a data formatting process prior to WCC coding, degrades system performance when the number of bits, nb , is greater than four. In general, it is concluded that WCC systems can be used as an alternative in current digital communications systems.

Keywords: Channel coding, Digital communication systems performance, Fading channels, Mobile communications, Wavelets.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação para a realização da tese	20
1.2	Objetivos da tese	20
1.2.1	Objetivo geral	20
1.2.2	Objetivos específicos	21
1.3	Metodologia	21
1.4	Contribuições da tese	21
1.5	Organização da tese	22
2	MATRIZ WAVELET	23
2.1	A matriz <i>wavelet</i>	23
2.1.1	Matrizes <i>wavelet</i> de Haar	25
2.1.2	Produto tensorial entre matrizes de Haar	27
2.1.3	O operador extensão	28
3	CODIFICAÇÃO DE CANAL POR MATRIZES WAVELET	29
3.1	Descrição algébrica da codificação <i>wavelet</i> de canal	33
3.2	Distribuição de probabilidades de símbolos <i>wavelet</i>	36
3.3	Codificador <i>wavelet</i> (máquina de estados)	37
3.4	Eficiência espectral	40
3.5	Funções geradoras de probabilidade	41
3.5.1	A PGF para os símbolos de entrada do codificador CWC	41
3.5.2	A PGF para os símbolos <i>wavelet</i>	42
3.5.3	Cálculo de PGF para símbolos <i>wavelet</i> complexos	43
3.5.3.1	Caso $m = 2$ e $g = 4$	43
3.5.3.1.1	Para $R = 1$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	43
3.5.3.1.2	Para $R = 1/2$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	44
3.5.3.1.3	Para $R = 1/4$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	45
3.5.4	Ampliando a matriz de codificação	46
3.5.4.1	Caso $m = 2$ e $g = 16$	46
3.5.4.1.1	Para $R = 1$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	47
3.5.4.1.2	Para $R = 1/2$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	47
3.5.4.1.3	Para $R = 1/4$, com símbolos <i>wavelet</i> complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	48
3.5.4.2	Caso de transmissão de pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com $m = 2$, $g = 4$ e $R = 1$ (SANTOS, 2014)	50
3.5.4.2.1	Para $R = 1$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	50

3.5.4.2.2	Evidência numérica de que o mapeamento simples de Santos, Gurjao e Assis (2013) produz constelação ótima	51
3.5.4.2.3	O algoritmo modificado	51
3.5.4.2.4	Para $R = 1/2$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	53
3.5.4.2.5	Para $R = 1/4$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$	54
3.5.4.3	Ampliando a matriz de codificação	54
3.5.4.3.1	Caso de pares de símbolos inteiros consecutivos, com $m = 2$ e $g = 16$	55
3.5.4.3.2	Para $R = 1$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	55
3.5.4.3.3	Para $R = 1/2$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	55
3.5.4.3.4	Para $R = 1/4$, com símbolos <i>wavelet</i> inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$	56
3.5.4.4	Cálculo da energia média das constelações do CWC	58
4	DECODIFICAÇÃO CWC	69
4.1	Decodificação símbolo a símbolo	69
4.2	Decodificação de seqüência	70
4.2.1	Treliça de uma codificação <i>wavelet</i>	72
5	CANAL DE COMUNICAÇÃO	81
5.1	Modelamento	83
5.1.1	Canal com desvanecimento não seletivo em frequência	84
5.1.2	Canal com desvanecimento seletivo em frequência	85
5.1.3	Modelos estatísticos das componentes do desvanecimento	86
5.1.4	Desvanecimento Rayleigh	86
6	CÓDIGOS COM DIVERSIDADES DE ESPAÇO E DE TEMPO	88
6.1	Esquema de Alamouti com duas antenas transmissoras e uma receptora	90
7	CENÁRIO DE SIMULAÇÃO	94
8	RESULTADOS	97
9	CONCLUSÕES	102
9.1	Publicações e trabalhos futuros	103
	REFERÊNCIAS	105

Lista de ilustrações

Figura 1	– Diagrama em blocos de um sistema de comunicação com codificação de canal por matrizes <i>wavelet</i>	30
Figura 2	– Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e dois símbolos de saída a cada instante).	38
Figura 3	– Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/2$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e quatro símbolos de saída a cada instante).	39
Figura 4	– Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/4$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e oito símbolos de saída, a cada instante).	60
Figura 5	– Constelações de sinais (<i>wavelet</i>) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC 2×8 , com $R = 1$ e $n_b = 1, 2$ e 4	61
Figura 6	– Constelações de sinais (<i>wavelet</i>) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC $_{2 \times 8}$, com $R = 1/2$ e $n_b = 1, 2$ e 4	62
Figura 7	– Constelações de sinais (<i>wavelet</i>) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC $_{2 \times 8}$, com $R = 1/4$ e $n_b = 2$ e 4	63
Figura 8	– Constelações de sinais (<i>wavelet</i>) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC $_{2 \times 32}$, com $R = 1$ e $n_b = 2$ e 4	64
Figura 9	– Constelações de sinais (<i>wavelet</i>) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC $_{2 \times 32}$, com $R = 1/2$ e $n_b = 2$ e 4	65
Figura 10	– Constelações e curvas de distribuição de probabilidades de sistemas CWC $_{2 \times 32}$, com $R = 1/4$	66
Figura 11	– Constelação e curvas de distribuição de probabilidades de sistemas CWC $_{2 \times 8}$, com $R = 1$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com 25 pontos e $E_s = 16$ (SANTOS; GURJAO; ASSIS, 2013).	66
Figura 12	– Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas CWC $_{2 \times 8}$, com $R = 1/2$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com 9 pontos e $E_s = 8$	67
Figura 13	– Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas CWC $_{2 \times 8}$, com $R = 1/4$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com 5 pontos e $E_s = 4$	67
Figura 14	– Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas CWC $_{2 \times 32}$, com $R = 1$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros consecutivos, com 289 pontos e $E_s = 64$	68

Figura 15 – Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/2$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com 33 pontos e $E_s = 32$	68
Figura 16 – Constelação de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/4$, e formada por pares de símbolos <i>wavelet</i> inteiros e consecutivos, com 17 pontos e $E_s = 16$	68
Figura 17 – Diagrama de decodificador CWC, símbolo a símbolo, para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de codificação $R = 1$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e dois símbolos de saída, a cada instante).	70
Figura 18 – Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1$	73
Figura 19 – Treliça equivalente ao código $CWC_{2 \times 8}$, $R = 1$, formatação da fonte $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$. O rótulo de cada ramo da treliça indica os <i>bits</i> de entrada e o par de símbolos <i>wavelet</i> de saída correspondentes àquela transição.	79
Figura 20 – Exemplo de evento erro, em que e_{ij} denota o i -ésimo percurso errado, de comprimento L , partindo do percurso correto c no instante j . (SCHLEGEL; PEREZ, 2004, p. 156).	80
Figura 21 – Simulador de desvanecimento baseado em filtro de ruído gaussiano com único <i>tap</i> (AKRAM, 2007).	87
Figura 22 – Sistema de comunicação com múltiplas antenas de transmissão e recepção (PROAKIS; SALEHI, 2008)	89
Figura 23 – Esquema de Alamouti, com duas antenas de transmissão e uma antena de recepção (ALAMOUTI, 1998)	91
Figura 24 – Diagrama de blocos dos sistemas CWC empregados nas simulações.	95
Figura 25 – Desempenhos do sistema CWC apresentado na Figura 1, com matriz de codificação 4×16 (posto $m = 4$ e gênero $g = 4$), para grande variação de parâmetros.	98
Figura 26 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, BPSK e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 1 bit/s/Hz.	99
Figura 27 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, QPSK e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 2 bit/s/Hz.	100
Figura 28 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, 16-QAM e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 4 bit/s/Hz.	100
Figura 29 – Comparação de desempenhos de sistemas de comunicações empregado $CWC_{2 \times 8}$ ($m = 2$ e $g = 4$), com taxas de codificação $R = 1, 1/2, 1/3$ e $1/4$, eficiência espectral de 1 <i>bit</i> /s/Hz, com decodificações por correlação e por Viterbi, sob canal com desvanecimento Rayleigh.	101

Lista de tabelas

Tabela 1	– Tabela de codificação <i>wavelet</i> , com matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de codificação $R = 1$. Denota-se por y_n o n -ésimo símbolo <i>wavelet</i> gerado pela soma dos elementos da coluna (TZANNES; TZANNES, 1992).	32
Tabela 2	– CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/2$. Quatro símbolos <i>wavelet</i> y_{2n+1} , y_{2n} , y_{2n-1} e y_{2n-2} são gerados a partir do par de símbolos de entrada (x_n, x_{n-1}) .	38
Tabela 3	– CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/4$. Oito símbolos <i>wavelet</i> y_{4n-4} , y_{4n-3} , \dots , y_{4n+2} e y_{4n+3} são gerados a partir do par de símbolos de entrada (x_n, x_{n-1}) .	39
Tabela 4	– Formatação dos <i>bits</i> de informação antes da codificação <i>wavelet</i> , na qual sequências de n_b bits da fonte são mapeadas em símbolos 2^{n_b} -ários, com codificação Gray.	42
Tabela 5	– Pares de símbolos <i>wavelet</i> (y_{n-1}, y_n) e suas respectivas probabilidades de ocorrência para codificação <i>wavelet</i> com $m = 2$, $g = 4$, $R = 1$ e formatação dos dados da fonte em $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$ (SANTOS; GURJAO; ASSIS, 2013).	51
Tabela 6	– Tabela da treliça equivalente à codificação <i>wavelet</i> $CMW_{(2 \times 8)}$.	73

Lista de abreviaturas e siglas

AG	algoritmo genético
AWGN	ruído branco gaussiano aditivo (do inglês, <i>additive white gaussian noise</i>)
BER	taxa de erro de <i>bit</i> (do inglês, <i>bit error rate</i>)
BPSK	modulação binária por deslocamento de fase (do inglês, <i>binary phase shift keying</i>)
CSI	informação sobre o estado do canal (do inglês, <i>channel state information</i>)
CWC	codificação <i>wavelet</i> de canal
FEC	correção de erro para frente (do inglês, <i>forward error correction</i>)
FIR	resposta ao impulso finita (do inglês, <i>finite impulse response</i>)
FPB	filtro passa baixas
i.i.d.	independente e identicamente distribuído
ISI	interferência entre símbolos (do inglês, <i>intersymbol interference</i>)
LMS	método dos mínimos quadrados (do inglês, <i>least mean square</i>)
MLD	decisão por máxima verossimilhança (do inglês, <i>maximum likelihood decision</i>)
MMSE	erro médio quadrático mínimo (do inglês, <i>minimum mean-square error</i>)
MRRC	recepção combinada com taxa máxima (do inglês, <i>maximal-ratio receive combining</i>)
PAM	modulação de amplitude de pulso (do inglês, <i>pulse amplitude modulation</i>)
PGF	função geradora de probabilidade (do inglês, <i>probability-generating function</i>)
PSK	modulação por deslocamento de fase (do inglês, <i>phase shift keying</i>)
QAM	modulação de amplitude em quadratura (do inglês, <i>quadrature amplitude modulation</i>)
SER	taxa de erro de símbolos (do inglês, <i>symbol error rate</i>)
SISO	entrada suave e saída suave (do inglês, <i>soft input, soft output</i>)

SNR	relação sinal-ruído (do inglês, <i>signal-to-noise ratio</i>)
STBC	código de blocos espaçotemporal (do inglês, <i>space-time block code</i>)
STTC	codificação em treliça espaçotemporal (do inglês, <i>space-time trellis coding</i>)

Lista de símbolos

A	matriz de coeficientes <i>wavelet</i>
$A(D)$	matriz de polinômios
a^0	vetor de escala
$a^s, s > 0$	vetor <i>wavelet</i>
a_k^s	coeficiente de uma matriz <i>wavelet</i>
$A \otimes B$	produto tensorial entre matrizes
\mathbb{C}	número complexo
$d(x, y)$	distância euclidiana entre dois pontos
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	distância euclidiana entre duas sequências
$\delta_{x,y}$	símbolo de Kroneker
$E :$	operador extensão
E	energia média da constelação
$E\{\cdot\}$	valor esperado
E_b/N_0	razão sinal ruído de <i>bit</i>
E_s	energia média da constelação de sinais
\mathbb{F}	corpo nos números reais, ou complexos
f	função arbitrária
F	função objetivo
g	gênero de uma matriz <i>wavelet</i>
$G_x(z)$	função geradora de probabilidade
H	matriz de Haar
$h(\cdot)$	resposta canal ao impulso
$\mathbf{H}(m, \mathbb{F})$	conjunto de todas as matrizes <i>wavelet</i> de Haar de posto m
$\text{Im}\{y_n\}$	parte imaginária do símbolo <i>wavelet</i> complexo

m	posto de uma matriz <i>wavelet</i>
$M(\cdot)$	métrica
mg	número de colunas de uma matriz <i>wavelet</i>
n_b	número de <i>bits</i>
N_s	número de símbolos <i>wavelet</i> inteiros
$\mathcal{O}(\cdot)$	complexidade computacional
$P(y_n)$	distribuição de probabilidade dos símbolos <i>wavelet</i>
P_{EvEr}	probabilidade de ocorrer evento erro
$P(\cup)$	probabilidade de união
P_s	probabilidade de erro de símbolos
R	taxa de codificação
\mathbb{R}	número real
\mathbf{r}	sinal recebido
$\text{Re}\{y_n\}$	parte real do símbolo <i>wavelet</i> complexo
\mathbf{s}	sinal transmitido
$S(\cdot, \cdot)$	função espalhamento
$\text{sgn}(\cdot)$	função sinal
$\mathbf{U}(m)$	conjunto de todas as matrizes unitárias complexas de posto m
$\mathbf{WM}(m, g, \mathbb{F})$	conjunto de todas as matrizes <i>wavelet</i> de posto m e gênero g
\mathbf{x}	vetor de símbolos de entrada do codificador <i>wavelet</i>
$\hat{\mathbf{x}}$	vetor de símbolos de entrada do codificador <i>wavelet</i> estimado
$\chi(\mathbf{A})$	matriz característica
$\mathbf{x}(D)$	série formal dos símbolos de entrada do codificador <i>wavelet</i>
$X(f)$	representação de sinal no domínio da frequência
\mathbf{y}	vetor de símbolos <i>wavelet</i>
$\hat{\mathbf{y}}$	vetor de símbolos <i>wavelet</i> estimado
y	símbolo <i>wavelet</i>
$\mathbf{y}(D)$	sequência de símbolos <i>wavelet</i>

1 Introdução

A aplicação de *wavelet* impactou várias áreas da engenharia, tais como: geração de algoritmos eficientes para representação de funções, em termos de base *wavelet*; elaboração de algoritmos de compressão, com base na representação de expansão *wavelet*, concentrando a maior parte da energia de um sinal em alguns coeficientes; e o desenvolvimento de métodos de codificação de canais, para permitir que a representação *wavelet* codifique a informação de forma eficiente, para a transmissão de sinais através de canais ruidosos e com desvanecimento (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998). No entanto, a literatura, ainda, é escassa quanto a aplicação da matriz *wavelet* para a codificação de canal de comunicação. Desta forma, há vários pontos que precisam ser aprofundados e investigados, para que os sistemas CWC estejam bem caracterizados. São eles: a sistematização matemática do processo; a ampliação da eficiência espectral; além de comparar, por simulações, o seu desempenho, em termos da taxa de erro de *bits*, em relação a outros sistemas que transmitem sobre canal com desvanecimento plano, para verificar a sua competitividade e empregabilidade em sistemas de comunicação digitais, atuais. Nesta tese, ataca-se esses pontos e são apresentadas as seguintes contribuições ao tema: 1) descrição algébrica geral do processo de CWC, 2) aumento da eficiência espectral dos sistemas CWC para até 4 *bits/s/Hz*, aplicando um processo de formatação dos *bits* de informação antes da codificação *wavelet*; 3) avaliação da eficácia e empregabilidade dos sistemas CWC, sobre canais com desvanecimento plano e sujeito a ruídos gaussianos (AWGN); 4) realização de decodificação de sequências, pela aplicação do algoritmo de Viterbi, e 5) extensão dos resultados anteriormente obtidos, com taxa de codificação unitária, para taxas 1/2 e 1/4.

Os sistemas CWC avaliados estão em suas formas básicas, para que se possa averiguar a sua potencialidade natural, sem o auxílio externo de qualquer recurso, que melhore o seu desempenho real.

A codificação *wavelet* de canal (CWC) foi proposta originalmente por Tzannes e Tzannes (1992), para o tratamento dos efeitos do desvanecimento em canais de comunicações sem fio. Esta técnica é fundamentada nas propriedades de ortogonalidade entre as linhas de uma matriz de coeficientes *wavelet* e apresenta como principais vantagens a combinação dessa ortogonalidade exata entre os vetores de símbolos *wavelet* (linhas da matriz de codificação), com o espalhamento da informação contida nos dados de entrada, sobre vários símbolos codificados (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998), além da possibilidade de alteração da taxa de codificação, por simples alteração na superposição entre as linhas da tabela de codificação. A ortogonalidade entre as linhas da matriz de codificação permanece, mesmo quando há sobreposição e adição entre elas, o que possibilita um decodificador convencional, por correlação (símbolo a símbolo), recuperar a informação usando um banco de correlatores formado a partir das linhas da própria matriz de codificação. Desta forma, esta técnica apresenta

baixa carga computacional na decodificação da informação recebida e grande capacidade para proteger a informação transmitida, dos efeitos do desvanecimento causados pelo canal de comunicação (TZANNES; TZANNES, 1992).

O processo CWC é realizado por máquina de estados, que emprega registradores de deslocamento para armazenar uma sequência de símbolos de entrada, que são ponderados pelos coeficientes de uma matriz *wavelet* de codificação e somados para gerar símbolos codificados (o processo será descrito em detalhes, adiante). A informação contida em cada dado de entrada é então espalhada sobre vários símbolos codificados, de forma similar ao que fazem os códigos convolucionais (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998). O número máximo de símbolos *wavelet* que transportam, ponderadamente, parte da informação de um símbolo de entrada é definido pelo número de colunas da matriz *wavelet* de codificação e é denominado *comprimento de restrição* do codificador. Quando a decodificação do sinal recebido é realizada por correlação (símbolo a símbolo), o aumento do comprimento de restrição não causa grande impacto, em termos de complexidade computacional (TZANNES; TZANNES, 1992), porém produz impacto direto na cardinalidade de símbolos gerados e, conseqüentemente, na constelação de sinais. Desta forma, quando a taxa de código é unitária, um codificador CWC mapeia sequências binárias (*bits* de informação), equiprováveis, em sequências de conjunto finito de símbolos denominado *alfabeto do código*, sendo a *taxa de entropia* da sequência codificada resultante de uma fonte binária independente e identicamente distribuída (i.i.d.), igual a 1 *bit* por símbolo (SANTOS, 2014).

Uma vez que os símbolos *wavelet* gerados não são equiprováveis e a cardinalidade do alfabeto do código cresce com a ordem da matriz, a utilização desta técnica requer o uso de constelações de sinais especialmente projetadas. Além disso, com uma taxa de entropia de 1 *bit*/símbolo, com taxa de codificação unitária, a eficiência espectral fica limitada a 1 *bit*/s/Hz. A construção de constelações especiais foi explorada por Santos (2014), bem como o aumento da eficiência espectral para 2 *bits*/s/Hz, pela construção e transmissão de blocos formados por dois símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, realizando um *mapeamento simples* desses blocos no espaço dos sinais usual (fase-quadratura, $I - Q$) (SANTOS; GURJAO; ASSIS, 2013). Nesta tese, melhora-se a eficiência espectral dos sistema CWC pela formatação dos *bits* da fonte (informação), num conjunto de símbolos de entrada, com maior cardinalidade, antes da codificação *wavelet*. Por exemplo, mapeia-se blocos de k *bits*, em símbolos inteiros ou complexos, de um conjunto de cardinalidade $\log_2(k)$.

A seguir, apresenta-se o estado da arte da técnica CWC. A partir do primeiro artigo publicado pelos irmãos Tzannes e Tzannes (1992), e do livro sobre *wavelet* de Resnikoff e Wells Jr. (1998), os principais estudos e trabalhos sobre codificação *wavelet* de canal estão concentrados na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e posteriormente na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Até o momento, havia três teses sobre codificação de canal, por meio de matrizes *wavelet*, defendidas no Departamento de Engenharia Elétrica da UFCG, nos anos de 2006, 2008 e 2014, respectivamente, e uma quarta tese defendida, no ano de 2017, junto ao Departamento de Fotônica da Universidade

Técnica da Dinamarca (DTU, *Danish Technical University*), em colaboração com o Instituto de Telecomunicações da Universidade de Lisboa. Ademais, todas, trazem inovações, em sua aplicação e análise. Os principais trabalhos publicados são sucintamente descritos e apresentados, a seguir, em ordem cronológica.

Sendo a codificação *wavelet* uma técnica eficiente para superar os efeitos deletérios do canal de comunicação com desvanecimentos sobre o sinal transmitido, [Silveira et al. \(2001\)](#) propuseram uma avaliação dessa técnica, aplicando um esquema de modulação não convencional, na análise de desempenho, quando o sinal é transmitido sobre um canal de comunicação sem fio, com ruído branco gaussiano e desvanecimento Rayleigh plano.

[Silveira \(2002\)](#) introduziu códigos de *Hamming* para codificar os símbolos *wavelet*, antes de transmiti-los através do canal de comunicação. Essa técnica apresentou como efeito colateral, a diminuição da eficiência espectral do sistema. O trabalho apresenta uma forma de proteger a comunicação, em razão do aumento no comprimento médio dos surtos de erros, provocados por uma variação mais lenta do canal, ao longo do tempo. Foram realizadas comparações, por simulação, com esquema empregando outras técnicas e diversidade, com eficiência espectral similar, para comprovar o aumento da robustez do sistema codificado por matrizes *wavelet*, em canais com surtos de erros mais intensos.

Sabendo-se que o esquema de modulação adotado afeta diretamente o desempenho do sistema com codificação *wavelet*, [Silveira, Assis e Pinto \(2003\)](#) apresentam uma constelação de modulação em fase, modificada, (PSK - do inglês, *phase shift keying*), obtida empiricamente de forma sub ótima, cujo propósito é minimizar a probabilidade de erro de *bit* de sistemas *wavelet*. Considerando que o receptor tem perfeito conhecimento do canal, o desempenho do sistema proposto é avaliado, tomando-se como referência um sistema com modulação binária em fase, BPSK (do inglês, *binary phase shift keying*), não codificado. Os resultados obtidos motivaram [Silveira, Assis e Pinto \(2004\)](#) a investigar os impactos dos erros de estimação da resposta canal, ao impulso, sobre desempenho do sistema *wavelet*, aplicando um algoritmo, LMS (do inglês, *least mean square*).

Na primeira tese de doutorado defendida na UFCG, [Silveira \(2006\)](#) formulou ferramentas matemáticas objetivando à otimização de constelações utilizadas na modulação de símbolos *wavelet*. Apresentou, também, uma metodologia para o projeto de constelações, empregando algoritmo genético (AG), baseado na formulação analítica desenvolvida. Na tese é sustentado que o desenvolvimento analítico apresentado, pode ser generalizado para auxiliar na concepção e análise de outras abordagens, baseadas na codificação *wavelet*.

[Silveira Jr et al. \(2006\)](#) apresentam uma regra para demodulação suave de sinais empregados no mapeamento de símbolos *wavelet*, baseado em um estimador de erro médio quadrático mínimo, MMSE (do inglês, *minimum mean-square error*), no receptor. O método de recepção suave foi utilizado por [Silveira Jr et al. \(2007\)](#), para a modelagem de um sistema de comunicação com concatenação serial entre a codificação *wavelet* e um codificador convolucional, com taxa fixa. Como decorrência, foi proposto por [Silveira Jr. \(2008\)](#), um

esquema de decodificação iterativa, baseada na codificação *wavelet*, para combater os efeitos do canal com desvanecimento Rayleigh plano.

Na segunda tese de doutorado defendida na UFCG, [Silveira Jr. \(2008\)](#) desenvolveu um demodulador com saída suave para a decodificação *wavelet*, solucionando uma limitação de trabalhos anteriores, além de apresentar um esquema de decodificação iterativa, para concatenações seriais, em que um codificador *wavelet* era empregado, como codificador interno. Desenvolveu, ainda, uma estratégia adequada para troca de informações suaves entre o par de decodificadores SISO (do inglês, *soft input*, *soft output*).

[Ferreira \(2009\)](#) estendeu o uso de algoritmos genéticos para obter novas constelações, com dimensões ainda não exploradas, em sistemas de codificação por matrizes *wavelet*. Também, esquemas com diversidade espacial são explorados por [Silveira Jr, Silveira e Assis \(2009\)](#) na construção de constelações quadrimensionais, para sistemas *wavelet*, cujo desempenho do sistema, obtido por simulação, é comparado com o desempenho do sistema originalmente proposto por [Tzannes e Tzannes \(1992\)](#), e os resultados apontam no sentido de que mantendo-se uma complexidade computacional relativamente baixa, obtêm-se melhorias, em relação a trabalhos anteriores.

[Santos, Gurjao e Assis \(2011\)](#) avaliaram formas de aperfeiçoamento do uso de algoritmos genéticos, no projeto de constelações para sistemas com codificação *wavelet*, e [Santos, Gurjao e Assis \(2013\)](#) investigaram estratégias para aumentar a eficiência espectral de sistemas de comunicação codificados por matrizes *wavelet*.

[Cavalcante et al. \(2013\)](#) realizou análise de desempenho de sistemas, utilizando-se da codificação por matrizes *wavelet*, sobre canais seletivos em frequência, cujos resultados indicam que esta técnica é robusta aos efeitos provocados pela interferência entre símbolos, ISI (do inglês, *intersymbol interference*). Quando os níveis de seletividade do canal são moderados, o desempenho do sistema é muito próximo aos obtidos em canais planos.

[Cavalcante \(2014\)](#) investigou o desempenho de sistemas CWC, quando um modelo de canal, também, leva em consideração os efeitos do desvanecimento seletivos em frequência, cujos resultados indicaram robustez na presença de interferência entre símbolos, principal efeito da seletividade em frequência.

Na terceira tese de doutorado defendida na UFCG, [Santos \(2014\)](#) aumentou a eficiência espectral de sistema de transmissão, com codificação *wavelet*, originalmente limitada a 1 *bit/s/Hz*, para 2 *bits/s/Hz*, com taxa do código é unitária, transmitindo sinais associados a blocos formados por dois símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos.

[Silveira Jr \(2014\)](#) apresentou um esquema de quantização utilizando razões de probabilidades, para reduzir a complexidade computacional de um decodificador iterativo, proposto para sistemas de comunicação com codificação *wavelet*. Com o objetivo de reduzir o esforço computacional, o valor real de razão de probabilidade de *bits* codificados são quantificadas em três níveis de confiabilidade, com um limiar determinado, minimizando o erro quadrático

médio entre o original e os quantificados. Como resultado, é obtido um decodificador iterativo, com complexidade computacional reduzida. As avaliações de desempenho do decodificador iterativo foram realizadas por simulação e mostram que é um meio eficaz, para reduzir a carga de sistemas *wavelet*.

Silveira et al. (2015) apresentaram estratégias de recepção para sistemas de comunicação, utilizando codificação por matrizes *wavelet*, que mostram ser simples e eficazes, dando origem a ganhos de desempenho extraordinários em relação às modulações convencionais de amplitude e fase, com a mesma eficiência espectral. Silveira Jr e Silveira (2016) propuseram um receptor baseado em erro médio quadrado mínimo (MMSE), para sistemas de comunicações utilizando codificação *wavelet*. Apresentou avaliação de desempenho do novo sistema *wavelet*, sobre canal com desvanecimento de Rayleigh, e os resultados mostram a eficácia da abordagem proposta, proporcionando ganhos de desempenho, em relação às modulações convencionais de amplitude e fase, com a mesma eficiência espectral.

Fonseca Neto et al. (2015) empregou um algoritmo para otimização de constelações, cujos resultados obtidos sugerem que a constelação proposta por Santos (2014) é originariamente ótima.

Silveira Jr e Silveira (2016) apresentam os fundamentos da transmissão *wavelet*, com diversidade de tempo, que é proposta para ser usada em sistemas de comunicação digital M -ary, e investiga o desempenho de um sistema 4-QAM, novo, com diversidade de tempo e equalização de MMSE (do inglês, *minimum mean-square error*), sobre canal com desvanecimento Rayleigh plano. Os resultados numéricos mostram que o desempenho, em termos da taxa de erro de *bits* (BER), deste novo sistema 4-QAM/*wavelet*, pode ser significativamente melhorado, com essa abordagem.

A quarta tese de doutorado, sobre codificação *wavelet* de canal, foi defendida por Cavalcante (2017), junto ao departamento de Fotônica da Universidade Técnica Dinamarquesa (DTU). O trabalho considerou a aplicação da codificação *wavelet* de canal, em rádio sobre fibra (RoF, do inglês, *radio-over fiber*) e mostrou que a técnica apresenta considerável resiliência contra os efeitos da seletividade de tempo, induzida pelo efeito Doppler.

Cavalcante et al. (2017) demonstraram que a codificação *wavelet* de canal permite ganhos de diversidade elevados, com um receptor de baixa complexidade e mais notavelmente, sem comprometer a eficiência espectral.

Fonseca Neto, Lima e de Assis (2017) investigou o emprego de decodificador de Viterbi, para códigos *wavelet* e comparou, em termos da taxa de erro de *bits*, o desempenho de sistemas CWC, operando sobre canal com desvanecimento Rayleigh, quando aplicada a decodificação de Viterbi, em relação à decodificação tradicional, símbolo a símbolo. Os resultados de simulação demonstraram que a decodificação de sequência proporciona desempenho superior, apesar do aumento da complexidade computacional.

Silveira Jr e Dinis (2017) investigaram a probabilidade de erro de *bits*, de um sistema de

transmissão *wavelet*, com diversidade de tempo, que explora as propriedades de ortogonalidade entre as linhas da matriz de codificação, para espalhar a informação dos símbolos QPSK, antes da transmissão dos sinais. Resultados numéricos de comparações de desempenho mostram que a análise teórica proposta coincide muito, com os resultados de simulação de Monte Carlo. Além disso, os resultados analíticos e de simulação mostram um desempenho muito maior, sob condições de desvanecimento plano, sem afetar a eficiência espectral do esquema de modulação original, e oferece vantagens significativas para os sistemas de comunicação sem fio, de banda larga, da próxima geração.

Gama, Silveira e Salazar (2017) propõem uma codificação *wavelet* adaptável, cujos parâmetros de taxa de código e constelação de sinal podem variar de acordo com o nível de desvanecimento do canal de comunicação e avalia o uso deste sistema de transmissão em um laço de controle implementado por nós de sensores, sem fio. O desempenho do sistema adaptativo foi avaliado, em termos de taxa de erro de *bits* (BER) versus E_b/N_0 e eficiência espectral, considerando um canal variante no tempo, com desvanecimento Rayleigh, e em termos de sobrecarga de processamento, em um sistema de controle com comunicação sem fio. Os resultados obtidos por meio de simulações computacionais e testes experimentais, mostram ganho de desempenho devido à inserção da codificação *wavelet* adaptativa e indicam para o uso dessa técnica, em laço de controle, com nós interconectados, em enlace sem fio.

1.1 Motivação para a realização da tese

Contribuir com a técnica de codificação de canal por matrizes *wavelet*, atacando alguns pontos abertos, possibilitando uma melhor caracterização da técnica. Ou seja: sistematização matemática do processo; ampliação da eficiência espectral; comparar, por simulação, seu desempenho, em termos da taxa de erro de *bits*, em relação a outros sistemas que transmitem sobre canal com desvanecimento plano, para verificar a sua competitividade e empregabilidade, em sistemas de comunicação digitais, atuais. Além de ampliar os resultados anteriores, em termos de taxa de codificação, expandindo-os para as taxas $1/4$ e $1/2$, visto que os mesmos só existiam para taxa de codificação unitária.

1.2 Objetivos da tese

1.2.1 Objetivo geral

Apresentar contribuições para a técnica de codificação *wavelet* de canal, objetivando caracterizar matematicamente a técnica e verificar sua competitividade e empregabilidade em sistemas de comunicação digitais, atuais.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Descrever algebricamente o processo de codificação de canal, por matriz *wavelet*;
2. Analisar o desempenho da técnica CMW, em termos da taxa de erro de *bits*, quando a transmissão ocorre sobre canal com desvanecimento plano e ruído gaussiano, comparando os resultados obtidos por simulação, com o desempenho de sistema de comunicação, com diversidade espaçotemporal e com os sistemas conhecidos e que ordinariamente utilizam decodificação símbolo a símbolo (BPSK, QPSK e 16QAM);
3. Investigar o desempenho da técnica CMW para diferentes taxas de codificação (1/4, 1/2, 1);
4. Aplicar formatação aos *bits* da fonte, para gerar os símbolos de entrada do codificador CWC, com maior cardinalidade, para aumentar a eficiência espectral do sistema;
5. Analisar a decodificação de sequência, para sistemas CMW;

1.3 Metodologia

A metodologia empregada visando alcançar os objetivos definidos, configura-se em estudo sobre a técnica de codificação de canais, por matrizes *wavelet*; revisão bibliográfica sobre as técnicas de codificação de canais, atualmente em uso e implementação de algoritmos e desenvolvimento de programas computacionais, na linguagem *Python*, para as simulações.

1.4 Contribuições da tese

As principais contribuições são:

1. Descrição algébrica geral da CWC;
2. Aumento da eficiência espectral para até 4 *bits/s/Hz*, aplicando um processo de formatação dos *bits* de informação, antes da codificação *wavelet*;
3. Avaliação da eficácia e empregabilidade dos sistemas CWC, sobre canais com desvanecimento plano e sujeito a ruídos gaussianos (AWGN);
4. Realização de decodificação de sequência, pela aplicação do algoritmo de Viterbi;
5. Extensão dos resultados obtidos anteriormente, com taxa de codificação unitária, para taxas 1/2 e 1/4.

1.5 Organização da tese

Esta tese está organizada em nove capítulos.

No capítulo inicial, introduz-se ao tema e o estado da arte da técnica de codificação *wavelet* de canal é apresentada.

No capítulo 2, mostra-se a matriz *wavelet* aplicada ao processo de CWC em estudo, e suas características, especialmente as matrizes *wavelet* reais planas.

No capítulo 3, apresenta-se, em detalhe, a técnica de codificação *wavelet* de canal.

No capítulo 4, as técnicas de decodificação por correlação (símbolo a símbolo) e de sequência são abordadas.

No capítulo 5, trata-se do modelamento de canal de Rayleigh.

No capítulo 6, expõe-se o sistema de comunicação (STBC) tomado como referência, para avaliar o desempenho, a eficácia e a empregabilidade da técnica CWC, em sistemas de comunicação digital, atuais.

No capítulo 7, delimita-se o cenário de simulações.

No capítulo 8, apresentam-se os resultados obtidos, e por fim, no capítulo 9 são apresentadas as conclusões e considerações finais.

2 Matriz *wavelet*

O capítulo anterior introduziu o trabalho desenvolvido nesse doutorado, descreveu a motivação, objetivo, suas contribuições científicas, a organização do texto, a metodologia aplicada, além de apresentar, em ordem cronológica, os principais trabalhos publicados sobre o tema.

Neste capítulo, definem-se algumas propriedades das matrizes *wavelet*, com enfoque nas matrizes *wavelet* de Haar. Apresenta-se sucintamente o operador extensão e o produto tensorial, que são ferramentas matemáticas utilizadas para a obtenção de matrizes *wavelet* empregadas na realização da codificação de canal, aqui discutida.

Segundo [Resnikoff e Wells Jr. \(1998\)](#), uma matriz *wavelet* é uma generalização de matrizes unitárias quadradas, para matrizes retangulares. No âmbito da engenharia elétrica, essas matrizes correspondem a bancos de filtros digitais, com múltiplas taxas, sendo que cada linha da matriz é formada pelos coeficientes do respectivo filtro do banco.

Em processamento de sinais e na matemática aplicada utilizam-se diversas matrizes *wavelet*. Por exemplo: as matrizes de Walsh e Hadamard, de Rademacher, de Chebyshev, da transformada discreta de Fourier, transformada discreta de cosseno ([RESNIKOFF; WELLS JR., 1998](#)). Nesta tese, emprega-se a matriz *wavelet* real plana, que é aquela que tem todos os seus elementos com valor absoluto unitário e é gerada a partir da matriz de Haar 2×2 , expandida para diversos tamanhos.

2.1 A matriz *wavelet*

Seja \mathbb{F} um corpo arbitrário que pode ser definido no conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , dos números reais \mathbb{R} , dos números complexos \mathbb{C} , ou em qualquer conjunto algébrico. Considere uma matriz $\mathbf{A} = [a_k^s]$, onde s indica a linha e k a coluna a que pertence o elemento a , $m > 2$ é o número de linhas e comprimento possivelmente infinito

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cdots & a_{-1}^0 & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ \cdots & a_{-1}^1 & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{-1}^{m-1} & a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

sendo m o posto da matriz e cada elemento $a_k^s \in \mathbb{F}$, e $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. Defini-se submatrizes quadradas $\mathbf{A}_{lm \times m}$ da seguinte forma

$$\mathbf{A}_l = (a_{lm+r}^s), \text{ sendo } r = 0, \dots, m-1, \text{ e } s = 0, \dots, m-1 \quad (2.2)$$

para $l \in \mathbb{Z}$. Desta forma, pode-se escrever a matriz \mathbf{A} em termos das submatrizes $\mathbf{A}_{lm \times m}$

$$\mathbf{A} = (\cdots, \mathbf{A}_{-1}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots) \quad (2.3)$$

sendo por exemplo,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{m-1}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

Aplicando-se a teoria de variáveis complexas, pode-se construir uma série de potências a partir da matriz, denominada de série de *Laurent* da matriz \mathbf{A} (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998)

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_l z^l, \quad (2.5)$$

A matriz de Laurent $\mathbf{A}(z)$ pode ser escrita como uma matriz quadrada $m \times m$, cujos elementos são os coeficientes da série

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \sum_k a_{mk}^0 z^k & \cdots & \sum_k a_{mk+m-1}^0 z^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \sum_k a_{mk+r}^0 z^k & \vdots \\ \sum_k a_{mk}^{m-1} z^k & \cdots & \sum_k a_{mk+m-1}^{m-1} z^k \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Supondo-se que há um número finito de matrizes não nulas na Equação 2.5, tem-se

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=N_1}^{N_2} \mathbf{A}_l z^l \quad (2.7)$$

considerando que \mathbf{A}_{N_1} e \mathbf{A}_{N_2} são matrizes não nulas. Seja $g = N_2 - N_1 + 1$, denominado de gênero da matriz \mathbf{A} , o número de termos não nulos da série representada pela Equação 2.7.

Definindo-se a matriz adjunta $\tilde{\mathbf{A}}(z)$ da matriz de *Laurent* $\mathbf{A}(z)$, como

$$\tilde{\mathbf{A}}(z) = \mathbf{A}^*(z^l) = \sum_l \mathbf{A}_l^* z^{-l}, \quad (2.8)$$

em que $\mathbf{A}_l^* = \overline{\mathbf{A}}^t$ é a transposta conjugada da matriz \mathbf{A}_l .

Supondo que a matriz \mathbf{A} tem m linhas e possivelmente um número infinito de colunas, essa matriz é denominada de matriz *wavelet* de posto m se as condições apresentadas (linear e quadrática) a seguir forem satisfeitas (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998):

1. condição quadrática

$$\mathbf{A}(z)\tilde{\mathbf{A}}(z) = mI, \quad (2.9)$$

2. e condição linear

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (2.10)$$

em que $\delta_{s,0}$ é o símbolo de Kronecker dado por

$$\delta_{x,y} := \begin{cases} 1, & \text{se } x = y, \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases} \quad (2.11)$$

Normalmente a matriz \mathbf{A} tem um número finito de colunas. Assim, a matriz *wavelet* \mathbf{A} terá dimensão finita $m \times mg$, sendo g o seu gênero, o qual pode ser interpretado como o número de blocos de matriz $m \times m$ da série de Laurent que formam a matriz \mathbf{A} (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

O conjunto de todas as matrizes *wavelet* de posto m e gênero g será representado por $WM(m, g; \mathbb{F})$. Geralmente \mathbb{F} forma um corpo nos números reais, \mathbb{R} , ou complexos, \mathbb{C} .

Pode-se representar a Equação 2.9 (condição quadrática) em termos dos coeficientes complexos da matriz *wavelet* \mathbf{A} da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} \bar{a}_{[k+mr]}^s = m \delta_{s',s} \delta_{r',r}, \quad (2.12)$$

$$0 \leq s', s \leq m-1 \quad \text{e} \quad 0 \leq r', r \leq g-1,$$

em que $[k+mr]$ denota a operação $k+mr \pmod{mg}$, \bar{a} é o conjugado complexo de a .

As Equações 2.9 e 2.12 representam a condição quadrática das matrizes *wavelet* que asseguram que as linhas de uma matriz *wavelet* $\mathbf{A} = [a_k^s] = (a_0^s, \dots, a_{mg-1}^s)$ são ortogonais aos pares, mesmo quando deslocadas por um múltiplo arbitrário de m . O vetor \mathbf{a}^0 formado pelos elementos da primeira linha da matriz é denominado de vetor de escala e cada um dos outros vetores \mathbf{a}^s , com $1 < s < m$, formados pelos elementos das demais linhas da matriz é denominado de vetor *wavelet*. A condição de linearidade ou escalonamento dada pela Equação 2.10 estabelece que a soma dos elementos da primeira linha (vetor de escala) é igual ao posto m da matriz *wavelet*, enquanto que a soma dos elementos das demais linhas é nula.

2.1.1 Matrizes *wavelet* de Haar

Como exemplo de matriz *wavelet*, apresenta-se a seguir um caso especial que são as matrizes de Haar de posto 2, as quais são as únicas matrizes *wavelet* quadradas e com coeficientes reais (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

De forma geral, a matriz de Haar com elementos complexos é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -e^{j\theta} & e^{j\theta} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

sendo que, $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$.

O conjunto das matrizes *wavelet* com gênero unitário é de especial importância no estudo das *wavelet* e é denotado por

$$H(m; \mathbb{F}) \triangleq MW(m, 1; \mathbb{F}) \quad (2.15)$$

Os elementos do conjunto $H(m; \mathbb{F})$ são denominados de matrizes *wavelet* de Haar de posto m . A importância dessas matrizes no estudo das *wavelet* decorre do fato que são capazes de caracterizar todas as demais matrizes *wavelet* (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

A seguir são apresentadas algumas propriedades das matrizes de Haar, bem como algumas operações que possibilitam a obtenção de matrizes com dimensões superiores, a partir de matrizes com dimensões menores.

Inicialmente, a matriz canônica de Haar. Seja o conjunto unitário de posto m denotado por $U(m)$ formado por todas as matrizes complexas $U_{m \times m}$, tal que $U^*U = I$, sendo U^* o transposto conjugado de U e I a matriz identidade (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

Uma matriz complexa $H_{m \times m}$ é dita matriz de Haar se, e somente se, atender a seguinte condição

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \mathbf{H}, \quad (2.16)$$

sendo que $U \in U(m-1)$ é uma matriz unitária, 0 é uma matriz nula e \mathbf{H} é a matriz canônica de Haar de posto m e definida por

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -(m-1)\sqrt{\frac{1}{m-1}} & \sqrt{\frac{1}{m-1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sqrt{\frac{1}{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s\sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \cdots & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} & \sqrt{\frac{m}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

sendo $s = (m - k)$ e $k = 0, 1, \dots, m - 1$ são os números das linhas da matriz.

Seja $H = (h_r^s)$ uma matriz de Haar. Desta forma,

$$h_r \triangleq h_r^0 = 1, \quad 0 \leq r \leq m. \quad (2.18)$$

Sejam $H', H'' \in H(m; \mathbb{C})$ duas matrizes de Haar. Assim, há uma matriz unitária $U \in U(m-1)$ tal que

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} H''. \quad (2.19)$$

A Matriz *wavelet*, com característica da matriz de Haar. Seja A uma matriz *wavelet* e $A(z)$ a sua matriz de Laurent. Define-se a matriz de Haar característica da matriz *wavelet* por $\chi(A)$. Assim (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998)

$$\chi(A) \triangleq A(1). \quad (2.20)$$

Se $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $\chi(A) \in H(m; \mathbb{F})$, ou seja χ é um mapeamento bem definido de matrizes *wavelet* de posto m em matrizes de Haar de mesmo posto (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

$$MW(m, g; \mathbb{F}) \xrightarrow{\chi} H(m; \mathbb{F}) \quad (2.21)$$

Os elementos da matriz $H = \chi(A)$ são da seguinte forma

$$h_s^r = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r. \quad (2.22)$$

A matriz H deve satisfazer às condições quadrática e linear para as matrizes *wavelet* definidas nas Equações 2.9 ou 2.12 e 2.10. Pela condição de linearidade 2.10 e aplicando-se à Equação 2.22, obtém-se

$$\sum_{s=0}^{m-1} h_s^r = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^r = m\delta_{r,0}. \quad (2.23)$$

A condição quadrática para a matriz $H = \chi(A)$ advém da condição quadrática geral estabelecida nas Equações 2.9 ou 2.12, calculada em $z = 1$.

2.1.2 Produto tensorial entre matrizes de Haar

O produto tensorial entre duas matrizes de Haar produz uma outra matriz também de Haar (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

Se a matriz $A \in H(m'; \mathbb{F})$ e a matriz $B \in H(m''; \mathbb{F})$, então

$$A \otimes B \in H(m'm''; \mathbb{F}). \quad (2.24)$$

Assim, tomando-se $m' = m'' = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_0^1 & b_1^1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 & a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 & a_0^0 b_1^1 & a_1^0 b_0^1 & a_1^0 b_1^1 \\ a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 & a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^1 & a_0^1 b_1^1 & a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

Aplicando-se o produto tensorial sobre uma matriz de Haar, por exemplo,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e por definição

$$H^{\otimes n} := H^{(1)} \otimes \dots \otimes H^{(n)}, \quad (2.28)$$

então, $H^{\otimes n}$ é uma matriz de Haar de posto 2^n que é um exemplo de classe especial de matriz de Hadamard. Assim, fazendo-se $n = 2$, obtém-se

$$H^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

2.1.3 O operador extensão

Pode-se aumentar o gênero de uma matriz *wavelet* aplicando o operador extensão sobre uma matriz também *wavelet* de gênero menor. Por simplificação, esse operador será aplicado apenas sobre matrizes *wavelet* de posto par (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998).

$$E : MW(m, g) \longrightarrow MW(m, 4g). \quad (2.30)$$

Assim, seja a^i , $i = 0, \dots, m - 1$ as linhas da matriz A . Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^0 \\ \vdots \\ a^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

aplicando-se o operador extensão sobre a $A_{m \times mg}$, obtém-se a matriz $A_{m \times 4mg}$

$$E(A) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^0 & -a^1 \\ a^0 & a^1 & -a^0 & a^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{m-2} & a^{m-1} & a^{m-2} & -a^{m-1} \\ a^{m-2} & a^{m-1} & -a^{m-2} & a^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

Se $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $E(A) \in MW(m, 4g; \mathbb{F})$.

Pode-se aplicar o operador $E(\cdot)$ repetidamente sobre uma matriz *wavelet*, elevando-se sua dimensão e obtendo-se matrizes com dimensão cada vez maior.

Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se m é um número par e $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $E^n(A) \in MW(m, 4^n g; \mathbb{F})$.

Neste capítulo apresentou-se, sucintamente, algumas propriedades das matrizes *wavelet*, com enfoque nas matrizes *wavelet* de Haar, além de ferramentas matemáticas utilizadas para a obtenção de matrizes empregadas para a realização da codificação de canal, a seguir discutida.

3 Codificação de canal por matrizes *wavelet*

Considere uma matriz $\mathbf{A} = [a_k^s]$, $k \in \{0, \dots, mg - 1\}$ e $s \in \{0, \dots, m - 1\}$, com $m \geq 2$ linhas e mg colunas, tal que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \cdots & a_{mg-1}^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_{mg-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & \cdots & a_{mg-1}^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

sendo $a_k^s \in \mathbb{C}$. \mathbf{A} é dita *matriz wavelet* ou *matriz de coeficientes wavelet* de posto m e gênero g , se atender às condições linear e quadrática (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998), dadas pelas Equações 2.10 e 2.12, respectivamente, apresentadas na seção 2.1. Aqui repetidas para facilitar a leitura.

- condição linear

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m - 1,$$

- e condição quadrática

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} \bar{a}_{[k+mr]}^s = m\delta_{s',s}\delta_{r',r},$$

$$0 \leq s', s \leq m - 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq r', r \leq g - 1,$$

Uma matriz *wavelet* é dita *matriz wavelet plana* quando todos os seus elementos têm o mesmo valor absoluto. Se os elementos pertencem ao corpo dos números complexos, diz-se que é uma *matriz wavelet complexa plana*. Se os elementos dessa matriz pertencem ao corpo dos números reais, diz-se que é uma *matriz wavelet real plana*.

As matrizes *wavelet* reais planas com elementos normalizados satisfazem à condição linear modificada (TZANNES; TZANNES, 1992)

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\sqrt{g}\delta_{s,0} \quad (3.2)$$

e a condição quadrática, também, modificada (TZANNES; TZANNES, 1992)

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} a_{[k+mr]}^s = mg\delta_{s',s}\delta_{r',r}. \quad (3.3)$$

A Figura 1 apresenta um diagrama em blocos de um sistema de comunicação digital, com codificação de canal por matrizes *wavelet*, sendo \mathbf{x} os símbolos de entrada a serem codificados pelo CWC que gera os símbolos *wavelet* que são transmitidos. \mathbf{y} são os símbolos

wavelet gerados, \mathbf{s} o sinal transmitido através do canal de comunicação, \mathbf{r} o sinal recebido, $\hat{\mathbf{y}}$ a estimativa dos símbolos *wavelet* recebidos, $\hat{\mathbf{x}}$ a estimativa dos símbolos de entrada do codificador CWC e finalmente $\hat{b}its$ que são os *bits* de informação da fonte estimados. Os símbolos \mathbf{x} são obtidos a partir de um formatador dos dados da fonte que mapeia os *bits* da fonte em símbolos inteiros ou complexos. São exemplos de mapeamentos, $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$ ou $\{00, 01, 10, 11\} \rightarrow \{-1, +1, -i, +i\}$. Este último mapeamento permite um aumento da eficiência espectral do sistema, porém produz aumento do número de símbolos gerados, tendo como consequência um aumento do número de pontos da constelação de sinais. Esta situação é analisada mais adiante.

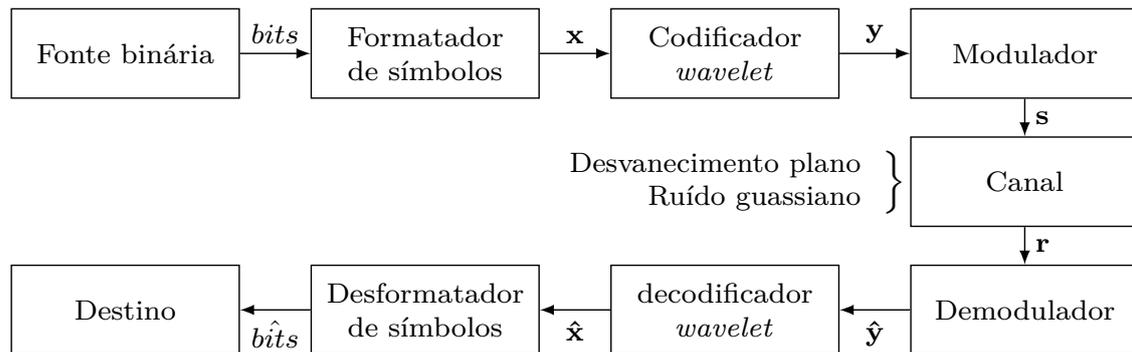


Figura 1 – Diagrama em blocos de um sistema de comunicação com codificação de canal por matrizes *wavelet*.

De modo genérico, m símbolos de entrada do codificador *wavelet* multiplicam as m linhas da matriz de codificação: o primeiro símbolo de entrada (x_0) multiplica os elementos da primeira linha de \mathbf{A} , o segundo símbolo de entrada (x_1) multiplica a segunda linha e assim sucessivamente, até que o m -ésimo símbolo de entrada (x_m) multiplique os elementos da m -ésima linha. Num processo CWC, com taxa de codificação R , produz-se na saída m/R símbolos *wavelet* pela soma dos elementos das m/R colunas mais à esquerda da tabela de codificação (veja exemplos nas Tabelas 1, 2, 3). Continuando o processo de codificação, novos m símbolos de entrada multiplicarão as mesmas m linhas da matriz, só que desta vez, as linhas da tabela de codificação são deslocada em m/R posições para a direita e se repete o processo de multiplicação de m símbolos novos de entrada pelos elementos que compõem as m linhas da matriz. Os símbolos *wavelet* são obtidos pela soma dos elementos em cada coluna da tabela de codificação (TZANNES; TZANNES, 1992).

O processo de codificação *wavelet* de canal permite modificar a taxa de codificação proporcionalmente à superposição entre as linhas da tabela de codificação. Quando o deslocamento entre as linhas é mínimo, igual ao seu posto m , obtém-se taxa de codificação $R = 1$ (veja Tabela 1). Pode-se conseguir taxas de codificação menores (veja Tabelas 2 e 3) reduzindo a extensão da superposição entre as linhas da tabela de codificação, até o limite de $1/g$, caso em que não ocorre mais superposição de linhas (TZANNES; TZANNES, 1992), (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998). Neste extremo, a codificação *wavelet* de canal torna-se equivalente a um código de blocos. Por exemplo, se $m = 2$ e $g = 4$, pode-se obter taxas de codificação $R = 1, 1/2, 1/3$ e $1/4$ para deslocamentos de 2, 4, 6 e 8 posições, na tabela de

codificação, respectivamente. Nesta tese, por simplicidade, mas sem perder a generalidade, trabalha-se com valores pares para o gênero (g), a taxa de codificação (R) e o número de *bits* de informação (n_b) que formam os símbolos de entrada do codificador CWC.

As matrizes de codificação utilizadas nesta tese foram obtidas a partir da matriz de Haar 2×2 , pela aplicação do produto tensorial (apresentado na Sessão 2.1.2), que permite aumentar o número de linhas da matriz de codificação e da operação de extensão (apresentado na Sessão 2.1.3), que permite aumentar o número de colunas da matriz.

Seja a matriz de Haar 2×2 :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Pode-se ampliar a matriz 2×2 (Equação 3.4) para, por exemplo, 4×4 , através do produto tensorial apresentado na Sessão 2.1.2, da seguinte forma:

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Pode-se aumentar o número de colunas da matriz de Haar (Equação 3.4), pela aplicação do operador de extensão apresentado na Sessão 2.1.3.

Aplicando o processo de expansão sobre uma matriz de posto m e gênero g , produz-se uma matriz de posto m e gênero $4g$.

Seja uma matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ \vdots \\ a^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Desta forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^0 & -a^1 \\ a^0 & a^1 & -a^0 & a^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{m-2} & a^{m-1} & a^{m-2} & -a^{m-1} \\ a^{m-2} & a^{m-1} & -a^{m-2} & a^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Aplicando o processo de extensão sobre a Equação 3.4, obtém-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & a_5^0 & a_6^0 & a_7^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

cujo gênero inicialmente é estendido de 1 para 4.

Por esses processos, obtém-se as matrizes empregadas nesta tese: $CWC_{2 \times 8}$ ($m = 2$, $g = 4$), $CWC_{2 \times 32}$ ($m = 2$, $g = 16$), $CWC_{2 \times 128}$ ($m = 2$, $g = 64$), $CWC_{4 \times 16}$ ($m = 4$, $g = 4$), $CWC_{4 \times 64}$ ($m = 4$, $g = 16$) e $CWC_{4 \times 256}$ ($m = 4$, $g = 64$).

Para o caso em que $m = 2$, $g = 4$ e $R = 1$ (taxa de codificação unitária), o processo de codificação é ilustrado na Tabela 1. Na linha superior estão representados os instantes de sinalização. Na linha inferior estão indicadas as variáveis que representam os símbolos *wavelet* gerados.

Tabela 1 – Tabela de codificação *wavelet*, com matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de codificação $R = 1$. Denota-se por y_n o n -ésimo símbolo *wavelet* gerado pela soma dos elementos da coluna (TZANNES; TZANNES, 1992).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$x_0a_0^0$	$x_0a_1^0$	$x_0a_2^0$	$x_0a_3^0$	$x_0a_4^0$	$x_0a_5^0$	$x_0a_6^0$	$x_0a_7^0$			
$x_1a_0^1$	$x_1a_1^1$	$x_1a_2^1$	$x_1a_3^1$	$x_1a_4^1$	$x_1a_5^1$	$x_1a_6^1$	$x_1a_7^1$			
		$x_2a_0^0$	$x_2a_1^0$	$x_2a_2^0$	$x_2a_3^0$	$x_2a_4^0$	$x_2a_5^0$	$x_2a_6^0$	$x_2a_7^0$	
		$x_3a_0^1$	$x_3a_1^1$	$x_3a_2^1$	$x_3a_3^1$	$x_3a_4^1$	$x_3a_5^1$	$x_3a_6^1$	$x_3a_7^1$	
				$x_4a_0^0$	$x_4a_1^0$	$x_4a_2^0$	$x_4a_3^0$	$x_4a_4^0$	$x_4a_5^0$...
				$x_5a_0^1$	$x_5a_1^1$	$x_5a_2^1$	$x_5a_3^1$	$x_5a_4^1$	$x_5a_5^1$...
						$x_6a_0^0$	$x_6a_1^0$	$x_6a_2^0$	$x_6a_3^0$...
						$x_7a_0^1$	$x_7a_1^1$	$x_7a_2^1$	$x_7a_3^1$...
								$x_8a_0^0$	$x_8a_1^0$...
								$x_9a_0^1$	$x_9a_1^1$...
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	...

Observa-se que símbolos *wavelet* consecutivos, m a m , são 100% correlacionados entre si, pois portam informação dos mesmos símbolos de entrada (TZANNES; TZANNES, 1992). A correlação entre uma m -úpla de símbolos *wavelet* e as m -úplas subsequentes diminui gradualmente, até se tornar nula após mgR instantes de sinalização. Na Tabela 1 os símbolos *wavelet* y_0 e y_1 são 100% correlacionados e esta correlação com pares de símbolos consecutivos diminui a cada $m = 2$ símbolos, até que y_0 e y_1 tornam-se totalmente descorrelacionados com os símbolos y_8 e y_9 e seguintes.

3.1 Descrição algébrica da codificação *wavelet* de canal

Considere uma fonte binária independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) e equiprovável. Assim, um formatador de dados gera uma sequência de símbolos i.i.d. e equiprováveis $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Para descrever algebricamente o processo de codificação, expressa-se \mathbf{x} como uma série formal (SANTOS, 2014)

$$\mathbf{x}(D) = x_0 + x_1D + x_2D^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i D^i, \quad (3.10)$$

sendo que D representa um atraso ou operador de deslocamento. m símbolos de entrada são processados, serialmente, no codificador *wavelet*, por vez. Assim, considera-se uma conversão de serial para paralela destes símbolos, antes do processo de codificação. Desta forma, define-se m polinômios

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j(D) &\triangleq x_j + x_{m+j}D + x_{2m+j}D^2 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x_{im+j}D^i, \quad j \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o qual expressa os m símbolos de entrada $\{x_{im}, x_{im+1}, \dots, x_{(i+1)m-1}\}$, no instante i . Observa-se que

$$\mathbf{x}(D) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{x}_j(D^m)D^j. \quad (3.12)$$

De acordo com o processo de codificação, para expressar algebricamente os símbolos *wavelet* resultantes, considera-se a matriz de codificação *wavelet* $\mathbf{A}_{m \times mg}$ de posto m e gênero g , Equação 3.1, e, então, define-se uma matriz $m \times m/R$ de polinômios de grau $gR - 1$

$$\mathbf{A}(D) \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}}^0 D^k & \dots & \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}}^{m-1} D^k \\ \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}+1}^0 D^k & \dots & \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}+1}^{m-1} D^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}+\frac{m}{R}-1}^0 D^k & \dots & \sum_{k=0}^{gR-1} a_{\frac{km}{R}+\frac{m}{R}-1}^{m-1} D^k \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Assim, um vetor de m/R polinômios que possuem m/R símbolos *wavelet* devido aos m símbolos de entrada pode se dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0(D) \\ \mathbf{y}_1(D) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{m/R-1}(D) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(D) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(D) \\ \mathbf{x}_1(D) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{m-1}(D) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Por fim, realizando-se uma transformação de paralela para serial, a sequência de símbolos *wavelet* $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ pode ser obtida da Equação 3.14, como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(D) &= y_0 + y_1 D + y_2 D^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} y_i D^i \\ &= \sum_{j=0}^{m/R-1} \mathbf{y}_j (D^{m/R}) D^j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Combinando-se as Equações 3.11, 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15.

$$\mathbf{y}(D) = \sum_{j=0}^{\frac{m}{R}-1} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{gR-1} \sum_{i=0}^{\infty} a_{\frac{km}{R}+j}^l x_{im+l} D^{\frac{(k+i)m}{R}+j}. \quad (3.16)$$

Assim, o n -ésimo símbolo *wavelet* pode ser dado por

$$y_n = \sum_{\substack{n=\frac{(k+i)m}{R}+j \\ 0 \leq k < gR \\ i \geq 0 \\ 0 \leq j < \frac{m}{R}}} \sum_{l=0}^{m-1} a_{\frac{km}{R}+j}^l x_{im+l}. \quad (3.17)$$

Por inspeção da Equação 3.17, observa-se que cada símbolo *wavelet*, y_n , é derivado de uma combinação linear de mgR símbolos de entrada ponderados pelos coeficientes da matriz de codificação. Todos os m^2g coeficientes da matriz são empregados somente uma vez na equação dos $\frac{m}{R}$ símbolos *wavelet* derivados de um bloco com m símbolos de entrada.

Exemplo 1 (CWC 2×8 , com $R = 1$) Considere a matriz de codificação *wavelet* dada na Equação 3.9. A Tabela 1 apresenta o processo de codificação e a Figura 2 mostra o diagrama do codificador CWC para uma taxa de codificação unitária, $R = 1$.

A matriz de polinômios $\mathbf{A}(D)$ dada pela Equação 3.13 é, nesse caso

$$\mathbf{A}(D) = \begin{bmatrix} 1 + D + D^2 - D^3 & 1 + D - D^2 + D^3 \\ 1 - D + D^2 + D^3 & 1 - D - D^2 - D^3 \end{bmatrix}.$$

Assim, os símbolos *wavelet* podem ser expressos algebricamente, como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(D) &= \mathbf{y}_0(D^2) + \mathbf{y}_1(D^2)D \\ &= \begin{bmatrix} 1 + D^2 + D^4 - D^6 & 1 + D^2 - D^4 + D^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + x_2 D^2 + x_4 D^4 + \dots \\ x_1 + x_3 D^2 + x_5 D^4 + \dots \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 - D^2 + D^4 + D^6 & 1 - D^2 - D^4 - D^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + x_2 D^2 + x_4 D^4 + \dots \\ x_1 + x_3 D^2 + x_5 D^4 + \dots \end{bmatrix} D \\ &= x_0 + x_1 + (x_0 + x_1)D + (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)D^2 + (-x_0 - x_1 + x_2 + x_3)D^3 + \\ &\quad (x_0 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)D^4 + (x_0 - x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5)D^5 + \dots \end{aligned}$$

Exemplo 2 (WCC 2×8 , com $R = 1/2$) Considere a matriz de codificação dada na Equação 3.9. A Tabela 2 apresenta o processo de codificação e a Figura 3 mostra o diagrama do codificador, com taxa de codificação $R = 1/2$.

A matriz de polinômios $\mathbf{A}(D)$ dada pela Equação 3.13, neste caso é

$$\mathbf{A}(D) = \begin{bmatrix} 1 + D & 1 - D \\ 1 + D & 1 - D \\ 1 - D & 1 + D \\ -1 + D & -1 - D \end{bmatrix}.$$

Assim, os símbolos wavelet podem ser algebricamente expressos, como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(D) &= \mathbf{y}_0(D^4) + \mathbf{y}_1(D^4)D + \mathbf{y}_2(D^4)D^2 + \mathbf{y}_3(D^4)D^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + D^4 & 1 - D^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^4 + \dots \\ x_1 + x_3D^4 + \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + D^4 & 1 - D^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^4 + \dots \\ x_1 + x_3D^4 + \dots \end{bmatrix} D + \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 - D^4 & 1 + D^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^4 + \dots \\ x_1 + x_3D^4 + \dots \end{bmatrix} D^2 + \begin{bmatrix} -1 + D^4 & -1 - D^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^4 + \dots \\ x_1 + x_3D^4 + \dots \end{bmatrix} D^3 \\ &= x_0 + x_1 + (x_0 + x_1)D + (x_0 + x_1)D^2 + (-x_0 - x_1)D^3 + (x_0 - x_1 + x_2 + x_3)D^4 + \\ &\quad (x_0 - x_1 + x_2 + x_3)D^5 + (-x_0 + x_1 + x_2 + x_3)D^6 + (x_0 - x_1 - x_2 - x_3)D^7 + \dots \end{aligned}$$

Exemplo 3 (WCC 2×8 , com $R = 1/4$) Considere a matriz de codificação dada pela Equação 3.9. A Tabela 3 apresenta o processo de codificação e a Figura 4 mostra o diagrama do codificador, com taxa de codificação $R = 1/4$.

A matriz de polinômios $\mathbf{A}(D)$ dada pela Equação 3.13, neste caso é

$$\mathbf{A}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os símbolos wavelet podem ser algebricamente expressos, como

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(D) &= \mathbf{y}_0(D^8) + \mathbf{y}_1(D^8)D + \mathbf{y}_2(D^8)D^2 + \mathbf{y}_3(D^8)D^3 + \mathbf{y}_4(D^8)D^4 + \mathbf{y}_5(D^8)D^5 + \\
&\quad \mathbf{y}_6(D^8)D^6 + \mathbf{y}_7(D^8)D^7 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^8 + \dots \\ x_1 + x_3D^8 + \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^8 + \dots \\ x_1 + x_3D^8 + \dots \end{bmatrix} D + \dots + \\
&\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^8 + \dots \\ x_1 + x_3D^8 + \dots \end{bmatrix} D^6 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2D^8 + \dots \\ x_1 + x_3D^8 + \dots \end{bmatrix} D^7 \\
&= x_0 + x_1 + (x_0 + x_1)D + (x_0 + x_1)D^2 + (-x_0 - x_1)D^3 + (x_0 - x_1)D^4 + (x_0 - x_1)D^5 + \\
&\quad (-x_0 + x_1)D^6 + (x_0 - x_1)D^7 + (x_2 + x_3)D^8 + (x_2 + x_3)D^9 + (x_2 + x_3)D^{10} + \dots
\end{aligned}$$

Uma observação importante sobre o processo de codificação CWC é que os diagramas de codificadores para a mesma matriz de codificação, com taxas de codificação diferentes, apenas diferem no número de saídas (somadores) e registradores. Os coeficientes da matriz permanecem os mesmos, mas com conexões diferentes. Essa característica sugere o emprego do CWC em sistemas de comunicação onde a adaptabilidade às condições do canal é desejada.

3.2 Distribuição de probabilidades de símbolos wavelet

Considerando uma matriz de codificação wavelet de posto m e gênero g , taxa de codificação $R = 1$ e formatação dos dados com $n_b = 1$ bit/símbolo (Tabela 4), então há

$$N_s = mgR + 1 \quad (3.18)$$

símbolos wavelet inteiros possíveis

$$y_n \in \{-mgR, -mgR + 2, \dots, 0, 2, \dots, mgR\}. \quad (3.19)$$

Se $n_b > 1$, os símbolos de entrada do codificador wavelet são complexos, conseqüentemente os símbolos wavelet gerados também são. Na formatação dos dados proposta (Tabela 4), considera-se somente valores pares de $n_b > 1$. Contudo, valores ímpares são viáveis. Nesse caso

$$\begin{aligned}
\text{Re } \{y_n\}, \text{Im } \{y_n\} &\in \left\{ -mgR \left(2^{n_b/2} - 1 \right), \right. \\
&\quad \left. -mgR \left(2^{n_b/2} - 1 \right) + 2, \dots, mgR \left(2^{n_b/2} - 1 \right) \right\}, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

então há

$$N_s = \left[mgR \left(2^{n_b/2} - 1 \right) + 1 \right]^2 \quad (3.21)$$

símbolos wavelet complexos possíveis.

Se os símbolos de entrada são i.i.d. os valores obtidos das Equações 3.19 e 3.20 são distribuídos binomialmente (TZANNES; TZANNES, 1992). Assim, para $n_b = 1$, os símbolos

wavelet produzidos $\{y_n\}$ tem uma distribuição de probabilidade

$$P[y_n = 2k - mgR(2^{n_b} - 1)] = \binom{mgR(2^{n_b} - 1)}{k} \frac{1}{2^{mgR(2^{n_b} - 1)}}, \quad (3.22)$$

sendo $0 \leq k \leq mgR(2^{n_b} - 1)$. Se $n_b = 2$, desde que $\text{Re}\{y_n\}$ e $\text{Im}\{y_n\}$ são independentes entre si, então

$$P\left\{y_n = 2k - mgR(2^{n_b/2} - 1) + j[2l - mgR(2^{n_b/2} - 1)]\right\} = \binom{mgR(2^{n_b/2} - 1)}{k} \binom{mgR(2^{n_b/2} - 1)}{l} \frac{1}{2^{2mgR(2^{n_b/2} - 1)}}, \quad (3.23)$$

sendo que $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, $0 \leq k \leq mgR(2^{n_b/2} - 1)$ e $0 \leq l \leq mgR(2^{n_b/2} - 1)$.

Quando os *bits* da fonte 0 e 1 são representados pelos símbolos -1 e $+1$, respectivamente, a Equação 3.17 produz um símbolo y_n que assume algum dos $mg + 1$ valores do conjunto $\{-mg, -mg + 2, \dots, -2, 0, 2, \dots, mg - 2, mg\}$. Quando os *bits* da fonte são equiprováveis, esses símbolos *wavelet* apresentam distribuição de probabilidade dada por (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998)

$$P(y_n = 2k - mg) = \binom{mg}{k} 0,5^{mg}, \quad 0 \leq k \leq mg, \quad (3.24)$$

sendo que os símbolos *wavelet* têm média nula e variância igual a mg .

3.3 Codificador *wavelet* (máquina de estados)

O mecanismo de codificação *wavelet* pode ser deduzido diretamente do processo, conforme apresentado nas tabelas de codificação (Tabelas 1, 2 e 3). Por observação, nos diversos casos, pode-se deduzir regra analítica que preveja a estrutura de um codificador *wavelet*. Assim, para um código CWC com taxa de codificação R , derivado de uma matriz *wavelet* de posto m e gênero g , a estrutura do codificador pode ser obtida, empiricamente, mediante a equação de divisão

$$mg = q \frac{m}{R} + r, \quad (3.25)$$

sendo q o quociente e r o resto da divisão entre o número de colunas da matriz de codificação (mg) por m/R , que representa o salto do deslocamento para a direita das linhas da tabela de codificação, a cada intervalo de sinalização do codificador. Observa-se que o codificador consiste de m/R correlatores, cada um produzindo um símbolo *wavelet* de saída, a cada intervalo de sinalização.

O codificador CWC ilustrado na Figura 2 foi desenvolvido a partir da tabela de codificação (Tabela 1). O codificador CWC recebe dois símbolos na entrada x_{n-1} e x_n , possui seis registradores com informações sobre o estado do sistema, x_{n-2} a x_{n-7} , duas unidades Σ que representam somadores decimais (correlatores) e as unidades a_j^i que representam

os coeficientes da matriz de codificação, gerando dois símbolos *wavelet* na saída, y_{n-1} e y_n . Os dois correlatores empregam os oito coeficientes da matriz de codificação *wavelet*. Para identificar quais os coeficientes são empregados em cada correlator, considera-se o instante a partir do qual o codificador entra em regime, o que ocorre a partir da sexta coluna na Tabela 1, quando se realiza o primeiro ciclo da máquina.

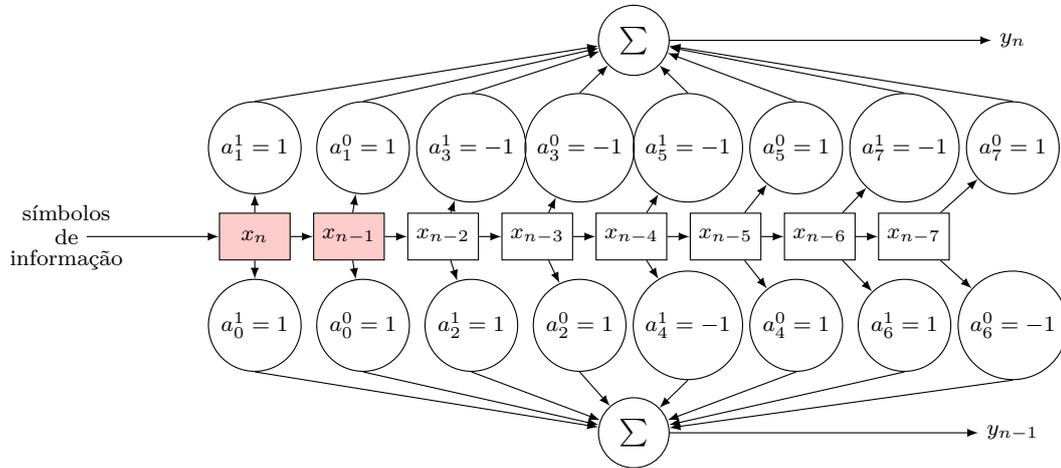


Figura 2 – Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e dois símbolos de saída a cada instante).

A Tabela 2 e a Figura 3 ilustram o processo de codificação para uma matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$, com taxa de codificação $R = 1/2$. O codificador CWC recebe dois símbolos de entrada x_{n-1} e x_n gerando quatro símbolos *wavelet* na saída y_{2n+1} , y_{2n} , y_{2n-1} e y_{2n-2} . Nesse caso, há dois registradores com informação sobre o estado do sistema, x_{n-2} e x_{n-3} . As unidades Σ representam somadores decimais e as unidades a_j^i representam os coeficientes de multiplicação que são os elementos da matriz de codificação e n é o instante de sinalização.

Tabela 2 – CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/2$. Quatro símbolos *wavelet* y_{2n+1} , y_{2n} , y_{2n-1} e y_{2n-2} são gerados a partir do par de símbolos de entrada (x_n, x_{n-1}) .

0	1	2	3	4	5	6	7	...
$x_0 a_0^0$	$x_0 a_1^0$	$x_0 a_2^0$	$x_0 a_3^0$	$x_0 a_4^0$	$x_0 a_5^0$	$x_0 a_6^0$	$x_0 a_7^0$	
$x_1 a_0^1$	$x_1 a_1^1$	$x_1 a_2^1$	$x_1 a_3^1$	$x_1 a_4^1$	$x_1 a_5^1$	$x_1 a_6^1$	$x_1 a_7^1$	
				$x_2 a_0^0$	$x_2 a_1^0$	$x_2 a_2^0$	$x_2 a_3^0$	$x_2 a_4^0$
				$x_3 a_0^1$	$x_3 a_1^1$	$x_3 a_2^1$	$x_3 a_3^1$	$x_3 a_4^1$
								$x_4 a_0^0$
								$x_5 a_0^1$
\vdots								
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	...

A Tabela 3 e a Figura 4 ilustram o processo de codificação para uma matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/4$. O codificador CWC recebe dois

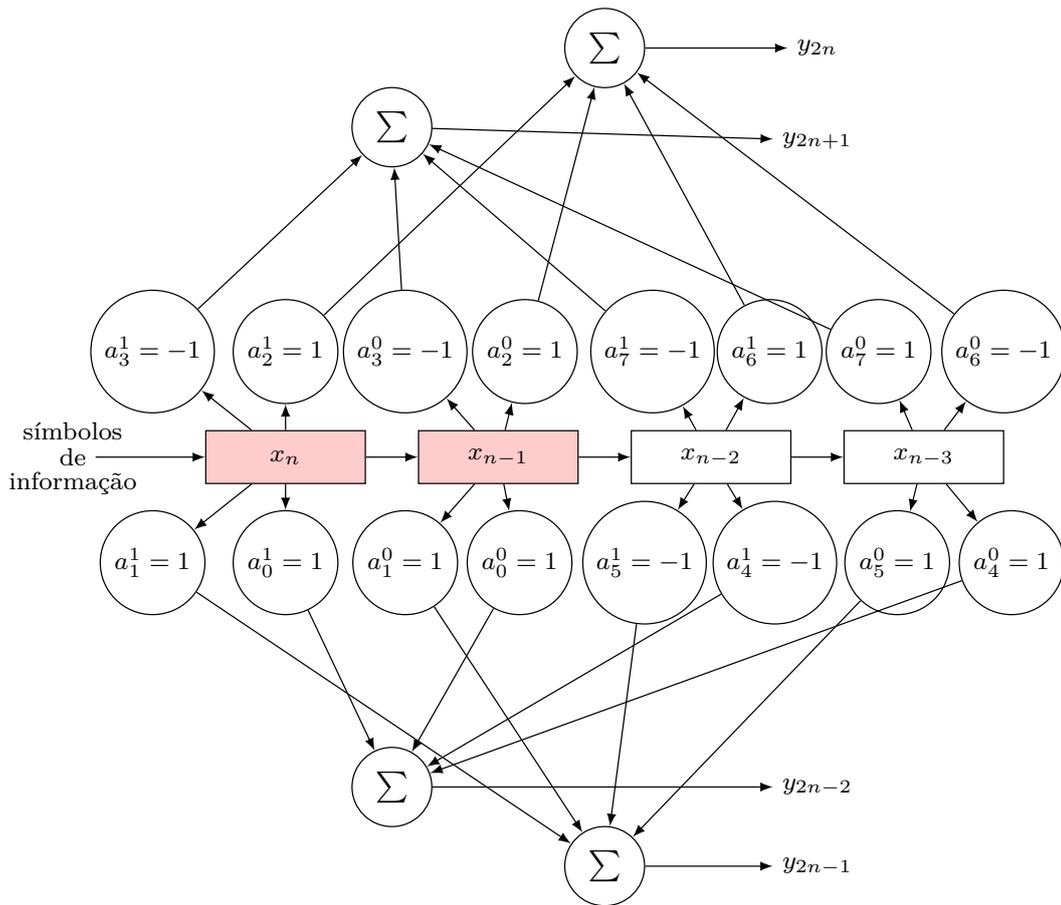


Figura 3 – Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/2$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e quatro símbolos de saída a cada instante).

símbolos de entrada x_{n-1} e x_n gerando oito símbolos *wavelet* na saída $y_{4n-4}, y_{4n-3}, \dots, y_{4n+2}$ e y_{4n+3} . Nesse caso, as saídas não são função do estado do codificador, dependem apenas das entradas atuais do sistema. As unidades Σ representam somadores decimais e as unidades a_j^i representam os coeficientes de multiplicação que são os elementos da matriz de codificação e n é o instante de sinalização.

Tabela 3 – CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/4$. Oito símbolos *wavelet* $y_{4n-4}, y_{4n-3}, \dots, y_{4n+2}$ e y_{4n+3} são gerados a partir do par de símbolos de entrada (x_n, x_{n-1}) .

...	5	6	7	8	9	10	11	...
...	$x_0 a_5^0$	$x_0 a_6^0$	$x_0 a_7^0$					
...	$x_1 a_5^1$	$x_1 a_6^1$	$x_1 a_7^1$					
				$x_2 a_0^0$	$x_2 a_1^0$	$x_2 a_2^0$	$x_2 a_3^0$...
				$x_3 a_0^1$	$x_3 a_1^1$	$x_3 a_2^1$	$x_3 a_3^1$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
...	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	...

3.4 Eficiência espectral

Esta seção discute constelações empregadas no estudo da codificação *wavelet* de canal.

Um aumento na cardinalidade dos símbolos de entrada do codificador *wavelet* e no comprimento de restrição do código produz forte impacto sobre a cardinalidade do conjunto de símbolos *wavelet* e conseqüentemente sobre a cardinalidade da constelação de sinais de transmissão.

Quando a taxa de codificação é unitária, uma modulação trivial que mapeia biunivocamente cada símbolo *wavelet* num sinal de constelação proporciona eficiência espectral de 1 *bits/s/Hz* (RESNIKOFF; WELLS JR., 1998). Objetivando melhorar essa eficiência, Santos, Gurjao e Assis (2013) propuseram um método para aumentá-la para 2 *bits/s/Hz*, com $R = 1$, construindo uma constelação de sinais a partir de pares de símbolos *wavelet* inteiros consecutivos. Esses pares de símbolos foram associados a pontos no espaço de sinais \mathbb{R}^2 formando uma constelação para transmissão. Nessa constelação, pontos de maior probabilidade correspondem a sinais de menor energia. Em Fonseca Neto et al. (2015) foi desenvolvido trabalho para otimizar a constelação proposta por Santos, Gurjao e Assis (2013) e os resultados obtidos sugerem que essa constelação gerada já é ótima. Desta forma, o trabalho de Santos, Gurjao e Assis (2013) permitiu aumentar a eficiência espectral de sistemas CWC, com taxa de codificação unitária, de 1 para 2 *bits/s/Hz*. Esse método proposto em Santos, Gurjao e Assis (2013) poderia ser generalizado para blocos de comprimento maiores do que dois para alcançar uma eficiência espectral arbitrária, no entanto, o mapeamento de bloco de símbolos *wavelet* (maiores do que dois) para sinal não seria tão simples como no caso de pares de símbolos.

Nesta tese, diferentemente da proposição de Santos, Gurjao e Assis (2013), busca-se aumentar a eficiência espectral, original de 1 *bits/s/Hz*, quando R é unitária, empregando uma formatação dos dados antes da codificação *wavelet*. Neste caso, uma sequência de $n_b > 1$ bits da fonte são mapeadas em símbolos 2^{n_b} -ários complexos, como numa sinalização 2^{n_b} -QAM (quando $n_b = 1$, a constelação torna-se semelhante a uma sinalização PAM). As sequências de símbolos 2^{n_b} -ários ($n_b > 1$) são, então, processadas pelo codificador CWC gerando símbolos *wavelet* complexos. Cada símbolo complexo gerado é considerado como um sinal para transmissão, resultando numa constelação similar àquela gerada pelo método proposto por Santos, Gurjao e Assis (2013). Essa constelação nova, assim gerada, para um sistema CWC, com taxa de codificação R , que emprega formatação de fonte com n_b bits, apresenta eficiência espectral de $n_b R$ *bits/s/Hz*. Desta forma, realizou-se, pela primeira vez, a codificação de símbolos *wavelet*, com constelação de ordem 4. Contudo, uma consequência negativa dessa abordagem é que há um crescimento exponencial da cardinalidade da constelação com algum aumento de eficiência espectral, uma vez que o número de possíveis símbolos *wavelet* na Equação 3.21 aumenta com $2^{n_b} R^2$, no caso de $n_b > 1$.

3.5 Funções geradoras de probabilidade

No método de construção de constelação a partir de pares de símbolos *wavelet* inteiros consecutivos, com $R = 1$ e $n_b = 1$, proposto por Santos, Gurjao e Assis (2013) foi deduzida uma função geradora de probabilidade para uma sequência de símbolos *wavelet*, com a qual se consegue prever os pares de símbolos inteiros gerados pelo codificador *wavelet* e a distribuição de probabilidade conjunta desses símbolos. Nesta tese, expande-se a aplicação dessa função geradora de probabilidade para identificar os símbolos *wavelet* gerados e suas respectivas probabilidades de ocorrência para as taxas de codificação aqui empregadas ($R = 1$, $R = 1/2$ e $R = 1/4$), cujos símbolos de entrada do codificador tem aumento da cardinalidade de dois ou quatro *bits* ($n_b = 2$ e $n_b = 4$). Utiliza-se também a função geradora de probabilidade para obter a energia média da constelação de sinais, como será visto na seção 3.5.4.4.

3.5.1 A PGF para os símbolos de entrada do codificador CWC

A função geradora de probabilidade $G_{\mathbf{X}}(z)$, (PGF, do inglês *probability generating function*), de uma variável aleatória discreta \mathbf{X} é dada por (GUBNER, 2006)

$$G_{\mathbf{X}}(z) \triangleq \mathbb{E} [z^{\mathbf{X}}] = \sum_i z^{x_i} P(\mathbf{X} = x_i). \quad (3.26)$$

Para encontrar a PGF de símbolos *wavelet*, primeiramente determina-se a PGF para os símbolos \mathbf{x} de entrada do codificador CWC (Figura 1). Considera-se uma fonte binária i.i.d. com *bits* equiprováveis e como uma consequência, o formatador de dados produz símbolos de entrada do codificador *wavelet* também i.i.d.. A PGF do n -ésimo símbolo de entrada x_n é

$$\begin{aligned} G_{x_n}(z) &\triangleq \mathbb{E} [z^{x_n}] = \sum_i z^{\alpha_i} P(x_n = \alpha_i) \\ &= \frac{1}{2^{n_b}} \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} z^{\alpha_i}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

sendo que $\{\alpha_i\}$ é o conjunto de todos os possíveis símbolos de entrada.

Considerando-se uma fonte binária equiprovável, os símbolos produzidos pela formatação dos *bits* da fonte também são equiprováveis. Portanto, da Equação 3.26, a PGF de um símbolo x_n de entrada do codificador *wavelet* é dada por:

- Quando $n_b = 1$, tem-se

$$G_{x_n}(z) = \frac{1}{2}(z^1 + z^{-1}); \quad (3.28)$$

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{x_n}(z) = \frac{1}{2^2} [(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j})]; \quad (3.29)$$

Tabela 4 – Formatação dos *bits* de informação antes da codificação *wavelet*, na qual seqüências de n_b bits da fonte são mapeadas em símbolos 2^{n_b} -ários, com codificação Gray.

$n_b = 1$		$n_b = 2$		$n_b = 4$	
0	-1	00	$-1 - j$	0000	$-3 - 3j$
1	1	01	$-1 + j$	0001	$-3 - j$
		10	$1 - j$	0010	$-3 + j$
		11	$1 + j$	0011	$-3 + 3j$
				0100	$-1 - 3j$
				0101	$-1 - j$
				0110	$-1 + j$
				0111	$-1 + 3j$
				1000	$1 - 3j$
				1001	$1 - j$
				1010	$1 + j$
				1011	$1 + 3j$
				1100	$3 - 3j$
				1101	$3 - j$
				1110	$3 + j$
				1111	$3 + 3j$

- Quando $n_b = 4$, tem-se

$$G_{x_n}(z) = \frac{1}{2^4} \left[(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + (z^{3+j} + z^{-3-j}) + (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j}) \right]. \quad (3.30)$$

Os expoentes da variável z nas PGF indicam os símbolos x_n e as constantes que multiplicam cada termo informam a probabilidade de cada símbolo correspondente. Nas equações acima, pode-se observar que todos os símbolos são equiprováveis.

3.5.2 A PGF para os símbolos *wavelet*

Se y_n é o n -ésimo símbolo *wavelet* gerado pelo codificador, da Equação 3.17,

$$G_{y_n}(z) \triangleq \mathbb{E}[z^{y_n}] = \mathbb{E} \left[z^{\sum_{i,j,k,l} a_{km+j}^l x_{im+l}} \right]. \quad (3.31)$$

Como os símbolos de entrada são independentes,

$$G_{y_n}(z) = \prod_{i,j,k,l} \mathbb{E} \left[z^{a_{km+j}^l x_{im+l}} \right] = \prod_{i,j,k,l} G_{x_{im+l}} \left(z^{a_{km+j}^l} \right). \quad (3.32)$$

Como os símbolos de entrada são também equiprováveis e cada símbolo *wavelet* é uma função de mgR símbolos de entrada ponderados pelos coeficientes da matriz de codificação, cujos

valores são +1 ou -1, pode-se encontrar que

$$G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{mgRn_b}} \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} z^{\alpha_i} \right)^{mgR}, \quad (3.33)$$

sendo que $\{\alpha_i\}$ é o conjunto de todos os possíveis símbolos de entrada. Aplicando o teorema multinomial ¹ para resolver a potência do somatório na Equação 3.33,

$$G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{mgRn_b}} \sum_{k_0+\dots+k_{2^{n_b}-1}=mgR} \binom{mgR}{k_0, \dots, k_{2^{n_b}-1}} z^{\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} k_i \alpha_i}. \quad (3.34)$$

3.5.3 Cálculo de PGF para símbolos wavelet complexos

3.5.3.1 Caso $m = 2$ e $g = 4$

Sendo a matriz de codificação de posto 2 e gênero 4 dada por

$$\mathbf{A}_{2 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

3.5.3.1.1 Para $R = 1$, com símbolos wavelet complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados dois símbolos wavelet na saída do codificador wavelet

$$y_{n-1} = a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_2^1 x_{n-2} + a_2^0 x_{n-3} + a_4^1 x_{n-4} + a_4^0 x_{n-5} + a_6^1 x_{n-6} + a_6^0 x_{n-7}, \quad (3.36)$$

$$y_n = a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_3^1 x_{n-2} + a_3^0 x_{n-3} + a_5^1 x_{n-4} + a_5^0 x_{n-5} + a_7^1 x_{n-6} + a_7^0 x_{n-7}. \quad (3.37)$$

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{y_{n-1}}(z) = E \left[z^{a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_2^1 x_{n-2} + a_2^0 x_{n-3} + a_4^1 x_{n-4} + a_4^0 x_{n-5} + a_6^1 x_{n-6} + a_6^0 x_{n-7}} \right]$$

e

$$G_{y_n}(z) = E \left[z^{a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_3^1 x_{n-2} + a_3^0 x_{n-3} + a_5^1 x_{n-4} + a_5^0 x_{n-5} + a_7^1 x_{n-6} + a_7^0 x_{n-7}} \right].$$

Considerando a matriz $\mathbf{A}_{2 \times 8}$ (Equação 3.35) e símbolos de entrada independentes, obtém-se

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{x_n}(z) G_{x_{n-1}}(z) G_{x_{n-2}}(z) G_{x_{n-3}}(z) G_{x_{n-4}}(z^{-1}) G_{x_{n-5}}(z) G_{x_{n-6}}(z) G_{x_{n-7}}(z^{-1}) \quad (3.38)$$

¹ é uma generalização do teorema binomial,

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{i=1}^m x_i^{k_i},$$

sendo $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ é o chamado coeficiente multinomial

e

$$G_{y_n}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z^{-1}) \\ G_{x_{n-4}}(z^{-1})G_{x_{n-5}}(z)G_{x_{n-6}}(z^{-1})G_{x_{n-7}}(z). \quad (3.39)$$

Como já dito, busca-se aumentar a eficiência espectral dos sistemas CWC aumentando o número de *bits* da fonte para formar os símbolos de entrada do codificador *wavelet*. Assim, considerando símbolos de entrada igualmente distribuídos, das Equações 3.28, 3.29 e 3.30

- Quando $n_b = 1$, na Tabela 1

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^8} [(z^1 + z^{-1})]^8; \quad (3.40)$$

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{16}} [(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j})]^8; \quad (3.41)$$

- Quando $n_b = 4$, tem-se

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{32}} [(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + (z^{3+j} + z^{-3-j}) + \\ (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + \\ (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j})]^8. \quad (3.42)$$

Potências de somas de termos, como nas Equações 3.41 e 3.42, ocorrem em todas as equações das PGF deduzidas e podem ser resolvidas empregando o teorema multinomial.

A Figura 5 apresenta as constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades referentes às PGF das Equações 3.40 a 3.42.

3.5.3.1.2 Para $R = 1/2$, com símbolos *wavelet* complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados quatro símbolos *wavelet* na saída do codificador *wavelet*

$$y_{n-3} = a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_4^1 x_{n-2} + a_4^0 x_{n-3}, \quad (3.43)$$

$$y_{n-2} = a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_5^1 x_{n-2} + a_5^0 x_{n-3}, \quad (3.44)$$

$$y_{n-1} = a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_6^1 x_{n-2} + a_6^0 x_{n-3}, \quad (3.45)$$

$$y_n = a_3^1 x_n + a_3^0 x_{n-1} + a_7^1 x_{n-2} + a_7^0 x_{n-3}. \quad (3.46)$$

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{y_{n-3}}(z) = E [z^{a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_4^1 x_{n-2} + a_4^0 x_{n-3}}],$$

$$G_{y_{n-2}}(z) = E [z^{a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_5^1 x_{n-2} + a_5^0 x_{n-3}}],$$

$$G_{y_{n-1}}(z) = E [z^{a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_6^1 x_{n-2} + a_6^0 x_{n-3}}],$$

$$G_{y_n}(z) = E [z^{a_3^1 x_n + a_3^0 x_{n-1} + a_7^1 x_{n-2} + a_7^0 x_{n-3}}].$$

Considerando a matriz $\mathbf{A}_{2 \times 8}$ (Equação 3.35) e símbolos de entrada independentes, obtém-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z), \quad (3.47)$$

$$G_{y_{n-2}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z), \quad (3.48)$$

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z^{-1}), \quad (3.49)$$

$$G_{y_n}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z). \quad (3.50)$$

Considerando símbolos de entrada igualmente distribuídos, das Equações 3.28, 3.29 e 3.30

- Quando $n_b = 1$, na Tabela 1, tem-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^4} [(z^1 + z^{-1})]^4; \quad (3.51)$$

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^8} [(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j})]^4; \quad (3.52)$$

- Quando $n_b = 4$, tem-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{16}} [(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + (z^{3+j} + z^{-3-j}) + (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j})]^4. \quad (3.53)$$

A Figura 6 apresenta as constelações de sinais e curvas de distribuição de probabilidades *wavelet* correspondentes às PGF das Equações 3.52 e 3.53.

3.5.3.1.3 Para $R = 1/4$, com símbolos *wavelet* complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Como um dos objetivos principais desta tese é aumentar a eficiência espectral dos sistemas CWC e acima já foi demonstrado como são realizados os cálculos considerando os símbolos de entrada como os próprios *bits* de informação, ou seja $n_b = 1$, a partir deste ponto, considera-se, apenas, os valores de $n_b = 2$ ou $n_b = 4$.

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados seis símbolos *wavelet* na saída do codificador *wavelet*

$$y_{n-7} = a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1}, \quad (3.54)$$

$$y_{n-6} = a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1}, \quad (3.55)$$

$$y_{n-5} = a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1}, \quad (3.56)$$

$$\vdots \quad (3.57)$$

$$y_n = a_7^1 x_n + a_7^0 x_{n-1}. \quad (3.58)$$

3.5.4.1.1 Para $R = 1$, com símbolos *wavelet* complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados dois símbolos *wavelet* na saída do codificador *wavelet*

$$y_{n-1} = a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_2^1 x_{n-2} + a_2^0 x_{n-3} + \cdots + a_{30}^1 x_{n-30} + a_{30}^0 x_{n-31}, \quad (3.66)$$

$$y_n = a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_3^1 x_{n-2} + a_3^0 x_{n-3} + \cdots + a_{31}^1 x_{n-30} + a_{31}^0 x_{n-31}. \quad (3.67)$$

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{y_{n-1}}(z) = E \left[z^{a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_2^1 x_{n-2} + a_2^0 x_{n-3} + \cdots + a_{30}^1 x_{n-30} + a_{30}^0 x_{n-31}} \right]$$

$$G_{y_n}(z) = E \left[z^{a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_3^1 x_{n-2} + a_3^0 x_{n-3} + \cdots + a_{31}^1 x_{n-30} + a_{31}^0 x_{n-31}} \right].$$

Considerando a matriz ($\mathbf{A}_{2 \times 32}$) da Equação 3.65 e símbolos de entrada sendo os *bits* da fonte ($n_b = 1$) independentes, obtém-se

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z) \cdots G_{x_{n-30}}(z)G_{x_{n-31}}(z^{-1}) \quad (3.68)$$

$$G_{y_n}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z^{-1}) \cdots G_{x_{n-30}}(z^{-1})G_{x_{n-31}}(z). \quad (3.69)$$

Considerando símbolos de entrada igualmente distribuídos, das Equações 3.29 e 3.30, tem-se, então,

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{64}} \left[(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) \right]^{32}; \quad (3.70)$$

- Quando $n_b = 4$, tem-se

$$\begin{aligned} G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{256}} & \left[(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + (z^{3+j} + z^{-3-j}) + \right. \\ & (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + \\ & \left. (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j}) \right]^{32}. \quad (3.71) \end{aligned}$$

A Figura 8 apresenta as constelações e curvas de distribuição de probabilidades correspondentes às PGF das Equações 3.70 a 3.71. Em razão da baixa probabilidade de ocorrência dos pontos localizados mais externamente, verifica-se, na Figura 8 (b), um arredondamento indevido. O formato da constelação continua sendo retangular.

3.5.4.1.2 Para $R = 1/2$, com símbolos *wavelet* complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados quatro símbolos *wavelet* na saída do codificador *wavelet*

$$y_{n-3} = a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_4^1 x_{n-2} + a_4^0 x_{n-3} + \cdots + a_{28}^1 x_{n-14} + a_{28}^0 x_{n-15}, \quad (3.72)$$

$$y_{n-2} = a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_5^1 x_{n-2} + a_5^0 x_{n-3} + \cdots + a_{29}^1 x_{n-14} + a_{29}^0 x_{n-15}, \quad (3.73)$$

$$y_{n-1} = a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_6^1 x_{n-2} + a_6^0 x_{n-3} + \cdots + a_{30}^1 x_{n-14} + a_{30}^0 x_{n-15}, \quad (3.74)$$

$$y_n = a_3^1 x_n + a_3^0 x_{n-1} + a_7^1 x_{n-2} + a_7^0 x_{n-3} + \cdots + a_{31}^1 x_{n-14} + a_{31}^0 x_{n-15}. \quad (3.75)$$

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$\begin{aligned} G_{y_{n-3}}(z) &= E \left[z^{a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_4^1 x_{n-2} + a_4^0 x_{n-3} + \dots + a_{28}^1 x_{n-14} + a_{28}^0 x_{n-15}} \right], \\ G_{y_{n-2}}(z) &= E \left[z^{a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_5^1 x_{n-2} + a_5^0 x_{n-3} + \dots + a_{29}^1 x_{n-14} + a_{29}^0 x_{n-15}} \right], \\ G_{y_{n-1}}(z) &= E \left[z^{a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_6^1 x_{n-2} + a_6^0 x_{n-3} + \dots + a_{30}^1 x_{n-14} + a_{30}^0 x_{n-15}} \right], \\ G_{y_n}(z) &= E \left[z^{a_3^1 x_n + a_3^0 x_{n-1} + a_7^1 x_{n-2} + a_7^0 x_{n-3} + \dots + a_{31}^1 x_{n-14} + a_{31}^0 x_{n-15}} \right]. \end{aligned}$$

Considerando a matriz \mathbf{A} (Equação 3.65) e símbolos de entrada independentes, obtém-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z) \dots G_{x_{n-14}}(z^{-1})G_{x_{n-15}}(z), \quad (3.76)$$

$$G_{y_{n-2}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z) \dots G_{x_{n-14}}(z^{-1})G_{x_{n-15}}(z), \quad (3.77)$$

$$G_{y_{n-1}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z^{-1}) \dots G_{x_{n-14}}(z)G_{x_{n-15}}(z^{-1}), \quad (3.78)$$

$$G_{y_n}(z) = G_{x_n}(z^{-1})G_{x_{n-1}}(z^{-1})G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z) \dots G_{x_{n-14}}(z^{-1})G_{x_{n-15}}(z). \quad (3.79)$$

Considerando símbolos de entrada igualmente distribuídos, das Equações 3.29 a 3.30, tem-se

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{y_{n-3}}(z) = G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{32}} \left[(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) \right]^{16}; \quad (3.80)$$

- Para $n_b = 4$, tem-se

$$\begin{aligned} G_{y_{n-3}}(z) = G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_{n-1}}(z) = G_{y_n}(z) &= \frac{1}{2^{64}} \left[(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + \right. \\ &(z^{3+j} + z^{-3-j}) + (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + \\ &\left. (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j}) \right]^{16}. \quad (3.81) \end{aligned}$$

A Figura 9 apresenta as constelações correspondentes às PGF das Equações 3.80 e 3.81.

3.5.4.1.3 Para $R = 1/4$, com símbolos wavelet complexos e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados seis símbolos wavelet na saída do codificador wavelet

$$\begin{aligned} y_{n-7} &= a_0^1 x_n + a_0^0 x_{n-1} + a_8^1 x_{n-2} + a_8^0 x_{n-3} + \\ &a_{16}^1 x_{n-4} + a_{16}^0 x_{n-5} + a_{24}^1 x_{n-6} + a_{24}^0 x_{n-7}, \quad (3.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n-6} &= a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_9^1 x_{n-2} + a_9^0 x_{n-3} + \\ &a_{17}^1 x_{n-4} + a_{17}^0 x_{n-5} + a_{25}^1 x_{n-6} + a_{25}^0 x_{n-7}, \quad (3.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{n-5} &= a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_{10}^1 x_{n-2} + a_{10}^0 x_{n-3} + \\
&\quad a_{18}^1 x_{n-4} + a_{18}^0 x_{n-5} + a_{26}^1 x_{n-6} + a_{26}^0 x_{n-7}, \quad (3.84) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_n &= a_7^1 x_n + a_7^0 x_{n-1} + a_{15}^1 x_{n-2} + a_{15}^0 x_{n-3} + \\
&\quad a_{23}^1 x_{n-4} + a_{23}^0 x_{n-5} + a_{31}^1 x_{n-6} + a_{31}^0 x_{n-7}. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-5}}(z) &= E \left[z^{a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_{10}^1 x_{n-2} + a_{10}^0 x_{n-3} + a_{18}^1 x_{n-4} + a_{18}^0 x_{n-5} + a_{26}^1 x_{n-6} + a_{26}^0 x_{n-7}} \right], \\
G_{y_{n-4}}(z) &= E \left[z^{a_1^1 x_n + a_1^0 x_{n-1} + a_9^1 x_{n-2} + a_9^0 x_{n-3} + a_{17}^1 x_{n-4} + a_{17}^0 x_{n-5} + a_{25}^1 x_{n-6} + a_{25}^0 x_{n-7}} \right], \\
G_{y_{n-3}}(z) &= E \left[z^{a_2^1 x_n + a_2^0 x_{n-1} + a_{10}^1 x_{n-2} + a_{10}^0 x_{n-3} + a_{18}^1 x_{n-4} + a_{18}^0 x_{n-5} + a_{26}^1 x_{n-6} + a_{26}^0 x_{n-7}} \right], \\
&\quad \vdots \\
G_{y_n}(z) &= E \left[z^{a_7^1 x_n + a_7^0 x_{n-1} + a_{15}^1 x_{n-2} + a_{15}^0 x_{n-3} + a_{23}^1 x_{n-4} + a_{23}^0 x_{n-5} + a_{31}^1 x_{n-6} + a_{31}^0 x_{n-7}} \right].
\end{aligned}$$

Considerando a matriz \mathbf{A} (Equação 3.65) e símbolos de entrada independentes, obtém-se

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-7}}(z) &= G_{y_{n-6}}(z) = G_{y_{n-5}}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z) \\
&\quad G_{x_{n-3}}(z)G_{x_{n-4}}(z^{-1})G_{x_{n-5}}(z)G_{x_{n-6}}(z)G_{x_{n-7}}(z^{-1}), \quad (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-4}}(z) &= G_{x_n}(z^{-1})G_{x_{n-1}}(z^{-1})G_{x_{n-2}}(z^{-1})G_{x_{n-3}}(z^{-1}) \\
&\quad G_{x_{n-4}}(z)G_{x_{n-5}}(z^{-1})G_{x_{n-6}}(z^{-1})G_{x_{n-7}}(z), \quad (3.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-3}}(z) &= G_{y_{n-2}}(z) = G_{y_n}(z) = G_{x_n}(z)G_{x_{n-1}}(z)G_{x_{n-2}}(z^{-1}) \\
&\quad G_{x_{n-3}}(z^{-1})G_{x_{n-4}}(z^{-1})G_{x_{n-5}}(z)G_{x_{n-6}}(z^{-1})G_{x_{n-7}}(z), \quad (3.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-1}}(z) &= G_{x_n}(z^{-1})G_{x_{n-1}}(z^{-1})G_{x_{n-2}}(z)G_{x_{n-3}}(z) \\
&\quad G_{x_{n-4}}(z)G_{x_{n-5}}(z^{-1})G_{x_{n-6}}(z)G_{x_{n-7}}(z^{-1}), \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Considerando símbolos de entrada igualmente distribuídos, das Equações 3.29 a 3.30, tem-se

- Quando $n_b = 2$, tem-se

$$G_{y_{n-7}}(z) = \dots = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{16}} \left[(z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) \right]^8; \quad (3.90)$$

- Quando $n_b = 4$, tem-se

$$\begin{aligned}
G_{y_{n-7}}(z) &= \dots = G_{y_n}(z) = \frac{1}{2^{32}} \left[(z^{3+3j} + z^{-3-3j}) + (z^{3+j} + z^{-3-j}) + \right. \\
&\quad (z^{3-j} + z^{-3+j}) + (z^{3-3j} + z^{-3+3j}) + (z^{1+3j} + z^{-1-3j}) + \\
&\quad \left. (z^{1+j} + z^{-1-j}) + (z^{1-j} + z^{-1+j}) + (z^{1-3j} + z^{-1+3j}) \right]^8. \quad (3.91)
\end{aligned}$$

A Figura 10 apresenta as constelações e curvas de distribuição de probabilidades correspondentes às PGF das Equações 3.90 e 3.91.

3.5.4.2 Caso de transmissão de pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com $m = 2$, $g = 4$ e $R = 1$ (SANTOS, 2014)

O trabalho desenvolvido por Santos (2014) apresentou somente o caso para a transmissão do par de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com taxa de codificação unitária ($R = 1$). Nesta tese, amplia-se os resultados de Santos (2014) para os casos com taxa de codificação $R = 1/2$ e $1/4$, além de trabalhar com símbolos *wavelet* complexos.

3.5.4.2.1 Para $R = 1$, com símbolos *wavelet* inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Para melhor compreensão do leitor, rerepresenta-se aqui o caso de Santos (2014), com pares de símbolos inteiros consecutivos $m = 2$, $g = 4$ e $R = 1$.

A matriz de codificação de posto 2 e gênero 4 dada pela Equação 3.35 é

$$\mathbf{A}_{2 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Denotando um par de símbolos *wavelet* consecutivos na forma $\mathbf{y}(D) = y_{n-1} + y_n D$, em que D representa um atraso de um intervalo de sinalização, a PGF de $\mathbf{y}(D)$ é definida como (SANTOS, 2014)

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{\mathbf{y}(D)} \right] = \mathbb{E} \left[z^{y_{n-1} + y_n D} \right]. \quad (3.92)$$

Substituindo as Equações 3.36 e 3.37 na Equação 3.92 e manipulando algebricamente o expoente de z a fim de evidenciar os símbolos de entrada x_i , obtém-se

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{(a_0^1 + a_1^1 D)x_n + (a_0^0 + a_1^0 D)x_{n-1} + (a_2^1 + a_3^1 D)x_{n-2} + (a_2^0 + a_3^0 D)x_{n-3} + (a_4^1 + a_5^1 D)x_{n-4} + (a_4^0 + a_5^0 D)x_{n-5} + (a_6^1 + a_7^1 D)x_{n-6} + (a_6^0 + a_7^0 D)x_{n-7}} \right].$$

Considerando a matriz de codificação ($\mathbf{A}_{2 \times 8}$) da Equação 3.35 e símbolos de entrada sendo os *bits* da fonte ($n_b = 1$) independentes, pode-se reescrever esta equação na forma

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = G_{x_n}(z^{1+D})G_{x_{n-1}}(z^{1+D})G_{x_{n-2}}(z^{-1+D})G_{x_{n-3}}(z^{-1+D})G_{x_{n-4}}(z^{-1-D})G_{x_{n-5}}(z^{1+D})G_{x_{n-6}}(z^{-1+D})G_{x_{n-7}}(z^{1-D}). \quad (3.93)$$

Considerando *bits* de entrada ($\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$) igualmente distribuídos, da Equação 3.28, tem-se,

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \frac{1}{2^8} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^4 \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^4. \quad (3.94)$$

A Equação 3.94 pode ser expandida aplicando o teorema multinomial. O resultado consiste em soma do tipo $\sum_i \sum_j f_{1,i} f_{2,j} z^{s_{1,i} + s_{2,j}}$, nas quais os expoentes $s_{1,i} + s_{2,j}$ são polinômios de 1º grau, em D , que representam pares de símbolos *wavelet* gerados pela codificação e as

constantes $f_{1,i}f_{2,j}$ correspondem às probabilidades de ocorrência dos respectivos pares de símbolos *wavelet*.

A Tabela 5 apresenta todos os pares de símbolos e as respectivas probabilidades de ocorrência obtidas neste caso.

Tabela 5 – Pares de símbolos wavelet (y_{n-1}, y_n) e suas respectivas probabilidades de ocorrência para codificação *wavelet* com $m = 2$, $g = 4$, $R = 1$ e formatação dos dados da fonte em $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$ (SANTOS; GURJAO; ASSIS, 2013).

Pares de símbolos <i>wavelet</i>	Prob. ($\times 2^{-8}$)
(0, 0)	36
(2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2)	24
(0, 4), (0, -4), (4, 0), (-4, 0)	16
(4, 4), (4, -4), (-4, 4), (-4, -4)	6
(2, 6), (6, 2), (2, -6), (-6, 2), (-2, 6), (6, -2), (-2, -6), (-6, -2)	4
(0, 8), (0, -8), (8, 0), (-8, 0)	1

A Figura 11 apresenta a constelação e curvas de distribuição de probabilidades correspondente à PGF da Equação 3.94.

3.5.4.2.2 Evidência numérica de que o mapeamento simples de Santos, Gurjao e Assis (2013) produz constelação ótima

A transmissão de dados binários de uma fonte equiprovável pode ser bem realizada por muitos esquemas de modulação e constelações de sinais usuais. Contudo, se os dados da fonte são não equiprováveis, essas constelações ordinárias não fornecem um desempenho ótimo. Em Moore (2009), foi proposto um método para obtenção de constelações de sinais ótimas ou sub-ótimas para fontes não equiprováveis. Propõe-se uma variação do método de Moore, na qual as propriedades de simetria da constelação CWC proposta por Santos, Gurjao e Assis (2013) são preservadas.

O critério de otimização adotado consiste na minimização da taxa de erro de símbolo (SER)(do inglês, *symbol error rate*), mantendo-se a energia média da constelação de sinal fixa e a média geométrica da constelação no ponto nulo. A detecção é baseada no critério de máxima probabilidade à posteriori (MAP) (do inglês, *maximum "a posteriori" probability*). Para canal AWGN, a SER não é influenciada pela rotação da constelação, mas é afetada pela mudança na distância relativa entre os pontos (MOORE, 2009).

3.5.4.2.3 O algoritmo modificado

A construção algébrica introduzida por Santos, Gurjao e Assis (2013) produz constelações cuja estrutura apresenta diversas simetrias e a condição de média nula ocorre naturalmente (veja Figura 11). Porém, restava uma pergunta: essas constelações são ótimas?

Modificou-se o algoritmo de Moore para otimizar as constelações geradas de modo a preservar as simetrias naturais das mesmas. Considerou-se que sinais de mesma energia formavam camadas esféricas ou cascas. Os sinais de mesma casca deveriam manter posição relativa invariante com os demais sinais dessa casca. O algoritmo modificado proposto seleciona aleatoriamente duas cascas distintas da constelação e altera suas energias, de modo a manter a energia média da constelação inalterada. Essa modificação em pares de cascas procede-se iterativamente até que o desempenho estimado da constelação a cada iteração não mais se modifique significativamente (FONSECA NETO et al., 2015).

A energia média da constelação é dada por

$$E = \sum_{i=1}^M p_i \|\vec{s}_i\|^2,$$

em que M é o número de sinais da constelação e p_i é a probabilidade de ocorrência de um sinal \vec{s}_i . Selecionadas duas cascas, o raio de uma delas é variado entre o valor do raio da camada superior e o da inferior. Com isso, para manter a energia média da constelação invariante, a segunda casca tem seu raio alterado. Os novos raios do par de cascas são determinados sob critério de otimização do desempenho estimado da constelação.

A avaliação do desempenho da constelação para cada novo par de cascas é feita minimizando a função objetivo da Equação 3.96 (MOORE, 2009). Na sequência, o algoritmo seleciona aleatoriamente novos pares de cascas e repete o processo até a constelação obtida se estabilizar, assim sendo considerada ótima ou sub-ótima.

Para estimar o desempenho do sistema baseado na constelação, é empregado o limitante superior para a SER (MOORE; TAKAHARA; ALAJAJI, 2009)

$$P_s \leq \sum_{u=1}^M \sum_{i \neq u} p(\epsilon_{iu}) p(\vec{s}_u), \quad (3.95)$$

em que ϵ_{iu} é o erro de decodificação de \vec{s}_i quando \vec{s}_u for transmitido e

$$P(\epsilon_{iu}) = Q\left(\frac{\|\vec{s}_i - \vec{s}_u\|}{\sqrt{2N_0}} + \frac{\sqrt{2N_0} \ln \frac{p(\vec{s}_u)}{p(\vec{s}_i)}}{2\|\vec{s}_i - \vec{s}_u\|}\right),$$

em que $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$. O limitante da Equação 3.95 é mais preciso para valores médios e altos da relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio* (SNR)) e impreciso para baixa SNR.

Considerando um par de cascas selecionadas, por exemplo 1 e 2, pode-se descartar na Equação 3.95 os termos referentes aos pontos não contidos nessas cascas selecionadas, uma vez que são considerados fixos. Para calcular o limitante superior, os termos restantes na Equação 3.95 definem uma função objetivo F , a seguir, que deve ser minimizada para cada par de cascas selecionadas (MOORE; TAKAHARA; ALAJAJI, 2009):

$$F = \sum_{i \neq 1} p(\epsilon_{i1}) p(\vec{s}_1) + \sum_{i \neq 2} p(\epsilon_{i2}) p(\vec{s}_2) + \sum_{u=3}^M [p(\epsilon_{1u}) + p(\epsilon_{2u})] p(\vec{s}_u) \quad (3.96)$$

Observou-se que a rotação da constelação não modifica o desempenho. Observou-se também que a translação de pontos individuais da constelação resultava em perda de simetria ou reduzia o desempenho do sistema. Por essa razão, a fim de preservar a simetria natural dos pontos da constelação, eles foram agrupados em cascas, definida como grupo dos sinais com mesma energia. Desta forma, em cada iteração, cascas foram submetidas a expansão e contração.

A aplicação do algoritmo modificado produziu constelações minimamente diferentes da constelação inicial (construída algebricamente), mesmo depois de exaustivas iterações, pela adoção de critérios rígidos de parada. Esses resultados obtidos reforçam a conjectura de que a constelação inicial é de fato ótima, de acordo com os critérios de otimização adotados. Esses resultados indicam, ainda, que para modulações multidimensionais, baseadas em blocos de comprimento $N > 2$, as constelações geradas pela metodologia proposta por Santos, Gurjao e Assis (2013) sejam ótimas, sob as mesmas condições.

3.5.4.2.4 Para $R = 1/2$, com símbolos wavelet inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados dois pares de símbolos wavelet na saída do codificador wavelet $\mathbf{y}_1(D) = y_{n-1} + y_n D$ e $\mathbf{y}_0(D) = y_{n-3} + y_{n-2} D$.

Desenvolvendo os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-3} + y_{n-2} D} \right], \quad (3.97)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-1} + y_n D} \right]. \quad (3.98)$$

Substituindo as Equações 3.43 a 3.46 na Equações 3.97 e 3.98 e manipulando algebricamente o expoente de z a fim de evidenciar os símbolos de entrada x_i , obtém-se

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{(a_0^1 + a_1^1 D)x_n + (a_0^0 + a_1^0 D)x_{n-1} + (a_4^1 + a_5^1 D)x_{n-4} + (a_4^0 + a_5^0 D)x_{n-5}} \right].$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{(a_2^1 + a_3^1 D)x_{n-2} + (a_2^0 + a_3^0 D)x_{n-3} + (a_6^1 + a_7^1 D)x_{n-6} + (a_6^0 + a_7^0 D)x_{n-7}} \right].$$

Considerando a matriz de codificação ($\mathbf{A}_{2 \times 8}$) da Equação 3.35 e símbolos de entrada sendo os bits da fonte ($n_b = 1$) independentes, pode-se reescrever estas equações na forma

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = G_{x_n}(z^{1+D})G_{x_{n-1}}(z^{1+D})G_{x_{n-4}}(z^{-1-D})G_{x_{n-5}}(z^{1+D}),$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = G_{x_{n-2}}(z^{-1+D})G_{x_{n-3}}(z^{-1+D})G_{x_{n-6}}(z^{-1+D})G_{x_{n-7}}(z^{1-D}).$$

Considerando bits de entrada ($\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$) igualmente distribuídos, da Equação 3.28, tem-se,

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = \frac{1}{2^4} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^4, \quad (3.99)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = \frac{1}{2^4} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^4. \quad (3.100)$$

A Figura 12 apresenta a constelação e curva de distribuição de probabilidades correspondente às PGF das Equações 3.99 e 3.100.

3.5.4.2.5 Para $R = 1/4$, com símbolos *wavelet* inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 8}$

Neste caso, a cada dois símbolos novos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados quatro pares de símbolos *wavelet* na saída do codificador *wavelet*.

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-7}+y_{n-6}D} \right], \quad (3.101)$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-5}+y_{n-4}D} \right], \quad (3.102)$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-3}+y_{n-2}D} \right], \quad (3.103)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-1}+y_n D} \right]. \quad (3.104)$$

Substituindo as Equações 3.54 a 3.58 nas Equações 3.101 a 3.104 e manipulando algebricamente o expoente de z a fim de evidenciar os símbolos de entrada x_i , obtém-se

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) &= E \left[z^{(a_0^1+a_1^1 D)x_n+(a_0^0+a_1^0 D)x_{n-1}} \right], \\ G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) &= E \left[z^{(a_2^1+a_3^1 D)x_{n-2}+(a_2^0+a_3^0 D)x_{n-3}} \right], \\ G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) &= E \left[z^{(a_4^1+a_5^1 D)x_{n-4}+(a_4^0+a_5^0 D)x_{n-5}} \right], \\ G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) &= E \left[z^{(a_6^1+a_7^1 D)x_{n-6}+(a_6^0+a_7^0 D)x_{n-7}} \right]. \end{aligned}$$

Considerando a matriz de codificação ($\mathbf{A}_{2 \times 8}$) da Equação 3.35 e símbolos de entrada sendo os *bits* da fonte ($n_b = 1$) independentes, pode-se reescrever estas equações na forma

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) &= G_{x_n}(z^{1+D})G_{x_{n-1}}(z^{1+D}), \\ G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) &= G_{x_{n-2}}(z^{-1+D})G_{x_{n-3}}(z^{-1+D}), \\ G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) &= G_{x_{n-4}}(z^{-1-D})G_{x_{n-5}}(z^{1+D}), \\ G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) &= G_{x_{n-6}}(z^{-1+D})G_{x_{n-7}}(z^{1-D}). \end{aligned}$$

Considerando *bits* de entrada ($\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$) igualmente distribuídos, da Equação 3.28, tem-se, então,

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = \frac{1}{2^2} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^2, \quad (3.105)$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = \frac{1}{2^2} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^2, \quad (3.106)$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = \frac{1}{2^2} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^2, \quad (3.107)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = \frac{1}{2^2} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^2. \quad (3.108)$$

A Figura 13 apresenta a constelação e curva de distribuição de probabilidade correspondente às PGF das Equações 3.105 e 3.108.

3.5.4.3 Ampliando a matriz de codificação

Analisa-se agora os sistemas *wavelet* com matriz ampliada para 2×32 .

Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-3}+y_{n-2}D} \right], \quad (3.112)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-1}+y_n D} \right]. \quad (3.113)$$

Substituindo as Equações 3.72 a 3.75 na Equações 3.112 e 3.113 e manipulando algebricamente o expoente de z a fim de evidenciar os símbolos de entrada x_i , obtém-se

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{(a_0^1+a_1^1 D)x_n+(a_0^0+a_1^0 D)x_{n-1}+(a_4^1+a_5^1 D)x_{n-4}+(a_4^0+a_5^0 D)x_{n-5}+\dots+(a_{28}^1+a_{29}^1 D)x_{n-28}+(a_{28}^0+a_{29}^0 D)x_{n-29}} \right].$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{(a_2^1+a_3^1 D)x_{n-2}+(a_2^0+a_3^0 D)x_{n-3}+(a_6^1+a_7^1 D)x_{n-6}+(a_6^0+a_7^0 D)x_{n-7}+\dots+(a_{30}^1+a_{31}^1 D)x_{n-30}+(a_{30}^0+a_{31}^0 D)x_{n-31}} \right].$$

Considerando a matriz de codificação ($\mathbf{A}_{2 \times 32}$) da Equação 3.65 e símbolos de entrada sendo os *bits* da fonte ($n_b = 1$) independentes, pode-se reescrever estas equações na forma

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = G_{x_n}(z^{1+D})G_{x_{n-1}}(z^{1+D})G_{x_{n-4}}(z^{1+D})G_{x_{n-5}}(z^{1+D}) \dots G_{x_{n-28}}(z^{-1-D})G_{x_{n-29}}(z^{1+D}), \quad (3.114)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = G_{x_{n-2}}(z^{1-D})G_{x_{n-3}}(z^{1-D})G_{x_{n-6}}(z^{-1+D})G_{x_{n-7}}(z^{-1+D}) \dots G_{x_{n-30}}(z^{1-D})G_{x_{n-31}}(z^{-1+D}). \quad (3.115)$$

Considerando *bits* de entrada igualmente distribuídos, da Equação 3.28, obtém-se

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = \frac{1}{2^{16}} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^{16}, \quad (3.116)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = \frac{1}{2^{16}} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^{16}. \quad (3.117)$$

A Figura 15 apresenta a constelação e curva de distribuição de probabilidade correspondente às PGF das Equações 3.116 e 3.117.

3.5.4.3.4 Para $R = 1/4$, com símbolos *wavelet* inteiros e $\mathbf{A}_{2 \times 32}$

Neste caso, a cada dois novos símbolos de entrada x_{n-1} e x_n são gerados quatro pares de símbolos *wavelet* de saída. Desenvolvendo-se os termos da Equação 3.31, obtém-se as PGF

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-7}+y_{n-6}D} \right], \quad (3.118)$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-5}+y_{n-4}D} \right], \quad (3.119)$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-3}+y_{n-2}D} \right], \quad (3.120)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = E \left[z^{y_{n-1}+y_n D} \right]. \quad (3.121)$$

Substituindo as Equações 3.82 a 3.85 nas Equações 3.118 a 3.121 e manipulando algebricamente o expoente de z a fim de evidenciar os símbolos de entrada x_i , obtém-se

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{(a_0^1+a_1^1 D)x_n+(a_0^0+a_1^0 D)x_{n-1}+(a_8^1+a_9^1 D)x_{n-8}+(a_8^0+a_9^0 D)x_{n-9}+\dots+(a_{24}^1+a_{25}^1 D)x_{n-24}+(a_{24}^0+a_{25}^0 D)x_{n-25}} \right],$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{(a_2^1+a_3^1 D)x_{n-2}+(a_2^0+a_3^0 D)x_{n-3}+(a_{10}^1+a_{11}^1 D)x_{n-10}+(a_{10}^0+a_{11}^0 D)x_{n-11}+\dots+(a_{26}^1+a_{27}^1 D)x_{n-26}+(a_{26}^0+a_{27}^0 D)x_{n-27}} \right],$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{(a_4^1+a_5^1 D)x_{n-4}+(a_4^0+a_5^0 D)x_{n-5}+(a_{12}^1+a_{13}^1 D)x_{n-12}+(a_{12}^0+a_{13}^0 D)x_{n-13}+\dots+(a_{28}^1+a_{29}^1 D)x_{n-28}+(a_{28}^0+a_{29}^0 D)x_{n-29}} \right],$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{(a_6^1+a_7^1 D)x_{n-6}+(a_6^0+a_7^0 D)x_{n-7}+(a_{14}^1+a_{15}^1 D)x_{n-14}+(a_{14}^0+a_{15}^0 D)x_{n-15}+\dots+(a_{30}^1+a_{31}^1 D)x_{n-30}+(a_{30}^0+a_{31}^0 D)x_{n-31}} \right].$$

Considerando a matriz de codificação da Equação 3.65 e símbolos de entrada independentes, pode-se reescrever estas equações na forma

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = G_{x_n}(z^{1+D})G_{x_{n-1}}(z^{1+D})G_{x_{n-8}}(z^{1+D})G_{x_{n-9}}(z^{1+D})G_{x_{n-16}}(z^{-1-D})G_{x_{n-17}}(z^{1+D})G_{x_{n-24}}(z^{1+D})G_{x_{n-25}}(z^{-1-D}), \quad (3.122)$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = G_{x_{n-2}}(z^{1-D})G_{x_{n-3}}(z^{1-D})G_{x_{n-10}}(z^{1-D})G_{x_{n-11}}(z^{1-D})G_{x_{n-18}}(z^{-1+D})G_{x_{n-19}}(z^{1-D})G_{x_{n-26}}(z^{1-D})G_{x_{n-27}}(z^{-1+D}), \quad (3.123)$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = G_{x_{n-4}}(z^{1+D})G_{x_{n-5}}(z^{1+D})G_{x_{n-12}}(z^{-1-D})G_{x_{n-13}}(z^{-1-D})G_{x_{n-20}}(z^{-1-D})G_{x_{n-21}}(z^{1+D})G_{x_{n-28}}(z^{-1-D})G_{x_{n-29}}(z^{1+D}), \quad (3.124)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = G_{x_{n-6}}(z^{-1+D})G_{x_{n-7}}(z^{-1+D})G_{x_{n-14}}(z^{1-D})G_{x_{n-15}}(z^{1-D})G_{x_{n-22}}(z^{1-D})G_{x_{n-23}}(z^{-1+D})G_{x_{n-30}}(z^{1-D})G_{x_{n-31}}(z^{-1+D}). \quad (3.125)$$

Considerando *bits* de entrada igualmente distribuídos, da Equação 3.28, tem-se, então,

$$G_{\mathbf{y}_3(D)}(z) = \frac{1}{2^8} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^8, \quad (3.126)$$

$$G_{\mathbf{y}_2(D)}(z) = \frac{1}{2^8} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^8, \quad (3.127)$$

$$G_{\mathbf{y}_1(D)}(z) = \frac{1}{2^8} \left(z^{1+D} + z^{-1-D} \right)^8, \quad (3.128)$$

$$G_{\mathbf{y}_0(D)}(z) = \frac{1}{2^8} \left(z^{1-D} + z^{-1+D} \right)^8. \quad (3.129)$$

A Figura 16 apresenta a constelação e curva de distribuição de probabilidade correspondente às PGF das Equações 3.126 e 3.129.

3.5.4.4 Cálculo da energia média das constelações do CWC

Pode-se empregar a PGF dos símbolos *wavelet* para determinar a energia média E_s da constelação resultante. O valor médio de símbolos *wavelet*, $E[y_n]$, pode ser obtido calculando a primeira derivada da PGF, em $z = 1$ e $E[y_n^2] - E[y_n]^2$ pode ser obtida, calculando a segunda derivada em $z = 1$ (GUBNER, 2006, p. 111). Pode-se observar que $E_s = E[y_n^2]$.

Inicialmente, considera-se o caso de símbolos *wavelet* inteiros, quando $n_b = 1$. Desta forma, considerando a PGF dada na Equação 3.33. A primeira derivada é

$$G'_y(z) = \frac{mgR}{2^{mgR}} (1 - z^{-2}) (z + z^{-1})^{mgR-1}. \quad (3.130)$$

Então,

$$E[y_n] = G'_y(z) \Big|_{z=1} = 0. \quad (3.131)$$

Assim, quando $n_b = 1$, a segunda derivada da PGF em $z = 1$ produz diretamente a energia média da constelação. A segunda derivada de 3.33 é

$$G''_y(z) = \frac{mgR}{2^{mgR}} \left[2z^{-3} (z + z^{-1})^{mgR-1} + (1 - z^{-2})^2 (mgR - 1) (z + z^{-1})^{mgR-2} \right]. \quad (3.132)$$

Então, a energia média da constelação, quando $n_b = 1$ é

$$E_s = G''_y(z) \Big|_{z=1} = \frac{mgR}{2^{mgR}} \left[2 \cdot 1 \cdot 2^{mgR-1} + 0^2 \cdot (mgR - 1) 2^{mgR-2} \right] = mgR. \quad (3.133)$$

Quando $n_b = 2$, os símbolos *wavelet* são complexos. Considerando-se agora um símbolo *wavelet* $y_n = u_n + jv_n$, em que u_n and v_n são as partes real e imaginária de y_n . u_n e v_n são independentes porque u_n e v_n são devidos as partes real e imaginária dos símbolos de entrada do codificador CWC, as quais são associadas à metade dos *bits* de entrada no formatador de dados ($n_b/2$). Assim, u_n e v_n comportam-se como y_n , quando $n_b = 1$ e $u_n, v_n \in \{-mgR2^{n_b/2}, -mgR2^{n_b/2} + 2, \dots, mgR2^{n_b/2}\}$. Desta forma, as PGF de u_n e v_n podem ser derivadas diretamente da Equação 3.33, como

$$G_{u_n}(z) = G_{v_n}(z) = \frac{1}{2^{mgRn_b/2}} \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b/2}-1} z^{2i-2^{n_b/2}+1} \right)^{mgR}. \quad (3.134)$$

Para calcular a média de u_n e v_n , como no caso de $n_b = 1$, calcula-se primeiro a primeira derivada da Equação 3.134, em $z = 1$. Então

$$G'_{u_n}(z) = G'_{v_n}(z) = \frac{1}{2^{mgRn_b}} mgR \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} z^{2i-2^{n_b/2}+1} \right)^{mgR-1} \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} (2i - 2^{n_b/2} + 1) z^{2i-2^{n_b/2}} \quad (3.135)$$

e

$$E[y_n] = G'_y(z) \Big|_{z=1} = \frac{mgR}{2^{mgRn_b/2}} 2^{(mgR-1)n_b/2} \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} (2i - 2^{n_b/2} + 1) = 0, \quad (3.136)$$

desde que o valor médio dos símbolos de entrada é nulo. A segunda derivada da PGF, em $z = 1$, produz diretamente $E[u_n^2]$ e $E[v_n^2]$.

A segunda derivada da Equação 3.134 é

$$G_u''(z) = G_v''(z) = \frac{mgR}{2mgRn_b/2} \left[(mgR - 1) \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b/2}-1} z^{2i-2^{n_b/2}+1} \right)^{mgR-2} \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{2^{n_b/2}-1} (2i - 2^{n_b/2} + 1) z^{2i-2^{n_b/2}} + \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b/2}-1} z^{2i-2^{n_b/2}+1} \right)^{mgR-1} \right. \\ \left. \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 2^{n_b/2}-1}}^{2^{n_b/2}-1} (2i - 2^{n_b/2} + 1) (2i - 2^{n_b/2}) z^{2i-2^{n_b/2}-1} \right]. \quad (3.137)$$

Assim,

$$G_u''(z)|_{z=1} = G_v''(z)|_{z=1} = \frac{mgR}{2mgRn_b/2} \left\{ (mgR - 1) 2^{\frac{n_b}{2}(mgR-2)} \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} (2i - 2^{n_b/2} + 1) + 2^{\frac{n_b}{2}(mgR-1)} \right. \\ \left. \left[4 \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} i^2 - (4 \cdot 2^{n_b/2} - 2) \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} i + \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} (2^{n_b} - 2^{n_b/2}) - \right. \right. \\ \left. \left. (2 \cdot 2^{n_b/2-1} - 2^{n_b/2} + 1) (2 \cdot 2^{n_b/2-1} - 2^{n_b/2}) \right] \right\} \\ = mgR \cdot 2^{-n_b/2} \left[\frac{4 (2^{n_b/2} - 1) 2^{n_b/2} (2 \cdot 2^{n_b/2} - 2 + 1)}{6} - \right. \\ \left. (4 \cdot 2^{n_b/2} - 2) \frac{(2^{n_b/2} - 1) 2^{n_b/2}}{2} + 2^{n_b/2} (2^{n_b} - 2^{n_b/2}) \right] \\ = \frac{mgR}{3} (2^{n_b} - 1). \quad (3.138)$$

Como u_n e v_n são independentes, a energia média da constelação, quando $n_b = 2$ é

$$E_s = E[|y_n|^2] = E[u_n^2 + v_n^2] = E[u_n^2] + E[v_n^2] = \frac{2mgR}{3} (2^{n_b} - 1). \quad (3.139)$$

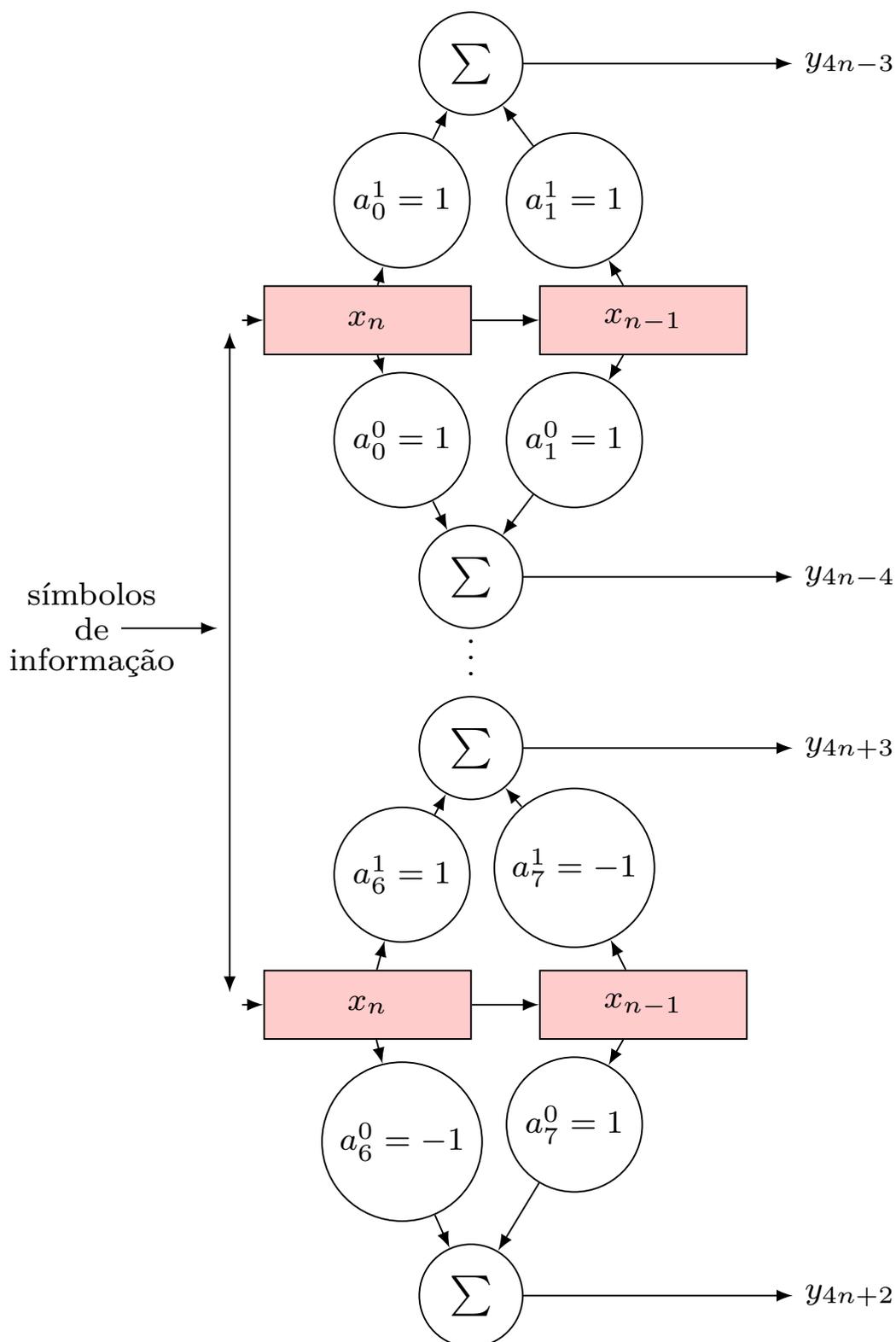
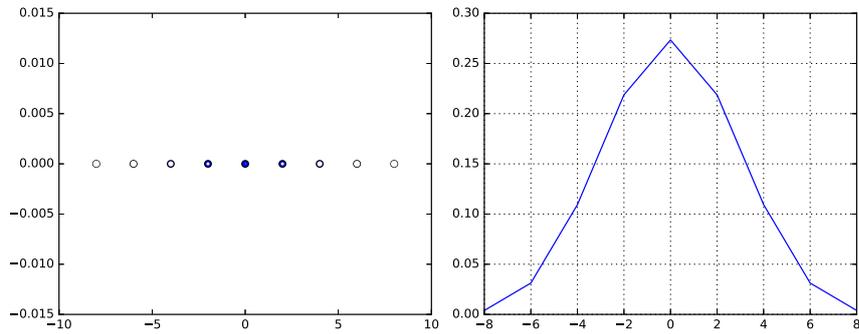
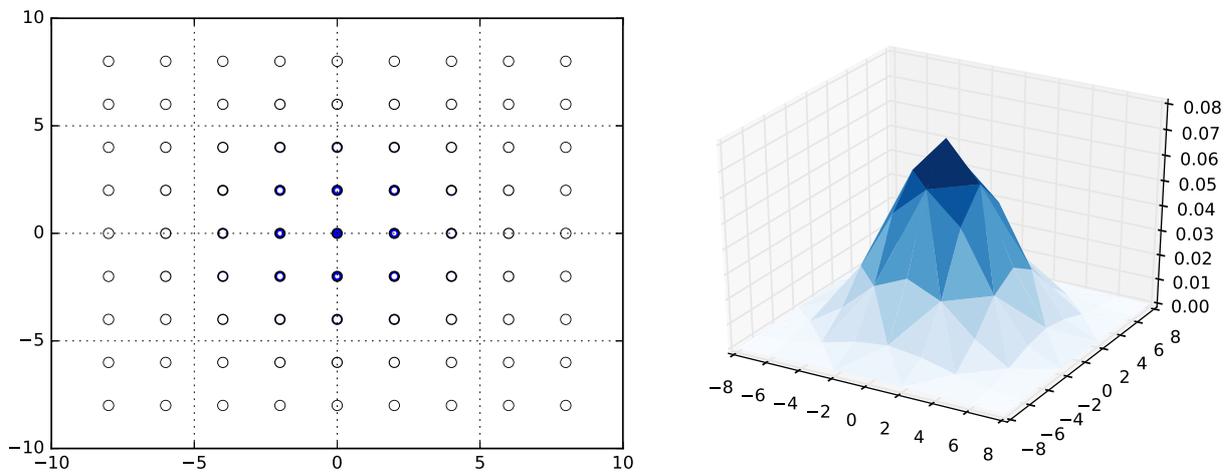


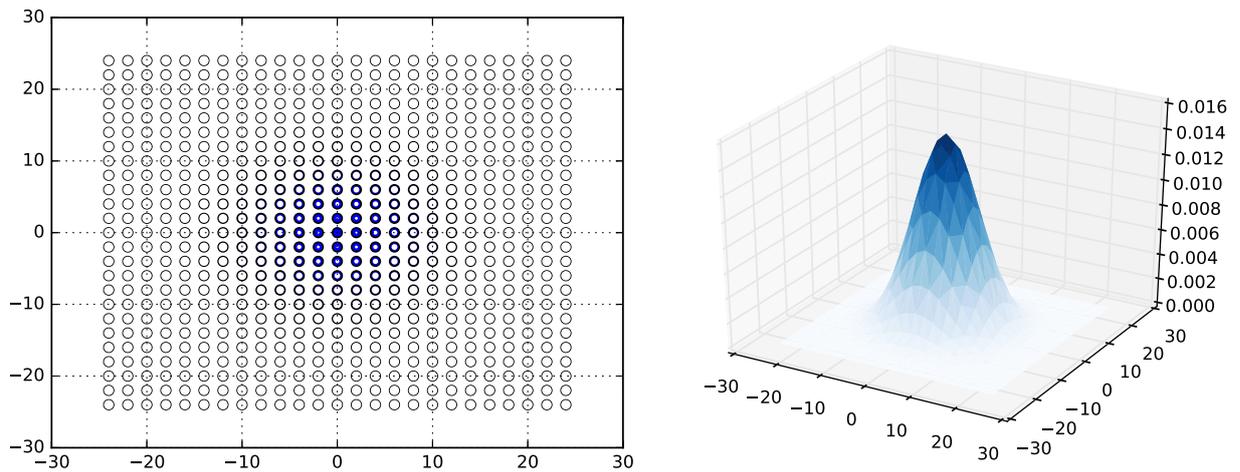
Figura 4 – Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1/4$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e oito símbolos de saída, a cada instante).



(a) Para $n_b = 1$, com 9 pontos e $E_s = 8$.

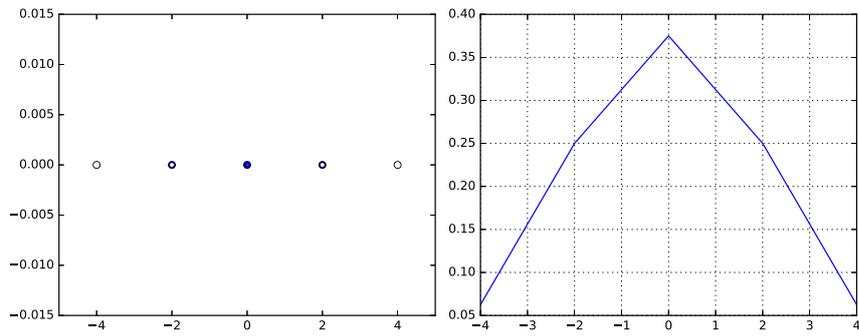


(b) Para $n_b = 2$, com 81 pontos e $E_s = 16$.

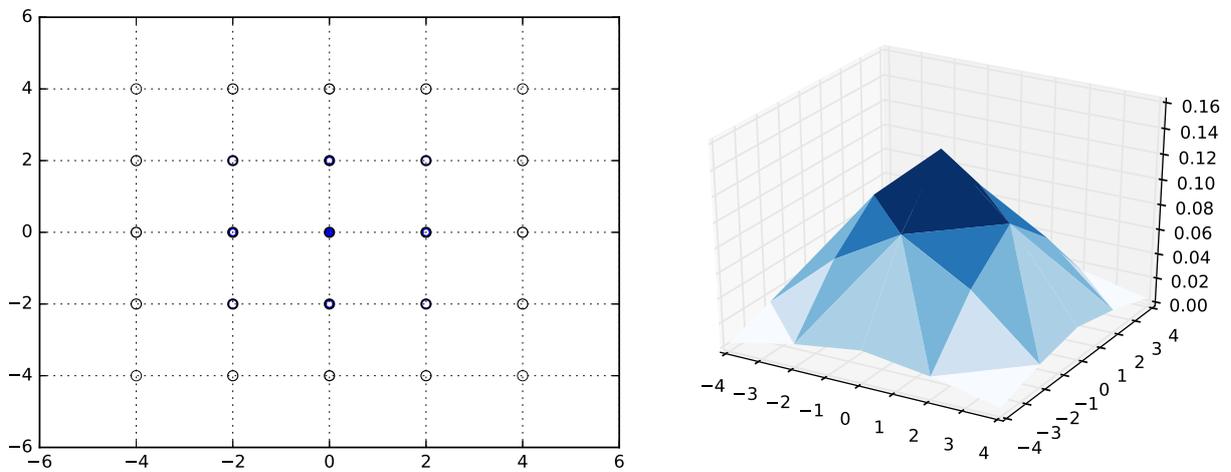


(c) Para $n_b = 4$, com 625 pontos e $E_s = 48$.

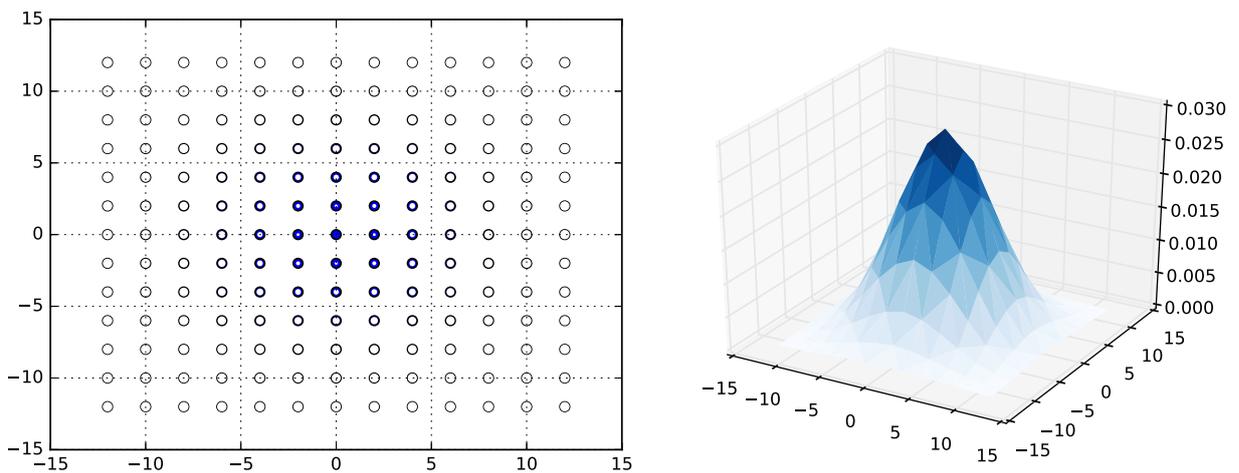
Figura 5 – Constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades para CWC 2×8 , com $R = 1$ e $n_b = 1, 2$ e 4 .



(a) Para $n_b = 1$, com 5 pontos e $E_s = 4$.

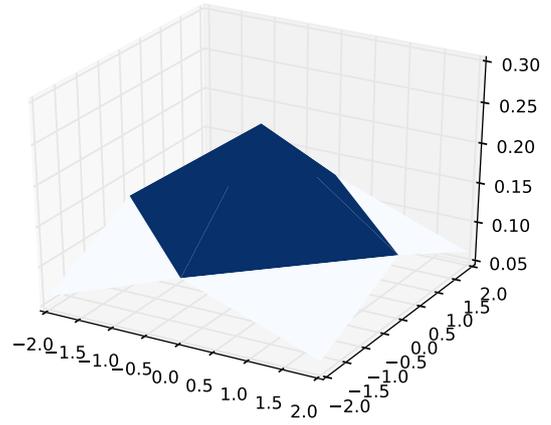
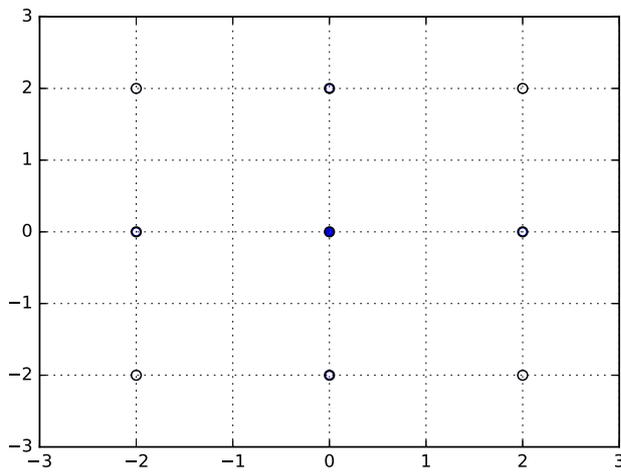


(b) Para $n_b = 2$, com 25 pontos e $E_s = 8$.

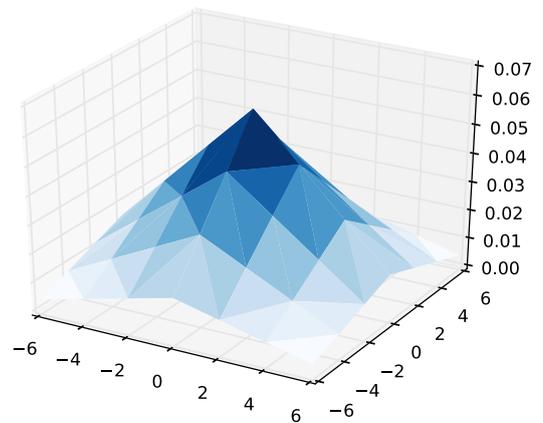
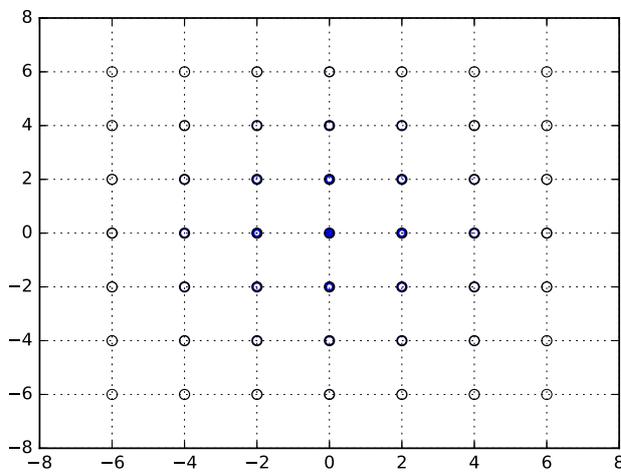


(c) Para $n_b = 4$, com 169 pontos e $E_s = 24$.

Figura 6 – Constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades para $CWC_{2 \times 8}$, com $R = 1/2$ e $n_b = 1, 2$ e 4 .

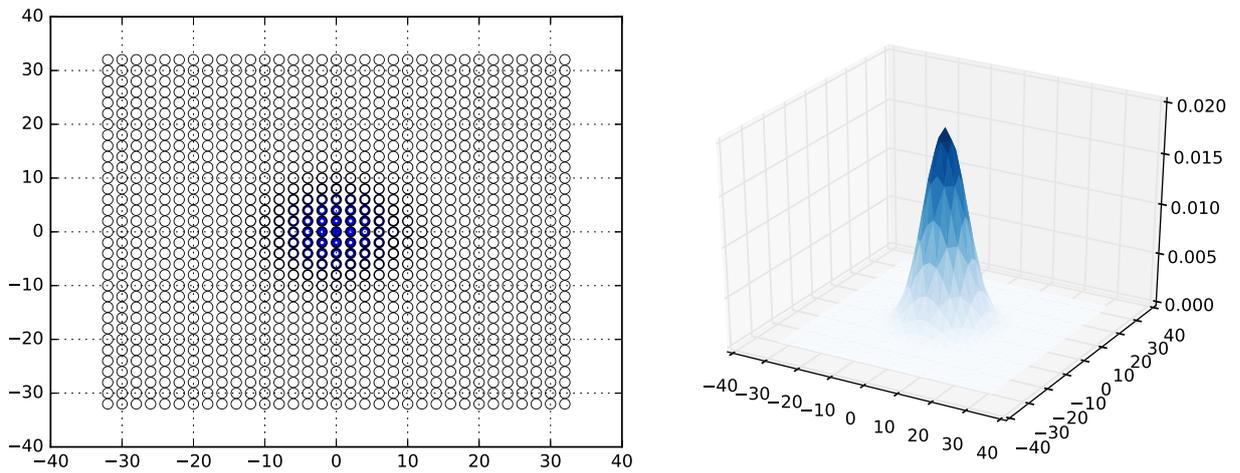


(a) Para $n_b = 2$, com 9 pontos e $E_s = 4$.

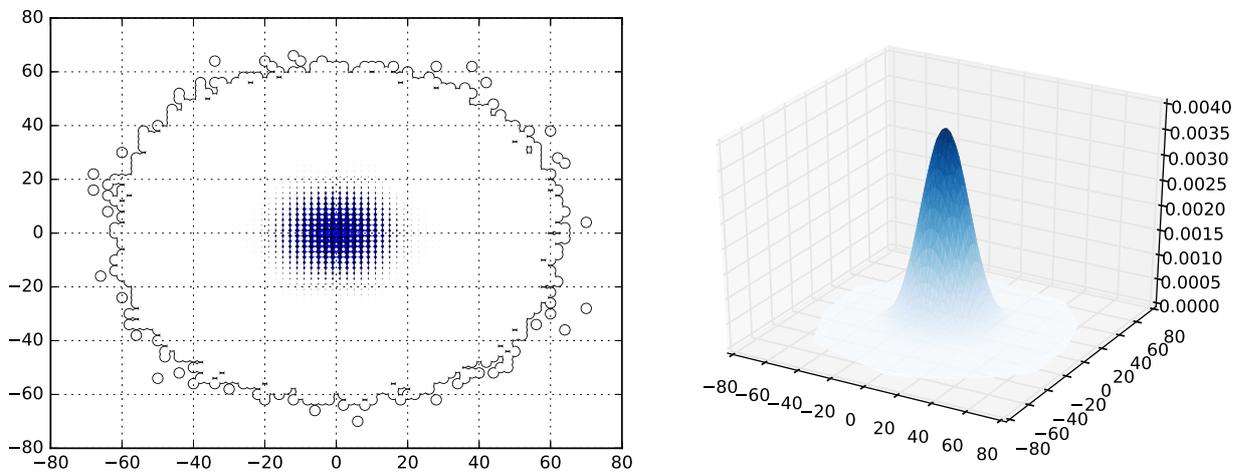


(b) Para $n_b = 4$, com 49 pontos e $E_s = 20$.

Figura 7 – Constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades para $CWC_{2 \times 8}$, com $R = 1/4$ e $n_b = 2$ e 4.

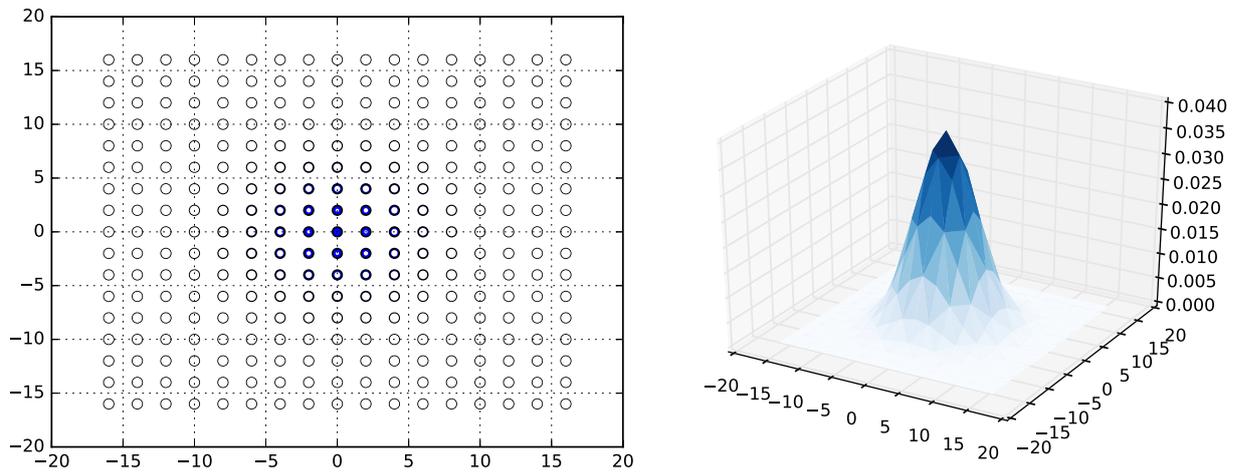


(a) Para $n_b = 2$, com 1089 pontos e $E_s = 64$.

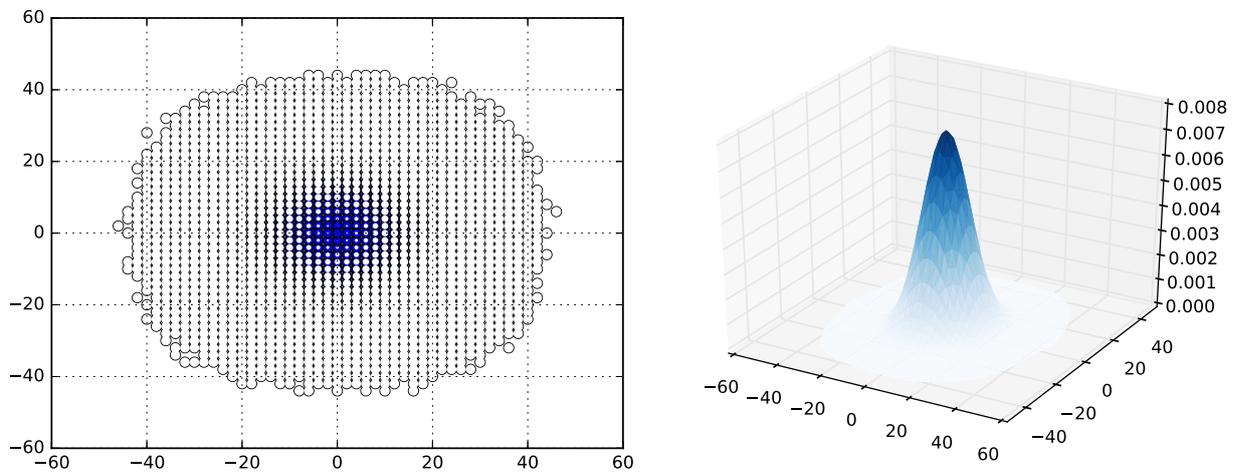


(b) Para $n_b = 4$, com 9409 pontos e $E_s = 320$.

Figura 8 – Constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades para $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1$ e $n_b = 2$ e 4.

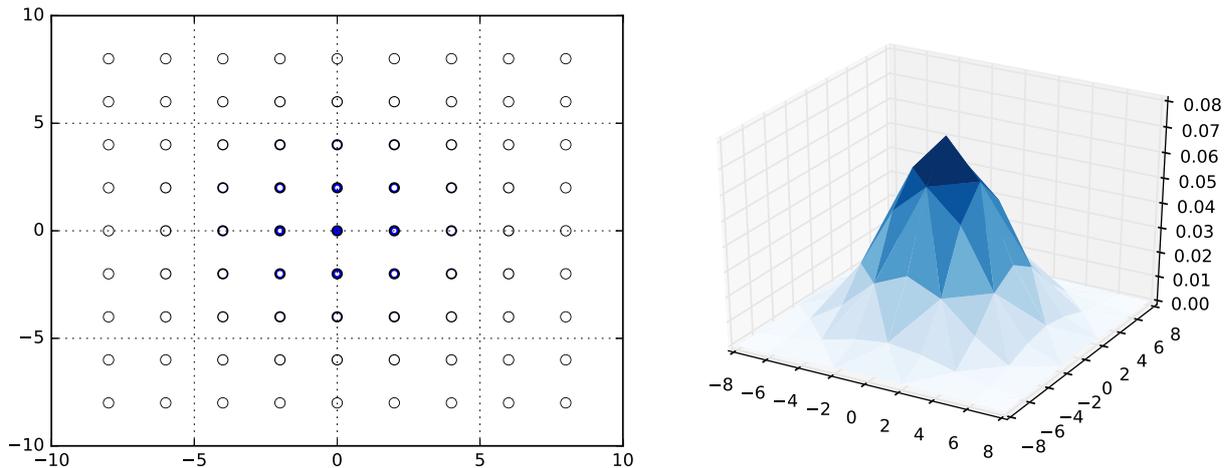


(a) Para $n_b = 2$, com 289 pontos e $E_s = 32$.

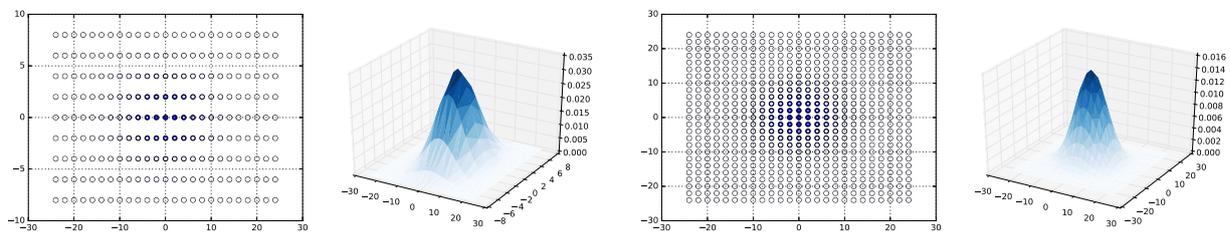


(b) Para $n_b = 4$, com 1155 pontos e $E_s = 160$.

Figura 9 – Constelações de sinais (*wavelet*) e curvas de distribuição de probabilidades para $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/2$ e $n_b = 2$ e 4.



(a) Para $n_b = 2$, com 81 pontos e $E_s = 16$.



(b) Para $n_b = 3$, com 225 pontos e $E_s = 48$.

(c) Para $n_b = 4$, com 625 pontos e $E_s = 80$.

Figura 10 – Constelações e curvas de distribuição de probabilidades de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/4$.

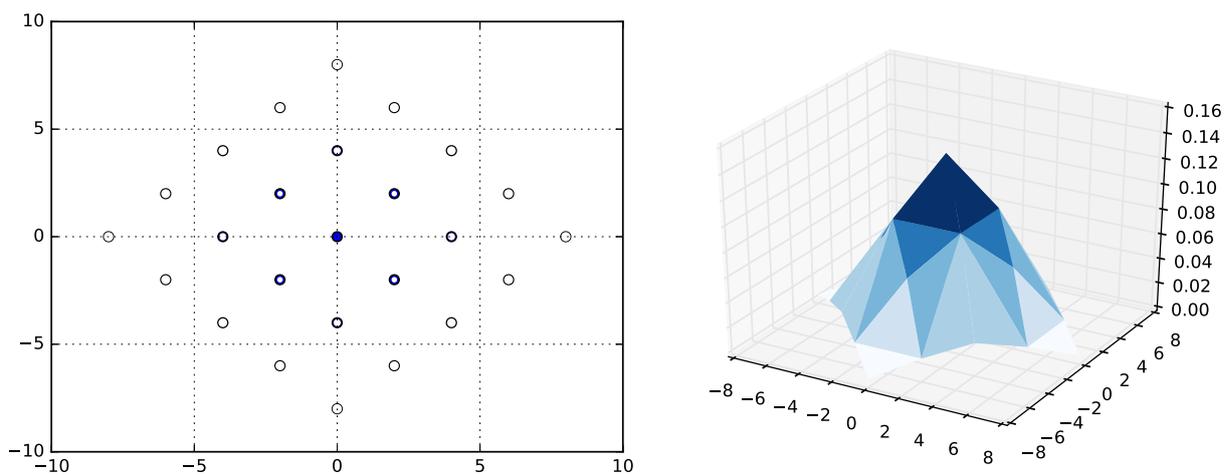


Figura 11 – Constelação e curvas de distribuição de probabilidades de sistemas $CWC_{2 \times 8}$, com $R = 1$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com 25 pontos e $E_s = 16$ (SANTOS; GURJAO; ASSIS, 2013).

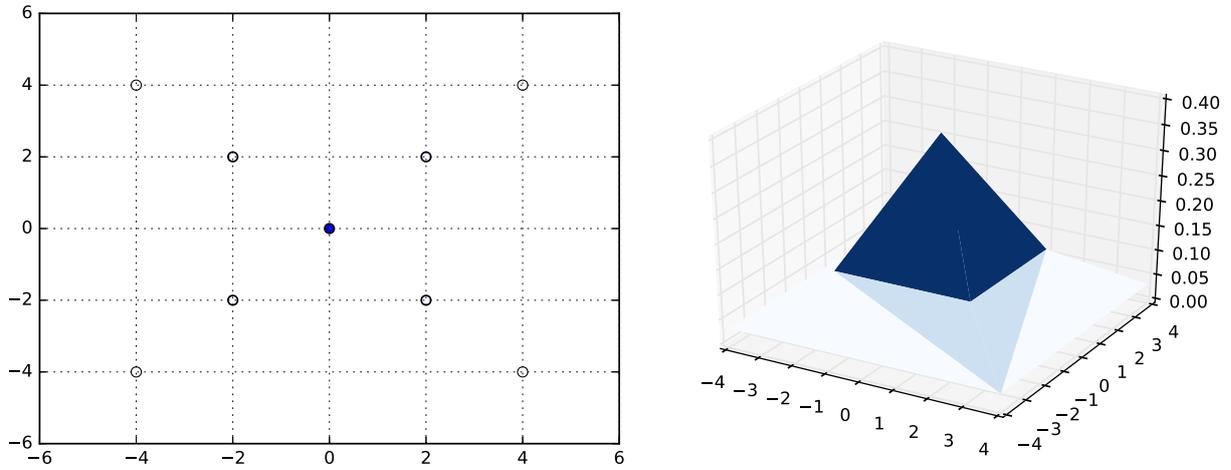


Figura 12 – Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas $CWC_{2 \times 8}$, com $R = 1/2$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com 9 pontos e $E_s = 8$.

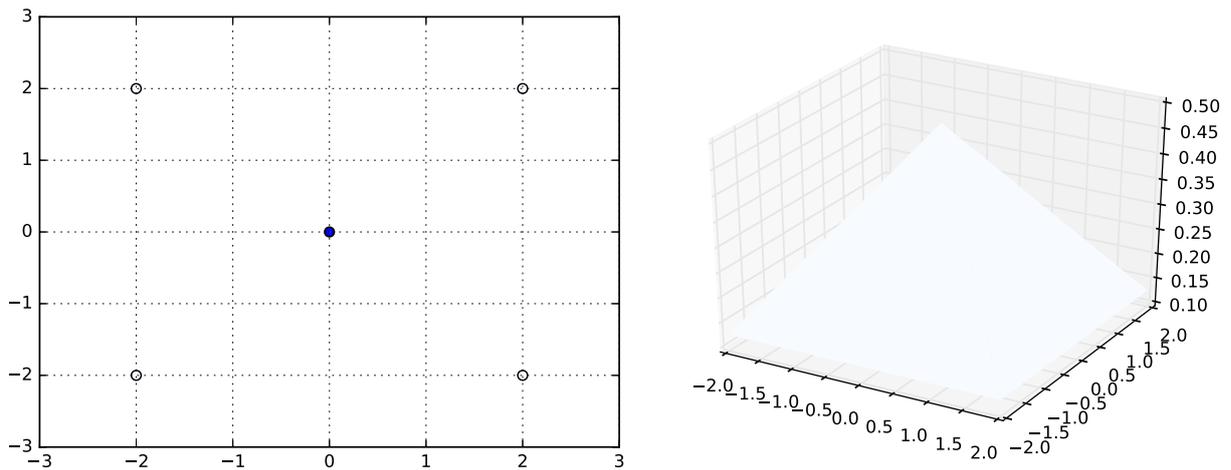


Figura 13 – Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas $CWC_{2 \times 8}$, com $R = 1/4$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com 5 pontos e $E_s = 4$.

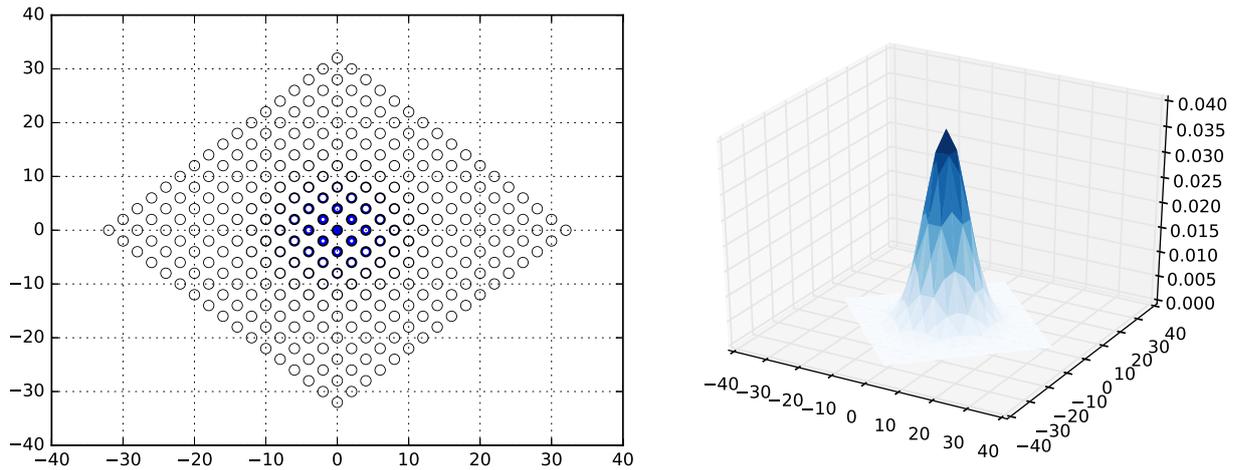


Figura 14 – Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros consecutivos, com 289 pontos e $E_s = 64$.

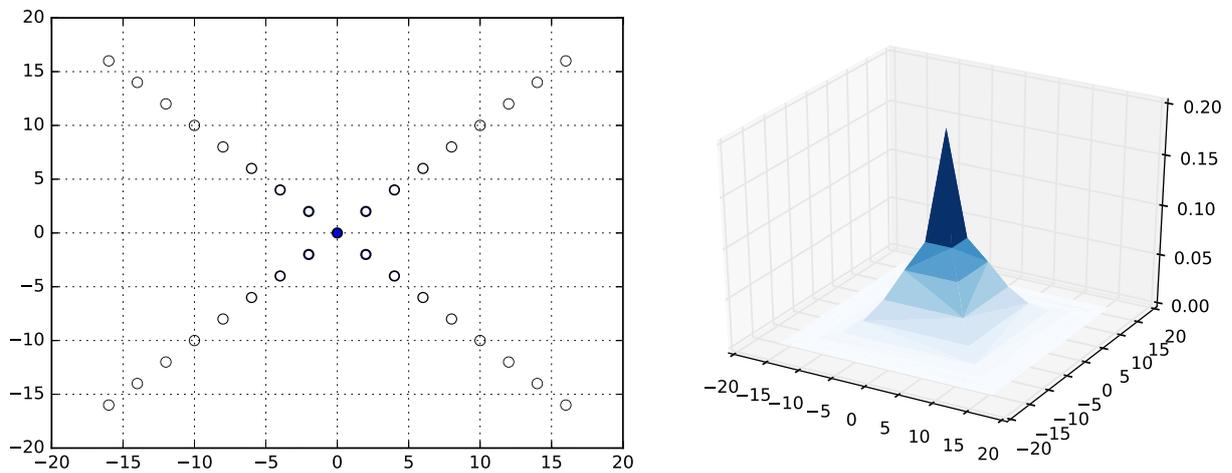


Figura 15 – Constelação e curva de distribuição de probabilidade de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/2$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com 33 pontos e $E_s = 32$.

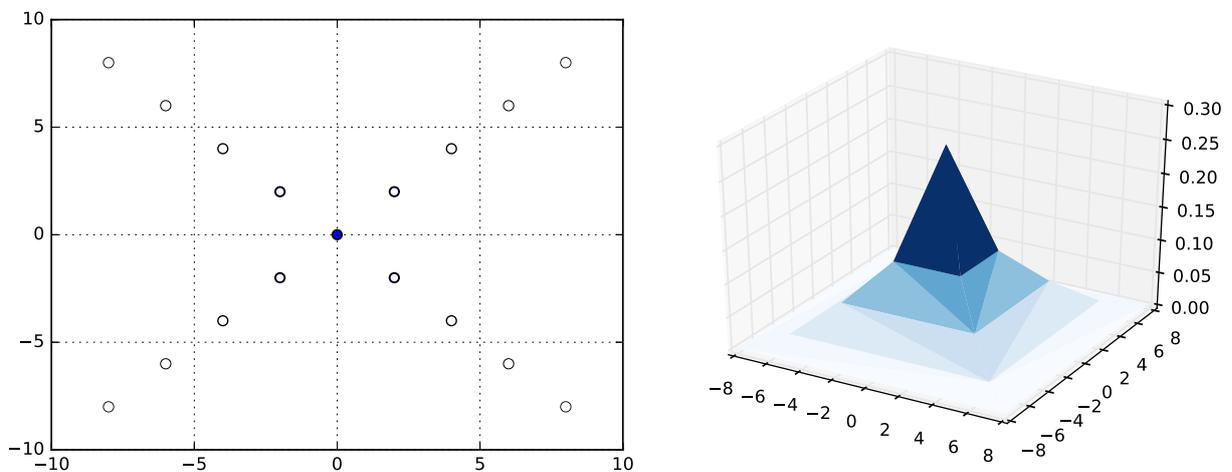


Figura 16 – Constelação de sistemas $CWC_{2 \times 32}$, com $R = 1/4$, e formada por pares de símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos, com 17 pontos e $E_s = 16$.

4 Decodificação CWC

Nesta tese, trabalhou-se com a decodificação símbolo a símbolo devido a sua simplicidade computacional para implementação, mas também utilizou-se da decodificação de sequência, pela aplicação do algoritmo de Viterbi (VITERBI, 1967), sobre alguns sistemas CWC para verificar se esta técnica apresentaria ganho de desempenho para os sistemas CWC, que compensasse sua implementação computacional mais complexa.

4.1 Decodificação símbolo a símbolo

Pode ser observado no processo de codificação que o n -ésimo símbolo *wavelet* é obtido pela combinação dos últimos mg símbolos de entrada, ponderados pelos coeficientes da matriz de codificação $\mathbf{A}_{m \times mg}$, na forma

$$y_n = \sum_{i=n-mg+1}^n x_i a_{ki}^s, \quad (4.1)$$

em que a_{ki}^s representa o i -ésimo elemento (a_k^s) da matriz $\mathbf{A}_{m \times mg}$, com $0 \leq s \leq m-1$ e $0 \leq k \leq mg-1$.

Num processo convencional de decodificação, os símbolos de entrada, \mathbf{x} , são estimados a partir dos últimos mg símbolos *wavelet* recebidos (estimados $\hat{\mathbf{y}}$), empregando um banco de correlatores, considerando a ortogonalidade entre os vetores-linha da matriz *wavelet*. Cada novos m/R símbolos *wavelet* recebidos produzem m símbolos $\hat{\mathbf{x}}$, na saída do decodificador, conforme diagrama apresentado na Figura 17.

Denota-se por z_r^s a correlação entre a s -ésima linha da matriz *wavelet* de codificação com os últimos mg símbolos *wavelet* recebidos $\hat{\mathbf{y}}$, no instante r , tal que

$$z_r^s = \sum_{t=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-t}^s y_{r-t}.$$

da Equação 3.17,

$$z_r^s = \sum_{t=0}^{mg-1} \sum_{\substack{r-t = \frac{(k+i)m}{R} + j \\ 0 \leq k < gR \\ i \geq 0 \\ 0 \leq j < \frac{m}{R}}} \sum_{l=0}^{m-1} a_{(mg-1)-t}^s a_{\frac{km}{R}+j}^l x_{im+l}. \quad (4.2)$$

Considerando-se a condição dada pela Equação 3.3 que garante que as linhas da matriz *wavelet* são ortogonais entre si, mesmo com deslocamento de m colunas, então, todos os termos na Equação 4.2 são cancelados, exceto quando $l = s$ e $(mg-1) - t = \frac{km}{R} + j$.

Assim,

$$\begin{aligned} z_r^s &= x_{(r-mg+1)R+s} \sum_{u=0}^{mg-1} a_u^s a_u^s \\ &= mgx_{(r-mg+1)R+s}. \end{aligned}$$

Na ausência de ruído de canal, considerando o exemplo de formatação dos dados da fonte $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$, o símbolo decodificado \hat{x} será -1 se $z_r^s = -mg$, ou $+1$ se $z_r^s = mg$. Considerando um canal ruidoso, pode-se estimar os símbolos de entrada como $\hat{x} = \text{sgn}(z_r^s)$, sendo $\text{sgn}(\cdot)$ a função sinal (SILVEIRA et al., 2009).

$$\text{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

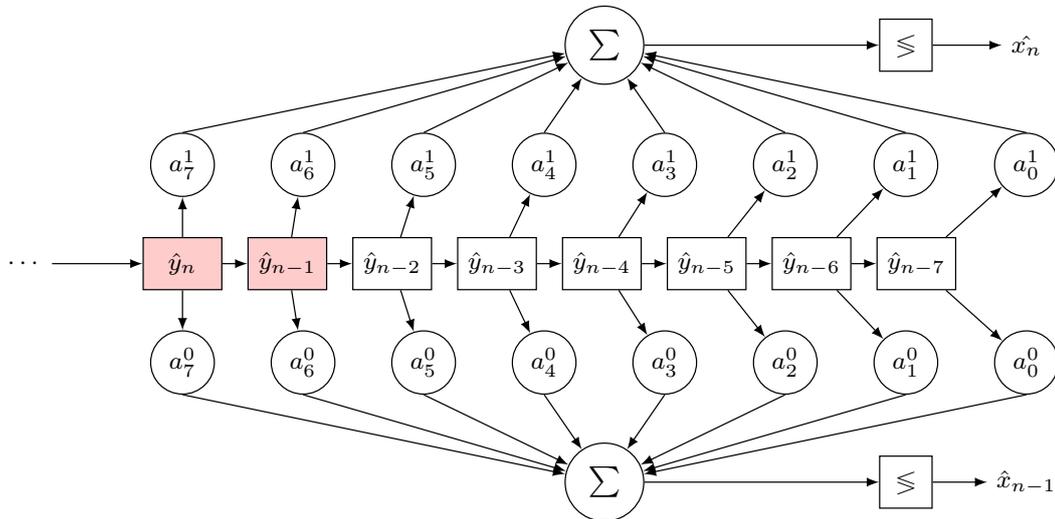


Figura 17 – Diagrama de decodificador CWC, símbolo a símbolo, para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de codificação $R = 1$ (dois símbolos de entrada, em vermelho e dois símbolos de saída, a cada instante).

Uma descrição detalhada da decodificação CWC, em série, pode ser encontrada em Silveira (2006), Silveira et al. (2009), Cavalcante et al. (2013), Silveira Jr (2014), Silveira Jr e Silveira (2016), Cavalcante et al. (2017).

4.2 Decodificação de sequência

A melhor forma de decodificar uma sequência recebida com erros é compará-la com cada uma das possíveis sequências codificadas, avaliando sua verossimilhança. A dificuldade em implementar esse método diretamente está relacionada à complexidade computacional e à necessidade de grande quantidade de memória disponível. Para uma longa sequência de dados binários recebidos, considerando k bits de mensagem e 2^k palavras código, seria

necessário armazenar todas as 2^k palavras código para serem comparadas, na busca pela máxima verossimilhança (LATHI; DING, 2012).

Sendo a codificação *wavelet* de canal um processo sequencial invariante no tempo, implementado por uma máquina de estados, pode ser, conseqüentemente, descrita por uma treliça. Desta forma, a treliça para um código CWC pode ser obtida pela implementação computacional e simulação da máquina de estados do codificador *wavelet*. Assim, estando um processo de codificação representado por uma treliça, o algoritmo de Viterbi (VITERBI, 1967) realiza a decodificação dos símbolos pela estimação do caminho mais próximo à sequência de símbolos transmitida. Tratando-se de decodificação de sequência, o algoritmo de Viterbi é uma das melhores técnicas para comunicações digitais, pois obtém-se uma simplificação para a técnica de decisão por máxima verossimilhança (*maximum likelihood decision* (MLD)), visto que não necessita armazenar todas as palavras de código e compará-las com a sequência recebida (LATHI; DING, 2012).

A vantagem do método proposto por Viterbi em comparação ao método de decodificação direta por máxima verossimilhança é que a complexidade de seu decodificador não é função do número de símbolos numa sequência de código. O algoritmo calcula uma medida de similaridade ou distância (de Hamming ou euclidiana) entre uma palavra recebida, num instante t_i , e todos os ramos da treliça chegando a cada nó (estado) nesse mesmo instante e desconsidera os ramos da treliça que não são candidatos bons a caminho correto. Quando dois ramos chegam a um mesmo nó, o que tem menor distância (melhor métrica) é escolhido. O decodificador segue avançando na treliça, tomando decisões e eliminando ramos não prováveis. Essa seleção de ramos sobreviventes é realizada para todos os nós da treliça, a cada iteração do algoritmo, restando ao final um único percurso conhecido como *percurso sobrevivente* (SKLAR, 2000).

O desempenho de um sistema com decodificação em treliça está associado à probabilidade de decodificação errada de uma sequência recebida (erro de sequência do código). Assim, considera-se que um erro de decodificação ocorre quando o decodificador segue um caminho na treliça divergente do caminho correspondente à sequência transmitida. Quando todas as possíveis sequências de mensagem u_m da fonte são equiprováveis e independentes, o algoritmo de Viterbi procura encontrar a sequência mais verossimilhante à transmitida pela maximização da função dada pela Equação 4.4, sobre todos os percursos de código através da treliça (BARRON; DUNHAM, 1995)

$$M(r, u_m) = p(r|u_m) = \prod_i p(r_i|u_{mi}) \quad (4.4)$$

sendo r_i a subsequência recebida no i -ésimo ramo e u_{mi} a porção correspondente ao m -ésimo percurso.

O algoritmo de Viterbi pode ser descrito da seguinte forma (LIN; COSTELLO JR., 1983),

- Começa a partir da unidade de tempo em $t = 0$, e toma-se como estado de partida

o estado 0 (nó 0). Então, calcular a métrica parcial para cada ramo partindo deste estado inicial até cada estado localizado à frente, de acordo com a treliça do código. Armazenar o caminho sobrevivente (o de melhor métrica para cada estado) e o valor de sua métrica. Nesse primeiro passo, só há um ramo chegando a cada estado.

- Aumente a variável tempo da unidade ($t = t + 1$) para realizar a próxima iteração. Calcular a métrica parcial para todos os caminhos que chegam em cada estado (nó). Encontrar o caminho sobrevivente (ainda parcial) somando-se a melhor métrica de cada ramo que chega ao estado, com a métrica do caminho sobrevivente definido na unidade de tempo anterior. Para cada estado, armazene somente o caminho (sobrevivente) com melhor métrica acumulada. Elimine todos os outros caminhos.
- Se a treliça não chegou ao fim, repetir o passo 2; caso contrário, pare.

A empregabilidade da decodificação de sequência (algoritmo de Viterbi) fica condicionada ao ganho de desempenho dos sistemas CWC, pois o algoritmo de Viterbi possui complexidade computacional que cresce linearmente com o número de transições por iteração. Observou-se que para um código CWC $_{m \times mg}$, o algoritmo desenvolve $\mathcal{O}(2^{mg})$ operações aritméticas (multiplicações) por iteração, considerando que os *bits* da fonte são mapeados em símbolos binários. Como exemplos, para uma matriz de posto $m = 2$ e gênero $g = 4$, o decodificador de Viterbi apresenta complexidade $\mathcal{O}(256)$. Para um código CWC $_{4 \times 16}$ ($m = 4$ e $g = 4$) apresenta complexidade $\mathcal{O}(65536)$ e para um código CWC $_{2 \times 32}$ ($m = 2$ e $g = 16$) apresenta complexidade $\mathcal{O}(4, 3 \cdot 10^9)$.

Em razão do algoritmo de Viterbi ser eficiente quando o comprimento de restrição da máquina de estados é inferior a dez, utilizou-se desta ferramenta para realizar comparações de desempenhos entre sistemas CWC de comunicação que emprega decodificação símbolo a símbolo e com decodificação de Viterbi, sob canal com desvanecimento Rayleigh, restritas à CWC $_{2 \times 8}$ ($m = 2$ e $g = 4$), com taxas de codificação $R = 1, 1/2$ e $1/4$.

4.2.1 Treliça de uma codificação *wavelet*

Um decodificador de sequência trabalha gerando hipóteses sobre a sequência de palavras código transmitida. Portanto, calcula uma métrica que, por exemplo, pode ser a distância euclidiana entre a hipótese e o sinal recebido. Se a métrica indicar que a hipótese não é provável, o decodificador propõe outra, num sistema de tentativa e erro, até encontrar uma hipótese provável (SKLAR, 2000).

A treliça para um código CWC pode ser obtida pela implementação computacional e simulação da máquina de estados do codificador. A seguir, descreve-se a treliça obtida para um código CWC $_{2 \times 8}$, com posto $m = 2$, gênero $g = 4$, taxa de codificação unitária e formatação dos símbolos de entrada do codificador *wavelet* $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$, cuja máquina de estados é apresentada na Figura 2.

Aqui, repete-se a Figura 2, como Figura 18, para facilitar a leitura, sendo x_{n-1} e x_n os símbolos de entrada do codificador, e os outros símbolos x_{n-7} a x_{n-2} fornecem informação sobre o estado do sistema.

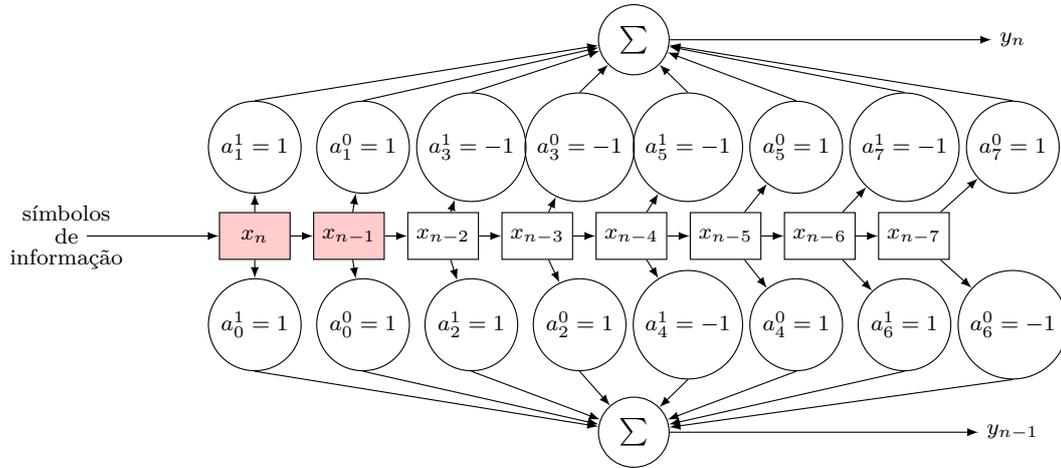


Figura 18 – Diagrama de codificador CWC para matriz de posto $m = 2$, gênero $g = 4$ e taxa de código $R = 1$.

A treliça correspondente ao codificador $CWC_{2 \times 8}$ está ilustrada na Figura 19. Os ramos de cor vermelha resultam devida à entrada binária 00, os ramos de cor verde resultam da entrada 01, os ramos de cor azul resultam da entrada 10 e os ramos de cor ciano resultam da entrada 11. Todas as transições de estados são detalhadas na Tabela 6 que para facilitar a leitura, tanto *entrada* quanto *estados* também foram expressos por número binário, seguidos pelos valores correspondentes em decimal, entre parênteses.

Tabela 6 – Tabela da treliça equivalente à codificação *wavelet* $CMW_{(2 \times 8)}$.

Estado de Origem	Entrada 00		Entrada 01		Entrada 10		Entrada 11	
	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino
000000 (0)	(-4, 0)	000000 (0)	(-2, 2)	010000 (16)	(-2, 2)	100000 (32)	(0, 4)	110000 (48)
000001 (1)	(-6, 2)	000000 (0)	(-4, 4)	010000 (16)	(-4, 4)	100000 (32)	(-2, 6)	110000 (48)
000010 (2)	(-2, -2)	000000 (0)	(0, 0)	010000 (16)	(0, 0)	100000 (32)	(2, 2)	110000 (48)
000011 (3)	(-4, 0)	000000 (0)	(-2, 2)	010000 (16)	(-2, 2)	100000 (32)	(0, 4)	110000 (48)
000100 (4)	(-2, 2)	000001 (1)	(0, 4)	010001 (17)	(0, 4)	100001 (33)	(2, 6)	110001 (49)
000101 (5)	(-4, 4)	000001 (1)	(-2, 6)	010001 (17)	(-2, 6)	100001 (33)	(0, 8)	110001 (49)
000110 (6)	(0, 0)	000001 (1)	(2, 2)	010001 (17)	(2, 2)	100001 (33)	(4, 4)	110001 (49)
000111 (7)	(-2, 2)	000001 (1)	(0, 4)	010001 (17)	(0, 4)	100001 (33)	(2, 6)	110001 (49)
001000 (8)	(-6, -2)	000010 (2)	(-4, 0)	010010 (18)	(-4, 0)	100010 (34)	(-2, 2)	110010 (50)
001001 (9)	(-8, 0)	000010 (2)	(-6, 2)	010010 (18)	(-6, 2)	100010 (34)	(-4, 4)	110010 (50)
001010 (10)	(-4, -4)	000010 (2)	(-2, -2)	010010 (18)	(-2, -2)	100010 (34)	(0, 0)	110010 (50)
001011 (11)	(-6, -2)	000010 (2)	(-4, 0)	010010 (18)	(-4, 0)	100010 (34)	(-2, 2)	110010 (50)
001100 (12)	(-4, 0)	000011 (3)	(-2, 2)	010011 (19)	(-2, 2)	100011 (35)	(0, 4)	110011 (51)
001101 (13)	(-6, 2)	000011 (3)	(-4, 4)	010011 (19)	(-4, 4)	100011 (35)	(-2, 6)	110011 (51)
001110 (14)	(-2, -2)	000011 (3)	(0, 0)	010011 (19)	(0, 0)	100011 (35)	(2, 2)	110011 (51)

Continua na próxima página

Estado de Origem	Entrada 00		Entrada 01		Entrada 10		Entrada 11	
	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino
001111 (15)	(-4, 0)	000011 (3)	(-2, 2)	010011 (19)	(-2, 2)	100011 (35)	(0, 4)	110011 (51)
010000 (16)	(-2, -2)	000100 (4)	(0, 0)	010100 (20)	(0, 0)	100100 (36)	(2, 2)	110100 (52)
010001 (17)	(-4, 0)	000100 (4)	(-2, 2)	010100 (20)	(-2, 2)	100100 (36)	(0, 4)	110100 (52)
010010 (18)	(0, -4)	000100 (4)	(2, -2)	010100 (20)	(2, -2)	100100 (36)	(4, 0)	110100 (52)
010011 (19)	(-2, -2)	000100 (4)	(0, 0)	010100 (20)	(0, 0)	100100 (36)	(2, 2)	110100 (52)
010100 (20)	(0, 0)	000101 (5)	(2, 2)	010101 (21)	(2, 2)	100101 (37)	(4, 4)	110101 (53)
010101 (21)	(-2, 2)	000101 (5)	(0, 4)	010101 (21)	(0, 4)	100101 (37)	(2, 6)	110101 (53)
010110 (22)	(2, -2)	000101 (5)	(4, 0)	010101 (21)	(4, 0)	100101 (37)	(6, 2)	110101 (53)
010111 (23)	(0, 0)	000101 (5)	(2, 2)	010101 (21)	(2, 2)	100101 (37)	(4, 4)	110101 (53)
011000 (24)	(-4, -4)	000110 (6)	(-2, -2)	010110 (22)	(-2, -2)	100110 (38)	(0, 0)	110110 (54)
011001 (25)	(-6, -2)	000110 (6)	(-4, 0)	010110 (22)	(-4, 0)	100110 (38)	(-2, 2)	110110 (54)
011010 (26)	(-2, -6)	000110 (6)	(0, -4)	010110 (22)	(0, -4)	100110 (38)	(2, -2)	110110 (54)
011011 (27)	(-4, -4)	000110 (6)	(-2, -2)	010110 (22)	(-2, -2)	100110 (38)	(0, 0)	110110 (54)
011100 (28)	(-2, -2)	000111 (7)	(0, 0)	010111 (23)	(0, 0)	100111 (39)	(2, 2)	110111 (55)
011101 (29)	(-4, 0)	000111 (7)	(-2, 2)	010111 (23)	(-2, 2)	100111 (39)	(0, 4)	110111 (55)
011110 (30)	(0, -4)	000111 (7)	(2, -2)	010111 (23)	(2, -2)	100111 (39)	(4, 0)	110111 (55)
011111 (31)	(-2, -2)	000111 (7)	(0, 0)	010111 (23)	(0, 0)	100111 (39)	(2, 2)	110111 (55)
100000 (32)	(-2, -2)	001000 (8)	(0, 0)	011000 (24)	(0, 0)	101000 (40)	(2, 2)	111000 (56)
100001 (33)	(-4, 0)	001000 (8)	(-2, 2)	011000 (24)	(-2, 2)	101000 (40)	(0, 4)	111000 (56)
100010 (34)	(0, -4)	001000 (8)	(2, -2)	011000 (24)	(2, -2)	101000 (40)	(4, 0)	111000 (56)
100011 (35)	(-2, -2)	001000 (8)	(0, 0)	011000 (24)	(0, 0)	101000 (40)	(2, 2)	111000 (56)
100100 (36)	(0, 0)	001001 (9)	(2, 2)	011001 (25)	(2, 2)	101001 (41)	(4, 4)	111001 (57)
100101 (37)	(-2, 2)	001001 (9)	(0, 4)	011001 (25)	(0, 4)	101001 (41)	(2, 6)	111001 (57)
100110 (38)	(2, -2)	001001 (9)	(4, 0)	011001 (25)	(4, 0)	101001 (41)	(6, 2)	111001 (57)
100111 (39)	(0, 0)	001001 (9)	(2, 2)	011001 (25)	(2, 2)	101001 (41)	(4, 4)	111001 (57)
101000 (40)	(-4, -4)	001010 (10)	(-2, -2)	011010 (26)	(-2, -2)	101010 (42)	(0, 0)	111010 (58)
101001 (41)	(-6, -2)	001010 (10)	(-4, 0)	011010 (26)	(-4, 0)	101010 (42)	(-2, 2)	111010 (58)
101010 (42)	(-2, -6)	001010 (10)	(0, -4)	011010 (26)	(0, -4)	101010 (42)	(2, -2)	111010 (58)
101011 (43)	(-4, -4)	001010 (10)	(-2, -2)	011010 (26)	(-2, -2)	101010 (42)	(0, 0)	111010 (58)
101100 (44)	(-2, -2)	001011 (11)	(0, 0)	011011 (27)	(0, 0)	101011 (43)	(2, 2)	111011 (59)
101101 (45)	(-4, 0)	001011 (11)	(-2, 2)	011011 (27)	(-2, 2)	101011 (43)	(0, 4)	111011 (59)
101110 (46)	(0, -4)	001011 (11)	(2, -2)	011011 (27)	(2, -2)	101011 (43)	(4, 0)	111011 (59)
101111 (47)	(-2, -2)	001011 (11)	(0, 0)	011011 (27)	(0, 0)	101011 (43)	(2, 2)	111011 (59)
110000 (48)	(0, -4)	001100 (12)	(2, -2)	011100 (28)	(2, -2)	101100 (44)	(4, 0)	111100 (60)
110001 (49)	(-2, -2)	001100 (12)	(0, 0)	011100 (28)	(0, 0)	101100 (44)	(2, 2)	111100 (60)
110010 (50)	(2, -6)	001100 (12)	(4, -4)	011100 (28)	(4, -4)	101100 (44)	(6, -2)	111100 (60)
110011 (51)	(0, -4)	001100 (12)	(2, -2)	011100 (28)	(2, -2)	101100 (44)	(4, 0)	111100 (60)
110100 (52)	(2, -2)	001101 (13)	(4, 0)	011101 (29)	(4, 0)	101101 (45)	(6, 2)	111101 (61)
110101 (53)	(0, 0)	001101 (13)	(2, 2)	011101 (29)	(2, 2)	101101 (45)	(4, 4)	111101 (61)
110110 (54)	(4, -4)	001101 (13)	(6, -2)	011101 (29)	(6, -2)	101101 (45)	(8, 0)	111101 (61)
110111 (55)	(2, -2)	001101 (13)	(4, 0)	011101 (29)	(4, 0)	101101 (45)	(6, 2)	111101 (61)
111000 (56)	(-2, -6)	001110 (14)	(0, -4)	011110 (30)	(0, -4)	101110 (46)	(2, -2)	111110 (62)

Continua na próxima página

Estado de Origem	Entrada 00		Entrada 01		Entrada 10		Entrada 11	
	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino	Saída	Destino
111001 (57)	(-4, -4)	001110 (14)	(-2, -2)	011110 (30)	(-2, -2)	101110 (46)	(0, 0)	111110 (62)
111010 (58)	(0, -8)	001110 (14)	(2, -6)	011110 (30)	(2, -6)	101110 (46)	(4, -4)	111110 (62)
111011 (59)	(-2, -6)	001110 (14)	(0, -4)	011110 (30)	(0, -4)	101110 (46)	(2, -2)	111110 (62)
111100 (60)	(0, -4)	001111 (15)	(2, -2)	011111 (31)	(2, -2)	101111 (47)	(4, 0)	111111 (63)
111101 (61)	(-2, -2)	001111 (15)	(0, 0)	011111 (31)	(0, 0)	101111 (47)	(2, 2)	111111 (63)
111110 (62)	(2, -6)	001111 (15)	(4, -4)	011111 (31)	(4, -4)	101111 (47)	(6, -2)	111111 (63)
111111 (63)	(0, -4)	001111 (15)	(2, -2)	011111 (31)	(2, -2)	101111 (47)	(4, 0)	111111 (63)

A treliça possui 64 (2^6) nós de estados nominados de 0 a 63. De cada nó derivam quatro ramos ou transições de estados, correspondentes às variações da entrada de dois *bits* (símbolos de entrada). Na primeira transição da treliça considerou-se como estado inicial o estado 0. Do estado 0 ocorre transição para o estado 0, 16, 32 ou 48 a depender da entrada do codificador. Cada ramo da treliça apresenta um rótulo que descreve o par de *bits* de entrada seguido pelo par de símbolos *wavelet* produzidos pelo codificador naquela transição. Por exemplo, se a entrada binária for 00, o codificador permanece no estado 0 e o ramo correspondente a essa transição, rotulado com 00/(-4, 0), indica que foi gerado na saída do codificador o par de símbolos *wavelet* -4 e 0.

Na segunda iteração, descreve-se as quatro transições decorrentes dos quatro estados derivados da primeira iteração. Portanto, a treliça apresenta nessa iteração 16 ramos distintos. Após três iterações a treliça apresenta todas as 256 transições possíveis e se repete a cada iteração.

Os resultados das simulações sobre o desempenho dos sistemas CWC, sobre canal Rayleigh, são apresentados no Capítulo 8, Figura 29.

O desempenho de um código em treliça depende, dentre outras coisas, das propriedades de distância do mesmo. Considerando uma $SNR > 15dB$, de moderada para alta, costuma-se estimar a probabilidade de erro de um sistema codificado em treliça mediante o cálculo de limitantes de desempenho obtidos a partir do espectro de distâncias do código. O espectro de distâncias de um código consiste num conjunto dos pares $\{d^2, A_{d^2}\}$, em que d representa a distância euclidiana entre os sinais com energia normalizada de um percurso errado e os sinais do percurso correto na treliça do código, e A_{d^2} é a *multiplicidade* de d , ou seja, o número de vezes em que a distância d ocorre (ROUANNE; COSTELLO, 1989).

A distância euclidiana entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) é a menor distância entre eles, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

A distância euclidiana entre duas sequências \mathbf{x} e \mathbf{y} de mesmo comprimento n consiste na

distância entre pontos n -dimensionais correspondentes às mesmas, ou seja,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |x_i - y_i|^2}.$$

A distância euclidiana quadrática entre duas sequências, $d^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - y_i|^2$, influencia em proporção inversa a probabilidade do decodificador decodificar erroneamente uma sequência. Por outro lado, o espectro de distâncias juntamente com a multiplicidade determinam a capacidade de correção de um código (BAHL et al., 1972).

Na prática, o desempenho de sistemas codificados em treliça é estimado empregando limitantes superiores, a partir da probabilidade de ocorrência do primeiro evento erro. Em razão das alterações sofridas pelo sinal ao atravessar um canal de comunicação real, pode ocorrer da sequência decodificada ser diferente da transmitida e isso significa que, na treliça do código, o decodificador trilhou um percurso diferente daquele trilhado pelo codificador. Um evento erro ocorre quando o decodificador desvia do percurso correto e, após algumas iterações, retorna a esse percurso, como ilustra a Figura 20.

Observa-se na Figura 20 que um evento erro iniciou-se no instante j , quando o decodificador escolheu um percurso diferente daquele produzido pelo codificador, e terminou no instante $j + L$. Neste caso, L representa o *comprimento do evento erro*. A probabilidade de ocorrer um evento erro, P_{EvEr} , consiste na probabilidade de que o decodificador escolha qualquer percurso diferente daquele trilhado pelo codificador. Assim, P_{EvEr} é a probabilidade da união de eventos erros e_{ij} , como na Figura 20. Então,

$$P_{EvEr} = P(\cup_j \cup_i \mathbf{e}_{ij} | \mathbf{c}), \quad (4.5)$$

sendo \mathbf{e}_{ij} o i -ésimo percurso errado partindo do percurso correto \mathbf{c} no instante j (SCHLEGEL; PEREZ, 2004). Por conseguinte, a probabilidade média dos eventos erros sobre todos os percursos possíveis pode ser expressa por

$$\overline{P_{EvEr}} = \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) P(\cup_j \cup_i \mathbf{e}_{ij} | \mathbf{c}), \quad (4.6)$$

em que $p(\mathbf{c})$ é a probabilidade do codificador trilhar um percurso \mathbf{c} .

Pode-se simplificar a Equação 4.6 assumindo que a probabilidade da união de eventos erros distintos é menor ou igual ao somatório das probabilidades dos eventos erros ocorrerem individualmente (SCHLEGEL; PEREZ, 2004)

$$P(\cup E_i) \leq \sum_i P(E_i).$$

Portanto,

$$\overline{P_{EvEr}} \leq \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) \sum_j P(\cup_i \mathbf{e}_{ij} | \mathbf{c}). \quad (4.7)$$

sendo que $P(\cup_i \mathbf{e}_{ij} | \mathbf{c})$ é a probabilidade da união de todos os i -ésimos caminhos errados partindo do caminho correto c , no instante j .

Se o comprimento da sequência transmitida, l , for muito grande, $\overline{P_{EvEr}}$ também será grande. Assim, se $l \rightarrow \infty$, $\overline{P_{EvEr}} \rightarrow 1$, não sendo essa uma boa medida para o desempenho do código (SCHLEGEL; PEREZ, 2004). Para obter uma medida mais adequada para o desempenho do código, normaliza-se $\overline{P_{EvEr}}$ no tempo e define-se

$$\overline{P_e} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \overline{P_{EvEr}}. \quad (4.8)$$

Se uma treliça for invariante no tempo, pode-se eliminar o somatório sobre j na Equação 4.7, obtendo-se

$$\overline{P_e} \leq \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) P(\cup_i \mathbf{e}_i | \mathbf{c}). \quad (4.9)$$

em que \mathbf{e}_i é o evento erro que se inicia num instante de tempo j arbitrário, mas fixo. Aplicando-se o limitante da união, obtém-se (SCHLEGEL; PEREZ, 2004)

$$\overline{P_e} \leq \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) \sum_i P(\mathbf{e}_i | \mathbf{c}). \quad (4.10)$$

Observa-se que a sequência correta \mathbf{c} até um instante j e após o instante $j + L$ é irrelevante para o percurso errado \mathbf{e}_i de comprimento L (SCHLEGEL; PEREZ, 2004). A Equação 4.10 pode ser interpretada como a *probabilidade do primeiro evento erro*, ou seja, de que o decodificador inicie seu primeiro evento erro no instante j .

Considerando um canal AWGN complexo, com ruído de variância $N_0/2$, por dimensão, e que há apenas duas hipóteses de percurso, \mathbf{c} e \mathbf{e}_{ij} , pode-se verificar que a chamada *probabilidade de erros de pares* é dada por (SCHLEGEL; PEREZ, 2004)

$$P(\mathbf{e}_i | \mathbf{c}) = Q\left(\sqrt{d_{ci}^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right), \quad (4.11)$$

em que R é a taxa do código de canal empregado, E_b é a energia por *bit* transmitido e d_{ci}^2 é a distância euclidiana quadrática entre os sinais de energia normalizada no percurso errado \mathbf{e}_{ij} e os sinais no percurso correto \mathbf{c} . Então, o limitante superior da equação 4.10 torna-se

$$\overline{P_e} \leq \sum_{\mathbf{c}} P(\mathbf{c}) \sum_{\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}_j} Q\left(\sqrt{d_{ci}^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \quad (4.12)$$

$$= \sum_i A_{d_i^2} Q\left(\sqrt{d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right), \quad (4.13)$$

$d_i^2 \in \mathcal{D}$

em que \mathcal{D} denota o conjunto de todas as possíveis distâncias euclidianas quadráticas d_i^2 entre sinais de \mathbf{c} e \mathbf{e}_i e $A_{d_i^2}$ a multiplicidade de d_i^2 numa treliça particular. O menor d_i^2 encontrado numa treliça é chamado de distância euclidiana quadrática livre, simplesmente *distância livre*, e denotado por d_{livre} .

Segundo Rouanne e Costello (1989), um código em treliça é regular se somente se a distância entre duas palavras código correspondendo a sequências de informação distintas depende somente da soma binária das mesmas e o conjunto de distâncias entre caminhos

incorretos e o caminho correto não depende desse último. Na prática pode-se adotar o caminho gerado pela sequência de informação com todos os elementos zero como sendo a transmitida facilitando assim os cálculos do espectro de distâncias. Ungerboeck (1982) mostrou que, para certos códigos regulares, a distância livre pode ser calculada assumindo um caminho arbitrário, como sendo o caminho correto e posteriormente, foi demonstrado que essa suposição pode ser estendida para códigos não regulares, contudo ao custo de um algoritmo mais complexo (ROUANNE; COSTELLO, 1989).

Normalmente os algoritmos para o cálculo do espectro de distâncias e multiplicidades de códigos convolucionais são baseados em busca na treliça (BAHL et al., 1972; CEDERVALL; JOHANNESSON, 1989) ou realizando operações com inversão de matrizes (CONAN, 1984; TROFIMOV; KUDRYASHOV, 1995). Analiticamente, uma aproximação para a probabilidade de erro de sistemas codificados em treliça utiliza o cálculo da probabilidade de ocorrência do primeiro evento erro mediante o emprego do limitante da união. Quando a recepção é por máxima verossimilhança, a probabilidade de erro do sistema está relacionada diretamente com o espectro de distâncias do código (SCHLEGEL, 1997).

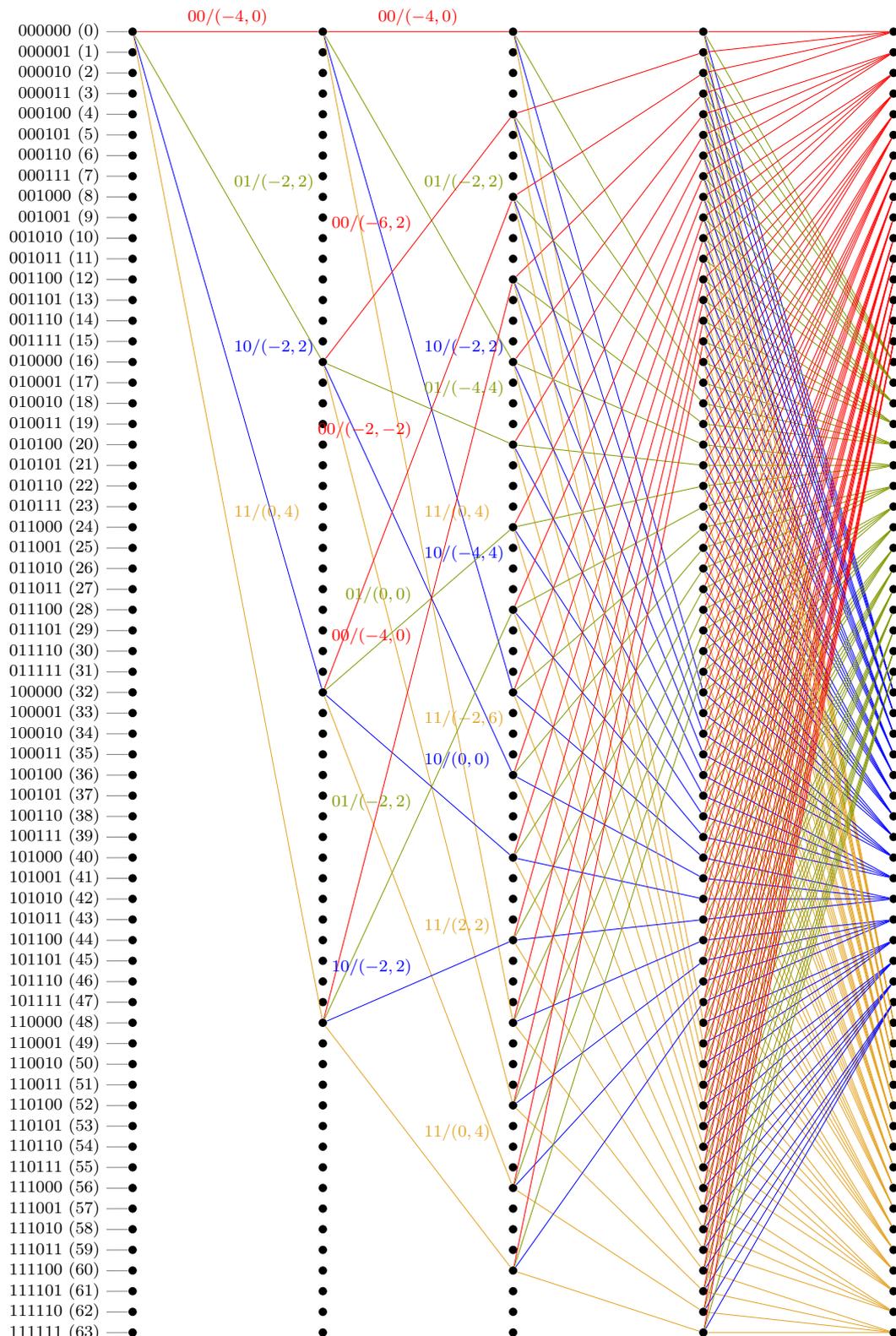


Figura 19 – Treliça equivalente ao código $CWC_{2 \times 8}$, $R = 1$, formatação da fonte $\{0, 1\} \rightarrow \{-1, +1\}$. O rótulo de cada ramo da treliça indica os *bits* de entrada e o par de símbolos *wavelet* de saída correspondentes àquela transição.

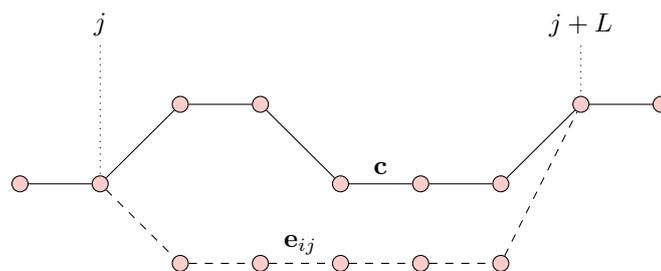


Figura 20 – Exemplo de evento erro, em que \mathbf{e}_{ij} denota o i -ésimo percurso errado, de comprimento L , partindo do percurso correto \mathbf{c} no instante j . (SCHLEGEL; PEREZ, 2004, p. 156).

5 Canal de comunicação

Um sinal transmitido através de canal de comunicação real sofre, ao percorrê-lo, com distorções de fase e atenuação, seja em visada direta ou por múltiplos percursos. Para o caso de recepção móvel, há ainda o deslocamento da frequência da portadora devido ao efeito Doppler (LATHI; DING, 2012).

Sinais de rádio ao propagar no espaço livre, geralmente, podem ser acometidos de (LI; STUBER, 2006): reflexão, difração e dispersão. De forma geral, um sinal sofre atenuação, sombreamento e desvanecimento por múltiplos percursos entre o transmissor e o receptor. Estes observados na transmissão provocam na recepção o aparecimento de réplicas do sinal transmitido atenuadas, atrasadas no tempo e deslocadas em frequência, que resultam no desvanecimento do sinal recebido (MINH; BAIG; MUGHAL, 2009).

Em função do comportamento do sinal na entrada no receptor, classifica-se um desvanecimento como lento ou rápido, seletivo em frequência ou plano. Um desvanecimento lento ocorre quando a maioria dos grandes refletores e difratores ao longo do percurso do sinal transmitido está distante do receptor. Com isso, o movimento do receptor em relação a esses objetos distantes é pequeno, conseqüentemente as mudanças sofridas pelo sinal em decorrência das imperfeições do canal de comunicação ocorrem muito lentamente. O desvanecimento lento expressa-se por uma perda da potência média do sinal e pode ser reduzido empregando-se controle automático de ganho (LATHI; DING, 2012).

Um desvanecimento rápido é causado por reflexões em objetos próximos e pelo movimento do receptor relativamente a esses objetos. Assim, o sinal recebido é decomposto em várias componentes que se somam que ao atingirem aleatoriamente o receptor e se combinam de modo construtivo ou destrutivo dependendo de suas fases relativas (HAYKIN; MOHER, 2008), e um desvanecimento é seletivo em frequência quando o espalhamento por atraso do canal é maior do que o tempo de símbolo recebido. Assim, a banda de coerência do canal é menor do que a largura de faixa do sinal que o percorre e de modo contrário, diz-se que o desvanecimento é plano (LI; STUBER, 2006; SIMON; ALOUINI, 2000).

Quando o sinal recebido sofre desvanecimento ao longo do canal de comunicação chega ao receptor com flutuação de amplitude e fase. Em geral, a menos que uma medida como equalização do sinal seja adotada, um deslocamento da fase do sinal tem o efeito de degradar severamente o desempenho do sistema, quando a demodulação é do tipo coerente (LI; STUBER, 2006; SIMON; ALOUINI, 2000).

Sendo o sinal recebido através de um canal com múltiplos percursos composto de uma série de réplicas atenuadas, atrasadas e defasadas do sinal transmitido, pode-se expressar matematicamente a resposta ao impulso, em banda básica, de um canal de rádio com

desvanecimento seletivo, variante no tempo, como (MINH; BAIG; MUGHAL, 2009)

$$h(t) = \sum_{i=0}^{N_m-1} \alpha(t, \tau_i) e^{j2\pi f \tau_i(t)} \delta(t - \tau_i(t)), \quad (5.1)$$

em que $\alpha(t, \tau_i)$ e $\tau_i(t)$ são amplitude e atraso, respectivamente, da i -ésima componente dos múltiplos percursos no tempo t . O termo $e^{j2\pi f \tau_i(t)}$ representa o deslocamento de fase devido à propagação no espaço livre da i -ésima componente do sinal, N_m é o número de múltiplos percursos do canal, $\delta(t)$ é a função delta de Dirac, e o termo $\alpha(t, \tau_0)$, em qualquer instante t , corresponde ao caminho mais curto entre o transmissor e o receptor.

Dependendo da natureza do ambiente onde ocorre a propagação do sinal, adota-se diferentes modelos para descrever o comportamento estatístico do desvanecimento por múltiplos percursos. O desvanecimento Rayleigh é frequentemente adotado quando não há visada entre a antena do transmissor e do receptor (SIMON; ALOUINI, 2000). Os modelos estatísticos de Rice e de Nakagami- m também são muito usados para canal de comunicação com desvanecimento. O primeiro é particularmente apropriado para enlaces que apresentem uma componente do sinal recebida em visada direta entre as antenas transmissora e receptora, além das componentes de múltiplos percursos. O segundo, é um modelo que melhor representa o ambiente urbano, com um número grande de múltiplos percursos (BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998). Nessa tese é adotado o modelo de Rayleigh apresentado em Akram (2007), para canal com desvanecimento visando obter, por simulação, a taxa de erro de *bits* para sistemas CWC, sobre canal com desvanecimento plano.

De acordo com Biglieri, Proakis e Shamai (1998), um canal com múltiplos percursos e desvanecimento é geralmente caracterizado como um sistema linear e variante no tempo. Variações temporais da resposta ao impulso, $c(t, \tau)$, ou da resposta em frequência, $C(t, f)$, resultam num espalhamento na frequência do sinal transmitido através do canal, também conhecido como **espalhamento Doppler**.

Considerando que o canal com múltiplos percursos apresenta espalhamento decorrelacionado e é estacionário no sentido amplo, os atrasos das componentes do sinal propagando neste são, também, decorrelacionados. Assim, um duplo espalhamento (tempo e frequência) do canal pode ser caracterizado pela função espalhamento $S(\tau, \lambda)$, a qual é uma medida do espectro de potência referente aos atrasos, τ , e ao deslocamento, λ , da frequência da portadora.

Pelo cálculo da média da função espalhamento $S(\tau, \lambda)$, pode-se obter tanto o espectro de potência dos atrasos devidos aos múltiplos percursos do canal

$$S_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, \lambda) d\lambda,$$

quanto o espectro de potência Doppler

$$S_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, \lambda) d\tau.$$

Desta forma, define-se o **espalhamento devido aos múltiplos percursos**, T_m , como sendo o intervalo sobre o qual o espectro de potência das componentes atrasadas, $S_c(\tau)$, é diferente de zero. Da mesma forma, define-se o **espalhamento Doppler** do canal, B_d , como sendo o intervalo sobre o qual o espectro de potência Doppler, $S_c(\lambda)$, é diferente de zero. O valor do espalhamento Doppler, B_d , dá a medida de quão rápido a resposta do canal ao impulso varia com o tempo e quanto maior o valor de B_d , mais rápido a resposta do canal ao impulso muda com o tempo. O espalhamento Doppler leva à definição do parâmetro denominado **tempo de coerência do canal**, $T_{coe} = 1/B_d$. Assim, um canal com grande tempo de coerência possui desvanecimento lento, enquanto um pequeno tempo de coerência caracteriza um canal com desvanecimento rápido.

Define-se, também, a **largura de faixa de coerência do canal**, $B_{coe} = 1/T_m$. Este parâmetro indica a largura de faixa cujas componentes de frequência do sinal transmitido são similarmente afetadas pela resposta do canal, ou seja, a faixa de frequências sobre as quais o desvanecimento é altamente correlacionado. Outro parâmetro importante é o **fator de espalhamento** definido como $F_{esp} = T_m B_d$. Se um canal apresenta $F_{esp} < 1$, este é denominado sub-espalhado, caso contrário, sobre-espalhado. Se $F_{esp} \ll 1$, a resposta do canal ao impulso pode ser facilmente medida, podendo ser usada no receptor para a demodulação do sinal recebido e no transmissor para otimizar a transmissão do sinal. Quando $F_{esp} > 1$, a medida da resposta do canal ao impulso é extremamente difícil, senão impossível de se obter (BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998).

5.1 Modelamento

O crescimento da demanda por comunicação sem fio tem tornado ainda mais importante determinar o limite de capacidade de canais com desvanecimento. Goldsmith e Varaiya (1997) obtiveram a capacidade de um canal com desvanecimento para transmissão ponto a ponto, quando o nível de desvanecimento era conhecido tanto no transmissor, quanto no receptor, ou somente no receptor. A capacidade do canal com desvanecimento, com informação sobre o estado do canal (CSI, do inglês *channel state information*) disponível tanto no transmissor quanto no receptor, é alcançada quando o transmissor adapta a potência do sinal, a taxa de dados e o esquema de codificação às variações do canal.

Canais cuja probabilidade condicional de saída depende do seu estado variante no tempo têm sido muito estudados. De acordo com o pressuposto adotado sobre o estado do canal e sobre a disponibilidade desta informação, CSI, seja no transmissor e/ou no receptor, surgem vários problemas, cada um relacionado a alguma situação física de interesse (CAIRE; SHAMAI, 1999).

Uma forma do receptor obter alguma CSI é pela inserção de símbolos de treinamento no sinal transmitido. O receptor pode esperar até o final da transmissão antes de decodificar, de modo que tenha toda a informação sobre o estado do canal ao longo da sequência recebida.

Para a CSI no transmissor, [Caire e Shamai \(1999\)](#) distinguem os canais cujas informações sobre o estado do canal são obtidas, pelo transmissor, de forma causal, dos canais cujas informações obtidas pelo transmissor são não causais. No primeiro caso, introduzido por [Shannon \(1958\)](#), o transmissor num instante n tem conhecimento da informação desde o instante 1 até o instante n . Para os canais não causais, tratados por [Gelfand e Pinsker \(1980\)](#), o transmissor conhece antecipadamente o estado do canal desde o início da transmissão até o seu fim.

Os canais causais são mais adequados para situações nas quais o estado do canal é medido sequencialmente. Ou seja, tendo-se um canal com desvanecimento no qual medidas da atenuação instantânea são obtidas no receptor e enviadas para o transmissor através de um enlace de realimentação visando, por exemplo, a obtenção de uma melhor política de controle de potência. Os canais não causais são mais adequados às situações nas quais o transmissor pode perceber o canal previamente a toda a transmissão ou seja, quando, por exemplo, a informação codificada está na memória de um computador ([CAIRE; SHAMAI, 1999](#)).

Há fundamentalmente dois tipos de canal com desvanecimento:

- Canal com desvanecimento plano ou não seletivo em frequência;
- Canal com desvanecimento seletivo em frequência.

5.1.1 Canal com desvanecimento não seletivo em frequência

A escolha do modelo do canal tem que levar em consideração as características do sinal transmitido para poder representá-lo da forma mais conveniente ([BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998](#)).

Se $x(t)$ é o equivalente passa-baixas do sinal transmitido sobre o canal, sem considerar o efeito do ruído aditivo, e $X(f)$ sua representação no domínio da frequência, o sinal recebido $r(t)$ pode ser representado na forma

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \tau)x(t - \tau)d\tau,$$

ou

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t, f)X(f)e^{j2\pi ft}df.$$

Se a largura de faixa, W , do sinal transmitido, $x(t)$, é muito menor do que a banda de coerência do canal, B_{coe} , todas as componentes de frequência daquele sofrem a mesma atenuação e deslocamento de fase ao atravessá-lo. Este tipo de canal é chamado de não seletivo em frequência, ou com desvanecimento plano.

Para um canal com desvanecimento plano, sem considerar o efeito do ruído aditivo, pode-se descrever o sinal recebido como

$$r(t) = C(t, 0) \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df,$$

ou

$$r(t) = \alpha(t)e^{j\theta(t)}x(t),$$

sendo $C(t, 0) \triangleq \alpha(t)e^{j\theta(t)}$, $\alpha(t)$ a envoltória de amplitude e $\theta(t)$ a fase da resposta do canal sobre o sinal passa-baixas equivalente.

5.1.2 Canal com desvanecimento seletivo em frequência

Quando a largura de faixa W do sinal é maior do que a banda de coerência B_{coe} do canal sobre o qual é transmitido, as componentes de frequência separadas a uma distância maior do que B_{coe} ficam submetidas a ganhos e deslocamento de fase diferentes. Neste caso, diz-se que o canal é seletivo em frequência (BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998). As variações temporais de $C(t, f)$ produzem um efeito de desvanecimento do sinal, o qual é evidenciado como variações de amplitude das componentes de frequência do sinal recebido.

Quando a largura de faixa W do sinal é muito maior do que a B_{coe} do canal com múltiplos percursos, as componentes do sinal transmitido que chegam ao receptor separadas por um atraso de pelo menos $1/W$ podem ser representadas utilizando-se o teorema da amostragem. Neste caso, a resposta do canal ao impulso pode ser representada por (PROAKIS, 1995)

$$c(t, \tau) = \sum_L^{n=1} c_n(t)\delta(\tau - n/W) \quad (5.2)$$

e a correspondente função de transferência variante no tempo por

$$C(t, f) = \sum_L^{n=1} c_n(t)e^{j2\pi fn/W},$$

em que $c_n(t)$ é o ganho complexo variante no tempo aleatoriamente do n -ésimo percurso do canal e L é o número de múltiplos percursos que compõem o canal e cujo valor é dado por $L = \lfloor T_m W \rfloor + 1$, em que T_m é a medida máxima do espalhamento Doppler.

Um canal seletivo em frequência cuja resposta ao impulso é $c(t, \tau)$ pode ser representado por uma linha de atrasos com L coeficientes com ganhos complexos e variantes aleatoriamente no tempo $c_n(t)$. Nesse modelo de canal, o ganho do n -ésimo coeficiente que varia aleatoriamente no tempo pode ser representado por $c_n(t) = \alpha_n(t)e^{j\theta_n(t)}$, com $n = 1, 2, \dots, L$, sendo $\alpha_n(t)$ as amplitudes e $\theta_n(t)$ as fases correspondentes.

Os ganhos $c_n(t)$ dos coeficientes são geralmente modelados como processos aleatórios mutuamente descorrelacionados, estacionários no sentido amplo, com funções de autocorrelação dadas por

$$\phi_n(\tau) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} c_n^*(t) c_n(t + \tau) \right],$$

com $n = 1, 2, \dots, L$, e espectro Doppler

$$S_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(\tau) e^{-j2\pi\lambda\tau} d\tau.$$

Assim, cada componente dos múltiplos percursos pode ser modelada com o próprio e apropriado espectro de potência Doppler e correspondente espalhamento Doppler (BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998).

5.1.3 Modelos estatísticos das componentes do desvanecimento

O desenvolvimento de simuladores de canais de rádio geralmente é estimulado pelos altos custos, imprecisões e falta de reprodutibilidade dos resultados obtidos, quando da realização de testes de campo. O objetivo primário do simulador é reproduzir o mais realisticamente as propriedades estatísticas do canal, possibilitando o projeto e, em laboratório, a análise de desempenho de sistemas de comunicação (LUO; ZHANG, 2007).

Pode-se classificar os simuladores de canal de comunicação como modelos baseados em somatório de senóides (modelo de Clarke e suas variantes) e modelos baseados em transformação inversa discreta de Fourier (modelo de Smith e suas variantes) (POP, 1999; YOUNG; BEAULIEU, 2000).

Quando há um número grande de componentes do sinal transmitido espalhadas ao longo do percurso entre a antena transmissora e a antena receptora, as quais compõem o sinal recebido, como ocorre na propagação ionosférica ou troposférica, a aplicação do teorema do limite central conduz a um modelo de processo gaussiano para a resposta do canal ao impulso (BIGLIERI; PROAKIS; SHAMAI, 1998).

Se o processo possui média zero, então as amplitudes da resposta do canal ao impulso em qualquer instante de tempo apresentam uma distribuição de probabilidade de Rayleigh e as fases são uniformemente distribuídas no intervalo $(0; 2\pi)$. A função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) de Rayleigh, associada à envoltória $R = |c(t, \tau)|$ da Equação 5.2, é dada por

$$f_R(r) = \frac{2r}{\omega} e^{-r^2/\omega}, \quad r \geq 0, \quad (5.3)$$

sendo $\omega = E[R^2]$. A distribuição de Rayleigh é caracterizada somente pelo parâmetro ω .

5.1.4 Desvanecimento Rayleigh

O canal com desvanecimento Rayleigh é um modelo importante para canais de rádio móvel, podendo-se encontrar na literatura diferentes métodos para a sua geração (LUO; ZHANG, 2007).

Sabendo que a resposta discreta ao impulso de um canal complexo com múltiplos percursos, pode ser escrita como apresentado na Equação 5.1, um canal com desvanecimento resultante de M percursos pode ser descrito como um filtro de resposta finita ao impulso, FIR (do inglês *Finite Impulse Response*), variante no tempo (AKRAM, 2007)

$$h(\tau, t) = a_0(t)\delta(\tau - \tau_0(t)) + a_1(t)\delta(\tau - \tau'_1(t)) + \cdots + a_{M-1}(t)\delta(\tau - \tau'_{M-1}(t)),$$

em que $a_i(t)$ é o ganho complexo variante no tempo do i -ésimo percurso, $\tau_i(t)$ é o atraso excedente do i -ésimo percurso, $\tau'_i(t) = \tau_i(t) + \tau_{i-1}(t)$ e $\delta(t)$ é o delta de Dirac. Desta forma, um canal de comunicação com desvanecimento por múltiplos percursos pode ser implementado como um filtro FIR pela geração de ganhos complexos, $a(t, \tau_i)$, e defasagens, $\tau_i(t)$. A implementação do modelo pode ainda ser facilitada considerando o atraso τ_i invariante no tempo (AKRAM, 2007).

Porém, um método simples para implementar um simulador de desvanecimento é gerar dois ruídos brancos gaussianos independentes. Um representará a componente real e o outro a componente imaginária que se somarão produzindo um ruído complexo (veja a Figura 21).

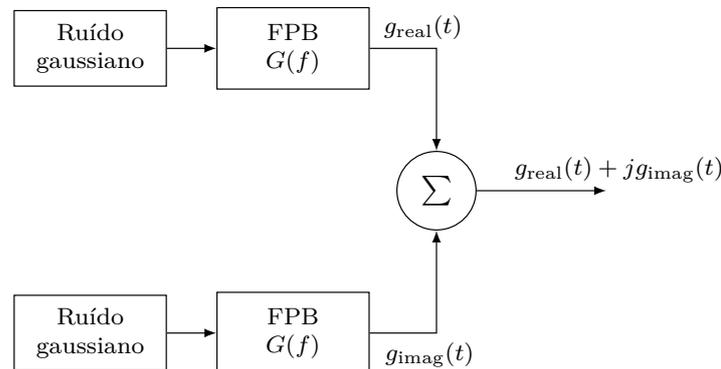


Figura 21 – Simulador de desvanecimento baseado em filtro de ruído gaussiano com único *tap* (AKRAM, 2007).

As densidades espectrais de potência de $g_{real}(t)$ e $g_{imag}(t)$ na Figura 21 são determinadas pelo quadrado do módulo da resposta em amplitude dos filtros passa-baixas, FPB, cujas funções de transferência são $G(f)$. Os filtros são tipicamente de primeira ordem. Neste caso, o processo de desvanecimento é conhecido como processo de Markov (AKRAM, 2007).

Para produzir uma envoltória desvanecida de Rayleigh, as duas fontes de ruído branco gaussiano devem ter média zero e variâncias iguais a 0,5. Devido à simplicidade, esse modelo apresenta limitação quanto ao espectro Doppler. Para melhorar o modelo, é necessária a implementação de filtros passa-baixas de ordens superiores, porém ao custo de significativo tempo de simulação (AKRAM, 2007).

Nesta tese, adota-se o modelo de canal de Rayleigh mais simples, com desvanecimento plano, e entrelaçamento perfeito do canal.

6 Códigos com diversidades de espaço e de tempo

Neste capítulo apresenta-se um código de bloco espaçotemporal (STBC) (do inglês, *space-time block code*) cujo desempenho, em termos de taxa de erro de *bits*, sobre canal Rayleigh plano, é utilizado como referência para comparação com o desempenho de sistemas CWC, sob as mesmas condições, e assim, obter uma visão mais geral se os esquemas CWC são competitivos e sob quais circunstâncias.

Para Alamouti (1998) é muito difícil reduzir efetivamente a taxa de erro em sistema de comunicação digital sem fio operando sobre canal com desvanecimento por múltiplos percursos. Para sistemas atualmente em uso ou que serão empregados no futuro, a melhoria da relação entre a potência do sinal e a potência do ruído, SNR, (do inglês, *signal-noise ratio*) não poderá ser obtida pelo aumento da potência de transmissão, ou pelo aumento da largura de banda de frequência. Portanto, é fundamental combater ou reduzir efetivamente os efeitos do desvanecimento de canal.

Dentre as técnicas aplicadas visando combater os efeitos do desvanecimento por múltiplos percursos, podem-se destacar as que apresentam diversidade no tempo ou na frequência. Pode-se, ainda, melhorar os esquemas com diversidade temporal aplicando o embaralhamento da sequência de informação a ser transmitida, juntamente com um código corretor de erros. Por outro lado, a diversidade em frequência, também, pode ser melhorada aplicando espalhamento espectral. Contudo, quando o canal apresenta variação lenta, o embaralhamento da informação gera grande atraso no sistema prejudicando o seu desempenho. Contudo, as técnicas de espalhamento espectral tornam-se sem efetividade, quando o atraso por espalhamento do canal é relativamente pequeno (ALAMOUTI, 1998).

Uma abordagem apresentada por Tarokh, Seshadri e Calderbank (1998) emprega codificação em treliça com diversidade espaçotemporal (do inglês, *space-time trellis coding*), na qual os símbolos são codificados de acordo com as antenas pelas quais serão simultaneamente transmitidos e na recepção são decodificados por máxima verossimilhança. Esse esquema é eficaz no combate aos efeitos do desvanecimento de canal, uma vez que combina os benefícios da codificação com correção de erro para frente, FEC, (do inglês, *forward error correction*), com a diversidade de transmissão produzindo ganho de desempenho no sistema. Contudo, gera custo adicional de processamento, pois este aumenta exponencialmente em função da eficiência espectral (*bits/s/Hz*), e com a ordem de diversidade, tornando-se proibitivo para algumas aplicações (ALAMOUTI, 1998).

Segundo Jakes (1974 apud ALAMOUTI, 1998), a técnica de diversidade espacial utilizando múltiplas antenas é efetiva e muito empregada para reduzir os efeitos nocivos dos

múltiplos percursos. Todavia, essa técnica tem se mostrado mais atraente, quando aplicada na estação de base, pois usar múltiplas antenas nos receptores e realizar a combinação ou seleção (chaveamento) do sinal recebido, ainda, implica no aumento de custo, de tamanho e de consumo de energia das unidades remotas. Desta forma, Alamouti (1998) propôs um esquema com diversidade espacial, com duas antenas na transmissão que melhora a qualidade do sinal mesmo utilizando somente uma antena na recepção. A ordem de diversidade para este sistema é igual ao esquema de recepção combinada, com taxa máxima, MRRC (do inglês, *maximal-ratio receive combining*), utilizando duas antenas na recepção e uma antena na transmissão.

O esquema de Alamouti (1998) não necessita de realimentação de informação do receptor ao transmissor, sobre as condições do canal, também, não requer aumento da largura de faixa, pois a redundância (diversidade) é aplicada no espaço. A diminuição da sensibilidade do sistema de comunicação digital sem fio ao desvanecimento produz aumento do desempenho do sistema, pois torna-se possível a aplicação de esquemas com modulações com níveis mais altos. Isso permite também diminuir o fator de reuso de frequência em ambiente celular, sendo efetivo em todas as aplicações onde a capacidade do sistema é limitada pelo desvanecimento por múltiplos percursos (ALAMOUTI, 1998).

A Figura 22 apresenta um diagrama em blocos de um sistema de comunicação, com múltiplas antenas de transmissão e de recepção.

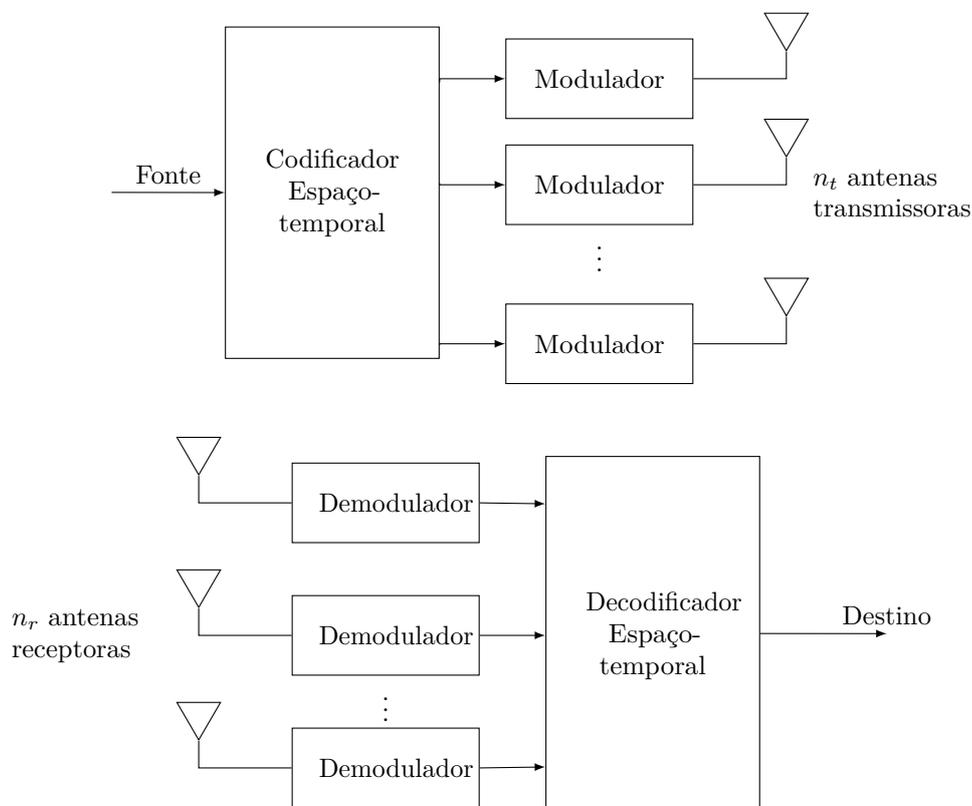


Figura 22 – Sistema de comunicação com múltiplas antenas de transmissão e recepção (PRO-AKIS; SALEHI, 2008)

Os códigos com diversidade espacial são projetados para proporcionar maior ganho de diversidade de antenas, tanto na transmissão, quanto de recepção, buscando sempre empregar algoritmos de decodificação simples. Tarokh, Jafarkhani e Calderbank (1998) introduziram os códigos com diversidades de espaço e de tempo (STBC) para transmissão de sinais sobre canal com desvanecimento Rayleigh utilizando múltiplas antenas transmissoras. Os dados codificados são divididos em tantos fluxos, quantas forem as antenas de transmissão e transmitidos simultaneamente. Na recepção, o sinal recebido em cada antena consiste de uma combinação linear dos sinais transmitidos acrescidos do ruído de canal. A decodificação pode ser realizada de maneira simples aproveitando a estrutura ortogonal do código e utilizando algoritmo de decodificação por máxima verossimilhança. O desempenho destes códigos foi analisado por Tarokh, Jafarkhani e Calderbank (1999).

Um STBC é definido por uma matriz geradora, $\mathbf{G}_{m \times n}$, cujos elementos $\{e_{ij}\}$ são pontos correspondentes aos sinais de uma constelação M -ária resultantes de mapeamento dos *bits* da fonte (PROAKIS; SALEHI, 2008).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{11} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Por exemplo, um código definido pela Equação 6.1 se aplicado sobre um sistema com n antenas transmissoras, cada linha da matriz contém n elementos correspondentes aos sinais transmitidos simultaneamente pelas n antenas, numa específica janela de tempo. Assim, a primeira linha $e_{11}, e_{11}, \dots, e_{1n}$ representa a transmissão dos sinais através das n antenas, na primeira janela de tempo, a segunda linha $e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n}$ representa a retransmissão dos mesmos sinais, na segunda janela de tempo, e assim sucessivamente, até a m -ésima linha $e_{m1}, e_{m2}, \dots, e_{mn}$, que representa a $(m - 1)$ -ésima retransmissão através das n antenas, na m -ésima janela de tempo.

6.1 Esquema de Alamouti com duas antenas transmissoras e uma receptora

Seja um esquema de transmissão de sinais que possui duas antenas de transmissão e uma de recepção apresentado na Figura 23. No transmissor estão incluídos os módulos de codificação e de transmissão dos símbolos de informação. O processo de codificação espaçotemporal é realizado por uma matriz geradora definida pela Equação 6.2 e na recepção se realiza a combinação dos sinais recebidos e a detecção por máxima verossimilhança.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

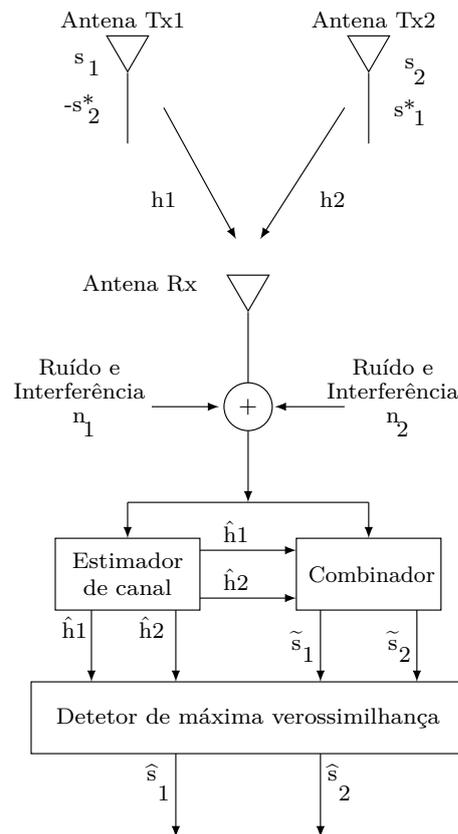


Figura 23 – Esquema de Alamouti, com duas antenas de transmissão e uma antena de recepção (ALAMOUTI, 1998)

sendo s_1 e s_2 dois sinais de uma constelação M -ária que pode ser PAM, PSK ou QAM, com $M = 2^b$. Assim, $2b$ bits de dados são mapeados em 2 sinais da constelação. Num dado tempo de símbolo, dois sinais são transmitidos simultaneamente através das duas antenas transmissoras. O sinal transmitido a partir da antena 1 é denotado por s_1 e o sinal transmitido a partir da antena 2 é denotado por s_2 . No próximo período de símbolo, o sinal $(-s_2^*)$, representando o negativo do conjugado complexo do sinal s_2 , é transmitido pela antena 1, enquanto que o sinal s_1^* , conjugado complexo do sinal s_1 , é transmitido pela antena 2. Esse processo corresponde a uma codificação no espaço e no tempo. Assim, s_1 e s_2 são transmitidos em duas janelas de tempo, e por duas antenas diferentes, produzindo uma taxa de código espacial unitária, sendo a melhor taxa possível para um código espaço temporal ortogonal (PROAKIS; SALEHI, 2008).

Num dado instante, o canal situado entre a antena transmissora 1 e a antena receptora é denotado por $h_1(t)$, enquanto que o canal situado entre a antena transmissora 2 e a antena receptora é denotado por $h_2(t)$, tal que

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h_1(t + T) = \alpha_1 e^{j\theta_1}, \\ h_2(t) &= h_2(t + T) = \alpha_2 e^{j\theta_2}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

sendo que T é a duração de símbolo, os termos multiplicativos α_1 e α_2 representam o ganho de canal entre as respectivas antenas, num determinado instante e os termos $e^{j\theta_1}$ e $e^{j\theta_2}$

representam a variação de fase sofrida pelo sinal transmitido ao longo do caminho percorrido entre as antenas de transmissão e a antena de recepção.

Desta forma, empregando duas antenas de transmissão e uma de recepção e considerando um canal não seletivo em frequência, pode-se caracterizar matricialmente esse canal de comunicação, da seguinte forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

sendo, $\mathbf{H}_{N_R \times N_T}$, uma matriz de ganho de canal, tal que $N_R = 1$ é o número de antenas de recepção e $N_T = 2$ é o número de antenas de transmissão.

Na decodificação do sinal recebido e assumindo-se que o canal é constante sobre duas janelas de tempo consecutivas, obtém-se os valores na saída do filtro casado do demodulador (PROAKIS; SALEHI, 2008)

$$\begin{aligned} r_1 &= h_1 s_1 + \eta_1 + h_2 s_2 + \eta_2, \\ r_2 &= -h_1 s_2^* + \eta_1 + h_2 s_1^* + \eta_2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

sendo r_n os sinais recebidos, s_n são os sinais transmitidos, η_1 e η_2 representam os respectivos ruídos gaussianos complexos descorrelacionados, circularmente simétricos e com médias zero e variâncias σ_n^2 , incorporados pelo respectivo canal entre as antenas de transmissão e a antena de recepção.

Visando obter diversidade espaçotemporal completa, considera-se a decodificação dos símbolos recebidos por máxima verossimilhança. Desta forma, pode-se escrever a PDF condicional de r_1 e r_2 na forma (PROAKIS; SALEHI, 2008)

$$p(r_1, r_2 | h_1, h_2, s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{|r_1 - h_1 s_1 - h_2 s_2|^2 + |r_2 + h_1 s_2^* - h_2 s_1^*|^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (6.6)$$

Considera-se como métrica para decodificação por verossimilhança a menor distância euclidiana entre os símbolos recebidos e os símbolos da constelação transmitida (PROAKIS; SALEHI, 2008)

$$\mu(s_1, s_2) = |r_1 - h_1 s_1 - h_2 s_2|^2 + |r_2 + h_1 s_2^* - h_2 s_1^*|^2. \quad (6.7)$$

A decodificação ótima por verossimilhança calcula a distância euclidiana, $\mu(s_1, s_2)$, para cada possível par de símbolos e seleciona o par que produzir o menor valor da métrica. Nesse cálculo se realiza $M^2 = 2^{2b}$ operações, sendo b o número de *bits* por símbolo. Contudo, pode-se reduzir a quantidade de operações expandindo o lado direito da Equação 6.7 e desconsiderando o termo $|r_1|^2 + |r_2|^2$, que é irrelevante para a decisão. Obtém-se, assim,

$$\begin{aligned} \mu(s_1, s_2) &= |s_1|^2 \left[|h_1|^2 + |h_2|^2 \right] - 2\text{Re} [r_1^* h_1 s_1 + r_2 h_2^* s_1] \\ &\quad + |s_2|^2 \left[|h_1|^2 + |h_2|^2 \right] - 2\text{Re} [r_1^* h_2 s_2 - r_2 h_2^* s_2] \Rightarrow \\ \mu(s_1, s_2) &= \mu(s_1) + \mu(s_2). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Desta forma, pode-se calcular as métricas $\mu(s_1)$ e $\mu(s_2)$ separadamente, reduzindo a complexidade computacional de M^2 para $2M$.

Pode-se, ainda, aumentar a simplificação dos cálculos na decodificação se consideradas constelações de sinais com mesma energia, como na modulação PSK. Nesse caso, os termos de energia $|s_1|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2]$ e $|s_2|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2]$ podem ser desconsiderados. Assim, as métricas $\mu(s_1)$ e $\mu(s_2)$ podem ser reorganizadas como métricas de correlação (PROAKIS; SALEHI, 2008)

$$\mu_c(s_1) = \text{Re} [r_1^* h_1 s_1 + r_2 h_2^* s_1] \quad (6.9)$$

$$\mu_c(s_2) = \text{Re} [r_1^* h_2 s_2 - r_2 h_1^* s_2], \quad (6.10)$$

correlaciona-se r_1^* com todos os valores possíveis de s_1 ponderados por h_1 e r_2 , com todos os valores possíveis de s_1 ponderados por h_2^* , e seleciona-se s_1 que resulta na maior métrica de correlação $\mu_c(s_1)$. Cálculo similar é realizado para encontrar o valor de s_2 que gera a maior métrica $\mu_c(s_2)$.

Para os casos que as constelações de sinais apresentam energias diferentes, como em PAM e QAM, uma análise semelhante pode ser realizada considerando os termos de energia. Assim, as métricas de correlação podem ser expressas da seguinte forma

$$\mu_c(s_1) = 2\text{Re} [r_1^* h_1 s_1 + r_2 h_2^* s_1] - |s_1|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2], \quad (6.11)$$

$$\mu_c(s_2) = 2\text{Re} [r_1^* h_2 s_2 - r_2 h_1^* s_2] - |s_2|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2], \quad (6.12)$$

Se o símbolo s_1 está contido em r_1 e r_2 , a componente do sinal na métrica $\mu_c(s_1)$ é a maior possível e tem o seguinte valor

$$E [\mu_c(s_1)] = |s_1|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2] \quad (6.13)$$

sendo que o valor esperado, $E [\mu_c(s_1)]$, é calculado sobre o ruído gaussiano aditivo. Similarmente para o símbolo s_2 , tem-se

$$E [\mu_c(s_2)] = |s_2|^2 [|h_1|^2 + |h_2|^2] \quad (6.14)$$

Desde que cada valor esperado tem o termo $[|h_1|^2 + |h_2|^2]$, a decodificação por máxima verossimilhança apresenta diversidade de ordem 2, que é a máxima possível, quando se tem duas antenas transmissoras e uma antena receptora. Maiores detalhes podem ser obtidos em Proakis e Salehi (2008).

Pode-se, ainda, decodificar os sinais transmitidos estimando os símbolos \hat{s}_1 e \hat{s}_2 da seguinte forma

$$\hat{s}_1 = r_1 h_1^* + r_2^* h_2, \quad (6.15)$$

$$\hat{s}_2 = r_1 h_2^* - r_2^* h_1 \quad (6.16)$$

escolhe-se os símbolos s'_1 e s'_2 que são mais próximos de \hat{s}_1 e \hat{s}_2 , em termos de distância euclidiana (PROAKIS; SALEHI, 2008).

7 Cenário de simulação

Para demonstrar a capacidade dos sistemas CWC, em reduzir os efeitos deletérios do canal de comunicação com desvanecimento, sobre o sinal transmitido e da viabilidade de seu emprego em sistemas de comunicação atuais, foram realizadas inúmeras simulações e os resultados obtidos são comparados, com os resultados de desempenho apresentados pelo esquema proposto por Alamouti (1998), que é formado por duas antenas transmissoras e uma de recepção, com diversidade espaçotemporal. Os sistemas CWC implementados empregam apenas uma antena transmissora e uma receptora, sem retransmissão de símbolos, ou seja, sem os benefícios de diversidade. Conta, apenas, com o espalhamento da informação no tempo, que é inerente ao processo de codificação de canal, por matriz *wavelet*. Apesar da desvantagem dos sistemas CWC simulados, sem ganho de diversidade, em relação ao esquema de Alamouti, este último é usado como referência, porque é amplamente aceito e empregado em sistemas de comunicação, atuais.

Para o modelo de transmissão, considera-se a Figura 1, sendo que os símbolos de uma sequência $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ são transmitidos serialmente. O canal é assumido ser Rayleigh plano, cujo ganho de percurso α_n , no instante n é modelado como amostras de variáveis aleatórias gaussianas complexas de média zero, e variância $1/2$, por eixo.

No instante n , quando um sinal s_n é transmitido, o sinal recebido r_n é dado por

$$r_n = \alpha_n s_n + \eta_n, \quad (7.1)$$

sendo que as amostras do ruído são gaussianas complexas η_n , independentes, com média zero e variância $E_s R / (2n_b E_b / N_0)$, por dimensão.

Assume-se, ainda, que há um perfeito conhecimento do estado do canal no receptor. Então o modulo de demodulação emprega a métrica de decisão

$$\left| \frac{r_n}{\alpha_n} - s_k \right|^2, \quad (7.2)$$

sobre todos os sinais transmitidos $\{s_k\}$ e decide em favor da que a minimiza.

Nas simulações foram empregados, além dos sistemas CWC desenvolvidos no capítulo 3, outros que juntos oferecem uma visão ampla do desempenho ($BER \times \frac{E_b}{N_0}$), desta técnica. Diagramas em blocos dos sistemas CWC são mostrados nas Figuras 1 e 24

Com o objetivo de analisar de forma mais ampla possível o desempenho dos sistemas *wavelet*, alterou-se vários parâmetros destes sistemas, conforme descrito na Seção 7. Por exemplo, para a matriz de codificação, utilizou-se 2 ou 4 linhas e o número de colunas igual a 8, ou 16, ou 32, ou 64, ou 128, ou 256 e formatação dos *bits* de informação, gerando os símbolo de entrada do codificador *wavelet*, $n_b = 1, 2, 4, 6, 8, 16$ e mais:

1. Gênero da matriz de codificação: $g = 4, 16$ e 64 ;

2. A transmissão ocorre sobre canal Rayleigh plano;
3. Eficiência espectral de 1/2, 1, 2 ou 4 bits/s/Hz;
4. Análise de desempenho de vários códigos CWC (para diversos m e g), fixando-se os valores para n_b e R ;
5. Comparação entre os vários sistemas CWC, fixando-se a matriz de codificação e n_b e variando R ;
6. Comparação entre vários sistemas CWC, fixando-se a taxa de codificação R e variando n_b .

Um diagrama esquemático para o sistema de Alamouti (1998) é apresentado na Figura 23, com o canal de comunicação é considerado constante no intervalo de tempo de dois símbolos consecutivos e a eficiência espectral de 1 bit/s/Hz. Este esquema possui duas antenas transmissoras e uma antena receptora. O transmissor inclui os módulos de codificação e transmissão dos símbolos de informação. O processo de codificação espaçotemporal é executado por uma matriz geradora definida pela Equação 6.2. Na recepção há a combinação de sinais recebidos e a detecção é feita por máxima verossimilhança, conforme descrito na Seção 6.1.

Quando os sinais chegam à antena de recepção estão contaminados pelo ruído (AWGN) e interferências, devido ao trânsito através canal de comunicação. Eles são combinados (\tilde{s}_1 e \tilde{s}_2) e detectados por máxima verossimilhança (\hat{s}_1 e \hat{s}_2) (ALAMOUTI, 1998).

Os sistemas CWC empregados nesta tese trabalham com uma antena transmissora e uma antena receptora, sem retransmissão de sinais, conforme diagrama de blocos mostrado na Figura 24, não usufruindo dos benefícios de diversidade.

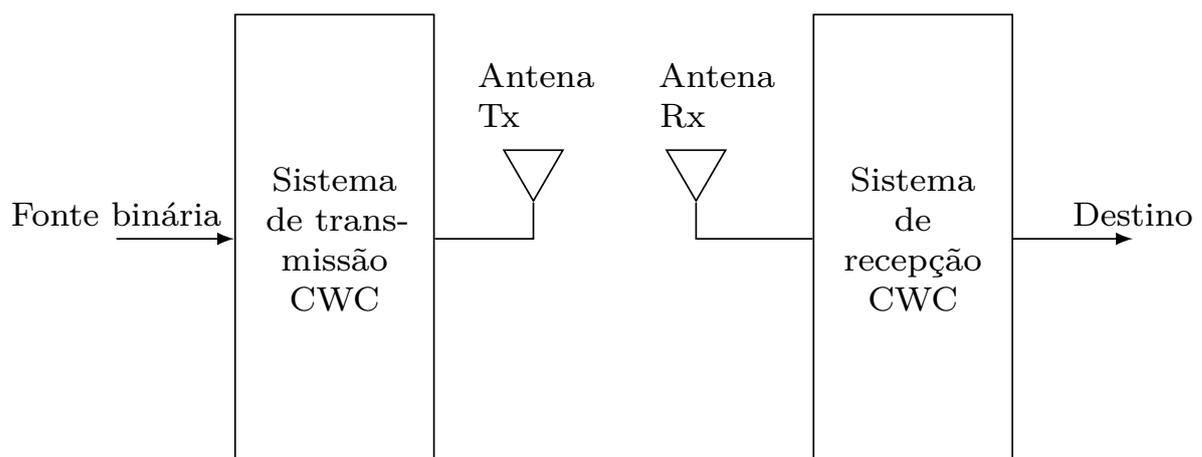


Figura 24 – Diagrama de blocos dos sistemas CWC empregados nas simulações.

Também, realizou-se simulações para verificar a influência do método de decodificação, sobre o desempenho de sistema CWC. Para tanto, empregou-se a decodificação de sequências, pela aplicação do algoritmo de Viterbi, com o objetivo de verificar o ganho de desempenho,

frente ao aumento da complexidade computacional. Os resultados são apresentados na Figura 29.

Neste caso, apenas foram realizadas simulações utilizando o sistema $CWC_{2 \times 8}$, com variação da taxa de codificação de $R = 1, 1/2, 1/3$ ou $1/4$. Nessas simulações não foi usada a formatação dos dados da fonte, considerando-se apenas $n_b = 1$.

8 Resultados

Neste capítulo, avaliam-se os resultados obtidos, por simulação, de desempenho de diversos sistemas CWC propostos, quando a transmissão ocorre sobre o canal Rayleigh plano. Os sistemas CWC avaliados estão em suas formas básicas, para que se possa comprovar a sua potencialidade natural, sem o auxílio externo de qualquer recurso, que melhore o seu desempenho real.

Empregando a decodificação símbolo a símbolo é mais natural comparar o desempenho dos sistemas CWC, com sistema de detecção ordinariamente símbolo a símbolo. Assim, apresentam-se para facilitar a avaliação de desempenho, curvas de BPSK, quando a eficiência espectral é de 1 bit/s/Hz, QPSK para 2 bits/s/Hz e 16-QAM para 4 bits/s/Hz.

Primeiramente, analisam-se as consequências da alteração de alguns parâmetros, sobre os próprios sistemas CWC. As simulações limitaram-se aos casos com eficiência espectral de 1, 2 e 4 bits/s/Hz.

A Figura 25 apresenta as curvas de desempenho para os sistemas CWC, com matriz de codificação 4×16 (posto $m = 4$ e gênero $g = 4$), com taxa de codificação $R = 1, 1/2$ e $1/4$ e dados formatados com $n_b = 1, 2, 4, 8$ e 16 . Nessa Figura, as curvas para a mesma taxa de codificação têm a mesma cor e para mesmo valor de n_b tem o mesmo ponto de marca (por exemplo, curvas azuis têm $R = 1/2$ e curvas com $n_b = 2$ empregam o caractere \star , como ponto de marca).

Observa-se na Figura 25, que os sistemas CWC, com baixa taxa de codificação, produzem melhor desempenho e que os sistemas CWC, com altos valores de n_b apresentam menor desempenho, para a transmissão sobre o canal com desvanecimento. Uma exceção ocorre quando $n_b = 1$ e $n_b = 2$, que apresentam o mesmo desempenho para a mesma taxa de codificação. Isso ocorre porque o sinal da constelação, para $n_b = 2$, é composto por duas componentes independentes (parte real e imaginária), cada uma com $n_b = 1$.

A Figura 26 mostra curvas de desempenho dos sistemas CWC, BPSK e STBC $_{2 \times 1}$ (2 antenas transmissoras e 1 receptora), para uma eficiência espectral de 1 bit/s/Hz. O sistema CWC que emprega matriz 2×8 apresenta desempenho melhor do que o BPSK, para $R = 1/2$ e $1/4$. Para $R = 1$ e $n_b = 1$, o desempenho do sistema CWC aproxima-se do desempenho do BPSK, quando a relação sinal-ruído (E_b/N_0) cresce. Além disso, o sistema CWC apresenta bom desempenho, melhor até do que do sistema STBC $_{2 \times 1}$, na faixa onde a SNR está abaixo de 12,5 dB. O melhor desempenho do sistema CWC ocorre, para a taxa de codificação $R = 1/4$.

A Figura 27 apresenta as curvas de desempenho de sistemas CWC, QPSK e STBC $_{2 \times 1}$, para uma eficiência espectral de 2 bit/s/Hz. Como no caso anterior, o sistema CWC apresenta desempenho melhor do que o QPSK, exceto quando $R = 1$, quando as curvas de desempenho

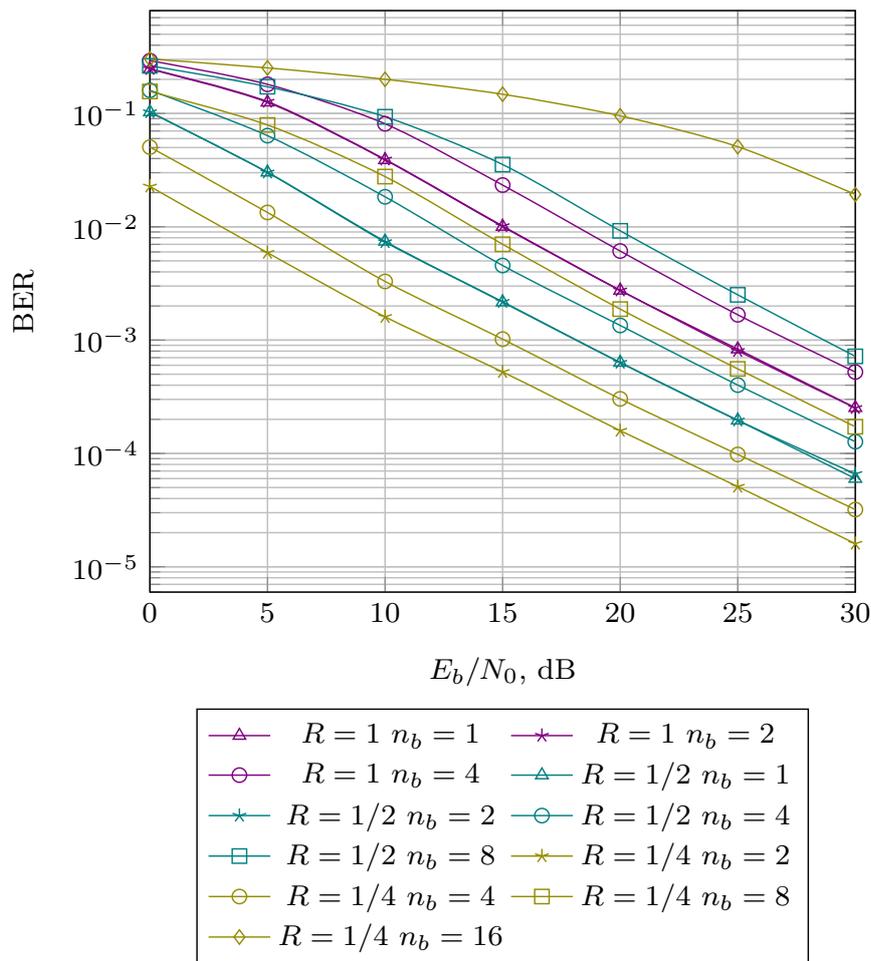


Figura 25 – Desempenhos do sistema CWC apresentado na Figura 1, com matriz de codificação 4×16 (posto $m = 4$ e gênero $g = 4$), para grande variação de parâmetros.

se aproximam, para altos valores da SNR (E_b/N_0). Em relação ao sistema STBC, observa-se, neste caso, que somente em 0dB os sistemas CWC e o STBC $_{2 \times 1}$ têm desempenhos equivalentes. O desempenho do sistema CWC, com a taxa de codificação $R = 1/4$, e $n_b = 8$ é pior do que com a taxa $R = 1/2$, e $n_b = 4$. Conclui-se que, na configuração investigada, a diminuição da taxa de codificação não compensa um aumento na ordem de n_b , se $n_b > 4$, para manter o desempenho dos sistemas CWC.

A Figura 28 apresenta curvas de desempenho de sistemas CWC, 16-QAM e STBC $_{2 \times 1}$, para uma eficiência espectral de 4 bit/s/Hz. Observa-se o mesmo comportamento, como na Figura 27. Altos valores adotados de n_b aumenta a eficiência espectral contudo, degrada desproporcionalmente o desempenho dos sistemas CWC.

A Figura 29 apresenta os resultados de comparação de desempenho para sistemas de comunicação com codificação *wavelet* de canal, CWC $_{2 \times 8}$ ($m = 2$ e $g = 4$), sobre canal Rayleigh, com taxas de codificação $R = 1, 1/2, 1/3$ ou $1/4$, e eficiência espectral de 1 bit/s/Hz, quando a decodificação é realizada por sequência (Viterbi) ou por símbolo a símbolo. Observa-se que para uma mesma taxa de codificação, a decodificação empregando algoritmo de Viterbi melhorou o desempenho em relação à decodificação por correlação (símbolo a símbolo). Uma exceção ocorreu para $R = 1/4$, em que ambas as abordagens de decodificação resultaram

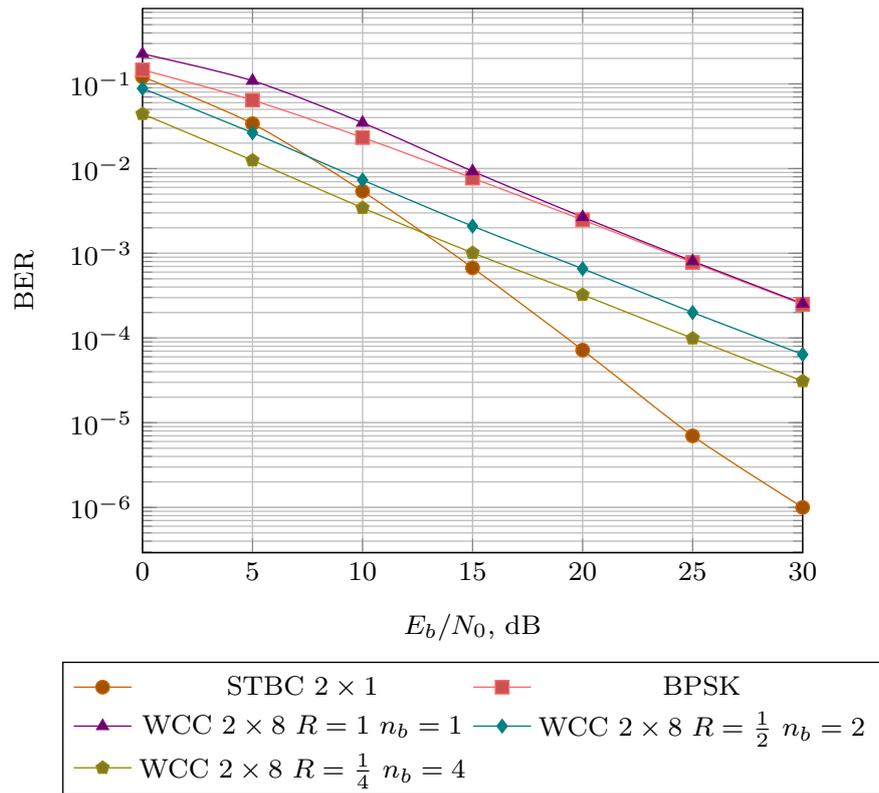


Figura 26 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, BPSK e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 1 bit/s/Hz.

no mesmo desempenho. Com taxa de codificação mínima, $R = 1/g$, os símbolos *wavelet* gerados passam a ser independentes entre si. Para as taxas de codificação $R = 1, 1/2$ e $1/3$, a informação relacional entre símbolos *wavelet* sucessivos, decorrente do processo de codificação pela superposição entre linhas da tabela de codificação, favorece o algoritmo de Viterbi na busca da sequência mais verossimilhante.

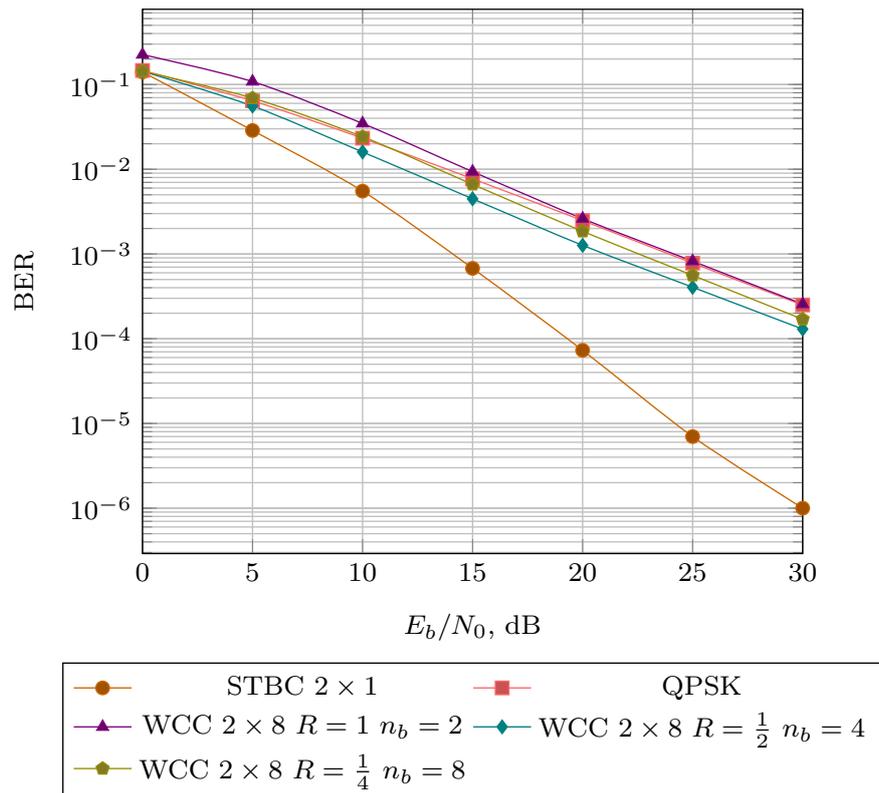


Figura 27 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, QPSK e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 2 bit/s/Hz.

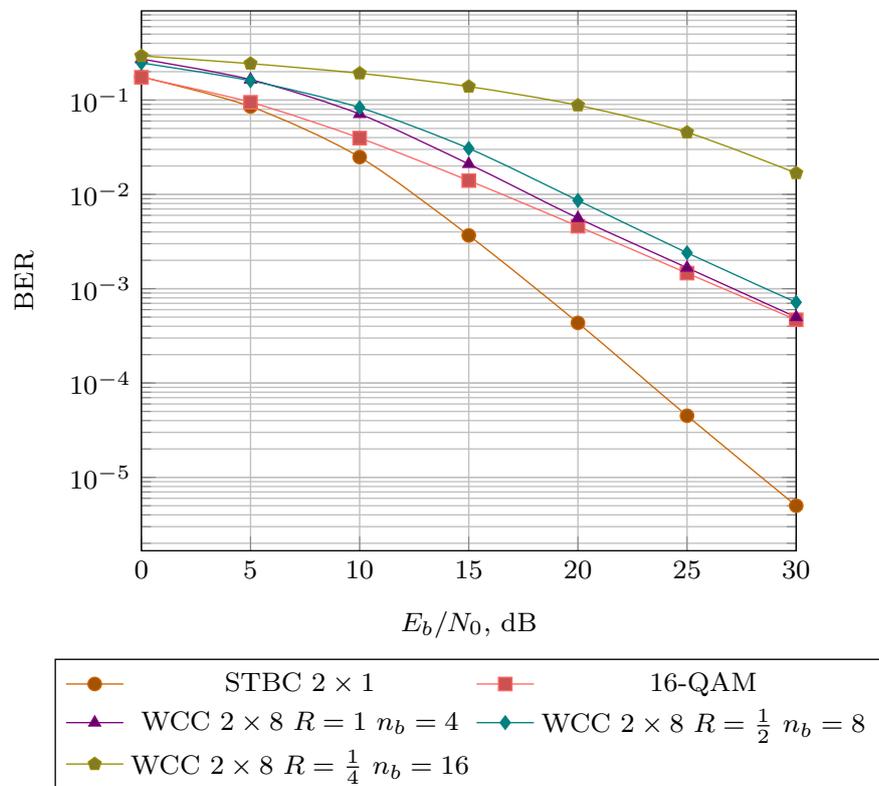


Figura 28 – Comparação de desempenho entre sistemas CWC, 16-QAM e $STBC_{2 \times 1}$, com eficiência espectral de 4 bit/s/Hz.

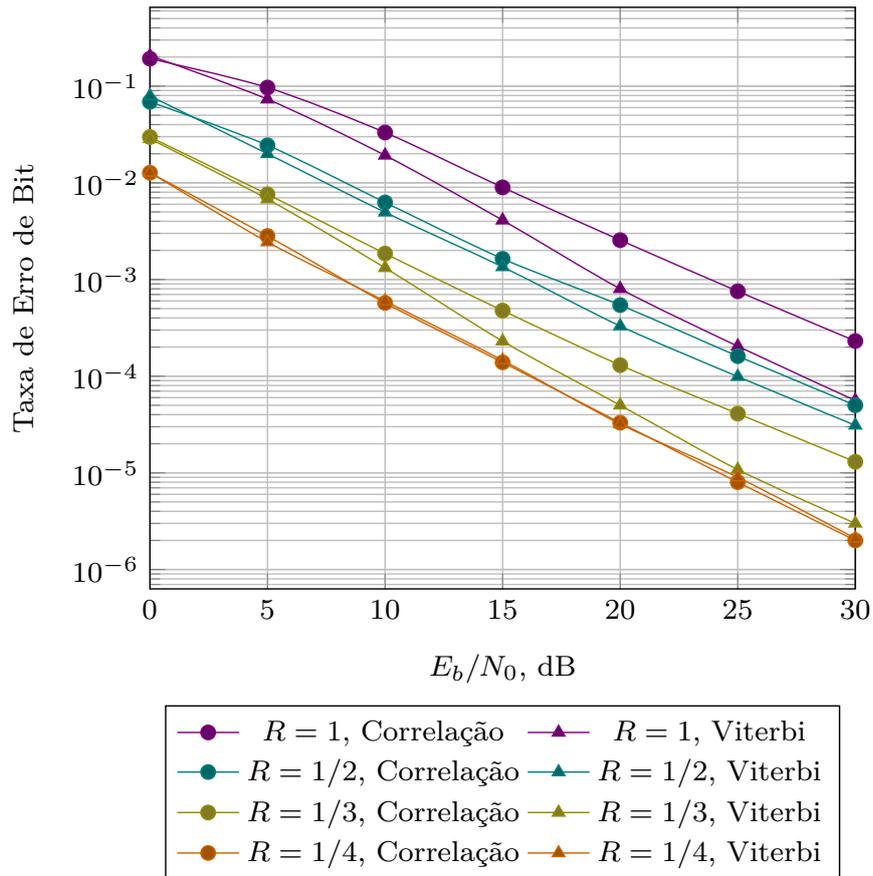


Figura 29 – Comparação de desempenhos de sistemas de comunicações empregado $CWC_{2 \times 8}$ ($m = 2$ e $g = 4$), com taxas de codificação $R = 1, 1/2, 1/3$ e $1/4$, eficiência espectral de 1 bit/s/Hz , com decodificações por correlação e por Viterbi, sob canal com desvanecimento Rayleigh.

9 Conclusões

Esta tese teve como objetivo atacar alguns pontos fundamentais da codificação de canal por matrizes *wavelet*, que se encontravam, ainda, em aberto. São eles: sistematização matemática do processo; ampliação da eficiência espectral; comparação, por simulações, de seu desempenho, em termos da taxa de erro de *bits*, em relação a outros sistemas que transmitem sobre canal com desvanecimento plano, para verificar sua competitividade e empregabilidade em sistemas de comunicação digitais, atuais. Os sistemas CWC avaliados estão em suas formas básicas, para que se possa averiguar a sua potencialidade natural, sem o auxílio externo de qualquer recurso, que melhore o seu desempenho real.

Para a realização dos objetivos propostos, adotou-se, como metodologia, o estudo sobre a técnica de codificação de canais por matrizes *wavelet*, revisão bibliográfica sobre as técnicas de codificação de canais, atualmente em uso e a implementação de algoritmos e o desenvolvimento de programas computacionais, na linguagem *Python*, para a realização das simulações.

As contribuições apresentadas à técnica CWC foram: 1) descrição algébrica geral do processo de CWC; 2) aumento da eficiência espectral dos sistemas CWC, para até 4 *bits/s/Hz*, aplicando um processo de formatação dos *bits* de informação, antes da codificação *wavelet*; 3) avaliação da eficácia e empregabilidade de sistema CWC, sobre canais com desvanecimento plano e sujeito a ruídos guassiano (AWGN); 4) realização de decodificação de sequência, pela aplicação do algoritmo de Viterbi, e 5) extensão dos resultados anteriormente obtidos, com taxa de codificação unitária, para taxas 1/2 e 1/4, além de complementar os resultados anteriores, para a própria taxa unitária.

A descrição algébrica geral da codificação e decodificação *wavelet* de canal possibilita a realização de novos estudos sobre a técnica, visto que, agora, o processo está sistematizado matematicamente. Também, foram ampliados os resultados obtidos anteriormente, formulando-se uma distribuição de probabilidade para os símbolos *wavelet* gerados, com taxas de codificação: 1, 1/2 e 1/4. As PGF foram calculadas e utilizadas, também, para deduzir a energia média das constelações de sinais. Além disso, foram propostas constelações de sinais para a transmissão desses símbolos *wavelet*, com eficiência espectral de até 4 *bits/s/Hz*. Anteriormente, a maior eficiência espectral conseguida era de 2 *bits/s/Hz*, pela transmissão de blocos contendo dois símbolos *wavelet* inteiros e consecutivos.

A análise de desempenho de sistemas CWC, através de canal Rayleigh plano, revelou que o processo de formatação de dados empregado antes da codificação CWC, usado, aqui, para aumentar a eficiência espectral, em associação com a taxa de codificação R (a eficiência espectral é dada por $n_b R$ bits/s/Hz), degradou o desempenho do sistema, quando o número de *bits* que formam os símbolos de entrada do codificador, n_b , é superior a quatro. Isso ocorreu

devido ao aumento da densidade de sinais nas constelações.

Para uma eficiência espectral de 1 bit/s/Hz, e relação sinal-ruído inferior a 15dB ($E_b/N_0 < 15dB$), o sistema CWC, sem diversidade, apresentou desempenho compatível com um sistema STBC, com diversidade 2 (duas antenas de transmissão e uma de recepção), sobre canal Rayleigh plano.

Observou-se que a decodificação de sequência proporciona desempenho superior à abordagem convencional de decodificação símbolo a símbolo (por correlação), o que compensaria a complexidade computacional maior, do algoritmo de Viterbi, que cresce linearmente com o número de transições da treliça, que, por sua vez, cresce fortemente com o aumento do posto ou gênero da matriz de codificação *wavelet*.

Em razão do aumento da complexidade computacional pela aplicação do algoritmo de Viterbi, apenas foi utilizada a matriz de codificação, com comprimento de restrição inferior a dez. Ou seja, matriz com posto $m = 2$ e gênero $g = 4$ ($CWC_{2 \times 8}$). Assim, o estudo da aplicação de decodificação de sequência deve ser aprofundado, empregando-a sobre outros sistemas CWC, com comprimento de restrição maiores. Deve-se avaliar o impacto da aplicação dos algoritmos de Fano e "M", permitindo uma conclusão sobre a sua influência desta técnica de decodificação, sobre o desempenho de sistemas CWC.

Desta forma, concluí-se que sistemas *wavelet* são eficientes em lidar com os efeitos de desvanecimento plano do canal de comunicação, sobre o sinal transmitido e pode ser usado em sistemas de comunicação digital, atuais e que vale à pena prosseguir em estudos que permitam introduzir técnicas que aumente o desempenho e sua eficiência espectral.

9.1 Publicações e trabalhos futuros

Em decorrência do trabalho de tese, até o momento, foram produzidas as seguintes publicações:

- João Fonseca Neto e Francisco Marcos de Assis e Edmar Candeia Gurjão e Leocarlos Bezerra da Silva Lima, *Construção Algébrica de Constelações Wavelet*, Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT, Juiz de Fora-MG, 3 de Setembro de 2015.
- João Fonseca Neto e Leocarlos Bezerra da Silva Lima e Francisco Marcos de Assis, *Decodificação de Viterbi para Codificação Wavelet de Canal*, Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais – SBrT, São Pedro - SP, 3 a 6 de Setembro de 2017.
- João Fonseca Neto and Leocarlos Bezerra da Silva Lima and Francisco Marcos de Assis, *Wavelet Channel Coding: An Algebraic Approach*, IEEE Transactions on Communications – Submitted.

Para trabalhos futuros, sugere-se:

- Explorar a variação da taxa de codificação destes códigos, para sistemas adaptativos às condições do canal;
- Empreender novos estudos que permitam ampliar a eficiência espectral dos esquemas CWC;
- Implementar os algoritmos de Fano e M para poder se concluir sobre a empregabilidade da decodificação de sequências nos sistemas CWC;
- Introduzir técnicas de diversidades, como meio para melhorar o desempenho dos sistemas CWC;
- Investigar a aplicação do CWC, em sistemas com múltiplas bandas, de banda larga (UWB), uma vez que em [Gao, Yao e Feng \(2003\)](#) as sub-bandas do UWB são codificadas com códigos Hadamard.

Referências

- AKRAM, M. S. *Pilot-based channel estimation in OFDM systems*. Dissertação (Mestrado) — Nokia Mobile Phones, Copenhagen, 2007. 9, 82, 86, 87
- ALAMOUTI, S. M. A simple transmitter diversity scheme for wireless communications. *IEEE Journal Selected Areas Communications*, v. 16, n. 8, p. 1451–1458, out. 1998. 9, 88, 89, 91, 94, 95
- BAHL, L. et al. An efficient algorithm for computing the free distance. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 18, p. 437–439, jan. 1972. 76, 78
- BARRON, K. S.; DUNHAM, J. G. The effect of non-equiprobable source symbols on maximum-likelihood Viterbi decoder performance. *IEEE International Conference on Communications*, v. 2, p. 692–696, jun. 1995. 71
- BIGLIERI, E.; PROAKIS, J.; SHAMAI, S. Fading channels: Information-theoretic and communications aspects. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, p. 2619–2692, out. 1998. 82, 83, 84, 85, 86
- CAIRE, G.; SHAMAI, S. On the capacity of some channels with channels state information. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, n. 6, p. 2007–2019, set. 1999. 83, 84
- CAVALCANTE, L. C. P. *Avaliação de desempenho da codificação wavelet em canais seletivos em frequência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2014. 18
- CAVALCANTE, L. C. P. *Wavelet coding for radio-over-fiber*. Dissertação (Mestrado) — Danish Technical University, Fotonik Department, 2017. 19
- CAVALCANTE, L. C. P. et al. Análise de desempenho da codificação wavelet em canais seletivos em frequência. *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT2013*, set. 2013. 18, 70
- CAVALCANTE, L. C. P. et al. Performance evaluation of wavelet-coded OFDM on a 4.9 Gb/s W-band radio-over-fiber link. *Journal of Lightwave Technology*, v. 35, n. 14, p. 2803–2809, jul. 2017. 19, 70
- CEDERVALL, M.; JOHANNESSON, R. A fast algorithm for computing the distance spectrum of convolutional codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 35, p. 1146–1159, nov. 1989. 78
- CONAN, J. The weight spectra of some short low-rate convolutional codes. *IEEE Transactions on Communications*, v. 32, p. 1050–1053, set. 1984. 78
- FERREIRA, T. R. *Modulação Quantizada para Sistemas com Codificação Wavelet Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2009. 18
- FONSECA NETO, J. et al. Construção algébrica de constelações wavelet. In: *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT*. Juiz de Fora-MG: SBrT15, 2015. 19, 40, 52

- FONSECA NETO, J.; LIMA, L. B. da S.; DE ASSIS, F. M. Decodificação de Viterbi para codificação wavelet de canal. In: *Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais – SBrT*. São Pedro - SP: SBrT17, 2017. 19
- GAMA, F. O. S.; SILVEIRA, L. F. Q.; SALAZAR, A. O. Adaptive wavelet coding applied in a wireless control system. *Sensors 2017*, 17, 2901; doi:10.3390/s17122901, dez. 2017. 20
- GAO, X. G.; YAO, R.; FENG, Z. Multi-band UWB system with Hadamard coding. *IEEE 58th Vehicular Technology Conference*, out. 2003. 104
- GELFAND, S.; PINSKER, M. Coding for channels with random parameters. *Prob. contr. Inform. Theory*, v. 9, n. 1, p. 19–31, 1980. 84
- GOLDSMITH, A.; VARAIYA, P. Capacity of fading channels with channel side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 43, n. 6, p. 1986–1992, nov. 1997. 83
- GUBNER, J. A. *Probability and random processes for electrical and computer engineers*. [Cambridge, UK]: Cambridge University Press, 2006. 41, 58
- HAYKIN, S.; MOHER, M. *Sistemas modernos de comunicação wireless*. São Paulo: Bookman, 2008. 81
- JAKES, W. C. *Ed. Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974. 88
- LATHI, B. P.; DING, Z. *Sistemas de comunicações analógicos e digitais modernos*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 71, 81
- LI, Y.; STUBER, G. L. *Orthogonal frequency division multiplexing for wireless communication*. [S.l.]: Springer, 2006. 81
- LIN, S.; COSTELLO JR., D. J. *Error Control Coding*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1983. 71
- LUO, Z.; ZHANG, W. The simulation models for Rayleigh fading channels. *Second International Conference on Communications and Networking (CHINACOM'07)*, p. 1158–1163, ago. 2007. 86
- MINH, H.; BAIG, S.; MUGHAL, M. J. Performance comparison of single carrier modulation with frequency domain equalization an OFDM for wireless communications. *IEEE 2009 International Conference on Emerging Technologies*, p. c1, out. 2009. 81, 82
- MOORE, B. F. D. *Pairwise optimization of modulation constellations for non-uniform source*. Tese (Doutorado) — Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 2009. 51, 52
- MOORE, B. F. D.; TAKAHARA, G.; ALAJAJI, F. Pairwise optimization of modulation constellations. *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, p. 167–177, 2009. 52
- POP, M. *Statistical analysis of sum of sinusoids fading channel simulators*. Tese (Doutorado) — Queen's University, Kingston, Canada, 1999. 86
- PROAKIS, J. G. *Digital communications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1995. 85
- PROAKIS, J. G.; SALEHI, M. *Digital communications*. 5. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008. 9, 89, 90, 91, 92, 93
- RESNIKOFF, H. L.; WELLS JR., R. O. *Wavelet Analysis: The scalable structure of information*. New York: Springer-Verlag, 1998. 15, 16, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 40

- ROUANNE, M.; COSTELLO, D. J. An algorithm for computing the distance spectrum of trellis codes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 7, ago. 1989. 75, 77, 78
- SANTOS, E. A. *Sistemas de transmissão com codificação wavelet com aumento da eficiência espectral*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014. 6, 16, 18, 19, 33, 50
- SANTOS, E. A.; GURJAO, E. C.; ASSIS, F. M. de. Projeto de constelações de sianis para codificação wavelet. *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT2011*, out. 2011. 18
- SANTOS, E. A.; GURJAO, E. C.; ASSIS, F. M. de. Aumento da eficiência espectral de sistemas com codificação wavelet. *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT2013*, 2013. 7, 8, 10, 16, 18, 40, 41, 51, 53, 66
- SCHLEGEL, C. *Trellis Coding*. [New York]: IEEE Press, 1997. 78
- SCHLEGEL, C. B.; PEREZ, L. C. *Trellis and Turbo coding*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2004. 9, 76, 77, 80
- SHANNON, C. Channels with side information at the transmitter. *IBM Journal of Research and Development*, v. 2, p. 289–293, 1958. 84
- SILVEIRA JR., L. G. de Q. *Decodificação iterativa em sistemas com codificação wavelet*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, fev. 2008. 17, 18
- SILVEIRA JR, L. G. de Q. Reduced-complexity iterative decoder for wavelet-coded systems in flat fading channels. *21st International Conference on Telecommunications - ICT*, p. 374–379, jun. 2014. 18, 70
- SILVEIRA JR, L. G. de Q.; SILVEIRA, L. F. Q. MMSE-based receiver for wavelet-filtered systems over flat fading channels. *2016 European Conference on Networks and Communications - EuCNC*, p. 1–7, jun. 2016. 19, 70
- SILVEIRA JR, L. G. de Q.; SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M. de. Performance analysis of space diversity scheme in wavelet-coded systems over fading channels. *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC*, p. 277–281, jun. 2009. 18
- SILVEIRA JR, L. G. de Q. et al. Soft-decision demodulation of wavelet-coded PSK signals over flat rayleigh fading channels. *Proc. VI International Telecommunications Symposium - ITS*, p. 758–763, set. 2006. 17
- SILVEIRA JR, L. G. de Q. et al. Iterative decoding for serial concatenation with wavelet encoding. *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC*, p. 743–747, jul. 2007. 17
- SILVEIRA, L. F. de Q. *Análise da Codificação Wavelet em Sistemas Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh Plano*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2006. 17, 70
- SILVEIRA, L. F. Q. *Desempenho de sistemas com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal sobre canais com desvanecimento Rayleigh plano*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, 2002. 17

- SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M. de; PINTO, E. L. Performance of a PSK system with wavelet time diversity over flat rayleigh fading channels. *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC*, p. 187–191, jan. 2003. [17](#)
- SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M. de; PINTO, E. L. A new wavelet coded PSK system over time-varying flat fading channels. *Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications - SPAWC, IV*, p. 429–433, jul. 2004. [17](#)
- SILVEIRA, L. F. Q. et al. Desempenho de sistema de codificação wavelet com diversidade sobre canal com desvanecimento plano e rápido. *Anais do XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT*, Fortaleza-CE, set. 2001. [17](#)
- SILVEIRA, L. F. Q. et al. Low-complexity receiver for wavelet-filtered M-ary modulations over flat-fading channels. *2015 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, nov. 2015. [19](#)
- SILVEIRA, L. F. Q. et al. Analysis and optimization of wavelet-coded communication systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, p. 563–567, 2009. [70](#)
- SILVEIRAJR, L. G. de Q.; DINIS, R. Wavelet-time diversity transmission in wireless systems: bit-error probability. *IEEE 58th Vehicular Technology Conference*, jun. 2017. [19](#)
- SIMON, M. K.; ALOUINI, M. S. *Digital communication over fading channels: a unified approach to performance analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2000. [81](#), [82](#)
- SKLAR, B. *Digital communications fundamentals and applications*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 2000. [71](#), [72](#)
- TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. The application of orthogonal designs to wireless communication. *IEEE Transactions on Information Theory Workshop – Killarney – Ireland*, p. 46–47, jun. 1998. [90](#)
- TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. Space-time block coding for wireless communications: performance results. *IEEE Journal Selected Areas on Communications*, p. 451–460, 1999. [90](#)
- TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. Space-time codes for high data rate wireless communications: performance criterion and code construction. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 2, p. 744–765, mar. 1998. [88](#)
- TROFIMOV, A. N.; KUDRYASHOV, B. D. Distance spectral and upper bounds on error probability for trellis codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 41, p. 561–572, mar. 1995. [78](#)
- TZANNES, M. A.; TZANNES, M. C. Bit-by-bit channel coding using wavelets. *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference – GLOBECOM’92*, p. 684–688, 1992. [10](#), [15](#), [16](#), [18](#), [29](#), [30](#), [32](#), [36](#)
- UNGERBOECK, G. Channel coding with multilevel phase signals. *IEEE Transactions Information Theory*, IT-28, p. 55–67, jan. 1982. [78](#)
- VITERBI, J. A. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 13, p. 260–269, abr. 1967. [69](#), [71](#)

YOUNG, D. J.; BEAULIEU, N. C. The generation of correlated Rayleigh random variates by inverse discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Communications*, v. 48, n. 7, p. 1114–1127, jul. 2000. [86](#)