



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Tese de Doutorado

Estrutura com Realimentação por Relé para Processos sujeitos a  
Perturbações – Aplicações e Análise

Moisés Tavares da Silva

Campina Grande – PB  
Agosto – 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

## Estrutura com Realimentação por Relé para Processos sujeitos a Perturbações – Aplicações e Análise

Moisés Tavares da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências, no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Prof. Péricles Rezende Barros, Ph.D  
Orientador

Campina Grande – PB  
Agosto – 2019

S586e

Silva, Moisés Tavares da.

Estrutura com realimentação por relé para processos sujeitos a perturbações - aplicações e análise / Moisés Tavares da Silva. - Campina Grande, 2019.

140 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2019.

"Orientação: Prof. Dr. Péricles Rezende Barros.

Referências.

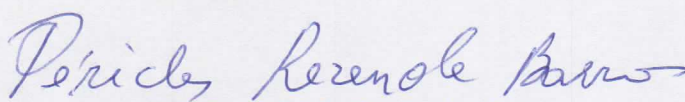
1. Identificação de Sistemas. 2. Realimentação por Relé. 3. Perturbações. I. Barros, Péricles Rezende. II. Título.

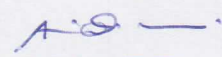
CDU 621.318.5(043)

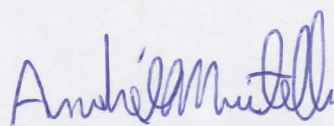
**"ESTRUTURA COM REALIMENTAÇÃO POR RELÉ PARA PROCESSOS SUJEITOS A  
PERTURBAÇÕES - APLICAÇÕES E ANÁLISE"**

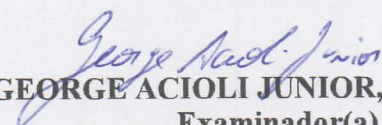
**MOISÉS TAVARES DA SILVA**


**TESE APROVADA EM 30/08/2019**

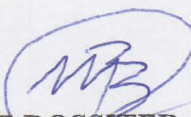
  
**PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG**  
**Orientador(a)**

  
**AMAURI OLIVEIRA, D.Sc, UFBA**  
**Examinador(a)**

  
**ANDRÉ LAURINDO MAITELLI, Dr., UFRN**  
**Examinador(a)**

  
**GEORGE ACIOLI JUNIOR, D.Sc., UFCG**  
**Examinador(a)**

  
**JOSÉ SÉRGIO DA ROCHA NETO, D.Sc., UFCG**  
**Examinador(a)**

  
**MAURÍCIO BELTRÃO DE ROSSITER CORRÊA, D.Sc., UFCG**  
**Examinador(a)**

**CAMPINA GRANDE - PB**

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais.

# Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Um agradecimento especial ao Professor Péricles Rezende Barros pelas valiosas sugestões durante o desenvolvimento desta Tese.

# Resumo

Neste trabalho, são apresentadas contribuições na área de identificação de sistemas utilizando a realimentação por relé.

Com o objetivo de obter um ciclo limite insensível à perturbação, é proposta uma estrutura realimentada por relé composta por um bloco para remover perturbações estáticas e/ou *drift*, seguido de um relé. Este bloco consiste em um filtro passa-alta seguido por um relé e um integrador. Diversos estudos simulados e experimentais são realizados a fim de verificar a aplicabilidade da estrutura do relé proposta. Através de tais estudos, verifica-se que a estrutura proposta é capaz de gerar o chaveamento simétrico do relé sob perturbação na entrada do processo, enquanto as demais estruturas presentes na literatura podem até mesmo não produzir uma oscilação sustentada para algumas perturbações.

Com relação à análise da estrutura do relé proposta, inicialmente é utilizado o método da função descritiva. A partir desta análise, observa-se que a estrutura proposta possui características similares à realimentação por relé padrão. Em seguida, é realizada a análise baseada no mapa de Poincaré e uma representação em espaço de estados. Com o objetivo de simplificar a análise da estrutura do relé em estudo, obtém-se uma estrutura equivalente. Para esta estrutura e sistemas LTI com e sem atraso, são estabelecidas as condições necessárias e suficientes para a existência do ciclo limite. A estabilidade local do ciclo limite é investigada usando o Jacobiano correspondente ao mapa de Poincaré. Além disso, a análise de existência e estabilidade do ciclo limite é realizada a partir da estrutura do relé original. Neste caso, a análise limita-se a sistemas sem atraso.

No contexto de identificação de modelos FOPTD (*First Order Plus Time Delay*), é apresentada uma técnica que utiliza a estrutura do relé proposta, em malha aberta, com e sem elemento integrador realimentado na malha. Além disso, as informações dos pontos de frequência são utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos. Para estimação do atraso são utilizados uma aproximação por série de Taylor de segunda ordem e um procedimento iterativo. Finalmente, com base em dois modelos identificados, é proposta uma metodologia de ajuste de fase de modelos FOPTD.

# Abstract

In this work contributions to system identification using relay feedback are presented.

In order to obtain a limit cycle insensitive to disturbance, it is proposed a relay feedback structure composed of a block to remove static disturbances and/or drift followed by a relay. This block consists of a simple high-pass filter followed by a relay plus an integrator. Several simulated and experimental studies are performed to verify the applicability of the proposed relay structure. By means of such studies, it can be seen that the proposed structure provides a symmetrical relay output under disturbance at the process input, while the other structures present in the literature may fail to produce a stable oscillation for some disturbances.

The analysis of the proposed relay structure is performed using two approaches. The first is the describing function method. From this analysis, it is noted that the proposed structure has similar characteristics to the standard relay feedback. The second approach is the analysis based on the Poincaré map and a state space representation. In order to simplify the analysis of the relay structure under study, an equivalent structure is obtained. For the equivalent structure and the LTI system with and without time-delay, the necessary and sufficient conditions for the existence of limit cycle are established. Furthermore, using the Jacobian of the corresponding Poincaré map, the local stability of the limit cycle is investigated. In addition, from the original relay structure, the existence and stability analysis of the limit cycle is performed. In this case, the analysis is limited to systems without time delay.

In the context of identification of FOPTD models, it is presented a technique that uses the proposed relay structure, with and without integrator element in the loop. In addition, the frequency information is used as equality constraints to obtain the parameters of the models. In order to estimate the time-delay, are used a second-order Taylor series approximation and an iterative procedure. Finally, based on two identified models, a phase adjustment methodology of FOPTD models is proposed.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Introdução Geral . . . . .	6
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	9
1.3	Contribuições . . . . .	15
1.4	Estrutura do Documento . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Estruturas com Realimentação por Relé</b>	<b>18</b>
2.1	Introdução . . . . .	18
2.2	Método do Relé . . . . .	19
2.2.1	Relé Ideal . . . . .	19
2.2.2	Relé com Histerese . . . . .	21
2.2.3	Relé com Integrador . . . . .	21
2.3	Estrutura do Relé para Processos sob Perturbações . . . . .	22
2.3.1	Relé Padrão sob Perturbações . . . . .	22
2.3.2	Estrutura do Relé Proposta sob Perturbações . . . . .	24
2.4	Resultados de Simulação . . . . .	28
2.4.1	Efeitos da Perturbação Estática . . . . .	29
2.4.2	Efeitos do <i>Drift</i> . . . . .	30
2.4.3	Efeitos do Ruído . . . . .	32
2.4.4	Efeitos do Ruído e Perturbação . . . . .	33
2.4.5	Comparação com Outras Estruturas do Relé . . . . .	33
2.5	Resultados Experimentais - Secador de Grãos . . . . .	35
2.6	Conclusões . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Estrutura com Realimentação por Relé Aplicada para Processos TITO</b>	<b>40</b>
3.1	Introdução . . . . .	40
3.2	Processo em Malha Aberta Efetivo (EOP) . . . . .	41
3.3	A Estrutura com Realimentação por Relé Aplicada para Processos TITO . . . . .	42

3.3.1	Caso 1: Malha 1 sob Relé e Malha 2 Aberta . . . . .	43
3.3.2	Caso 2: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador - EOP . . . . .	45
3.3.3	Caso 3: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador mais Variação no <i>Setpoint</i> . . . . .	47
3.4	Sinal de Excitação . . . . .	49
3.5	Aplicação da Estrutura do Relé em um Processo Termoelétrico . . . . .	51
3.5.1	Caso 1: Malha 1 sob Relé e Malha 2 Aberta . . . . .	52
3.5.2	Caso 2: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador - EOP . . . . .	52
3.5.3	Caso 3: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador mais Variação no <i>Setpoint</i> . . . . .	55
3.5.4	Caso 4: Aplicação do Sinal de Excitação . . . . .	55
3.6	Conclusões . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Análise do Relé para Processos Sujeitos a Perturbações</b>	<b>60</b>
4.1	Introdução . . . . .	60
4.2	Análise do Relé para Processos sob Perturbação usando Função Descritiva	62
4.2.1	Função Descritiva . . . . .	62
4.2.2	Análise da Estrutura do Relé utilizando Função Descritiva . . . . .	65
4.3	Análise do Relé para Processos sob Perturbações usando Mapa de Poincaré	68
4.3.1	Mapas de Poincaré . . . . .	69
4.3.2	Definição do Problema . . . . .	72
4.3.3	Estrutura Equivalente . . . . .	73
4.3.4	Sistema sem Atraso . . . . .	76
4.3.5	Sistemas com Atraso . . . . .	80
4.3.6	Análise a partir da Estrutura do Relé Original . . . . .	87
4.4	Resultados de Simulação . . . . .	93
4.4.1	Exemplo 1 . . . . .	93
4.4.2	Exemplo 2 . . . . .	96
4.4.3	Exemplo 3 . . . . .	98
4.4.4	Exemplo 4 . . . . .	99
4.5	Conclusões . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Identificação de Modelos utilizando Experimento do Relé</b>	<b>102</b>
5.1	Introdução . . . . .	102
5.2	Identificação de Modelos FOPTD . . . . .	103
5.2.1	Otimização com Restrições . . . . .	104

5.2.2	Identificação utilizando Restrições de Igualdade . . . . .	106
5.2.3	Estimação do Atraso . . . . .	108
5.3	Ajuste de Fase de Modelos FOPTD . . . . .	109
5.4	Resultados de Simulação . . . . .	111
5.4.1	Exemplo 1 . . . . .	111
5.4.2	Exemplo 2 . . . . .	115
5.4.3	Exemplo 3 . . . . .	118
5.4.4	Exemplo 4 . . . . .	119
5.5	Identificação de um Processo Termoelétrico . . . . .	122
5.6	Conclusões . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>128</b>
6.1	Conclusões . . . . .	128
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Sistema de Secagem de Grãos</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Sistema Termoelétrico: Módulo Peltier</b>	<b>133</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>135</b>

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

**ATV** *Autotune Variation Method*

**CLP** Controlador Lógico Programável

**DFT** *Discrete Fourier Transform*

**EOP** *Effective Open-loop Process*

**FOPTD** *First Order Plus Time Delay*

**IHM** Interface Homem Máquina

**LMI** *Linear Matrix Inequalities*

**LTI** *Linear Time-Invariant*

**MV** Variável Manipulada

**MIMO** *Multiple Input Multiple Output*

**OPC** *OLE for process control*

**PWM** *Pulse With Modulation*

**PID** Proporcional-Integral-Derivativo

**PV** Variável do Processo

**SCADA** *Supervisory Control and Data Acquisition*

**SISO** *Single Input Single Output*

**SOPTD** *Second Order Plus Time Delay*

**TITO** *Two Input Two Output*

# Lista de Tabelas

2.1	Tipos de Relé. . . . .	20
2.2	Processos usados para avaliação da estrutura do relé proposta e as respectivas frequências críticas. . . . .	28
2.3	Frequências estimadas sob perturbação estática. . . . .	29
2.4	Desvio padrão das frequências estimadas sob perturbação estática. . . . .	30
2.5	Frequências estimadas sob <i>drift</i> . . . . .	31
2.6	Desvio padrão das frequências estimadas sob <i>drift</i> . . . . .	31
2.7	Frequências estimadas sob ruído na saída. . . . .	32
2.8	Desvio padrão das frequências estimadas sob ruído na saída. . . . .	33
2.9	Frequências estimadas sob ruído na saída e perturbação. . . . .	34
2.10	Comparação dos métodos e frequências de oscilação ( $Hz$ ). . . . .	34
2.11	Parâmetros de projeto das estruturas com relé. . . . .	35
3.1	Resposta em frequência do primeiro EOP ( $\bar{g}_1$ ) do processo (3.6). . . . .	51
3.2	Resposta em frequência para segundo EOP ( $\bar{g}_2$ ) do processo (3.6). . . . .	52
3.3	Resposta em frequência do primeiro EOP do processo termoelétrico. . . . .	58
3.4	Resultados experimentais - Comparações dos métodos e frequências de oscilação ( $rad/s$ ). . . . .	58
5.1	Modelos estimados - Exemplo 1. . . . .	112
5.2	Modelos estimados - Exemplo 2. . . . .	115
5.3	Modelos estimados - Exemplo 3. . . . .	119
5.4	Modelos estimados - Exemplo 4. . . . .	121

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama esquemático do método do relé. . . . .	19
2.2	Função geral do relé. . . . .	20
2.3	Representação dos efeitos das dinâmicas adicionais na malha de realimentação com relé. . . . .	21
2.4	Diagrama esquemático do método do relé com integrador. . . . .	22
2.5	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para o relé padrão ( $d = 0,9$ e $d = 2$ ). . . . .	23
2.6	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para o relé padrão ( <i>drift</i> $d = 0,8 + 0,5sen(0,005t)$ ). . . . .	24
2.7	Diagrama esquemático da estrutura do relé proposta. . . . .	25
2.8	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para estrutura do relé proposta ( $d = 0,9$ e $d = 2$ ). . . . .	26
2.9	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para estrutura do relé proposta ( <i>drift</i> $d = 0,8 + 0,5sen(0,005t)$ ). . . . .	27
2.10	Curvas dos sinais de saída do relé (linha pontilhada), saída do processo (linha sólida) e perturbação (linha traço-ponto) utilizando relé proposto (Secador de Grãos). . . . .	37
2.11	Curvas dos sinais de saída do relé (linha pontilhada), saída do processo (linha sólida) e perturbação (linha traço-ponto) utilizando relé padrão (Secador de Grãos). . . . .	37
2.12	Curvas dos sinais de saída do processo (linha sólida), saída do modelo $G_{pro}(s)$ (linha tracejada) e saída do modelo $G_{sr}(s)$ (linha traço-ponto) utilizados para validação (Secador de Grãos). . . . .	38

3.1	Diagrama esquemático da malha aberta efetiva (EOP) de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada por relé. . . . .	42
3.2	Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 com controlador. . . . .	43
3.3	Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 aberta. . . . .	44
3.4	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob relé padrão - Caso 1. . . . .	45
3.5	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 1. . . . .	45
3.6	Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 realimentada com controlador. . . . .	46
3.7	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Caso 2. . . . .	47
3.8	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 2. . . . .	47
3.9	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída (linha tracejada) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob o relé padrão - Caso 3. . . . .	48
3.10	Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída (linha tracejada) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 3. . . . .	49
3.11	Sinais de entrada (linha tracejada) e de saída (linha traço-ponto) da estrutura do relé proposta com sinal de excitação adicional (linha sólida). . . . .	51
3.12	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 1). . . . .	53
3.13	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 1). . . . .	53

3.14	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 2). . . . .	54
3.15	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 2). . . . .	55
3.16	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída (linha sólida) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 3). . . . .	56
3.17	Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída (linha sólida) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 3). . . . .	56
3.18	Curvas dos sinais de entrada (linha tracejada), saída (linha sólida) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) obtidas ao aplicar o sinal de excitação proposto - Peltier. . . . .	57
4.1	Diagrama esquemático para análise por função descritiva. . . . .	63
4.2	Diagrama de Bode da função de transferência $F_1(s)$ (linha sólida) e $s\tau_f$ (linha tracejada) - $\tau_f = 0,01$ . . . . .	67
4.3	Curvas das funções descritivas do relé ideal e estrutura do relé proposta ( $\tau_f = 0,01$ ). . . . .	68
4.4	Curvas dos sinais nas saídas dos blocos da estrutura do relé proposta. . . . .	69
4.5	Representação geométrica do mapa de Poincaré. . . . .	71
4.6	Diagrama esquemático da estrutura com realimentação por relé proposta. . . . .	72
4.7	Diagrama esquemático da estrutura equivalente com realimentação por relé. . . . .	74
4.8	Diagrama esquemático da estrutura equivalente final com realimentação por relé. . . . .	74
4.9	Solução periódica da estrutura equivalente do relé para o sistema (4.33). . . . .	75
4.10	Solução periódica da estrutura final equivalente do relé para o sistema (4.33). . . . .	76
4.11	Diagrama esquemático da estrutura equivalente realimentada por relé para processos com atraso. . . . .	80
4.12	Solução periódica da estrutura equivalente para o sistema (4.52). . . . .	81
4.13	Curvas dos sinais de entrada ( $v_4(t)$ - linha tracejada) e saída ( $y(t)$ - linha sólida) do processo obtidos com a estrutura equivalente para o caso $h^* < \theta_T$ . . . . .	82
4.14	Diagrama esquemático da estrutura com realimentação por relé. . . . .	87
4.15	Trajectoria nas superfícies de chaveamento para a estrutura do relé proposta. . . . .	89
4.16	Solução periódica da estrutura do relé proposta para o sistema (4.87). . . . .	89



4.17	Curva dos sinais de entrada (linha tracejada) e saída (linha sólida) do processo (4.87). . . . .	94
4.18	Solução de $g_\theta(h^*)$ para o processo (4.87). . . . .	95
4.19	Solução de $g_1(h^*)$ para Exemplo 1. . . . .	95
4.20	Solução de $g_\theta(h^*)$ para o processo (4.114). . . . .	96
4.21	Solução de $g_1(h^*)$ para Exemplo 2. . . . .	97
4.22	Solução de $g_\theta(h^*)$ para o processo (4.115). . . . .	98
4.23	Diagrama esquemático utilizado para a simulação da estrutura equivalente do relé para o processo com $h^* < \theta_T$ . . . . .	100
4.24	Curvas dos sinais de entrada ( $v_4(t)$ - linha pontilhada) e saída ( $y(t)$ - linha sólida) do processo (4.116). . . . .	100
5.1	Diagrama esquemático do experimento do relé com a estrutura proposta usado para identificação de modelos. . . . .	106
5.2	Diagrama do sistema equivalente com estimativa inicial do atraso. . . . .	108
5.3	Curvas da resposta ao degrau unitário: Técnica com restrições na frequência - Exemplo 1. . . . .	113
5.4	Diagrama de Nyquist: Técnica com restrições na frequência - Exemplo 1. . . . .	113
5.5	Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 1. . . . .	114
5.6	Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 1. . . . .	115
5.7	Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 2. . . . .	116
5.8	Diagrama de Nyquist - Exemplo 2. . . . .	116
5.9	Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 2. . . . .	117
5.10	Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 2. . . . .	118
5.11	Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 3. . . . .	119
5.12	Diagrama de Nyquist - Exemplo 3. . . . .	120
5.13	Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 4. . . . .	120
5.14	Diagrama de Nyquist - Exemplo 4. . . . .	121
5.15	Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 4. . . . .	122
5.16	Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 4. . . . .	123
5.17	Curvas dos sinais de entrada (linha tracejada), saída (linha sólida) e <i>setpoint</i> (linha traço-ponto) obtidas ao aplicar o sinal de excitação proposto - Peltier. . . . .	124
5.18	Diagramas de Bode dos modelos $G_i(s)$ (linha tracejada), $G_H(s)$ (linha traço-ponto) e final $G_f(s)$ (linha sólida). . . . .	125

5.19	Curvas dos sinais de saída do processo (linha Azul-Sólida), saída do modelo $G_H(s)$ (linha tracejada), saída do modelo $G_i(s)$ (linha pontilhada), saída do modelo final $G_f(s)$ (linha traço-ponto). . . . .	126
A.1	Sistema de secagem de grãos. . . . .	131
B.1	Módulo de temperatura. . . . .	133
B.2	Sistema Peltier em escala de laboratório. . . . .	134

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução Geral

Na área de sistemas de controle, a utilização do relé para geração de uma oscilação sustentada e determinação do ganho e frequência crítica<sup>1</sup> de um processo é denominada método do relé, proposto por Åström e Hägglund (1984). Neste contexto, o relé é considerado uma não linearidade estática e simétrica.

A aplicação e análise de sistemas com realimentação por relé é um campo clássico em sistemas de controle. Os trabalhos iniciais foram motivados pela utilização do relé em sistemas eletromecânicos e modelos simples de atrito (TSYPKIN, 1984). As aplicações da realimentação por relé variam desde o controle estacionário dos processos industriais até o controle de objetos móveis como usado, por exemplo, na pesquisa espacial. Exemplos mais recentes incluem a utilização do relé para identificação do atrito em uma plataforma inercialmente estabilizada (CHEN; FANG; LUO, 2014) e a aplicação do método do relé para a estimativa on-line da sensibilidade à insulina para controle de glicemia nos diabéticos Tipo 1 (GOODWIN; SERON; TOWNSEND, 2018).

Dentre as várias aplicações da realimentação por relé, destacam-se sua utilização para identificação de processos industriais e a sintonia automática de controladores do tipo proporcional-integral-derivativo (PID). Com relação ao ajuste automático de controladores PID, implementados em muitos controladores industriais, o objetivo é determinar um ou mais pontos na curva de Nyquist de um processo a partir da frequência de oscilação produzida pela realimentação por relé. Em seguida, utiliza-se esta informação no projeto dos controladores PID (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006).

---

<sup>1</sup>Frequência de oscilação na qual a resposta em frequência do processo possui um ângulo de fase de  $-180^\circ$ .

Em alguns casos, como processos sob o efeito de perturbações estáticas<sup>2</sup> ou *drift*<sup>3</sup>, o método do relé pode falhar. Tais perturbações são frequentemente encontradas em processos industriais e a sua rejeição é uma consideração relevante para o controle de processos. Assim, as técnicas de identificação para serem confiáveis devem ser tão insensíveis a perturbação quanto possível.

Para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO), diversas alternativas ao método do relé original foram propostas para superar os efeitos das perturbações (PARK; SUNG; LEE, 1997), (SUNG; LEE, 2006a), (SUNG et al., 2006), (LEE et al., 2011) e (PARK et al., 2019). Em geral, para garantir a rejeição às perturbações estáticas ou *drift*, tais métodos utilizam procedimentos iterativos ou projeto de filtros. Porém, em um ambiente industrial, vários processos são múltiplas-entradas e múltiplas-saídas (MIMO). Neste caso, a estimativa da informação crítica é prejudicada devido à interação entre as malhas.

Para uma grande classe de sistemas com realimentação por relé serão desenvolvidos ciclos limite<sup>4</sup>. Uma vez que a maioria das aplicações do relé são baseadas em ciclos limite estáveis, a determinação da existência e estabilidade dos ciclos limite é uma questão importante. A partir da análise baseada em mapas de Poincaré, vários estudos estabeleceram as condições para verificar a existência e a estabilidade local dos ciclos limite para sistemas realimentados por relé (ÅSTRÖM, 1995), (JOHANSSON; RANTZER; ÅSTRÖM, 1999) e (VARIGONDA; GEORGIU, 2001).

A identificação de sistemas é uma técnica para a construção de modelos matemáticos a partir de dados experimentais. Para este fim, a utilização dos dados gerados a partir do experimento do relé tem recebido muita atenção desde o trabalho de Åström e Hägglund (1984) e várias modificações foram propostas e aplicadas com diversos propósitos. A fim de facilitar o projeto dos sistemas de controle, diversas pesquisas dedicaram-se à identificação de modelos lineares de baixa ordem com atraso, tais como primeira ordem com atraso (*First Order Plus Time Delay* - FOPTD) e segunda ordem com atraso (*Second Order Plus Time Delay* - SOPTD) (LIU; WANG; HUANG, 2013).

Neste trabalho, é proposta uma estrutura com realimentação por relé insensível a perturbações estáticas e/ou *drift*. Além disso, é realizada a análise por funções descritivas. Porém, esta análise fornece apenas resultados aproximados. Para obter melhores resultados, é realizada uma análise baseada no mapa de Poincaré. Assim, determinam-se as condições exatas para existência e estabilidade local dos ciclos limite obtidos com a estrutura do relé proposta.

---

<sup>2</sup>Alteração não desejada e de amplitude constante que afeta a variável do processo.

<sup>3</sup>Deslocamento, não intencional, contínuo e lento do sinal.

<sup>4</sup>Uma órbita periódica não trivial e isolada. O termo “não-trivial” é usado para excluir soluções constantes correspondentes aos pontos de equilíbrio.

Uma vez que a estrutura com realimentação por relé proposta é robusta a perturbações e garante uma saída simétrica do relé, é aplicado na entrada do processo um sinal composto por um degrau e uma onda quadrada periódica cuja frequência é inferior a frequência de oscilação do relé. Assim, múltiplos pontos de frequência do processo são excitados e a informação no domínio da frequência é usada para estimar modelos FOPTD em uma ampla faixa de frequência. Além disso, é apresentada uma técnica de identificação de modelos FOPTD que utiliza o experimento do relé combinado com o experimento do relé com integrador em malha aberta. As informações das frequências são utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos. Finalmente, a partir da identificação de dois modelos FOPTD, é proposta uma metodologia para ajuste de fase dos modelos estimados. O objetivo desse ajuste é reduzir o erro dos modelos na região de alta frequência.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

### Método do Relé para Processos sujeitos a Perturbações

Um passo importante no desenvolvimento de metodologias para sintonia de controladores foi dado por Ziegler e Nichols (1942). Com este trabalho foi possível caracterizar a dinâmica do processo por meio de dois parâmetros (ganho e frequência crítica) e, assim, calcular os ganhos do controlador. Entretanto, esta metodologia produz sistemas em malha fechada com baixo amortecimento e baixa robustez.

Uma alternativa à metodologia proposta por Ziegler e Nichols foi apresentada em Åström e Hägglund (1984). Neste trabalho, é proposta a sintonia automática de controladores por meio da utilização do relé. Para isto, a informação do sistema é obtida a partir do ciclo limite resultante utilizando o método da função descritiva e desta forma é possível calcular o ponto crítico. Porém, em alguns processos sob o efeito de perturbações estáticas ou *drift*, este método não é capaz de desenvolver uma oscilação sustentada. Diversas alternativas foram propostas a fim de superar esses problemas, conforme apresentado a seguir.

As oscilações assimétricas do sinal de saída do relé surgem em processos sujeitos a perturbações estáticas. Isso resulta em erros na estimativa do ponto crítico. Para superar esse problema, em Hang, Åström e Ho (1993), o relé é polarizado continuamente até que a oscilação seja simétrica. Em Shen, Wu e Yu (1996), um termo polarizado é considerado para tornar a oscilação do sinal de saída do processo simétrica. Com o mesmo objetivo, uma abordagem composta por duas etapas é proposta por Leonard e Oubrahim (1998). O primeiro passo consiste em centralizar a saída do relé diretamente no valor médio da saída do controlador PID presente na malha, sendo assim obtida uma oscilação simétrica da saída do processo, mesmo sob presença de uma perturbação de carga. O segundo passo consiste em provocar uma assimetria do relé através da adição de uma polarização. Em seguida, o ganho estático e a perturbação de carga são calculados. Já no trabalho de Sung e Lee (2006b), para superar o problema de assimetria no experimento do relé, define-se o tempo da parte inferior do relé como a metade do período anterior. Uma mudança no valor de referência da entrada do relé faz com que a saída do processo mova-se para um novo ponto de operação.

Com o objetivo de rejeitar perturbação estática, em Park, Sung e Lee (1997) é apresentada uma correção do relé a partir da medição da variação do sinal de saída do relé e do ganho na frequência de oscilação. Para rejeitar uma perturbação estática cuja amplitude é maior que a amplitude do relé, um método do relé com um controlador proporcional e

integral é proposto por Sung e Lee (2006a). Com o mesmo objetivo, um método do relé com dois canais é usado por Sung et al. (2006).

Na presença de *drift*, o método do relé também pode apresentar erros na estimativa da informação crítica. Em Lee et al. (2011) propõe-se o uso de um relé com dois filtros; um o inverso do outro. Um filtro passa-baixa é usado para remover o ruído de alta frequência e um filtro passa-alta é usado para remover o *drift* de baixa frequência. Além disso, uma histerese adaptativa é utilizada para melhorar o desempenho do relé. Em Goodwin, Seron e Townsend (2018) são utilizados dois filtros altamente ressonantes na entrada e na saída do processo. Esses filtros reduzem o efeito de grandes perturbações e ruído durante a operação do relé. Alternativamente, em Park et al. (2019), para entradas e saídas sujeitas a ruídos de medição e perturbação, é utilizado um estimador para perturbação e um estimador da magnitude de ruído para remover os efeitos do ruído e perturbações dos dados da resposta em frequência estimada.

### Método do Relé para Processos Multivariáveis

Vários processos industriais possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas. Para tais processos, devido à interação entre as múltiplas malhas, podem ocorrer erros na estimativa da informação crítica. De acordo com Wang et al. (1997), existem três possíveis esquemas de realimentação por relé aplicados aos sistemas multivariáveis, conforme apresentado a seguir.

O primeiro esquema é o experimento do relé independente (*independent single relay*), onde apenas uma malha é sintonizada de forma independente, deixando as outras malhas abertas. Este método não leva em consideração os acoplamentos cruzados do sistema e, portanto, não é adequado para sistemas acoplados.

O segundo esquema é denominado experimento do relé sequencial (*sequential relay feedback*), onde a primeira malha é sintonizada, enquanto as outras estão abertas. A malha seguinte é sintonizada com a primeira fechada, e assim por diante, até que todas as malhas sejam sintonizadas. Em geral, em um processo  $n \times n$ , são realizados  $n.k$  experimentos do relé por  $k$  iterações.

O terceiro esquema é o experimento do relé descentralizado (*decentralized relay feedback*). Neste caso, todas as malhas são sintonizadas simultaneamente e são necessários  $n$  experimentos do relé. Este é um método completamente em malha fechada, onde todos os acoplamentos cruzados influenciam o resultado. A desvantagem deste esquema é a necessidade de critérios adicionais para estimar o ponto crítico do sistema, uma vez que, devido à característica multivariável, vários pontos críticos podem surgir. Em Campestrini, Barros e Bazanella (2006), observa-se que para sistemas MIMO, não há apenas

um ponto crítico como no caso do SISO, mas um conjunto de pontos que formam uma superfície crítica. Dessa forma, os métodos, como o proposto por Ziegler e Nichols (1942), não fornecem diretamente a informação crítica para processos MIMO.

Com o objetivo de remover o ruído de medição e a interação entre as malhas de um processo com duas-entradas e duas-saídas (TITO), são propostos por Padhy e Majhi (2006) dois relés de pré-carga na malha de realimentação e dois controladores do tipo integral nas saídas do processo. Alternativamente, também para um sistema TITO, em Berner et al. (2017), é proposto um método de identificação que combina o relé assimétrico e a identificação de erro na saída, sem a necessidade de convergência do ciclo limite.

A fim de considerar as interações das malhas nos sistemas multivariáveis, utiliza-se a definição das funções equivalentes. Em Wang, Lee e Zhang (1998), o método de Ziegler-Nichols modificado é aplicado para processos TITO por meio da definição de funções equivalentes. Uma abordagem alternativa é denominada *effective open-loop process* (EOP), proposta por Huang et al. (2003). Com a formulação da EOP, o controlador pode ser projetado sem conhecimento prévio da dinâmica dos controladores das outras malhas. Além disso, o sistema MIMO pode ser considerado como várias malhas SISO equivalentes.

### **Análise de Sistemas Lineares Realimentados por Relé**

Para uma grande classe de sistemas com realimentação por relé, são obtidas oscilações do ciclo limite. Para tais sistemas, é fundamental o conhecimento da existência e estabilidade das órbitas periódicas. Em particular, as órbitas simétricas e unimodais.

Para analisar a estabilidade dos ciclos limite, uma abordagem a partir do plano de fase é empregada por Tsytkin (1984). Outra abordagem, apresentada em Lin, Wang e Lee (2004), utiliza o teorema do ponto fixo de Brouwer e fornece uma condição suficiente para a existência de ciclo limite para sistemas realimentados por relé, com histerese e atraso.

Por outro lado, a análise de estabilidade baseada no mapa de Poincaré é mais comumente usada. Neste contexto, as condições para existência de ciclos limite em sistemas lineares com realimentação por relé são obtidas em Åström (1995) usando o mapa de Poincaré. Além disso, a estabilidade dos ciclos limite é apresentada e os resultados são estendidos para sistemas com atraso. Em Johansson, Rantzer e Åström (1999), a caracterização de sistemas realimentados por relé que possuem múltiplos chaveamentos rápidos é investigada. Alternativamente, em Varigonda e Georgiou (2001) e Ye et al. (2007), são fornecidas as condições para a existência e estabilidade local para o relé com histerese.

Para uma configuração mais geral, em Lin et al. (2001), o problema de estabilidade dos ciclos limite para um sistema com atraso e relé com histerese é considerado. Neste caso, a análise não se limita a ciclos limite simétricos e dois chaveamentos por período. Já no



trabalho de Boiko (2008b), são estudados os ciclos limite assimétricos e as propriedades de entrada e saída dos sistemas realimentados por relé em processos com dinâmica integradora. Em Lin et al. (2004) são calculados os valores limites que mantêm a estabilidade das oscilações de sistemas lineares com relé.

Em Bazanella e Parraga (2016), são discutidas as limitações da análise contínua no tempo. É observado que mesmo com taxa de amostragem adequada, para alguns processos, os resultados são consideravelmente incorretos. Além disso, é realizada a análise discreta no tempo do sistema com realimentação por relé e ferramentas analíticas são propostas a fim de superar as limitações da análise contínua no tempo. Em Chen, Tan e Huang (2009), é investigado o ciclo limite em sistemas lineares com realimentação por relé. O problema é generalizado a partir da identificação de modelos de atrito de sistemas servo-mecânicos. Para manipular a frequência de oscilação do ciclo limite, em Yoon e Johnson (2018) é projetado um compensador em avanço com base no mapa de Poincaré. Além disso, é verificada numericamente a estabilidade local e global do novo ciclo limite.

Também para sistemas realimentados por relé, resultados sobre estabilidade global foram apresentados em Gonçalves, Megretski e Dahleh (2001). Neste trabalho, são apresentadas as condições suficientes para estabilidade em termos de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMI). Por outro lado, em Varigonda e Georgiou (2000), é fornecida uma condição suficiente para a estabilidade global de uma órbita periódica aplicando o teorema da contração do mapeamento.

### **Método do Relé para Identificação de Sistemas**

A identificação de sistemas utilizando dados gerados através do experimento do relé tem recebido muita atenção desde o trabalho de Åström e Hägglund (1984) e várias modificações foram propostas. A técnica denominada ATV (*Autotune Variation Method*), proposta por Luyben (1987), foi um dos primeiros trabalhos que utilizou o experimento do relé para identificação de sistemas. A principal desvantagem desta técnica é a necessidade do conhecimento prévio do ganho estático do sistema. Este problema foi contornado no trabalho de Li, Eskinat e Luyben (1991).

Dentre os diversos modelos possíveis para representar a dinâmica de um sistema real, os modelos de baixa ordem são os mais utilizados para o projeto dos sistemas de controle, em especial, os modelos FOPTD e SOPTD (LIU; WANG; HUANG, 2013). Para os modelos de ordem reduzida, o ponto de baixa frequência está na faixa de frequência de interesse para fins de controle, ou seja, a região de frequência onde a fase do processo está entre  $-90^\circ$  e  $-180^\circ$ . Nesta faixa de frequência são obtidas as características fundamentais do processo (HANG; ASTROM; WANG, 2002).

Com base no experimento do relé, Shen, Wu e Yu (1996) apresentaram um método para obtenção de um modelo FOPTD a partir da análise por função descritiva. Em Wang, Hang e Zou (1997), tais modelos foram obtidos utilizando as propriedades algébricas da oscilação periódica. Com o mesmo objetivo, em Luyben (2001), foi proposto um método para obtenção de um modelo FOPTD de processos estáveis e instáveis utilizando o formato da resposta do processo ao experimento do relé.

Em Srinivasan e Chidambaram (2003), utilizando o experimento assimétrico do relé, equações foram formuladas a fim de estimar os parâmetros do modelo FOPTD estáveis e instáveis. Já em Åström e Hägglund (2006), expressões analíticas para estimação do modelo FOPTD utilizando o experimento do relé mais uma estimativa do ganho do processo na frequência zero foram apresentadas.

Em Vivek e Chidambaram (2005), foi proposto um algoritmo de identificação de modelos FOPTD com base na análise de Fourier da resposta do relé. De acordo com o valor da frequência crítica, Huang, Jeng e Luo (2005) desenvolveram uma formulação simples do modelo FOPTD para ajuste on-line do processo. Para melhorar a estimativa do ganho e frequência crítica obtidas com o experimento do relé, em Wang, Gu e Zhang (2007), a diferença entre o ponto crítico e o período de oscilação é compensada. Então, os parâmetros do modelo são identificados sem a informação prévia do atraso ou ganho estático. Em Lee, Sung e Edgar (2007), é proposto um método de identificação que utiliza a integral da resposta do relé em vez dos dados originais. Assim, os efeitos dos termos harmônicos de alta ordem são suprimidos e uma melhor estimativa é obtida. No trabalho de Liu e Gao (2008), são propostos algoritmos para a identificação de modelos FOPTD de processos estáveis e instáveis a partir de um experimento do relé simétrico e assimétrico.

Na literatura encontram-se diversos trabalhos, nos quais são explorados múltiplos pontos da resposta em frequência do processo a ser identificado (SUNG; LEE, 1997), (WANG; HANG; BI, 1999), (ARRUDA; BARROS, 2003) e (LOH; CAI; TAN, 2004). Em Scali, Marchetti e Semino (1999), é proposta a incorporação de um atraso conhecido em série com o relé para modificar o período de oscilação e, assim, determinar outros pontos de frequência. Em Wang, Gawthrop e Young (2005), mostrou-se que o uso de restrições possibilita a estimação de parâmetros do modelo com uma melhor exatidão quando comparados com os parâmetros estimados sem o uso de restrições. Também utilizando restrição de igualdade, em Acioli Júnior, Berger e Barros (2006) foi apresentado um método de identificação de modelos FOPTD que utiliza o experimento do relé em malha fechada e a frequência de cruzamento de ganho. Já em Acioli Júnior, Santos e Barros (2009) foi proposta uma técnica de identificação de modelos FOPTD no domínio do tempo/frequência com base em uma única excitação. A vantagem desta técnica é a obtenção de um modelo

que corresponda à resposta no domínio do tempo enquanto captura a dinâmica do sistema em torno das frequências de interesse. Em Santos e Barros (2011), um sinal de excitação composto por uma onda quadrada mais um pulso foi utilizado a fim de reduzir o tempo do experimento e o número de parâmetros definido pelo usuário. Além disso, foi proposta uma técnica para identificação de modelos FOPTD usando a informação frequencial.

Em Liu, Wang e Huang (2013), os principais métodos de identificação desenvolvidos nas últimas três décadas e que utilizam o método do relé são examinados. Trabalhos recentes sobre identificação de modelos usando o experimento do relé foram propostos por Pandey e Majhi (2014), Ghorai, Pandey e Majhi (2016), Kishore, Kishore e Panda (2017), Hofreiter (2017) e Kishore, Kishore e Panda (2018).

### 1.3 Contribuições

Nesta Tese, com objetivo de obter uma estrutura com realimentação por relé robusta a perturbações, a contribuição apresentada é uma estrutura com realimentação por relé composta por um bloco para remover perturbações estáticas e/ou *drift* seguida de um relé. O objetivo da estrutura proposta não é estimar a frequência crítica do processo, mas obter um ciclo limite insensível a perturbações. A informação de frequência obtida a partir da oscilação pode ser usada, por exemplo, para estimar um modelo de primeira ordem com atraso (FOPTD). A estrutura com realimentação por relé para processos sujeitos a perturbações foi originalmente proposta em Silva e Barros (2017b). A aplicação desta estrutura para identificação de um modelo de primeira ordem com atraso de um sistema de secagem de grãos é apresentada em Silva e Barros (2017a).

A aplicação da estrutura com realimentação por relé proposta é estendida para processos TITO. Em Silva e Barros (2018a), esta estrutura é aplicada sequencialmente para processos TITO. Em seguida, através de um sinal de excitação composto por um degrau e uma onda quadrada periódica, múltiplos pontos de frequência são obtidos. A informação frequencial obtida é utilizada para identificar o modelo da malha aberta efetiva (EOP). Ainda para processos TITO, em Silva e Barros (2018c), os efeitos das perturbações são demonstrados sob diferentes condições de operação.

No âmbito da análise da estrutura do relé proposta, uma contribuição apresentada é a análise utilizando o método da função descritiva. A partir desta análise, observa-se que a estrutura proposta possui características similares a realimentação por relé padrão proposta por Åström e Hägglund (1984). Ainda no contexto da análise da estrutura proposta, uma contribuição adicional é a análise da estrutura proposta utilizando o mapa de Poincaré e uma representação em espaço de estados. Além disso, com o objetivo de simplificar a análise da estrutura do relé em estudo, obtém-se uma estrutura de realimentação equivalente. Em Silva e Barros (2018b), para a estrutura equivalente e o sistema linear invariante no tempo (LTI) sem atraso, são estabelecidas as condições necessárias e suficientes para a existência do ciclo limite. A estabilidade local do ciclo limite é investigada usando o Jacobiano correspondente ao mapa de Poincaré. Além disso, a análise é estendida para sistemas LTI com atraso. A partir da estrutura do relé original também é realizada a análise usando o mapa de Poincaré para sistemas sem atraso. Esta análise foi apresentada em Silva e Barros (2019).

No contexto de identificação de sistemas, a contribuição apresentada é uma técnica que utiliza a estrutura do relé proposta com e sem integrador para identificação de mo-

delos FOPTD. Além disso, as informações dos pontos de frequência são utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos. Também são utilizados uma aproximação por série de Taylor de segunda ordem e um procedimento iterativo para estimação do atraso. Esta técnica foi originalmente apresentada em Silva, Barros e Acioli Júnior (2016). Finalmente, com base em dois modelos identificados, é proposta uma metodologia para ajuste de fase de modelos FOPTD. Esta técnica foi apresentada em Silva e Barros (2019).

## 1.4 Estrutura do Documento

A Tese está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Capítulo introdutório no qual estão dispostas a motivação do trabalho, as revisões bibliográficas sobre os métodos do relé para processos sujeitos a perturbações, a análise de sistemas realimentados por relé e as técnicas de identificação de sistemas que utilizam o método do relé. Além disso, são descritas as contribuições da Tese.
- **Capítulo 2:** Neste capítulo, as características das estruturas com realimentação por relé são abordadas. Uma estrutura com relé para processos sujeitos a perturbações é apresentada. Resultados simulados e experimentais para processos SISO, utilizando a estrutura do relé proposta, são discutidos.
- **Capítulo 3:** Capítulo no qual a aplicação da estrutura do relé proposta é estendida para sistemas TITO. Além disso, como a estrutura do relé é robusta a perturbações e garante uma saída simétrica, é proposto um sinal de excitação com o objetivo de estimar vários pontos de frequência do processo. Resultados simulados e experimentais para processos multivariáveis são discutidos.
- **Capítulo 4:** As condições necessárias para aplicação da análise por função descritiva são descritas neste capítulo. Logo após, a análise por função descritiva da estrutura com realimentação por relé proposta é apresentada. Em seguida, uma análise baseada no mapa de Poincaré é realizada. Para a estrutura original e para uma estrutura equivalente, as condições necessárias e suficientes para existência dos ciclos limite são apresentadas. Então, a estabilidade local do ciclo limite é investigada. Por meio de simulações os resultados da análise são discutidos.
- **Capítulo 5:** Neste capítulo, é proposta uma técnica de identificação de modelos FOPTD que utiliza a estrutura do relé proposta com e sem integrador. As informações dos pontos de frequência são utilizadas como restrições de igualdade. Além disso, múltiplos pontos de frequência do processo são obtidos utilizando a estrutura do relé proposta. Assim, com base na identificação de dois modelos, é proposta uma metodologia para ajuste de fase de modelos FOPTD. Para diversos processos, os resultados de simulações são discutidos.
- **Capítulo 6:** Capítulo em que as conclusões do trabalho e as sugestões de trabalhos futuros são apresentadas.

## Capítulo 2

# Estruturas com Realimentação por Relé

### 2.1 Introdução

O método do relé padrão, introduzido em Åström e Hägglund (1984), tem sido amplamente utilizado na indústria para identificação de sistemas e sintonia automática de controladores do tipo PID. Em alguns casos, o método do relé aplicado a processos sob o efeito de perturbações estáticas pode resultar em oscilações assimétricas do sinal de saída do relé. Isto resulta em erros na estimativa do ponto crítico. Similarmente, na presença de *drift*, o experimento do relé também pode apresentar erros na estimativa da informação crítica.

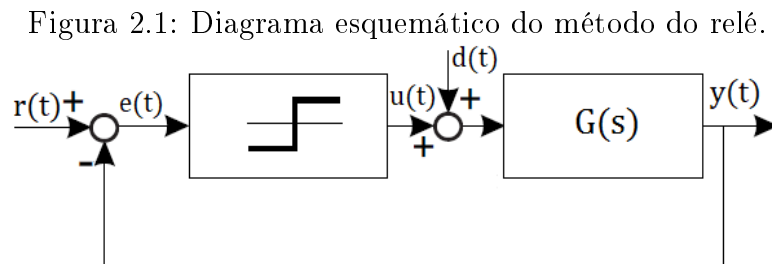
Neste capítulo, é apresentada uma estrutura com realimentação por relé para processos sob perturbação estática e/ou *drift*. Como principal vantagem da estrutura proposta destaca-se a capacidade de rejeição a perturbações e consequente garantia de uma saída simétrica do relé. Através de simulações e testes experimentais, as vantagens da estrutura proposta são demonstradas.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 2.2, são apresentadas as principais características do método do relé. Na seção 2.3, a estrutura do relé proposta é apresentada. Além disso, a capacidade de rejeição a perturbação é ilustrada através de um estudo de caso. Na seção 2.4, são discutidos os resultados de simulação para diferentes processos, sob diversos tipos de perturbações e estratégias presentes na literatura. Já na seção 2.5 a estrutura do relé proposta é aplicada para identificação de um sistema de secagem de grãos. O capítulo se encerra com as conclusões na seção 2.6.

## 2.2 Método do Relé

O método do relé é utilizado na geração de uma oscilação sustentada próxima à frequência crítica do processo. Assim, estima-se o ganho crítico diretamente a partir dos dados do experimento. Este método tem a vantagem de permitir o controle da amplitude do ciclo limite por uma escolha apropriada da amplitude do relé (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984).

Na Figura 2.1, é apresentado o diagrama esquemático do método do relé. De acordo com o diagrama, os sinais  $u(t)$  e  $y(t)$  são a saída do relé e saída do processo, respectivamente. O sinal  $d(t)$  representa a perturbação,  $r(t)$  é o valor de referência da entrada do relé e  $e(t)$  é o erro entre o sinal de referência e a saída do processo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Sob certas condições, a realimentação por relé resultará em uma oscilação sustentada na saída do processo  $y(t)$  em torno da referência  $r(t)$ , com o período de oscilação próximo ao período crítico do processo. A saída do relé  $u(t)$  muda cada vez que a saída do sistema  $y(t)$  cruza a referência. O sinal  $u(t)$  é uma onda quadrada e os harmônicos de alta ordem do sinal de saída são atenuados pelo processo. Assim, o sinal de saída  $y(t)$  é próximo de uma senoide.

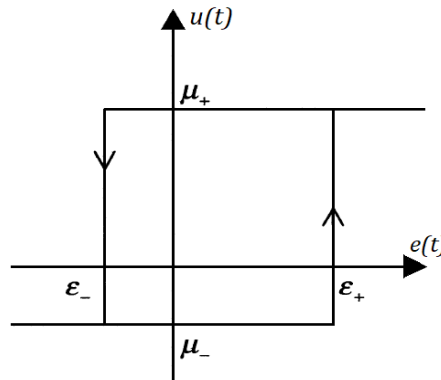
A função geral do relé é representada na Figura 2.2. De acordo com Wang, Lee e Chong (2002), as possíveis configurações do relé estão listadas na Tabela 2.1, onde  $\mu$  é a amplitude do relé e  $\varepsilon$  é a histerese.

### 2.2.1 Relé Ideal

O relé ideal ou padrão é o relé sem histerese e simétrico. Neste caso mais simples, dado por (2.1), deve-se especificar apenas a amplitude  $\mu$ . Caso escolha-se um valor grande para  $\mu$ , tem-se oscilações de amplitude maior no processo e uma identificação melhor. Por outro lado, um sinal de entrada com amplitude maior fará o processo desviar mais da sua referência, o que não é desejável. Caso a saída do sistema seja corrompida por ruído, a



Figura 2.2: Função geral do relé.



Fonte: (WANG; LEE; CHONG, 2002)

Tabela 2.1: Tipos de Relé.

Com histerese	$\varepsilon_+ \neq 0$ e $\varepsilon_- \neq 0$
Sem histerese	$\varepsilon_+ = 0$ e $\varepsilon_- = 0$
Com histerese e simétrico	$\varepsilon_+ = \varepsilon_- \neq 0$
Com histerese e assimétrico	$\varepsilon_+ = \varepsilon_- \neq 0$ e $\mu_+ \neq \mu_-$
Assimétrico	$\mu_+ \neq \mu_-$
Simétrico	$\mu_+ = \mu_-$

Fonte: (WANG; LEE; CHONG, 2002)

amplitude do relé deve ser ajustada de tal forma que seja assegurada uma boa relação sinal-ruído (WANG; LEE; CHONG, 2002).

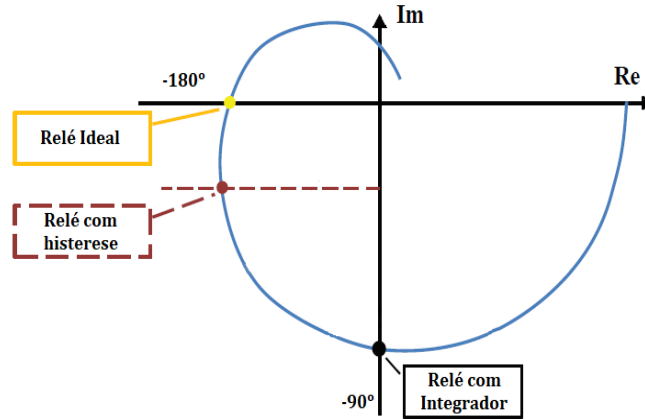
$$u(t) = \begin{cases} \mu_+, & \text{se } e(t) \geq 0 \\ \mu_-, & \text{se } e(t) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\mu_+$  e  $\mu_- \in \mathbb{R}$  indicam a amplitude positiva e negativa, respectivamente.

A partir da utilização do relé ideal é obtida uma oscilação sustentada próxima da frequência crítica do sistema, ou seja, no ponto  $(-1,0)$  da curva Nyquist mostrada na Figura 2.3 para um sistema de primeira ordem com atraso.

Para obter outros pontos de frequência, além do ponto crítico do sistema, diversas variações foram propostas para fornecer informações em uma frequência adicional. Estes métodos geralmente introduzem um elemento dinâmico conhecido na malha de realimentação e assim, a frequência da excitação é alterada.

Figura 2.3: Representação dos efeitos das dinâmicas adicionais na malha de realimentação com relé.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.2 Relé com Histerese

Em diversas situações práticas, pode ser vantajoso substituir o relé padrão na malha de realimentação por um relé simétrico com uma histerese. Desta forma, evitam-se chaveamentos inadequados do relé provocados pelo ruído na saída do processo.

Para o relé com histerese, tem-se:

$$u(t) = \begin{cases} \mu_+, & \text{se } e(t) > \varepsilon_+, \text{ ou } e(t) \geq \varepsilon_- \text{ e } u(t_-) = \mu_+ \\ \mu_-, & \text{se } e(t) < \varepsilon_-, \text{ ou } e(t) \leq \varepsilon_+ \text{ e } u(t_-) = \mu_- \end{cases} \quad (2.2)$$

em que  $\varepsilon_+$  e  $\varepsilon_- \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$  indicam a histerese,  $\mu_+$  e  $\mu_- \in \mathbb{R}$  indicam a amplitude positiva e negativa, respectivamente. O termo  $u(t_-)$  é o valor de  $u$  antes do tempo  $t$ .

Na presença de ruído, a histerese do relé é utilizada para reduzir a influência do ruído de medição e manter a regularidade na largura dos pulsos. O valor da histerese deve ser definido tão pequeno quanto possível (WANG; LEE; CHONG, 2002). Conforme representado na Figura 2.3, dependendo do valor da histerese, o experimento do relé produz uma excitação com uma frequência ligeiramente inferior a observada com o relé ideal. Outra aplicação do relé com histerese é na geração de uma polarização para identificar diferentes pontos de frequência (WANG; HANG; ZOU, 1997).

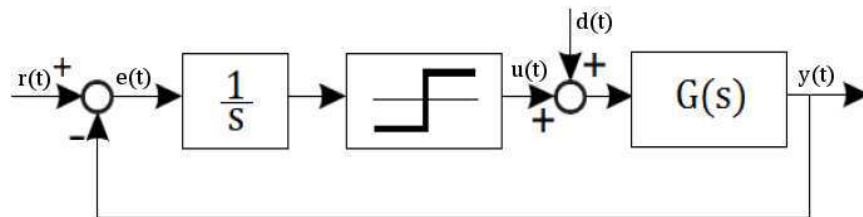
### 2.2.3 Relé com Integrador

O método do relé padrão excita o processo em seu ponto crítico, que está localizado na interseção da curva de Nyquist com eixo real negativo. Isto corresponde a uma fase de  $-180^\circ$ . Com o propósito de obter informações do sistema em um ponto de frequência

mais baixa do que a frequência do relé padrão, é introduzido na malha de realimentação um elemento integrador (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

Na Figura 2.4 é apresentado o diagrama esquemático para o método do relé com integrador. Em um experimento do relé padrão, os chaveamentos ocorrem quando o sinal do erro cruza o zero. Ao introduzir um integrador na malha, o chaveamento do relé ocorre quando há cruzamentos da integral do sinal de erro.

Figura 2.4: Diagrama esquemático do método do relé com integrador.



Fonte: Elaborada pelo autor

A adição de um integrador produz uma mudança de fase, fixando-a em  $-90^\circ$ , de tal modo que o ponto identificado está na interseção do eixo imaginário negativo no gráfico de Nyquist, conforme mostrado na Figura 2.3.

## 2.3 Estrutura do Relé para Processos sob Perturbações

Nesta seção, por meio de um estudo de caso, são descritos os problemas apresentados pela estrutura com realimentação por relé padrão sob perturbação estática e/ou *drift*. Para superar tais problemas, uma estrutura com realimentação por relé foi proposta no trabalho Silva e Barros (2017b). Neste contexto, as vantagens e desvantagens da estrutura proposta são discutidas em detalhes.

### 2.3.1 Relé Padrão sob Perturbações

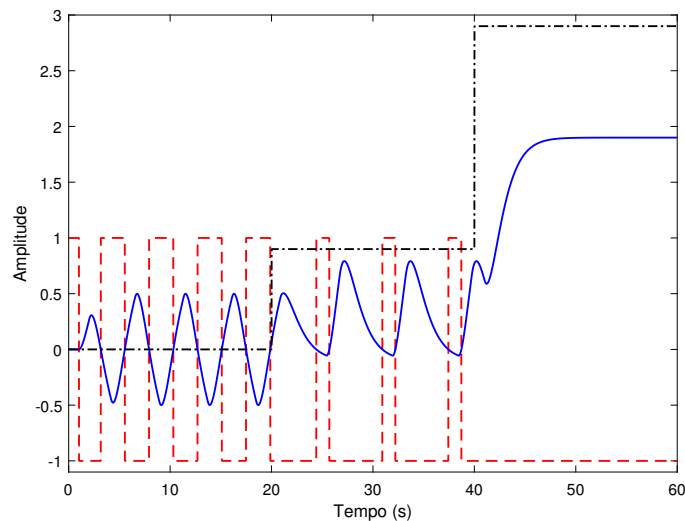
Considere o diagrama esquemático do método do relé padrão mostrado na Figura 2.1. Para ilustrar o efeito de uma perturbação estática aplicada a esta estrutura, considere o processo de segunda ordem com atraso, cujo período de oscilação é  $T_u = 4,81$  s, dado por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s}. \quad (2.3)$$

### Efeito da perturbação estática

Este processo é simulado com um relé padrão, com amplitude  $\mu = 1$ . O passo de simulação utilizado é de 0,01 s e uma perturbação estática com amplitude  $d = 0,9$  é aplicada na entrada do processo no tempo  $t = 20$  s. No instante de tempo  $t = 40$  s, uma outra perturbação estática com  $d = 2$  é aplicada na entrada do processo. Na Figura 2.5, os sinais de saída do relé e saída do processo são apresentados.

Figura 2.5: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para o relé padrão ( $d = 0,9$  e  $d = 2$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor

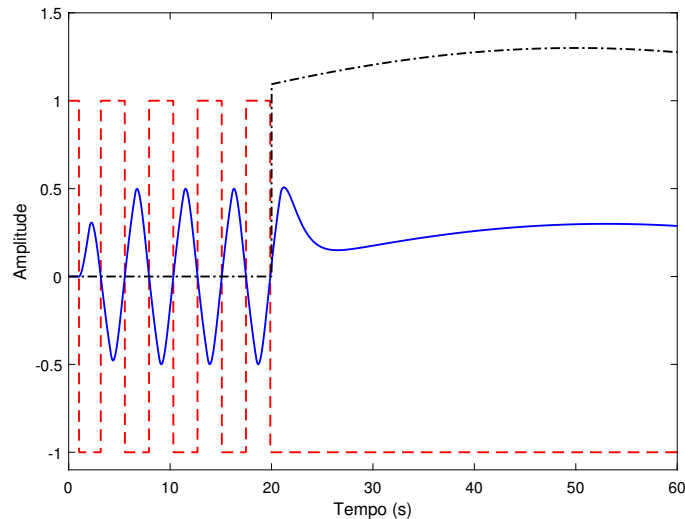
De acordo com a Figura 2.5, antes da introdução da perturbação estática, o período de oscilação é  $\hat{T}_u = 4,78$  s. A partir do tempo  $t = 20$  s, quando a perturbação estática é introduzida no sistema, a oscilação torna-se assimétrica, com período  $\hat{T}_u = 6,51$  s. A partir do instante de tempo  $t = 40$  s, o teste do relé padrão não produz uma oscilação sustentada.

### Efeito do *drift*

Nas mesmas condições anteriores (amplitude do relé  $\mu = 1$  e passo de simulação de 0,01 s) uma simulação é realizada para o processo sob *drift*, dado por  $d = 0,8 + 0,5\text{sen}(0,005t)$  e aplicado na entrada do processo no tempo  $t = 20$  s. Na Figura 2.6, são apresentados os sinais de saída do relé e saída do processo. Neste caso, a estrutura com relé padrão também não foi capaz de manter uma oscilação sustentada.

Observe que o relé padrão submetido a uma perturbação estática produz oscilações

Figura 2.6: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para o relé padrão ( $drift\ d = 0,8 + 0,5sen(0,005t)$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor

assimétricas. Desta forma, diferentes frequências de oscilação são obtidas dependendo dos valores da perturbação estática durante o teste do relé. Já para grandes perturbações estáticas e/ou *drift*, o relé padrão não é capaz de produzir uma oscilação sustentada. Assim, inviabiliza a utilização dos dados de entrada-saída coletados durante o experimento.

### 2.3.2 Estrutura do Relé Proposta sob Perturbações

A estrutura do relé proposta é apresentada na Figura 2.7. A partir dessa estrutura, o objetivo é obter uma oscilação sustentada e simétrica da saída do processo sob perturbação estática e/ou *drift*.

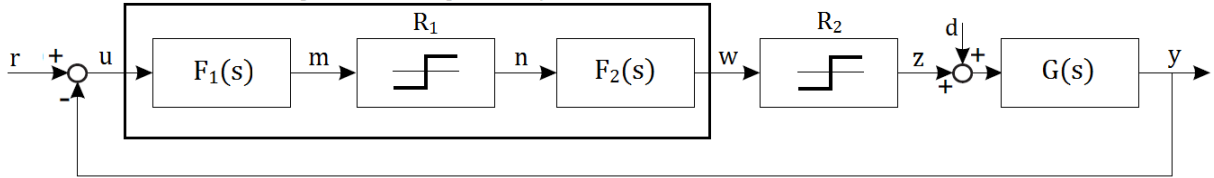
A estrutura é composta por dois blocos. O primeiro bloco é utilizado para remover perturbações estáticas e/ou *drift*. O segundo bloco é um relé padrão ( $R_2$ ). O bloco utilizado para remover perturbações consiste em um filtro passa-alta,  $F_1(s)$ , seguido por um relé ( $R_1$ ) e um filtro passa-baixa,  $F_2(s)$ .

O filtro passa-alta  $F_1(s)$  é dado por:

$$F_1(s) = 1 - e^{-s\tau_f}. \quad (2.4)$$

onde  $\tau_f$  é uma constante. Para uma implementação digital,  $\tau_f$  pode ser escolhido como um múltiplo do tempo de amostragem do processo.

Figura 2.7: Diagrama esquemático da estrutura do relé proposta.  
Bloco para remover perturbações



Fonte: Elaborada pelo autor

O filtro passa-baixa é escolhido como um integrador, ou seja:

$$F_2(s) = 1/s. \quad (2.5)$$

O integrador é usado para compensar a dinâmica do filtro passa-alta. Para separar a dinâmica do filtro passa-alta e do filtro passa-baixa, o relé  $R_1$  é introduzido. O filtro passa-alta remove a perturbação estática e/ou *drift*. O relé  $R_2$  é usado como o relé padrão para gerar uma oscilação estável na saída do processo.

Observe que  $F_1(s)$  é uma derivada aproximada, pois usando uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem para o termo  $e^{-s\tau_f}$  da equação (2.4), tem-se:

$$F_1(s) \approx 1 - (1 - s\tau_f) \approx s\tau_f. \quad (2.6)$$

Utiliza-se uma derivada aproximada de  $F_1(s)$ , pois uma implementação digital de uma derivada pura não é factível. A resposta em frequência de  $F_1(s)$  é dada por:

$$\begin{aligned} |F_1(j\omega)| &= [(1 - \cos(\omega\tau_f))^2 + (\text{sen}(\omega\tau_f))^2]^{1/2} \\ \angle\theta_1(\omega) &= \tan^{-1} \left( \frac{\text{sen}(\omega\tau_f)}{(1 - \cos(\omega\tau_f))} \right). \end{aligned}$$

Observe que para baixas frequências e valores pequenos de  $\tau_f$ , o filtro  $F_1(s)$  tem um ângulo de fase de aproximadamente  $+\pi/2$ .

Para processos com tempo de amostragem significativamente pequenos, recomenda-se a escolha do valor de  $\tau_f$  igual ao tempo de amostragem.

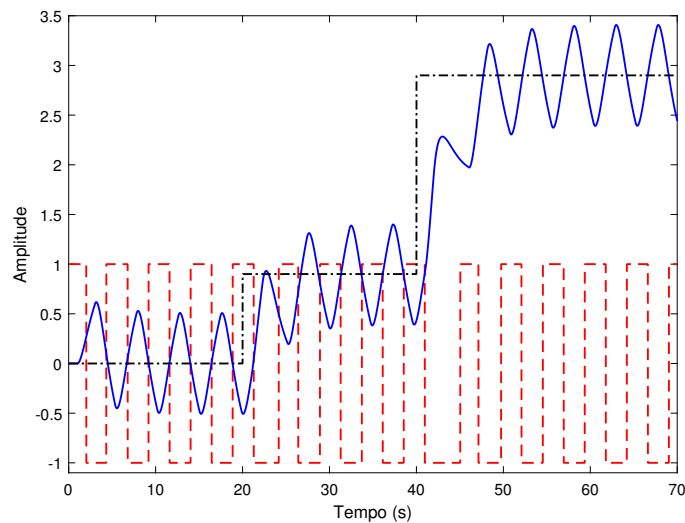
### Efeito da perturbação estática

O processo representado pela equação (2.3) agora é simulado para a estrutura do relé proposta com constante  $\tau_f$  igual ao passo de simulação (0,01 s). As amplitudes dos dois relés são iguais,  $\mu = 1$ . Novamente, as perturbações estáticas  $d = 0,9$  e  $d = 2$  são aplicadas

na entrada do processo no tempo  $t = 20$  s e  $t = 40$  s, respectivamente.

Na Figura 2.8, são apresentados os sinais de saída do relé e saída do processo. Observe que a estrutura do relé proposta fornece uma saída do relé simétrica sob perturbação estática. Em ambos os casos, com e sem perturbações estáticas introduzidas no sistema, o período de oscilação é  $\hat{T}_u = 5,12$  s.

Figura 2.8: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para estrutura do relé proposta ( $d = 0,9$  e  $d = 2$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor

Para grandes perturbações estáticas, a estrutura do relé proposta também fornece uma oscilação simétrica. Quando a perturbação estática  $d = 2$  é aplicada na entrada do processo no tempo  $t = 40$  s, o período de oscilação permanece  $\hat{T}_u = 5,12$  s.

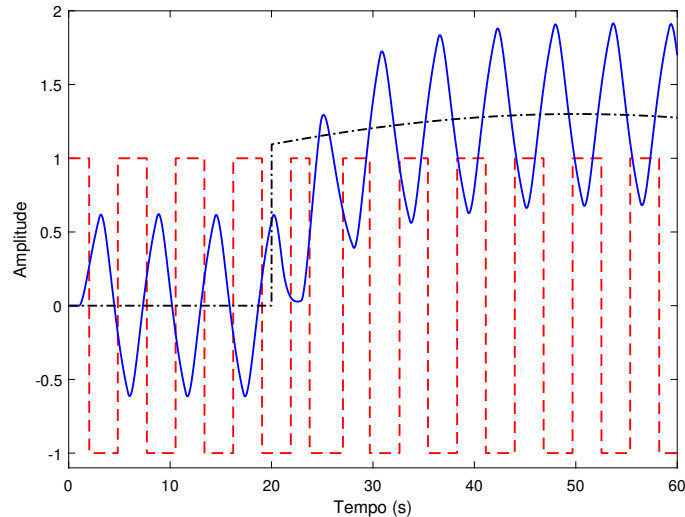
### Efeito do *drift*

Agora, para a estrutura do relé proposta, uma simulação é realizada para o processo sob *drift*, dado por  $d = 0,8 + 0,5\text{sen}(0,005t)$  e aplicado na entrada do processo no tempo  $t = 20$  s. Utiliza-se as mesmas condições anteriores. Na Figura 2.9, os sinais de saída do relé e do processo são apresentados. De acordo com esta figura, independente da perturbação, o período de oscilação permanece  $\hat{T}_u = 5,12$  s.

### Observações

Conforme ilustrado através do estudo de caso acima, a principal vantagem da estrutura do relé proposta é a robustez à perturbações. Ou seja, uma vez que o relé está oscilando,

Figura 2.9: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para estrutura do relé proposta (*drift*  $d = 0,8 + 0,5\text{sen}(0,005t)$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor

é garantido o chaveamento simétrico do relé após uma perturbação na entrada. Outra vantagem da estrutura proposta é a simplicidade dos seus componentes. Para o filtro passa-alta, o valor da constante  $\tau_f$  pode ser escolhido igual ao tempo de amostragem.

A desvantagem da estrutura proposta consiste na amplificação do ruído da saída do processo após o filtro passa-alta. Nos casos de sistemas ruidosos, pode-se utilizar histerese para evitar o chaveamento incorreto da saída do relé. Recomenda-se escolher o valor de histerese em torno de 30% do valor máximo do ruído.

A utilização do relé polarizado, proposto em Shen, Wu e Yu (1996), pode prejudicar as estimativas de ganho e frequência crítica à medida que a polarização aumenta. Assim, a vantagem da estrutura do relé proposta é que a estimativa do período de oscilação não varia, independentemente do valor da perturbação estática.

Em Sung e Lee (2006a), um ganho integral deve ser atualizado através de um procedimento iterativo para garantir desempenhos consistentes na rejeição de grandes perturbações estáticas. Na estrutura proposta, não há necessidade de um procedimento iterativo.

Para garantir a rejeição de uma grande perturbação estática, em Sung et al. (2006) é necessário atualizar parâmetros e o modo de operação da estrutura proposta durante o teste do relé. Enquanto que para a estrutura proposta, é definido apenas a constante  $\tau_f$ .

Em Lee et al. (2011), é necessário o projeto de dois filtros. O bloco proposto para remover perturbações é semelhante a essa abordagem. No entanto, na estrutura proposta



define-se apenas a constante  $\tau_f$ . Do ponto de vista prático, esta é uma característica favorável da estrutura proposta.

## 2.4 Resultados de Simulação

Nesta seção, sob diferentes perturbações, simulações são realizadas com a estrutura do relé proposta e os processos listados na Tabela 2.2. Nesta tabela, encontram-se os valores reais da frequência crítica de cada processo.

Para todas as simulações, os valores das perturbações foram escolhidos para serem representativos diante das condições de operação do relé, ou seja, amplitude do relé  $\mu = 1$  e constante do filtro ( $\tau_f$ ) igual ao passo de simulação (0,01 s).

Tabela 2.2: Processos usados para avaliação da estrutura do relé proposta e as respectivas frequências críticas.

	Processo	Frequência crítica (Hz)
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,3229
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,2236
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,3350
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,0151
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,1593
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,1593

Fonte: Elaborada pelo autor

Para cada um dos processos, os erros percentuais entre a frequência crítica real e as frequências estimadas utilizando a estrutura do relé proposta e o relé padrão são calculados. O erro percentual da estimação em um dado ponto de frequência é definido como:

$$erro(\%) = \left| \frac{\hat{\omega}_c - \omega_c}{\omega_c} \right| \times 100$$

onde  $\hat{\omega}_c$  e  $\omega_c$  são o valor estimado e o valor real da frequência de oscilação, respectivamente.

### 2.4.1 Efeitos da Perturbação Estática

Nesta seção, os efeitos de diferentes valores de perturbação estática aplicadas à estrutura do relé proposta são avaliados.

Na Tabela 2.3, para a estrutura do relé proposta e o relé padrão, são apresentadas as estimativas das frequências de oscilação dos ciclos limite. O termo NA é usado para indicar que a técnica não é capaz de gerar uma oscilação sustentada quando sujeita a uma perturbação. Em todos os casos, a amplitude do relé é  $\mu = 1$  e a constante  $\tau_f$  é igual ao passo de simulação (0,01 s).

Para os processos 1 e 3 a 6 e valores de perturbação estática acima da amplitude do relé ( $d = 1,2$ ), o relé padrão não é capaz de produzir uma oscilação. Enquanto que o relé proposto produz uma oscilação estável em todos os casos.

Tabela 2.3: Frequências estimadas sob perturbação estática.

	Processo	Perturbação	Proposto (Hz)	Erro (%)	Padrão (Hz)	Erro (%)
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,5	0,2475	23,3509	0,3059	5,2648
		0,8	0,2475	23,3509	0,2513	22,1740
		1,2	0,2475	23,3509	NA	NA
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,5	0,2262	1,1628	0,2179	2,5492
		0,8	0,2252	0,7156	0,2160	3,3989
		1,2	0,2242	0,2683	0,2110	5,6351
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,5	0,3356	0,1791	0,3279	2,1194
		0,8	0,3356	0,1791	0,3165	5,5224
		1,2	0,3356	0,1791	NA	NA
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,5	0,0131	13,2450	0,0149	1,3245
		0,8	0,0131	13,2450	0,0135	10,5960
		1,2	0,0131	13,2450	NA	NA
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,5	0,1684	5,7125	0,1447	9,1651
		0,8	0,1678	5,1342	0,1277	19,8368
		1,2	0,1667	4,6453	NA	NA
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,5	0,1592	0,0628	0,1520	4,5825
		0,8	0,1572	1,3183	0,1381	13,3082
		1,2	0,1541	3,2643	NA	NA

Fonte: Elaborada pelo autor

Para verificar a dispersão das frequências estimadas, para cada um dos processos analisados, foi calculado o desvio padrão das estimativas. Tais valores encontram-se na Tabela 2.4. Para os processos 1, 3 e 4 não há variação das frequências estimadas, logo o desvio padrão é igual a zero.

De acordo com os valores de desvio padrão apresentados na Tabela 2.4, observa-se que para a estrutura do relé proposta são obtidos valores de desvio padrão inferiores

Tabela 2.4: Desvio padrão das frequências estimadas sob perturbação estática.

	Processo	Proposto	Padrão
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0	0,1632
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,0010	0,0036
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0	0,1861
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0	0,0082
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,00086	0,0791
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,0026	0,0840

Fonte: Elaborada pelo autor

aos obtidos com o relé padrão. Portanto, independentemente dos valores da perturbação estática, a estrutura proposta foi insensível a perturbações estáticas e foi obtida uma oscilação simétrica na saída do relé.

### 2.4.2 Efeitos do *Drift*

Nesta seção, os efeitos de diferentes valores de *drift* aplicados a estrutura do relé proposta são avaliados.

Na Tabela 2.5 são apresentadas as estimativas das frequências de oscilação dos ciclos limite obtidos a partir da estrutura do relé proposta e do relé padrão. O termo NA é usado para indicar que a técnica não é capaz de gerar uma oscilação sustentada quando sujeita ao *drift*. Em todos os casos, a amplitude do relé é  $\mu = 1$  e a constante  $\tau_f$  é igual ao passo de simulação (0,01 s).

Para todos os processos em estudo, a estrutura do relé proposta produz uma oscilação estável. Enquanto que para os processos 4 e 6 o relé padrão não é capaz de produzir uma oscilação sustentada.

Novamente, a fim de verificar a dispersão das frequências estimadas, para cada um dos processos analisados, foi calculado o desvio padrão das estimativas. Estes valores encontram-se na Tabela 2.6. A partir dos valores de desvio padrão, pode-se concluir que a estrutura do relé proposta é capaz de fornecer ciclos limite insensíveis aos tipos de *drift* aplicados.

Tabela 2.5: Frequências estimadas sob *drift*.

Processo	<i>Drift</i>	Proposto (Hz)	Erro (%)	Padrão (Hz)	Erro (%)	
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	rampa (0,015)	0,2441	24,4038	0,3174	1,7033
		$sen(0,002t)$	0,2441	24,4038	0,293	9,2598
		$0,8 + 0,5sen(0,001t)$	0,2441	24,4038	0,1953	39,5169
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	rampa (0,015)	0,2319	3,7120	0,2197	1,7442
		$sen(0,002t)$	0,2319	3,7120	0,2197	1,7442
		$0,8 + 0,5sen(0,001t)$	0,2319	3,7120	0,2075	7,2004
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	rampa (0,015)	0,3296	1,6119	0,3296	1,6119
		$sen(0,002t)$	0,3296	1,6119	0,3174	5,2537
		$0,8 + 0,5sen(0,001t)$	0,3296	1,6119	0,2930	12,5373
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	rampa (0,015)	0,01602	6,0927	NA	NA
		$sen(0,0002t)$	0,01297	14,1060	0,01373	9,0728
		$0,8 + 0,5sen(0,0001t)$	0,01297	14,1060	0,0114	24,2384
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	rampa (0,015)	0,1709	7,2819	0,1465	8,0352
		$sen(0,002t)$	0,1709	7,2819	0,1343	15,6937
		$0,8 + 0,5sen(0,001t)$	0,1709	7,2819	0,1099	31,0107
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	rampa (0,015)	0,1587	0,3766	0,1465	8,0352
		$sen(0,002t)$	0,1587	0,3766	0,1465	8,0352
		$0,8 + 0,5sen(0,001t)$	0,1587	0,3766	NA	NA

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2.6: Desvio padrão das frequências estimadas sob *drift*.

Processo	Proposto	Padrão
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,0018
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0

Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.4.3 Efeitos do Ruído

Nesta seção, os processos são simulados considerando os efeitos do ruído na saída do processo. Os valores do ruído gaussiano, com média zero, são aumentados gradualmente para reduzir a relação sinal-ruído. Para os processos em estudo, as frequências estimadas são mostradas na Tabela 2.7. Em todos os casos, a amplitude do relé é  $\mu = 1$  e o passo de simulação é igual a 0,01 s.

Para evitar chaveamentos indesejáveis do sinal de saída do relé, deve-se escolher valores apropriados de histerese, tanto para a estrutura do relé proposta quanto para o relé padrão. Além disso, observe que para a estrutura do relé proposta deve-se especificar a constante do termo  $F_1(s)$ , uma vez que, sob ruído na saída do processo, a escolha do passo de simulação não é adequada.

Tabela 2.7: Frequências estimadas sob ruído na saída.

	Processo	Variância	Histerese	$\tau_f$	Proposto (Hz)	Erro (%)	Padrão (Hz)	Erro (%)
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,01	0,01	0,08	0,3113	3,7263	0,3296	2,0328
		0,1	0,8	0,5	0,2319	39,2411	0,2686	20,2159
		0,5	1,5	1	0,2075	55,6145	0,2930	10,2048
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,01	0,02	0,1	0,2136	4,6816	0,2197	1,7737
		0,1	0,5	0,4	0,1953	14,4905	0,2075	7,7590
		0,5	1,5	0,5	0,1831	22,1191	0,1953	14,4905
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,005	0,2	1,0	0,2319	44,4588	0,2625	27,6190
		0,01	0,3	1,0	0,2380	40,7563	0,2319	44,4588
		0,02	0,45	2,0	0,1892	77,0613	0,1892	77,0613
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,01	0,5	2,0	0,01068	41,4214	0,01221	23,7003
		0,1	1,0	4,0	0,01373	10,0059	0,01373	10,0059
		0,2	1,5	5	0,01068	41,4214	0,01373	10,0059
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,01	0,2	0,1	0,1526	4,3906	0,1465	8,7372
		0,1	0,7	0,4	0,1465	8,7372	0,1404	13,4615
		0,5	1,8	1,2	0,1160	37,3276	0,1282	24,2590
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,01	0,2	0,2	0,1404	13,4615	0,1526	4,3906
		0,1	0,8	1,0	0,1282	24,2590	0,1343	18,6150
		0,2	1,0	1,1	0,1160	37,3276	0,1404	13,3696

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Tabela 2.8 encontram-se os desvios padrão das frequências estimadas para cada um dos processos analisados. A partir dos valores de desvio padrão, observa-se que a estrutura do relé proposta é mais sensível ao ruído na saída do processo do que o relé padrão. O principal motivo para isto é a amplificação do ruído após o filtro passa-alta. Também observa-se que quanto maior o ruído, maior deve ser o valor da histerese e da constante  $\tau_f$ . Logo, o valor da frequência de oscilação estimada se distancia do valor real da frequência crítica.

Tabela 2.8: Desvio padrão das frequências estimadas sob ruído na saída.

	Processo	Proposto	Padrão
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,0543	0,0307
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,0154	0,0122
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,0266	0,0368
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,0018	0,0072
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,0196	0,0093
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,0122	0,0093

Fonte: Elaborada pelo autor

#### 2.4.4 Efeitos do Ruído e Perturbação

Nesta seção, os processos são simulados considerando os efeitos do ruído na saída do processo em conjunto com perturbações estáticas e/ou *drift*. Para os processos em estudo, as frequências estimadas são mostradas na Tabela 2.9. O termo NA é usado para indicar que a técnica não é capaz de gerar uma oscilação sustentada quando sujeita a uma perturbação. Em todos os casos, a amplitude do relé é  $\mu = 1$  e o passo de simulação é igual a 0,01 s.

Novamente, para evitar chaveamentos indesejáveis do sinal de saída do relé, é necessário definir valores apropriados de histerese, tanto para a estrutura do relé proposta quanto para o relé padrão. Além disso, observe que para a estrutura do relé proposta deve-se especificar o valor da constante do termo  $F_1(s)$  diferente de 0,01 s.

#### 2.4.5 Comparação com Outras Estruturas do Relé

Nesta seção, o desempenho da estrutura do relé proposta é comparado com outras estratégias apresentadas na literatura. Novamente, utiliza-se os processos listados na Tabela 2.2. Em todos os casos, as frequências de oscilação são calculadas para o relé padrão (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984), a estrutura do relé proposta e as estruturas com realimentação por relé propostas em Park, Sung e Lee (1997), Sung e Lee (2006a) e Lee et al. (2011). Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 2.10. O termo NA é usado para indicar que a técnica não é capaz de gerar uma oscilação sustentada quando sujeita a uma perturbação. Os parâmetros de projeto para as estruturas com realimentação por relé são apresentados na Tabela 2.11.

Tabela 2.9: Frequências estimadas sob ruído na saída e perturbação.

Processo	Variância	Histerese	$\tau_f$	Perturbação	Proposto (Hz)	Erro (%)	Padrão (Hz)	Erro (%)	
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,001	0,01	0,1	0,5	0,2667	21,0851	0,3052	5,7974
		0,01	0,08	0,5	1,2	0,2358	36,9069	NA	NA
		0,05	1,5	1	$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,4202	23,1513	NA	NA
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,001	0,01	0,1	0,5	0,2439	8,3253	0,2197	1,7737
		0,01	0,08	0,5	1,2	0,2053	8,8916	0,2136	4,6801
		0,05	1,5	1	$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,1695	31,9221	0,1876	19,1771
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,001	0,5	0,1	0,5	0,2247	49,0773	NA	NA
		0,01	0,5	1	1,2	0,2380	40,7563	NA	NA
		0,01	0,05	1	$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,2604	28,6420	NA	NA
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,001	0,01	0,1	3,0	0,01831	17,5106	0,01831	17,5106
		0,01	0,1	3,0	1,2	0,01221	23,7003	NA	NA
		0,01	0,2	4,0	$0,8 + 1,2sen(0,0005t)$	0,0142	6,3308	NA	NA
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,001	0,01	0,1	0,5	0,1526	4,3906	0,1465	8,7372
		0,01	0,08	0,5	1,2	0,1465	8,7372	NA	NA
		0,01	0,5	1	$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,1157	37,5236	NA	NA
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,001	0,01	0,1	0,5	0,1526	4,3906	0,1526	4,3906
		0,01	0,08	0,5	1,2	0,1433	11,1013	NA	NA
		0,01	0,5	1	$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,1043	52,6449	NA	NA

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2.10: Comparação dos métodos e frequências de oscilação (Hz).

Processo	Perturbação	AH <sup>1</sup>	Proposto	PSL <sup>2</sup>	SL <sup>3</sup>	Lee <sup>4</sup>	
1	$\frac{1}{s+1}e^{-s}$	0,8	0,2513	0,2475	0,3030	0,1433	0,3333
		1,2	NA	0,2475	NA	0,1333	0,3333
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	NA	0,2463	NA	0,1504	0,3344
2	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-0,2s}$	0,8	0,2160	0,2252	0,1961	0,1563	0,2083
		1,2	0,2110	0,2242	0,1961	0,1538	0,2083
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	0,1818	0,2242	0,1961	0,1563	0,2083
3	$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s+3)}e^{-0,3s}$	0,8	0,3165	0,2941	0,3030	0,1724	0,3226
		1,2	NA	0,2941	NA	0,1724	0,3226
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	NA	0,2941	0,3030	NA	0,3226
4	$\frac{0,57}{(8,6s+1)^2}e^{-18,7s}$	0,8	NA	0,0131	0,0147	0,0072	0,0152
		1,2	NA	0,0131	0,0147	0,007	0,0152
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	NA	0,0168	0,0167	NA	0,0152
5	$\frac{1-s}{(1+s)^3}$	0,8	0,1266	0,1613	0,1471	0,0676	0,1515
		1,2	NA	0,1613	NA	0,0658	0,1515
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	NA	0,1563	NA	NA	0,1515
6	$\frac{1}{(s+1)^4}$	0,8	0,1333	0,1471	0,1471	0,0667	0,1515
		1,2	NA	0,1471	NA	0,0633	0,1563
		$0,8 + 1,2sen(0,005t)$	NA	0,1515	NA	NA	0,1538

<sup>1</sup>AH: (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984), <sup>2</sup>PSL: (PARK; SUNG; LEE, 1997), <sup>3</sup>SL: (SUNG; LEE, 2006a), <sup>4</sup>LEE: (LEE et al., 2011)

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2.11: Parâmetros de projeto das estruturas com relé.

Método	Parâmetro de projeto
(ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984)	-
Proposto	$\tau_f = T_s = 0,1$
(PARK; SUNG; LEE, 1997)	-
(SUNG; LEE, 2006a)	$K_p = 2$ e $K_s = 5$
(LEE et al., 2011)	$\tau_f = 2$ e $q = 0,1$

Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme ilustrado pelos resultados da simulação, a principal vantagem da estrutura do relé proposta é a robustez às perturbações. Ou seja, uma vez que o relé está oscilando, o chaveamento do relé é garantido após uma perturbação na entrada.

## 2.5 Resultados Experimentais - Secador de Grãos

A estrutura do relé proposta é aplicada a um sistema de secagem de grãos em escala de laboratório. Os detalhes do sistema utilizado estão descritos no Apêndice A.

Para avaliar a qualidade da informação obtida a partir da estrutura do relé proposta, os dados de entrada-saída obtidos com os experimentos do relé são utilizados para identificação de modelos FOPTD do processo. Além disso, sob condições experimentais iguais, os modelos obtidos a partir da estrutura proposta são comparados com os modelos estimados usando o relé proposto por Åström e Hägglund (1984).

Um modelo FOPTD pode ser obtido a partir do ganho no estado estacionário do processo e da informação da frequência do ciclo limite. Uma vez que a estrutura do relé proposta é capaz de rejeitar perturbações estáticas e assegurar a simetria da saída do processo, uma variação ao degrau pode ser aplicada na entrada do processo.

O degrau na entrada do processo fornece o ganho no estado estacionário do processo. Desta forma, utilizando as informações obtidas através do experimento do relé, é aplicada a técnica de identificação proposta por Åström e Hägglund (2006).

Considere um modelo FOPTD com função de transferência dada por  $G(s)$ , equação (2.7). Na frequência  $\omega$ , que é a frequência de oscilação do processo,  $G(j\omega)$  e  $\phi(j\omega)$  são o ganho e a fase do sistema, respectivamente.

$$G(s) = \frac{K}{T_s + 1} e^{-sL}. \quad (2.7)$$

onde  $K$  é o ganho do processo,  $T$  é a constante de tempo,  $L$  é o atraso.

O ganho no estado estacionário ( $G(0)$ ) pode ser obtido integrando a resposta de entrada-saída do sistema.  $G(j\omega)$  é estimado a partir de um teste com relé realimentado.



Os outros parâmetros do modelo FOPTD podem ser calculados utilizando as seguintes equações:

$$T = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{|G(j\omega)|}{G(0)}\right)^{-2} - 1} \quad (2.8)$$

$$L = \frac{1}{\omega} \left( \pi - \arctan \left( \frac{|G(j\omega)|}{G(0)} \right)^{-2} - 1 \right) \quad (2.9)$$

$$K = G(0). \quad (2.10)$$

Para validar os modelos obtidos, degraus são aplicados na entrada do processo. A exatidão do modelo estimado é avaliada usando a equação do erro médio quadrático normalizado dada por (2.11). O valor desta função varia entre  $-\infty$  (ajuste ruim) e 1 (ajuste perfeito).

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{\|y(kTs) - \hat{y}(kTs)\|}{\|y(kTs) - \text{media}(y(kTs))\|} \right), \quad (2.11)$$

onde  $kTs$  são os instantes de amostragem,  $Ts$  é o tempo de amostragem,  $y(kTs)$  é a saída real do processo,  $\hat{y}(kTs)$  é a saída estimada e  $\text{media}(y(kTs))$  é o valor médio da saída do processo.

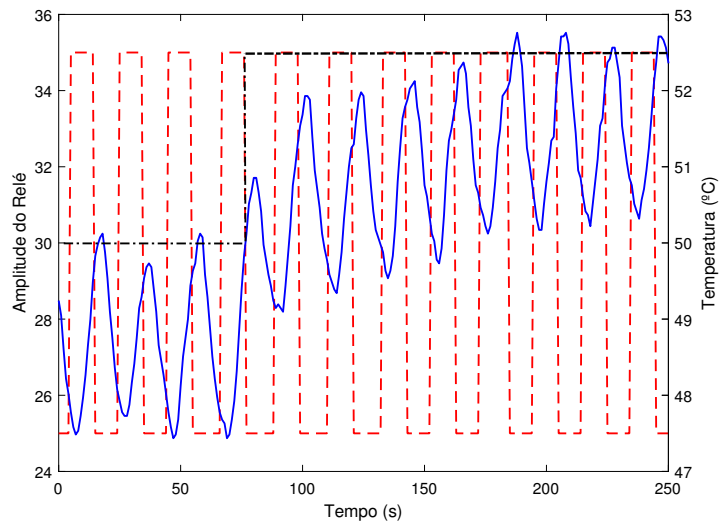
Com o propósito de obter o estado estacionário do processo, uma Modulação por Largura de Pulso (*Pulse Width Modulation* - PWM) ajustada em 30% foi aplicada na entrada do processo. O valor final no estado estacionário foi de aproximadamente  $48,5^\circ\text{C}$ . Durante os experimentos, apenas o ventilador  $V_1$  foi utilizado. Para a estrutura do relé proposta, a constante de tempo do filtro ( $\tau_f$ ) foi definida igual ao tempo de amostragem, isto é, 1 s. A amplitude do relé  $R_1$  foi definida para  $\mu = \pm 1$ . Enquanto, o relé  $R_2$  foi ajustado para aplicar oscilações em torno da referência da variável manipulada (MV) com uma amplitude  $\mu = 5$ . Para ambos os relés, a histerese foi ajustada para  $\pm 0,1$ .

Para obter o ganho em estado estacionário do processo, um degrau com amplitude  $d = 5$  foi aplicado na entrada do processo no instante de tempo  $t = 80$  s. Essa perturbação foi aplicada aos experimentos da estrutura do relé proposta e relé padrão.

Os sinais de saída do relé e saída do processo obtidos pelo experimento de relé proposto são mostrados na Figura 2.10. Os sinais obtidos pelo experimento de relé padrão são mostrados na Figura 2.11. Observa-se que, utilizando a estrutura do relé proposta, é obtida uma oscilação simétrica na saída do relé. Ao utilizar o relé padrão é obtida uma oscilação assimétrica.

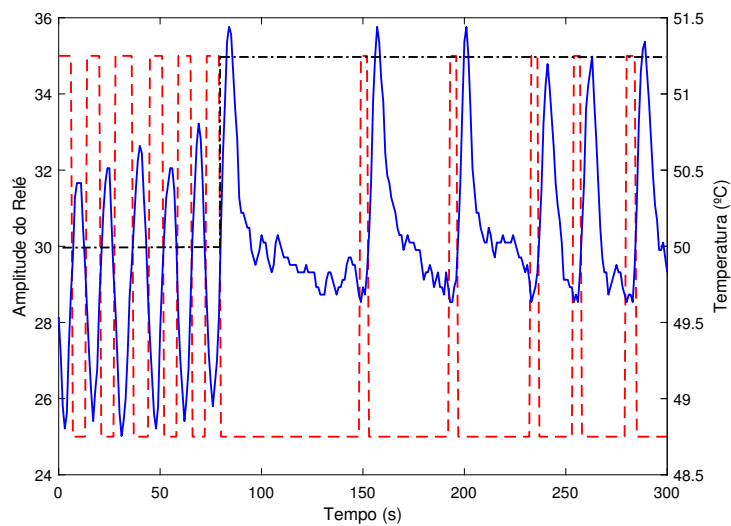
Os modelos FOPTD foram estimados utilizando as equações (2.8)-(2.10) e os dados

Figura 2.10: Curvas dos sinais de saída do relé (linha pontilhada), saída do processo (linha sólida) e perturbação (linha traço-ponto) utilizando relé proposto (Secador de Grãos).



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.11: Curvas dos sinais de saída do relé (linha pontilhada), saída do processo (linha sólida) e perturbação (linha traço-ponto) utilizando relé padrão (Secador de Grãos).



Fonte: Elaborada pelo autor

de entrada-saída. A partir do experimento usando a estrutura do relé proposta, tem-se:

$$G_{pro}(s) = \frac{0,3712}{5,237s + 1} e^{-3,47s}. \quad (2.12)$$

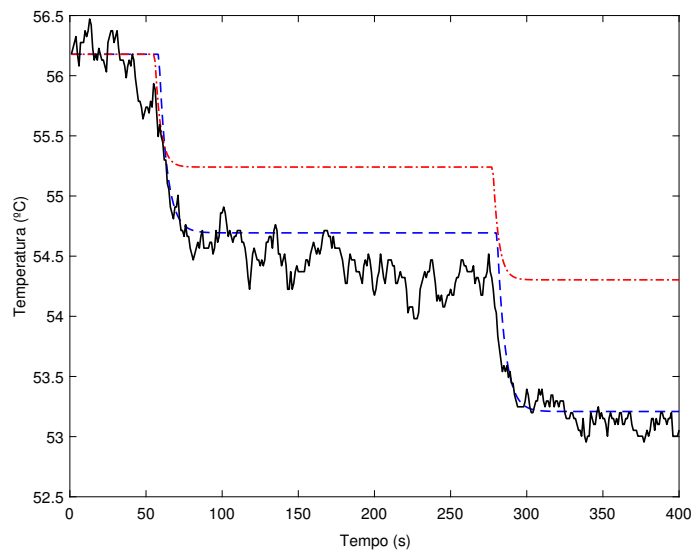
Para o experimento com relé padrão, o modelo FOPTD estimado é:

$$G_{sr}(s) = \frac{0,2344}{3,747s + 1} e^{-4,26s}. \quad (2.13)$$

Com o objetivo de validar os modelos obtidos, degraus descendentes foram aplicados na entrada do processo conforme mostrado na Figura 2.12. A aplicação apenas de degraus para baixo deve-se a forte não linearidade do sistema de secagem de grãos. A principal razão desta característica é o fato do resfriamento das paredes dos tubos ser bem mais lento que o aquecimento.

O valor do erro médio quadrático normalizado, obtido a partir do modelo estimado usando os dados da estrutura do relé proposta, é  $\epsilon = 0,7243$ . Enquanto, para o modelo obtido a partir do experimento do relé padrão tem-se  $\epsilon = 0,08314$ .

Figura 2.12: Curvas dos sinais de saída do processo (linha sólida), saída do modelo  $G_{pro}(s)$  (linha tracejada) e saída do modelo  $G_{sr}(s)$  (linha traço-ponto) utilizados para validação (Secador de Grãos).



Fonte: Elaborada pelo autor

## 2.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposta uma estrutura com realimentação por relé para processos sob perturbação. A partir da estrutura proposta, o objetivo é garantir uma oscilação estável e simétrica sob perturbações estáticas e/ou *drift*, mesmo para grandes valores de perturbação estática.

Diferente das alternativas presentes na literatura para superar os problemas gerados por perturbações em sistemas com realimentação por relé, a estrutura do relé proposta não utiliza procedimentos iterativos. Para utilizar a estrutura do relé proposta é necessário definir apenas uma constante para o filtro passa-alta. Em diversos casos, esta variável pode ser escolhida como o tempo de amostragem do processo.

Uma desvantagem da estrutura proposta é o aumento da sensibilidade ao ruído do processo devido a característica do filtro passa-alta. Nestes casos, pode-se utilizar histerese para evitar o chaveamento incorreto da saída do relé e/ou aumentar a constante do filtro passa-alta.

De acordo com o estudo de caso e resultados de simulação, a estrutura do relé proposta é capaz de gerar o chaveamento do relé sob perturbação na entrada do processo, enquanto o relé padrão pode não produzir uma oscilação sustentada para grandes perturbações estáticas. Resultados semelhantes são obtidos para processos sob *drift*.

Quando comparado com outras estratégias presentes na literatura, observa-se que a estrutura com realimentação por relé proposta é menos sensível às perturbações em relação as abordagens propostas por Åström e Hägglund (1984), Park, Sung e Lee (1997) e Sung e Lee (2006a). Quando compara-se com a estrutura do relé proposta em Lee et al. (2011), ambas as abordagens apresentam pequena variação nas frequências de oscilação estimadas.

A partir dos resultados de simulação, observa-se que a estrutura proposta fornece um período de oscilação diferente do período crítico real. Esta informação é útil, por exemplo, para a aplicação de técnicas de identificação de sistemas.

Uma vez que a estrutura com realimentação por relé proposta é capaz de rejeitar perturbações estáticas, uma variação ao degrau na entrada do processo pode ser aplicada sem prejudicar a operação do relé. Assim, aproveitando esta característica da estrutura proposta, os dados de entrada e saída obtidos a partir da estrutura proposta foram aplicados para estimativas de modelos FOPTD de um sistema de secagem de grãos em escala de laboratório. Os resultados experimentais mostram que o modelo obtido utilizando os dados de entrada-saída da estrutura proposta apresenta um erro menor em relação ao modelo obtido usando o relé padrão.

## Capítulo 3

# Estrutura com Realimentação por Relé Aplicada para Processos TITO

### 3.1 Introdução

Para sistemas SISO, o método do relé padrão tem sido amplamente aplicado na indústria desde a sua introdução por Åström e Hägglund (1984). Porém, vários processos industriais são múltiplas-entradas e múltiplas-saídas (MIMO). Para tais processos, podem ocorrer erros na estimativa da informação crítica devido à interação entre as malhas.

Neste capítulo, a aplicação da estrutura com realimentação por relé apresentada no Capítulo 2 é estendida aos sistemas *Two-Input Two-Output* (TITO). Esta é uma subclasse comum de sistemas MIMO presente em diversos processos industriais. Além disso, como a realimentação por relé proposta é robusta a perturbações e garante uma saída simétrica do relé, é proposto um sinal de excitação composto por um degrau e uma onda quadrada periódica com frequência menor que a frequência de oscilação obtida com o experimento do relé. O objetivo desse sinal de excitação adicional é estimar vários pontos de frequência do processo. Assim, a informação no domínio da frequência pode ser usada para estimar, por exemplo, um modelo de primeira ordem com atraso (FOPTD) para cada Malha Aberta Efetiva (EOP) de um processo TITO.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 3.2, é definido o conceito de processo em Malha Aberta Efetivo (EOP) para sistemas TITO. Na seção 3.3, através de um estudo de caso, são discutidos os resultados da aplicação da estrutura do relé proposta para um processo TITO. O sinal de excitação para estimar múltiplos pontos de frequência é apresentado na seção 3.4. Na seção 3.5, são apresentados os resultados experimentais da aplicação da estrutura do relé proposta para um processo térmico TITO. O capítulo

se encerra com as conclusões na seção 3.6.

## 3.2 Processo em Malha Aberta Efetivo (EOP)

Considere um processo em Malha Aberta Efetivo como sendo a função de transferência que descreve a dinâmica real de cada malha aberta entre uma entrada  $u_i$  e saída  $y_i$ , enquanto todas as demais malhas estão fechadas. Assim, um sistema multivariável  $n \times n$  pode ser decomposto em um conjunto de  $n$  sistemas equivalentes SISO (HUANG et al., 2003).

Um EOP difere da função de transferência em malha aberta original pelos efeitos das interações de malhas acopladas. As dinâmicas combinadas das malhas SISO, representadas por um EOP, podem apresentar características diferentes da respectiva malha, mesmo sem sofrer efeitos externos.

Para obter o EOP de um sistema TITO, considere o processo  $G(s)$  e a matriz de funções de transferência do controlador  $G_c(s)$ , dadas por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} g_{c1}(s) & 0 \\ 0 & g_{c2}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

De acordo com Huang et al. (2003), a definição de EOP para um processo TITO é dada por:

$$\bar{g}_1(s) = g_{11}(s) - g_{12}(s) [g_{22}(s)]^{-1} g_{21}(s) h_2(s) \quad (3.3)$$

$$\bar{g}_2(s) = g_{22}(s) - g_{21}(s) [g_{11}(s)]^{-1} g_{12}(s) h_1(s) \quad (3.4)$$

onde

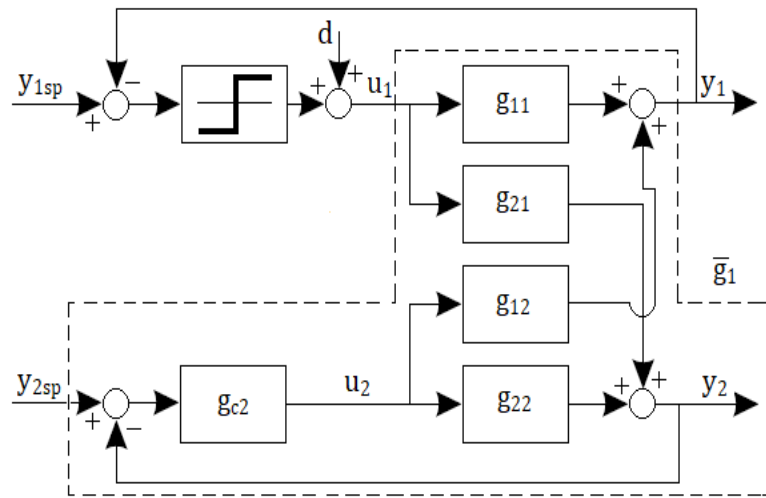
$$h_i(s) = \frac{g_{ci}(s)g_{ii}(s)}{1 + g_{ci}(s)g_{ii}(s)}, \quad i = 1,2. \quad (3.5)$$

Observe que o segundo fator no lado direito das equações (3.3) e (3.4) representa uma medida da interação em malha fechada. Portanto, em um experimento do relé realizado com base em  $\bar{g}_i$  leva-se em conta os efeitos da interação de malha.

Na Figura 3.1, é apresentado o esquema de realimentação por relé usado para estimar

a primeira malha aberta efetiva, onde a malha 1 está sob realimentação do relé e a malha 2 está sob realimentação de um controlador PID. Este procedimento pode ser estendido para um processo MIMO geral, onde os experimentos do relé são realizados de forma sequencial para estimar todos os EOPs. Neste trabalho, sem perda de generalidade, a aplicação da estrutura do relé proposta é restrita aos sistemas com duas entradas e duas saídas (TITO).

Figura 3.1: Diagrama esquemático da malha aberta efetiva (EOP) de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada por relé.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3 A Estrutura com Realimentação por Relé Aplicada para Processos TITO

Para os sistemas multivariáveis, existem três possíveis esquemas de realimentação por relé, são eles: o experimento do relé independente (*independent single relay*), onde apenas um relé é realimentado por malha de forma independente, deixando as outras malhas abertas. A segunda possibilidade é o experimento do relé sequencial (*sequencial relay feedback*), onde o relé é aplicado na primeira malha, enquanto as outras estão abertas. O relé é aplicado na malha seguinte com a primeira fechada, e assim por diante, até que o experimento do relé seja realizado em todas as malhas. A terceira possibilidade é o experimento do relé descentralizado (*decentralized relay feedback*). Neste caso, o relé é aplicado em todas as malhas simultaneamente (WANG et al., 1997).

Nesta seção, em diferentes condições, a operação da estrutura do relé proposta é ilustrada para um processo TITO. Além disso, o desempenho da estrutura proposta é

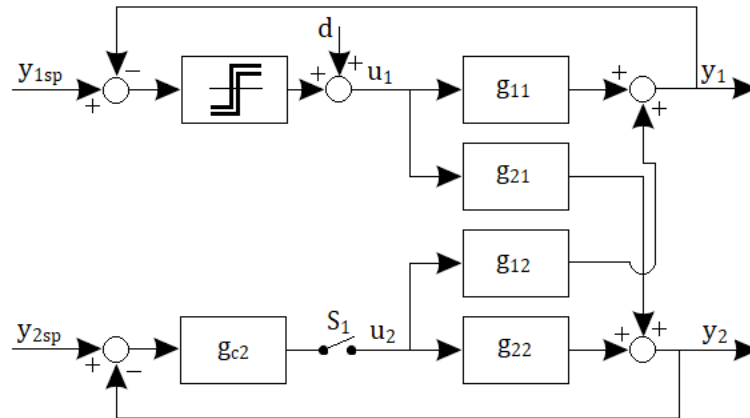
comparado com os resultados obtidos a partir do relé padrão proposto por Åström e Hägglund (1984). As condições de operação escolhidas são as utilizadas nos experimentos do relé independente e sequencial.

Os efeitos das perturbações são demonstrados para a coluna de destilação de Wood-Berry (WOOD; BERRY, 1973). Para realizar as simulações em menor tempo, as constantes de tempo do processo (originalmente em minutos) foram convertidas para segundos. O processo de Wood-Berry é dado por:

$$G_{WB}(s) = \begin{bmatrix} \frac{12,8e^{-s}}{16,7s + 1} & \frac{-18,9e^{-3s}}{21s + 1} \\ \frac{6,6e^{-7s}}{10,9s + 1} & \frac{-19,4e^{-3s}}{14,4s + 1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Na Figura 3.2, é apresentado o diagrama esquemático da estrutura com realimentação por relé proposta para um processo TITO.

Figura 3.2: Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 com controlador.



Fonte: Elaborada pelo autor

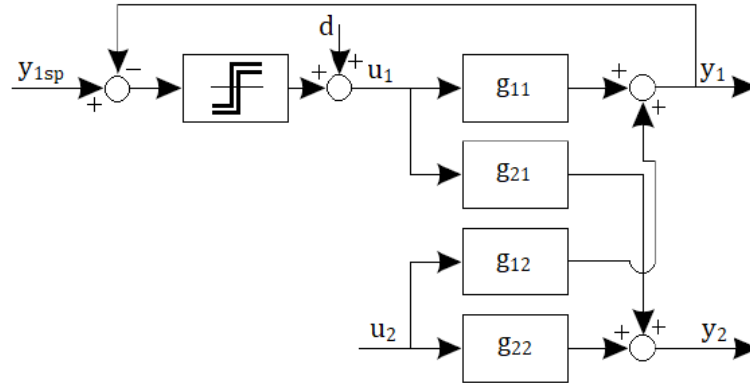
Em todos os casos, a amplitude do relé é igual a  $\mu = \pm 1$ , o passo de simulação é  $T_s = 0,01$  s e a constante do filtro  $F_1(s)$  é  $\tau_f = 0,01$ .

### 3.3.1 Caso 1: Malha 1 sob Relé e Malha 2 Aberta

Neste caso, a malha 1 é realimentada com relé e a malha 2 encontra-se aberta (Figura 3.3). A chave  $S_1$ , representada na Figura 3.2, encontra-se aberta. Esta condição de operação do relé é utilizada no experimento do relé independente e na primeira etapa do experimento do relé sequencial.



Figura 3.3: Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 aberta.



Fonte: Elaborada pelo autor

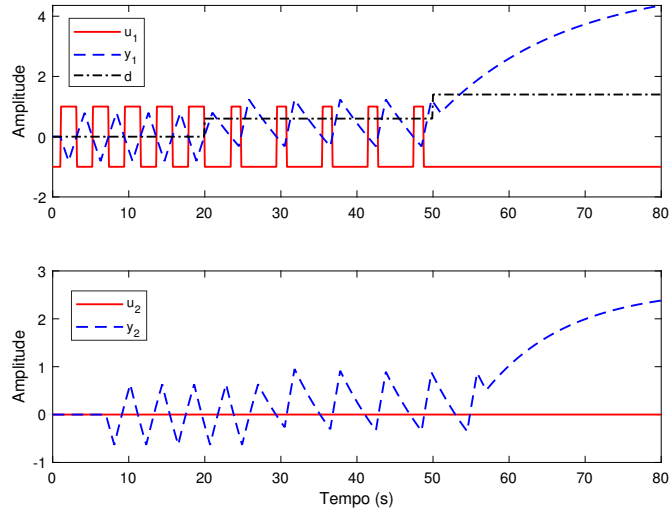
Para um processo  $n \times n$ , no experimento do relé independente, apenas uma malha é fechada, com as outras  $n-1$  malhas permanecendo abertas. Por outro lado, no experimento do relé sequencial, no  $i$ -ésimo experimento, as  $i$  malhas são fechadas, com  $n-i$  malhas abertas.

Inicialmente, é realizada a simulação do processo de Wood-Berry com o relé padrão. Em seguida, é realizada uma simulação com a estrutura do relé proposta. Em ambos os testes com relé, uma perturbação estática com amplitude  $d = 0,6$  é aplicada na entrada do processo no instante de tempo  $t = 20$  s. Além disso, em  $t = 50$  s, uma outra perturbação estática com amplitude  $d = 0,8$  é aplicada na entrada do processo.

Para o relé padrão, os sinais de saída do relé e saída do processo são apresentados na Figura 3.4. Para a malha 1, antes da introdução da perturbação estática no sistema, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 3,92$  s. A partir do tempo  $t = 20$  s, após a introdução da perturbação estática no sistema, a oscilação torna-se assimétrica. Para a malha 1, o período é  $\hat{T}_{u1} = 5,77$  s. A partir do tempo  $t = 50$  s ( $d = 0,8$ ), o teste do relé padrão não é capaz de produzir uma oscilação sustentada.

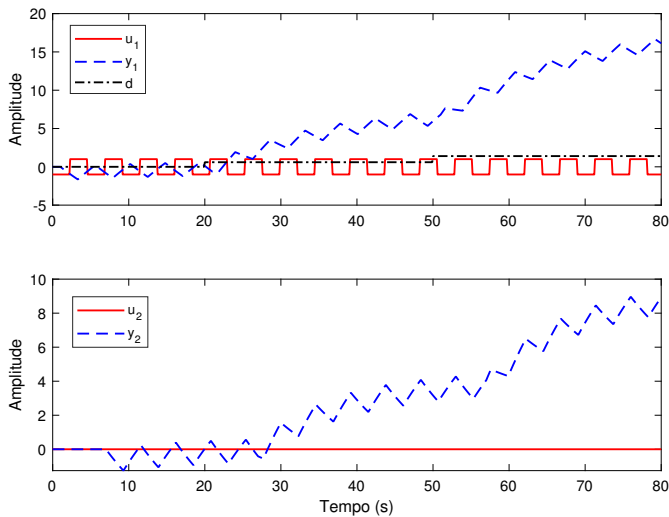
Para a estrutura do relé proposta, os sinais de saída do relé e saída do processo são apresentados na Figura 3.5. De acordo com a figura, esta estrutura do relé fornece uma saída do relé simétrica sob perturbação estática. Para a malha 1, independente das perturbações estáticas introduzidas no sistema, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 4,6$  s.

Figura 3.4: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob relé padrão - Caso 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.5: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 1.



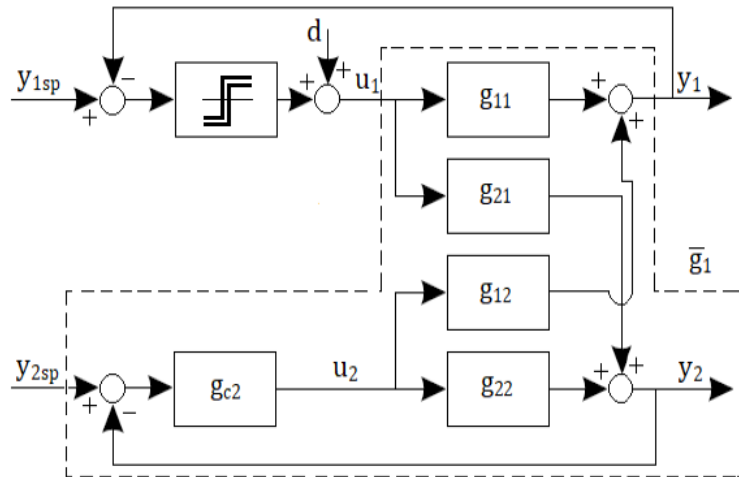
Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3.2 Caso 2: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador - EOP

Considera-se neste caso o relé realimentado na malha 1 e a malha 2 realimentada com controlador, ou seja, a chave  $S_1$ , representada na Figura 3.2, encontra-se fechada (Figura

3.6). Esta condição de operação é utilizada durante o experimento do relé sequencial. Neste caso, considera-se a interação entre as malhas a partir do EOP. A principal vantagem de usar o EOP é que o sistema multivariável pode ser considerado como várias malhas SISO equivalentes.

Figura 3.6: Diagrama esquemático de um sistema TITO, com a malha 1 realimentada com a estrutura do relé proposta e malha 2 realimentada com controlador.



Fonte: Elaborada pelo autor

O seguinte controlador PI, proposto por Loh et al. (1993), é utilizado

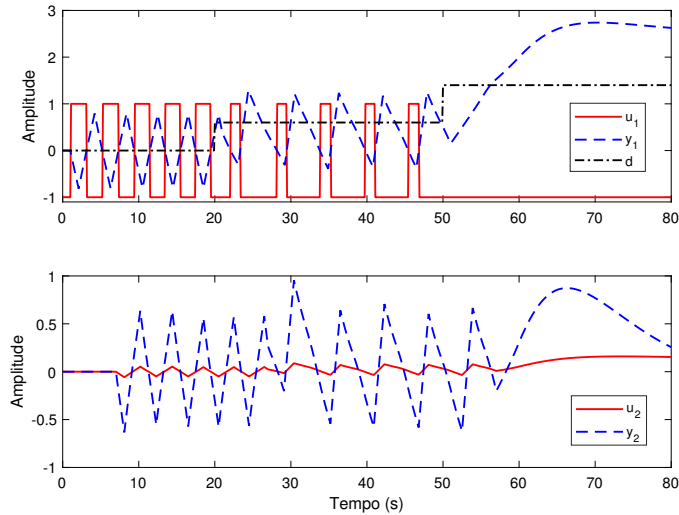
$$g_{c2} = -0,087 \left( 1 + \frac{1}{10,4s} \right). \quad (3.7)$$

Novamente, uma perturbação estática com amplitude  $d = 0,6$  é aplicada na entrada do processo no instante de tempo  $t = 20$  s. Uma outra perturbação estática com amplitude  $d = 0,8$  é aplicada na entrada do processo no instante de tempo  $t = 50$  s.

Na Figura 3.7, os sinais de saída do relé e saída de processo são apresentados para o relé padrão. Para a malha 1, antes da introdução da perturbação estática no sistema, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 3,92$  s. A partir do instante de tempo  $t = 20$  s, a oscilação torna-se assimétrica, com o período  $\hat{T}_{u1} = 5,54$  s. A partir de  $t = 50$  s, o teste do relé padrão não fornece uma oscilação sustentada.

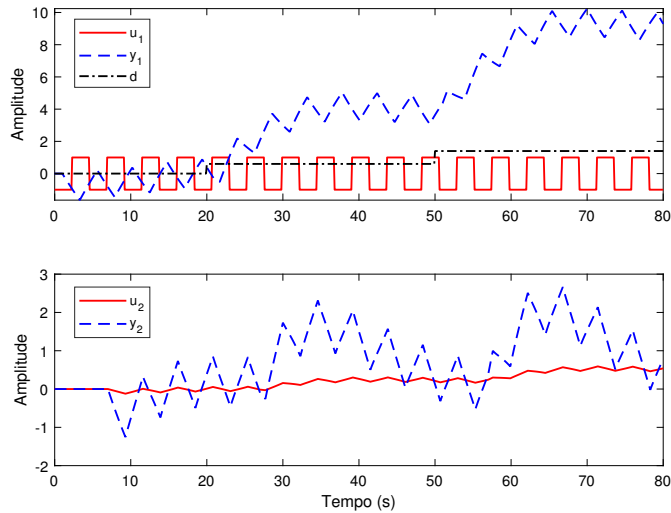
Na Figura 3.8, são apresentados os sinais de saída do relé e saída do processo para a estrutura do relé proposta. Novamente, esta estrutura do relé fornece uma saída do relé simétrica sob perturbação. Neste caso, para a malha 1, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 4,6$  s.

Figura 3.7: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Caso 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.8: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída do processo (linha tracejada) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3.3 Caso 3: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador mais Variação no *Setpoint*

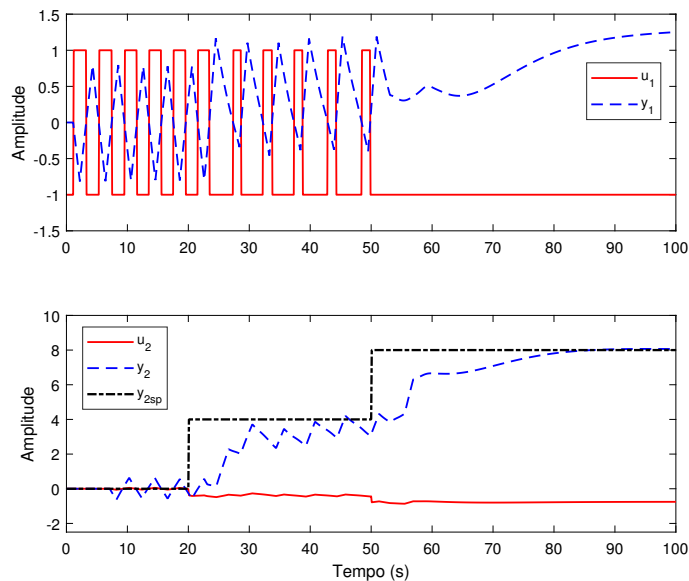
Considera-se neste caso o relé realimentado na malha 1 e a malha 2 realimentada com controlador. Dessa forma, a chave  $S_1$  encontra-se fechada. Além disso, uma variação no

*setpoint* é aplicada na malha 2.

Na malha 2, é aplicada uma variação no *setpoint* de  $y_{2sp} = 0$  para  $y_{2sp} = 4$  no instante de tempo  $t = 20$  s. Outra variação no *setpoint* de  $y_{2sp} = 4$  para  $y_{2sp} = 8$  é aplicada em  $t = 50$  s.

Na Figura 3.9, os sinais de saída do relé e saída de processo são apresentados para o relé padrão. Para a malha 1, antes da variação do *setpoint* na malha 2, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 3,92$  s. Para a malha 2, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u2} = 3,90$  s. A partir de  $t = 20$  s, após a variação do *setpoint*, a oscilação torna-se assimétrica. Para a malha 1, o período é  $\hat{T}_{u1} = 5,39$  s. Após um novo incremento na variação do *setpoint* ( $t = 50$  s), o teste do relé padrão não é capaz de produzir uma oscilação sustentada.

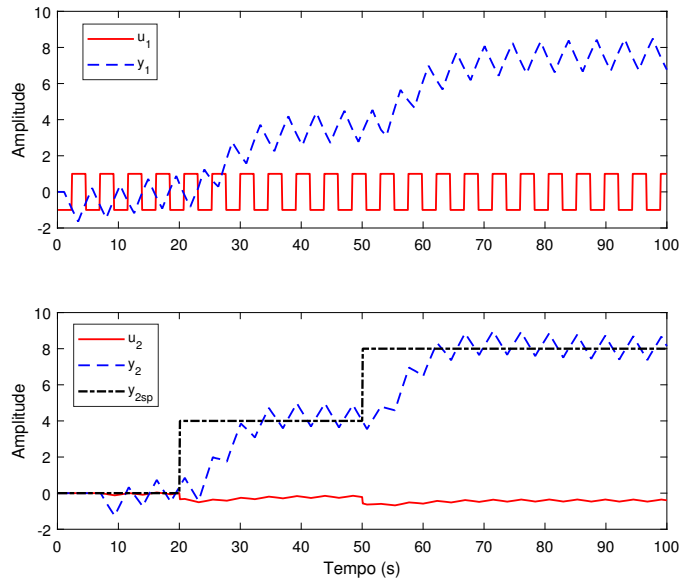
Figura 3.9: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída (linha tracejada) e *setpoint* (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob o relé padrão - Caso 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

Para a estrutura do relé proposta, os sinais de saída do relé e saída do processo são apresentados na Figura 3.10. Neste caso, independente da variação no *setpoint*, não houve mudança no período de oscilação da saída do processo. Para a malha 1, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 4,6$  s.

Figura 3.10: Curvas dos sinais de saída do relé (linha sólida), saída (linha tracejada) e *setpoint* (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Caso 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4 Sinal de Excitação

Com o objetivo de estimar múltiplos pontos de frequência do processo, é proposto um sinal de excitação que aproveita as características de rejeição a perturbação da estrutura do relé proposta. O sinal de excitação proposto consiste em três partes: componente DC não-nula, partes de alta e baixa frequência. O sinal de excitação é definido como:

$$d = d_0 + RRFS(\omega_H) + d_s(\omega_L), \quad (3.8)$$

onde  $d_0$  é um degrau aplicado na entrada do processo e  $d_s$  representa uma onda quadrada. O termo  $RRFS$  é a parte de alta frequência e representa o sinal obtido a partir da estrutura do relé proposta.

A onda quadrada ( $d_s$ ) é a parte de baixa frequência. Usando a expansão de Fourier, este sinal é dado por:

$$d_s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi(2k-1)t)}{2k-1}. \quad (3.9)$$

A parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) é gerada pela estrutura do relé proposta aplicada por  $n$  períodos. A parte de baixa frequência da excitação é uma onda quadrada periódica com frequência de oscilação  $\omega_L$ . Sugere-se escolher o período de oscilação da onda quadrada

entre 2 a 4 vezes o período do sinal obtido com a estrutura do relé proposta. Assim, para modelos de baixa ordem, o ponto de baixa frequência está na faixa de frequência de interesse para fins de controle. Para obter o ganho estático do processo, é aplicado um degrau simultaneamente com a parte de baixa frequência do sinal de excitação. Assim, é obtida uma componente de frequência DC diferente de zero.

Para processos TITO, uma possível aplicação do sinal de excitação proposto consiste em aplicar na malha 1 a estrutura do relé proposta e na malha 2 aplicar o sinal de excitação. Dessa forma, para ambas as malhas são estimados pontos de frequência em um menor tempo de experimento quando comparado a aplicação dos sinais separadamente. Além disso, a informação no domínio da frequência pode ser usada para estimar modelos FOPTD em uma ampla faixa de frequência, conforme apresentado no Capítulo 5.

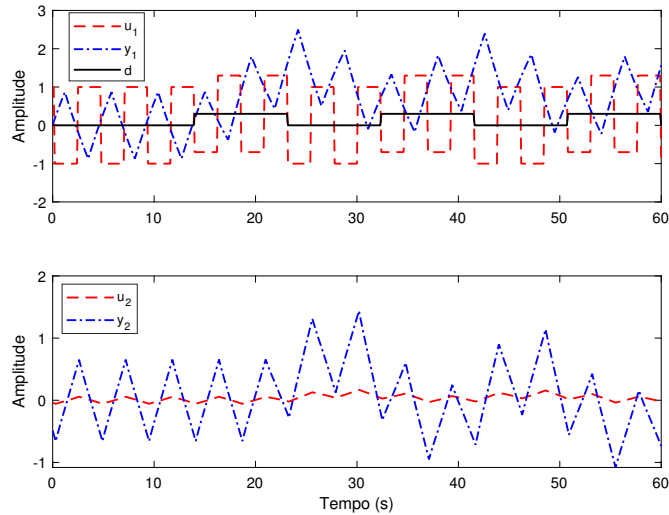
Uma outra possibilidade é aplicar o sinal de excitação proposto na entrada do EOP. Por exemplo, na entrada da malha 1 enquanto a malha 2 encontra-se realimentada com controlador (Figura 3.1). Para ilustrar a aplicação deste último caso, considere novamente o modelo da coluna de destilação de Wood-Berry dado por (3.6).

Inicialmente, o experimento do relé é aplicado por cerca de 3 períodos. Então, a frequência de oscilação  $\omega_H = 1,3659$  rad/s é obtida e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica é definida como  $\omega_L = \omega_H/4 = 0,3415$  rad/s. O degrau com amplitude  $d_0 = 0,3$  e a onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 0,3$  são aplicados no instante de tempo  $t = 14$  s. Na Figura 3.11, os sinais de excitação de entrada e saída do processo são mostrados para a primeira malha equivalente do processo.

Observe que a vantagem de usar a estrutura do relé proposta com os sinais adicionais é que diferentes pontos de frequência do processo podem ser obtidos sem perturbar a operação do relé. Assim, a saída simétrica do relé é garantida, mesmo sob grande perturbação.

Para o primeiro EOP, as respostas em frequência dos pontos de frequência excitados pelo sinal acima estão listadas na Tabela 3.1. Para o segundo EOP, a frequência de oscilação obtida a partir do teste do relé é  $\omega_H = 0,5219$  rad/s. Então, é aplicado um degrau com amplitude  $d_0 = 0,3$  e onda quadrada periódica com frequência de oscilação escolhida como  $\omega_L = \omega_H/4 = 0,1305$  rad/s e amplitude  $d_s = \pm 0,3$ . As respostas em frequência estimadas e reais de cada frequência excitada são listadas na Tabela 3.2.

Figura 3.11: Sinais de entrada (linha tracejada) e de saída (linha traço-ponto) da estrutura do relé proposta com sinal de excitação adicional (linha sólida).



Fonte: Elaborada pelo autor

 Tabela 3.1: Resposta em frequência do primeiro EOP ( $\bar{g}_1$ ) do processo (3.6).

$\omega$ (rad/s)	Estimado	Real
$\omega_0 = 0$	6,438	6,3701
$\omega_H = 1,5476$	$-0,5035 - j0,0261$	$-0,5083 - j0,0481$
$\omega_L = 0,3869$	$-0,6488 - j1,8338$	$-0,5072 - j2,5177$

Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.5 Aplicação da Estrutura do Relé em um Processo Termoelétrico

Nesta seção, a estrutura do relé proposta é aplicada para estimação do período de oscilação de um processo térmico TITO com efeito Peltier. Os detalhes desse processo encontram-se no Apêndice B. O principal objetivo dos testes realizados é avaliar experimentalmente o desempenho da estrutura do relé quando sujeita a uma perturbação e sob a interação das malhas. Além disso, os resultados obtidos a partir da estrutura do relé proposta são comparados com o relé padrão.

Para a estrutura do relé proposta, a constante do filtro ( $\tau_f$ ) foi definida igual ao tempo de amostragem, ou seja, 1 s. A amplitude do relé  $R_1$  foi definida em  $\mu = \pm 1$ . Enquanto o



Tabela 3.2: Resposta em frequência para segundo EOP ( $\bar{g}_2$ ) do processo (3.6).

$\omega$ (rad/s)	Estimado	Real
$\omega_0 = 0$	-9,4455	-9,6547
$\omega_H = 0,5219$	$4,3859 - j0,7894$	$4,6113 - j0,7742$
$\omega_L = 0,1305$	$-4,0435 + j5,3086$	$-4,0024 + j5,2980$

Fonte: Elaborada pelo autor

relé  $R_2$  foi ajustado para oscilar em torno da referência MV com uma amplitude  $\mu = \pm 5$ . Para ambos os relés, a histerese foi ajustada em  $\pm 0,01$ .

### 3.5.1 Caso 1: Malha 1 sob Relé e Malha 2 Aberta

Neste primeiro cenário, a malha 1 é realimentada com relé e a malha 2 encontra-se aberta. Com o propósito de obter o estado estacionário do processo, os PWMs das malhas 1 e 2 foram ajustados em 55%. O valor final no estado estacionário da temperatura da malha 1 foi de aproximadamente  $43,50^\circ C$ . Então, um degrau com amplitude  $d = 3$  foi aplicado na entrada do processo. A perturbação foi aplicada na entrada do processo da estrutura do relé proposta e do relé padrão.

Os sinais de saída do relé e saída do processo obtidos através do experimento com a estrutura do relé proposta são apresentados na Figura 3.12. Enquanto, os sinais obtidos através do experimento de relé padrão são mostrados na Figura 3.13.

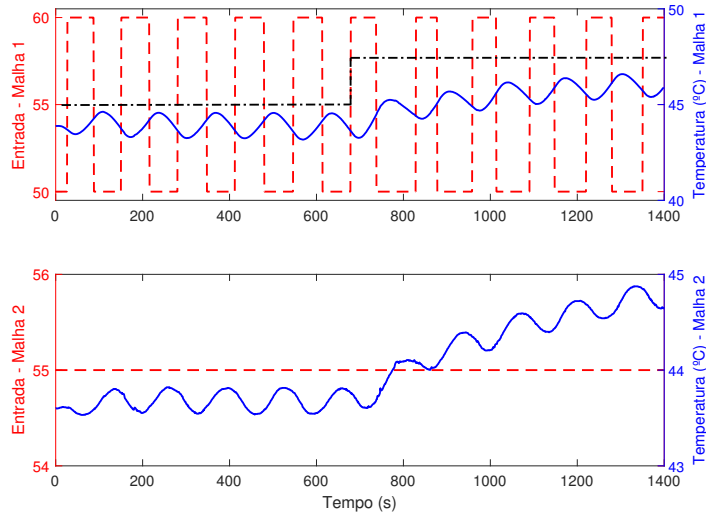
Para a estrutura do relé proposta, sem perturbação na entrada do processo, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 134$  s. Após aplicação da perturbação, no instante  $t = 680$  s, o período de oscilação é  $\hat{T}_{u1} = 132$  s.

Para o relé padrão, antes da introdução da perturbação na entrada do processo, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 92$  s. Enquanto, para o processo sujeito a perturbação aplicada em  $t = 450$  s, a oscilação torna-se assimétrica com período de oscilação  $\hat{T}_{u1} = 112$  s.

### 3.5.2 Caso 2: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador - EOP

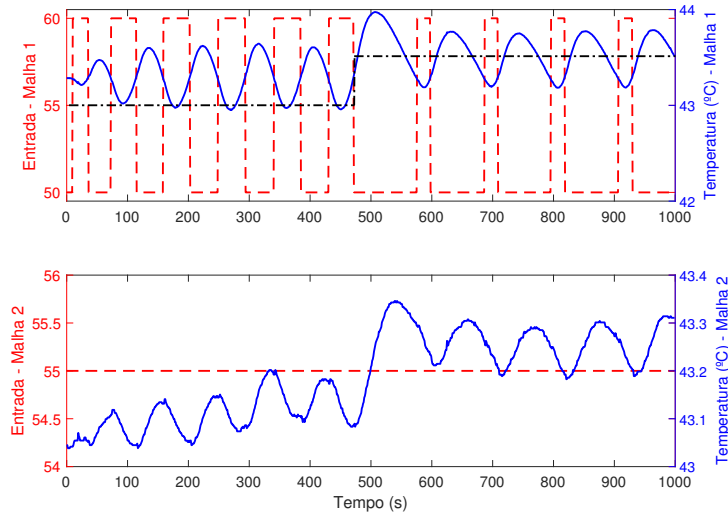
Considera-se neste caso o relé realimentado na malha 1 e a malha 2 realimentada com controlador. O seguinte controlador PID foi utilizado:

Figura 3.12: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 1).



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.13: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 1).



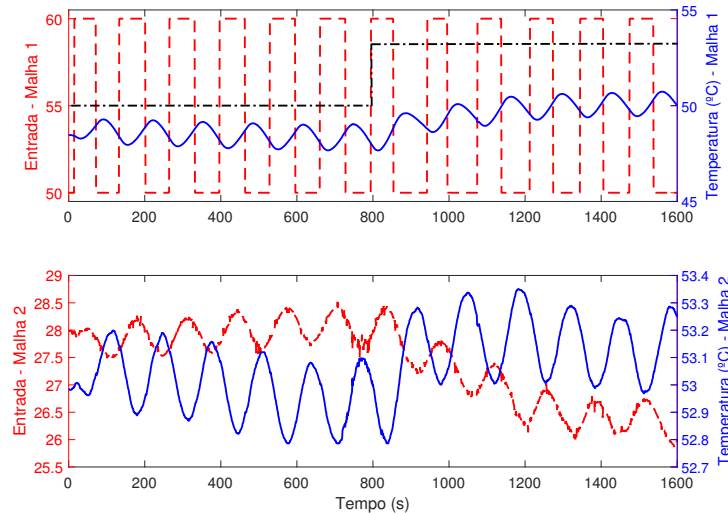
Fonte: Elaborada pelo autor

$$g_{c2} = 1,8 + \frac{0,0151}{s} + 11,89s. \quad (3.10)$$

Para atingir o estado estacionário do processo, o PWM da malha 1 foi ajustado em 55%. O *setpoint* da malha 2 foi definido em  $53,0^{\circ}\text{C}$ . O valor final da temperatura no estado estacionário da malha 1 foi de aproximadamente  $48,5^{\circ}\text{C}$ .

Novamente, uma perturbação estática com amplitude  $d = 3$  foi aplicada na entrada do processo. Os sinais de saída do relé e saída do processo, obtidos através do experimento com a estrutura do relé proposta, são apresentados na Figura 3.14. Enquanto, os sinais obtidos através do experimento de relé padrão são mostrados na Figura 3.15.

Figura 3.14: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 2).

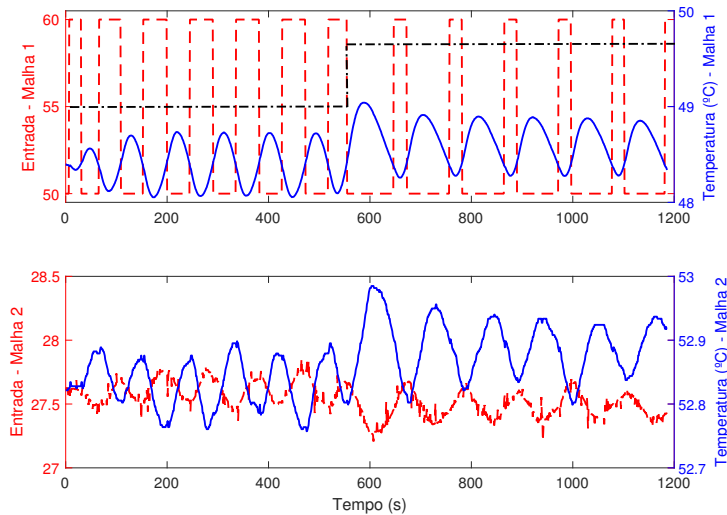


Fonte: Elaborada pelo autor

Para a estrutura do relé proposta, a perturbação estática foi aplicada no instante de tempo  $t = 800\text{ s}$ . Neste caso, independentemente da perturbação aplicada na entrada do processo, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 132\text{ s}$ .

Para o relé padrão, antes da introdução da perturbação na entrada do processo, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 91\text{ s}$ . Por outro lado, para o processo sujeito à perturbação aplicada em  $t = 550\text{ s}$ , é obtida uma oscilação assimétrica com período de oscilação  $\hat{T}_{u1} = 107\text{ s}$ .

Figura 3.15: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída do processo (linha contínua) e perturbação (linha traço-ponto) para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 2).



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.5.3 Caso 3: Malha 1 sob Relé e Malha 2 com Controlador mais Variação no *Setpoint*

Considera-se neste caso o relé realimentado na malha 1 e a malha 2 realimentada com controlador. Na malha 2, é aplicada uma variação no *setpoint* de  $y_{2sp} = 53^{\circ}C$  para  $y_{2sp} = 58^{\circ}C$  no instante de tempo  $t = 650s$ . Utiliza-se o controlador PID dado por (3.10).

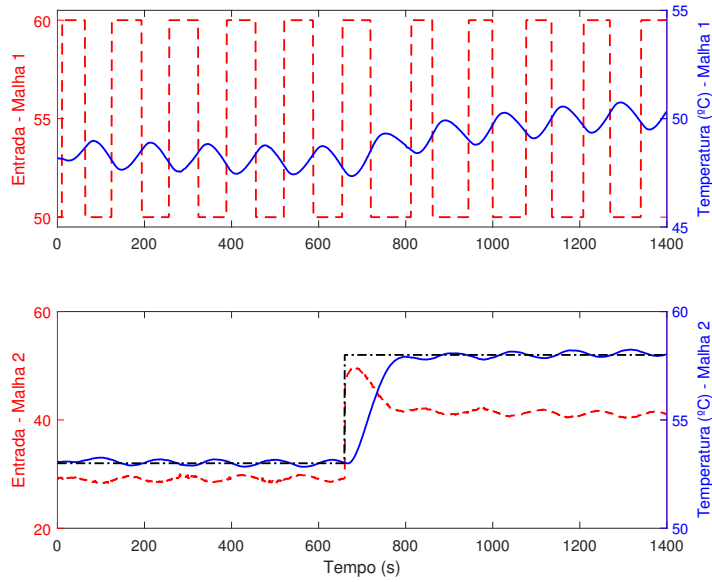
Os sinais de saída do relé e saída do processo, obtidos através do experimento com a estrutura do relé proposta, são apresentados na Figura 3.16. Enquanto, os sinais obtidos através do experimento de relé padrão são mostrados na Figura 3.17.

Para a estrutura do relé proposta, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 132s$ , independente da perturbação aplicada na entrada do processo. Para o relé padrão, antes da introdução da perturbação na entrada do processo, o período de oscilação da malha 1 é  $\hat{T}_{u1} = 91s$ . Enquanto, para o processo sujeito a perturbação, o período da oscilação assimétrica é  $\hat{T}_{u1} = 113s$ .

### 3.5.4 Caso 4: Aplicação do Sinal de Excitação

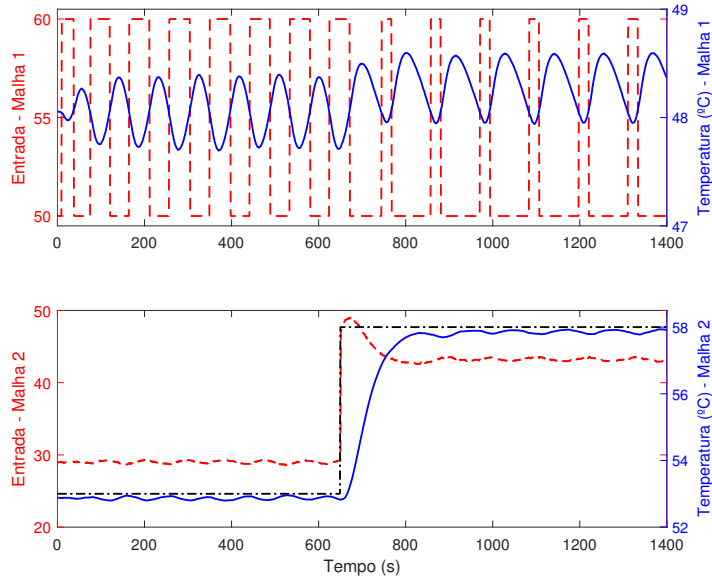
Neste caso, o sinal de excitação apresentado na seção 3.4 é aplicado para o processo termoelétrico. O sinal é aplicado na entrada do primeiro EOP, ou seja, na entrada da malha 1 enquanto a malha 2 encontra-se realimentada com controlador. Utiliza-se o

Figura 3.16: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída (linha sólida) e *setpoint* (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob a estrutura do relé proposta - Peltier (Caso 3).



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.17: Curvas dos sinais de saída do relé (linha tracejada), saída (linha sólida) e *setpoint* (linha traço-ponto) do processo para malha 1 sob o relé padrão - Peltier (Caso 3).



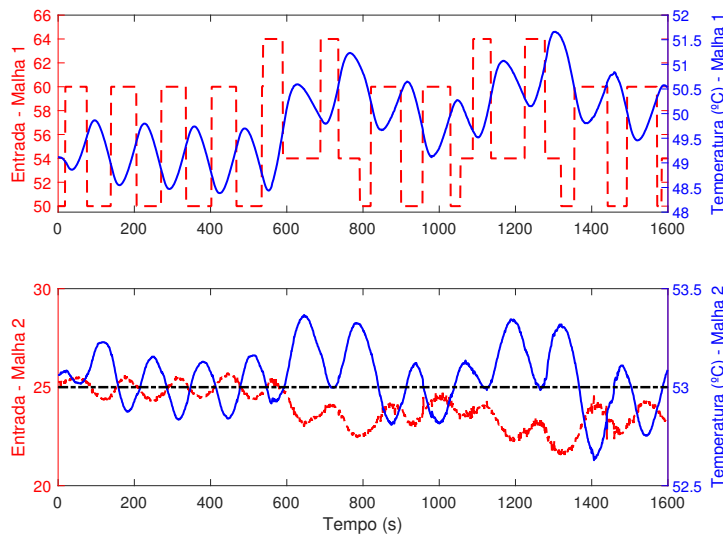
Fonte: Elaborada pelo autor

controlador PID dado por (3.10).

Para atingir o estado estacionário do processo, o PWM da malha 1 foi ajustado em 55%. O *setpoint* da malha 2 foi definido em  $53,0^{\circ}C$ . Neste caso, o valor final da temperatura no estado estacionário da malha 1 foi de aproximadamente  $49,0^{\circ}C$ .

Inicialmente, o experimento do relé é aplicado por cerca de 4 períodos. Então, a frequência de oscilação  $\omega_H = 0,0476$  rad/s é obtida e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica é definida como  $\omega_L = \omega_H/4 = 0,0119$  rad/s. O degrau com amplitude  $d_0 = 2$  e a onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 2$  são aplicados no instante de tempo  $t = 560$  s. Na Figura 3.18, são apresentados os sinais de excitação de entrada e saída do processo para a primeira malha equivalente do processo.

Figura 3.18: Curvas dos sinais de entrada (linha tracejada), saída (linha sólida) e *setpoint* (linha traço-ponto) obtidas ao aplicar o sinal de excitação proposto - Peltier.



Fonte: Elaborada pelo autor

As respostas em frequência estimadas para cada frequência excitada são listadas na Tabela 3.3.

O sinal de excitação descrito na seção 3.4 também foi aplicado as estruturas do relé propostas por Åström e Hägglund (1984), Park, Sung e Lee (1997), Sung e Lee (2006a) e Lee et al. (2011). Em todos os casos, a amplitude do relé foi ajustada para  $\mu = \pm 5$  e a histerese foi ajustada para  $\pm 0.05$ . Inicialmente, a parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) foi obtida. Em seguida, foi aplicada um degrau com amplitude  $d_0 = 2$  e onda quadrada periódica com frequência de oscilação  $\omega_L = \omega_H/4$  com amplitude  $d_s = \pm 2$ . Os desempenhos das estruturas com realimentação por relé são mostrados na Tabela 3.4.

Tabela 3.3: Resposta em frequência do primeiro EOP do processo termoeletrico.

$\omega$ (rad/s)	Estimado
$\omega_0 = 0$	0,8877
$\omega_H = 0,0476$	$-0,0951 - j0,0510$
$\omega_L = 0,0119$	$0,0495 - j0,5425$

Fonte: Elaborada pelo autor

 Tabela 3.4: Resultados experimentais - Comparações dos métodos e frequências de oscilação (*rad/s*).

Método	Parâmetros de projeto	Frequência de oscilação Estimada ( $\omega_H$ )	Adição do sinal de excitação
(ASTRÖM; HÄGGLUND, 1984)	-	0,0690	NA
Proposto	$\tau_f = 1$	0,0476	A
(PARK; SUNG; LEE, 1997)	-	0,0610	NA
(SUNG; LEE, 2006a)	$K_p = 1$ and $K_s = 0.5$	0,0641	A
(LEE et al., 2011)	$\tau_f = 2$ and $q = 1$	0,0648	A

NA: não aplicável, A: aplicável.

Fonte: Elaborada pelo autor

## 3.6 Conclusões

Neste capítulo, a estrutura com realimentação por relé proposta foi aplicada para processos TITO. Através desta estrutura foi obtida uma oscilação simétrica da saída do processo, sob diferentes cenários. As condições de operação escolhidas são as mais utilizadas nos possíveis esquemas de realimentação por relé aplicados aos sistemas multivariáveis.

No primeiro caso, a malha 1 foi realimentada com relé e a malha 2 permaneceu aberta. Esta condição de operação do relé é utilizada no experimento do relé independente e na primeira etapa do experimento do relé sequencial. O segundo caso corresponde ao uso do relé durante as demais etapas do experimento sequencial. Assim, a malha 1 é realimentada com relé foi e a malha 2 realimentada com controlador. Neste cenário, a interação entre as malhas é considerada a partir da Malha Aberta Efetiva do processo (EOP). No terceiro caso estudado, a partir da condição de operação do segundo caso, foi aplicada uma variação no *setpoint* da malha 2. Em todos os cenários, verifica-se que o efeito do acoplamento entre as malhas de um processo TITO não interferiu no desempenho da estrutura do relé proposta.

Uma vez que a estrutura com realimentação por relé proposta é robusta a perturbação

e garante uma saída simétrica do relé, foi proposto um sinal de excitação composto por um degrau e uma onda quadrada periódica com frequência menor que a frequência de oscilação obtida com experimento do relé. A partir desse sinal de excitação é possível estimar vários pontos de frequência do processo sem perturbar a operação do relé. Os resultados simulados e experimentais demonstram que a estrutura do relé proposta é insensível às perturbações na entrada do processo e iterações entre as malhas.



## Capítulo 4

# Análise do Relé para Processos Sujeitos a Perturbações

### 4.1 Introdução

Diversos sistemas de controle podem ser representados por sistemas lineares por partes, por exemplo, sistemas que possuem zona-morta, saturação, relé ou histerese. Os sistemas lineares por partes são caracterizados por um número finito de modelos dinâmicos lineares, juntamente com um conjunto de regras para alternar entre esses modelos. Portanto, os modelos lineares dividem o espaço de estados em um número finito de regiões. Essas regiões possuem propriedades distintas na medida em que as dinâmicas dentro de cada região são descritas por diferentes equações diferenciais lineares (KHALIL, 1996).

Dentre os vários sistemas lineares por partes, destacam-se os sistemas com realimentação por relé. Tais sistemas podem apresentar alguns comportamentos especiais, tais como, a não-unicidade de soluções (LIN; WANG, 2002), chaveamento rápido (JOHANSSON; RANTZER; ÅSTRÖM, 1999), modo deslizantes (BOIKO, 2008a) e caos (COOK, 1985). Um fenômeno importante associado aos sistemas com realimentação por relé é a existência de um ciclo limite, ou seja, uma órbita periódica não trivial e isolada. Um ciclo limite é simétrico quando a solução periódica possui intervalos de tempo iguais entre as mudanças positivas e negativas e unimodal se o relé chavear duas vezes por período (GONÇALVES; MEGRETSKI; DAHLEH, 2001).

O método da função descritiva é uma ferramenta utilizada para analisar a existência de ciclo limite em sistemas não lineares. Sua aplicação é limitada aos sistemas que podem ser separados em partes lineares e não lineares interligadas em malha fechada, onde a parte não linear é uma não linearidade estática e a parte linear um sistema invariante no

tempo (BOIKO, 2008a).

O método da função descritiva possui algumas limitações. Segundo Gelb e Velde (1968), a principal limitação é que a forma do sinal na entrada da não linearidade deve ser conhecida a priori. Outra limitação é a possibilidade de múltiplas soluções. Tais soluções representam diferentes modos possíveis de resposta, alguns dos quais podem ser instáveis. Uma última limitação é a exatidão. Em geral, o método não funciona adequadamente quando a parte linear do sistema não possui a característica de um filtro passa-baixa. Portanto, o período e ganho crítico podem ter erros significativos quando o processo não atenua suficientemente os termos harmônicos mais altos.

Neste capítulo, após revisar as condições necessárias para aplicação do método da função descritiva, é apresentada a análise por função descritiva da estrutura do relé proposta para processos sob perturbação. No entanto, apenas uma análise aproximada é fornecida. Uma análise mais exata é obtida utilizando o mapa de Poincaré. A principal vantagem da análise a partir do mapa de Poincaré é a possibilidade de obter de forma exata as condições suficientes e necessárias para a existência de soluções periódicas do sistema com realimentação por relé. Assim, para sistemas LTI com e sem atraso, são apresentados resultados sobre existência e estabilidade de ciclos limite unimodais e simétricos para a estrutura com realimentação por relé proposta.

Inicialmente, a fim de simplificar a análise, uma estrutura do relé equivalente é proposta. A partir desta estrutura equivalente e baseada na análise do mapa de Poincaré associado, são obtidas as expressões para existência e estabilidade local do ciclo limite da estrutura em estudo. Além disso, é realizada a análise a partir da estrutura do relé original. Neste caso, a análise limita-se a sistemas sem atraso. Para a análise a partir da estrutura equivalente esta restrição não é necessária.

Este capítulo é composto pelas seguintes seções: Na seção 4.2, é apresentada a definição de função descritiva, bem como as condições necessárias para obtenção desta função para um elemento não linear. Em seguida, é obtida a função descritiva para a estrutura do relé proposta. Na seção 4.3 é apresentada a definição e principais características do mapa de Poincaré. Então, uma estrutura do relé equivalente é obtida com o objetivo de simplificar a análise. Em seguida, são apresentadas as análises da existência e estabilidade local dos ciclos limite para a estrutura equivalente. Logo após, a análise usando o mapa de Poincaré é realizada para a estrutura do relé original. Os resultados de simulação são apresentados na seção 4.4. O capítulo é encerrado com as conclusões na seção 4.5.

## 4.2 Análise do Relé para Processos sob Perturbação usando Função Descritiva

O método da função descritiva é utilizado para analisar a estabilidade de sistemas não lineares, especialmente, quando possuem elementos não lineares do tipo relé, zona morta, saturação e histerese. Os principais conceitos deste método foram desenvolvidos nas décadas de 1940 e 1950 (ATHERTON; TOWILL, 1977). Deste então, as aplicações do método da função descritiva foram amplamente desenvolvidas nas pesquisas acadêmicas e industriais, tais como, a sintonia automática de controladores PID (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984) e o controle de processos multivariáveis (WANG et al., 1997).

Com base em uma abordagem no domínio da frequência, a análise por funções descritivas é aplicada com o objetivo de determinar a existência ou não de ciclos limite e sua estabilidade (MILLER; MICHEL; KRENZ, 1983). Segundo Gelb e Velde (1968), a principal vantagem do método da função descritiva não é a possibilidade do cálculo aproximado da resposta de um dado sistema a uma determinada entrada, o que pode ser feito por simulação. A principal vantagem é que esta ferramenta serve como uma ajuda valiosa para o projeto de sistemas não lineares.

A fim de realizar a análise por função descritiva deve-se ignorar os termos harmônicos mais altos do sinal de saída da não linearidade. Para isto, a componente linear deve atenuar as harmônicas mais elevadas. A partir desse requisito, o método da função descritiva fornece respostas a questões gerais sobre a operação do sistema não linear.

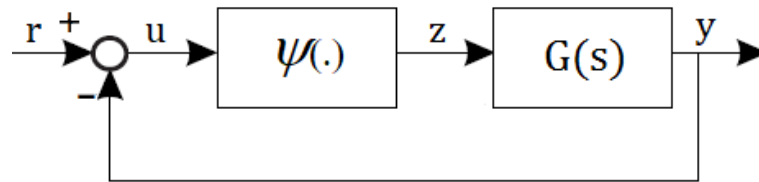
Para sistemas com realimentação por relé, a análise por função descritiva mostra que o ciclo limite obtido ocorre na frequência em que a fase do processo é aproximadamente  $-180^\circ$ , ou seja, na frequência crítica. Entretanto, o erro na estimativa do ponto crítico em alguns casos pode ser superior a 20 % (LI; ESKINAT; LUYBEN, 1991). Uma maneira de contornar este problema é utilizar a transformada discreta de Fourier (DFT) nos dados de entrada e saída obtidos a partir do experimento do relé.

### 4.2.1 Função Descritiva

Considere o sistema representado na Figura 4.1, onde  $G(s)$  é uma função de transferência racional, estritamente própria e  $\Psi(\cdot)$  é uma não linearidade invariante no tempo, sem memória.

Para determinação da função descritiva deste sistema, assume-se que:

Figura 4.1: Diagrama esquemático para análise por função descritiva.



Fonte: Elaborada pelo autor

- O sinal de referência na entrada é  $r = 0$ ;
- Uma onda senoidal está presente na entrada do elemento não linear e sua saída não contém nenhuma frequência zero e nenhum termo subarmônico;
- A componente linear possui características de um filtro passa-baixa.

Além disso, considere o sinal na entrada da não linearidade dado por:

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad (4.1)$$

onde  $A$  é a amplitude do sinal de entrada e  $\omega$  a frequência do sinal.

O sinal na saída do elemento não linear,  $z(t)$ , é uma função periódica e pode ser descrito pela seguinte expansão em série de Fourier:

$$z(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega t)] \quad (4.2)$$

onde:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) dt$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt.$$

Uma vez que  $G(s)$  atenua as harmônicas com frequência elevada, assume-se que apenas a primeira harmônica do sinal de saída  $y(t)$  é significativa. Além disso, para uma não linearidade ímpar, o termo  $A_0$  é igual a zero. Assim,

$$z(t) = M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1), \quad (4.3)$$

onde

$$M = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1}(A_1/B_1).$$

A função descritiva é obtida aplicando o sinal senoidal  $u(t)$  na entrada do elemento não linear. Então, é calculado a razão entre o coeficiente de Fourier da primeira harmônica do sinal de saída e a amplitude do sinal de entrada (KHALIL, 1996). Assim, tem-se a seguinte definição:

**Definição 1** A função descritiva do elemento não linear  $\Psi(\cdot)$  é a função das variáveis  $A$  e  $\omega$ , definida por:

$$\Psi(A, \omega) = \frac{M}{A} e^{j\varphi_1}. \quad (4.4)$$

Uma vez que assume-se o sinal de referência na entrada  $r = 0$ , a seguinte relação é obtida:

$$U(j\omega) = -G(j\omega)Z(j\omega). \quad (4.5)$$

Considerando a função descritiva como um ganho linearizado entre  $u$  e  $z$ , tem-se:

$$Z(j\omega) = \Psi(A, \omega)U(j\omega). \quad (4.6)$$

Escrevendo as equações (4.5) e (4.6) em notação de matriz, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Psi(A, \omega) & -1 \\ 1 & G(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(j\omega) \\ Z(j\omega) \end{bmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Assim, uma solução não trivial é obtida apenas se o determinante da matriz é zero. Desta forma, é determinada a *Equação de Balanço Harmônico* dada por:

$$\begin{vmatrix} \Psi(A, \omega) & -1 \\ 1 & G(j\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

ou

$$1 + \Psi(A, \omega)G(j\omega) = 0. \quad (4.9)$$

Se (4.9) é satisfeita, então existirá um ciclo limite na saída do sistema. Caso ocorra uma intersecção entre as curvas complexas da equação de balanço harmônico e a curva

de Nyquist de  $G(j\omega)$ , então o sistema admite um ciclo limite. Os valores da frequência e amplitude no ponto de interseção destas duas curvas serão a frequência e amplitude de oscilação do ciclo limite.

O método da função descritiva é um método aproximado. Se apenas a componente fundamental for dominante sobre as componentes de ordem superior do sinal de saída do elemento não linear, então a exatidão da análise por função descritiva é garantida. Uma condição suficiente é que o elemento linear deve ter propriedades de filtragem passa-baixas (*hipótese do filtro*) (GELB; VELDE, 1968), ou seja,

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)|, n = 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 Análise da Estrutura do Relé utilizando Função Descritiva

O método para determinação da função descritiva de um sistema contendo uma única não linearidade, como mostrado na Figura 2.1, é bem conhecido (SLOTINE; LI et al., 1991). Para o relé ideal, a função descritiva é dada por:

$$N(A) = \frac{4\mu}{\pi A}, \quad (4.11)$$

onde  $\mu$  é a amplitude do relé e  $A$  é a amplitude do sinal de saída do processo.

No caso de sistemas contendo duas ou mais não linearidades, a análise por função descritiva torna-se mais complexa. Para a estrutura do relé proposta, a análise por função descritiva é realizada com base na resposta em frequência dos elementos individuais. A abordagem apresentada tem a vantagem de desacoplar os efeitos das não linearidades, permitindo estudar separadamente os efeitos de cada elemento não linear no sistema geral. Neste contexto, a partir das condições apresentadas na seção anterior, o método da função descritiva é aplicado. Tal resultado é apresentado no lema a seguir.

**Lema 1** *Considere a estrutura do relé apresentada na Figura 2.7. A função de transferência  $F_1(s)$  é dada por (2.4), e  $F_2(s)$  é dada por (2.5). Ambos os relés possuem a mesma amplitude  $\mu$ . Assume-se que o ângulo de fase do filtro  $F_1(s)$  é  $\theta_1$  na frequência  $\omega$ . A função descritiva para a estrutura do relé proposta é dada por:*

$$N(A, \omega) = \frac{4\mu}{\pi A} e^{j(\theta_1(\omega) - \pi/2)}. \quad (4.12)$$

■

**Prova.** Para ambos os relés, assumamos que as não linearidades são simétricas e ímpares.

Além disso, os relés possuem a mesma amplitude  $\mu$ . Considere o sinal de entrada do filtro  $F_1(s)$  como:

$$u(t) = A \text{sen}(\omega t). \quad (4.13)$$

O sinal de saída deste filtro é dado por:

$$m(t) = A |F_1(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \theta_1(\omega)), \quad (4.14)$$

onde

$$F_1(j\omega) = |F_1(j\omega)| \angle \theta_1(\omega) = |F_1(j\omega)| e^{j\theta_1(\omega)}. \quad (4.15)$$

A resposta em frequência para  $F_1(s)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} |F_1(j\omega)| &= [(1 - \cos \omega \tau_f)^2 + (\text{sen} \omega \tau_f)^2]^{1/2} \\ \angle \theta_1(\omega) &= \tan^{-1} \left( \frac{\text{sen} \omega \tau_f}{(1 - \cos \omega \tau_f)} \right). \end{aligned}$$

Para o relé  $R_1$ , a primeira harmônica da série de Fourier é:

$$n(t) = \frac{4\mu}{\pi} \text{sen}(\omega t + \theta_1(\omega)). \quad (4.16)$$

Sob as mesmas suposições de não linearidades simétricas e ímpares, a análise é simplificada. A função descritiva para o relé  $R_1$  é dada por:

$$N_1(A, \omega) = \frac{4\mu}{\pi A |F_1(j\omega)|}. \quad (4.17)$$

O sinal de saída para o segundo filtro ( $F_2(s)$ ) é dado por:

$$w(t) = \frac{4\mu |F_2(j\omega)|}{\pi} \text{sen}(\omega t + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega)), \quad (4.18)$$

onde

$$F_2(j\omega) = |F_2(j\omega)| \angle \theta_2(\omega) = |F_2(j\omega)| e^{j\theta_2(\omega)}. \quad (4.19)$$

O sinal de saída para o relé  $R_2$ ,  $z(t)$ , é dado por:

$$z(t) = \frac{4\mu}{\pi} \text{sen}(\omega t + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega)). \quad (4.20)$$

Assim, a função descritiva para o relé  $R_2$  é:

$$N_2(A,\omega) = \frac{1}{|F_2(j\omega)|}. \quad (4.21)$$

Assim, a função descritiva da estrutura do relé proposta é:

$$N(A,\omega) = F_1 \times N_1 \times F_2 \times N_2 = \frac{4\mu}{\pi A} e^{j(\theta_1(\omega)+\theta_2(\omega))}, \quad (4.22)$$

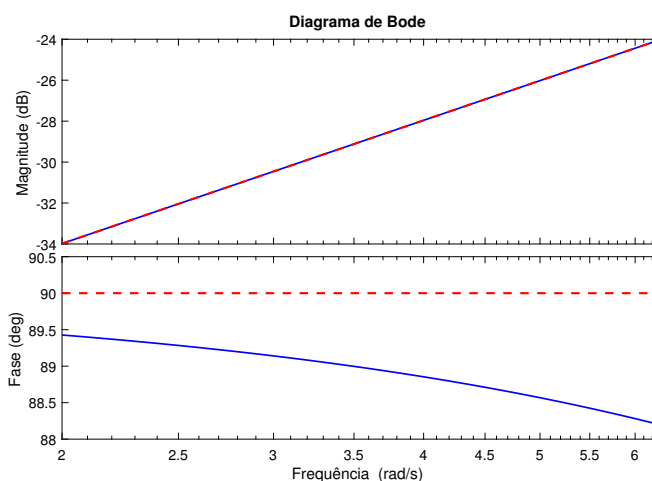
onde  $\theta_2(\omega)$  é o ângulo de fase do integrador  $-\pi/2$ . Portanto,

$$N(A,\omega) = \frac{4\mu}{\pi A} e^{j(\theta_1(\omega)-\pi/2)}. \quad (4.23)$$

■

Para baixas frequências, o filtro  $F_1(s)$  possui um ângulo de fase de aproximadamente  $+\pi/2$ . Isso pode ser verificado no diagrama de Bode, apresentado na Figura 4.2, da função de transferência  $F_1(s)$  e uma derivada pura  $s\tau_f$ . Uma vez que a função de transferência  $F_2(s)$  possui um ângulo de fase de  $-\pi/2$ , este elemento compensa a característica do filtro passa-alta escolhido.

Figura 4.2: Diagrama de Bode da função de transferência  $F_1(s)$  (linha sólida) e  $s\tau_f$  (linha tracejada) -  $\tau_f = 0,01$ .



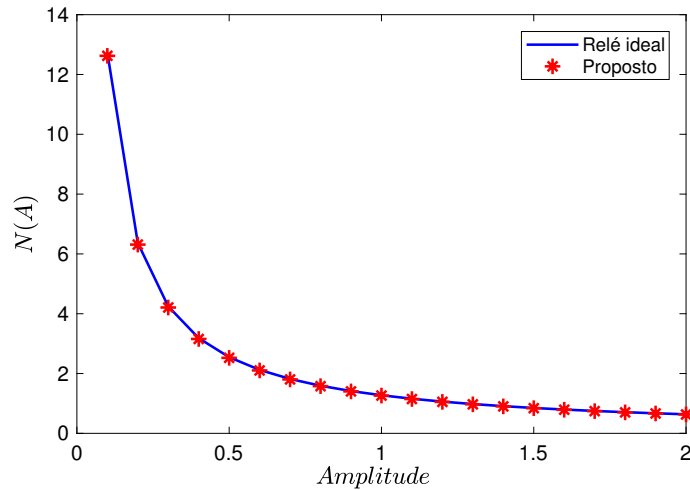
Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 4.3 estão representadas as funções descritivas para o relé ideal e estrutura do relé proposta, com a constante  $\tau_f = 0,01$ . Portanto, para valores pequenos de  $\tau_f$ , as funções descritivas são semelhantes.

A fim de ilustrar os sinais nas saídas de cada um dos blocos que compõem a estrutura



Figura 4.3: Curvas das funções descritivas do relé ideal e estrutura do relé proposta ( $\tau_f = 0,01$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor

do relé proposta, considere o seguinte processo:

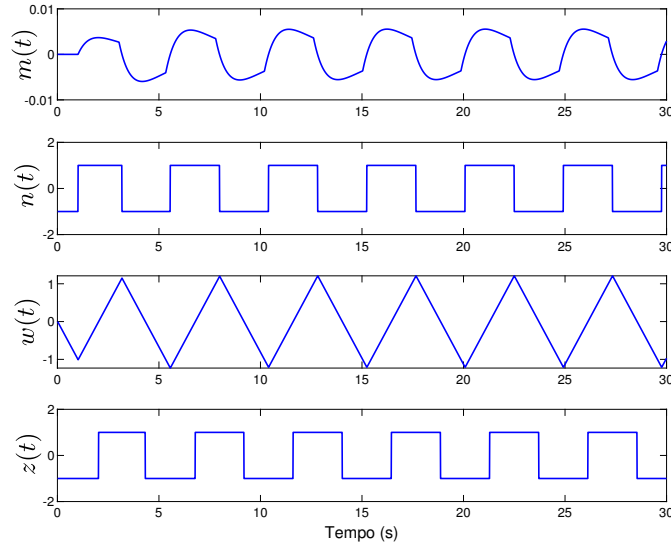
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-1s}. \quad (4.24)$$

Na Figura 4.4, são apresentados os sinais das saídas dos blocos da estrutura do relé proposta. De acordo com a figura, a forma de onda na saída do bloco  $F_1(s)$  não se aproxima da forma de onda senoidal. Logo, as componentes harmônicas elevadas deste sinal serão responsáveis pela imprecisão do resultado do método da função descritiva. Também para o sinal de saída do bloco  $F_2(s)$ , a forma de onda difere de um sinal senoidal. Desta forma, mais uma fonte de erro será adicionada ao resultado final da análise por função descritiva. Porém, para sistemas de ordem elevada, a análise por função descritiva fornece resultados mais próximos ao verdadeiro devido a característica passa-baixa.

### 4.3 Análise do Relé para Processos sob Perturbações usando Mapa de Poincaré

A oscilação do ciclo limite é um fenômeno importante no projeto de sistemas de controle, pois geralmente impõe efeitos indesejáveis ao sistema. Para uma grande classe de sistemas com realimentação por relé, são obtidas oscilações do ciclo limite. Para tais sistemas, é fundamental o conhecimento da existência e estabilidade das órbitas periódicas.

Figura 4.4: Curvas dos sinais nas saídas dos blocos da estrutura do relé proposta.



Fonte: Elaborada pelo autor

Os mapas de Poincaré são usados para determinar a existência e estabilidade de oscilações periódicas em sistemas com realimentação por relé. Aplicações do mapa de Poincaré são encontradas em diferentes áreas, por exemplo, a locomoção bípede (NAKAMURA; SUZUKI; KOINUMA, 1997) e sistemas com conversores comutados (DRANGA; BUTI; NAGY, 2003).

Conforme mencionado anteriormente, os sistemas com realimentação por relé são um caso particular de uma classe de sistemas não lineares denominada sistemas lineares por partes. Para tais sistemas, o sinal de controle é constante por partes. Assim, a análise da estabilidade dos ciclos limite desses sistemas é simplificada.

Nesta seção, a estrutura com relé proposta é analisada utilizando o mapa de Poincaré e uma representação em espaço de estados. As condições necessárias e suficientes para a existência do ciclo limite são estabelecidas. Além disso, a estabilidade local é investigada.

### 4.3.1 Mapas de Poincaré

Os mapas de Poincaré são utilizados para simplificar a análise de sistemas contínuos no tempo com soluções periódicas, ao estudo de um sistema associado discreto no tempo. Segundo Wiggins (2003), esta técnica oferece diversas vantagens no estudo de sistemas com dinâmica periódica, são elas:

1. *Redução dimensional*: A construção do mapa de Poincaré envolve a eliminação de pelo menos uma das variáveis do problema resultando no estudo de um problema de menor dimensão;
2. *Dinâmica Global*: Em problemas com dimensões baixas (dimensão  $\leq 4$ ), o mapa de Poincaré calculado numericamente fornece uma representação clara da dinâmica global de um sistema;
3. *Clareza Conceitual*: Um exemplo seria a estabilidade de uma órbita periódica de uma equação diferencial ordinária. Em termos do mapa de Poincaré, esse problema se reduziria ao problema da estabilidade de um ponto fixo do mapa, que é caracterizado em termos dos autovalores do mapa linearizado em torno de um ponto fixo.

Para definir o mapa de Poincaré, considere o seguinte sistema invariante no tempo:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.25)$$

Suponha que (4.25) possui uma órbita periódica com período  $T$  representada por  $\phi(t, x_0)$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é qualquer ponto através do qual essa solução periódica passa (isto é,  $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$ ). Seja  $H$  um hiperplano com dimensão  $n-1$  e transversal à órbita periódica  $\phi$  em  $x_0$  (o termo “transversal” significa que  $\phi(t, x) \cdot n(x) \neq 0$  onde “ $\cdot$ ” denota o produto escalar e  $n(x)$  é o vetor normal em relação ao hiperplano  $H$ ). Seja ainda a superfície  $S \subset H$  definida como uma seção local, onde  $S$  é uma seção transversal a órbita periódica  $\phi$ .

De acordo com a construção geométrica do mapa de Poincaré representada na Figura 4.5, observa-se uma relação entre as órbitas periódicas de um sistema e os pontos fixos do mapa de Poincaré (WIGGINS, 2003). Assim, pode-se encontrar um conjunto aberto  $U \subset S$  tal que as trajetórias começando em  $U$  retornem a  $S$  em um tempo próximo de  $T$ . Neste contexto, tem-se a seguinte definição:

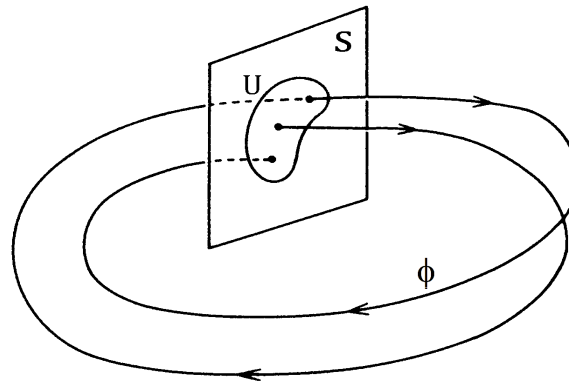
**Definição 2** *O mapa que associa os pontos em  $U$  com seus pontos que retornam a  $S$  é chamado de mapa de Poincaré, denotado por  $g$ . Ou seja,*

$$g : U \rightarrow S$$

*Além disso, considerando  $\tau(x_k)$  o tempo necessário para que a órbita  $\phi$  que parte de  $x_k$  retorne pela primeira vez para  $S$ , tem-se:*

$$x_{k+1} = g(\tau(x_k), x_k). \quad (4.26)$$

Figura 4.5: Representação geométrica do mapa de Poincaré.



Fonte: (WIGGINS, 2003)

Observe que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio de  $g(x)$ , pois  $x_0 \in \phi$ . Logo,  $x_0 = g(x_0)$ . Note também que a estabilidade da órbita periódica do sistema (4.25) está intimamente relacionada com a estabilidade do sistema discreto dado por (4.26).

O teorema a seguir fornece um procedimento simples para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio através do teste dos autovalores do Jacobiano neste ponto e, conseqüentemente, a estabilidade da órbita periódica  $\phi$  (PERKO, 2013).

**Teorema 1** *Seja  $x_0$  um ponto de equilíbrio do sistema (4.26), onde  $g$  é diferenciável continuamente em uma vizinhança do ponto  $x_0$ . Seja  $J$  a matriz jacobiana de  $g$ , no ponto  $x_0$ . Então,*

1. *O ponto  $x_0$  é assintoticamente estável se, e apenas se, todos os autovalores de  $J$  estão dentro do círculo unitário.*
2. *O ponto  $x_0$  é instável se pelo menos um dos autovalores de  $J$  está fora do círculo unitário.*

A partir do Teorema 1, pode-se concluir que a órbita  $\phi$  é assintoticamente estável se todos os autovalores do Jacobiano estão dentro do círculo unitário, e instável se ao menos um dos autovalores estiver fora.

### 4.3.2 Definição do Problema

Considere um sistema LTI SISO que satisfaça as seguintes equações dinâmicas lineares:

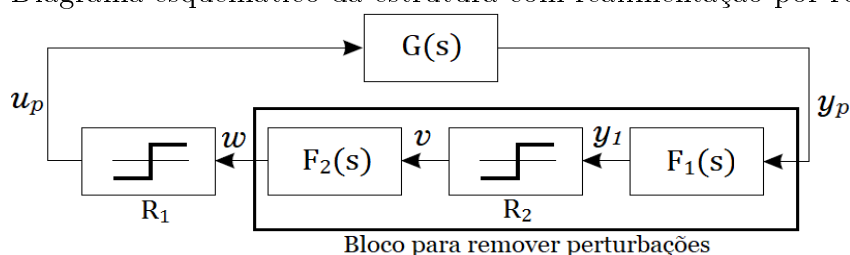
$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu_p(t) \\ y_p(t) = Cx_p(t) \end{cases} \quad (4.27)$$

onde  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $A$  é Hurwitz. O sistema também pode ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (4.28)$$

A fim de analisar a estrutura com realimentação por relé proposta no Capítulo 2, os blocos da estrutura são rearranjados conforme apresentado na Figura 4.6.

Figura 4.6: Diagrama esquemático da estrutura com realimentação por relé proposta.



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a Figura 4.6, o relé  $R_1$  é definido por:

$$u_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } w(t) > \varepsilon_1, \text{ ou } w(t) > -\varepsilon_1 \text{ e } w(t_-) = 1 \\ -1 & \text{se } w(t) < -\varepsilon_1, \text{ ou } w(t) < \varepsilon_1 \text{ e } w(t_-) = -1 \end{cases} \quad (4.29)$$

onde  $\varepsilon_1 \geq 0$  é a histerese e  $w(t_-)$  é o valor de  $w$  antes do tempo  $t$ .

O relé  $R_2$  é definido como:

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_1(t) > \varepsilon_2, \text{ ou } y_1(t) > -\varepsilon_2 \text{ e } y_1(t_-) = 1 \\ -1 & \text{se } y_1(t) < -\varepsilon_2, \text{ ou } y_1(t) < \varepsilon_2 \text{ e } y_1(t_-) = -1 \end{cases} \quad (4.30)$$

onde  $\varepsilon_2 \geq 0$  é a histerese e  $y_1(t_-)$  é o valor de  $y_1$  antes do tempo  $t$ .

Para um sistema LTI SISO com realimentação por relé, a *superfície de chaveamento*, é definida por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = \varepsilon\}.$$

Observe que a superfície de chaveamento é um hiperplano com dimensão  $n - 1$  que contém a origem e divide o espaço de estados em duas regiões distintas. Em uma delas:

$$R^- = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx > \varepsilon\},$$

em que o sistema é dado por  $\dot{x} = Ax - B$ . Na outra região:

$$R^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx < \varepsilon\},$$

onde o sistema é dado por  $\dot{x} = Ax + B$ .

Assim, a seção de Poincaré é considerada uma superfície de chaveamento, e o mapa pode ser calculado seguindo a trajetória através do ciclo limite. A existência e estabilidade do ciclo limite do sistema sob análise é definida pela solução do sistema linear por partes, dado por:

$$\dot{x} = Ax + B \cdot \text{rele}(Cx) = f(x)$$

para uma dada condição inicial  $x(0) = x_0$ . O termo *rele* representa a função do relé.

### 4.3.3 Estrutura Equivalente

A fim de simplificar a análise de existência e estabilidade local do ciclo limite para a estrutura do relé mostrada na Figura 4.6, é proposta uma estrutura equivalente. Esta estrutura é introduzida no seguinte lema.

**Lema 2** *Considere a estrutura do relé mostrada na Figura 4.6. Assuma o período de oscilação para esta estrutura do relé igual a  $T$  segundos. A função de transferência  $F_1(s)$  é dada por (2.4) e  $F_2(s)$  é dada por (2.5). Então, exceto para o transiente inicial, a estrutura do relé mostrada na Figura 4.8 tem o mesmo período de oscilação  $T$  da estrutura apresentada na Figura 4.6, com  $\theta$  igual a  $T/4$ .*

**Prova.** A prova do lema é dividida em duas partes.

*Parte 1:* A partir da estrutura do relé mostrada na Figura 4.6, assumo o período de oscilação igual a  $T$  segundos. A resposta em frequência para  $F_2(s) = 1/s$ , na frequência  $\omega_u$ , é dada por:

$$F_2(j\omega_u) = \frac{1}{\omega_u} e^{-j\pi/2}.$$

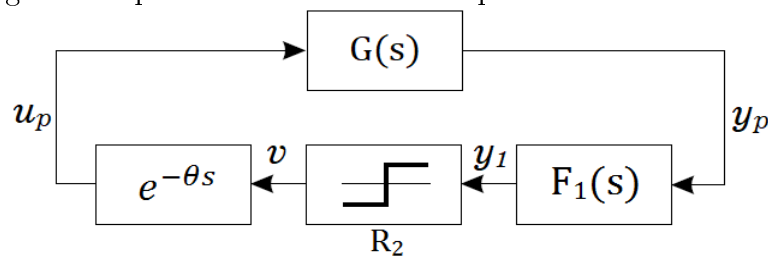
Para o sinal de entrada  $V(s)$ , a saída de  $F_2(s)$  é:

$$W(j\omega_u) = \frac{V(j\omega_u)}{\omega_u} e^{-j\pi/2}. \quad (4.31)$$

Sem perda de generalidade, considere as amplitudes iguais para ambos os relés. Considere também uma onda quadrada ( $v(t)$ ) introduzida na entrada do bloco  $F_2(s)$ . A partir da equação (4.31), há uma defasagem de  $90^\circ$  entre os sinais  $v(t)$  e  $w(t)$ . Uma vez que o relé  $R_1$  é uma não linearidade simétrica, sem histerese, não há atraso entre  $w(t)$  e  $u_p(t)$ . Desta forma, há uma defasagem de  $90^\circ$  entre os sinais  $v(t)$  e  $u_p(t)$ .

Portanto, exceto para o transiente inicial, a estrutura do relé mostrada na Figura 4.7, com  $\theta$  igual a  $T/4$ , tem o mesmo período de oscilação  $T$  da estrutura mostrada na Figura 4.6.

Figura 4.7: Diagrama esquemático da estrutura equivalente com realimentação por relé.

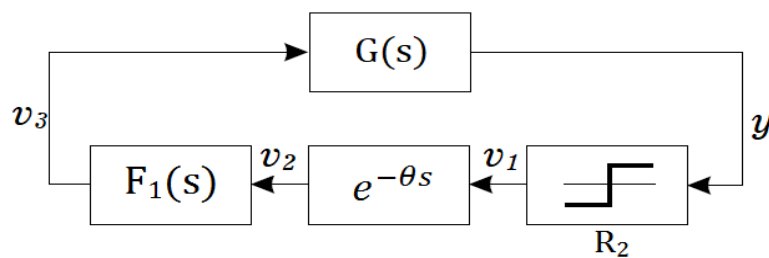


Fonte: Elaborada pelo autor

*Parte 2:* Agora, a partir da estrutura do relé mostrada na Figura 4.7, por uma aplicação direta do princípio da superposição, a função de transferência  $F_1(s)$  pode ser deslocada para a entrada do sistema LTI, uma vez que  $F_1(s)$  e o sistema dado por (4.28) são lineares.

Portanto, a estrutura final equivalente mostrada na Figura 4.8 irá oscilar com o mesmo período  $T$  do sistema mostrado na Figura 4.6. ■

Figura 4.8: Diagrama esquemático da estrutura equivalente final com realimentação por relé.



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a Figura 4.8, o relé  $R_2$  é definido como:

$$v_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } y(t) > \varepsilon, \text{ ou } y(t) \geq -\varepsilon \text{ e } v_1(t_-) = 1 \\ -1, & \text{se } y(t) < -\varepsilon, \text{ ou } y(t) \leq \varepsilon \text{ e } v_1(t_+) = -1 \end{cases} \quad (4.32)$$

onde  $\varepsilon \geq 0$  é a histerese.

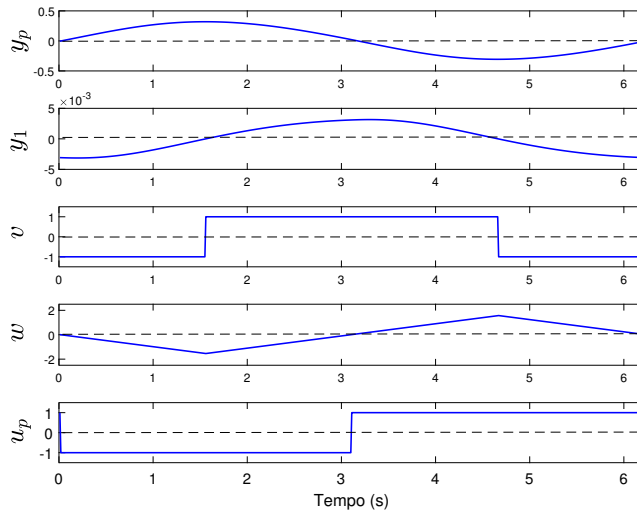
A fim de ilustrar a primeira parte do *Lema 2*, considere o seguinte processo:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}. \quad (4.33)$$

Este processo é simulado com a estrutura do relé mostrada na Figura 4.6, com a constante  $\tau_f = 0,01$  s, amplitude do relé  $\mu = 1$  e histerese  $\varepsilon = 0$ . O período de oscilação da saída do processo é  $T = 6,2$  s.

Uma solução periódica para este sistema é mostrada na Figura 4.9. Como pode ser visto, existe uma defasagem de  $90^\circ$  entre os sinais  $v(t)$  e  $u_p(t)$ .

Figura 4.9: Solução periódica da estrutura equivalente do relé para o sistema (4.33).



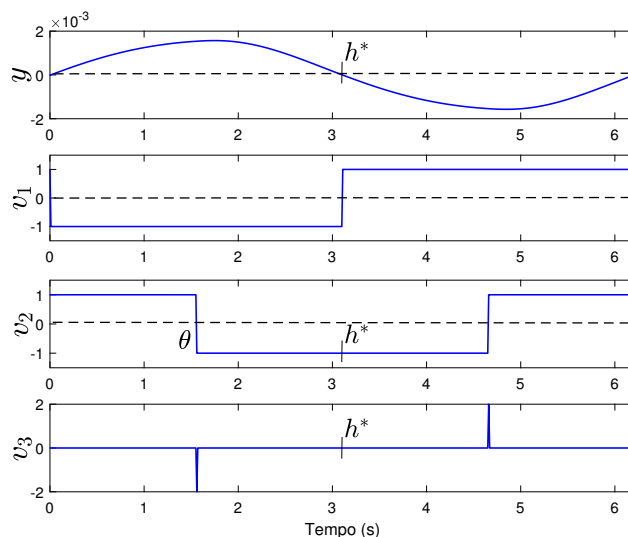
Fonte: Elaborada pelo autor

A segunda parte do *Lema 2* também é ilustrada utilizando o processo (4.33). Uma solução periódica para este sistema é mostrada na Figura 4.10, onde  $h^* = T/2$  e  $\theta = T/4 = 1,55$  s.

Observe que o sinal  $v_2(t)$  é uma versão atrasada do sinal de saída do relé  $v_1(t)$ . O sinal  $v_3(t)$  é similar a uma derivada do sinal  $v_2(t)$  e assume os valores de  $\pm 2$ . Além disso, o período de oscilação da saída do processo é igual ao período de oscilação da estrutura original, ou seja,  $T = 6,2$  s.



Figura 4.10: Solução periódica da estrutura final equivalente do relé para o sistema (4.33).



Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo da estrutura equivalente é obter, em regime estacionário, a mesma solução periódica da estrutura original do relé. Portanto, a diferença do transitório inicial entre as estruturas equivalente e original não inviabiliza a análise realizada nas seções seguintes.

#### 4.3.4 Sistema sem Atraso

Nesta seção, para o sistema sem atraso, a estrutura equivalente mostrada na Figura 4.8 é utilizada na análise de existência e estabilidade local do ciclo limite. Este sistema pode ser representado pelo seguinte sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_3(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.34)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são iguais ao sistema original representado por (4.28).

O sistema representado pela equação (4.34) também pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[v_1(t - \theta) - v_1(t - \theta - \tau_f)] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.35)$$

Para investigar as condições de existência e a estabilidade local da estrutura equiva-

lente, considere novamente o processo dado por (4.33) e a solução periódica mostrada na Figura 4.10, com  $h^* = T/2$  e  $\theta = T/4$ . Observe que o chaveamento do sinal de entrada do processo ocorre no instante de tempo  $t = \theta + \tau_f$  e, de acordo com a equação (4.35),  $v_3(t)$  assume os valores de  $\pm 2$ .

Para o sistema simplificado, a análise da existência do ciclo limite é equivalente a análise apresentada em Varigonda e Georgiou (2001). O próximo teorema é proposto com o objetivo de identificar o ciclo limite da estrutura do relé em estudo.

**Teorema 2** *Considere o sistema linear dado por (4.34) conectado em realimentação com o relé dado por (4.32), como mostrado na Figura 4.8. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com o período  $T = 2h^*$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$(i) \ g_\theta(h^*) \triangleq 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right) = \varepsilon, \quad (4.36)$$

$$(ii) \ y(t) = Cx(t) > \varepsilon, \forall t \in (0, h^*), \quad (4.37)$$

onde

$$x^* = 2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right), \quad (4.38)$$

é a condição inicial  $x(0) = x^*$  que leva à solução periódica.

**Prova.** Uma vez que o sistema linear com realimentação por relé é simétrico em relação a origem, o ciclo limite só precisa ser analisado em metade do período.

*Necessidade:* Suponha que exista um ciclo limite simétrico no sistema da Figura 4.8. Com base na Figura 4.10, a solução do sistema LTI (4.34), para  $x \in R^-$  é dada por:

$$x(h^*) = e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-\tau)} B v_3(\tau) d\tau \quad (4.39)$$

$$= e^{Ah^*} x(0) - 2 \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau. \quad (4.40)$$

Suponha que  $x(0) = x^* \in S$  é um ponto em que a órbita intercepta  $S$ . Por simetria, em  $t = h^*$  o estado do sistema é:

$$x(h^*) = -x^*.$$

$$-x^* = e^{Ah^*} x^* - 2 \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \quad (4.41)$$

$$x^* = 2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right). \quad (4.42)$$

Assim, o estado inicial é dado por (4.38). Além disso, desde que  $x^* \in S$ ,  $Cx^* = \varepsilon$ , que é equivalente à condição (i):

$$g_{\theta}(h^*) \triangleq 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta}^{\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right). \quad (4.43)$$

Para garantir que não exista outro chaveamento em  $0 < t < h^*$ , a entrada do relé deve satisfazer  $y(t) = Cx(t) > \varepsilon$ , por  $0 < t < h^*$ , que fornece a condição (ii).

*Suficiência:* Suponha que  $g(h^*) = \varepsilon$ , portanto  $x^* \in S$ . Além disso, assuma que  $y(t) > \varepsilon$  para  $t \in (0; h^*)$ , desta forma  $v_3(t) = -2$ ,  $t \in (0; h^*)$ . Portanto, a trajetória de  $x^*$  não atingirá  $S$  novamente antes de  $h^*$ . É possível mostrar que  $x(t)$  atinge  $S$  após  $h^*$  segundos em  $-x^*$ , o que faz com que  $v_3(t)$  mude para 2. Com um argumento semelhante, é mostrado que  $x(t)$  retorna para  $S$  após  $h^*$  em  $x^*$ , de modo que exista uma órbita periódica através de  $x^*$ . ■

Para investigar a estabilidade local do ciclo limite, é preciso calcular o Jacobiano do mapa de Poincaré. Este resultado é apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 3** *Considere o sistema linear dado por (4.34) conectado em realimentação por relé dado por (4.32), como mostrado na Figura 4.8. Suponha que exista uma solução periódica simétrica com  $h^* > \theta$ . O Jacobiano do mapa do Poincaré é dado por:*

$$W_{\theta} = \left( I - \frac{\omega_{\theta} C}{C \omega_{\theta}} \right) e^{Ah^*}, \quad (4.44)$$

onde

$$\omega_{\theta} = e^{Ah^*} Ax^* + 2 [e^{A(h^*-\theta-\tau_f)} - e^{A(h^*-\theta)}] B. \quad (4.45)$$

O ciclo limite é localmente estável se e somente se  $W_{\theta}$  tiver todos os seus autovalores dentro do disco unitário. Será instável se  $W_{\theta}$  tiver pelo menos um autovalor fora do disco unitário.

**Prova.** A análise é realizada considerando a nova origem em  $h^* + \delta t$ , com  $x(0) =$

$x^* + \delta x$ . A partir da nova base de tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x(h^* + \delta h) &= e^{A(h^* + \delta h)} x(0) + \int_0^{h^* + \delta h} e^{A(h^* + \delta h - \tau)} B v_3(\tau) d\tau \\
 &= e^{A(h^* + \delta h)} (x^* + \delta x) + \int_\theta^{\theta + \tau_f} e^{A(h^* + \delta h - \tau)} B (-2) d\tau \\
 &= e^{A(h^* + \delta h)} (x^* + \delta x) + 2A^{-1} [e^{A(h^* + \delta h - \theta - \tau_f)} - e^{A(h^* + \delta h - \theta)}] B \\
 &= e^{Ah^*} (I + A\delta h) (x^* + \delta x) + 2A^{-1} [e^{A(h^* - \theta - \tau_f)} (I + A\delta h) \\
 &\quad - e^{A(h^* - \theta)} (I + A\delta h)] B + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + [e^{Ah^*} Ax^* + 2B(e^{A(h^* - \theta - \tau_f)} - e^{A(h^* - \theta)})] \delta h + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + \omega_\theta \delta h + O(\delta^2), \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

onde

$$\omega_\theta = e^{Ah^*} Ax^* + 2 [e^{A(h^* - \theta - \tau_f)} - e^{A(h^* - \theta)}] B.$$

Uma vez que  $x(h^* + \delta h) \in S$  e por simetria do ciclo limite,  $x(h^*) = -x^*$ :

$$Cx(h^* + \delta h) = -Cx^* + Ce^{Ah^*} \delta x + C\omega_\theta \delta h + O(\delta^2) = -\varepsilon. \tag{4.47}$$

Desde que  $Cx^* = \varepsilon$ , então:

$$Ce^{Ah^*} \delta x + C\omega_\theta \delta h + O(\delta^2) = 0. \tag{4.48}$$

Negligenciando os termos de ordem  $\delta^2$  tem-se:

$$\delta h = -\frac{Ce^{Ah^*}}{C\omega_\theta} \delta x. \tag{4.49}$$

Substituindo (4.49) em (4.46), segue que:

$$x(h^* + \delta h) = -x^* + e^{Ah^*} \delta x - \frac{\omega_\theta C e^{Ah^*}}{C\omega_\theta} \delta x + O(\delta^2) \tag{4.50}$$

$$= -x^* + \left( I - \frac{\omega_\theta C}{C\omega_\theta} \right) e^{Ah^*} \delta x + O(\delta^2) \tag{4.51}$$

o que prova o teorema. ■

Observe que na análise da estrutura equivalente é necessário conhecer antecipadamente o período de oscilação da estrutura do relé original mostrada na Figura 4.6. Neste trabalho, assume-se que o valor deste período de oscilação é conhecido. Para eliminar a necessidade de conhecer o período de oscilação previamente, na seção 4.3.6, é realizada a

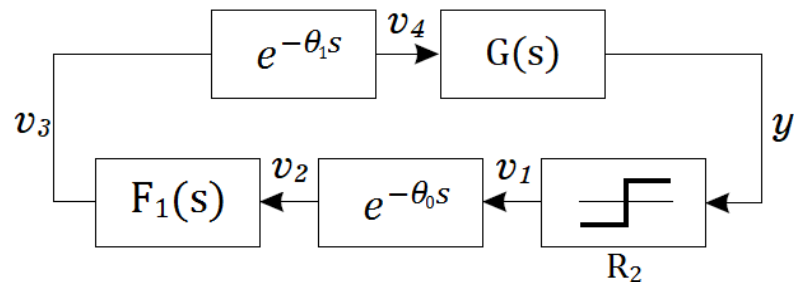
análise a partir da estrutura do relé original.

Para realizar uma análise correta a partir da estrutura equivalente, deve-se considerar apenas os casos em que  $h^* > \theta$ , pois o valor  $\theta$  limita o período de oscilação do sistema (o período de oscilação nunca será menor que o atraso  $\theta$ ). Assim, o período de oscilação do ciclo limite obtido através da estrutura equivalente será o mesmo da estrutura original. Além disso, para realização da simulação do ciclo limite, é necessário conhecer apenas o valor de  $x(0) = x^*$  no instante da interseção com a superfície de chaveamento.

### 4.3.5 Sistemas com Atraso

Os resultados da seção 4.3.4 são agora estendidos para sistemas com atraso. Nesta seção, a estrutura equivalente mostrada na Figura 4.11 é utilizada na análise de existência e estabilidade local do ciclo limite.

Figura 4.11: Diagrama esquemático da estrutura equivalente realimentada por relé para processos com atraso.



Fonte: Elaborada pelo autor

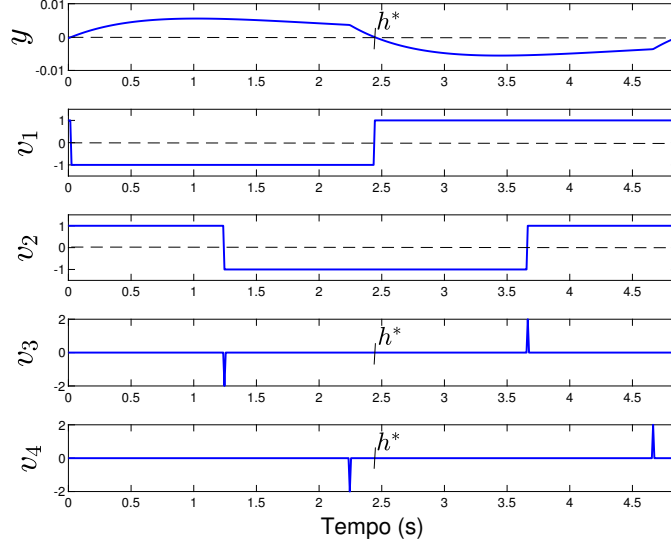
Para ilustrar o comportamento da solução periódica da estrutura equivalente e o sistema LTI com atraso, considere o seguinte processo:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-1s}. \quad (4.52)$$

Este processo é simulado com a estrutura do relé original, mostrada na Figura 4.6, onde a constante é  $\tau_f = 0,01$ , a amplitude do relé  $\mu = 1$  e a histerese  $\varepsilon = 0$ . O período de oscilação do processo é  $T = 4,86$  s. A solução periódica para este sistema e a estrutura equivalente é mostrada na Figura 4.12, onde  $h^* = T/2$  e  $\theta_0 = T/4 = 1,215$  s.

Observe que o sinal  $v_2(t)$  é uma versão atrasada do sinal de saída do relé  $v_1(t)$ . O sinal  $v_3(t)$  é similar a derivada do sinal  $v_2(t)$  e assume os valores de  $\pm 2$ . Enquanto que o sinal na entrada do sistema linear ( $v_4(t)$ ) é uma versão atrasada do sinal  $v_3(t)$ .

Figura 4.12: Solução periódica da estrutura equivalente para o sistema (4.52).



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a estrutura mostrada na Figura 4.11, o sistema linear em análise pode ser representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_4(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.53)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[v_1(t - \theta_T) - v_1(t - \theta_T - \tau_f)] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.54)$$

onde as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são iguais ao sistema original dado por (4.28). A função de transferência da parte linear do sistema representado na Figura 4.11 é dada por:

$$H(s) = G(s)F_1(s)e^{-\theta_T s}, \quad (4.55)$$

com  $\theta_T = \theta_0 + \theta_1$ .

Para o sistema em análise, é correto considerar apenas os casos  $h^* > \theta_0$ , pois o valor  $\theta_0$  limita o período de oscilação do sistema. Assim, a solução periódica em regime estacionário obtida pela estrutura equivalente é a mesma da estrutura original.

Para o caso  $h^* > \theta_T > \theta_0$ , ilustrado na Figura 4.12, observe que o chaveamento ocorre em  $t = \theta_T + \tau_f$  e, de acordo com (4.54),  $v_4(t)$  assume os valores de  $\pm 2$ .

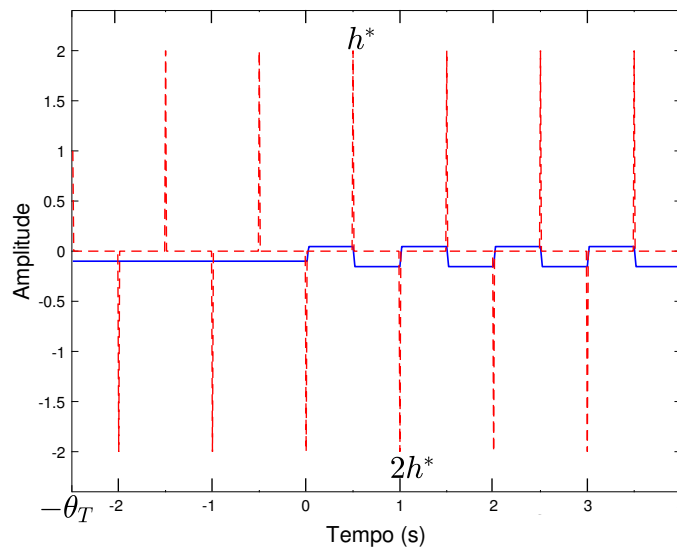
Quando o atraso total do sistema é maior que metade do período de oscilação,  $h^*$ , um

ou mais chaveamentos ocorrem entre  $-\theta_T \leq t < 0$ . Este caso é ilustrado na Figura 4.13 para o processo:

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-1,25s}. \quad (4.56)$$

Este processo é simulado utilizando a estrutura com realimentação por relé, mostrada na Figura 4.6, a constante  $\tau_f = 0,01$ , a amplitude do relé  $\mu = 1$  e a histerese  $\varepsilon = 0$ . De acordo com a simulação, existe um ciclo limite estável com o período  $T = 5,04$  s. Assim,  $\theta_0 = T/4 = 1,26$  s e  $\theta_T = 2,51$  s.

Figura 4.13: Curvas dos sinais de entrada ( $v_4(t)$  - linha tracejada) e saída ( $y(t)$  - linha sólida) do processo obtidos com a estrutura equivalente para o caso  $h^* < \theta_T$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme descrito em Åström (1995), para este processo também existe um ciclo limite instável com o período  $T = 1$  s, ou seja,  $h^* = 0,5$  s. Neste caso, observe que  $h^* < \theta_T$  e o chaveamento do sinal na entrada do sistema linear ocorre em  $\Delta\theta = \theta_T - nh^* = 0,51$  s, onde  $n = 4$  é o número de chaveamentos que ocorrem no intervalo de tempo  $-\theta_T \leq t < 0$ . Observe também que para  $-\theta_T < t < 0$ , a solução não pode ser obtida especificando apenas a condição inicial do sistema linear, é necessário também especificar uma solução inicial,  $x(\tau)$ .

O seguinte teorema é proposto a fim de identificar o ciclo limite da estrutura com realimentação por relé em estudo, mesmo nos casos em que o atraso total do sistema é maior do que a metade do período de oscilação.

**Teorema 4** *Considere o sistema linear dado por (4.34) conectado em realimentação por relé dado por (4.32). Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com o período  $T = 2h^*$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$(i) \ g_\theta(h^*) \triangleq (-1)^{n+1} 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right) = \varepsilon, \quad (4.57)$$

$$(ii) \ y(t) = Cx(t) > \varepsilon, \forall t \in (0, h^*), \quad (4.58)$$

onde

$$x^* = (-1)^{n+1} 2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right), \quad (4.59)$$

é o ponto em que a trajetória intercepta a superfície de chaveamento  $S$  e  $\Delta\theta = \theta_T - nh^*$ , com o maior número inteiro tal que  $nh^* < \theta_T$  ( $n$  é o número de chaveamentos que ocorrem no sinal  $v_4(t)$  entre  $-\theta_T \leq t < 0$ ). Para a solução periódica, é necessário uma solução inicial,  $x(\tau)$ ,  $-\theta_T \leq \tau < 0$  com  $x(0) = x^*$ .

**Prova.** A prova é dividida em duas partes.

*Necessidade:* Suponha que exista um ciclo limite simétrico no sistema da Figura 4.11.

**Caso 1:** Considere o caso  $h^* > \theta_T > \theta_0$ , onde  $\theta_T = \theta_0 + \theta_1$ . Para o processo representado por (4.52) e com base na Figura 4.12, a solução do sistema LTI, equação (4.53), para  $x \in R^-$  é dado por:

$$x(h^*) = e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-\tau)} B v_3(\tau - \theta_1) d\tau \quad (4.60)$$

$$= e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-\tau)} B v_4(\tau) d\tau \quad (4.61)$$

$$= e^{Ah^*} x(0) - 2 \int_{\theta_T}^{\theta_T+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau. \quad (4.62)$$

Suponha  $x(0) = x^* \in S$  o ponto em que a órbita intercepta  $S$ . Por simetria, em  $t = h^*$  o estado do sistema é:

$$x(h^*) = -x^*$$

$$-x^* = e^{Ah^*} x^* - 2 \int_{\theta_T}^{\theta_T+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \quad (4.63)$$

$$x^* = 2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta_T}^{\theta_T+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right). \quad (4.64)$$

Uma vez que  $x^* \in S$  e  $Cx^* = \varepsilon$ , então:



$$g_\theta(h^*) \triangleq 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\theta_T}^{\theta_T + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau \right). \quad (4.65)$$

Para garantir que não exista outro chaveamento entre  $0 < t < h^*$ , a entrada do relé deve satisfazer  $y(t) = Cx(t) > \varepsilon$ , que fornece a condição (ii). No intervalo  $0 < t < h^*$ , o estado do sistema é dado por:

$$x(t) = e^{At}x^* - 2 \int_{\theta_T}^{\theta_T + \tau_f} e^{A(t-\tau)} B d\tau. \quad (4.66)$$

**Caso 2:** Considere agora o caso  $h^* < \theta_T$ , onde  $\theta_T = \theta_0 + \theta_1$ . Nesse caso, o sinal na entrada do sistema linear depende do número de chaveamentos anteriores,  $n$ , com  $\Delta\theta = \theta_T - nh^*$  (veja Figura 4.13). Para  $n$  par:

$$x(h^*) = e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^* - \tau)} B v_4(\tau) d\tau \quad (4.67)$$

$$= e^{Ah^*} x(0) + 2 \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau. \quad (4.68)$$

Para  $n$  ímpar, tem-se:

$$x(h^*) = e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^* - \tau)} B v_4(\tau) d\tau \quad (4.69)$$

$$= e^{Ah^*} x(0) - 2 \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau. \quad (4.70)$$

Novamente, por simetria, em  $t = h^*$  o estado do sistema é:

$$x(h^*) = -x^*.$$

Portanto, para  $n$  par,

$$-x^* = e^{Ah^*} x^* + 2 \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau \quad (4.71)$$

$$x^* = -2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau \right). \quad (4.72)$$

Da mesma forma, para  $n$  ímpar,

$$x^* = 2(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta + \tau_f} e^{A(h^* - \tau)} B d\tau \right). \quad (4.73)$$

O estado inicial é assim dado por (4.59). Assim, para  $x^* \in S$  tem-se  $Cx^* = \varepsilon$ , que é

equivalente à condição (i):

$$g_\theta(h^*) \triangleq (-1)^{n+1} 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right). \quad (4.74)$$

Mais uma vez, para garantir que não ocorra outro chaveamento entre  $0 < t < h^*$ , a entrada do relé deve satisfazer  $y(t) = Cx(t) > \varepsilon$ , que fornece a condição (ii). Com o estado do sistema dado por:

$$x(t) = e^{At} x^* + (-1)^{n+1} 2 \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta+\tau_f} e^{A(t-\tau)} B d\tau \right). \quad (4.75)$$

*Suficiência:* Suponha que  $g(h^*) = \varepsilon$ , portanto  $x^* \in S$ . Também assumamos  $y(t) > \varepsilon$  para  $t \in (0; h^*)$ , logo  $v_4(t) = -2$ ,  $t \in (0; h^*)$ . Desta forma, a trajetória de  $x^*$  não atingirá  $S$  novamente antes de  $h^*$ . É possível mostrar que  $x(t)$  atinge  $S$  após  $h^*$  segundos em  $-x^*$ , o que faz com que  $v_4(t)$  passe para 2. Com um argumento semelhante, é mostrado que  $x(t)$  retorna para  $S$  após  $h^*$  em  $x^*$ , de modo que exista uma órbita periódica através de  $x^*$ . ■

Igualmente à análise realizada para o sistema sem atraso, também é necessário conhecer antecipadamente o período de oscilação da estrutura com relé original. Além disso, observe que a expressão do mapa Poincaré e do sistema LTI sem atraso é obtida quando  $\theta_1 = 0$ .

Para sistemas com atraso, a análise da estabilidade do ciclo limite é complexa, uma vez que o estado do sistema é dimensional infinito (ÅSTRÖM, 1995). O problema é simplificado para o ciclo limite com  $h^* > \theta_T$ . Este resultado é apresentado a seguir no teorema proposto.

**Teorema 5** *Considere o sistema linear dado por (4.52) conectado em realimentação por relé dado por (4.32). Assuma que existe uma solução periódica com  $h^* > \theta_0 > \Delta\theta$ , com  $\Delta\theta = \theta_T - nh^*$  e  $\theta_T = \theta_0 + \theta_1$ . Considere apenas o caso com  $n = 0$ , ou seja,  $\Delta\theta = \theta_T$ . O Jacobiano do mapa de Poincaré é dado por:*

$$W_\theta = \left( I - \frac{\omega_\theta C}{C\omega_\theta} \right) e^{Ah^*}, \quad (4.76)$$

onde

$$\omega_\theta = e^{Ah^*} Ax^* - 2 [e^{A(h^*-\theta_T-\tau_f)} + e^{A(h^*-\theta)}] B. \quad (4.77)$$

O ciclo limite é estável localmente se e apenas se  $W_\theta$  tiver todos os autovalores dentro do círculo unitário. O ciclo limite será instável se  $W_\theta$  tiver ao menos um autovalor fora do círculo unitário.

**Prova.** A análise é realizada considerando uma nova origem em  $h^* + \delta h$ , com  $x(0) = x^* + \delta x$ . Com a nova base de tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x(h^* + \delta h) &= e^{A(h^* + \delta h)}x(0) + \int_0^{h^* + \delta h} e^{A(h^* + \delta h - \tau)} B v_4(\tau) d\tau \\
 &= e^{A(h^* + \delta h)}(x^* + \delta x) + \int_{\theta_T}^{\theta_T + \tau_f} e^{A(h^* + \delta h - \tau)} B (+2) d\tau \\
 &= e^{A(h^* + \delta h)}(x^* + \delta x) - 2A^{-1} [e^{A(h^* + \delta h - \theta_T - \tau_f)} - e^{A(h^* + \delta h - \theta_T)}] B \\
 &= e^{Ah^*} (I + A\delta h) (x^* + \delta x) - 2A^{-1} [e^{A(h^* - \theta_T - \tau_f)} (I + A\delta h) - \\
 &\quad e^{A(h^* - \theta_T)} (I + A\delta h)] B + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + [e^{Ah^*} Ax^* - 2B(e^{A(h^* - \theta_T - \tau_f)} + e^{A(h^* - \theta_T)})] \delta h + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + \omega_\theta \delta h + O(\delta^2), \tag{4.78}
 \end{aligned}$$

onde

$$\omega_\theta = e^{Ah^*} Ax^* - 2 [e^{A(h^* - \theta_T - \tau_f)} - e^{A(h^* - \theta_T)}] B.$$

Uma vez que  $x(h^* + \delta h) \in S$  e por simetria do ciclo limite,  $x(h^*) = -x^*$ :

$$Cx(h^* + \delta h) = -Cx^* + Ce^{Ah^*} \delta x + C\omega_\theta \delta h + O(\delta^2) = -\varepsilon. \tag{4.79}$$

Uma vez que,  $Cx^* = \varepsilon$ , então:

$$Ce^{Ah^*} \delta x + C\omega_\theta \delta h + O(\delta^2) = 0. \tag{4.80}$$

Negligenciando os termos de ordem  $\delta^2$ , tem-se:

$$\delta h = -\frac{Ce^{Ah^*}}{C\omega_\theta} \delta x. \tag{4.81}$$

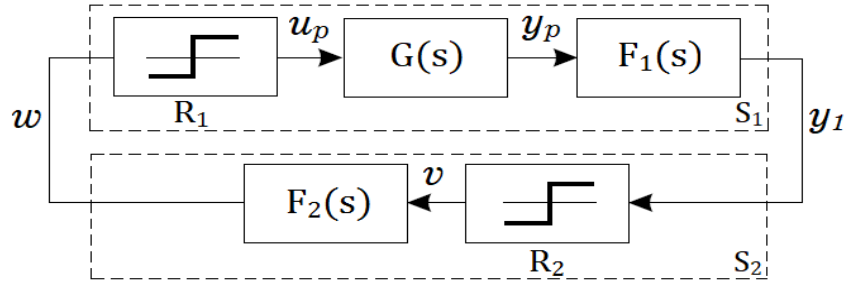
Substituindo (4.81) em (4.78), é obtido:

$$x(h^* + \delta h) = -x^* + e^{Ah^*} \delta x - \frac{\omega_\theta C e^{Ah^*}}{C\omega_\theta} \delta x + O(\delta^2) \tag{4.82}$$

$$= -x^* + \left( I - \frac{\omega_\theta C}{C\omega_\theta} \right) e^{Ah^*} \delta x + O(\delta^2) \tag{4.83}$$

que prova o teorema. ■

Figura 4.14: Diagrama esquemático da estrutura com realimentação por relé.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 4.3.6 Análise a partir da Estrutura do Relé Original

Nesta seção, a análise baseada no mapa de Poincaré é realizada a partir da estrutura do relé original. Uma vantagem dessa abordagem é que não há necessidade de conhecer previamente o período de oscilação do ciclo limite obtido com a estrutura do relé proposta.

Considere um sistema LTI (SISO) satisfazendo as seguintes equações dinâmicas lineares

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_p(t) \\ y_p(t) = Cx_1(t) \end{cases} \quad (4.84)$$

onde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $A$  é Hurwitz. Para simplificar a análise, sem perda de generalidade, a estrutura com realimentação por relé apresentada na Figura 4.6 é rearranjada, para obter a estrutura do relé mostrada na Figura 4.14. Os relés  $R_1$  e  $R_2$  são definidos, respectivamente, de acordo com as equações (4.29) e (4.30).

O filtro passa-baixa  $F_2(s)$ , dado pela equação (2.5), também pode ser descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = v(t) \\ w(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (4.85)$$

onde  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

#### Análise de Existência e Estabilidade

Considerando o filtro passa-alta, equação (2.4), o sistema combinado LTI ( $G(s) \times F_1(s)$ ) é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_p(t) \\ y_1(t) = C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] \end{cases} \quad (4.86)$$

A superfície de chaveamento, composta por um hiperplano de dimensão  $n - 1$ , para o

relé  $R_1$  é definida como:

$$S_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : x_2 = \varepsilon_1\}.$$

Novamente, observe que a superfície de chaveamento é um hiperplano que contém a origem e divide o espaço de estados em duas regiões distintas. Em uma delas  $R_1^- = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : x_2 < \varepsilon_1\}$ , em que o sistema é dado por  $\dot{x}_1 = Ax_1 - B$ . Na outra região  $R_1^+ = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : x_2 > \varepsilon_1\}$ , onde o sistema é dado por  $\dot{x}_1 = Ax_1 + B$ .

Da mesma forma, a superfície de chaveamento para o relé  $R_2$  é definida como:

$$S_2 = \{x_2 \in \mathbb{R} : C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] = \varepsilon_2\}.$$

Com as regiões definidas como:

$$R_2^- = \{x_2 \in \mathbb{R} : C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] < \varepsilon_2\}$$

e

$$R_2^+ = \{x_2 \in \mathbb{R} : C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] > \varepsilon_2\}.$$

De acordo com as superfícies de chaveamento  $S_1$  e  $S_2$  definidas acima, a representação geométrica do mapa Poincaré para a estrutura do relé proposta é apresentada na Figura 4.15, onde  $w$  e  $y_1$  são os sinais de entrada dos relés  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente. Note que se o estado começar em  $x_1^* \in R_1^-$  a trajetória do sistema segue até atingir  $R_2^-$ , ponto em que, o sinal  $v$  muda para 1. O sistema então segue até a trajetória atingir  $R_1^+$  e o sinal  $u_p$  mudar para 1. Então, do estado  $-x_1^*$  o sistema segue até a trajetória atingir  $R_2^-$  e  $v$  mudar para  $-1$ . Finalmente, a trajetória do sistema atinge  $R_1^+$  e  $u_p$  chaveia para  $-1$ .

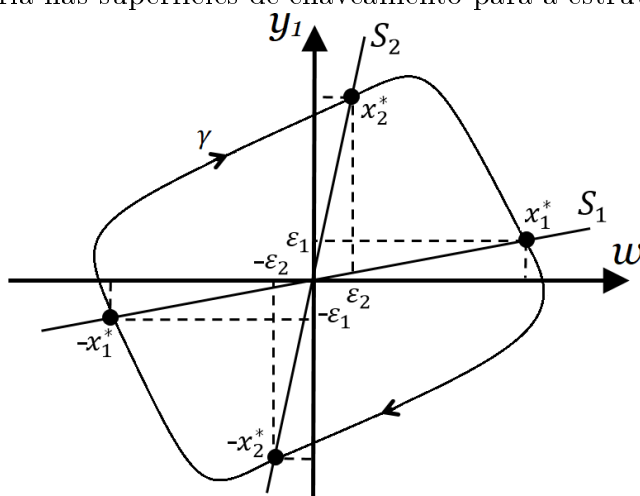
Com o objetivo de ilustrar as condições para a existência e estabilidade local da estrutura com realimentação por relé, considere o seguinte processo:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. \quad (4.87)$$

Este processo é simulado para a estrutura do relé proposta, com a constante  $\tau_f$  igual ao tempo de amostragem (0,01 s), amplitudes dos dois relés  $\mu = \pm 1$  e histerese  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . O período de oscilação do processo é  $T = 3,58$  s. Uma solução periódica para este sistema é apresentada na Figura 4.16. O teorema a seguir permite identificar o ciclo limite da estrutura do relé proposta.

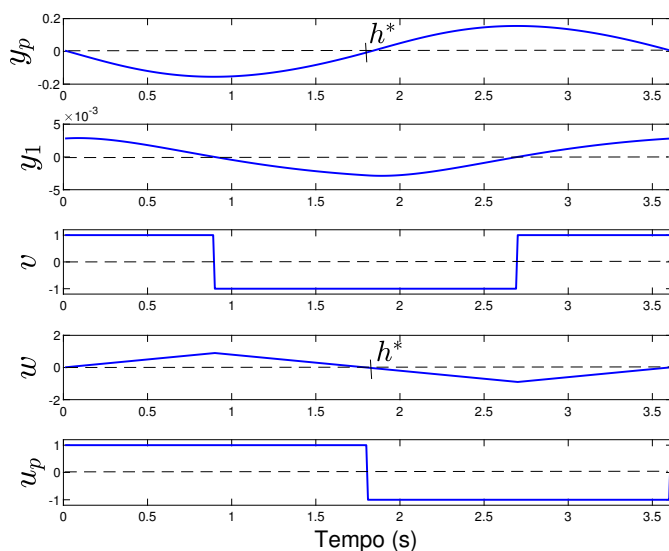
**Teorema 6** *Considere os sistemas lineares dados por (4.85) e (4.86) com realimentação por relé, como apresentado na Figura 4.6. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal*

Figura 4.15: Trajetória nas superfícies de chaveamento para a estrutura do relé proposta.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.16: Solução periódica da estrutura do relé proposta para o sistema (4.87).



Fonte: Elaborada pelo autor

com o período  $T = 2h^*$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & g_1(h^*) \triangleq C[-(I + e^{Ah^*})^{-1}(e^{Ah^*} - I) - (e^{A\tau_f} + e^{Ah^*})^{-1}(e^{Ah^*} - e^{A\tau_f})]A^{-1}B = \varepsilon_2, \\
 (ii) \quad & g_2(h^*) \triangleq \varepsilon_1 = 0, \\
 (iii) \quad & y_1(t) = C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] > \varepsilon_2, \forall t \in (0, h^*), \\
 (iv) \quad & w(t) = x_2(t) > \varepsilon_1, \forall t \in (0, h^*)
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

onde

$$x_1^* = (I + e^{Ah^*})^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B, \quad (4.89)$$

$$x_2^* = 0, \quad (4.90)$$

são as condições iniciais  $x_1(0) = x_1^*$  e  $x_2(0) = x_2^*$  o que leva à solução periódica.

**Prova.** Como os sistemas lineares com realimentação por relé são simétricos em torno da origem, o ciclo limite só precisa ser analisado para metade do seu período.

Suponha que exista um ciclo limite simétrico no sistema da Figura 4.14. Baseado na Figura 4.16, a solução do sistema LTI dada pela equação (4.86), para  $x_1 \in R_1^-$  é dada por:

$$x_1(h^*) = e^{Ah^*} x_1(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-\tau)} B u_p(\tau) d\tau \quad (4.91)$$

$$= e^{Ah^*} x_1(0) - A^{-1} (e^{Ah^*} - I) B. \quad (4.92)$$

Considere  $x_1(0) = x_1^* \in S_1$  o ponto em que a órbita intercepta  $S_1$ . Por simetria, em  $t = h^*$  o estado do sistema é:

$$x_1(h^*) = -x_1^*$$

$$-x_1^* = e^{Ah^*} x_1^* - A^{-1} (e^{Ah^*} - I) B \quad (4.93)$$

$$x_1^* = (I + e^{Ah^*})^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B. \quad (4.94)$$

O estado inicial é assim dado pela equação (4.89). Dessa forma, uma vez que  $x_1^* \in S_1$ , tem-se  $C[x_1(h^*) - x_1(h^* - \tau_f)] = \varepsilon_2$ . Observe que em  $x_1(h^*)$ ,  $u_p = +1$  e para  $x_1(h^* - \tau_f)$ ,  $u_p = -1$ . Assim, a condição (i) é obtida.

Para garantir que não ocorra outro chaveamento em  $0 < t < h^*$ , a entrada do relé deve satisfazer  $y_1(t) = C[x_1(t) - x_1(t - \tau_f)] > \varepsilon_2$ , para  $0 < t < h^*$ , o que fornece a condição (iii).

De maneira semelhante, com base na Figura 4.15, a solução do sistema LTI dada pela

equação (4.85), para  $x_2 \in R_2^-$  é dada por:

$$x_2(h^*) = x_2(0) + \int_0^{h^*} v(\tau) d\tau \quad (4.95)$$

$$= x_2(0) + \int_0^{h^*/2} (+1) d\tau + \int_{h^*/2}^{h^*} (-1) d\tau \quad (4.96)$$

$$= x_2(0). \quad (4.97)$$

Assume-se  $x_2(0) = x_2^* \in S_2$  o ponto em que a órbita intercepta  $S_2$ . Por simetria, em  $t = h^*$  o estado do sistema é:

$$x_2(h^*) = -x_2^* \Rightarrow x_2^* = 0.$$

O estado inicial é assim dado por (4.90). Portanto, uma vez que  $x_2^* \in S_2$ ,  $x_2(t) = \varepsilon_1$ , que é equivalente a condição (ii):

$$g_2(h^*) \triangleq 0. \quad (4.98)$$

Para garantir que não ocorra outro chaveamento em  $0 < t < h^*$ , a entrada do relé deve satisfazer  $w(t) = x_2 > \varepsilon_1$ , para  $0 < t < h^*$ , o que fornece a condição (iv). ■

Novamente, a estabilidade local do ciclo limite é obtida calculando-se os autovalores do Jacobiano do mapa de Poincaré correspondente (KHALIL, 1996). Este resultado é apresentado no seguinte teorema proposto.

**Teorema 7** *Considere os sistemas lineares dados por (4.85) e (4.86) com realimentação por relé, como apresentado na Figura 4.6. Suponha que exista uma solução periódica simétrica com período  $T = 2h^*$ . O Jacobiano do mapa de Poincaré é dado por:*

$$W_i = \left( I - \frac{\omega_i C}{C \omega_i} \right) e^{A h^*} \text{ com } i = 1, 2, 3 \quad (4.99)$$

onde

$$\omega_1 = e^{A h^*} (A x_1^* - B) \quad (4.100)$$

$$\omega_2 = e^{A(h^* - \tau_f)} (A x_\tau^* - B) \quad (4.101)$$

$$\omega_3 = 0. \quad (4.102)$$

O ciclo limite é localmente estável se e somente se cada  $W_i$  tiver todos os seus autovalores dentro do disco unitário. Será instável se  $W_i$  tiver pelo menos um autovalor fora do disco unitário.



**Prova.** A análise é realizada considerando uma nova origem em  $h^* + \delta t$ , com  $x_1(0) = x_1^* + \delta x_1$ . Para o mapa de Poincaré dado pela equação (4.88) - (i) e considerando a nova base de tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_1(h^* + \delta t) &= e^{A(h^* + \delta t)} x_1(0) + \int_0^{h^* + \delta t} e^{A(h^* + \delta t - \tau)} B u_p(\tau) d\tau \\
 &= e^{A(h^* + \delta t)} x_1(0) - A^{-1} (e^{A(h^* + \delta t)} - I) B \\
 &= e^{Ah^*} (I + A\delta t) (x_1^* + \delta x_1) - [e^{Ah^*} (I + A\delta t) - I] A^{-1} B + O(\delta^2) \\
 &= e^{Ah^*} x_1^* - (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B + Ae^{Ah^*} x_1^* \delta t + \\
 &\quad (e^{Ah^*} + Ae^{Ah^*} \delta t) \delta x_1^* - e^{Ah^*} B \delta t + O(\delta^2) \\
 &= -x_1^* + Ae^{Ah^*} x_1^* \delta t + (e^{Ah^*} + Ae^{Ah^*} \delta t) \delta x_1^* \\
 &\quad - e^{Ah^*} B \delta t + O(\delta^2) \\
 &= -x_1^* + e^{Ah^*} (Ax_1^* - B) \delta t + e^{Ah^*} \delta x_1^* + O(\delta^2) \\
 &= -x_1^* + \omega_1 \delta t + e^{Ah^*} \delta x_1^* + O(\delta^2),
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

onde

$$\omega_1 = e^{Ah^*} (Ax_1^* - B). \tag{4.104}$$

Usando um procedimento semelhante para  $x_1(h^* - \tau_f + \delta t)$ , segue que:

$$\omega_2 = e^{A(h^* - \tau_f)} (Ax_{\tau}^* - B) \tag{4.105}$$

onde  $x_{\tau}^* = x_1(0 - \tau_f)$ .

Tem-se  $x_1(h^* + \delta t) \in S_1$  e por simetria do ciclo limite,  $x_1(h^*) = -x_1^*$  e  $x_1(h^* - \tau_f) = -x_{\tau}^*$ :

$$\begin{aligned}
 C [x_1(h^* + \delta t) - x_1(h^* + \delta t - \tau_f)] &= -Cx_1^* + Ce^{Ah^*} \delta x_1 \\
 + C\omega_1 \delta t + Cx_{\tau}^* - Ce^{Ah^*} \delta x_{\tau} - C\omega_2 \delta t + O(\delta^2) &= -\varepsilon_2.
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Uma vez que  $C(x_1^* - x_{\tau}^*) = \varepsilon_2$ , então:

$$Ce^{Ah^*} \delta x_1 + C\omega_1 \delta t - (Ce^{A(h^* - \tau_f)} \delta x_{\tau} + C\omega_2 \delta t) + O(\delta^2) = 0. \tag{4.107}$$

Negligenciando termos de ordem  $\delta^2$  e igualando a zero o termo  $Ce^{Ah^*} \delta x_1 + C\omega_1 \delta t$  da equação (4.106), tem-se:

$$\delta t = -\frac{Ce^{Ah^*}}{C\omega_1} \delta x_1. \tag{4.108}$$

Substituindo (4.108) em (4.103), segue-se que:

$$x_1(h^* + \delta t) = -x_1^* + e^{Ah^*} \delta x_1 - \frac{\omega_1 C e^{Ah^*}}{C\omega_1} \delta x_1 + O(\delta^2) \quad (4.109)$$

$$= -x_1^* + \left( I - \frac{\omega_1 C}{C\omega_1} \right) e^{Ah^*} \delta x_1 + O(\delta^2). \quad (4.110)$$

De maneira semelhante, para  $x_\tau$ , segue-se que:

$$x_1(h^* + \delta t - \tau_f) = -x_\tau^* + \left( I - \frac{\omega_2 C}{C\omega_2} \right) e^{Ah^*} \delta x_\tau + O(\delta^2). \quad (4.111)$$

Agora, para o mapa de Poincaré dado pela equação (4.88) - (ii), segue-se que:

$$x_2(h^* + \delta t) = x_2(0) + \int_0^{h^* + \delta t} v(\tau) d\tau \quad (4.112)$$

$$= x_2^* + \omega_3 \delta t + \delta x_2^*, \quad (4.113)$$

onde  $\omega_3 = 0$ . ■

## 4.4 Resultados de Simulação

Nesta seção, usando exemplos simulados, a existência e estabilidade local do ciclo limite é avaliada para a estrutura com realimentação por relé para processos sob perturbação. Em todos os casos, a amplitude do relé é  $\mu = 1$  e a constante  $\tau_f = 0,01$ . As simulações são realizadas com um passo de simulação  $T_s = 0,01$  s.

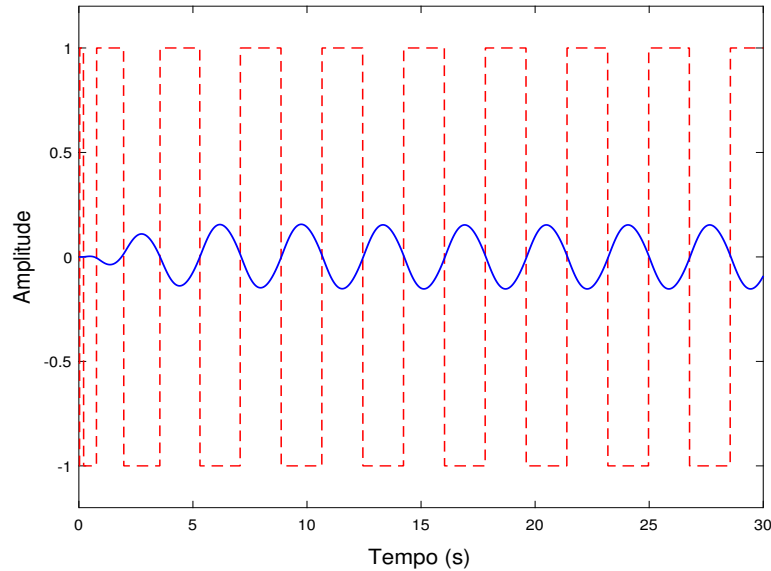
### 4.4.1 Exemplo 1

Considere novamente o processo dado pela equação (4.87). Inicialmente, é realizada a análise a partir da estrutura equivalente obtida na seção 4.3.3. Uma simulação é realizada utilizando a estrutura com realimentação por relé da Figura 4.6. Na Figura 4.17, são mostrados os sinais de entrada e saída do processo. O período de oscilação obtido é  $T = 3,58$  s. Assim,  $\theta = T/4 = 0,895$  s.

Na Figura 4.18, a solução de  $g_\theta(h^*)$  (equação (4.36)) é mostrada. Utilizando o Teorema 2, são calculados dois zeros para valores positivos do mapa de Poincaré, são eles:  $h^* = 0,7825$  e  $h^* = 1,7825$ .

Para  $h^* = 0,7825$  não é possível realizar a análise, já que  $h^* < \theta$ . Para  $h^* = 1,7825$ , a condição inicial que leva à solução periódica é dada por:

Figura 4.17: Curva dos sinais de entrada (linha tracejada) e saída (linha sólida) do processo (4.87).



Fonte: Elaborada pelo autor

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0,0080 \\ 0,0018 \\ -0,0044 \end{pmatrix}.$$

O Jacobiano do mapa de Poincaré pode ser calculado a partir do Teorema 3, logo:

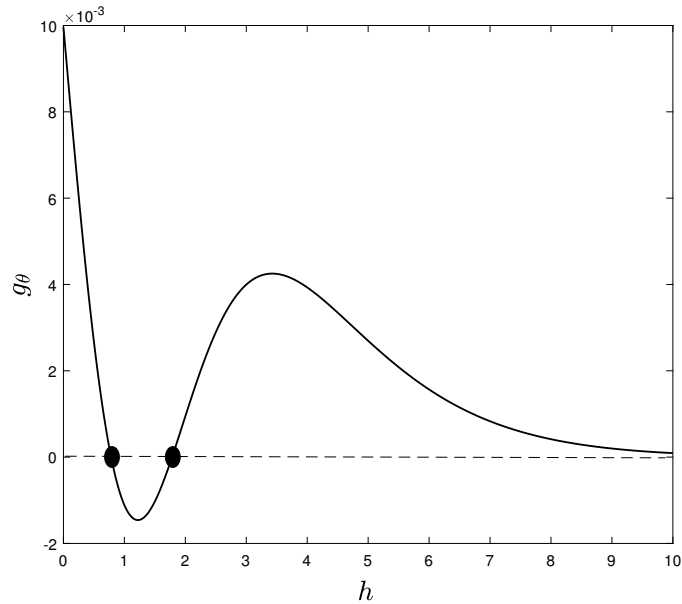
$$W_\theta = \begin{pmatrix} 0,3152 & 1,1316 & 1,2864 \\ 0,1401 & 0,2690 & 0,0284 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $W_\theta$  são 0,  $-0,1067$  e  $0,6909$ . Portanto, pode-se concluir que o ciclo limite é localmente estável de acordo com o Teorema 3.

Agora, sob as mesmas condições anteriores, são aplicados os teoremas obtidos a partir da estrutura original, seção 4.3.6. Na Figura 4.19, é apresentada a solução de  $g_1(h^*)$ , equação (4.88) - (i). Utilizando o Teorema 6, é obtido um zero para valores positivos de  $t$ , ou seja,  $h^* = 1,84$ . A condição inicial que leva à solução periódica e, assim, satisfaz a condição (iii), é dada por:

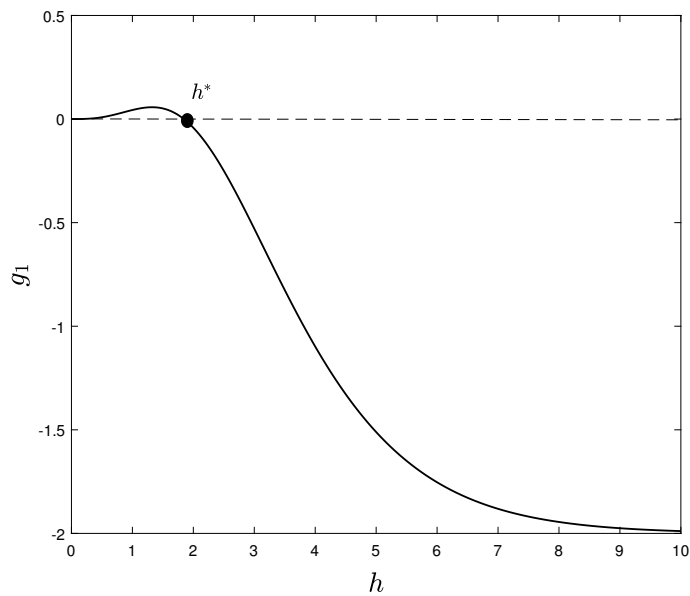
$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 0,1432 \\ 0,2916 \\ 0,0006 \end{pmatrix}.$$

Figura 4.18: Solução de  $g_\theta(h^*)$  para o processo (4.87).



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.19: Solução de  $g_1(h^*)$  para Exemplo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Definindo  $\varepsilon_1 = 0$  as condições (ii) e (iv) são satisfeitas. O Jacobiano do mapa de Poincaré pode ser calculado a partir do Teorema 7. Os autovalores de  $W_1$  são 0,7522,  $-0,2007$  e 0. Enquanto, os autovalores de  $W_2$  são 0,0002,  $-0,1607$  e 0. Pode-se concluir

que o ciclo limite é localmente estável de acordo com o Teorema 7.

### 4.4.2 Exemplo 2

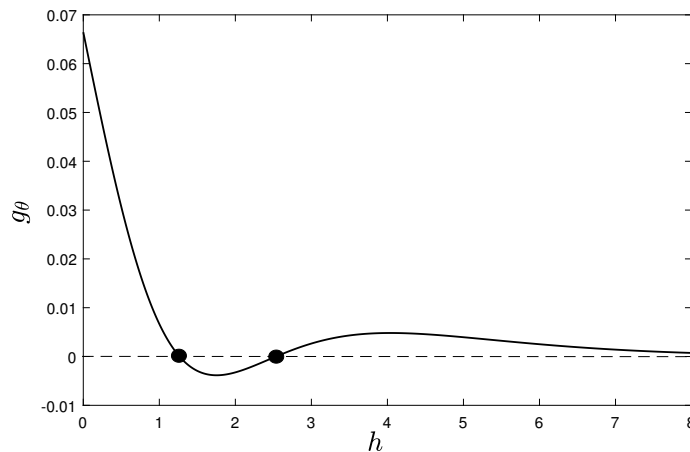
Considere o sistema de fase não-mínima, dado por:

$$G(s) = \frac{-0,5s + 1}{(s + 1)^3}. \quad (4.114)$$

O período de oscilação obtido a partir da simulação com a estrutura apresentada na Figura 4.6 é  $T = 5,08$  s. Para a análise usando a estrutura equivalente, tem-se  $\theta = T/4 = 1,27$  s.

Na Figura 4.20 a solução de  $g_\theta(h^*)$  é apresentada. Novamente, a partir do Teorema 2, são encontrados dois zeros para valores positivos de  $h$ ,  $h^* = 1,2655$  e  $h^* = 2,5350$ .

Figura 4.20: Solução de  $g_\theta(h^*)$  para o processo (4.114).



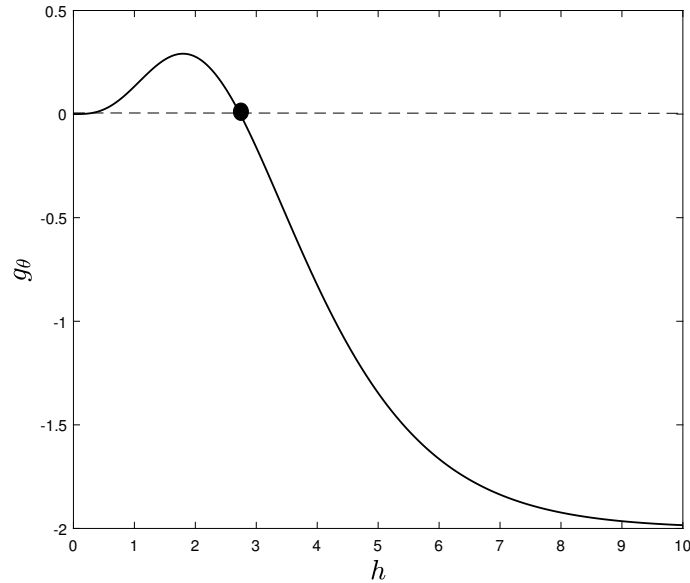
Fonte: Elaborada pelo autor

Para  $h^* = 1,2655$  a análise não é possível, uma vez que  $h^* < \theta$ . Para  $h^* = 2,5350$ , a condição inicial para obter uma solução periódica é:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0,0007 \\ 0,0042 \\ -0,0038 \end{pmatrix}.$$

A partir do Teorema 3, o Jacobiano do mapa de Poincaré é dado por:

Figura 4.21: Solução de  $g_1(h^*)$  para Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

$$W_\theta = \begin{pmatrix} -0,0334 & 0,0078 & 0,1350 \\ 0,1464 & 0,3573 & 0,2161 \\ 0,0732 & 0,1787 & 0,1081 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $W_\theta$  são  $-0,0544$ ,  $0,4866$  e  $0$ . Portanto, de acordo com o Teorema 3, o ciclo limite é localmente estável.

Para a análise a partir da estrutura original, seção 4.3.6, é apresentada na Figura 4.21 a solução de  $g_1(h^*)$ , equação (4.88) - (i). Utilizando o Teorema 6, é obtido um zero para valores positivos do mapa de Poincaré, ou seja,  $h^* = 2,7355$ . A condição inicial que leva à solução periódica e, assim, satisfaz a condição (iii), é dada por:

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} -0,0629 \\ 0,3759 \\ 0,1894 \end{pmatrix}.$$

Novamente, definindo  $\varepsilon_1 = 0$  as condições (ii) e (iv) são satisfeitas. O Jacobiano do mapa de Poincaré pode ser calculado a partir do Teorema 7. Os autovalores de  $W_1$  são  $0,1282$ ,  $0,0629$  e  $-0,3759$ . Por outro lado, os autovalores de  $W_2$  são  $0,0969$ ,  $0,1291$  e  $-0,4862$ . Desta forma, o ciclo limite é localmente estável de acordo com o Teorema 7.

### 4.4.3 Exemplo 3

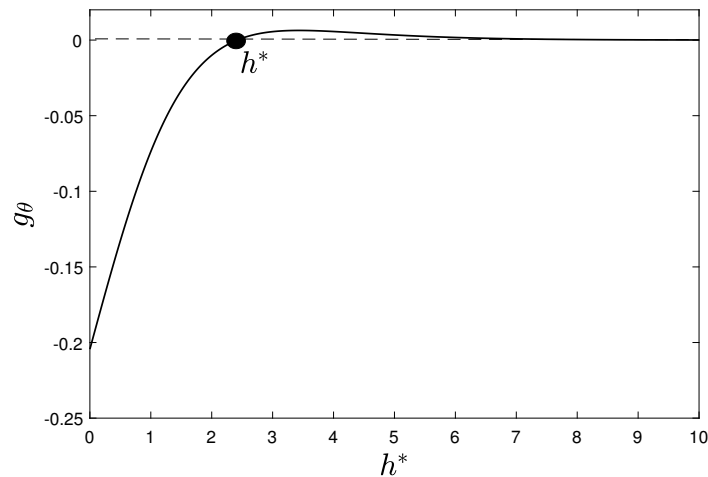
Considere novamente o processo de segunda ordem com atraso, dado por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-1s}. \quad (4.115)$$

Como este processo possui atraso, a análise é realizada apenas utilizando os resultados obtidos com a estrutura equivalente, seção 4.3.5. Com a histerese  $\varepsilon = 0$ , o período de oscilação obtido a partir da simulação da estrutura com relé da Figura 4.6 é  $T = 4,86$  s. Assim,  $\theta_0 = T/4 = 1,215$  s.

Na Figura 4.22, é apresentada a solução de  $g_\theta(h^*)$ , equação (4.57). A partir do Teorema 4, é calculado apenas um zero para valores positivos de  $h$ , ou seja,  $h^* = 2,4178$ .

Figura 4.22: Solução de  $g_\theta(h^*)$  para o processo (4.115).



Fonte: Elaborada pelo autor

A condição inicial para obter uma solução periódica é:

$$x(0) = \begin{pmatrix} -0,0151 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O Jacobiano do mapa de Poincaré é calculado a partir de Teorema 5:

$$W_\theta = \begin{pmatrix} 0,3046 & 0,3937 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $W_\theta$  são 0 e 0,3046. Portanto, o ciclo limite é localmente estável de acordo com o Teorema 5.

#### 4.4.4 Exemplo 4

Considere novamente o processo dado por:

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-1,25s}, \quad (4.116)$$

onde  $A = 0$ ,  $B = 1$  e  $C = 1$ .

A partir da simulação utilizando a estrutura com relé mostrada na Figura 4.6, é obtido um ciclo limite estável com o período  $T = 5,04$  s. Assim,  $\theta_0 = T/4 = 1,26$  s e  $\theta_T = 2,51$  s. Além disso, existe um ciclo limite instável com o período  $T = 1$  s.

Para este exemplo, não é possível aplicar a análise apresentada na seção 4.3.6. Conforme mencionado anteriormente, para o ciclo limite instável, o número de chaveamentos que ocorrem entre  $-\theta_T \leq t < 0$  é  $n = 4$  e  $\Delta\theta = 0,51$ . Utilizando a equação (4.57) do Teorema 4, tem-se:

$$\begin{aligned} g_\theta(h^*) &= (-1)^5 2C(e^{Ah^*} + I)^{-1} \left( \int_{\Delta\theta}^{\Delta\theta+\tau_f} e^{A(h^*-\tau)} B d\tau \right) \\ &= -\tau_f = -0,01. \end{aligned}$$

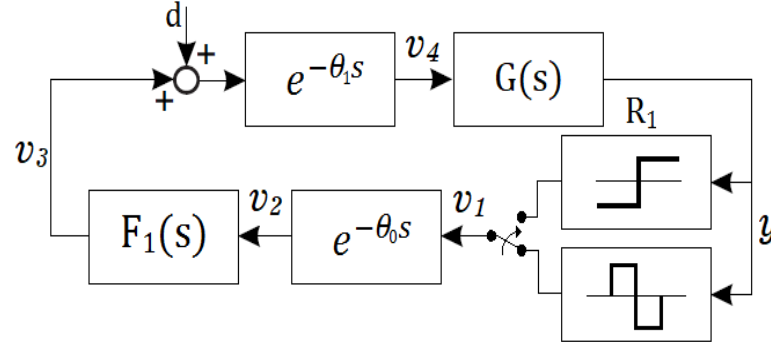
Desta forma, a condição (i) está satisfeita para um relé com histerese  $\varepsilon = 0,01$ . Além disso, para satisfazer a condição (ii), o sistema deve ser inicializado com  $x(\tau) = -0,01$ . Assim, como mostrado na Figura 4.13, um ciclo limite é obtido com o período  $T = 1$  s, que é menor do que o atraso do processo ( $\theta_1 = 1,25$ ).

Usando um procedimento similar ao apresentado em Åström (1995), para obter o ciclo limite instável, é necessário usar a estrutura mostrada na Figura 4.23. Assim, os valores passados do sinal de entrada do processo foram escolhidos para corresponder ao ciclo limite. A mudança para a estrutura do relé ocorre no instante de tempo  $t = 5$  s.

O ciclo limite instável é ilustrado na Figura 4.24. No instante  $t = 10$  s, um pulso duplo retangular com amplitude  $d = \pm 0,01$ , período igual a 4 s e *duty cycle* de 50 % é introduzido no sistema. Após esta perturbação, a solução converge para um ciclo limite estável com período  $T = 5,04$  s.

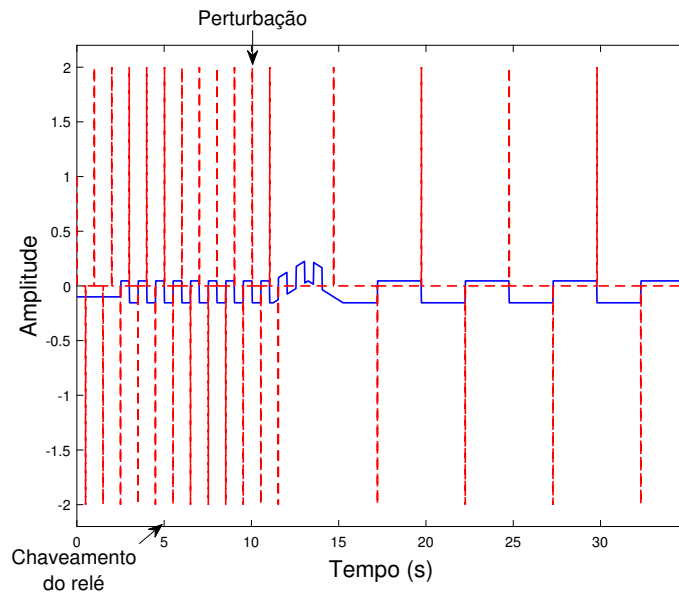


Figura 4.23: Diagrama esquemático utilizado para a simulação da estrutura equivalente do relé para o processo com  $h^* < \theta_T$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.24: Curvas dos sinais de entrada ( $v_4(t)$  - linha pontilhada) e saída ( $y(t)$  - linha sólida) do processo (4.116).



Fonte: Elaborada pelo autor

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo, foi realizada a análise da estrutura com realimentação por relé para processos sob perturbação. Inicialmente, foi apresentada a análise por função descritiva. A partir desta análise, para valores pequenos da constante do filtro passa-alta, observa-se que as características da estrutura proposta são semelhantes as do relé padrão.

É importante observar que na análise por função descritiva nem sempre é possível obter resultados corretos. Um dos motivos de erro deve-se a característica do filtro passa-alta, pois o sinal na saída deste bloco não se aproxima da forma de onda senoidal. Logo,

as componentes harmônicas elevadas deste sinal serão responsáveis pela imprecisão do resultado.

Em seguida, utilizando o mapa de Poincaré, foram apresentados os resultados sobre a existência e estabilidade de ciclos limite unimodais e simétricos para a estrutura com realimentação por relé sob análise. Inicialmente, a fim de simplificar a análise, uma estrutura do relé equivalente é proposta. Observa-se que, em regime estacionário, a mesma solução periódica da estrutura original do relé é obtida. A partir desta estrutura equivalente e para sistemas com e sem atraso, foram obtidas condições necessárias e suficientes para a existência de ciclos limite da estrutura em estudo. Além disso, as condições suficientes para estabilidade local para tais ciclos limite são obtidas a partir dos teoremas apresentados. A partir dos exemplos simulados observa-se que os resultados obtidos tanto pela estrutura equivalente quanto a partir da estrutura original são semelhantes.

Para sistemas com atraso, os resultados apresentados indicam a existência de ciclos limite com período de oscilação menor do que o atraso do sistema, o que implica que tais oscilações só podem existir se o sistema tiver iniciado a partir de uma solução inicial.

# Capítulo 5

## Identificação de Modelos utilizando Experimento do Relé

### 5.1 Introdução

Com o objetivo de facilitar o projeto dos sistemas de controle, nas últimas três décadas, diversas pesquisas dedicaram-se à identificação de modelos lineares de baixa ordem com atraso, tais como primeira ordem com atraso (FOPTD) e segunda ordem com atraso (SOPTD) (LIU; WANG; HUANG, 2013). Os modelos de ordem reduzida são utilizados principalmente no projeto de controladores PID. Os principais motivos para a ampla aplicação desses modelos são a simplicidade e a capacidade de captar as dinâmicas essenciais de vários processos industriais, mesmo que o processo real seja de ordem superior (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

O método do relé proposto por Åström e Hägglund (1984) tem sido amplamente utilizado para identificação de modelos. Com o propósito de obter mais informações, além do ponto crítico do processo, diversas variações foram propostas para fornecer informações em uma frequência adicional. Em geral, estas técnicas introduzem um elemento dinâmico conhecido na malha de realimentação e, assim, é alterada a frequência do sinal de excitação. Por exemplo, para obter informações do sistema em um ponto de frequência mais baixa do que a frequência do relé padrão ( $-180^\circ$ ), é introduzido na malha de realimentação um elemento integrador. A adição de um integrador produz uma mudança de fase, fixando-a em  $-90^\circ$ .

Para estimação dos parâmetros de um modelo FOPTD, além da informação do ponto crítico do sistema, é necessário obter informações adicionais. Em Åström e Hägglund

(2006), são apresentadas expressões analíticas para estimação dos parâmetros do modelo FOPTD utilizando o experimento do relé mais uma estimativa do ganho do processo na frequência zero. Para obter uma melhor estimativa dos parâmetros, em Wang, Gawthrop e Young (2005) é proposto o uso de restrições de igualdade. Neste caso, a solução do problema de otimização possui uma forma fechada. Em Acioli Júnior, Berger e Barros (2006), a partir de um experimento do relé padrão em malha fechada, é realizada a identificação de modelos FOPTD utilizando restrições de igualdade na frequência através do método integral e uma aproximação por série de Taylor de primeira ordem para o atraso do sistema.

Neste capítulo, é apresentada uma técnica de identificação de modelos FOPTD. Diferentemente do método de identificação apresentado em Acioli Júnior, Berger e Barros (2006), é utilizada a estrutura do relé proposta, em malha aberta, com e sem elemento integrador realimentado na malha. Além disso, as informações dos pontos de frequências são utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos. Também são utilizados uma aproximação por série de Taylor de segunda ordem e um procedimento iterativo para estimação do atraso. Esta técnica foi originalmente proposta em Silva, Barros e Acioli Júnior (2016). Em seguida, a partir da identificação de dois modelos FOPTD, é proposta uma metodologia para um ajuste de fase dos modelos estimados. O objetivo desse ajuste é reduzir o erro do modelo em altas frequências.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Inicialmente, na seção 5.2, o problema de otimização com restrições de igualdade no domínio da frequência utilizando o método dos mínimos quadrados é abordado. Em seguida, é apresentada a técnica de identificação de modelos FOPTD. Por fim, o procedimento iterativo para estimação do atraso é discutido. A partir da identificação de dois modelos FOPTD, na seção 5.3, é apresentada uma metodologia de ajuste de fase dos modelos estimados. Na seção 5.4, são apresentados os resultados de simulação. Na seção 5.5, é apresentada a identificação de um processo termoeletrico. As conclusões são apresentadas na seção 5.6.

## 5.2 Identificação de Modelos FOPTD

Os modelos de ordem reduzida mais utilizados em controle para representar sistemas industriais são os modelos FOPTD e SOPTD. Estes modelos refletem de maneira satisfatória o comportamento fundamental do sistema com um número de parâmetros reduzido, mesmo quando o sistema real é de ordem elevada. Um modelo FOPTD é descrito por:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} = \frac{b}{s + a} e^{-Ls}, \quad (5.1)$$

onde  $K$  é o ganho do processo,  $T$  é a constante de tempo,  $L$  é o atraso,  $a = 1/T$  e  $b = K/T$ .

### 5.2.1 Otimização com Restrições

Em Söderström e Stoica (1988), o problema de otimização com restrições de igualdade no método dos mínimos quadrados é formalizado. A restrição é obtida através da resposta em frequência calculada usando a DFT (*Discrete Fourier Transform*) dos sinais de entrada e saída obtidos com o experimento do relé. Este resultado é reproduzido no teorema que segue.

**Teorema 8** *Assuma os parâmetros a serem estimados como  $\hat{\theta}$  e que os dados obtidos a partir do experimento do relé, a serem utilizados na identificação ( $y$  e  $u$ ), são agrupados nos vetores (em forma matricial)  $Y$  e  $\Phi$ , o que define o vetor de regressão dado por:*

$$Y = \Phi \hat{\theta}. \quad (5.2)$$

*As restrições de igualdade são expressas como as matrizes  $M$  e  $\psi$ . Definindo um problema de otimização dos mínimos quadrados com restrições como:*

$$\min_{\hat{\theta}} J = (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}), \quad (5.3)$$

*sujeito a*

$$M \hat{\theta} = \psi. \quad (5.4)$$

*A solução desse problema é dada por:*

$$\lambda^T = \{ME^{-1}M^T\}^{-1} \{\psi - ME^{-1}G\} \quad (5.5)$$

$$\hat{\theta} = E^{-1} (G + M^T \lambda^T),$$

onde  $E = 2\Phi^T \Phi$  e  $G = 2\Phi^T Y$ .

**Prova.** Para determinar a solução desse problema, utiliza-se uma minimização equivalente em relação a  $\hat{\theta}$  e  $\lambda$  (Multiplicador de Lagrange). A função a ser minimizada com relação a  $\hat{\theta}$  e  $\lambda$  passa a ser:

$$J = (Y - \Phi\hat{\theta})^T (Y - \Phi\hat{\theta}) + \lambda (\psi - M\hat{\theta}). \quad (5.6)$$

Derivando (5.6) com relação a  $\hat{\theta}$  e igualando a zero, obtém-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2\Phi^T (Y - \Phi\hat{\theta}) - \lambda M = -2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi\hat{\theta} - M^T \lambda^T = 0, \quad (5.7)$$

o que leva a:

$$\hat{\theta} = [2\Phi^T \Phi]^{-1} (2\Phi^T Y + M^T \lambda^T). \quad (5.8)$$

Definindo-se  $E = 2\Phi^T \Phi$  e  $G = 2\Phi^T Y$ , tem-se:

$$\hat{\theta} = E^{-1} (G + M^T \lambda^T). \quad (5.9)$$

Derivando (5.6) com relação a  $\lambda$  e igualando a zero obtém-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \psi - M\hat{\theta} = 0, \quad (5.10)$$

o que leva a:

$$M\hat{\theta} = \psi. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.9) em (5.11), tem-se:

$$M [E^{-1} (G + M^T \lambda^T)] = \psi, \quad (5.12)$$

que pode ser reescrita como:

$$ME^{-1}G + ME^{-1}M^T \lambda^T = \psi, \quad (5.13)$$

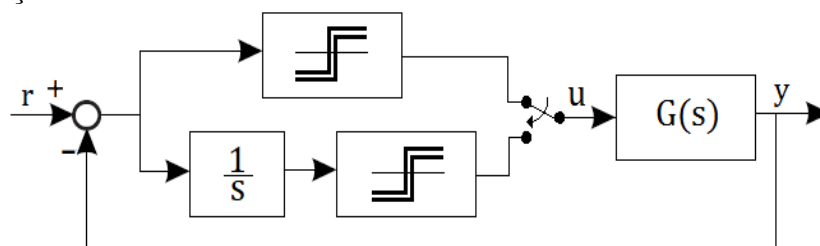
o que leva a  $\lambda^T = \{ME^{-1}M^T\}^{-1} \{\psi - ME^{-1}G\}$ . ■

A informação a ser utilizada como restrição no problema de otimização dos mínimos quadrados, apresentado no Teorema 8, deve ser escrita na forma linear da equação (5.4). Dessa forma, a informação pode ser no domínio do tempo ou da frequência desde que esta tenha uma relação linear com o vetor de parâmetros ( $\hat{\theta}$ ) a serem estimados (ACIOLI JÚNIOR; BERGER; BARROS, 2006).

### 5.2.2 Identificação utilizando Restrições de Igualdade

A estimação dos parâmetros do modelo FOPTD será realizada através do procedimento de otimização com restrições formalizado no Teorema 8. Assume-se a operação em malha aberta e que a excitação aplicada ao processo é obtida a partir da estrutura do relé proposta com e sem integrador, conforme representado na Figura 5.1.

Figura 5.1: Diagrama esquemático do experimento do relé com a estrutura proposta usado para identificação de modelos.



Fonte: Elaborada pelo autor

A informação utilizada como restrição no problema de otimização dos mínimos quadrados deve ser escrita na forma linear da equação (5.4). Utilizando uma aproximação por série de Taylor de segunda ordem para o atraso do processo, o modelo é dado por:

$$G(s) = \frac{b}{s+a} e^{-Ls} \approx \frac{b}{s+a} \left( 1 - sL + \frac{L^2 s^2}{2} \right). \quad (5.14)$$

Dessa forma, o modelo com a aproximação do atraso dado por (5.14) pode ser representado pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) - bL\dot{u}(t) + \frac{b}{2}L^2\ddot{u}(t). \quad (5.15)$$

Então, integrando-se (5.15), tem-se:

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = -a \int_0^t \int_0^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + b \int_0^t \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 - \beta \int_0^t u(\tau) d\tau + \alpha u(t), \quad (5.16)$$

onde  $\alpha = \frac{b}{2}L^2$  e  $\beta = bL$ .

Define-se o vetor de regressão:

$$\gamma(t) = \phi(t)\hat{\theta}, \quad (5.17)$$

com

$$\gamma(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} -\int_0^t \int_0^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 \tau_2 \\ \int_0^t \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 \tau_2 \\ -\int_0^t u(\tau) d\tau \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} a & b & \beta & \alpha \end{bmatrix}^T. \quad (5.19)$$

Utilizando todas as amostras dos sinais  $y$  e  $u$ , obtidas a partir da aplicação da estrutura do relé proposta com e sem integrador, um sistema de equações lineares é obtido e pode-se encontrar a forma de regressão dada por (5.2) no Teorema 8 com  $Y$  e  $\Phi$  dados por:

$$Y = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(N-1) \end{bmatrix}^T \quad (5.20)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \cdots & \phi(N-1) \end{bmatrix}^T, \quad (5.21)$$

onde  $N$  é o número total de amostras do conjunto de dados utilizado para a identificação.

A restrição de igualdade é definida através da informação em frequência obtida através do uso da DFT nos sinais resultantes da aplicação da estrutura do relé proposta sem integrador, frequência  $\hat{\omega}_1$  e da estrutura do relé proposta com integrador, frequência  $\hat{\omega}_2$ . Utilizando as informações das frequências, tem-se:

$$\hat{G}(j\hat{\omega}) = \frac{b}{j\hat{\omega} + a} \left( 1 - j\hat{\omega}L - \frac{L^2\hat{\omega}^2}{2} \right). \quad (5.22)$$

Reescrevendo (5.22) para as frequências de  $\hat{\omega}_1$  e  $\hat{\omega}_2$ , tem-se, respectivamente:

$$j\hat{\omega}_1 \hat{G}(j\hat{\omega}_1) = -a\hat{G}(j\hat{\omega}_1) + b - bLj\hat{\omega}_1 - \frac{b}{2}L^2\hat{\omega}_1^2, \quad (5.23)$$

e

$$j\hat{\omega}_2 \hat{G}(j\hat{\omega}_2) = -a\hat{G}(j\hat{\omega}_2) + b - bLj\hat{\omega}_2 - \frac{b}{2}L^2\hat{\omega}_2^2, \quad (5.24)$$

que podem ser escritas na forma da equação linear (5.4) do Teorema 8. Assim, o problema de otimização de mínimos quadrados com restrições de igualdade é definido como:



$$\Psi(\hat{\omega}) = M(\hat{\omega})\hat{\theta}, \quad (5.25)$$

com

$$\Psi(\hat{\omega}) = \begin{bmatrix} j\hat{\omega}_1 \hat{G}(j\hat{\omega}_1) \\ j\hat{\omega}_2 \hat{G}(j\hat{\omega}_2) \end{bmatrix},$$

$$M(j\hat{\omega}) = \begin{bmatrix} -\hat{G}(j\hat{\omega}_1) & 1 & -j\hat{\omega}_1 & -\hat{\omega}_1^2 \\ -\hat{G}(j\hat{\omega}_2) & 1 & -j\hat{\omega}_2 & -\hat{\omega}_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} a & b & \beta & \alpha \end{bmatrix}^T.$$

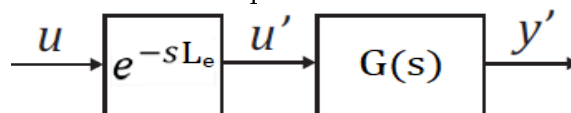
A estimativa final é o vetor de parâmetros  $\left\{ \hat{a}, \hat{b}, \hat{L}_1 = \hat{\beta}/\hat{b} \text{ e } \hat{L}_2 = \sqrt{2\hat{\alpha}/\hat{b}} \right\}$ . O valor final do atraso é obtido através da média dos valores  $\hat{L}_1$  e  $\hat{L}_2$ .

### 5.2.3 Estimação do Atraso

Para a identificação do modelo FOPTD, o atraso é aproximado por meio da série de Taylor de segunda ordem. Entretanto, esta aproximação não é capaz de representar adequadamente o atraso do processo. Para contornar este problema é utilizado um procedimento iterativo para refinar o atraso estimado a priori.

O procedimento consiste em utilizar uma estimativa prévia do atraso e introduzi-la nos dados da entrada utilizados para estimação do modelo, conforme exemplificado na Figura 5.2, onde  $L_e$  representa a estimativa inicial do atraso. Desta forma, o atraso a ser estimado ( $L - L_e$ ) será menor e a partir dos dados da entrada ( $u'$ ) e da saída ( $y'$ ) os parâmetros do processo são identificados adequadamente.

Figura 5.2: Diagrama do sistema equivalente com estimativa inicial do atraso.



Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando o atraso estimado a cada iteração  $L_e^k$ , utiliza-se o seguinte procedimento para estimação do atraso:

- Passo 1: Realize o experimento utilizando a estrutura do relé proposta e obtenha os dados da entrada e saída;

- Passo 2: Na primeira iteração ( $k = 1$ ), faça  $L_e = 0$ . A partir dos dados de entrada e saída, realize a identificação do modelo conforme descrito na seção 5.2.2. Um modelo é identificado com valor do atraso  $L_e^1$ ;
- Passo 3: Na segunda iteração ( $k = 2$ ), faça  $L_e = L_e^1$  e realize uma nova identificação do modelo. O valor do atraso,  $L_e^2$  é estimado;
- Passo 4: Após  $k$  iterações, para  $L_e = L_e^{k-1}$  realize a identificação do modelo. Um novo valor do atraso,  $L_e^k$ , é estimado.

A cada iteração não é realizado um novo experimento, apenas os dados originais da entrada são atrasados com o valor de  $L_e$  múltiplo do tempo de amostragem.

Assume-se como critério de parada o aumento do erro médio quadrático entre as saídas dos modelos de duas iterações sucessivas, para um mesmo sinal de entrada. O erro médio quadrático é dado por:

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [y(iT_s) - \hat{y}(iT_s)]^2, \quad (5.26)$$

onde  $N$  é o número de pontos no tempo,  $y(iT_s)$  é a saída do modelo estimado na iteração  $k$  e  $\hat{y}(iT_s)$  é a saída do modelo estimado na iteração  $k - 1$ .

A cada iteração, usando a estimativa anterior para minimizar o valor do atraso a ser estimado, pode-se obter um erro médio quadrático menor do modelo identificado em relação ao processo real.

### 5.3 Ajuste de Fase de Modelos FOPTD

Nesta seção, é proposta uma metodologia para ajuste de fase de modelos FOPTD com o objetivo de reduzir o erro dos modelos identificados. Aqui, é utilizada a informação no domínio da frequência obtida a partir do sinal de excitação apresentado na seção 3.4. Além disso, os modelos FOPTD utilizados para o ajuste de fase são obtidos a partir da técnica de identificação proposta em Åström e Hägglund (2006). Entretanto, esta metodologia de ajuste de fase pode ser aplicada independentemente da técnica de identificação utilizada.

De acordo com a técnica de identificação de modelos FOPTD, apresentada em Åström e Hägglund (2006), é necessário conhecer o ganho no estado estacionário e a frequência de oscilação do ciclo limite do processo. Nesta técnica de identificação, os modelos FOPTD são estimados a partir da frequência crítica ( $\omega_u$ ). Entretanto, o modelo FOPTD identificado usando apenas a informação do ponto de frequência crítica pode apresentar uma

resposta temporal ruim, uma vez que apenas captura a dinâmica do processo verdadeiro em  $\omega_u$ . Além disso, este modelo pode não ser adequado para o projeto do controlador, pois não representa a dinâmica de baixa frequência do processo. Assim, para identificar o modelo em uma região de frequência mais ampla, a informação do processo é obtida em  $\omega_i$  pontos de frequência. A seguinte proposição é aplicada para identificar modelos FOPTD a partir das frequências  $\omega_i$ .

**Proposição 9** *Considere a função de transferência  $G(s)$ , dada por (5.27). Na frequência de oscilação do processo ( $\omega_i$ ), o ganho e a fase do sistema são, respectivamente,  $G(j\omega_i)$  e  $\phi(\omega_i)$ .*

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sL}. \quad (5.27)$$

Define-se o ganho relativo  $\kappa(\omega_i) = \frac{|G(j\omega_i)|}{G(0)}$ . De acordo com Åström e Hägglund (2006),  $G(j\omega_i)$  é estimado a partir de um experimento com realimentação por relé e os parâmetros do modelo FOPTD podem ser calculados usando as seguintes equações:

$$T(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1} \quad (5.28)$$

$$L(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \left( \phi(\omega_i) - \arctan(\sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1}) \right) \quad (5.29)$$

$$K = G(0). \quad (5.30)$$

**Prova.** Ver (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006). ■

Com base nas informações no domínio da frequência, obtidas a partir do sinal de excitação apresentado na seção 3.4, um ajuste de fase é proposto com o objetivo de reduzir o erro do modelo FOPTD identificado usando a proposição 9. A partir do sinal de excitação, os modelos iniciais são estimados com base nas informações de alta frequência ( $\omega_H$ ) e baixa frequência ( $\omega_L$ ) do sinal. Desta forma, o modelo final captura as características de alta e baixa frequência do processo. O ajuste de fase para modelos FOPTD é apresentado a seguir.

Usando a técnica de identificação apresentada na Proposição 9, para a frequência  $\omega_H$  é obtido o modelo:

$$G_H(s) = \bar{G}_H(s) e^{-jL_H s}, \quad (5.31)$$

onde  $L_H$  é o atraso do sistema na frequência  $\omega_H$  e  $\bar{G}_H$  representa a dinâmica de primeira ordem do processo sem o atraso.

De maneira similar, a partir da frequência  $\omega_L$  é obtido o modelo:

$$G_L(s) = \bar{G}_L(s)e^{-jLs}. \quad (5.32)$$

Considere o modelo inicial dado por:

$$G_i(j\omega) = \bar{G}_i(j\omega)e^{-jL_i\omega}. \quad (5.33)$$

Aqui, o modelo inicial é escolhido como  $G_i = G_L$ . Na frequência  $\omega_H$ , a fase de  $G_i$  é dada por:

$$\phi_i(j\omega_H) = \angle \bar{G}_i(j\omega_H) + \angle e^{-jL_i\omega_H}. \quad (5.34)$$

Assuma que  $|\bar{G}_i| = |\bar{G}_H|$ . Na frequência  $\omega_H$ , a diferença de fase entre  $G_H$  e  $G_i$  é:

$$\angle e^{-j\Delta L\omega_H} = \phi_H(j\omega_H) - \phi_i(j\omega_H). \quad (5.35)$$

Então,

$$\Delta L = \frac{\phi_H - \phi_i}{\omega_H}. \quad (5.36)$$

Assim, o modelo final é dado por:

$$G_f(s) = \bar{G}_i(s)e^{-j(L_i+\Delta L)s}. \quad (5.37)$$

## 5.4 Resultados de Simulação

Nesta seção, são avaliados os resultados da aplicação das estratégias de identificação propostas. Inicialmente, é realizada a identificação de modelos FOPTD utilizando restrições de igualdade. Em seguida, é aplicada a metodologia de ajuste de fase. Em todos os casos, o passo de simulação é 0,1 s e para ambos os relés, a amplitude é igual a  $\mu = \pm 1$ .

A validação quantitativa do desempenho dos modelos finais estimados é realizada usando a equação (5.26). Porém,  $y(iT_s)$  é a saída real do processo e  $\hat{y}(iT_s)$  é a saída do modelo estimado.

### 5.4.1 Exemplo 1

O primeiro sistema simulado consiste em um sistema de primeira ordem com atraso, dado por:

$$G(s) = \frac{1}{5s + 1}e^{-5s} = \frac{0,2}{s + 0,2}e^{-5s}. \quad (5.38)$$

O sinal de excitação aplicado foi obtido a partir da estrutura do relé proposta com e sem integrador. A constante do filtro  $F_1(s)$  é  $\tau_f = 0,1$ . O ponto de frequência obtido a partir da estrutura do relé sem integrador é  $\hat{\omega}_1 = 0,3050$  rad/s. Para estrutura do relé com integrador, o ponto de frequência é  $\hat{\omega}_2 = 0,1859$  rad/s. Estes pontos de frequência são utilizados como restrições de igualdade conforme procedimento descrito na seção 5.2.2.

Seguindo o procedimento iterativo para estimativa do atraso, são apresentados na Tabela 5.1 os modelos estimados para o Exemplo 1.

Tabela 5.1: Modelos estimados - Exemplo 1.

Iteração	$L_e^k$	Modelo	$\epsilon$
1	0	$\frac{0,7074}{5,7937s+1}e^{-3,69s}$	-
2	3,69	$\frac{0,9782}{5,1921s+1}e^{-4,97s}$	0,0118
3	4,97	$\frac{0,9840}{5,1626s+1}e^{-5,36s}$	0,0033
4	5,36	$\frac{0,9840}{5,1706s+1}e^{-5,74s}$	0,0034

Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com os modelos apresentados na Tabela 5.1, observa-se que a parada do procedimento iterativo de estimação do atraso ocorre na quarta iteração, pois o erro médio quadrático ( $\epsilon$ ) entre a saída do modelo 4 e modelo 3 aumentou.

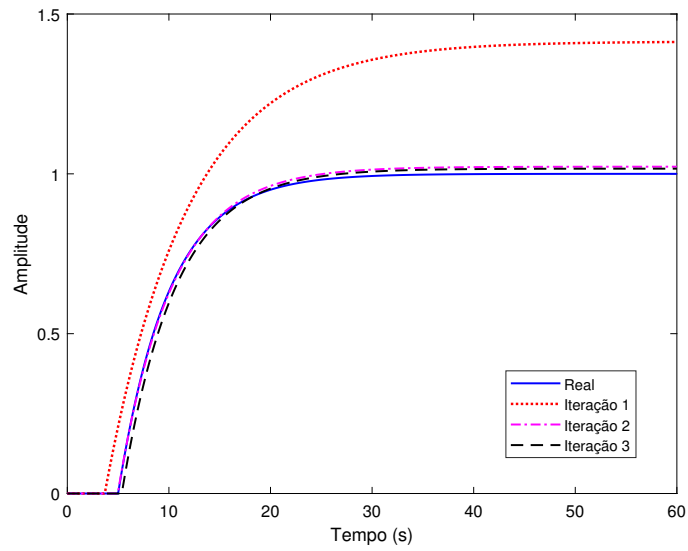
Na Figura 5.3, são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos modelos identificados em conjunto com a resposta do sistema real. Na Figura 5.4, é apresentado o diagrama de Nyquist para o sistema real e modelos identificados.

A validação quantitativa do desempenho do modelo no domínio do tempo é realizada usando a equação (5.26). O erro médio quadrático do modelo final, iteração 3, em relação ao processo real é 0,0011.

Para o mesmo sistema (5.38), é aplicado o ajuste de fase apresentado na seção 5.3. Inicialmente, é realizado o experimento do relé. Então, é definida a frequência de oscilação  $\omega_H = 0,3050$  rad/s e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica  $\omega_L = \omega_H/2 = 0,1525$  rad/s. Assim, é aplicado um degrau com amplitude  $d_0 = 0,8$  e uma onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 0,4$ .

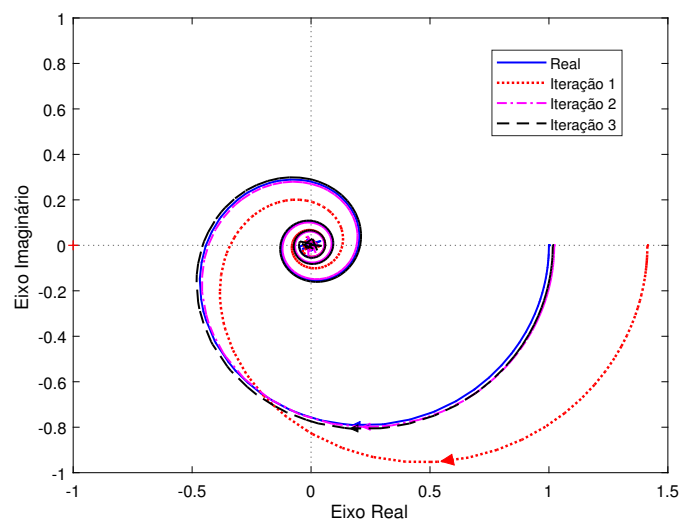
Usando os dados de entrada-saída obtidos a partir da estrutura do relé proposta e a técnica de identificação apresentada na Proposição 9, o modelo FOPTD estimado usando a parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) do sinal de excitação é dado por:

Figura 5.3: Curvas da resposta ao degrau unitário: Técnica com restrições na frequência - Exemplo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.4: Diagrama de Nyquist: Técnica com restrições na frequência - Exemplo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

$$G_H(s) = \frac{0,9916}{4,862s + 1} e^{-4,99s}. \quad (5.39)$$

O modelo FOPTD inicial, estimado usando a informação de baixa frequência do sinal de excitação ( $\omega_L$ ), é dado por:

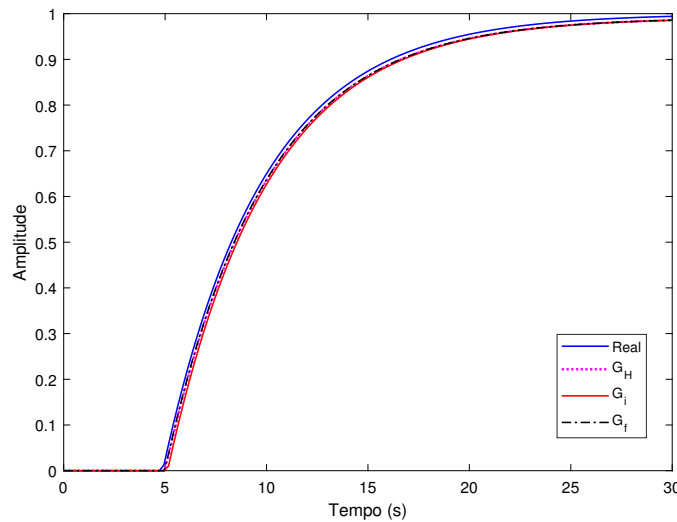
$$G_i(s) = \frac{0,9916}{4,88s + 1} e^{-5,12s}. \quad (5.40)$$

O modelo final é obtido aplicando o ajuste de fase proposto. Assim,  $\Delta L = -0,1355$  e o modelo é:

$$G_f(s) = \frac{0,9916}{4,88s + 1} e^{-4,98s}. \quad (5.41)$$

Na Figura 5.5, são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos modelos identificados e do sistema real. Na Figura 5.6, é apresentado o diagrama de Bode para o sistema real e modelos identificados.

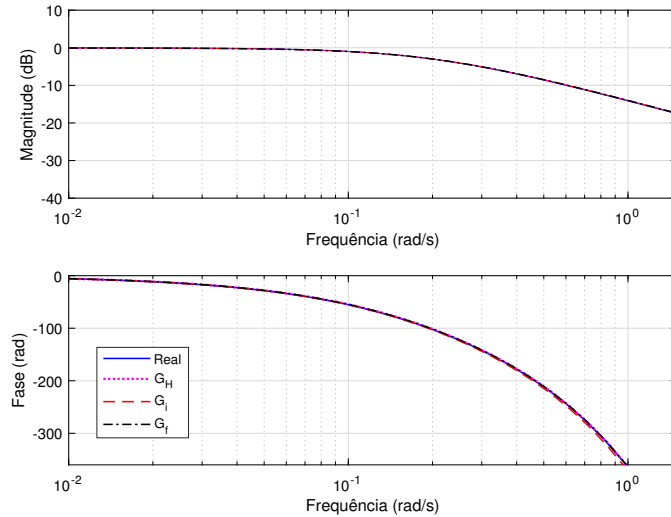
Figura 5.5: Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Os modelos estimados são avaliados usando o erro médio quadrático, dado por (5.26). Para o modelo  $G_H(s)$ , o valor do erro é  $\epsilon = 1,2430 \times 10^{-4}$ . Enquanto, para o modelo  $G_i(s)$ , o erro é  $\epsilon = 2,7429 \times 10^{-4}$ . O modelo final  $G_f(s)$ , obtido usando o ajuste proposto, apresenta o erro médio quadrático  $\epsilon = 1,0285 \times 10^{-4}$ .

Figura 5.6: Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

### 5.4.2 Exemplo 2

Neste exemplo, considere um sistema de quarta ordem sem atraso dado pela equação (5.42). O objetivo é avaliar como a estratégia de identificação captura a dinâmica de um sistema de ordem superior.

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}. \tag{5.42}$$

Novamente, a constante do filtro  $F_1(s)$  é  $\tau_f = 0,1$ . O ponto de alta frequência é  $\hat{\omega}_1 = 0,924$  rad/s. Enquanto, para o ponto de baixa frequência, tem-se  $\hat{\omega}_2 = 0,408$  rad/s. Os modelos estimados são apresentados na Tabela 5.2. A parada do procedimento iterativo de estimação do atraso ocorre na quinta iteração.

Tabela 5.2: Modelos estimados - Exemplo 2.

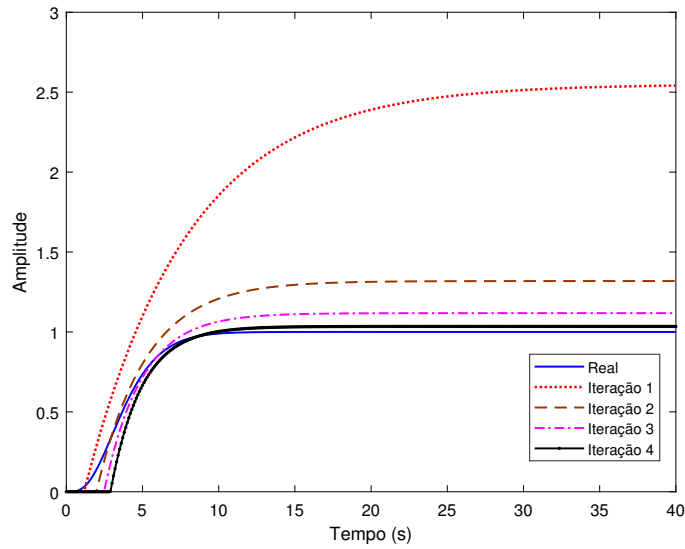
Iteração	$L_e^k$	Modelo	$\epsilon$
1	0	$\frac{0,3921}{2,6652s+1}e^{-1,17s}$	-
2	1,18	$\frac{0,7585}{2,4570s+1}e^{-1,97s}$	0,0292
3	2,00	$\frac{0,8948}{2,2046s+1}e^{-2,47s}$	0,0156
4	2,53	$\frac{0,9669}{1,9732s+1}e^{-2,89s}$	0,0139
5	2,97	$\frac{1,0284}{1,6909s+1}e^{-3,31s}$	0,0152

Fonte: Elaborada pelo autor



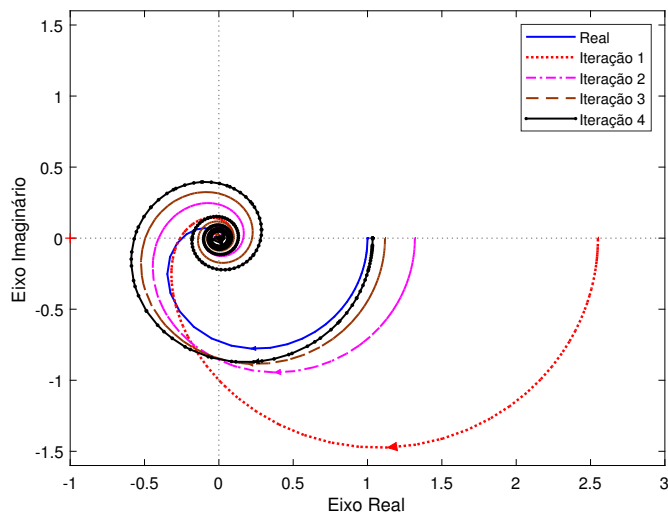
Na Figura 5.7, são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos modelos identificados em conjunto com a resposta do sistema real. Na Figura 5.8, é apresentado o diagrama de Nyquist para o sistema real e os modelos estimados.

Figura 5.7: Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.8: Diagrama de Nyquist - Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste exemplo, o erro médio quadrático entre o modelo final identificado, iteração 4, e o processo real é 0,0039.

Agora, o ajuste de fase é aplicado para o sistema sob estudo. A frequência de oscilação obtida a partir do experimento do relé é  $\omega_H = 0,924$  rad/s e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica  $\omega_L = \omega_H/2 = 0,4620$  rad/s. Então, são aplicados o degrau com amplitude  $d_0 = 0,8$  e a onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 0,4$ .

Usando a técnica de identificação apresentada na Proposição 9, o modelo FOPTD estimado usando a parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) é dado por:

$$G_H(s) = \frac{0,9899}{3,576s + 1} e^{-1,87s}. \quad (5.43)$$

O modelo FOPTD inicial, estimado usando a informação de baixa frequência do sinal de excitação ( $\omega_L$ ), é dado por:

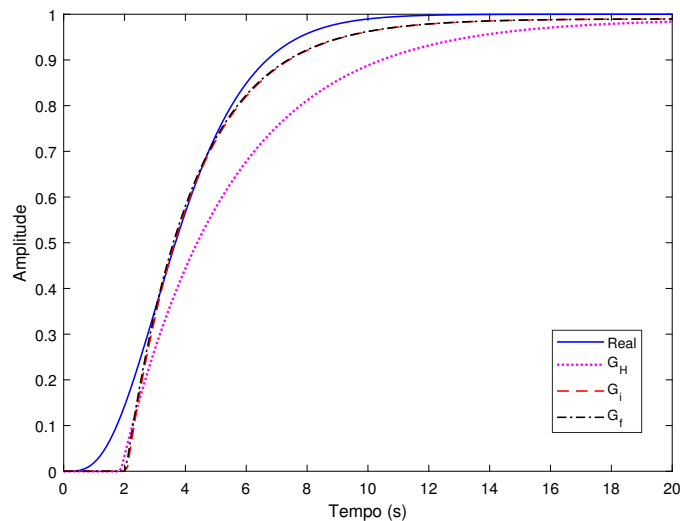
$$G_i(s) = \frac{0,9899}{2,223s + 1} e^{-2,08s}. \quad (5.44)$$

O modelo final é obtido aplicando o ajuste de fase proposto. Assim,  $\Delta L = -0,0408$  e o modelo é:

$$G_f(s) = \frac{0,9899}{2,223s + 1} e^{-2,04s}. \quad (5.45)$$

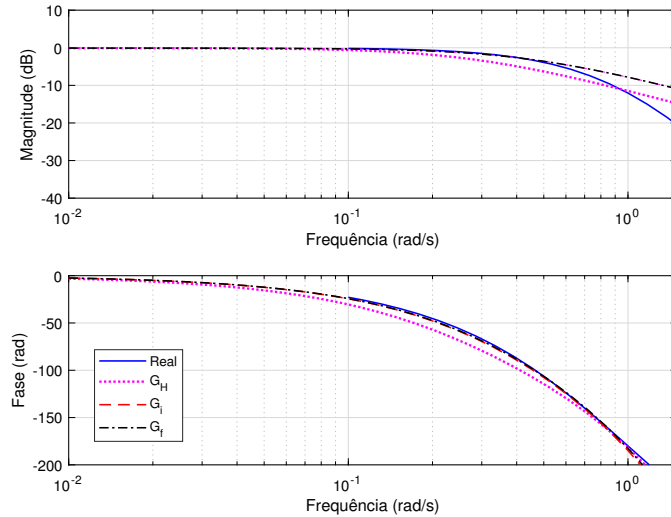
Na Figura 5.9, são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos modelos identificados e do sistema real. Na Figura 5.10, é apresentado o diagrama de Bode para o sistema real e modelos identificados.

Figura 5.9: Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.10: Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Os modelos estimados são avaliados usando o erro médio quadrático, dado por (5.26). Para o modelo  $G_H(s)$ , o valor do erro é  $\epsilon = 89,6884 \times 10^{-4}$ . Enquanto, para o modelo  $G_i(s)$ , o erro é  $\epsilon = 10,9945 \times 10^{-4}$ . O modelo final  $G_f(s)$ , obtido usando o ajuste proposto, apresenta o erro médio quadrático igual a  $\epsilon = 9,7579 \times 10^{-4}$ .

### 5.4.3 Exemplo 3

Considere um sistema de primeira ordem com atraso dado por:

$$G(s) = \frac{1}{2,5s + 1} e^{-1s} = \frac{0,4}{s + 0,4} e^{-1s}. \quad (5.46)$$

Neste exemplo foi adicionado ruído na saída do processo. O ruído possui média zero e variância de 0,01. A histerese foi ajustada em 0,1 e a constante do filtro  $F_1(s)$  é  $\tau_f = 0,2$ .

Seguindo o procedimento descrito na Seção 5.2.2, é aplicado o sinal de excitação obtido a partir da estrutura do relé proposta com e sem integrador. O ponto de alta frequência é  $\hat{\omega}_1 = 1,2083$  rad/s. Para o ponto de baixa frequência, tem-se  $\hat{\omega}_2 = 0,4080$  rad/s. Os modelos estimados são apresentados na Tabela 5.3.

De acordo com a Tabela 5.3, a parada do procedimento iterativo de estimação do atraso ocorre na terceira iteração. Para avaliar os modelos identificados no domínio do tempo foi aplicado um degrau unitário conforme apresentado na Figura 5.11. O erro médio quadrático do modelo final estimado, iteração 2, em relação ao processo real é 0,00098. Na Figura 5.12, é apresentado o diagrama de Nyquist para o sistema real e

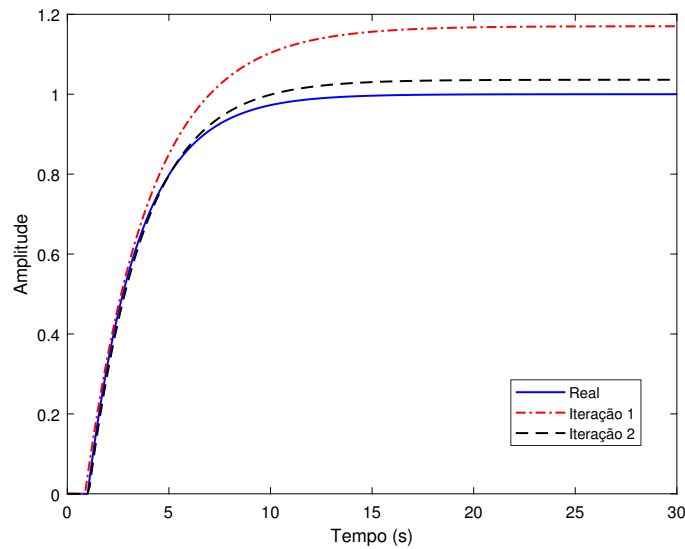
Tabela 5.3: Modelos estimados - Exemplo 3.

Iteração	$L_e^k$	Modelo	$\epsilon$
1	0	$\frac{0,8543}{2,7233s+1}e^{-0,872s}$	—
2	0,872	$\frac{0,9652}{2,5994s+1}e^{-1,05s}$	0,0038
3	1,05	$\frac{0,9661}{2,6042s+1}e^{-1,23s}$	0,0078

Fonte: Elaborada pelo autor

modelos estimados.

Figura 5.11: Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

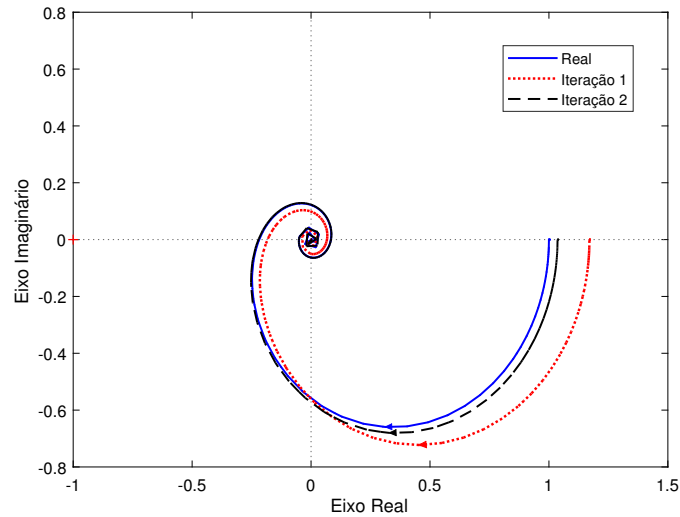
### 5.4.4 Exemplo 4

Considere um sistema de segunda ordem com atraso dado pela equação (5.47). O objetivo é avaliar como a técnica de identificação captura as dinâmicas lenta e rápida do sistema. Neste caso, a constante do filtro  $F_1(s)$  é  $\tau_f = 0,1$ .

$$G(s) = \frac{1}{(20s + 1)(2s + 1)}e^{-1s}. \tag{5.47}$$

O ponto de alta frequência obtido a partir da estrutura do relé proposta é  $\hat{\omega}_1 = 0,6981$  rad/s. Para o ponto de baixa frequência, tem-se  $\hat{\omega}_2 = 0,1348$  rad/s. Os modelos estimados são apresentados na Tabela 5.4.

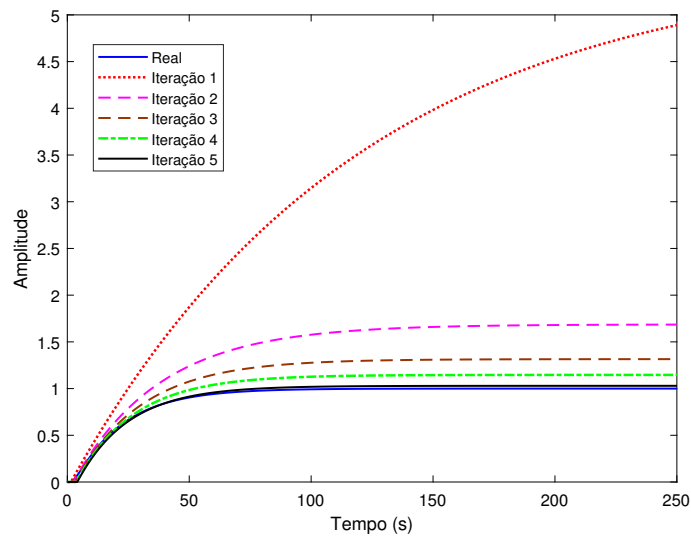
Figura 5.12: Diagrama de Nyquist - Exemplo 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a Tabela 5.4, a parada do procedimento iterativo de estimação do atraso ocorre na sexta iteração. Para avaliar os modelos identificados no domínio do tempo foi aplicado um degrau unitário conforme apresentado na Figura 5.13. O erro do modelo final identificado, iteração 5, em relação ao processo real é 0,00077. Na Figura 5.14, é apresentado o diagrama de Nyquist para o sistema real e estimado.

Figura 5.13: Curvas da resposta ao degrau unitário - Exemplo 4.



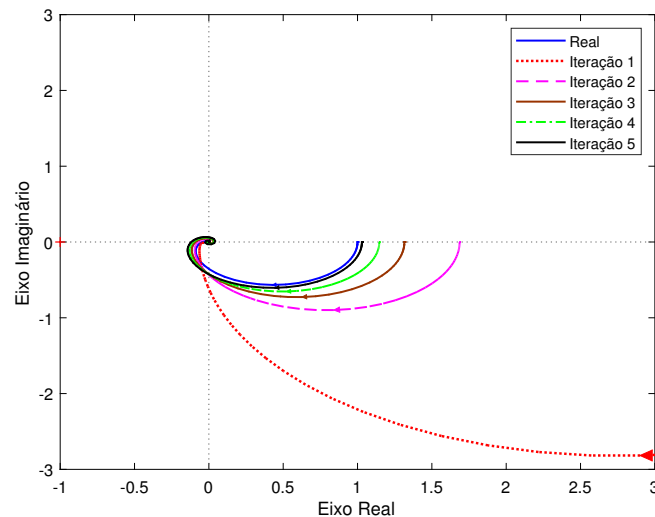
Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 5.4: Modelos estimados - Exemplo 4.

Iteração	$L_e^k$	Modelo	$\epsilon$
1	0	$\frac{0,1793}{21,2675s+1}e^{-1,47s}$	-
2	1,47	$\frac{0,5928}{21,1775s+1}e^{-2,48s}$	$11,736 \times 10^{-4}$
3	2,48	$\frac{0,7603}{20,9380s+1}e^{-3,11s}$	$4,523 \times 10^{-4}$
4	3,11	$\frac{0,8722}{20,6740s+1}e^{-3,60s}$	$3,050 \times 10^{-4}$
5	3,60	$\frac{0,9713}{20,3749s+1}e^{-4,08s}$	$2,957 \times 10^{-4}$
6	4,08	$\frac{1,0689}{20,0321s+1}e^{-4,58s}$	$3,416 \times 10^{-4}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.14: Diagrama de Nyquist - Exemplo 4.



Fonte: Elaborada pelo autor

Novamente, o ajuste de fase é aplicado para o sistema sob estudo. A frequência de oscilação obtida a partir do experimento do relé é  $\omega_H = 0,6981$  rad/s e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica  $\omega_L = \omega_H/4 = 0,1745$  rad/s. Então, são aplicados o degrau com amplitude  $d_0 = 0,6$  e a onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 0,3$ .

A partir da técnica de identificação apresentada na Proposição 9, o modelo FOPTD estimado usando a parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) é dado por:

$$G_H(s) = \frac{0,9865}{35,76s + 1}e^{-2,47s}. \quad (5.48)$$

O modelo FOPTD inicial, estimado usando a informação de baixa frequência do sinal

de excitação ( $\omega_L$ ), é dado por:

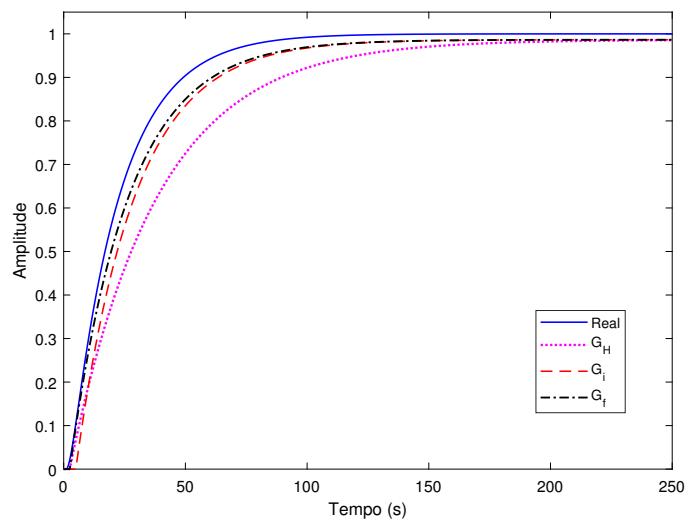
$$G_i(s) = \frac{0,9865}{24,04s + 1} e^{-4,98s}. \quad (5.49)$$

O modelo final é obtido aplicando o ajuste de fase proposto. Assim,  $\Delta L = -2,4841$  e o modelo é:

$$G_f(s) = \frac{0,9865}{24,04s + 1} e^{-2,5s}. \quad (5.50)$$

Na Figura 5.15, são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos modelos identificados e do sistema real. Na Figura 5.16, é apresentado o diagrama de Bode para o sistema real e modelos identificados.

Figura 5.15: Curvas da resposta ao degrau unitário: Ajuste de fase - Exemplo 4.



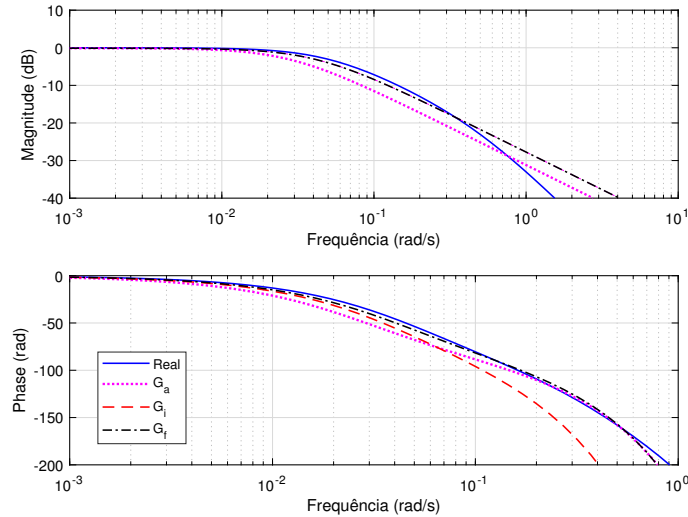
Fonte: Elaborada pelo autor

Os modelos estimados são avaliados usando o erro médio quadrático, dado por (5.26). Para o modelo  $G_H(s)$ , o valor do erro é  $\epsilon = 9,5 \times 10^{-3}$ . Enquanto, para o modelo  $G_i(s)$ , o erro é  $\epsilon = 2,3 \times 10^{-3}$ . O modelo final  $G_f(s)$  apresenta o erro médio quadrático igual a  $\epsilon = 9,9225 \times 10^{-4}$ .

## 5.5 Identificação de um Processo Termoelétrico

Nesta seção, é realizada a identificação da Malha Aberta Efetiva (EOP) de um processo termoelétrico TITO com efeito Peltier. Os detalhes desse processo encontram-se no Apêndice B. O sinal de excitação apresentado na seção 3.4 é aplicado na entrada do primeiro

Figura 5.16: Diagrama de Bode: Ajuste de fase - Exemplo 4.



Fonte: Elaborada pelo autor

EOP, ou seja, na entrada da malha 1 enquanto a malha 2 encontra-se realimentada com controlador. O seguinte controlador PID foi utilizado:

$$g_{c2} = 1,8 + \frac{0,0151}{s} + 11,89s. \quad (5.51)$$

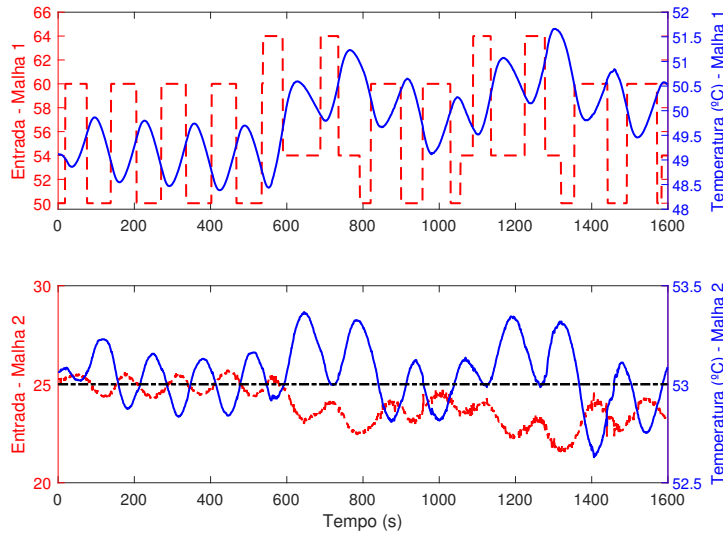
O sinal de entrada do processo (MV) consiste em um valor do PWM. Enquanto, o sinal de saída do processo (PV) é a temperatura. Para a estrutura do relé proposta, a constante  $\tau_f$  é igual ao tempo de amostragem (1 s). A amplitude do relé  $R_2$  foi ajustada para  $\mu = \pm 1$ . Enquanto o relé  $R_1$  foi ajustado para aplicar oscilações em torno da MV de referência ( $MV_{REF} = 55$ ) com uma amplitude  $\mu = \pm 5$ . Para atingir o estado estacionário do processo, o PWM da malha 1 foi ajustado em 55%. O *setpoint* da malha 2 foi definido em  $53,0^\circ C$ . O valor final da temperatura no estado estacionário da malha 1 foi de aproximadamente  $49,0^\circ C$ .

Neste caso, são aplicadas as mesmas condições de operação, descritas na seção 3.5.4. Isto é, inicialmente, o experimento do relé é aplicado por cerca de 4 períodos. Então, a frequência de oscilação  $\omega_H = 0,0476$  rad/s é obtida e a frequência de oscilação da onda quadrada periódica é definida como  $\omega_L = \omega_H/4 = 0,0119$  rad/s. O degrau com amplitude  $d_0 = 2$  e a onda quadrada periódica com amplitude  $d_s = \pm 2$  são aplicados no instante de tempo  $t = 560$  s. Na Figura 5.17 são apresentados os sinais de excitação de entrada e saída do processo para a primeira malha equivalente do processo.

Usando os dados de entrada-saída obtidos a partir da estrutura do relé proposta e a



Figura 5.17: Curvas dos sinais de entrada (linha tracejada), saída (linha sólida) e *setpoint* (linha traço-ponto) obtidas ao aplicar o sinal de excitação proposto - Peltier.



Fonte: Elaborada pelo autor

técnica de identificação apresentada na seção 5.3, o modelo FOPTD estimado usando a parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) do sinal de excitação é dado por:

$$G_H(s) = \frac{0,8877}{171,6s + 1} e^{-25,2s}. \quad (5.52)$$

O modelo FOPTD inicial, estimado usando a informação de baixa frequência do sinal de excitação ( $\omega_L$ ), é dado por:

$$G_i(s) = \frac{0,8877}{108,1s + 1} e^{-47,9s}. \quad (5.53)$$

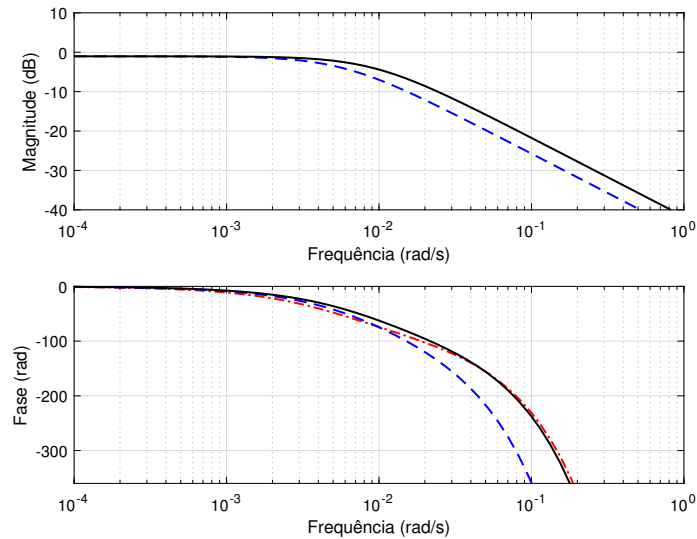
O modelo FOPTD final é obtido aplicando o ajuste de fase proposto. Assim,  $\Delta L = -21,1927$  e o modelo é:

$$G_f(s) = \frac{0,8877}{108,1s + 1} e^{-26,7s}. \quad (5.54)$$

Na Figura 5.18 são apresentados os diagramas de Bode para os modelos estimados. De acordo com a figura, pode-se observar que, para alta frequência, a fase do modelo final encontra-se entre as fases dos modelos  $G_H(s)$  e  $G_i(s)$ .

Para validar os modelos FOPTD obtidos, foram aplicados um conjunto de degraus na entrada do processo. Na Figura 5.19 são apresentadas as respostas aos degraus usados para validação dos modelos. Observe que o processo termoeletrico possui considerável

Figura 5.18: Diagramas de Bode dos modelos  $G_i(s)$  (linha tracejada),  $G_H(s)$  (linha traço-ponto) e final  $G_f(s)$  (linha sólida).

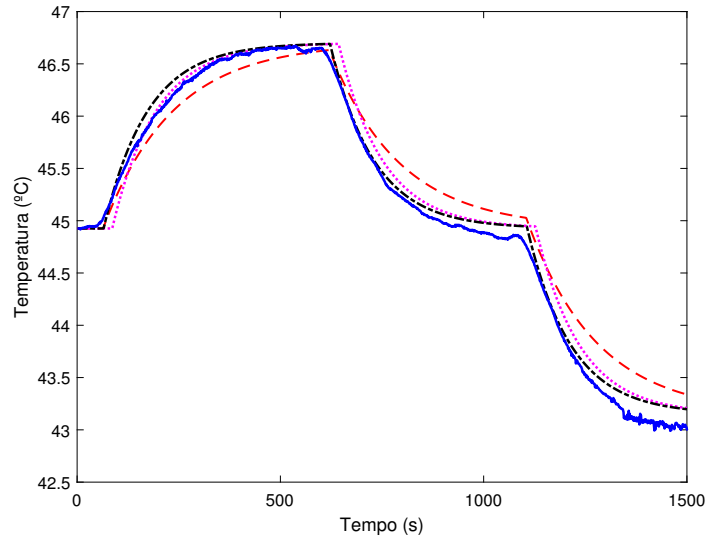


Fonte: Elaborada pelo autor

dinâmica não linear.

Os modelos estimados são avaliados usando o erro médio quadrático, dado por (5.26). Para o modelo obtido usando a parte de alta frequência do sinal de excitação ( $G_H(s)$ ), o valor do erro é  $\epsilon = 0,2213$ . Enquanto, para o modelo obtido usando a parte de baixa frequência do sinal de excitação ( $G_i(s)$ ), o erro é  $\epsilon = 0,1864$ . Finalmente, para o modelo final ( $G_f(s)$ ), obtido usando o ajuste proposto, o erro médio quadrático é  $\epsilon = 0,1656$ .

Figura 5.19: Curvas dos sinais de saída do processo (linha Azul-Sólida), saída do modelo  $G_H(s)$  (linha tracejada), saída do modelo  $G_i(s)$  (linha pontilhada), saída do modelo final  $G_f(s)$  (linha traço-ponto).



Fonte: Elaborada pelo autor

## 5.6 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma técnica de identificação de modelos FOPTD que utiliza a estrutura do relé proposta, em malha aberta, com e sem elemento integrador realimentado na malha. As informações dos pontos de frequência são utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos FOPTD.

Uma vantagem dessa técnica de identificação é o fato de excitar o sistema em uma faixa de frequência de interesse para fins de controle. Assim, são obtidas as características fundamentais do processo. O ponto fraco da técnica de identificação consiste na baixa exatidão da estimativa do atraso. Para contornar este problema foi proposta a utilização de um procedimento iterativo, onde a estimativa prévia do atraso é introduzida nos dados de entrada e uma nova estimação do modelo é realizada.

Uma metodologia para ajuste de fase dos modelos FOPTD foi proposta. Este ajuste é realizado usando como base dois modelos identificados, obtidos em diferentes faixas de frequências. Neste caso, a estrutura do relé proposta é aplicada em conjunto com um sinal de excitação composto por um degrau e uma onda quadrada periódica com frequência menor que a frequência de oscilação obtida com experimento do relé.

A partir dos resultados de simulação, verifica-se que a utilização das informações frequenciais como restrições de igualdade e o procedimento iterativo de estimação do

atraso aumentam significativamente a qualidade do modelo estimado. Além disso, os resultados experimentais demonstram que a partir do ajuste de fase proposto foi possível reduzir o erro dos modelos identificados.

# Capítulo 6

## Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

### 6.1 Conclusões

Nesta Tese, foi apresentada uma nova estrutura com realimentação por relé robusta a perturbações. Através dessa estrutura proposta é garantida uma oscilação estável e simétrica sob perturbações estáticas e/ou *drift*, mesmo para grandes valores de perturbação estática.

Como passo inicial no desenvolvimento do trabalho, as principais estruturas com realimentação por relé foram revisadas no Capítulo 2. Então, as características desta estrutura proposta foram apresentadas. Um ponto favorável desta estrutura é não utilizar procedimentos iterativos. Em muitos casos, é necessário definir apenas a constante do filtro passa-alta. Por meio de resultados simulados e experimentais, observa-se que uma vantagem da estrutura é a robustez a perturbações e a simplicidade dos seus componentes. Uma desvantagem é a amplificação do ruído após o filtro passa-alta. Também foi realizada a comparação com outras estratégias presentes na literatura. Assim, foi possível observar que, na maioria dos casos, a estrutura com realimentação por relé proposta é menos sensível a perturbações.

No Capítulo 3, a estrutura proposta foi aplicada para sistemas TITO. Em todos os casos, foi verificado que o efeito do acoplamento entre as malhas não interferiu no desempenho da estrutura. Além disso, uma vez que uma saída simétrica do relé é garantida, foi proposto um sinal de excitação composto por um degrau e uma onda quadrada periódica. A partir desse sinal de excitação foi possível estimar vários pontos de frequência do processo sem perturbar a operação do relé. Os resultados simulados e experimentais

demonstraram que a estrutura do relé proposta é insensível às perturbações na entrada do processo e iterações entre as malhas.

Com relação à análise da estrutura do relé proposta, no Capítulo 4 foi realizada a análise por função descritiva. A partir desta análise, para valores pequenos da constante do filtro passa-alta, foi observado que as características da estrutura proposta são semelhantes as do relé padrão. Em seguida, foram realizadas análises utilizando o mapa de Poincaré. Inicialmente, a fim de simplificar a análise, uma estrutura do relé equivalente foi proposta. Neste caso, em regime estacionário, foi obtida a mesma solução periódica da estrutura original do relé. A partir desta estrutura equivalente e para sistemas com e sem atraso, foram obtidas condições necessárias e suficientes para a existência de ciclos limite da estrutura em estudo. Além disso, as condições suficientes para estabilidade local para tais ciclos limite são obtidas a partir dos teoremas apresentados. A partir da estrutura do relé original, também foi realizada a análise de existência e estabilidade de sistemas sem atraso.

No Capítulo 5, foram desenvolvidos métodos para identificação de modelos FOPTD. Inicialmente, foi utilizada a estrutura do relé proposta com e sem integrador. Assim, as informações dos pontos de frequência foram utilizadas como restrições de igualdade para obtenção dos parâmetros dos modelos. Um procedimento iterativo para estimação do atraso e uma aproximação por série de Taylor de segunda ordem foram aplicados. Além disso, a partir de uma metodologia proposta para ajuste de fase dos modelos FOPTD, foi possível reduzir o erro do modelo estimado em relação ao processo real.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Ao final do desenvolvimento do presente trabalho de Tese, podem ser destacadas algumas sugestões para o desenvolvimento de outros trabalhos:

- Aplicar a estrutura com realimentação por relé, proposta no Capítulo 2, para sistemas não lineares.
- Estender a análise de existência e estabilidade do ciclo limite obtido com a estrutura proposta original, apresentada no Capítulo 4, para sistemas com atraso.
- Aplicar o problema de restrições de igualdade no domínio da frequência, proposta no Capítulo 5, para sistemas SOPTD.
- Estudar alternativas para a metodologia iterativa de estimação do atraso apresentada no Capítulo 5.

- Estender a técnica de ajuste de fase de modelos, proposta no Capítulo 5, para processos do tipo SOPTD.

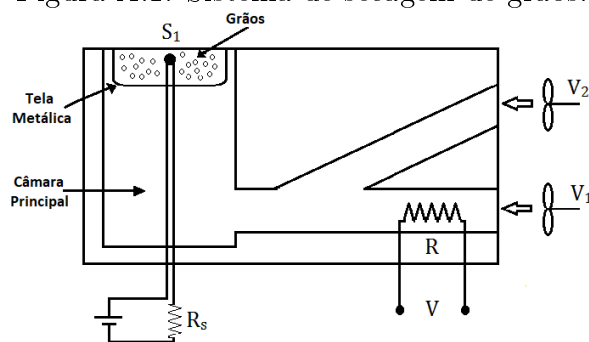
# Apêndice A

## Sistema de Secagem de Grãos

Um secador de grãos é usado para aquecer e controlar a umidade e para tratar sementes armazenadas. Sua operação é baseada em um fluxo de ar quente que diminui a umidade das sementes em função da temperatura e da velocidade do fluxo de ar (ARAÚJO et al., 2005).

O sistema de secagem de grãos é representado na Figura A.1. Os grãos são depositados em uma tela de metal. O ar, à temperatura ambiente, é forçado para a câmara principal pelo ventilador  $V_1$ , onde é aquecido pela resistência elétrica  $R$ . O ventilador  $V_2$  força a entrada de ar à temperatura ambiente na câmara principal. Para estudos de controle, o ventilador  $V_2$  é usado como entrada de perturbação do sistema.

Figura A.1: Sistema de secagem de grãos.



Fonte: Elaborada pelo autor

A medição de temperatura é realizada pelo sensor  $S_1$ . O tempo de resposta do sensor é pequeno quando comparado ao tempo de resposta do sistema. Como resultado, sua influência pode ser negligenciada.

A saída do sistema,  $PV$  (Variável do processo), é a temperatura na tela de metal medida pelo sensor  $LM35$  ( $S_1$ ). Os dados de temperatura são obtidos por um módulo



analógico que disponibiliza os dados para o CLP *eZAP901* da *HI Tecnologia*. O sinal de controle (*MV* - Variável Manipulada) é obtido a partir do atuador *PWM* no sistema de secagem de grãos. A interface computacional utilizada para realizar os experimentos foi o software *MATLAB*. Esta interface se comunica com o CLP através do padrão OPC (*OLE for Process Control*).

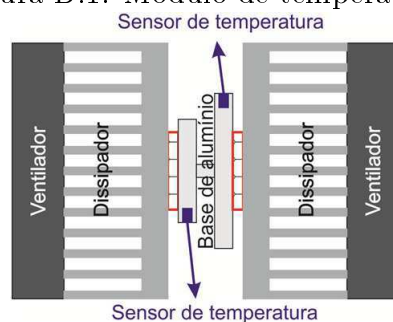
## Apêndice B

### Sistema Termoelétrico: Módulo Peltier

O efeito Peltier produz um gradiente de temperatura em duas junções de dois condutores ou semicondutores de materiais diferentes quando submetidos a uma tensão elétrica. As pastilhas termoelétricas, funcionam pelo princípio do efeito Peltier. Normalmente estes módulos são constituídos de um material semicondutor, o telureto de bismuto, sendo fortemente dopado para a criação de material tipo N e material tipo P. Ao ligar uma fonte de tensão na célula Peltier se estabelece um fluxo de cargas do material semicondutor P para o semicondutor N. Este fluxo origina uma diferença de temperatura entre as superfícies da junção. Assim, uma superfície irá aquecer, enquanto a outra resfria-se.

No sistema utilizado, cada pastilha Peltier possui uma face acoplada a um dissipador de calor e um ventilador, com o objetivo de melhorar a troca de calor com o ambiente. A outra face é acoplada termicamente a uma peça cilíndrica de alumínio sólido, composta por 2 discos de diâmetros diferentes, conforme ilustrado na Figura B.1. Nesta peça de alumínio, estão fixados dois sensores de temperatura.

Figura B.1: Módulo de temperatura.



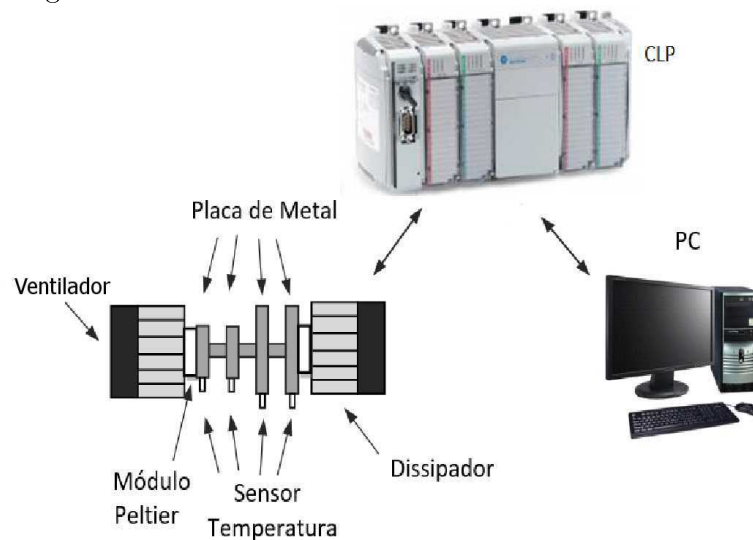
Fonte: (BARROS; ACIOLI JÚNIOR; SANTOS, 2008)

Os módulos de efeito Peltier tem como principais componentes as pastilhas termoelétricas, que são pequenas unidades que operam como bombas de calor. Os dissipadores

térmicos e os ventiladores são utilizados para transferir o calor a partir das faces opostas de cada módulo Peltier (BARROS; ACIOLI JÚNIOR; SANTOS, 2008). O processo funciona como um sistema acoplado com a temperatura variando entre  $10^{\circ}\text{C}$  e  $70^{\circ}\text{C}$ , quando operando a uma temperatura ambiente em torno de  $24^{\circ}\text{C}$ . A energia é aplicada utilizando atuadores PWM enquanto as temperaturas são medidas usando sensores LM35.

O sistema é composto por dois módulos Peltier, dois sensores de temperatura LM35, uma chapa de metal, dois dissipadores térmicos, dois ventiladores, um CLP - RockWell CompactLogix L32E e um computador com SCADA, Figura B.2.

Figura B.2: Sistema Peltier em escala de laboratório.



Fonte: Elaborada pelo autor

Este sistema permite o uso dos módulos Peltier para aquecimento ou resfriamento. Isso é possível devido à utilização de dois atuadores PWM bidirecionais que fornecem aos módulos Peltier corrente elétrica em ambas as direções. O módulo Peltier não utilizado pode ser utilizado como uma fonte de perturbação.

# Referências Bibliográficas

ACIOLI JÚNIOR, G.; BERGER, M. A.; BARROS, P. R. Closed loop continuous-time foptd identification using time-frequency data from relay experiments. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 97–102, 2006.

ACIOLI JÚNIOR, G.; SANTOS, J. B. dos; BARROS, P. R. On simple identification techniques for first-order plus time-delay systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 42, n. 10, p. 605–610, 2009.

ARAÚJO, T. V. G. P. et al. Kit de desenvolvimento para microcontroladores aduc aplicado ao ensino de controle e automação. *XXXIII COBENGE-Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Campina Grande, ABENGE*, 2005.

ARRUDA, G. H. M.; BARROS, P. R. Relay-based closed loop transfer function frequency points estimation. *Automatica*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 309–315, 2003.

ÅSTRÖM, K. J. Oscillations in systems with relay feedback. Springer, p. 1–25, 1995.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, Elsevier, v. 20, n. 5, p. 645–651, 1984.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID controllers: theory, design, and tuning*. Research Triangle Park, NC: ISA, 1995.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *Advanced PID control*. Research Triangle Park, NC: ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006.

ATHERTON, D.; TOWILL, D. Nonlinear control engineering-describing function analysis and design. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 7, n. 9, p. 678–678, 1977.

BARROS, P. R.; ACIOLI JÚNIOR, G.; SANTOS, J. B. dos. Two-input two-output laboratory-scale temperature system based on peltier modules. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 9767–9772, 2008.

BAZANELLA, A. S.; PARRAGA, A. Limit cycles in sampled-data relay feedback systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, v. 27, n. 3, p. 237–249, 2016.

BERNER, J. et al. Autotuner identification of TITO systems using a single relay feedback experiment. *20th IFAC World Congress, 2017*, IFAC, 2017.

- BOIKO, I. *Discontinuous control systems: frequency-domain analysis and design*. Spring Street - New York: Springer Science & Business Media, 2008.
- BOIKO, I. Oscillations and transfer properties of relay servo systems with integrating plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 53, n. 11, p. 2686–2689, 2008.
- CAMPESTRINI, L.; BARROS, P. R.; BAZANELLA, A. S. Auto-tuning of pid controllers for MIMO processes by relay feedback. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 451–456, 2006.
- CHEN, S.-L.; TAN, K. K.; HUANG, S. Limit cycles induced in type-1 linear systems with pid-type of relay feedback. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 40, n. 12, p. 1229–1239, 2009.
- CHEN, X.; FANG, F.; LUO, X. A friction identification approach based on dual-relay feedback configuration with application to an inertially stabilized platform. *Mechatronics*, Elsevier, v. 24, n. 8, p. 1120–1131, 2014.
- COOK, P. Simple feedback systems with chaotic behaviour. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 223–227, 1985.
- DRANGA, O.; BUTI, B.; NAGY, I. Stability analysis of a feedback-controlled resonant dc-dc converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 50, n. 1, p. 141–152, 2003.
- GELB, A.; VELDE, W. V. *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. New York: McGraw-Hill, 1968. (McGraw-Hill electronic sciences series).
- GHORAI, P.; PANDEY, S.; MAJHI, S. A new relay feedback scheme for identification of non-minimum phase processes with time delay. *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, IEEE, p. 2073–2078, 2016.
- GONÇALVES, J. M.; MEGRETSKI, A.; DAHLEH, M. A. Global stability of relay feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 46, n. 4, p. 550–562, 2001.
- GOODWIN, G. C.; SERON, M. M.; TOWNSEND, C. A modified relay autotuner for systems having large broadband disturbances. *Automatica*, Elsevier, v. 94, p. 178–185, 2018.
- HANG, C.; ASTROM, K.; WANG, Q. Relay feedback auto-tuning of process controllers - a tutorial review. *Journal of process control*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 143–162, 2002.
- HANG, C. C.; ÅSTRÖM, K. J.; HO, W. K. Relay auto-tuning in the presence of static load disturbance. *Automatica*, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 563–564, 1993.
- HOFREITER, M. Biased-relay feedback identification for time delay systems. *IFAC-Papers OnLine*, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 14620–14625, 2017.
- HUANG, H.-P. et al. A direct method for multi-loop pi/pid controller design. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 13, n. 8, p. 769–786, 2003.

- HUANG, H.-P.; JENG, J.-C.; LUO, K.-Y. Auto-tune system using single-run relay feedback test and model-based controller design. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 15, n. 6, p. 713–727, 2005.
- JOHANSSON, K. H.; RANTZER, A.; ÅSTRÖM, K. J. Fast switches in relay feedback systems. *Automatica*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 539–552, 1999.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- KISHORE, D.; KISHORE, K. A.; PANDA, R. An improved identification of low-order processes using relay feedback approach. *Trends in Industrial Measurement and Automation (TIMA), 2017*, IEEE, p. 1–5, 2017.
- KISHORE, D.; KISHORE, K. A.; PANDA, R. Identification and control of process using the modified asymmetrical relay feedback method. *Procedia computer science*, Elsevier, v. 133, p. 1029–1034, 2018.
- LEE, J. et al. Relay feedback identification for processes under drift and noisy environments. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 57, n. 7, p. 1809–1816, 2011.
- LEE, J.; SUNG, S. W.; EDGAR, T. F. Integrals of relay feedback responses for extracting process information. *AIChE journal*, Wiley Online Library, v. 53, n. 9, p. 2329–2338, 2007.
- LEONARD, F.; OUBRAHIM, R. Two steps relay auto-tuning in the presence of static load disturbance. *Control'98. UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455)*, IET, p. 1339–1343, 1998.
- LI, W.; ESKINAT, E.; LUYBEN, W. L. An improved autotune identification method. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 30, n. 7, p. 1530–1541, 1991.
- LIN, C.; WANG, Q.-G. On uniqueness of solutions to relay feedback systems. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 177–180, 2002.
- LIN, C.; WANG, Q.-G.; LEE, T. H. Existence analysis for limit cycles of relay feedback systems. *Asian Journal of Control*, Wiley Online Library, v. 6, n. 3, p. 428–431, 2004.
- LIN, C. et al. Stability of limit cycles for time-delay relay feedback systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 34, n. 6, p. 395–400, 2001.
- LIN, C. et al. Stability criteria and bounds for limit cycles of relay feedback systems. *Dynamical Systems*, Taylor & Francis, v. 19, n. 2, p. 161–170, 2004.
- LIU, T.; GAO, F. Alternative identification algorithms for obtaining a first-order stable/unstable process model from a single relay feedback test. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 47, n. 4, p. 1140–1149, 2008.
- LIU, T.; WANG, Q.-G.; HUANG, H.-P. A tutorial review on process identification from step or relay feedback test. *Journal of Process control*, Elsevier, v. 23, n. 10, p. 1597–1623, 2013.

- LOH, A.; CAI, X.; TAN, W. W. Auto-tuning of phase lead/lag compensators. *Automatica*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 423–429, 2004.
- LOH, A. P. et al. Autotuning of multiloop proportional-integral controllers using relay feedback. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 32, n. 6, p. 1102–1107, 1993.
- LUYBEN, W. L. Derivation of transfer functions for highly nonlinear distillation columns. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, ACS Publications, v. 26, n. 12, p. 2490–2495, 1987.
- LUYBEN, W. L. Getting more information from relay-feedback tests. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 40, n. 20, p. 4391–4402, 2001.
- MILLER, R.; MICHEL, A.; KRENZ, G. On the stability of limit cycles in nonlinear feedback systems: Analysis using describing functions. *IEEE transactions on circuits and systems*, IEEE, v. 30, n. 9, p. 684–696, 1983.
- NAKAMURA, Y.; SUZUKI, T.; KOINUMA, M. Nonlinear behavior and control of a nonholonomic free-joint manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, IEEE, v. 13, n. 6, p. 853–862, 1997.
- PADHY, P.; MAJHI, S. Identification of TITO processes. *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, IEEE, p. 664–669, 2006.
- PANDEY, S.; MAJHI, S. Estimation of process dynamics using biased relay feedback approach. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 913–916, 2014.
- PARK, B. E. et al. Improved relay feedback method under noisy and disturbance environments. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, The Society of Chemical Engineers, Japan, v. 52, n. 5, p. 430–438, 2019.
- PARK, J. H.; SUNG, S. W.; LEE, I.-B. Improved relay auto-tuning with static load disturbance. *Automatica*, Elsevier, v. 33, n. 4, p. 711–715, 1997.
- PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- SANTOS, J. B. M.; BARROS, P. R. Time domain identification for first-order plus time-delay systems using frequency domain information. *IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, IEEE, p. 775–780, 2011.
- SCALI, C.; MARCHETTI, G.; SEMINO, D. Relay with additional delay for identification and autotuning of completely unknown processes. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 38, n. 5, p. 1987–1997, 1999.
- SHEN, S.-H.; WU, J.-S.; YU, C.-C. Use of biased-relay feedback for system identification. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 42, n. 4, p. 1174–1180, 1996.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. Application of a robust to disturbance relay feedback for identification of a grain dryer. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, SBA, p. 1577–1582, 2017.

- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. A relay feedback structure for processes under static disturbances or drift. *Control Technology and Applications (CCTA), 2017 IEEE Conference on*, IEEE, p. 1171–1176, 2017.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. Application of a robust relay feedback structure for TITO processes. *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, IEEE, p. 1540–1545, 2018.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. Estrutura com realimentação por relé para processos TITO sujeitos a perturbações. *XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, SBA, 2018.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. Stability analysis of a relay feedback structure for processes under disturbances using poincaré map. *XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, SBA, 2018.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R. A robust relay feedback structure for processes under disturbances: Analysis and applications. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, p. 1–14, 2019.
- SILVA, M. T. da; BARROS, P. R.; ACIOLI JÚNIOR, G. Identificação de modelos FOPTD utilizando restrições de igualdade no domínio da frequência. *XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, SBA, p. 2968–2973, 2016.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice hall Englewood Cliffs, 1991.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System identification*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1988.
- SRINIVASAN, K.; CHIDAMBARAM, M. Modified relay feedback method for improved system identification. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 727–732, 2003.
- SUNG, S. W.; LEE, I.-B. Enhanced relay feedback method. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 36, n. 12, p. 5526–5530, 1997.
- SUNG, S. W.; LEE, J. Relay feedback method under large static disturbances. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 353–356, 2006.
- SUNG, S. W.; LEE, J. Relay feedback method under nonlinearity and static disturbance conditions. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 45, n. 12, p. 4028–4031, 2006.
- SUNG, S. W. et al. Two-channel relay feedback method under static disturbances. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 45, n. 12, p. 4071–4074, 2006.
- TSYPKIN, I. Z. *Relay control systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984.



- VARIGONDA, S.; GEORGIU, T. Global stability of periodic orbits in relay feedback systems. v. 4, p. 3843–3847, 2000.
- VARIGONDA, S.; GEORGIU, T. T. Dynamics of relay relaxation oscillators. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 46, n. 1, p. 65–77, 2001.
- VIVEK, S.; CHIDAMBARAM, M. Identification using single symmetrical relay feedback test. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 29, n. 7, p. 1625–1630, 2005.
- WANG, L.; GAWTHROP, P. J.; YOUNG, P. C. Continuous time system identification of nonparametric models with constraints. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 213–218, 2005.
- WANG, P.; GU, D.; ZHANG, W. Modified relay feedback identification based on describing function analysis. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 46, n. 5, p. 1538–1546, 2007.
- WANG, Q.; LEE, T.; CHONG, L. *Relay Feedback: Analysis, Identification and Control*. London: Springer, 2002.
- WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; BI, Q. A technique for frequency response identification from relay feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 122–128, 1999.
- WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; ZOU, B. Low-order modeling from relay feedback. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, ACS Publications, v. 36, n. 2, p. 375–381, 1997.
- WANG, Q.-G.; LEE, T.-H.; ZHANG, Y. Multiloop version of the modified ziegler-nichols method for two input two output processes. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 37, n. 12, p. 4725–4733, 1998.
- WANG, Q.-G. et al. Auto-tuning of multivariable pid controllers from decentralized relay feedback. *Automatica*, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 319–330, 1997.
- WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Springer Science & Business Media, 2003.
- WOOD, R.; BERRY, M. Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 28, n. 9, p. 1707–1717, 1973.
- YE, Z. et al. Relay feedback analysis for a class of servo plants. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 334, n. 1, p. 28–42, 2007.
- YOON, Y. E.; JOHNSON, E. N. Determination of limit cycle oscillation frequency in linear systems with relay feedback. *2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, p. 0607, 2018.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, v. 64, n. 11, 1942.