



Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# Atrasos variantes no tempo realmente degradam o desempenho de um sistema de controle em rede?

Alfranque Amaral da Silva

Tese de Doutorado submetida à Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande - Campus de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da informação

Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.  
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil  
©Alfranque Amaral da Silva, 31 de Agosto de 2018

**ATRASOS VARIANTES NO TEMPO REALMENTE DEGRADAM O  
DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE CONTROLE EM REDE?**

**ALFRANQUE AMARAL DA SILVA**

**TESE APROVADA EM 31/08/2018**



**ANTONIO MARCUS NOGUEIRA LIMA, Dr., UFCG**  
Orientador(a)



**UBIRAJARA FRANCO MORENO, Dr., UFSC**  
Examinador(a)



**CARLOS EDUARDO TRABUCO DOREA, Dr., UFRN**  
Examinador(a)



**LUIS GONZAGA SALES VASCONCELOS, Dr., UFCG**  
Examinador(a)



**ALEXANDRE CUNHA OLIVEIRA, D.Sc., UFCG**  
Examinador(a)

**CAMPINA GRANDE - PB**

S586a Silva, Alfranke Amaral da.  
Atrasos variantes no tempo realmente degradam o desempenho de um sistema de controle em rede? / Alfranke Amaral da Silva. – Campina Grande, 2018.

245 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Antonio Marcus Nogueira de Lima".

Referências.

1. Sistemas de Controle em Rede. 2. Amostragem Variante no Tempo. 3. Atraso Variante no Tempo. 4. Guiado no Tempo e a Evento. I. Lima, Antonio Marcus Nogueira de. II. Título.

CDU 621.337.1(043)

## **Dedicatória**

Dedico esta tese a minha amada esposa Maria da Conceição Marcelino Patrício e a meus filhos Lucas Gabriel Patrício do Amaral (12 anos) e Luiz Miguel Patrício do Amaral (8 anos) dos quais foram subtraídos muitos momentos de minha presença de esposo e de pai. Sei que não foi fácil pra eles, verem a trajetória do início desta tese em fevereiro de 2006, à aprovação em 31/08/2018. Não foi fácil passar pela reprovação em 13/12/2010, muito menos provar que eu estava certo. Mas, provei!, e, finalmente terminei...

# Agradecimentos

- A Deus que é Luz, Paz, Harmonia, a Verdadeira Força que nos faz e nos dá tudo que temos e somos;
- Aos meus pais Alfredo Lobato da Silva e Francisca Corado do Amaral e Silva, grandes timoneiros que sempre me guiaram pelos ditames do amor, carinho, otimismo, perseverança e honestidade, a quem sem dúvida alguma, devo tudo que tenho e sou;
- A minha esposa Maria da Conceição Marcelino Patrício pelo amor, apoio e compreensão dispensados;
- A meus filhos Lucas Gabriel e Luiz Miguel por representarem o amor mais genuíno que alguém pode ter na vida.
- Aos meus tios Sílvia Corado, Joaquim Amaral, Antero Lobato e Francisco Lobato (Tita - em memória), grandes motivadores, colaboradores e incentivadores de uma vida inteira;
- A minha irmã Silvânia Amaral e demais irmãos e sobrinhos pela torcida a favor;
- A minha avó Lavina Corado, fonte inesgotável de paz e serenidade (em memória);
- Aos meus queridos amigos: Rex, Dênis, Edmar, Jaidilson, Félix, Simões, Nelson, Miguel, Rosy, Patrícia, Adail, Lucimar e tantos outros, pelo apoio, incentivo e sobretudo por estarem sempre presentes diante da menor invocação de suas presenças;
- Aos queridos amigos: Bruno, Edgar e Leimar, companheiros de café, com os quais aprendi muito mais que o significado social de um cafezinho;
- Aos companheiros da LIEC 114: Moacy e Thiago; da LARCA 107: Arlindo, Cleumar, Hermano, Cecília, Thiago, Daniel, Thamiles, Eloise; do AP 401: Geraldo, Thadeu, Romerito, Éwerton, Yugo e Arnaldo; Colegas de trabalho: Pablo, Nigini, Cheyenne, Ricardinho, Maria, Joselito, Socorro, pela alegria e a convivência fraterna;
- Aos amigos professores do DME: Vandik, Mendes e Horácio pelas frutíferas conversas;
- Ao amigo Jadsonlee pelos papos sobre NCSs e por realizar comigo os experimentos da tese;
- A meu orientador Antônio Marcus Nogueira Lima pela orientação;
- Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica que sempre me incentivaram e contribuíram para minha formação;
- Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

*“In control system design when, under certain conditions, a sampled-data control system with variable pulse width and variable sampling intervals behaves better than continuous systems. This is particularly true in compensations of systems having plants with transportation lag” [JURY, 1958, p.2].*

*“Sometimes a sample-and-hold element is inserted in the system because, paradoxically, sampling may improve the dynamic performance of the system” [KALMAN; BERTRAM, 1959, p.408].*

*“O impossível existe até que alguém duvide dele e prove o contrário”. Albert Einstein!*

### ***Tente Outra Vez***

***Raul Seixas***

*Veja! Não diga que a canção está perdida  
Tenha fé em Deus, tenha fé na vida  
Tente outra vez!*

*Há uma voz que canta, uma voz que dança  
Uma voz que gira, (Gira!)  
Bailando no ar, Uh! Uh! Uh!*

*Beba! (Beba!)  
Pois a água viva ainda tá na fonte  
(Tente outra vez!)  
Você tem dois pés para cruzar a ponte  
Nada acabou! Não! Não! Não!*

*Queira! (Queira!)  
Basta ser sincero e desejar profundo  
Você será capaz de sacudir o mundo  
Vai! Tente outra vez!  
Humrum!*

*Oh! Oh! Oh! Oh! Tente!  
Levante sua mão sedenta e recomece a andar  
Não pense que a cabeça aguenta se você parar  
Não! Não! Não! Não! Não! Não!*

*Tente! (Tente!)  
E não diga que a vitória está perdida  
Se é de batalhas que se vive a vida  
Han! Tente outra vez!*

## Resumo

Atrasos variantes no tempo realmente degradam o desempenho de um sistema de controle em rede? Do ponto de vista da teoria de dados amostrados, para sistemas lineares invariantes no tempo, não há dúvidas que tais atrasos degradam o desempenho dos sistemas de controle em malha fechada. Por outro lado, não é óbvio que o desempenho de um sistema de controle em malha fechada, linear ou não linear, venha a ser degradado quando o intervalo de amostragem ou os atrasos são variantes no tempo. Taxas de amostragem e atrasos variantes no tempo configuram-se frequentemente em sistemas de controle em rede, no qual coexistem os paradigmas de amostragem guiados no tempo e a eventos. Nesta tese é discutido o projeto da lei de controle realimentada onde tais paradigmas são combinados. O resultado é que nenhuma degradação de desempenho do sistema em malha fechada é verificada. É mostrado também que ao se utilizar a lei de controle proposta, torna-se possível reduzir o *overshoot*, o tempo de subida, bem como, o tempo de estabelecimento da resposta ao degrau unitário do sistema de controle, o que se traduz em melhoria do desempenho do sistema de controle em malha fechada. As razões teóricas para tal conclusão são elucidadas e provadas, consubstanciando as contribuições desta tese, onde neste sentido, para viabilizar estudar e provar a estabilidade dos sistemas de controle em questão foi desenvolvido (como suporte matemático) um novo esquema de amostragem por cruzamento de nível, por meio do qual é possível amostrar um sinal com intervalos de amostragem variantes no tempo. Evidencia-se ainda que com base na utilização de tal esquema é possível estudar e provar a estabilidade dos sistemas de controle em rede de modo simples, exato e sem conservatividade. Além disso, tal esquema de amostragem pode ser empregado para amostrar sistemas SISOs e MIMO, variantes ou invariantes no tempo, guiados no tempo ou a eventos, bem como, sob a combinação de ambos os paradigmas - tempo e eventos. Por fim, são apresentados diversos exemplos de aplicação, simulados e experimentais, a partir dos quais é possível consistir as vantagens mencionadas como contribuições deste trabalho.

## **Abstract**

Time varying delays really degrade the performance of a networked control system? Point of view of sampled data theory for linear time-invariant system is no doubt that time-invariant delays degrade the closed loop performance of linear feedback control systems. On the other hand, it is not obvious that the performance of a linear or nonlinear feedback control system will be degraded when the sampling rate and the time delay are both time-varying. Time-varying sampling rates and time-varying delays appear quite often in a networked control system where time-driven (sensing signals) and event-driven (control actions) paradigms coexist. This thesis discusses the design of feedback control law where these two paradigms are combined and thus, there is no performance degradation of the closed loop system. The document shows that by using the proposed control law we improve the performance like visible reduction of overshoot, rise time and settling time. These facts can be interpreted as improvements of the feedback control system performance. The theoretical reasons of these improvements are elucidated and proved and are contributions of this thesis. At the end, a new level-crossing sampling scheme was developed to make feasible and to prove the stability of the proposed networked control systems in an easy way with accuracy and in a non-conservative way. This new scheme is able to sample a signal with time-varying sampling intervals. Besides, this new sampling scheme can be used with SISO and MIMO systems, time-varying or not, time- or event-driven, or yet under combinations of both time and events. Lastly, several simulated and experimental examples are shown and the results of those are used to elucidate the mentioned advantages as contributions of this thesis.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Exemplo numérico . . . . .	10
1.1.1	MED do controlador guiado no tempo . . . . .	11
1.1.2	Modo GET do controlador . . . . .	11
1.1.3	Resultados de simulação . . . . .	13
1.1.4	Aspectos teóricos práticos das abordagens propostas . . . . .	20
1.2	Justificativa . . . . .	21
1.3	Objetivos . . . . .	22
1.3.1	Objetivos gerais . . . . .	22
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	22
1.4	Metodologia empregada . . . . .	23
1.5	Motivação . . . . .	24
1.6	Organização do documento . . . . .	24
<b>2</b>	<b>O estado da arte</b>	<b>26</b>
2.1	Introdução . . . . .	26
2.2	Perspectiva histórica dos NCSs . . . . .	27
2.2.1	Efeitos do compartilhamento de recursos físicos limitados . . . . .	31
2.2.2	Modos de operação dos nós . . . . .	33
2.2.3	Modelo de temporização dos NCSs . . . . .	38
2.2.4	Fenômenos que podem ocorrer no controlador . . . . .	40
2.2.5	Redes de comunicação utilizadas em NCSs . . . . .	40
2.3	Modelo de estados aumentado determinístico . . . . .	41
2.4	Amostragem multitaxa . . . . .	43
2.5	Compensação de atrasos . . . . .	44
2.5.1	O preditor de Smith . . . . .	45
2.5.2	Observadores e preditores distribuídos . . . . .	48
2.5.3	Controle estocástico ótimo . . . . .	52
2.6	Estabilidade de NCSs . . . . .	54

2.7	Determinação do atraso de controle . . . . .	57
2.7.1	Método de escalonamento . . . . .	58
2.7.2	Método das perturbações . . . . .	59
2.7.3	Análise - MATI não conservativo . . . . .	63
2.8	Considerações finais . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Intervalos de amostragem dos componentes</b>	<b>66</b>
3.1	Introdução . . . . .	66
3.2	Preliminares . . . . .	67
3.2.1	Amostragem . . . . .	67
3.2.2	Controle baseado em eventos e no tempo . . . . .	68
3.3	NCSs sem perdas de pacotes . . . . .	73
3.3.1	Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ com $\tau_k \leq \tau_s$ . . . . .	73
3.3.2	Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ com $\tau_k > \tau_s$ . . . . .	77
3.4	NCSs com perda de um pacote . . . . .	81
3.4.1	NCSs com perda de um pacote e $\tau_k \leq \tau_s$ . . . . .	84
3.4.2	NCSs com perda de um pacote e $\tau_k > \tau_s$ . . . . .	86
3.5	Determinação de $\tau_{c_i}$ e $\tau_{a_i}$ - uma abordagem unificada . . . . .	91
3.6	Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ em função do IAS . . . . .	94
3.6.1	NCSs com $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ e sem perda de pacotes . . . . .	94
3.6.2	NCSs com $\tau_k$ qualquer e com e sem perda de pacotes . . . . .	98
3.7	Determinação do atraso de controle máximo . . . . .	102
3.8	Limitantes dos intervalos de amostragem . . . . .	106
3.9	Considerações complementares . . . . .	111
3.10	Considerações finais . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Discretização da planta e do controlador</b>	<b>115</b>
4.1	Introdução . . . . .	115
4.2	Preliminares sobre Controle digital . . . . .	116
4.3	Métodos de discretização . . . . .	119
4.3.1	Técnicas de discretização baseadas em diferenciação . . . . .	119
4.3.2	Técnicas de discretização baseadas em integração . . . . .	121
4.3.3	Métodos de discretização no domínio do tempo . . . . .	121
4.4	Discretização da planta . . . . .	124
4.4.1	Com PAS invariante no tempo e $\tau_k = 0$ . . . . .	124
4.4.2	Com IAS variante no tempo e $\tau_k = 0$ . . . . .	126
4.4.3	Com PAS invariante no tempo e $\tau_s \geq \tau \neq 0$ . . . . .	127
4.4.4	Com PAS invariante no tempo $\tau_s \geq \tau_k \neq 0$ . . . . .	129

4.4.5	Com IAS variante no tempo $\tau_{sk} \geq \tau_k \neq 0$ . . . . .	130
4.5	Planta submetida a atrasos maiores que os IAS e SPP . . . . .	133
4.5.1	Com atraso e IAS invariantes no tempo . . . . .	133
4.5.2	Com atrasos variantes no tempo e IAS invariante no tempo . . . . .	137
4.5.3	Com atrasos e IAS variantes no tempo . . . . .	138
4.6	Discretização da planta - abordagem unificada . . . . .	141
4.6.1	NCS CPP atrasos variantes no tempo e PAS invariante . . . . .	141
4.6.2	NCS CPP atrasos e IAS variantes no tempo . . . . .	145
4.7	Discretização do controlador . . . . .	147
4.7.1	MED do controlador GT . . . . .	148
4.7.2	MED do controlador GE/GET . . . . .	149
4.7.3	Modo GETM de operação do controlador . . . . .	151
4.8	Efeito ZOH da discretização . . . . .	151
4.8.1	Resposta em frequência - pulso na origem . . . . .	154
4.8.2	Resposta em frequência - pulso deslocado da origem . . . . .	157
4.9	Conceito de fase relativa . . . . .	163
4.10	Consequência do conceito de fase relativa . . . . .	173
4.11	Sincronismo dos relógios dos nós componentes do NCS . . . . .	179
4.12	Cálculo da exponencial de matriz . . . . .	181
4.13	Zeros de sistemas amostrados . . . . .	183
4.14	Considerações finais . . . . .	184
<b>5</b>	<b>Amostragem por cruzamento de nível</b> . . . . .	<b>185</b>
5.1	Introdução . . . . .	185
5.2	Preliminares . . . . .	185
5.2.1	Funções e conjuntos . . . . .	186
5.3	Amostragem por cruzamento de nível . . . . .	188
5.3.1	Particionando um sinal em polinômios de segundo grau . . . . .	191
5.3.2	Obtendo os polinômios de segundo grau . . . . .	193
5.4	Considerações finais . . . . .	196
<b>6</b>	<b>Metodologias de projeto, resultados e estabilidade dos NCSs</b> . . . . .	<b>197</b>
6.1	Introdução . . . . .	197
6.2	Metodologias de Projeto do NCS . . . . .	198
6.3	Simulação dos NCSs . . . . .	205
6.3.1	NCSs com a planta no domínio do tempo contínuo . . . . .	205
6.3.2	NCSs com a planta no domínio do tempo discreto . . . . .	208
6.3.3	Detalhes do funcionamento do nó controlador . . . . .	208

6.4	Exemplos numéricos . . . . .	211
6.4.1	Planta de fase mínima . . . . .	211
6.5	Resultados experimentais . . . . .	216
6.5.1	A plataforma experimental . . . . .	216
6.5.2	O experimento realizado . . . . .	217
6.5.3	Resultados obtidos . . . . .	219
6.5.4	Resposta em frequência do ZOH - Topologia S-CA . . . . .	222
6.6	Estabilidade . . . . .	224
6.6.1	Planta não submetida a atrasos . . . . .	224
6.7	Considerações finais . . . . .	226
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>228</b>
7.1	Trabalhos futuros . . . . .	233
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>235</b>

# Lista de símbolos e abreviaturas

$\Delta V_{in}$	Faixa de amplitude do conversor A/D	
$\delta_{N_k}(\omega)$	Atraso relativo de fase	[rad]
$\delta_{P_k}(\omega)$	Avanço relativo de fase	[rad]
$\mathbf{e}_r(t)$	Sinal de erro de referência, entrada do controlador	
$\mathbf{G}_{he_k}(j\omega)$	Resposta impulsiva do $k$ -ésimo pulso do ZOH presente na entrada da planta	
$\mathbf{G}_{hs_k}(j\omega)$	Resposta impulsiva do $k$ -ésimo pulso do ZOH “fantasma” presente na saída da planta	
$\mathbf{y}_\infty$	Valor de estado pronto	
$\omega$	Frequência	[rad]
$\omega_{BW}$	Largura de Banda	[rad]
$\angle \mathbf{G}_{h_k}(j\omega)$	Fase do $k$ -ésimo pulso do ZOH	[rad]
$\angle \mathbf{R}_{h_k}(j\omega)$	“Rastro” de fase do ZOH	[rad]
$\phi_k(\omega)$	Fase relativa dos $k$ -ésimos pulsos dos ZOHs	[rad]
$\tau$	Atraso de controle invariante no tempo	[s]
$\tau_k^a$	Intervalo de tempo de comutação para execução da mensagem de controle no atuador durante o $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_{k_{max}}^a$	Valor máximo que pode assumir $\tau_k^a$	[s]
$\tau_{k_{min}}^a$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_k^a$	[s]
$\tau_k^c$	Intervalo de tempo para execução do algoritmo de controle embarcado no nó controlador durante o $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_{k_{max}}^c$	Valor máximo que pode assumir $\tau_k^c$	[s]
$\tau_{k_{min}}^c$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_k^c$	[s]
$\tau_k^s$	$k$ -ésimo Intervalo de amostragem do sensor	[s]
$\tau_{k_{max}}^s$	Valor máximo que pode assumir $\tau_k^s$	[s]

$\tau_{kmin}^s$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_k^s$	[s]
$\tau_k^{ca}$	Intervalo de tempo para a mensagem enviada pelo nó controlador chegar ao nó atuador durante o $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_{kmax}^{ca}$	Valor máximo que pode assumir $\tau_k^{ca}$	[s]
$\tau_{kmin}^{ca}$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_k^{ca}$	[s]
$\tau_k^{sc}$	Intervalo de tempo para a mensagem enviada pelo nó sensor chegar ao nó controlador durante o $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_{kmax}^{sc}$	Valor máximo que pode assumir $\tau_k^{sc}$	[s]
$\tau_{kmin}^{sc}$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_k^{sc}$	[s]
$\tau_{a_k}$	$k$ -ésimo intervalo de amostragem do atuador	[s]
$\tau_{a_{kmax}}$	Valor máximo que pode assumir $\tau_{a_k}$	[s]
$\tau_{a_{kmin}}$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_{a_k}$	[s]
$\tau_a$	Período de amostragem do atuador	[s]
$\tau_{c_k}$	$k$ -ésimo intervalo de amostragem do controlador	[s]
$\tau_{c_{k_i}}$	$i$ -ésimo intervalo de amostragem do controlador do $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_{c_{kmax}}$	Valor máximo que pode assumir $\tau_{c_k}$	[s]
$\tau_{c_{kmin}}$	Valor mínimo que pode assumir $\tau_{c_k}$	[s]
$\tau_c$	Período de amostragem do controlador	[s]
$\tau_{k_m}$	Valor médio do atraso de controle	[s]
$\tau_{k_{max}}$	Atraso de controle máximo	[s]
$\tau_k$	Atraso de controle do $k$ -ésimo COAC	[s]
$\tau_m$	MADB - <i>Maximum Allowable Delay Bound</i>	[s]
$\tau_{s_k}$	$k$ -ésimo intervalo de amostragem do sensor	[s]
$\tau_{s_m}$	MATI - <i>Maximum Allowable Transfer Interval</i>	[s]
$\tau_s$	Período de amostragem do sensor	[s]
$A_i$	$i$ -ésimo nó atuador	
$a_k$	Evento do espaço de eventos $E_a$	
$C_a$	Lei de controle de tempo contínuo	
$C_i$	$i$ -ésima lei de controle de tempo discreto	
$c_k$	Evento do espaço de eventos $E_c$	

$E_a$	Espaço de eventos do nó atuador	
$E_c$	Espaço de eventos do nó controlador	
$e_k$	Evento do espaço de eventos $E_s$	
$E_s$	Espaço de eventos do nó sensor	
$G_i$	$i$ -ésima planta	
$M_p$	<i>Overshoot</i>	
$q$	Magnitude de um quantum	
$S_i$	$i$ -ésimo nó sensor	
$s_k$	Estado do espaço de estados discretizado $Y$	
$T$	Período de amostragem	[s]
$t_k^a$	Instante de amostragem dos atuadores do $k$ -ésimo COAC	[s]
$t_{k_i}^a$	$i$ -ésimo instante de amostragem dos atuadores do $k$ -ésimo COAC	[s]
$t_k^c$	Instante de amostragem do controlador do $k$ -ésimo COAC	[s]
$t_{k_i}^c$	$i$ -ésimo instante de amostragem do controlador do $k$ -ésimo COAC	[s]
$t_k^s$	Instante de amostragem dos sensores do $k$ -ésimo COAC	[s]
$T_k$	$k$ -ésimo intervalo de amostragem	[s]
$t_k$	$k$ -ésimo instante de amostragem	[s]
$t_p$	Tempo de pico	[s]
$t_r$	Tempo de subida	[s]
$t_s$	Tempo de estabelecimento	[s]
$Y$	Espaço de estados discretizado	
A	Nó atuador	
ABSs	<i>Anti-lock Brake Systems</i>	
C	Lei de controle de tempo discreto	
CAN	<i>Controller Area Network</i>	
CLPs	Controladores lógicos programáveis	
COAC	Ciclo de Operação do Algoritmo de Controle	
CPP	Com Perda de Pacotes	
CPU	<i>Central Processing Unit</i>	
DDP	Distribuição discreta de Poisson	

DP	Desvio Padrão
DSPs	<i>Digital Signal Processors</i>
EMI	<i>Electro-Magnetic Interference</i>
FOH	<i>First-Order Hold</i>
GE	Guiado a Eventos
GET	Guiado a Eventos e no Tempo
GETM	Guiado a Eventos e no Tempo Modificado
GT	Guiado no Tempo
IAA	Intervalo de amostragem do atuador
IAC	Intervalo de amostragem do controlador
IAS	Intervalo de amostragem do sensor
IDRDU	Indicadores de Desempenho da Resposta ao Degrau Unitário
IRD	Indicadores da Resposta ao Degrau
LIT	Linear invariante no tempo
LMIs	<i>Linear matrix inequalities</i>
MADB	<i>Maximum Allowable Delay Bound</i>
MATI	<i>Maximum Allowable Transfer Interval</i>
MED	Modelo Equivalente Discreto
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
NCSav	NCS com $\tau_c = \tau_s$ invariante no tempo e $\tau_k$ variante no tempo
nNCS	<i>nonnetworked control system</i>
nNCSC	nNCS de tempo contínuo
nNCSD	nNCS de tempo discreto ou digital
nNCSvc	Sistema de controle não conectado em rede via computador
PAA	Período de amostragem do atuador
PAC	Período de amostragem do controlador
PAS	Período de amostragem do sensor
PC	<i>Personal Computer</i>
PLC	<i>Programmable Logic Controller</i>
RC	Rede de comunicação



RDU	Resposta ao Degrau Unitário
RTAI	<i>Real-Time Application Interface</i>
S	Nó sensor
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
SPP	Sem Perda de Pacotes
ZOH	<i>Zero Order Hold</i>

# Lista de Tabelas

- 6.1 Valores médios, máximos e mínimos e desvios padrões dos indicadores da resposta ao degrau dos NCSs submetidos a 1.540 transitórios (planta de fase mínima). 214
- 6.2 Porcentagem (%) e frequência (freq) de ocorrência dos indicadores da resposta ao degrau dos NCSs submetidos a 1.540 transitórios (planta de fase mínima). . 215

# Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos de um sistema de controle de tempo contínuo. . . . .	2
1.2	Diagrama de blocos de um sistema de controle digital clássico. . . . .	3
1.3	Diagrama de temporização do sistema de controle digital, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle, atuação e suas relações de precedência temporal para três ciclos de operação do algoritmo de controle. . . . .	4
1.4	Arquitetura geral de um sistema de controle em rede. . . . .	5
1.5	Diagrama de blocos do sistema de controle em rede - topologia S-C-A. . . . .	6
1.6	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência das mensagens (pacotes de dados) do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para quatro ciclos de operação do algoritmo de controle. . . . .	7
1.7	Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle $\{\tau_k\}$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , tem lei de formação do tipo $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	13
1.8	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD) e do NCS submetido a atraso $\tau_k$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) e com o controlador operando com $\tau_{c_k} = \tau_s$ invariante no tempo e $\{\tau_k\}$ da forma $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	14
1.9	Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle $\{\tau_k\}$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ tem lei de formação do tipo $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	15
1.10	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD) e do NCS submetido a atraso $\tau_k$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) e com o controlador operando com $\tau_{c_k} = \tau_s$ invariante no tempo e $\{\tau_k\}$ da forma $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	16

1.11	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com $\tau_{c_k} = \tau_s$ e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é da forma $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	17
1.12	Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	18
1.13	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com $\tau_{c_k} = \tau_s$ e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é da forma $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	19
1.14	Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	20
2.1	Arquitetura geral de um NCS. . . . .	28
2.2	NCS com estrutura direta ou não-hierárquica. . . . .	28
2.3	NCS com estrutura hierárquica. . . . .	29
2.4	Topologias básicas dos NCSs: (a) nNCS; (b) S-CA; (c) SC-A; (d) S-C-A. . . . .	29
2.5	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência das mensagens (pacotes de dados) do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para três ciclos de operação do algoritmo de controle. . . . .	32
2.6	Diagramas temporais ilustrativos das diferentes operações de amostragem: (a) Amostragem convencional; (b) Amostragem múltipla ordem (do inglês <i>multiple-order sampling</i> ); (c) Amostragem multitaxa; (d) Amostragem assíncrona (do inglês <i>nonsynchronous sampling</i> ); (e) Amostragem não instantânea; (f) Amostragem aleatória. . . . .	35
2.7	Amostragem de Riemann. . . . .	36
2.8	Amostragem de Lebesgue. . . . .	37
2.9	Diagrama de temporização para transição de mensagens em um NCS - topologia S-C-A. . . . .	39
2.10	Diagrama de temporização para os sinais de controle e do sensor. . . . .	40

2.11	Tentativa de minimizar a ocorrência do fenômeno da amostragem vazia. . . . .	43
2.12	Diagrama de blocos do sistema de controle de um processo convencional. . . . .	45
2.13	Etapas do projeto do sistema de controle segundo o preditor de Smith: (a) Sistema de controle de fase mínima. (b) Sistema de controle com atrasos equivalente ao da Figura 2.13a. (c) Sistema de controle com atrasos equivalente ao da Figura 2.13b. . . . .	46
2.14	Diagrama de blocos da etapa final do projeto do preditor de Smith. . . . .	47
2.15	O preditor de Smith. . . . .	47
2.16	Diagrama de blocos, topologia S-C-A, do método de compensação de atraso baseado em preditor determinístico. . . . .	49
2.17	Diagrama de blocos, topologia S-CA, do método de compensação de atraso baseado em preditor probabilístico. . . . .	50
2.18	Exemplo de uma cadeia de Markov para modelar o estado de carga da rede. . . . .	53
2.19	Sistema linear invariante no tempo com atraso variante no tempo na malha de realimentação, onde: $p$ é a perturbação; $G(s)$ e $C(s)$ são, respectivamente, a planta e o controlador contínuos no tempo e $\Delta$ é o operador de atraso variante no tempo. . . . .	55
2.20	Sistema de controle com atraso variante no tempo na malha de realimentação, onde: $p$ é a perturbação; $G(s)$ e $C(z)$ são, respectivamente, a planta contínua, controlador discreto e $\Delta$ é o operador de atraso variante no tempo. . . . .	56
2.21	Divisão do atraso de controle $\tau_k = L + J$ em parte constante $L$ e parte variável $J$ . . . . .	56
3.1	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	74
3.2	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para $\tau_k > \tau_s$ e sem perda de pacotes - dedução do IAC. . . . .	78
3.3	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal com $\tau_k > \tau_s$ e sem perda de pacotes - dedução do IAA. . . . .	79

3.4	Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e $\tau_k \leq \tau_s$ para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	81
3.5	Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e $\tau_k > \tau_s$ para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	81
3.6	Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e $\tau_k \leq \tau_s$ para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	82
3.7	Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e $\tau_k > \tau_s$ para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	83
3.8	Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes, $\tau_k \leq \tau_s$ e $\tau_k > \tau_s$ , de topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	91
3.9	Diagrama de temporização do NCS, sem perda de pacotes, $\tau_k \leq \tau_s$ , topologia S-C-A com o IAS variante no tempo, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal. . . . .	95
3.10	Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para o NCS operando com e sem perda de pacotes e com $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ou $\tau_k > \tau_{s_k}$ . . . . .	99
4.1	Diagrama de blocos de um sistema de controle digital. . . . .	116
4.2	Relação de precedência temporal das tarefas executadas no computador digital. . . . .	118

4.3	Relações entre os sinais: de saídas da planta $\mathbf{y}(t)$ de tempo contínuo e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	125
4.4	Relações entre os sinais: de saídas da planta $\mathbf{y}(t)$ de tempo contínuo e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	126
4.5	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	128
4.6	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	130
4.7	Relações entre os sinais: de saída da planta $\mathbf{y}(t)$ de tempo contínuo e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e sinal de controle de tempo contínuo $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ na entrada da planta, onde $\tau_k = \tau_{r_k} + \tau_{d_k}$ , com $\tau_{r_k} = \tau_k^s + \tau_k^{sc}$ e $\tau_{d_k} = \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$ , para NCSs de topologia S-C-A. . . . .	131
4.8	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	135
4.9	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	137
4.10	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	140
4.11	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	142
4.12	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	143
4.13	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência de tempo discreto $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ e o sinal de controle de tempo contínuo $\mathbf{u}(t - \tau_k)$ na entrada da planta. . . . .	145
4.14	Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo $\mathbf{y}(t)$ e de tempo discreto $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ de tempo discreto e o sinal de controle $\mathbf{u}(t - \tau)$ de tempo contínuo na entrada da planta. . . . .	146

4.15 Relações entre os sinais: da saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e de tempo discreto atrasado  $y(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros de referência de tempo contínuo atrasado  $e_r(t - \tau_k^{sc})$  e de tempo discreto atrasado  $e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$  com  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , para o controlador operando no modo GT. . . . . 148

4.16 Relações entre os sinais: da saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e de tempo discreto atrasado  $y(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros de referência de tempo contínuo atrasado  $e_r(t - \tau_k^{sc})$  e de tempo discreto atrasado  $e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$ , com  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , com o controlador operando nos modos GE e/ou GET. . . . . 150

4.17 Atraso causado pela ação do ZOH, com  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t_k^a = k\tau_a$ . . . . . 152

4.18 Atraso causado pela ação do ZOH, com  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t_{k+1}^a = t_k^a + \tau_{ak}$ . . . . . 153

4.19 (a) Resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_a$  invariante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.35]. . . . . 154

4.20 Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs, com pulsos na origem de larguras:  $\tau_a, 0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$ . . . . . 156

4.21 (a) Resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_{a0}$  variante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_{a0}$  variante no tempo. . . . . 157

4.22 (a) Resposta impulsiva de um pulso do ZOH de largura  $\tau_{ak}$  variante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH. . . . . 158

4.23 Amplitude e “rastros” de fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $\tau_a, 0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$ . . . . . 161

4.24 Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,5\tau_a, \tau_a$  e  $1,5\tau_a$ . . . . . 162

4.25 Relações entre os sinais de saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e o sinal de tempo contínuo  $u(t - \tau_k)$  do ZOH presente na entrada da planta. . . . . 164

4.26 Relações entre os sinais de saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e ZOH “fantasma” e o sinal de tempo contínuo  $u(t - \tau_k)$  do ZOH presente na entrada da planta. . . . . 164

4.27 Fase relativa  $\phi_k(\omega) = \angle G_{hi_k}(j\omega) - \angle G_{hv_k}(j\omega)$ : (a) positiva  $\phi_k(\omega) > 0$ ; (b) negativa  $\phi_k(\omega) < 0$ . . . . . 165

4.28 Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,3\tau_a, \tau_a$  e  $1,7\tau_a$ , com  $\tau_a = \tau_s = 2,0$  ms. . . . . 171

4.29 Sistema de dados amostrado: (a) Sistema invariante no tempo; (b) Sistema variante no tempo. . . . . 174



4.30	Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle $\{\tau_k\}$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , tem lei de formação do tipo $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	176
4.31	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso $\tau_k$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com $\tau_{c_k} = \tau_s$ e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é da forma $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . .	177
4.32	Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle $\{\tau_k\}$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ tem lei de formação do tipo $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	177
4.33	Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso $\tau_k$ , $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com $\tau_{c_k} = \tau_s$ e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos $\{\tau_k\}$ cuja lei de formação é da forma $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . . . . .	178
4.34	Diagrama de blocos de um NCS com amostragem simultânea dos sinais de entrada e saída. . . . .	179
4.35	Ilustração da necessidade sincronização e relógio universal entre os nós do NCS.	180
5.1	Amostragem por cruzamento de nível. . . . .	188
5.2	Particionando um sinal $f(t)$ . . . . .	192
6.1	Diagrama de blocos da topologia nNCSC com $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_k^a = 0$ . . . . .	198
6.2	Fluxograma do programa para simulação do NCS com a planta no domínio do tempo contínuo. . . . .	206
6.3	Fluxograma do programa para simulação do NCS com planta de tempo discreto.	208
6.4	Parte superior - diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para três COAC. Parte inferior - detalhamento das tarefas executadas no nó controlador durante o $k$ -ésimo COAC. . . . .	209

6.5 (a) Sequência de atrasos  $\{\tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a\}$  de uma RDU. (b) 1.540 RDUs da abordagem NCSav com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD; (c) 1.540 RDUs da abordagem GET com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD; (d) 1.540 RDUs da abordagem GETM com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD. . . . . 214

6.6 Representação da plataforma experimental para simulação e teste em tempo real de NCSs com barramento CAN e topologia S-CA. . . . . 216

6.7 Plataforma experimental - NCS topologia S-CA. . . . . 217

6.8 Telas do osciloscópio mostrando a medição: (a) execução do algoritmo de controle  $\tau_k^c$ ; (b) período de amostragem do controlador  $\tau_c$  entre duas execuções do algoritmo de controle da implementação do sistema de controle não conectado em rede via computador (nNCSvc). . . . . 218

6.9 Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e com controlador de tempo discreto ou via computador (nNCSvc), do NCS submetido a atraso  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . . 220

6.10 Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle: nNCSC, nNCSvc, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . . . . . 221

6.11 Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ . . . . . 222

6.12 Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ . . . . . 222

6.13 Amplitude e “rastros” de fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,28\tau_a, \tau_a$  e  $1,52\tau_a$ , com  $\tau_a = 5,0$  ms. . . . . 223

# Capítulo 1

## Introdução

Atrasos variantes no tempo realmente degradam o desempenho de um sistema de controle em rede? Nem Sempre! Historicamente, há registros na literatura que tal resposta pode ser negativa. Isto pode ocorrer nos sistemas de controle, de tempo discreto, em duas situações: a primeira é quando a largura dos pulsos aplicados na entrada da planta varia ao longo do tempo e, a segunda, quando o intervalo de amostragem dos sensores é variante no tempo. Em ambas as situações o sistema de controle, de tempo discreto, pode apresentar desempenho melhor que o desempenho do mesmo sistema, de tempo contínuo [JURY, 1958; KALMAN; BERTRAM, 1959, p.2; p.408], o que ocorre frequentemente nos sistemas de controle em rede (do inglês *networked control systems - NCSs*).

Surpreendentemente, todavia, dentro do escopo da teoria dos NCSs, a resposta a tal questionamento tem sido, ao longo dos anos, afirmativa. Isto porque, os NCSs são sistemas de controle com recursos físicos limitados, em que um ou mais componentes (sensores, controladores e atuadores) estão conectados por meio de uma rede de comunicação, com ou sem fio e de largura de banda limitada.

Desde o seu surgimento, na década de 1970, são muitas as razões e justificativas que motivaram a utilização dos NCSs, dentre as quais a redução dos custos de implantação do sistema de controle, a sensível diminuição do número de cabos, o que acarreta diretamente a redução do peso e volume das aplicações, relevante em indústrias como a automotiva e aeroespacial, consideradas pioneiras e grandes propulsoras de sua utilização. Neste sentido, o surgimento de aplicações de controle, cada vez mais complexas, aliadas às progressivas capacidades de integração e sofisticação dos *chips*, bem como, seu barateamento e popularização, ainda hoje, motivam e favorecem o desenvolvimento da área.

Não menos relevante que as razões precedentemente expostas, a utilização de NCSs facilita a expansão e/ou adequação dos sistemas de controle, assim como, torna possível diagnosticar, configurar, calibrar e supervisionar componentes físicos do sistema. Desse modo, é crescente o interesse de diversos setores industriais em substituir suas arquiteturas centralizadas tradicionais

dos sistemas de controle, por arquiteturas distribuídas, baseadas em NCSs.

Desde os surgimentos da realimentação negativa e das primeiras provas de estabilidade, até os dias contemporâneos, tradicionalmente e sob a ótica da teoria clássica de controle, um sistema de controle de tempo contínuo pode ser representado segundo o diagrama de blocos da Figura 1.1. Neste caso, os sinais  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  da saída da planta  $G$  são medidos por sensores  $S$  e imediatamente disponibilizados ao controlador de tempo contínuo ou analógico  $C_a$ . A partir dos sinais de referência  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  e  $\mathbf{y}(t)$  obtém-se o erro de referência  $\mathbf{e}_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ . Em seguida, a lei de controle é executada e o sinal de controle de tempo contínuo  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é aplicado pelos atuadores  $A$  presentes na entrada da planta  $G$ .

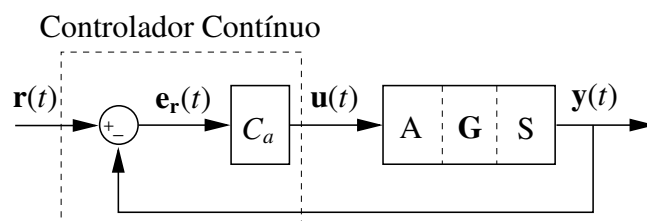


Figura 1.1: Diagrama de blocos de um sistema de controle de tempo contínuo.

Com o advento das teorias de análise de sistemas discretos, lineares invariantes no tempo, como a transformada Z [JURY, 1958], aliadas ao concomitante desenvolvimento tecnológico dos meios de informática, surgem os primeiros controladores de tempo discreto, também denominados controladores digitais. Tais controladores foram concebidos para substituir os de tempo contínuo ou analógicos. A intenção por trás dessa substituição era resolver uma série de problemas, tais como, por exemplo, facilitar o ajuste de parâmetros do controlador, antes definidos, a partir de relações entre valores de referência de alguns componentes elétricos de seus circuitos. Evidentemente, sabe-se que com o envelhecimento dos componentes físicos (resistores, capacitores, etc) presentes nos circuitos que implementavam os controladores analógicos, também haviam, ainda que paulatinamente, alterações das características físicas dos materiais que constituem tais componentes, o que poderia causar alterações dos valores de referência de tais componentes. Tais mudanças são indesejáveis, uma vez que implicam diretamente na mudança das características de controle, como por exemplo, alterações de relativa criticidade nos lugares dos pólos e zeros. Fato este, indesejado, uma vez que, pequenas alterações nos valores dos pólos e zeros podem ocasionar em mudanças significativas do lugar de raízes e, consequentemente, podem causar alterações das características de malha fechada do sistema de controle [OGATA, 2003, p.292].

Decorrente dessa mudança de paradigma, o diagrama de blocos anteriormente apresentado na Figura 1.1, foi adaptado para o da Figura 1.2. Neste caso, todos os sinais tratados no controlador são digitais. Por conseguinte, os sinais de tempo contínuo  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  devem ser correspondentemente convertidos em seus similares de tempo discreto  $\mathbf{r}(t_k^s) \in \mathbb{R}^{n_r}$  e  $\mathbf{y}(t_k^s) \in \mathbb{R}^{n_r}$ . Dessa

maneira, conversores analógicos digitais (A/D) devem ser introduzidos no sistema de controle, de maneira que, as amostras dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  sejam obtidas nos instantes de amostragem  $t_k^s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  do sinal de saída da planta, os quais formam a sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  do sinal de saída da planta. Os instantes de amostragem  $t_k^s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  são definidos como sendo  $t_k^s = k\tau_s$ , onde  $\tau_s = t_{k+1}^s - t_k^s$  é o intervalo de tempo, invariante, entre dois instantes consecutivos de inícios de tomadas de amostras, o que é aqui definido, simplesmente, como período de amostragem dos sensores.

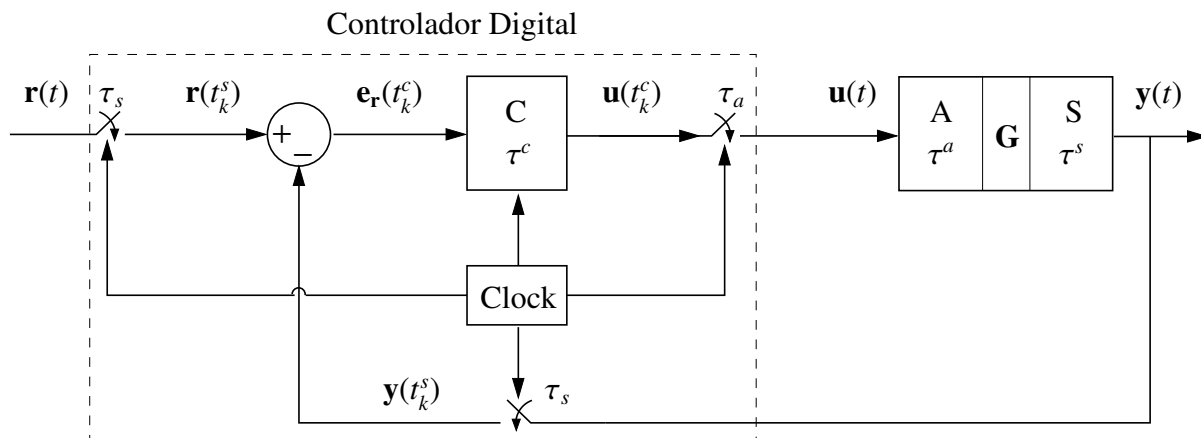


Figura 1.2: Diagrama de blocos de um sistema de controle digital clássico.

Obtidos os sinais de tempo discreto  $\mathbf{r}(t_k^s)$  e  $\mathbf{y}(t_k^s)$ , o sinal de erro de referência de tempo discreto  $\mathbf{e}_r(t_k^c) \in \mathbb{R}^{n_r}$  é calculado a cada instante  $t_k^c$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  da sequência de instantes de amostragem do controlador  $\{t_k^c\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , os quais, são, por definição, dados por  $t_k^c = k\tau_c$  e representam os inícios das execuções do algoritmo de controle no controlador digital. No caso,  $\tau_c$  é o intervalo de tempo, invariante, entre dois inícios consecutivos das execuções do algoritmo de controle, aqui definido como, período de amostragem do controlador e  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ , utilizado durante a execução do algoritmo de controle de tempo discreto ou digital  $C$ , para calcular a sequência de amostras do sinal de saída  $\{\mathbf{u}(t_k^c)\}$  do controlador digital. Cada uma destas amostras  $\mathbf{u}(t_k^c) \in \mathbb{R}^{n_u}$  resultam, após as conversões digitais para analógicas (D/A), no sinal de tempo contínuo  $\mathbf{u}(t)$  que é aplicado nas entradas da planta. O intervalo de tempo, invariante,  $\tau_a$  entre dois inícios consecutivos das conversões D/A,  $t_k^a = k\tau_a$ , é chamado intervalo de atuação  $\tau_a = t_{k+1}^a - t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  e doravante será denominado período de amostragem dos atuadores.

Evidentemente, cada uma das etapas de funcionamento do sistema de controle digital, anteriormente descritas, obedece a uma relação de precedência temporal e requer, obviamente, um intervalo de tempo de execução. Tal precedência é mostrada no diagrama de temporização da Figura 1.3.

No caso, a soma de todos estes intervalos de tempo denomina-se atraso de controle  $\tau$ . E,

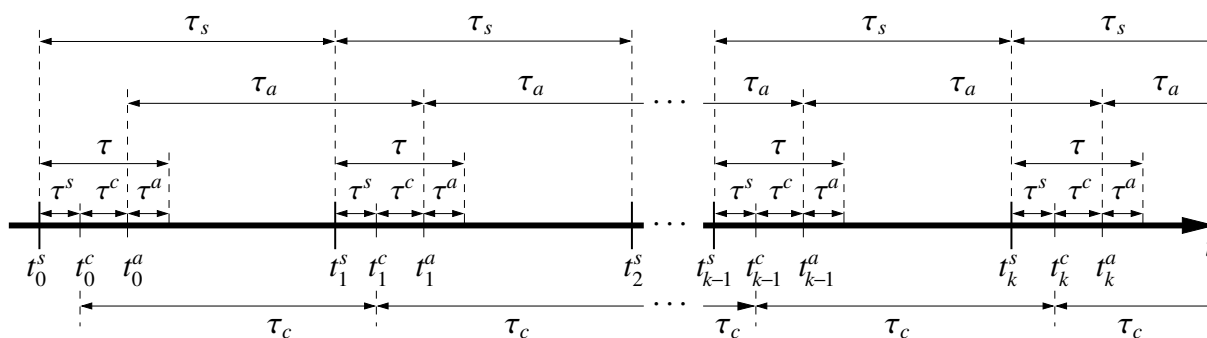


Figura 1.3: Diagrama de temporização do sistema de controle digital, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle, atuação e suas relações de precedência temporal para três ciclos de operação do algoritmo de controle.

seu valor é, por definição

$$\tau = \tau^s + \tau^c + \tau^a \quad (1.1)$$

onde,  $\tau^s$ ,  $\tau^c$  e  $\tau^a$  são, respectivamente, os intervalos de tempos de aquisição das amostras (conversões A/D) dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , da execução do algoritmo de controle de tempo discreto e das atuações (conversões D/A). Os tempos  $t_k^s$ ,  $t_k^c$  e  $t_k^a$  são, respectivamente, os instantes de início de cada uma das etapas precedentemente descritas. Além disso,  $\tau_s$ ,  $\tau_c$  e  $\tau_a$  são, respectivamente, os períodos de amostragem dos sensores, controlador e atuadores.

Para facilitar a análise matemática do sistema de controle em discussão é comum assumir que  $\tau^s$ ,  $\tau^c$  e  $\tau^a$  sejam desprezíveis<sup>1</sup> e que o sincronismo, representado pelo bloco de *clock* da Figura 1.2, e presente entre as ações de amostragem dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  (conversões A/D), execução do algoritmo de controle e atuações (conversões D/A), seja perfeito [ÅSTRÖM; WITENMARK, 1997, p.33]. Tais hipóteses acarreta em  $\{t_k^s\} = \{t_k^c\} = \{t_k^a\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , o que resulta na equivalência<sup>2</sup>  $\tau_s = \tau_c = \tau_a$ .

Uma vez consolidada a teoria de controle digital, começa a surgir, na década de 1970 como uma evolução do sistema de controle digital, os sistemas de controle em rede (do inglês *networked control systems - NCSs*). Tal fato se dá em decorrência do desenvolvimento científico-tecnológico, bem como, à crescente demanda por aplicações de controle, cada vez mais complexas [HALEVI; RAY, 1988; RAY; HALEVI, 1988].

Do ponto de vista tecnológico, o desenvolvimento e a integração de interfaces de redes, bem como, conversores A/D e D/A em dispositivos como sensores e atuadores, possibilitou o desenvolvimento das chamadas redes de sensores e, por conseguinte, dos NCSs. Por outro

<sup>1</sup> $\tau^s$ ,  $\tau^c$  e  $\tau^a$  podem ser considerados desprezíveis quando  $\tau = \tau^s + \tau^c + \tau^a$  for muito menor do que a constante de tempo do sistema.

<sup>2</sup>A escolha adequada do valor do período de amostragem é de fundamental relevância para o correto funcionamento do sistema de controle digital. Seu valor sempre deve satisfazer ao teorema da amostragem, de sorte que, na prática, deve ser de cerca de vinte a trinta vezes menor que o período de amostragem limite dado pelo teorema da amostragem [FRANKLIN, 2006, p.468].

lado, a sofisticação das aplicações de controle tornava-se cada vez maior e mais complexa, e que, diante deste cenário, a solução de controle em rede surgiu como a mais adequada para a demanda das aplicações em questão.

Em termos da teoria de controle em rede, os diversos sensores, controladores e atuadores, dos vários processos, objetos de controle, poderiam ser conectados por meio de uma rede de comunicação, a qual pode ser ilustrada por meio da arquitetura apresentada na Figura 1.4. Posteriormente, tais dispositivos foram denominados de nós sensores, nós controladores e nós atuadores. Além disso, suas funcionalidades, podem ser implementadas em um único dispositivo físico ou em dispositivos físicos diferentes, o que resulta, neste caso, em até quatro diferentes topologias de NCSs, a depender, evidentemente, de quais funcionalidades de nós seja(m) atribuída(s) ao(s) dispositivo(s) físico(s) utilizado(s). Dentre estas quatro topologias, a mais complexa é aquela em que todos os nós componentes estão espacialmente distribuídos. Neste caso, a rede de comunicações (RC) conecta todos os nós, como ilustrado na Figura 1.5, a qual é denominada de S-C-A. Sigla esta, cujas letras representam, respectivamente, nó sensor S, nó controlador C e nó atuador A. Observar ainda que, cada hífen na sigla S-C-A, bem como, nas siglas de mesma natureza a seguir definidas, corresponde a uma conexão de rede, e sua ausência corresponde a uma conexão dedicada, isto é, sem meio físico compartilhado [YÉPEZ, 2002].

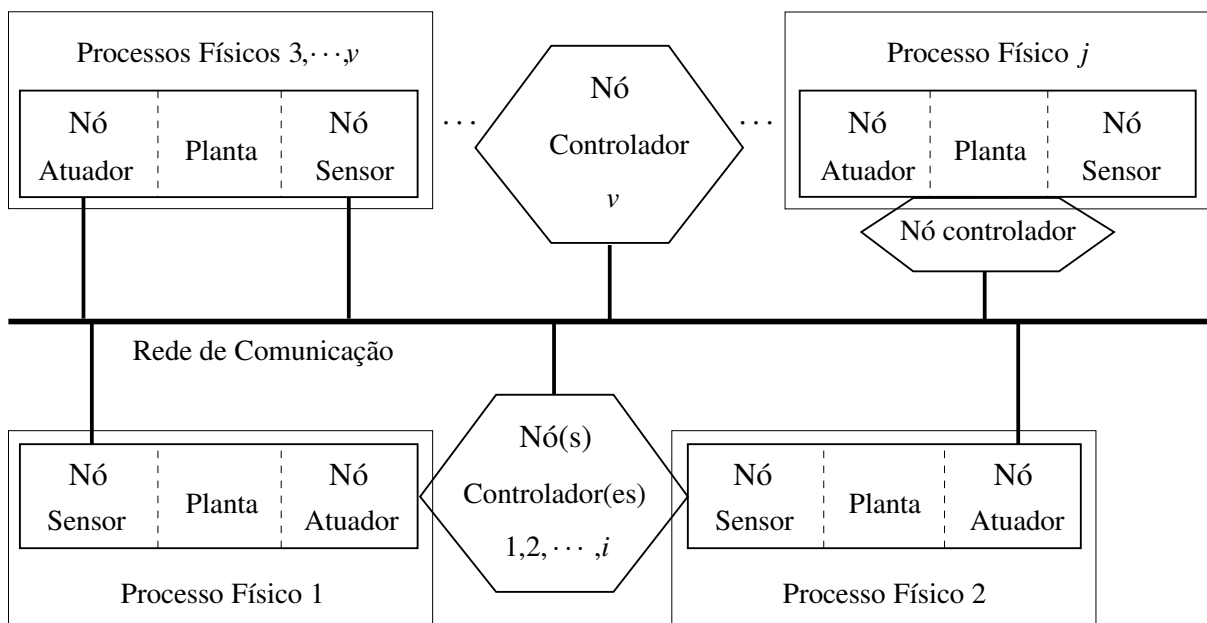


Figura 1.4: Arquitetura geral de um sistema de controle em rede.

Complementarmente, se  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  denota, simultaneamente, variabilidade temporal e o  $k$ -ésimo ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC), então, define-se  $t_k^s$ ,  $t_k^c$  e  $t_k^a$ , respectivamente, como os instantes de inícios da aquisição das amostras (conversões A/D) dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ ; execução do algoritmo de controle de tempo discreto e atuações (conversões D/A).

Os intervalos de tempos de aquisição das amostras (conversões A/D) dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , execução do algoritmo de controle de tempo discreto e atuações (conversões D/A) são, respectivamente, definidos como  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^a$ . Complementarmente, os atrasos de comunicações sensor controlador e controlador atuador são representados, respectivamente, por  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ . Além disso,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$ ,  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  e  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  representam, respectivamente, os intervalos de amostragem: dos sensores (IAS); do controlador (IAC) e dos atuadores (IAA). Quando  $\tau_{s_k}$ ,  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$  são invariantes no tempo, são denominados, respectivamente de: período de amostragem dos sensores (PAS)  $\tau_s$ ; período de amostragem do controlador (PAC)  $\tau_c$  e período de amostragem dos atuadores (PAA)  $\tau_a$ . Finalmente,  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  é o atraso de controle para o NCS de topologia S-C-A. Exemplos desta topologia, no contexto da Figura 1.4, são os blocos relativos ao controle dos processos físicos 3,  $\dots$ ,  $v$ .

Uma segunda topologia é a S-CA, na qual, a rede de comunicação conecta apenas o nó sensor ao nó controlador, com a qual, e ainda em referência à Figura 1.4, se controla o processo físico 1. Neste caso, o nó controlador é conectado diretamente ao nó atuador<sup>3</sup>.

A terceira topologia é a SC-A, cuja rede de comunicação conecta apenas o nó controlador ao nó atuador e é responsável pelo controle do processo físico 2. Neste caso, o nó sensor é conectado diretamente ao nó controlador. Finalmente, a quarta topologia é a nNCS (sigla em inglês para *nonnetworked control system*), onde, no caso, nenhum dos nós componentes estão conectados entre si por meio da rede de comunicação. Na Figura 1.4 esta topologia é responsável pelo controle do processo físico  $j$ . Diagramas semelhantes ao da Figura 1.5, para as topologias S-CA, SC-A e nNCS<sup>4</sup>, são obtidos, respectivamente, fazendo  $\tau_k^{ca} = 0$ ,  $\tau_k^{sc} = 0$  e  $\tau_k^{sc} = \tau_k^{ca} = 0$ .

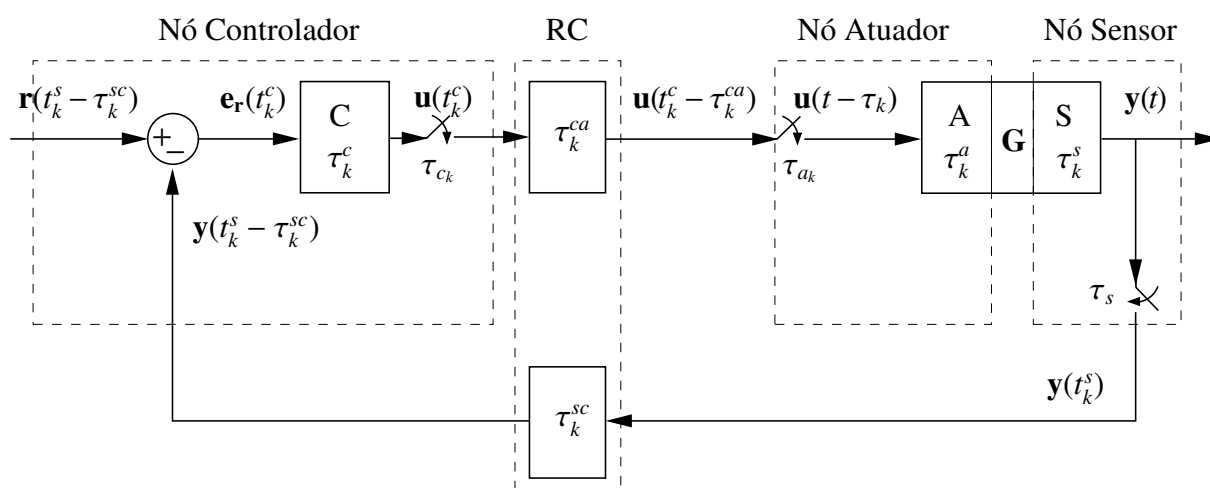


Figura 1.5: Diagrama de blocos do sistema de controle em rede - topologia S-C-A.

<sup>3</sup>Nesta tese, o termo “conectar diretamente” é sinônimo de conexão dedicada, isto é, sem compartilhamento do meio de comunicação. Dessa maneira, fazer  $\tau_k^{sc} = 0$  é o mesmo que conectar diretamente o nó sensor ao nó controlador. Analogamente, fazer  $\tau_k^{ca} = 0$ , é o mesmo que conectar diretamente o nó controlador ao nó atuador.

<sup>4</sup>Para o caso da topologia nNCS um diagrama equivalente ao da Figura 1.5 é semelhante ao apresentado na Figura 1.2.



De maneira geral, uma rápida observação entre os diagramas de blocos das Figuras 1.2 e 1.5 pode induzir o leitor a concluir sobre a possibilidade de eventuais similaridades entre os mesmos. Todavia, tais similaridades são apenas aparentes, uma vez que, a introdução da rede de comunicação no sistema de controle muda completamente a natureza do problema. No caso do sistema de controle contínuo ou digital o mesmo é invariante no tempo, fato este que simplifica a análise. Já, no caso do NCS, o sistema de controle é, em geral, variante no tempo, o que complica, sobremaneira, a análise.

Para facilitar o entendimento do funcionamento de um sistema de controle em rede, um diagrama de temporização típico do mesmo, topologia S-C-A, é apresentado na Figura 1.6 [SILVA; LIMA, 2018].

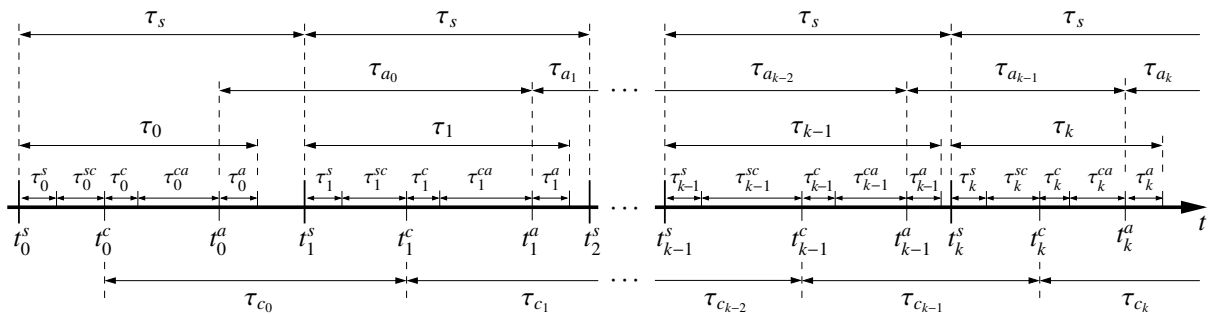


Figura 1.6: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência das mensagens (pacotes de dados) do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para quatro ciclos de operação do algoritmo de controle.

Evidentemente, existem semelhanças entre este (Figura 1.6) e aquele ilustrado na Figura 1.3. Todavia, no caso do sistema de controle em rede os atrasos são, em geral, variantes no tempo, podendo até mesmo ter comportamentos estocásticos.

No diagrama precedente, o atraso de controle  $\tau_k$  é menor ou igual ao período de amostragem dos sensores<sup>5</sup>  $\tau_s$ . E, neste caso, seu valor é:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \leq \tau_s \quad (1.2)$$

Desta equação, é evidente que,  $\tau_k$  será variante no tempo, desde que, qualquer um dos cinco termos de atrasos que compõem a soma varie. Além disso, pode-se verificar, ainda na Figura 1.6, que as seqüências de instantes  $\{t_k^c\}$  e  $\{t_k^a\}$  variam de acordo com a variação dos atrasos que os precede, fato este que pode torná-los estocásticos, a depender do comportamento dos atrasos. Isto conduz a duas importantes definições, relativas ao modo de operação dos nós controlador e atuador, a seguir delineadas.

<sup>5</sup>Obviamente,  $\tau_k$  pode ser maior que  $\tau_s$ . Todavia, tal cenário não será aqui contemplado.

Um nó controlador é dito guiado a eventos (GE) quando a sequência de instantes dos inícios das execuções da lei de controle  $\{t_k^c\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , coincide com a sequência de instantes de chegadas de pacotes de dados no nó controlador [NILSSON, 1998]. Analogamente, um nó atuador é dito guiado a eventos quando a sequência de instantes  $\{t_k^a\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , de início das comutações das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores (início das conversões D/A) coincidem com a sequência de instantes das chegadas dos pacotes de dados no nó atuador [NILSSON, 1998].

Como um evento é algo assíncrono, esporádico, sua ocorrência não está associada a um *clock*. Por conseguinte, a operação de nós guiados a eventos é desprovida de um *clock* global e portanto de sincronismo. Neste caso, pode existir *clocks* locais nos nós, com os quais, é possível determinar atrasos decorrentes da execução de tarefas nos mesmos, assim como, determinar os intervalos de tempo entre a ocorrência de eventos. Por outro lado, quando um *clock* global e sincronismo são introduzidos em um sistema guiado a eventos, o modo de operação dos nós deixa de ser apenas guiado a eventos e torna-se simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET). O modo de operação GET dos nós de um NCS é uma das contribuições desta tese e é a seguir definido.

Um nó controlador será dito simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET), quando ele for guiado a eventos, e além disso, os *clocks* dos nós sensores e controladores estiverem sincronizados por um *clock* global, de forma a possibilitar a determinação do atraso de comunicação sensor controlador<sup>6</sup>. Em outras palavras, associado ao *clock* do nó controlador existe um *clock* global, o qual, é o referencial de tempo para todas as ações que ocorrem ao longo do funcionamento do sistema de controle em rede. De maneira análoga pode-se definir o modo de operação GET para o nó atuador<sup>7</sup>.

É óbvio ainda, da Figura 1.6, que quando  $\tau_k^s$ , e/ou  $\tau_k^{sc}$  variar(em), o instante  $t_k^c$  também variará. Analogamente, e pelas mesmas razões, o instante  $t_k^a$  será variante no tempo, desde que, ao menos um dos seguintes atrasos  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_k^c$  ou  $\tau_k^{ca}$  varie. Portanto, a consequência das variabilidades temporais dos atrasos e, conseqüentemente, dos instantes  $t_k^c$  e  $t_k^a$  é a variabilidade temporal dos intervalos de amostragem do controlador  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$ , assim como, dos intervalos de amostragem do atuador  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$ .

Fazer o intervalo de amostragem do controlador variar de acordo com as variabilidades da sequência de instantes de amostragem do controlador  $\{t_k^c\}$  é outra inovação trazida por esta tese. Em geral, na literatura é feito variar o intervalo de amostragem dos sensores, de forma a se obter o que se denomina de amostragem aleatória [KALMAN, 1957; KALMAN; BERTRAM, 1959], também chamada de amostragem de Lebesgue [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002]. Neste caso, entre outras vantagens, obtém-se, a redução da variância do sinal de saída do NCS [ÅS-

<sup>6</sup>É comum a utilização de técnicas de *timestamping* para a determinação de atrasos em redes de comunicação [JOHANNESSEN, 2004; IEEE, 2009].

<sup>7</sup>As definições de todos os nós dos NCSs são, detalhadamente, apresentadas no Capítulo 3.

TRÖM; BERNHARDSSON, 1999], assim como, a redução no tráfego da rede, uma vez que, quando se utiliza a amostragem de Lebesgue, menos pacotes de dados serão gerados pelos nós sensores [ÅRZÉN, 1999]. Por conseguinte, abordar o problema dos NCSs sobre a ótica variante no tempo, como já mostrado, tem vantagens, as quais já foram destacadas em várias publicações relativas ao assunto [MCCANN, 2004; ÅSTRÖM, 2007; XU; CAO, 2007; HENNINGSSON, 2008; HEEMELS, 2008; QAISAR, 2009].

Contudo, mesmo diante das evidências e vantagens supracitadas, abordar o problema sob a ótica variante no tempo, embora, pareça a forma mais adequada, também parece se configurar na mais difícil. Isto porque, não existe um arcabouço matemático adequado para tratar os sistemas variantes no tempo, cujo exemplo típico são os NCSs. Problema este, já abordado, em geral, com pouco sucesso, utilizando-se técnicas de análise e síntese, próprias para sistemas invariantes no tempo<sup>8</sup>.

Todavia, o problema de atrasos variantes no tempo é de natureza complexa e imprevisível. Seu comportamento não pode ser mensurado, nem solucionado com abordagens baseadas em valores médios, uma vez que, atrasos variantes no tempo, de mesmos valores médios, podem provocar comportamentos adversos na resposta ao degrau de um NCS.

Muitas das afirmações realizadas até aqui, sobretudo, as do parágrafo precedente, podem ser verificadas, a partir de simulações numéricas, lançando mão de um exemplo simples, comumente, utilizado em sistemas de controle em rede [CERVIN, 2003]. Para o referido exemplo os estados iniciais da planta e do controlador, assim como, de todos os atrasos presentes no sistema de controle em rede são feitos nulos. O período de amostragem do sensor  $\tau_s$  é de 2,0 ms. O degrau unitário utilizado como sinal de referência é aplicado no instante  $t = 0$ . Ruídos de medição e perturbações não serão considerados nas simulações realizadas. Além disso, são assumidas as hipóteses de sincronismo e de *clock* global, necessárias para tornar possível a determinação dos atrasos de comunicação.

Será mostrado ainda, através do exemplo, que para a abordagem proposta o atraso não degrada o desempenho do sistema de controle em rede. Neste caso, o exemplo passa a ter força de contra-exemplo, uma vez que, os resultados obtidos são contrários aos convencionalmente esperados. Em outras palavras, ao se utilizar a abordagem proposta verifica-se, através da resposta ao degrau unitário, que o desempenho obtido em relação aos sistema de controle de tempo contínuo e de tempo discreto sem atrasos é melhor. Ou seja, não é verificado degradação de desempenho e sim a melhoria do mesmo. Indicadores de desempenho da resposta ao degrau, como o *overshoot* e tempo de estabelecimento, são reduzidos quando se utiliza a abordagem proposta e pré-apresentada no exemplo a seguir.

---

<sup>8</sup>A utilização de técnicas clássicas de análise e síntese, tais como, as transformadas de Fourier [OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p.104], Laplace [OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p.391], Z [JURY, 1958; OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p.442] e Delta [MIDDLETON; GOODWIN, 1990] não se aplicam, pelo simples fato de serem técnicas válidas e/ou concebidas, apenas, para sistemas lineares invariantes no tempo.

## 1.1 Exemplo numérico

Para o exemplo em questão o controlador de tempo contínuo cuja função de transferência é  $C_a(s)$  deve ser pré-projetado para estabilizar uma planta SISO (*Single input single output*) cuja função de transferência é  $G(s)$ . Tais funções de transferência são [CERVIN, 2003].

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)} \quad (1.3)$$

$$C_a(s) = 1,5 \left( 1 + \frac{0,035s}{1 + 0,0035s} \right) \quad (1.4)$$

Além disso, o controlador foi projetado para o sistema de controle não conectado em rede (nNCS - sigla em inglês para *nonnetworked control system*).

A representação em espaço de estados da dinâmica desse controlador é apresentada como sendo<sup>9</sup>

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (1.6)$$

onde:  $\mathbf{x}_c$  é o estado do controlador,  $\mathbf{e}_r(t)$  é o erro de referência,  $\mathbf{u}(t)$  é a saída do controlador. Para este exemplo, os valores das matrizes da representação em espaço de estados do controlador são:  $\mathbf{A}_c = -285,7143$ ,  $\mathbf{B}_c = 64$ ,  $\mathbf{C}_c = -66,9643$  e  $\mathbf{D}_c = 16,5$ . E, a representação em espaço de estados da dinâmica da planta é:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (1.8)$$

onde:  $\mathbf{x}_p(t)$  é o estado da planta,  $\mathbf{y}(t)$  é o sinal de saída da planta,  $\mathbf{u}(t)$  é a saída do controlador. Ambos de tempo contínuo. Para este exemplo, os valores das matrizes da representação em espaço de estados da planta são:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_p = [ 0 \quad 31,25 ] \quad (1.9)$$

A planta pode operar submetida ou não a um atraso de controle. Tal atraso pode ser de transporte ou provocado pelo próprio NCS. Além disso, o atraso de controle pode ser invariante no tempo  $\tau$  ou variante no tempo  $\tau_k$ . Seu valor pode ser menor ou igual, ou maior que um período de amostragem do sensor  $\tau_s$ , isto é,  $\tau \leq \tau_s$  ( $\tau_k \leq \tau_s$ ) ou  $\tau > \tau_s$  ( $\tau_k > \tau_s$ ). Para o exemplo

<sup>9</sup>Todos os passos da metodologia de projeto, aqui desenvolvida e utilizada, são apresentados no Capítulo 6, Seção 6.2.

em questão será considerado um atraso menor ou igual a um período de amostragem do sensor, ou seja,  $\tau \leq \tau_s$  ( $\tau_k \leq \tau_s$ ) e este atraso é gerado pelo próprio NCS. Neste caso, a dinâmica de tempo contínuo em espaço de estados da planta é modificada para

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (1.11)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas na equação (1.9).

A seguir será apresentado o modelo equivalente discreto (MED) do controlador guiado no tempo. E, na subseção seguinte o MED do controlador operando no modo GET.

### 1.1.1 MED do controlador guiado no tempo

Quando o controlador opera no modo guiado no tempo (GT) seu modelo é invariante no tempo. Neste caso, o modelo equivalente discreto (MED) do controlador, apresentado nas equações (1.5) e (1.6) e obtido pelo método da invariância ao degrau<sup>10</sup>, é:

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c \mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t_k^c), \quad (1.13)$$

onde

$$\Phi_c = e^{\mathbf{A}_c \tau_s} = e^{-285,7143 \tau_s} \quad (1.14)$$

$$\Gamma_c = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143 \tau_s}) \quad (1.15)$$

O sistema de controle com este controlador em operação e não submetido a atraso é aqui denominado de sistema de controle não conectado em rede com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD). Por outro lado, quando o sistema de controle em rede opera com este controlador, cujo período de amostragem  $\tau_s$ , invariante no tempo, e é submetido a atrasos variantes no tempo ele é aqui denominado de sistema de controle em rede com atrasos variantes (NCSav).

### 1.1.2 Modo GET do controlador

Quando o controlador opera no modo simultaneamente guiado a evento e no tempo (GET), a temporização do sistema de controle em rede é como a apresentada na Figura 1.3. Neste

<sup>10</sup>O método da invariância ao degrau não é comumente utilizado para a discretização de controladores [HANSELMANN, 1987]. Sua utilização foi possível graças ao modelo matemático desenvolvido e apresentado no Capítulo 4, Seção 4.7.

caso, se qualquer um dos atrasos de aquisição  $\tau_k^s$  ou  $\tau_{k+1}^s$  ou os atrasos de comunicações sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  ou  $\tau_{k+1}^{sc}$  variar, o intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}$  será variante no tempo. A consequência da variabilidade temporal dos atrasos e, por conseguinte, do intervalo de amostragem do controlador é um controlador, cujas equações dinâmicas de tempo discreto são variantes no tempo. Seus coeficientes mudam a cada ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC).

A representação dinâmica de tempo discreto deste controlador é obtida a partir da representação dinâmica de tempo contínuo definida pelas equações (1.5) e (1.6). Dessa maneira, seu MED com intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}$  variante no tempo e determinado por<sup>11</sup>

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc}, \quad (1.16)$$

é<sup>12</sup>

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c(\tau_{c_k})\mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c(\tau_{c_k})\mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c\mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (1.18)$$

onde:

$$\Phi_c(\tau_{c_k}) = e^{\mathbf{A}_c\tau_{c_k}} = e^{-285,7143\tau_{c_k}} \quad (1.19)$$

$$\Gamma_c(\tau_{c_k}) = \int_0^{\tau_{c_k}} e^{\mathbf{A}_cs} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143\tau_{c_k}}) \quad (1.20)$$

são variantes no tempo, desde que,  $\tau_{c_k}$  seja variante no tempo. A variabilidade temporal de  $\tau_{c_k}$  é decorrente dos atrasos introduzidos no NCS pelos nós componentes e pela rede de comunicação. Além disso, como a lei de controle é dependente do intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}$ , o mesmo deve ser determinado a cada ciclo de operação do algoritmo de controle. Entretanto,  $\tau_{c_k}$  depende de valores futuros de atrasos. Neste caso, tais atrasos devem ser estimados. Todavia, uma maneira de evitar tal estimativa é utilizar  $\tau_{c_{k-1}}$  em vez de  $\tau_{c_k}$ . Desse modo, poderia se determinar os atrasos. A determinação destes atrasos força a hipótese de sincronismo entre os *clocks* dos nós sensor e controlador do sistema de controle em rede. Além disso, o intervalo de amostragem do  $(k-1)$ -ésimo COAC do controlador pode ser, ou medido a partir do *clock* local do nó controlador, ou obtido a partir dos atrasos determinados<sup>13</sup>.

<sup>11</sup>A equação (1.16) é uma das contribuições desta Tese. Ela é apresentada e provada no Capítulo 3, Teorema 3.1 [SILVA; LIMA, 2018].

<sup>12</sup>As expressões dos intervalos de amostragem do controlador, são deduzidas no Capítulo 3, tanto para  $\tau_k \leq \tau_s$ , isto é,  $\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc}$ , Teorema 3.1 [SILVA; LIMA, 2018], bem como, para  $\tau_k > \tau_s$ , sem perdas de pacotes, Teorema 3.3 e com perdas de pacotes, Teorema 3.7.

<sup>13</sup>Uma das técnicas, comumente, utilizadas para a determinação de atrasos em sistemas distribuídos é a técnica de *timestamping* [JOHANNESSEN, 2004; IEEE, 2009].

### 1.1.3 Resultados de simulação

Para este exemplo, considera-se que o NCS seja de topologia S-CA e que o atraso de controle  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a$  seja inicialmente dado, propositadamente e por simplicidade pela sequência de atrasos  $\{\tau_k\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , cuja lei de formação é  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  e em seguida assume-se que  $\{\tau_k\}$  passa a ter a lei de formação  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . Assim, pode-se observar que em ambos os casos o atraso de controle tem valor médio  $\tau_{k_m}$  dado por  $\tau_{k_m} = (0,1\tau_s + 0,8\tau_s)/2 = 0,45\tau_s$ . Desse modo, para  $\tau_s = 2,0$  ms, tem-se que  $\tau_{k_m} = 0,90$  ms. Todavia, ainda assim, o efeito destas sequências de atrasos sobre o NCS é o de provocar degradações de desempenho de maneiras, acentuadamente, diferentes. Neste caso, a degradação de desempenho do primeiro para o segundo caso é mais acentuada quando o intervalo de amostragem do controlador é invariante no tempo. Além disso, quase nenhuma degradação de desempenho é percebida quando o controlador opera com intervalo de amostragem variante no tempo.

Para elucidar melhor tais assertivas considera-se inicialmente a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , cuja lei de formação é  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . Além disso,  $\tau_k \leq \tau_s$ , com  $\tau_s = 2,0$  ms,  $\tau_k^s = 30 \mu s$ ,  $\tau_k^c = 20 \mu s$ ,  $\tau_k^a = 30 \mu s$  e a sequência de atrasos de comunicação sensor controlador  $\{\tau_k^{sc}\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , tem seus termos definidos, em milissegundos, através da seguinte lei de formação  $\{0,12, 1,52, 0,12, 1,52, \dots\}$ . Neste caso, uma ampliação da temporização ocorrida durante os dois primeiros COAC é ilustrada na Figura 1.7.

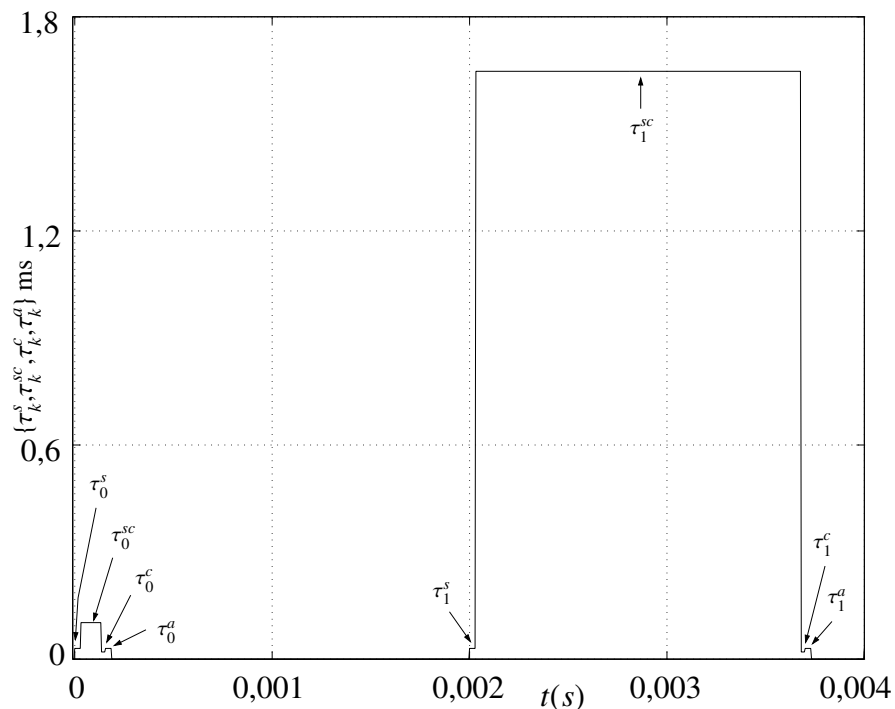


Figura 1.7: Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , tem lei de formação do tipo  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

Pode-se observar nesta figura, de forma explícita, os atrasos do NCS (a saber para a topologia S-CA:  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^a$ ), os quais compõem o valor de  $\tau_k$  que, por definição, é dado por  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a$ .

Sob tais condições, as respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle de tempo contínuo (nNCSC), equações (1.3) e (1.4); do sistema de controle não conectado em rede com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD), equações (1.12) - (1.15); e, do NCS submetido ao atraso  $\tau_k$  variante no tempo (NCSav) com o controlador de tempo discreto operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , invariante no tempo, são ilustradas na Figura 1.8.

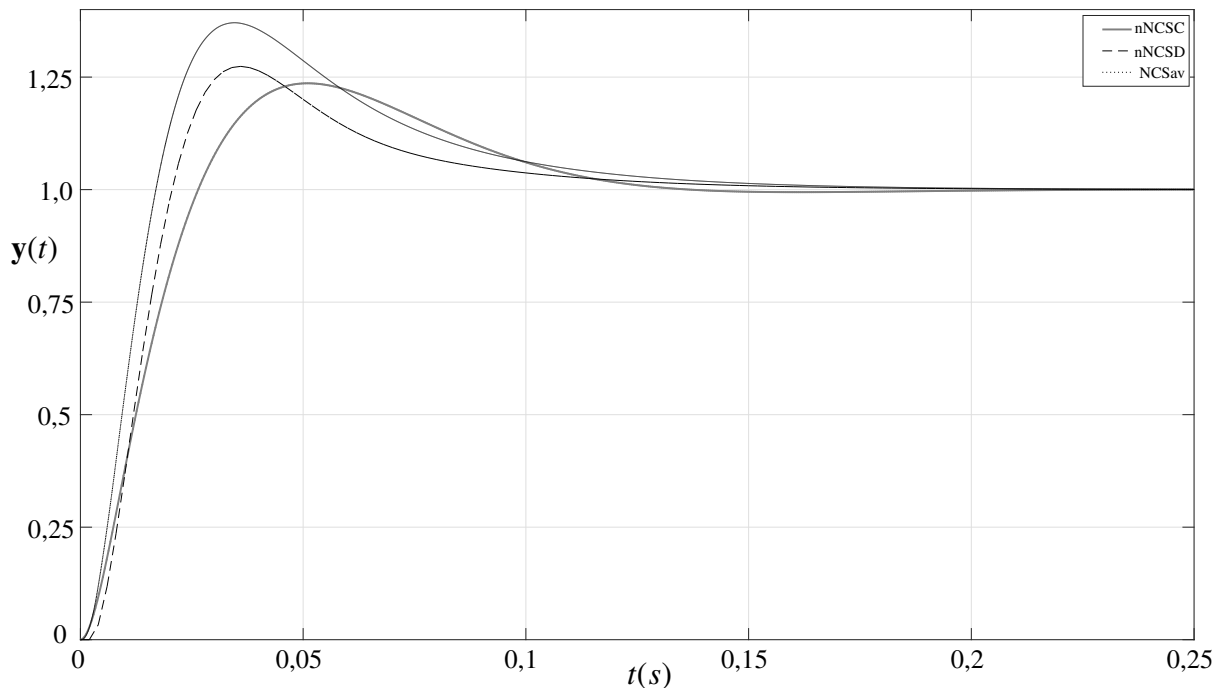


Figura 1.8: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD) e do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , variante no tempo (NCSav) e com o controlador operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  invariante no tempo e  $\{\tau_k\}$  da forma  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

Admita-se para o mesmo exemplo que o atraso de controle seja agora também, propositalmente e por simplicidade, dado pela sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ . Sequência esta cujos termos são  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . Analogamente ao caso anterior,  $\tau_k \leq \tau_s$ , com  $\tau_s = 2,0$  ms,  $\tau_k^s = 30$   $\mu$ s,  $\tau_k^c = 20$   $\mu$ s,  $\tau_k^a = 30$   $\mu$ s e a sequência de atrasos de comunicação sensor controlador  $\{\tau_k^{sc}\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , tem seus termos definidos, em milissegundos, através da seguinte lei de formação  $\{1,52, 0,12, 1,52, 0,12, \dots\}$ . Neste caso, uma ampliação da temporização ocorrida durante os dois primeiros COAC, é ilustrada na Figura 1.9. Pode-se observar, que também nesta situação o atraso de controle tem valor médio  $\tau_{k_m}$  dado por  $\tau_{k_m} = (0,1\tau_s + 0,8\tau_s)/2 = 0,45\tau_s = 0,90$  ms, para  $\tau_s = 2,0$  ms. Dessa maneira, a simulação do NCS é realizada exatamente como no caso anterior, mudando-se, deste para aquele, apenas a ordem de ocorrência dos termos da sequência de atrasos. Entretanto,  $\tau_{k_m}$  continua exatamente



com o mesmo valor do caso precedente.

Nestas condições, as respostas ao degrau unitário do sistema de controle de tempo contínuo (nNCSC), equações (1.3) e (1.4); do sistema de controle com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD), equações (1.12) - (1.15) e do NCS submetido a atraso  $\tau_k$  variante no tempo (NCSav) com o controlador operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , invariante no tempo, são ilustradas na Figura 1.10.

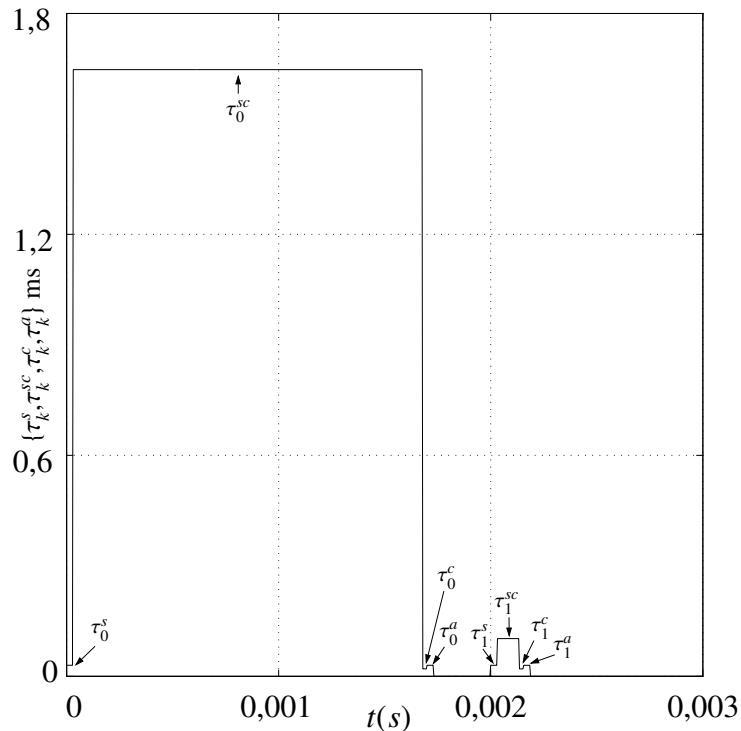


Figura 1.9: Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  tem lei de formação do tipo  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

Dos resultados obtidos e ilustrados nas Figuras 1.8 e 1.10, a diferença entre as curvas nNCSC e nNCSD é decorrente do atraso médio de meio intervalo de amostragem do atuador, isto é,  $\tau_a/2$ , introduzido pelo segurador de ordem zero presente na entrada da planta [FRANKLIN, 2006; ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.454; p.320].

Além disso, observa-se claramente a partir de tais resultados que a resposta ao degrau do NCS com o controlador, operando com intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}$  igual ao período de amostragem do sensor  $\tau_s$ , invariante no tempo, e  $\tau_k$  variante no tempo (curva NCSav das Figuras 1.8 e 1.10), mudou completamente quando o atraso de controle era o da Figura 1.7 e passou a ser o da Figura 1.9. Como estes atrasos são praticamente idênticos e possuem o mesmo valor médio, fica evidenciado por decorrência, que sinais de atraso de mesmo valor médio provocam efeitos adversos na resposta ao degrau unitário do NCS.

No caso da curva NCSav mostrada na Figura 1.8, observa-se que seu *overshoot*, cujo valor é 0,371 é maior que o das respostas ao degrau unitário do sistema de controle de tempo contínuo

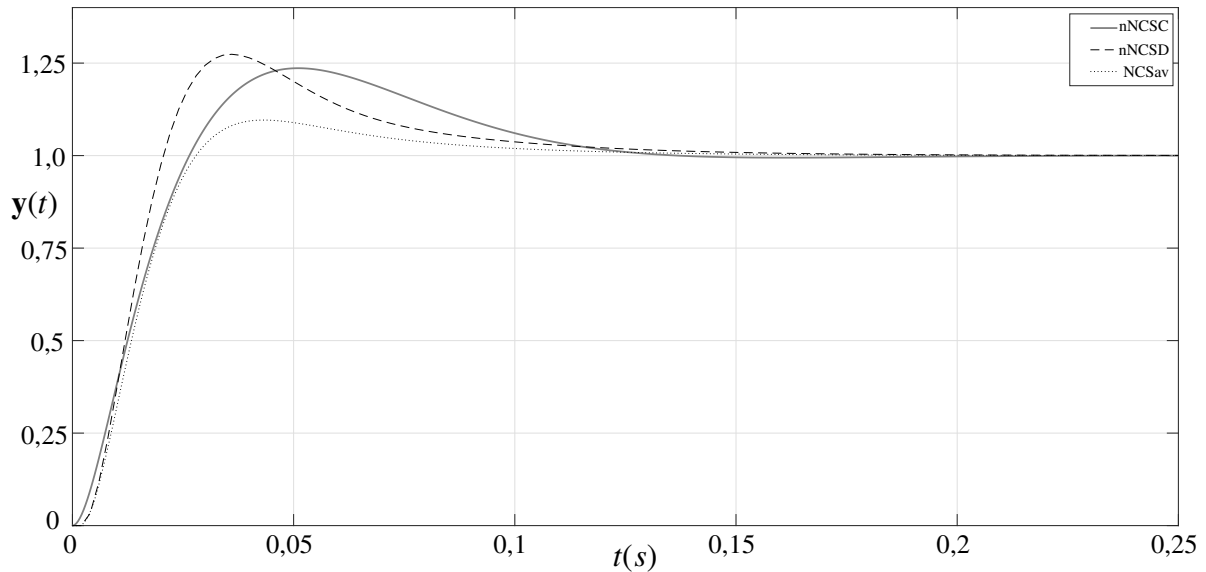


Figura 1.10: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD) e do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) e com o controlador operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  invariante no tempo e  $\{\tau_k\}$  da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

(curva nNCSC), de valor 0,2362, assim como, do sistema de controle com o controlador de tempo discreto ou digital (curva nNCSD), cujo valor é 0,2739. Conforme salientado, o comportamento da resposta ao degrau unitário apresentado na curva NCSav da Figura 1.10, é resultado do atraso variante no tempo, que neste caso, foi o responsável pela redução do *overshoot*, melhorando o desempenho da resposta ao degrau unitário do NCS. Em outras palavras, o atraso, neste caso, teve um efeito estabilizante, conforme evidenciado através da redução do *overshoot*.

Neste caso, uma simples mudança no comportamento do atraso de controle (veja Figura 1.9), acarreta na resposta ao degrau unitário do NCS, um *overshoot* de valor 0,096, que é muito inferior ao *overshoot* das respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle de tempo contínuo (curva nNCSC), cujo valor é de 0,2362, e com o controlador de tempo discreto ou digital (curva nNCSD), cujo valor é 0,2739, segundo ilustrado na Figura 1.10. Neste caso, contrariamente ao caso precedente, o atraso teve efeito estabilizante, uma vez que, seu efeito foi o de reduzir o *overshoot* da resposta ao degrau unitário do NCS.

De outro modo, quando o mesmo sistema de controle do exemplo em discussão, é simulado com o controlador operando simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET), equações (1.17) - (1.20), e com atraso de controle ilustrado na Figura 1.7, as respostas ao degrau unitário são ilustradas na Figura 1.11. Nesta figura, ainda são plotadas as respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle de tempo contínuo (nNCSC), equações (1.3) e (1.4); assim como, do sistema de controle com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD), equações (1.12) - (1.15) e do NCS com o controlador operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , invariante no tempo, e  $\tau_k$  variante no tempo (NCSav).

Da Figura 1.11 pode-se observar que o *overshoot* da resposta ao degrau unitário do NCS, com o controlador operando simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET) é o menor, 0,235, dentre as abordagens simuladas. Outro resultado interessante é o valor do *overshoot* da resposta ao degrau unitário do NCS com o controlador operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , invariante no tempo, e  $\tau_k$  variante no tempo (NCSav), cujo valor é 0,371, mesmo com atraso inicial  $\tau_0 = 0,1\tau_s$ .

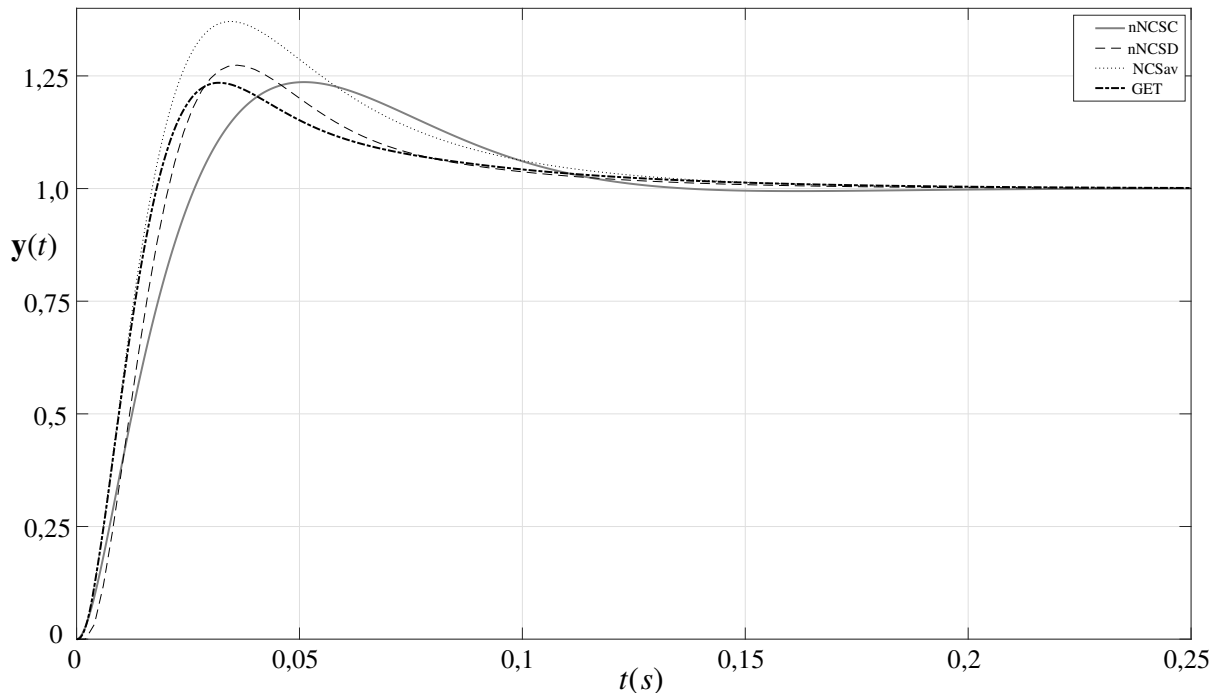


Figura 1.11: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

Neste caso, apenas o *overshoot* da resposta ao degrau unitário do NCS com o controlador operando no modo GET, cujo valor é 0,235, é menor que os *overshoots* da resposta ao degrau unitário do sistema de controle de tempo contínuo (nNCSC) e do sistema de controle de tempo discreto (nNCSD), respectivamente, dados por 0,2362 e 0,2739. Como os sistemas de controle nNCSC e nNCSD não estão submetidos a atrasos, era de se esperar que seus *overshoots* fossem menores que aquele do sistema de controle GET, que está submetido a atrasos.

Os sinais de controle para as estratégias simuladas e cujas respostas ao degrau unitário foram apresentadas na Figura 1.11 são mostrados na Figura 1.12.

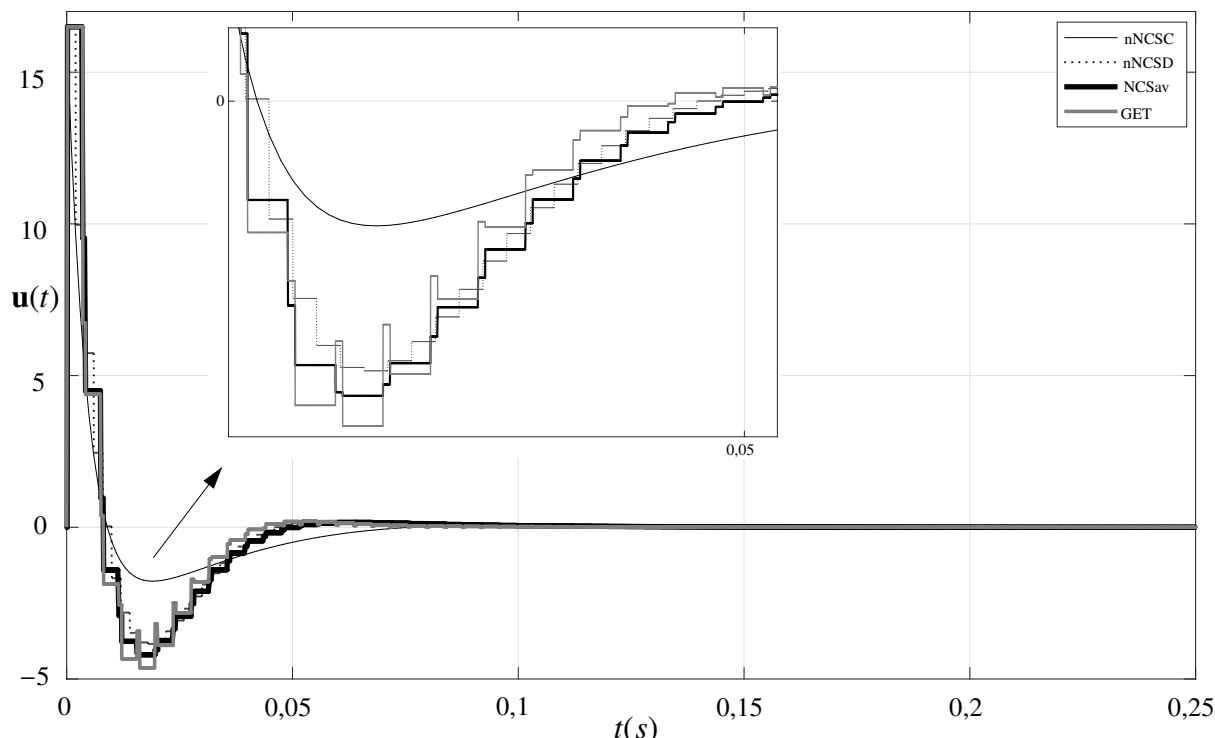


Figura 1.12: Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

**Observação 1.1 (Sequências de IAC e de IAA)** As sequências de IAC  $\{\tau_{c_k}\}$  e de IAA  $\{\tau_{a_k}\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  são, respectivamente, da forma  $\{\tau_{c_0}, \tau_{c_1}, \tau_{c_2}, \dots\}$  e  $\{\tau_{a_0}, \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \dots\}$ .

**Observação 1.2 (Sequências  $\{\tau_k\}$ ,  $\{\tau_{c_k}\}$  e  $\{\tau_{a_k}\}$  do exemplo em discussão)** A partir dessas considerações, para o exemplo em questão, quando a sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}$  é da forma  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ , com  $\tau_s = 2,0$  ms,  $\tau_k^s = 30$   $\mu$ s,  $\tau_k^c = 20$   $\mu$ s,  $\tau_k^a = 30$   $\mu$ s a sequência de atrasos sensor controlador  $\{\tau_k^{sc}\}$  é dada por  $\{0,12, 1,52, 0,12, 1,52, \dots\}$  ms o que resulta na sequência  $\{\tau_{c_k}\}$  com lei de formação  $\{1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, \dots\}$ , ou  $\{3,4, 0,6, 3,4, 0,6, \dots\}$  e na sequência  $\{\tau_{a_k}\}$  com lei de formação  $\{1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, \dots\}$ . Analogamente, quando a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  é da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  a sequência  $\{\tau_k^{sc}\}$  terá lei de formação  $\{1,52, 0,12, 1,52, 0,12, \dots\}$  ms, a sequência de IAC  $\{\tau_{c_k}\}$  terá lei de formação  $\{0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, \dots\}$ , ou  $\{0,6, 3,4, 0,6, 3,4, \dots\}$  ms e a sequência  $\{\tau_{a_k}\}$  é da forma  $\{0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, \dots\}$ .

Por outro lado, ao se repetir a simulação com os NCSs submetidos ao atraso ilustrado na Figura 1.9, obtém-se como resultado as respostas ao degrau unitário mostradas na Figura 1.13.

Constata-se então, da Figura 1.13, que o *overshoot* da resposta ao degrau unitário do sistema de controle em rede (NCS), com o controlador operando no modo GET, e NCS submetido ao atraso de controle  $\tau_k$  variante no tempo, com sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}$

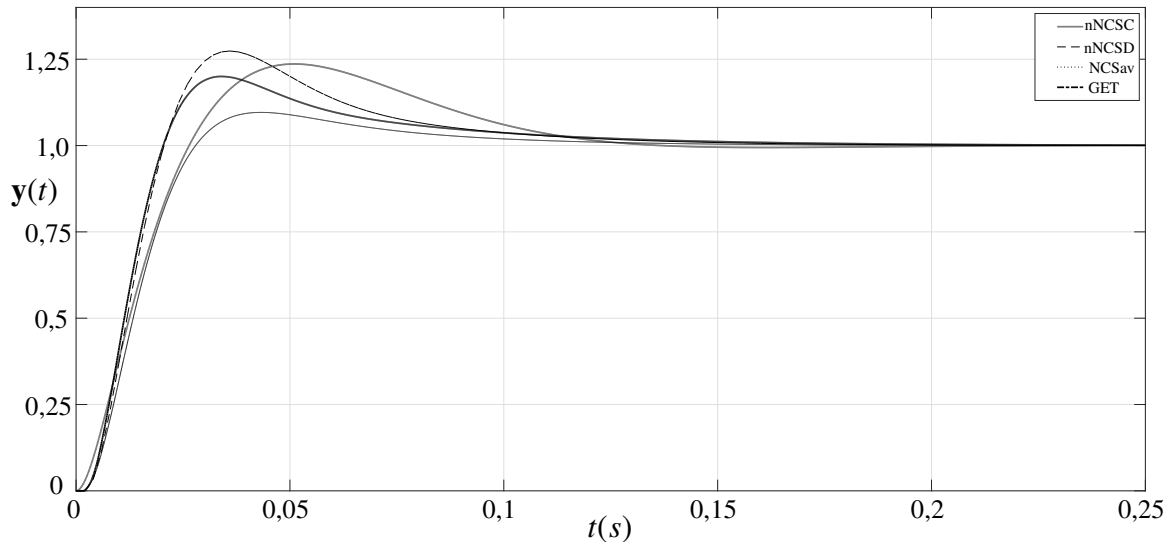


Figura 1.13: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , é de 0,2, o qual é maior que aquela da resposta ao degrau do NCS, com controlador operando com período de amostragem  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , e atraso de controle  $\tau_k$  com sequência de atraso de controle  $\{\tau_k\}$  da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  (veja curva NCSav da Figura 1.13), cujo *overshoot* é de 0,096. Pode-se verificar ainda que, os *overshoots* das respostas ao degraus unitários dos NCSs com controlador operando nos modos GET e NCSav são menores que os *overshoots* das respostas aos degraus unitários dos sistemas de controle de tempo discreto ou digital, cujo valor é 0,2739 e do sistema de controle de tempo contínuo, que é de 0,2362.

Os sinais de controle para as estratégias simuladas e cujas respostas ao degrau unitário foram apresentadas na Figura 1.13 são mostrados na Figura 1.14.

Neste caso, o exemplo em questão, cuja simulação foi feita com o controlador operando no modo GET, passa a ter força de contra-exemplo, sob o ponto de vista do efeito degradativo do atraso, uma vez que, o efeito do mesmo sobre o NCS é, justamente, contrário ao esperado. Nas respostas ao degrau unitário apresentadas nas Figuras 1.11 e 1.13, o *overshoot* para quando o NCS opera com controlador no modo GET foi praticamente igual, isto é, os *overshoots* foram, respectivamente de 0,235 e 0,2. Naturalmente, é de se esperar que com o aumento do período de amostragem  $\tau_s$  e, conseqüentemente, dos valores dos atrasos  $\tau_k$ , a degradação de desempenho de tal resposta ao degrau unitário do NCS também aumente.

Portanto, conclui-se, evidentemente, para este exemplo simples, que o atraso variante no tempo não degrada o desempenho da resposta ao degrau do NCS quando o controlador do

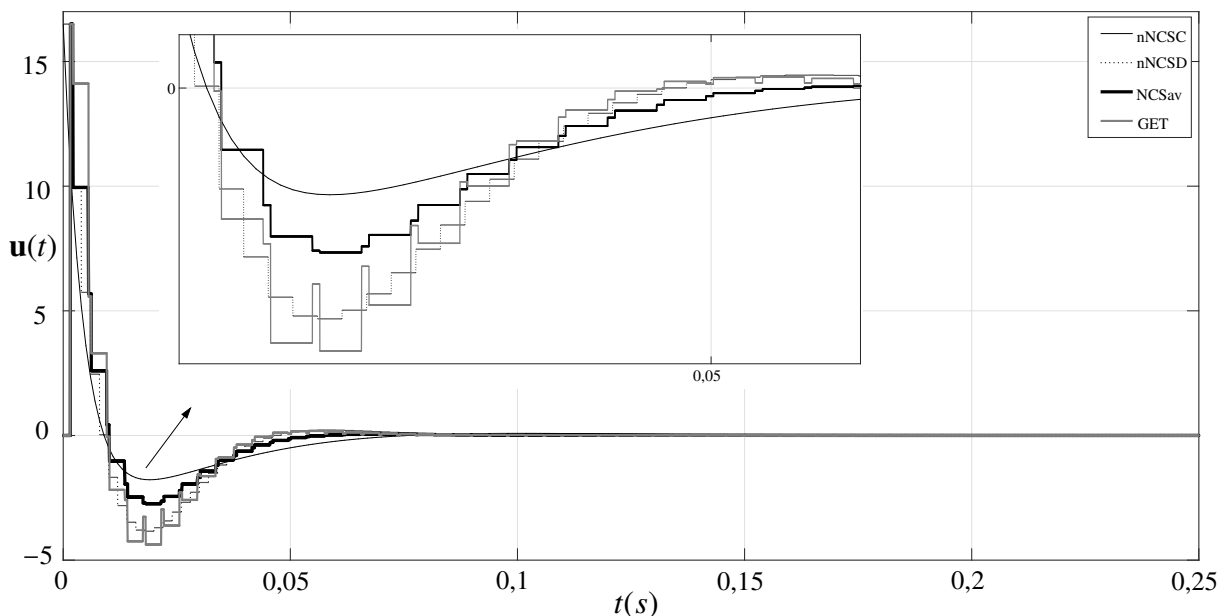


Figura 1.14: Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

mesmo opera no modo GET. Seu efeito é estabilizante, resultado este contrário ao esperado<sup>14</sup>. Assim sendo, tais atrasos são os responsáveis pela melhoria do desempenho da resposta ao degrau unitário do NCS, o que evidencia que abordar o problema de controle em rede sob a ótica variante no tempo pode ser a forma mais adequada de resolvê-lo, muito embora, isto não seja fácil. Resultados análogos a estes, também são obtidos para atrasos com comportamento estocástico, aplicados a sistemas de controle SISO (*Single input single output*), assim como, aplicados a sistemas MIMO (*Multiple input multiple output*). Dessa maneira, a abordagem pré-apresentada aqui e, todo o arcabouço filosófico e teórico que a norteia, constituem-se na principal contribuição desta tese.

### 1.1.4 Aspectos teóricos práticos das abordagens propostas

As abordagens propostas e apresentadas neste documento são adaptativas, uma vez que, o(s) parâmetro(s) do controlador é (são) atualizado(s) em tempo de execução. Dentre estas abordagens a GET foi pré-apresentada no exemplo precedente. Nela o atraso e o intervalo de amostragem do controlador de tempo discreto são atualizados a cada ciclo de operação do algoritmo de

<sup>14</sup>Da teoria clássica de controle, referentemente, a atrasos de transportes, sabe-se que tais atrasos nem sempre degradam o desempenho ou instabiliza um sistema de controle, muito embora “atrasos sejam conhecidos por provocar efeitos complexos sobre a estabilidade [KOLMANOVSKII, 1999]. A despeito de sua má reputação (veja por exemplo [OLBROT, 1984] para sistemas atrasados e [DATKO, 1998] para o caso neutro), eles podem ter um efeito estabilizante: o bem conhecido exemplo  $\ddot{y}(t) + y(t) - y(t-h) = 0$  é instável para  $h = 0$ , mas é assintoticamente estável (A aproximação  $\dot{y}(t) \approx [y(t) - y(t-h)]/h$  explica o efeito do amortecimento) para  $h = 1$  (veja também outros exemplos em [ABDALLAH, 1993] para sistemas lineares ou [GOUBET M. DAMBRINE, 1995] para sistemas não lineares)” [RICHARD, 2003].

controle.

Do ponto de vista teórico não há dúvidas que existem ganhos com a abordagem proposta, uma vez que, os problemas decorrentes dos atrasos variantes no tempo são, em geral, amenizados.

Por outro lado, do ponto de vista prático, ainda não existem soluções comerciais de *hardware*, como CLPs (Controladores lógicos programáveis), com os quais se possa implementar a abordagem GET proposta. Fato este justificado pela inexistência no mercado de CLPs que operem com intervalos de amostragem variantes no tempo. Neste caso, implementações específicas podem ser desenvolvidas utilizando-se microcontroladores, DSPs (*Digital Signal Processors*) ou computadores.

Outro fator que poderia ser crítico na implementação da abordagem GET é relativo ao cumprimento da hipótese de sincronismo dos *clocks* presentes nos nós componentes. Todavia, isto não se constitui um problema, uma vez que, a especificação do tempo máximo necessário para o estabelecimento do sincronismo de *clocks* em uma rede comunicação é ínfimo em relação aos atrasos do sistema de controle em rede. Em termos quantitativos, por exemplo, para a rede CAN (*Controller Area Network*) [BOSCH, 1991], este tempo é igual ao tempo de transferência de um *bit*. Isto significa que para a máxima taxa de transferência da rede CAN, que é de 1 Mbps, este tempo é de 1  $\mu$ s. Já o padrão IEEE 1588 estabelece o sincronismo para redes de área local, inclusive para a rede *Ethernet*, com precisão inferior a 1 ns [IEEE, 2009, p.C1]. Dessa maneira, do ponto de vista tecnológico, a hipótese de sincronismo é facilmente satisfeita, não se constituindo portanto, em um problema ou limitação para a implementação física de um sistema de controle em rede. Complementar a tais fatos, sabe-se que a maioria das aplicações de controle tem requisitos, relativos à taxa de amostragem, satisfeitos para períodos de amostragem da ordem de milissegundos, o que para os casos supracitados representam algo em torno de milhares, ou até milhões, de vezes maior que o tempo de sincronismo da rede.

## 1.2 Justificativa

A crescente utilização dos sistemas de controle em rede, por si só, justifica o desenvolvimento teórico da área. Como já enfatizado neste texto, diversas são as razões e vantagens de sua utilização. Entre outras, tem-se: a redução do número de cabos utilizados nas aplicações e, por conseguinte, tem-se a redução do peso e do volume das mesmas; facilidade de expansão e configuração; supervisão; manutenção e aumento da modularidade. Por outro lado, a infraestrutura de redes de comunicação e o preço de *chips* são cada vez menores, o que favorece sua utilização.

Para se ter uma idéia, em termos quantitativos, é relevante analisar a tendência de crescimento, por exemplo, do número de nós CAN (*Controller Area Network*) [BOSCH, 1991] utili-

zados nos últimos anos. A saber, em 1999 foram utilizados cerca de 60 milhões de nós CAN, em 2001 cerca de 260 milhões, em 2003 cerca de 360 milhões [HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.743], em 2005 cerca de 400 milhões<sup>15</sup> [NAVET, 2005]. Dessa maneira, pode-se constatar um aumento, ano após ano, do número de nós CAN utilizados. Número este, que só tende a aumentar, uma vez que, órgãos reguladores de indústrias, tais como, a automobilística exigem cada vez mais que veículos sejam fabricados com redes de comunicação interligando seus módulos de controle. Neste sentido, os Estados Unidos da América foram pioneiros, quando a Agência de Proteção Ambiental deste país passou a exigir a utilização de rede CAN para diagnósticos *on board* em todos os carros e luzes de caminhões, de todos os modelos fabricados a partir de 2008 [DAVIS, 2007]. Tal medida, certamente, obrigará diversos países a fazerem o mesmo, para que possam exportar seus veículos para a referida nação.

Todavia, se por um lado a demanda tecnológica é crescente, por outro lado, o desenvolvimento teórico não cresce a taxas suficientes para suprir as necessidades existentes. O resultado disso, é a subutilização dos recursos físicos existentes, sobretudo, daqueles referentes à rede de comunicação. Problema este atacado indiretamente, através da criação de dispositivos com taxas de processamento maiores e barramentos de comunicação com capacidades de transferência mais elevadas<sup>16</sup>. A solução óbvia desse impasse ocorrerá naturalmente quando o desenvolvimento teórico da área se consolidar. Fato este que justifica o estudo da área e, por conseguinte, a elaboração desta tese.

## 1.3 Objetivos

Nesta seção serão estabelecidos os objetivos gerais e específicos correspondentes desta tese.

### 1.3.1 Objetivos gerais

Mostrar que atrasos variantes no tempo, ao contrário do que se pensa, nem sempre degradam o desempenho do sistema de controle em rede.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Por outro lado, de modo mais verticalizado, são considerados objetivos específicos:

- (i) Entender o funcionamento de um sistema de controle em rede e fazer um levantamento bibliográfico sobre o assunto de modo a abordar as principais contribuições da área;

---

<sup>15</sup> Isso sem, obviamente, levar em consideração os outros tipos de redes e protocolos de comunicações, utilizados para a automação, existentes no mercado.

<sup>16</sup> Um exemplo disso foi o surgimento do protocolo de comunicação FlexRay [CONSORTIUM, 2005], que opera com taxas de comunicação de até 10 Mbps, a qual, é dez vezes maior que a máxima taxa de transferência da rede CAN que é de 1 Mbps [BOSCH, 1991].



- (ii) Modelar o sistema de controle em rede a partir da arquitetura geral e, como também suas topologias básicas, de forma a salientar as vantagens e desvantagens de cada topologia;
- (iii) Discretizar controladores, previamente projetados para um sistema de controle não conectado em rede, de forma a possibilitar que os mesmos operem em um sistema de controle em rede e submetido a atrasos variantes no tempo, onde coexistam os paradigmas da amostragem guiadas no tempo e a eventos, ou ainda, como uma combinação dos paradigmas citados.
- (iv) Desenvolver o arcabouço matemático para a implementação da amostragem aleatória (amostragem de Lebesgue), na qual as taxas de amostragem dos sensores dos NCSs são variantes no tempo.
- (v) Explicar os efeitos do atraso variante no tempo sobre os NCSs.
- (vi) Fazer as análises de estabilidade e desempenho, para as abordagens propostas, do sistema de controle em rede;
- (vii) Simular as abordagens desenvolvidas a partir do processo de discretização do controlador e compará-las com o sistema de controle não conectado em rede;
- (viii) Mostrar através de resultados estatísticos que a variância do sinal de saída da planta se reduz quanto mais o NCS é variante no tempo.
- (ix) Elaborar conclusões sobre o trabalho desenvolvido e delinear as perspectivas de trabalhos futuros.

## 1.4 Metodologia empregada

A metodologia utilizada foi baseada inicialmente em um amplo levantamento bibliográfico, sobre os sistemas de controle em rede, objetivando a busca por modelos matemáticos analíticos menos susceptíveis aos efeitos dos atrasos sobre o sistema de controle em rede. Posteriormente foram desenvolvidos algoritmos afins, cujas implementações, processamentos e testes obtidos foram apresentados, comparados e analisados, conforme apresentação subsequente.

A metodologia de projeto, desenvolvida para tornar possível a concepção desta tese, é apresentada no Capítulo 6. Entretanto, para tornar possível entender o exemplo apresentado neste capítulo, uma parte de tal metodologia já foi apresentada na Seção 1.1.

## 1.5 Motivação

Do ponto de vista de sistemas de controle a principal motivação para se desenvolver e utilizar sistemas de controle em rede é a redução do número de cabos e, por conseguinte, a redução do peso e do volume das aplicações, fatores estes que, impactam diretamente no custo final do sistema de controle, assim como, a possibilidade de fácil reconfiguração, manutenção e expansão do mesmo.

## 1.6 Organização do documento

Além deste capítulo introdutório, o manuscrito desta tese é composto de mais seis capítulos, a seguir sumarizados:

**Capítulo 2:** São apresentadas as principais abordagens e técnicas desenvolvidas como suporte teórico dos sistemas de controle em rede;

**Capítulo 3:** São determinados analiticamente como contribuição desta tese os intervalos de amostragem dos controladores e dos atuadores do sistema de controle em rede sob a ótica dos paradigmas guiados a eventos e no tempo, assim como, simultaneamente, guiados a eventos e no tempo. Tais desenvolvimentos foram obtidos para atrasos de controle menor e maior que o período de amostragem dos sensores (ou intervalo de amostragem dos sensores) e com o sistema de controle em rede operando com e sem perda de pacotes de dados;

**Capítulo 4:** São apresentadas as discretizações da planta e do controlador dos sistemas de controle em rede, a partir de um controlador previamente projetado para um sistema de controle não conectado em rede e com modelo da planta sem atraso. A partir deste controlador de tempo contínuo são obtidos vários controladores de tempo discreto, designados a operar sob a ótica dos diversos paradigmas: tempo e evento ou sob a combinação de ambos. Modelos estes, que também são contribuições desta tese. Por fim, é apresentado, também como contribuição desta tese, um estudo realizado sobre o comportamento do segurador de ordem zero (ZOH) variante no tempo.

**Capítulo 5:** É apresentado um novo método de amostragem por cruzamento de nível para amostrar um sinal com intervalo de amostragem variante no tempo. Esse capítulo também é uma das contribuições desta tese.

**Capítulo 6:** São apresentadas as metodologias de projetos desenvolvidas e as simulações realizadas, tanto dos sistemas de controle não conectados em rede, de tempo contínuo e de tempo discreto, como também, para o sistema de controle em rede submetido a atrasos

variantes no tempo, de forma estocástica e determinística, assim como, submetidos a atrasos invariantes no tempo. Os resultados foram obtidos através de experimentos simulados em computador, cujos parâmetros de desempenho observados são alguns dos indicadores da resposta ao degrau unitário do sistema de controle em rede. Além disso, tais resultados são respaldados por um experimento estatístico, com o qual foi possível fazer uma coleta e tratamento estatístico dos dados obtidos. Bem como, são respaldados por resultados experimentais. Além disso, foi provado a estabilidade do NCS.

**Capítulo 7:** São apresentadas as conclusões da tese, assim como são indicados pontos relevantes como propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## O estado da arte

### 2.1 Introdução

Sistemas de controle em rede (NCSs - *Networked Control Systems*) são aqueles, em que pelo menos uma das conexões físicas entre os componentes (sensores, controladores e atuadores) é feita por meio de uma rede de comunicação de largura de banda e frequência de *clock* das CPUs (*Central Processing Units*) dos nós componentes limitadas. Neste caso, ou as malhas diretas<sup>1</sup> e/ou as malhas de realimentações<sup>2</sup> do NCS são fechadas por meio da rede.

O resultado da finitude da largura de banda da rede de comunicação e das frequências dos *clocks* das CPUs dos nós componentes é o inevitável surgimento de atrasos. Além disso, problemas de comunicações, tais como, interferências eletromagnéticas, entre outras particularidades, podem resultar na perda de pacotes de dados. Fatores estes agravantes, os quais podem degradar o desempenho do sistema de controle em rede e até mesmo instabilizá-lo.

Dessa maneira, os atrasos presentes nos sistemas de controle em rede são, em geral, variantes no tempo, podendo até mesmo ser de natureza estocástica. Por conseguinte, sua presença torna a análise, a síntese e o projeto do NCS um problema desafiador e multidisciplinar, cuja complexidade tem, ao longo dos anos, dificultado o desenvolvimento teórico da área. Assim, historicamente a maioria das metodologias e abordagens desenvolvidas até então, tem sido concebidas, ora sob a ótica da teoria de controle, ora sob a ótica da teoria de sistemas em tempo real.

Com o objetivo de fazer um resumo das principais contribuições da teoria de controle para NCSs, neste capítulo serão explanadas as principais metodologias e abordagens desenvolvidas, como suporte teórico dos NCSs, desde o seu surgimento até os dias atuais. Como será visto doravante, todas estas abordagens, direta ou indiretamente, estão relacionados com os problemas decorrentes da inevitável presença de atrasos nos NCSs.

---

<sup>1</sup>Malhas compreendidas das entradas do controlador para as entradas da planta.

<sup>2</sup>Malhas compreendidas das saídas da planta para as entradas do controlador.

## 2.2 Perspectiva histórica dos NCSs

Os sistemas de controle em rede (NCSs - *Networked Control Systems*) representam uma evolução dos sistemas de controle digitais que utilizam redes de comunicações [HALEVI; RAY, 1988; NASCIMENTO, 2004]. As redes de comunicações passaram a fazer parte do cenário dos sistemas de controle digital nos anos setenta do século passado. Nesta época as aplicações de controle passaram a ser cada vez maiores e mais sofisticadas. Isso acontecia, em parte, devido ao já bem amadurecido arcabouço teórico dos sistemas de dados amostrados e da teoria clássica de controle [KALMAN, 1957; JURY, 1958; RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958].

Complementar ao desenvolvimento teórico, por volta daquela década, grandes avanços tecnológicos ocorriam na microeletrônica. O que, além de possibilitar o crescimento da capacidade de integração, popularizava a utilização dos sistemas eletrônicos digitais. Em meio a essa eclosão científico-tecnológica surgiam dispositivos eletrônicos cada vez mais sofisticados. Muitos deles dotados de *interfaces* de comunicações que possibilitavam sua integração em um ambiente de redes. Além disso, a demanda por aplicações de controle cada vez mais complexas era progressiva, o que, frequentemente, resultava no aumento do número de cabos para conectar, ponto a ponto, os componentes do sistema. Com isso, além dos preços dos cabos serem reajustados com maior frequência, a complexidade das aplicações tornavam as mesmas cada vez mais dispendiosas, pesadas e de difícil manutenção, o que contrariava requisitos de projetos baseados na redução do volume e do peso de aplicações, sobretudo, daquelas embarcadas em carros e aviões. Criava-se assim o cenário propício para o surgimento dos NCSs.

Nesse contexto, a indústria automotiva, aeroespacial e aeronáutica foram as grandes protagonistas dessa mudança de paradigma. A motivação principal desses setores industriais era o de reduzir o volume e o peso de suas aplicações. A forma encontrada para satisfazer tais requisitos foi a substituição gradativa das aplicações de controle centralizadas por aquelas de controle distribuídas. Surgiram assim, os sistemas de controle distribuídos, anos depois denominados de sistemas de controle e comunicação integrados [HALEVI; RAY, 1988; RAY; HALEVI, 1988; LIOU; RAY, 1990] e, mais recentemente, de NCSs [NILSSON, 1998]. Dessa maneira, a introdução das redes nos sistemas de controle, além de atender os requisitos da demanda quanto a redução de peso e volume das aplicações, reduziam também os custos inerentes ao cabeamento citado [ZHANG; PHILLIPS, 2001]. Com isto, possibilitava-se, além do processamento distribuído [LIAN; TILBURY, 2001], supervisão, facilidade de diagnóstico e manutenção dos componentes, assim como, maior modularidade e flexibilidade no projeto do sistema [JOHNSON, 1997; NILSSON, 1998, p.8]. Além disso, outra vantagem dos NCSs é que sem modificações extras sobre a rede, é possível reconfigurá-los e expandí-los de maneira propícia ao ambiente de controle [CHOW; TIPSUWAN, 2001; ANTSAKLIS; BAILLIEUL, 2007].

Atualmente, aplicações de NCSs são encontradas nos mais diversos segmentos e atividades,

a saber: na automação industrial [HALEVI; RAY, 1988], em sistemas automotivos [BOUSTANY, 1992; ÖZGÜNER, 1992], aeronáuticos [CHOW; TIPSUWAN, 2001; WALSH; YE, 2001], em aplicações militares com aeronaves não tripuladas [SAMAD, 2007], processos químicos [RAY, 1988], plantas industriais [ZEIGLER; KIM, 1993], robótica [HALEVI; RAY, 1988], na agricultura [CANTONI, 2007], controle de máquinas elétricas [YOOK, 1998] e conversores em eletrônica de potência [MAZUMDER, 2005], controle de suspensão de veículos [ÖZGÜNER, 1992] e muitas outras [ANTSAKLIS; BAILLIEUL, 2007; TIPSUWAN; CHOW, 2003; LI; FANG, 2005; ÅRZÉN; CERVIN, 2005; YANG, 2006; HESPANHA, 2007; BAILLIEUL; ANTSAKLIS, 2007; HU, 2007; MOYNE; TILBURY, 2007; BAKULE, 2008].

Através da quantidade de aplicações supracitadas no parágrafo precedente, verifica-se a relevância do estudo de uma área como a dos NCSs. Neste sentido, retomando o conceito de NCSs introduzido no Capítulo 1, na perspectiva da arquitetura geral, ilustrada na Figura 1.4, e aqui rerepresentada, com nova notação na Figura 2.1, cujos símbolos  $S_i$ ,  $C_i$ ,  $A_i$  e  $G_i$  representam, respectivamente, nó sensor, nó controlador, nó atuador e planta do  $i$ -ésimo processo, pode-se verificar a existência de dois tipos de estruturas: direta (ou não-hierárquica) e hierárquica [CHOW; TIPSUWAN, 2001].

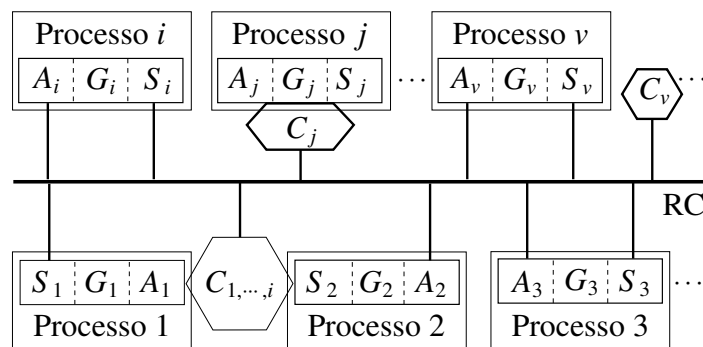


Figura 2.1: Arquitetura geral de um NCS.

Quando a estrutura é direta ou não-hierárquica os NCSs têm todos os seus componentes conectados diretamente à rede de comunicação (RC), tal como ilustrado na Figura 2.2. Nela as setas indicam a direção do fluxo de dados. Nesta figura e possivelmente em outras, posteriormente apresentadas, os processos físicos podem ser abstraídos.

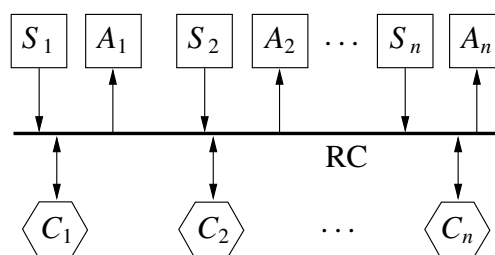


Figura 2.2: NCS com estrutura direta ou não-hierárquica.

Por outro lado, quando a estrutura é hierárquica os NCSs são formados por diversos subsistemas e cada subsistema é composto de um conjunto de sensores, um conjunto de atuadores e um controlador, como mostrado nas regiões internas dos retângulos pontilhados da Figura 2.3. No caso, o conjunto total de componentes de um subsistema é responsável pelo controle de uma determinada planta, onde o controlador  $C_i$  de cada subsistema, troca informações com um controlador central  $C_M$ . Por outro lado, cada controlador  $C_i$  recebe sinais de referência (*set point*) de  $C_M$  e devolve, a  $C_M$ , sinais de medição ou de *status* dos sensores. Exemplos de NCSs com estrutura hierárquica são encontrados em diversos módulos ou partes dos vários sistemas de controle presentes nos automóveis. O sistema de controle utilizado nos freios ABSs (*Anti-lock Brake Systems*) é um caso específico [BOSCH, 2004].

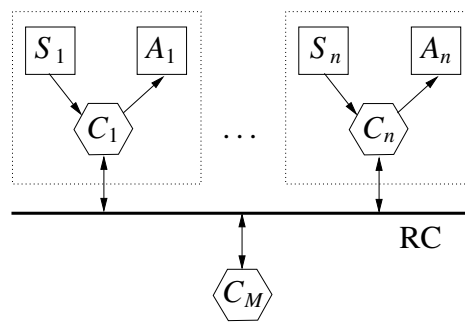


Figura 2.3: NCS com estrutura hierárquica.

Como mostrado na Figura 2.1, evidencia-se a existência de quatro topologias básicas de NCSs, as quais são apresentadas em detalhe na Figura 2.4.

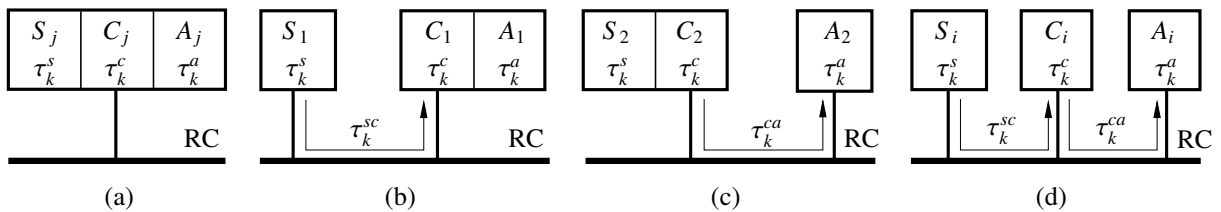


Figura 2.4: Topologias básicas dos NCSs: (a) nNCS; (b) S-CA; (c) SC-A; (d) S-C-A.

Na primeira delas, Figura 2.4a, os componentes não estão conectados por meio da rede de comunicação. Neste caso, tem-se caracterizado um sistema de controle não conectado em rede (do inglês *nonnetworked control system* - nNCS), de onde resulta o nome topologia nNCS. Um exemplo de topologia nNCS é ilustrado na Figura 2.1, processo  $j$ . Detalhes dessa topologia podem ser vistos na Figura 2.4a e as denominações da simbologia da mesma na Definição 2.1. Observa-se ainda que, a topologia nNCS pode ser vista como um sistema de controle convencional com o controlador conectado a uma rede de comunicação, para o propósito, por exemplo, de supervisão.

**Definição 2.1** *Seja  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  o  $k$ -ésimo COAC, denota-se:  $\tau_k^s$  como o intervalo de tempo para a aquisição das informações provenientes dos sensores;  $\tau_k^{sc}$  como o intervalo de tempo para que a mensagem enviada pelo nó sensor chegue ao nó controlador;  $\tau_k^c$  como o intervalo de tempo para execução do algoritmo de controle embarcado no nó controlador;  $\tau_k^{ca}$  como o intervalo de tempo para que a mensagem enviada pelo nó controlador chegue ao nó atuador;  $\tau_k^a$  como o intervalo de tempo de comutação para execução da mensagem de controle no atuador;  $t_k^s$ ,  $t_k^c$  e  $t_k^a$  são, respectivamente, o instante de amostragem dos sensores, o instante de início da execução do algoritmo de controle dos controladores e o instante de início das comutações das amostras  $\{u(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores;  $\tau_s = t_{k+1}^s - t_k^s$  como o período de amostragem dos sensores (PAS) invariante no tempo, isto é,  $t_k^s = k\tau_s$ ;  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  como o intervalo de amostragem dos sensores (IAS) variante no tempo;  $\tau_c = t_{k+1}^c - t_k^c$  como o período de amostragem do controlador (PAC) invariante no tempo, isto é,  $t_k^c = k\tau_c$ ;  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  como o intervalo de amostragem do controlador (IAC) variante no tempo;  $\tau_a = t_{k+1}^a - t_k^a$  como o período de amostragem dos atuadores (PAA) invariante no tempo, isto é,  $t_k^a = k\tau_a$ ;  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  como o intervalo de amostragem do atuador (IAA) variante no tempo e  $\tau_k$  como o atraso de controle. Isto é,  $\tau_k$  é a soma de todos os atrasos de malha, decorridos, desde o início do processo de amostragem dos sensores, até o início da atuação dos atuadores na planta.*

A segunda é denominada topologia S-CA, cuja designação resulta do fato da rede de comunicação conectar apenas o nó sensor ao nó controlador. Para este caso o nó controlador é conectado diretamente ao nó atuador. Do ponto de vista físico é possível até que, o nó controlador e o nó atuador sejam um só. Isto é, apenas um nó desempenha as atribuições de controlador e de atuador. Um exemplo de NCS deste tipo é ilustrado pelo processo 1 da Figura 2.1. Neste caso, a saída do controlador  $C_1$  é conectada diretamente à entrada do nó atuador  $A_1$ . Detalhes desta topologia podem ser vistos na Figura 2.4b.

A terceira é denominada topologia SC-A. Seu nome resulta do fato da rede de comunicações conectar apenas o nó controlador ao nó atuador. O nó sensor é conectado diretamente ao nó controlador. Fisicamente o nó controlador e o nó sensor podem até ser o mesmo. Isto é, serem implementados sob a gerência de uma única CPU. Um exemplo de NCS com este tipo de topologia é ilustrado pelo processo 2 da Figura 2.1 ou isoladamente na Figura 2.4c. Observe que, a saída do sensor  $S_2$  é conectada diretamente à entrada do nó controlador  $C_2$ .

Finalmente, na topologia S-C-A a rede de comunicação interconecta os nós sensores ao nó controlador e o nó controlador aos nós atuadores. Exemplos deste tipo de NCS são ilustrados pelos processos 3,4,  $\dots$ ,  $i$  e  $v$  da Figura 2.1 ou, isoladamente, na Figura 2.4d [YÉPEZ, 2002]. Observa-se ainda, na Figura 2.1, que as leis de controle de mais de um processo podem ser implementadas em um único nó controlador (vide controladores dos processos 3,4,  $\dots$ ,  $i$ ) ou em nós controladores distintos como os controladores dos processos  $j$  e  $v$ .

Com o objetivo de facilitar o acesso ao significado da nomenclatura da Figura 2.4, e não



torná-la repetitiva, ao longo do texto, tais denominações são sintetizadas na Definição 2.1. Por se tratar, em parte, de grandezas que representam atrasos, que em geral, são variantes no tempo, estas são dependentes do tempo  $t$ . Entretanto, para simplificar a notação, a variável  $t$  foi omitida do argumento das mesmas e a dependência temporal passa a ser, doravante, identificada pelo índice subscrito  $k$ , que concomitantemente, como já pré-estabelecido, também representa o  $k$ -ésimo ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC).

Da definição de atraso de controle [WITTENMARK, 1995], apresentada no fim da Definição 2.1, e para as topologias básicas de NCSs, das Figuras 2.4a, 2.4b, 2.4c e 2.4d, os atrasos de controle são dados, respectivamente, por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_k^a \quad (2.1)$$

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a \quad (2.2)$$

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (2.3)$$

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (2.4)$$

onde,  $\tau_k$  de (2.1)-(2.4) são, respectivamente, os atrasos de controle das topologias básicas nNCS, S-CA, SC-A e S-C-A.

### 2.2.1 Efeitos do compartilhamento de recursos físicos limitados

Quando uma rede de comunicação é introduzida em um sistema de controle tem-se automaticamente que o barramento, ou meio de comunicação da rede de comunicação é compartilhado entre os vários dispositivos a ela conectados. Os efeitos desse compartilhamento são os atrasos,  $\tau_k^{sc}$  e/ou  $\tau_k^{ca}$  (Vide Definição 2.1) que são, em geral, variantes no tempo e podem, até mesmo, ter comportamento estocástico. Estes atrasos são causados, em geral, pelo protocolo de acesso ao meio físico de transmissão, por perdas de pacotes decorrentes de erros de transmissão, colisões entre pacotes, interferências eletromagnéticas e sobrecarga do barramento [YÉPEZ, 2002; HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.209]. Por conseguinte, tais atrasos são diretamente dependentes da intensidade, distribuição de probabilidade, dinâmica do tráfego, sincronização entre os componentes do sistema de controle e do ruído do meio de comunicação [HALEVI; RAY, 1988].

Por outro lado, os atrasos  $\tau_k^a$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^s$  (Vide Definição 2.1), gerados nos nós componentes, são decorrentes da execução de tarefas pelas CPUs desses nós. Quando mais de uma tarefa é executada em um nó, pode haver concorrência pela utilização de algum recurso físico necessário para a execução destas tarefas, por exemplo, disputas de acesso à CPU ou de alguma região compartilhada da memória. Quando isto ocorre têm-se caracterizados os atrasos variantes no tempo.

A variação dos atrasos  $\tau_k^a$ ,  $\tau_k^c$ ,  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^{sc}$  e/ou  $\tau_k^{ca}$  provoca a variação de  $\tau_{ak}$ ,  $\tau_{ck}$  e  $\tau_k$ , conforme

relação de precedência temporal de execução das tarefas nos nós e transmissão das mensagens pela rede de comunicação, ilustrada na Figura 2.5, para a topologia S-C-A. Isso torna a análise de malha fechada complexa e a ordem do sistema com atraso torna-se maior que a do sistema sem atraso [WALSH, 1999; WALSH., 2002].

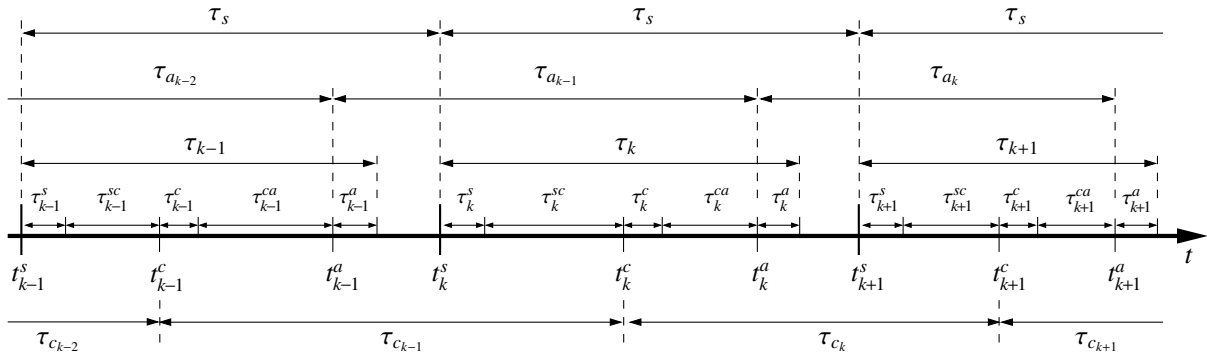


Figura 2.5: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência das mensagens (pacotes de dados) do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para três ciclos de operação do algoritmo de controle.

No caso da teoria clássica de controle, quando  $\tau_k > \tau_s$  com  $b = \lceil \tau_k \rceil^3$ , o número de estados extras  $n_u \cdot b$  para representar o atraso, cresce proporcionalmente ao número de entradas  $n_u$  do sistema de controle [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.40]. Todas as variáveis da Figura 2.5 são pré-definidas na Definição 2.1.

Dessa maneira, a introdução da rede no sistema de controle muda o escopo e a implementação do sistema de controle. Isso causa duas mudanças principais na análise e projeto do sistema de controle. A primeira, diz respeito à explícita consideração das interconexões dos componentes. Em outras palavras, como a rede afeta significativamente o comportamento dinâmico do sistema de controle, sua introdução no sistema de controle precisa ser considerada explicitamente no projeto do NCS. A segunda delas tem a ver com a renovação nas ênfases de sistemas de controle distribuído.

No caso, áreas tais como protocolos de comunicação para escalonamento e roteamento têm se tornado relevantes em controle, quando se levam em consideração aspectos como a estabilidade, desempenho e segurança do sistema. Outra área promissora é a de algoritmos e *software* capazes de tratar com restrições temporais rígidas (do inglês *hard*) e flexíveis (do inglês *soft*), os quais são relevantes do ponto de vista de implementação e projeto de controle. Desse modo, e sob este aspecto evidencia-se que, a teoria de sistemas em tempo real tem, a cada dia, importância crescente [KOPETZ, 1993; TÖRNGREN, 1998; ANTSAKLIS; BAILLIEUL, 2007].

<sup>3</sup>O símbolo matemático  $\lceil x \rceil$  significa o teto de  $x$ , isto é, o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo  $\lceil 3,5 \rceil = 4$ .

### 2.2.2 Modos de operação dos nós

Nós sensores, nós controladores e nós atuadores podem ser guiados no tempo ou a eventos [KOPETZ, 1993; TÖRNGREN, 1998]. Um nó é dito guiado no tempo quando as tarefas nele executadas têm sua inicialização pré-determinadas em projeto. Neste caso, existe um relógio ao qual é atribuído um referencial de tempo para execução das tarefas no nó. Quando se tem um NCS eminentemente guiado no tempo, todos os nós devem estar sincronizados por um relógio global [TÖRNGREN, 1998]. Por outro lado, um nó é dito guiado a eventos quando a execução de alguma de suas tarefas é inicializada pela ocorrência de um evento [NILSSON, 1998; TÖRNGREN, 1998; ÅRZÉN, 1999].

Em NCSs pode-se ter nós guiados a eventos e no tempo. Exemplos de configuração de NCS com o nó sensor guiado no tempo, nó controlador guiado a eventos e no tempo e nó atuador guiado a eventos são encontrados em [NILSSON, 1998]. Exemplos de NCSs com nós sensores guiados a eventos são encontrados em [ÅRZÉN, 1999; ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002; ÅSTRÖM, 2007; MENG; CHEN, 2012]. Por fim, em geral, nós atuadores são guiados a eventos. Isto é, a chegada de um pacote de dados no nó atuador é automaticamente revertida na ação de aplicar as saídas resultantes da execução do algoritmo de controle no nó controlador nas entradas dos atuadores.

Diversas são as vantagens e desvantagens de se utilizar uma ou outra abordagem. A principal vantagem de se utilizar a abordagem guiada no tempo é a de tornar o NCS invariante no tempo. Isso facilita a análise, uma vez que esta pode ser realizada com base na teoria clássica de controle [NILSSON, 1998; TÖRNGREN, 1998]. Por outro lado, o atraso de controle é inevitavelmente aumentado [YÉPEZ, 2002].

Quando o NCS é guiado a eventos, o atraso de controle é reduzido, uma vez que as tarefas dos nós são executadas após a ocorrência de um evento. Isto é, após a chegada de um pacote no nó componente. Outras vantagens são as reduções das utilizações das CPUs dos nós e do barramento da rede de comunicação [ÅRZÉN, 1999; ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002; HEEMELS, 2008; HENNINGSSON, 2008]. Como desvantagem tem-se os atrasos variantes no tempo, o que torna a análise do NCS um desafio, uma vez que, a teoria para modelar e tratar sistemas guiados a eventos ainda encontra-se em fase embrionária de desenvolvimento. Nos trabalhos encontrados, os intervalos de amostragem dos sensores e controladores são sempre considerados iguais. Detalhes sobre estes trabalhos podem ser encontrados no tutorial [ZOU, 2014] e em suas referências.

#### Amostragens invariante e variante no tempo

Com o advento dos dispositivos digitais, sobretudo do computador, diversos sistemas analógicos foram substituídos por digitais. Isso impulsionou o desenvolvimento da teoria dos sistemas

amostrados e conseqüentemente dos esquemas de amostragens invariante e variante no tempo. Todavia, embora partes dos sistemas analógicos, tais como controladores analógicos, fossem substituídos por digitais, outras partes do sistema, tais como o processo a ser controlado não poderia ser substituído. Dessa maneira, os sistemas de controle passaram, naturalmente, a ter natureza híbrida. Neste caso, a natureza híbrida, intrínseca, dos componentes de um sistema de controle, forçosamente leva à introdução nos mesmos, de elementos de dinâmica contínua ou discreta, linear ou não linear, como por exemplo, amostradores e seguradores (do inglês - *sample-and-hold*). Tais introspecções, são em parte justificadas, pela natureza eminentemente digital de alguns desses componentes, como computadores digitais, os quais, não podem operar diretamente sobre sinais contínuos, mas, apenas sobre seqüências de números, ou, em outras palavras, sobre sinais discretos. Por conseguinte, elementos de dinâmicas discretas, inerentemente, envolvem operações de amostragem, bem como, de *sample-and-hold*, para converter sinais contínuos em discretos e os de dinâmica discreta, ações de *hold* para converter sinais discretos em contínuos, conforme a necessidade em cada caso [KALMAN; BERTRAM, 1959].

Por simplicidade e para uma única operação de amostragem, seja  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  o  $k$ -ésimo instante de amostragem. Assim o intervalo de amostragem entre sucessivas amostras é definido como [KALMAN, 1957, p.17]:

$$T_k = t_{k+1} - t_k \quad (2.5)$$

e é denotado como o  $k$ -ésimo intervalo de amostragem. Quando o intervalo de amostragem é invariante no tempo o índice  $k$  é omitido, isto é  $T_k = T, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e o intervalo de amostragem passa a ser chamado de período de amostragem. As várias operações de amostragem, ilustradas na Figura 2.6, podem ser caracterizadas como a seguir [KALMAN; BERTRAM, 1959]:

- a) **amostragem convencional** -  $t_k = kT_k = kT$ , isto é,  $T_k = T$  é constante para todo  $k$ .
- b) **amostragem não síncrona** - se  $t_k$  e  $t'_k$  denotam os instantes em que duas operações de amostragem ocorrem, então  $t'_k = t_k + U, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , onde  $U$  é uma constante positiva.
- c) **amostragem de múltipla ordem** - o período de amostragem é uma função periódica de  $k$ . Isto é,  $T_k = T_{k+f}$ , onde  $f \in \mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3, \dots\}$ .
- d) **amostragem multitaxa** - se  $T_k$  e  $T'_k$  denotam os períodos de amostragem constantes de duas diferentes operações de amostragem, mas  $T_k \neq T'_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .
- e) **amostragem não instantânea** - pode ocorrer apenas em conexão com as operações de amostragem dos elementos *sample-and-hold*, cujas relações entradas saídas sejam dadas por

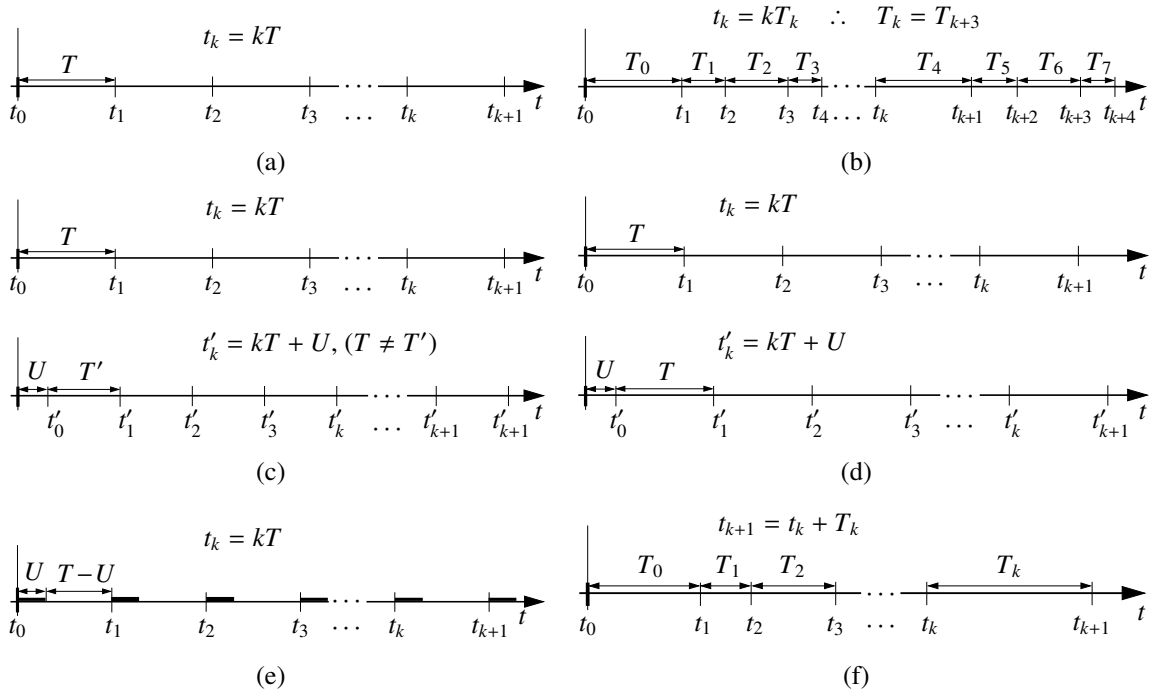


Figura 2.6: Diagramas temporais ilustrativos das diferentes operações de amostragem: (a) Amostragem convencional; (b) Amostragem múltipla ordem (do inglês *multiple-order sampling*); (c) Amostragem multitaxa; (d) Amostragem assíncrona (do inglês *nonsynchronous sampling*); (e) Amostragem não instantânea; (f) Amostragem aleatória.

$$\mathbf{v}(t_k + \ell) = \begin{cases} \mathbf{s}(t), & 0 < \ell \leq U \\ \mathbf{s}(t_k + U), & U < \ell \leq t_{k+1} - t_k \end{cases} \quad (2.6)$$

onde,  $\mathbf{s}(t)$  é a entrada do elemento *sample-and-hold*, cuja saída é  $\mathbf{v}(t)$  e  $\ell$  é o tempo passado desde a última amostragem.

**f) amostragem aleatória** -  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $t_k$  e  $T_k$ , da equação (2.5), são ambos aleatórios e o valor do  $k$ -ésimo instante de amostragem é dado por [KALMAN, 1957, p.56]:

$$t_k = \sum_{m=0}^{k-1} T_m \quad (2.7)$$

com  $t_0 = 0$ .

De uma maneira geral, as formas de amostrar um sinal podem ser enquadradas sob a ótica de dois paradigmas. Um guiado no tempo e outro guiado a eventos, ou ainda, em outras palavras e de maneira equivalente, um com taxa de amostragem invariante no tempo e outro com taxa de amostragem variante no tempo [ÅSTRÖM, 2007; SHEN, 2012]. Neste caso, para os esquemas de amostragem pré-definidos, apenas a amostragem aleatória é guiada a eventos, as outras são consideradas guiadas no tempo.

Esquemas de amostragem com taxa de amostragem invariante no tempo foi denominada por Åström de amostragem de Riemann [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002]. Uma figura ilustrativa da amostragem de Riemann, realizada com segurador de ordem zero, é ilustrada na Figura 2.7 [MCCANN, 2004]. Pode-se observar que o sinal amostrado  $y(t_k^s)$ , com  $t_k^s = k\tau_s$ , a partir do sinal analógico  $y(t)$  tem período de amostragem  $\tau_s = t_{k+1}^s - t_k^s$ , invariante no tempo. Diversas são as vantagens deste tipo de amostragem. Dentre as quais destaca-se não apenas a simplicidade, mas também, toda uma teoria desenvolvida e consolidada para sistemas invariantes no tempo [JURY, 1958; KALMAN; BERTRAM, 1959; YAMAMOTO, 1996], o que, obviamente, facilita o projeto e a análise do sistema de controle [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002].

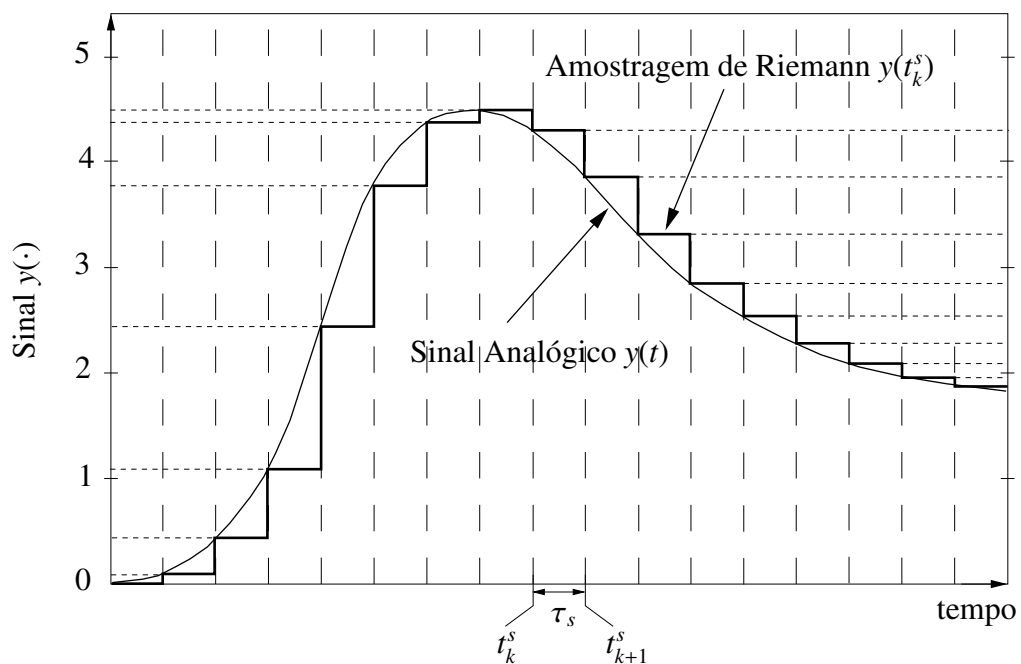


Figura 2.7: Amostragem de Riemann.

Por outro lado, esquemas de amostragem variantes no tempo, são utilizados desde os anos cinquenta (século XX) [ELLIS, 1959; KALMAN; BERTRAM, 1959], muito embora ainda não se tenha uma teoria completamente desenvolvida. Recentemente, crescente atenção tem sido dedicada ao desenvolvimento da teoria da amostragem variante no tempo [MARK; TODD, 1981; ÅRZÉN, 1999; ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002; MCCANN, 2004; ÅSTRÖM, 2007; XU; CAO, 2007; HEEMELS, 2008; QAISAR, 2009; Dominik Rzepka, Marek Miskowicz, Anna Grybos, 2013; MISKOWICZ, 2014]. Esquemas de amostragem variantes no tempo foram denominados por Åström como amostragem de Lebesgue [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002]. Em geral, tais esquemas de amostragem são baseados em cruzamentos de níveis. Neste caso, observa-se que, quando um sinal analógico  $y(t)$  (veja Figura 2.8) é amostrado com amostragem de Lebesgue, suas amostras  $y(t_k^s)$ , com  $t_k^s = t_{k-1}^s + \tau_{s_{k-1}}$ , são tomadas apenas quando o sinal  $y(t)$  cruzar um dos níveis de quantização, os quais, são previamente definidos e espaçados por um

quantum<sup>4</sup> de magnitude  $q$ , como ilustrado na Figura 2.8. O valor de  $q$  é uma relação direta da faixa de amplitude  $\Delta V_{in}$  do conversor A/D utilizado para amostrar o sinal  $y(t)$  e, do número de *bits*  $M$  deste conversor e é dado por [ALLIER, 2003, 2005].

$$q = \frac{\Delta V_{in}}{2^M - 1} \quad (2.8)$$

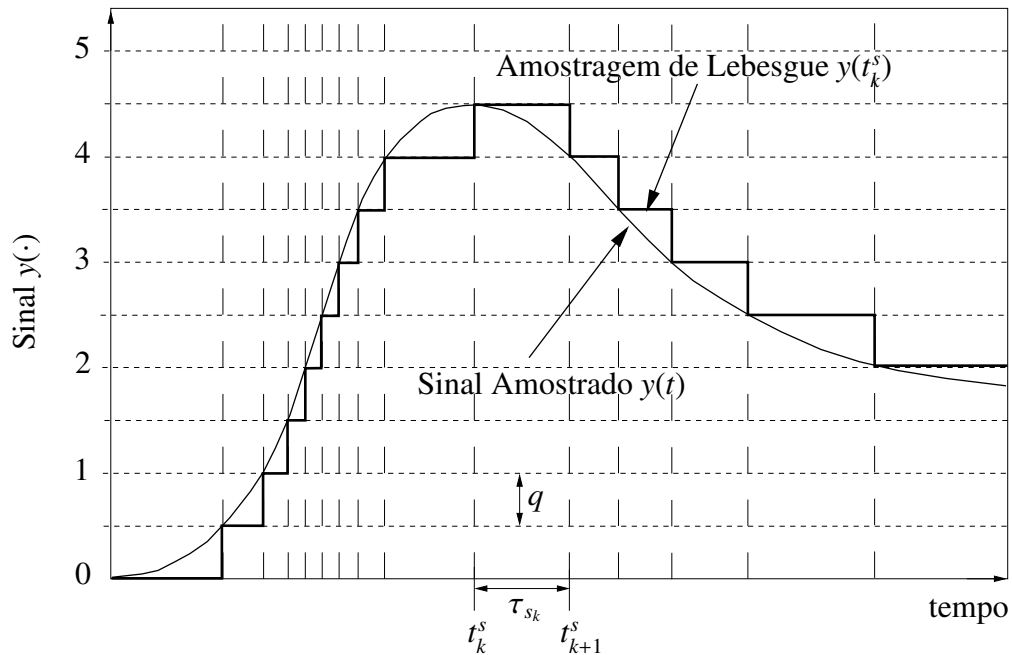


Figura 2.8: Amostragem de Lebesgue.

Dessa maneira, as amostras da sequência  $\{y(t_k^s)\}$  são não uniformemente espaçadas no tempo e são obtidas, respectivamente, na sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$ . A obtenção destas amostras dependem das variações do sinal  $y(t)$ , como mostrado na Figura 2.8 [QAISAR, 2009]. Assim, a cada um dos intervalos  $[t_k^s, t_{k+1}^s)$  pode ser associado um estado  $s_k$  de valor  $y(t_k^s)$  como membro de um espaço de estados discretizado  $Y$ . A transição entre o estado  $s_{k-1}$  e o estado  $s_k$  é definida como um evento  $e_k$  que é membro de um espaço de eventos  $E_s$  do nó sensor. Portanto, em cada tempo  $t_k^s$  um evento  $e_k$  é gerado. Além disso, cada tempo de transição e seu evento associado criam uma sequência tempo evento da forma  $\{(t_k^s, e_k)\}$ . Desta sequência, os estados do sinal podem ser obtidos com a execução de um algoritmo de forma a se obter a sequência  $\{(t_k^s, s_k)\}$  [MCCANN, 2004], cuja sequência tempo valor do estado é  $\{(t_k^s, y(t_k^s))\}$ .

A amostragem de Lebesgue aplica-se adequadamente em muitos contextos. Um deles é em sistemas de comunicação, onde a limitação de recursos impõe restrições severas sobre o nú-

<sup>4</sup>A amostragem por cruzamento de nível pode ser realizada também com base em níveis de energia e, não apenas, necessariamente baseado na amplitude de uma sinal, como apresentado em detalhes nesse texto. Um exemplo de amostragem por cruzamento de níveis de energia é apresentado no artigo [VELASCO, 2009]. Nesse trabalho os autores apresentam um esquema de amostragem de cruzamento de nível baseado em eventos, no qual o evento de amostragem ocorre quando a trajetória do sinal de energia da função de Lyapunov muda de um nível de energia para outro.

mero de medições e ações de controle a serem transmitidas [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002], o que possibilita minimizar o número de eventos de comunicação necessários para manter o NCS estável [MCCANN, 2004; YEPEZ, 2011]. Outra aplicação, consiste em combinar a amostragem de Lebesgue a processos de decisão de Markov em problemas de otimização de sistemas de controle, de forma a melhorar o desempenho e reduzir a utilização de recursos do mesmo [XU; CAO, 2007].

Quando utilizada em aplicações de controle uma propriedade relevante do sistema com amostragem de Lebesgue é que a estratégia de controle é uma interessante mistura de controle direto e realimentado, o qual, frequentemente ocorre em sistemas biológicos [HOBBIE; ROTH, 2007]. Além disso, sistemas baseados em eventos podem ter comportamento equivalente ao de um sistema não linear, o qual pode, em alguns casos, gerar ciclos limites [ÅSTRÖM, 2007]. Assim, futuras investigações são necessárias para desenvolver métodos analíticos para o projeto de sistemas de controle baseados em eventos [MCCANN, 2004; ÅSTRÖM, 2007; HEEMELS, 2008]. Alguns métodos e/ou estratégias, já desenvolvidos, são apresentados em [MISKOWICZ, 2014] e em suas referências.

### 2.2.3 Modelo de temporização dos NCSs

O comportamento temporal da execução das tarefas nos nós e das transmissões dos pacotes pela rede de comunicação, é um dos tópicos de pesquisa de fundamental relevância e crescente interesse no escopo da teoria dos NCSs [HALEVI; RAY, 1988; KOPETZ, 1993; TÖRNGREN, 1998; WITTENMARK, 1995]. As razões disso são evidentes, uma vez que, é a partir da definição da temporização de um NCS, durante a fase de projeto, que o mesmo passará a operar quando em funcionamento.

Neste sentido, um diagrama de temporização, para a topologia S-C-A, no qual, é ilustrado cada etapa de transição de mensagens, durante um COAC de um NCS é mostrado na Figura 2.9 [HALEVI; RAY, 1988]. Para relembrar o significado de  $t_k^s$ ,  $\tau_k^s$ ,  $t_k^c$ ,  $\tau_k^c$ ,  $t_k^a$  e  $\tau_k^a$  presentes na Figura 2.9 veja Definição 2.1. Diagramas semelhantes ao da Figura 2.9 podem ser obtidos com pequenas modificações para as topologias nNCS, S-CA e SC-A.

Seja  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  um inteiro não negativo, então, a partir do tempo  $t_k^s = k\tau_s$ , a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , durante um tempo  $\tau_k^s$  um *timer* no nó sensor gera uma interrupção. A qual, aciona os conversores A/Ds, para ler os sensores e disponibilizar os dados lidos  $\mathbf{y}(t_k^s)$  no *buffer* de transmissão, para envio imediato ao nó controlador (vide Figura 2.9). No instante  $t_k^s + \tau_k^s$  o nó sensor envia os dados, resultantes da leitura dos sensores, pela rede de comunicação ao nó controlador, em um intervalo de tempo possivelmente aleatório  $\tau_k^{sc}$ . Quando esses dados  $\mathbf{y}(t_k^s)$  chegam ao nó controlador, no instante  $t_k^c = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc}$ , caso o nó controlador seja guiado a eventos, uma interrupção é gerada no mesmo. Então, as informações são retiradas do *buffer* de recepção e processadas. A partir daí, o sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto



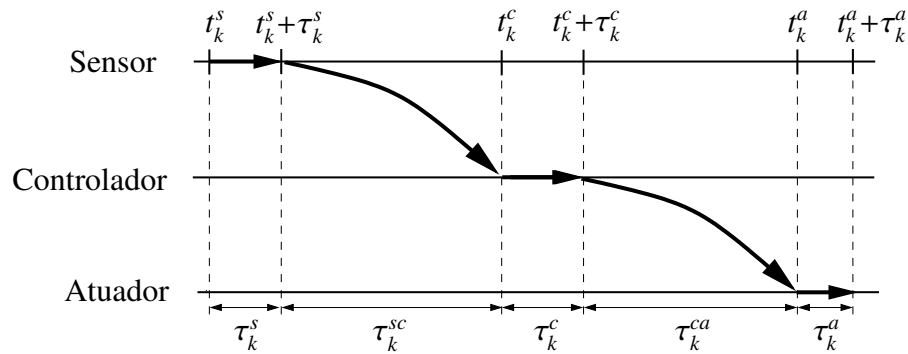


Figura 2.9: Diagrama de temporização para transição de mensagens em um NCS - topologia S-C-A.

da entrada do controlador é gerado. Quando o nó controlador é guiado no tempo, os dados provenientes dos sensores só serão processados quando um *timer* gerar uma interrupção, a qual, ocorrerá em um instante de tempo pré-definido.

Independentemente do controlador ser guiado a eventos ou no tempo, a saída do controlador  $\mathbf{u}(t_k^c)$  é calculada sempre em função dos últimos dados, lidos pelos sensores, presentes no *buffer* de recepção do nó controlador ou a partir dos estados estimados por um observador de estados. O tempo decorrido, desde a geração do evento de chegada dos dados no nó controlador, até a atualização do sinal de erro de referência, processamento das rotinas de controle e envio de  $\mathbf{u}(t_k^c)$  ao *buffer* de saída do nó controlador é  $\tau_k^c$ . Para alguns autores a ocorrência desta interrupção é definida para o instante  $t_k^s + 0,5\tau_s$  [WALSH., 2002]. Entretanto, este valor pode ser diferente e deve ser escolhido de acordo com os requisitos de projeto.

Durante um tempo possivelmente aleatório  $\tau_k^{ca}$ , a partir do instante  $t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c$ ,  $\mathbf{u}(t_k^c)$  é enviado ao nó atuador através da rede de comunicação. A partir do instante  $t_k^a = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$ , durante um tempo  $\tau_k^a$ , o nó atuador recebe os dados  $\mathbf{u}(t_k^c)$  do nó controlador, gera um evento de chegada de novos dados e, imediatamente, conversões D/As são realizadas e os sinais analógicos resultantes das conversões são aplicados nas entradas da planta. Até que novos dados dos controladores cheguem ao atuador, a saída da planta  $\mathbf{y}(t)$  evolui, em malha aberta, sempre em função do último valor de  $\mathbf{u}(t_k^c)$ . No instante  $t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  a malha é fechada, restando a partir deste instante o intervalo de tempo  $t_{k+1}^s - (t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a)$  para que um novo COAC seja iniciado. Evidentemente, se  $\tau_k \leq \tau_s$  o  $k$ -ésimo COAC é finalizado no instante  $t_{k+1}^s$ , quando inicia-se o  $(k + 1)$ -ésimo COAC. Além disso, é desejável que o NCS opere com  $\tau_k \leq \tau_s$ . Entretanto, isso nem sempre acontece. Em alguns instantes, ainda que de forma indesejável, pode ocorrer do NCS operar com  $\tau_k > \tau_s$ . Neste caso, o  $k$ -ésimo COAC é finalizado somente após o instante  $t_{k+1}^s$ . Por conseguinte, um novo COAC pode ser iniciado sem que o COAC anterior tenha sido concluído.

### 2.2.4 Fenômenos que podem ocorrer no controlador

Para NCSs com nós controladores guiados no tempo os controladores estão sujeitos aos fenômenos da amostragem vazia (do inglês - *vacant sampling*) e da rejeição de mensagens. O primeiro ocorre quando uma mensagem gerada no nó sensor durante o  $k$ -ésimo COAC não chega ao nó controlador no  $k$ -ésimo COAC. Já o segundo ocorre quando duas ou mais mensagens geradas no nó sensor até o  $(k + 2)$ -ésimo COAC chegam ao nó controlador no  $(k + 1)$ -ésimo COAC. Estes fenômenos são ilustrados na Figura 2.10 [HALEVI; RAY, 1988].

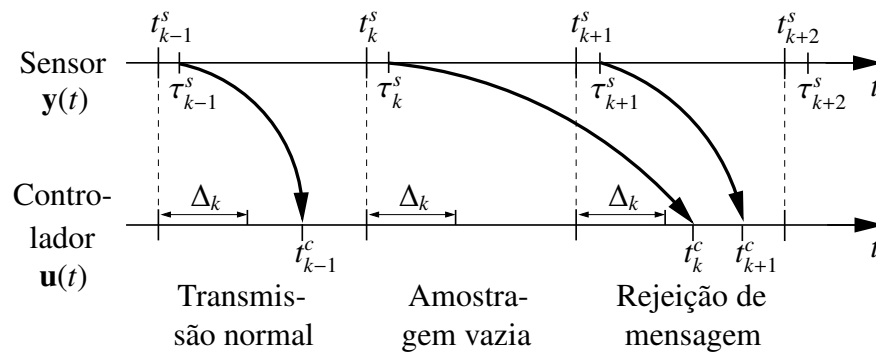


Figura 2.10: Diagrama de temporização para os sinais de controle e do sensor.

O intervalo de tempo constante  $\Delta_k$  na Figura 2.10 é denominado tempo de variação (*time skew*) e é definido como a diferença entre os instantes de amostragem do sensor e do controlador, isto é,  $\Delta_k = t_{k-1}^c - t_{k-1}^s$  [RAY; HALEVI, 1988]<sup>5</sup>. Os efeitos da amostragem vazia podem ser minimizados implementando-se um observador de estados no nó controlador. Dessa maneira, quando esta ocorrer durante o  $k$ -ésimo COAC do controlador, em vez do controlador executar o algoritmo de controle em função dos dados do  $(k - 1)$ -ésimo COAC, os dados do  $k$ -ésimo COAC são estimados e utilizados na execução do algoritmo de controle. Evidentemente, para que a estimação seja possível o *buffer* de entrada do nó controlador deve ter a capacidade de armazenamento aumentada, de forma que com os dados dos COAC anteriores, nele armazenados, seja possível estimar os dados necessários para a execução do algoritmo de controle do  $k$ -ésimo COAC [RAY; HALEVI, 1988].

### 2.2.5 Redes de comunicação utilizadas em NCSs

As redes de comunicação utilizadas para fins de controle são caracterizadas pelo transporte frequente de uma grande quantidade de pequenos pacotes de dados, entre um grande número de nós. Além disso, estas redes devem atender a requisitos temporais críticos de aplicações em

<sup>5</sup>É claro que,  $\Delta_k = t_{k-1}^c - t_{k-1}^s$  constante, só faz sentido se as sequências  $\{t_k^c\}$  e  $\{t_k^s\}$ , embora variantes no tempo, variarem de forma regular, isto é,  $t_k^c = k\tau_c$  e  $t_k^s = k\tau_s$ , onde  $\tau_c$  e  $\tau_s$  são, respectivamente, os períodos de amostragem do controlador e do sensor. Neste caso, os nós sensores e os nós controladores são obrigatoriamente guiados no tempo.

tempo real [STANKOVIC, 1988]. Em outras palavras, devem apresentar atrasos limitados e garantir sucessivas transmissões dentro de um intervalo de tempo limitado [LIAN; TILBURY, 2001]. Dessa maneira, a propriedade mais importante de uma rede de comunicação em um sistema de controle é o atraso, ou tempo de latência, o qual pode degradar o desempenho da malha, assim como, levar o NCS à instabilidade [LIAN; TILBURY, 2001; HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.198].

A primeira geração de redes desenvolvidas para aplicações de controle foi projetada no final dos anos oitenta do século XX. Dentre outras, podem ser citadas: a FIP (CENELEC EN 50170:3), SERCOS (CENELEC EN 61491), Interbus (CENELEC EN 50254), LON (EIA-709.1), Profibus (CENELEC EN50170:2) e CAN (ISO 11898). A rede CAN<sup>6</sup>, em geral, tem sido utilizada com sucesso em aplicações automotivas não críticas. Sua taxa de transmissão máxima é de um *megabits* por segundo [BOSCH, 1991]. Variantes da CAN, como a SDS (IEC 62026-5) e a DeviceNet (IEC 62026-3) foram projetadas para automação industrial [HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.220]. O protocolo de acesso ao meio da DeviceNet é o CSMA/AMP (*CSMA/arbitration on message priority*) [LIAN; TILBURY, 2001; MOYNE; TILBURY, 2007].

Também projetada para controle, a SERCOS tem seu mercado voltado para aplicações de controle numéricas. A Interbus e a Profibus-DP são utilizadas em aplicações com entradas remotas e saídas em um controlador lógico programável (CLP). Na automação predial o destaque é para a rede LON. Já em aplicações relacionadas à segurança o destaque é para a WorldFIP (parte do padrão europeu da Profibus EN50170) [HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.220]. Em aplicações automotivas críticas o destaque é para a recente FlexRay, a qual é baseada em CAN e tem taxa de transmissão máxima de dez *megabits* por segundo [CONSORTIUM, 2005].

Outra rede que tem sido aperfeiçoada para ser utilizada em aplicações de controle é a *Ethernet*, cujo protocolo de acesso ao meio é o CSMA/CD (*carrier sense multiple access with collision detection*). A taxa de transmissão da *Ethernet* é da ordem de *gigabits* por segundo. Outra rede utilizada em controle é a ControlNet, cujo mecanismo de acesso ao meio se dá por passagem de ficha [LIAN; TILBURY, 2001; MOYNE; TILBURY, 2007].

A seguir serão apresentadas as principais abordagens da teoria de controle para NCSs.

## 2.3 Modelo de estados aumentado determinístico

O modelo de estados aumentado determinístico do NCS foi obtido a partir dos modelos contínuo da planta  $G(s)$  e discreto do controlador  $C(z)$ . Tais modelos são lineares invariantes no tempo

---

<sup>6</sup>Em 2005 a rede CAN já era a mais utilizada em sistemas automotivos. Estimativas desta época apontam para a utilização anual de cerca de 400 milhões de nós CAN empregados nas mais variadas aplicações [NAVET, 2005].

e de dimensão finita, com entradas de controle  $\mathbf{u}(t)$  constantes por partes (*piecewise constant*) durante cada período de amostragem. O sistema de controle atrasado pode ser representado por um vetor de estados aumentado. Este vetor é composto por estados da planta e do controlador e pelas entradas atuais e atrasadas da planta e do controlador. Assim, o problema de atrasos variantes no tempo pode ser tratado por um modelo de tempo discreto, dimensão finita e variante no tempo, onde os atrasos não precisam satisfazer a restrição de serem múltiplos inteiros de um determinado período de tempo [HALEVI; RAY, 1988].

Tal modelo é obtido a partir do modelo da planta  $G(s)$  que é linear invariante no tempo e de dimensão finita, de onde pode-se obter infinitas realizações. Uma dessas realizações, com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$ , matrizes de dimensões compatíveis, pode ser apresentado na forma

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.10)$$

cujo modelo equivalente discreto é explicitado por:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_p \mathbf{u}(k\tau_s) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (2.12)$$

onde:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (2.13)$$

$$\Gamma_p = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (2.14)$$

Analogamente, uma realização do controlador  $C(z)$  em espaço de estados no domínio do tempo discreto, com sinal de referência  $\mathbf{r}(t)$ , nulo, é dada por:

$$\mathbf{x}_c(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_c \mathbf{x}_c(k\tau_s) - \Gamma_c \hat{\mathbf{y}}(k\tau_s) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}(k\tau_s) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(k\tau_s) - \mathbf{D}_c \hat{\mathbf{y}}(k\tau_s) \quad (2.16)$$

onde as matrizes  $\Phi_c$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  são de dimensões compatíveis e  $\hat{\mathbf{y}}(m\tau_s) = \mathbf{y}((m-i)\tau_s)$ , com  $i = \{1, 2, \dots, j\}$ . Por fim, combinando as equações (2.11), (2.12), (2.15) e (2.16) em um vetor de estados aumentado, com  $(l+1)$  diferentes valores de  $\mathbf{u}(t)$  em cada período de amostragem  $\tau_s$ , obtém-se a seguinte equação de estados:

$$\mathbf{x}(k\tau_s + \tau_s) = \Phi(k\tau_s) \mathbf{x}(k\tau_s) \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{x}(k\tau_s + \tau_s) = [\mathbf{x}_p^T(k\tau_s) \ \mathbf{y}^T(k\tau_s - \tau_s) \ \dots \ \mathbf{y}^T(k\tau_s - j\tau_s) \ \mathbf{x}_c^T(k\tau_s) \ \mathbf{u}^T(k\tau_s - \tau_s) \ \dots$

$\mathbf{u}^T(k\tau_s - l\tau_s)]^T$  é o vetor de estados aumentado e  $\Phi(k\tau_s)$  é a matriz de transição de estados aumentada, cujos elementos são obtidos a partir das matrizes  $\Phi_p(k\tau_s)$ ,  $\Gamma_p(k\tau_s)$ ,  $\mathbf{C}_p$ ,  $\Phi_c(k\tau_s)$ ,  $\Gamma_c(k\tau_s)$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$ .

Neste mesmo trabalho [HALEVI; RAY, 1988] Halevi e Ray ainda mostraram que se a sequência de atrasos é periódica, sempre existirá um inteiro positivo  $M$ , tal que, em (2.17)  $\Phi(k\tau_s + M) = \Phi(k\tau_s)$ ,  $\forall k$ . Além disso, o NCS em malha fechada (2.17) é assintoticamente estável se todos os autovalores  $\lambda_i$  da matriz  $\Psi_k^M = \prod_{j=1}^M \Phi(k + M - j)$  satisfizerem a condição  $|\lambda_i| < 1$ . Isto é, todos os  $\lambda_i$  estiverem contidos no disco unitário [HALEVI; RAY, 1988].

Muito embora interessante, uma das desvantagens deste método é que ele não funciona para controladores operando no modo guiado a eventos. Outra desvantagem, é que a dimensão do sistema aumentado resultante em malha fechada, cresce na proporção do crescimento das dimensões dos vetores de estados da planta e do controlador, assim como, dos vetores de entradas da planta e do controlador. Tais percalços impactam evidentemente no aumento do tempo computacional para execução dos algoritmos desenvolvidos. Uma extensão desse método para sistemas multitaxa, ou seja, com diferentes períodos de amostragem do controlador e dos sensores, é apresentado em [LIOU; RAY, 1990] e será abordado a seguir.

## 2.4 Amostragem multitaxa

Na tentativa de resolver o problema da amostragem vazia, foi proposta uma técnica baseada na amostragem dos sensores, controladores e atuadores com períodos de amostragem diferentes, conhecida na literatura como abordagem multitaxa (do inglês *multirate*) [LIOU; RAY, 1990]. A idéia de Liou e Ray foi fazer  $\tau_s < \tau_c$ , segundo a relação  $\tau_s/\tau_c < 1$ , de forma a maximizar, em cada COAC, as chances de chegadas de dados no nó controlador (veja Figura 2.11). Nesta figura, o \* na linha do controlador, diz respeito aos dados dos sensores utilizados para o cálculo do sinal de controle. Demais dados dos sensores que chegaram ao controlador dentro do mesmo COAC e antes do dado marcado com \* são descartados pelo controlador, caracterizando assim o fenômeno da rejeição de mensagens.

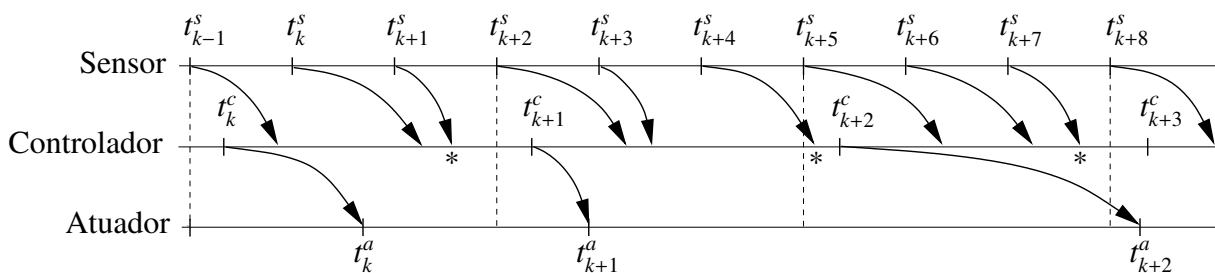


Figura 2.11: Tentativa de minimizar a ocorrência do fenômeno da amostragem vazia.

No cenário assumido em [LIOU; RAY, 1990] os sensores e controladores são guiados no tempo e o atuador é guiado a eventos. Neste caso, o intervalo de amostragem do atuador  $\tau_{a_k} =$

$t_{k+1}^a - t_k^a$  é variante no tempo. A variabilidade temporal de  $\tau_{a_k}$  ocorre devido  $t_k^a$  variar em cada COAC. Evidentemente,  $t_k^a$  varia em cada COAC em consequência das variabilidades dos atrasos introduzidos no NCS.

A técnica proposta em [LIOU; RAY, 1990], embora resolvesse parcialmente o problema da amostragem vazia, criava um outro problema. Por um lado, o valor de  $\tau_c$  não poderia crescer muito e ultrapassar os limites clássicos da teoria para a escolha da taxa de discretização de controladores. Por outro lado, para maximizar a ocorrência de chegadas de dados no controlador, em cada COAC,  $\tau_s$  deveria ser o menor possível. Entretanto, quando maior a redução do valor de  $\tau_s$ , mais rapidamente criava-se um problema de aumento do tráfego de pacotes na rede, o que é algo indesejável em NCSs. Devido a esses conflitantes paradigmas da escolha apropriada de  $\tau_s$  e  $\tau_c$  e o consequente ônus desta escolha, esta técnica não conseguiu se consolidar.

Dessa maneira, os fenômenos da amostragem vazia e da rejeição de mensagens estão diretamente relacionados. Quando o número de ocorrências das amostragens vazias diminui, o número de ocorrência das rejeições de mensagens aumenta. A consequência disto é que, enquanto a redução da ocorrência da amostragem vazia implica diretamente na melhoria da qualidade dos sinais de controle, as rejeições de mensagens aumentam o tráfego da rede, o que provoca a utilização ineficaz dos recursos físicos do NCS [RAY; HALEVI, 1988].

Duas outras referências desta abordagem são [RAVI, 1990; SALA, 2009]. Em [RAVI, 1990] é obtida a parametrização de todos os controladores estabilizantes de um dado sistema mult taxa discreto no tempo de dimensão finita linear variante no tempo. Já em [SALA, 2009] é desenvolvida uma estratégia de controle baseada na resintonia do controlador PID (*Proportional Integral Derivative*) mult taxa de acordo com os atrasos variáveis detectados no NCS.

## 2.5 Compensação de atrasos

Como já enfatizado neste texto, os atrasos de comunicação introduzidos pela rede são  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ . Em geral, estes atrasos são variantes no tempo. No caso, só podem ser tratados juntos, isto é, somados para fins de compensação no controlador, se não ocorrer a amostragem vazia ou a rejeição de mensagem no controlador [HALEVI; RAY, 1988]. Além disso, como o atraso  $\tau_k^{ca}$  ocorre após o controlador, ele deve ser estimado durante  $k$ -ésimo COAC ou medido<sup>7</sup>, durante  $k$ -ésimo COAC, e compensado apenas no  $(k + 1)$ -ésimo COAC [YÉPEZ, 2002]. Outra consequência da introdução de atrasos variantes no tempo no sistema de controle é que técnicas clássicas de análise e projeto, como as do domínio da frequência, desenvolvidas e consolidadas para sistemas lineares invariantes no tempo, não funcionam para sistemas variantes no tempo [HALEVI; RAY, 1988].

<sup>7</sup>Desde que os nós componentes do NCS estejam sincronizados, a medição de atrasos pode ser realizada via técnicas de *timestamping* [JOHANNESSEN, 2004].

### 2.5.1 O preditor de Smith

O preditor de Smith foi concebido para tratar o problema de atraso em plantas com função de transferência do tipo  $G = G_a G_p$  [SMITH, 1957]. No caso,  $G_a = G_1 e^{-sT_1}$  é a função de transferência do atuador (tratado por Smith como uma válvula). Este atuador introduz no sistema de controle um atraso, ou tempo morto  $T_1$ . Além disso,  $G_p = G_2 e^{-sT_2}$  é a função de transferência do processo controlado, o qual introduz no sistema de controle um atraso  $T_2$ . Em termos ilustrativos, o diagrama de blocos convencional para o sistema de controle do processo com o atuador é mostrado na Figura 2.12 [SMITH, 1957]. Neste diagrama,  $r(t)$  é o sinal de referência,  $e_r(t)$  é o erro de referência,  $C$  é o controlador,  $u(t)$  é a saída do controlador,  $y(t)$  é o sinal de realimentação (saída da planta),  $p(t)$  é uma perturbação e  $F$  é um dispositivo de medição da saída do processo.

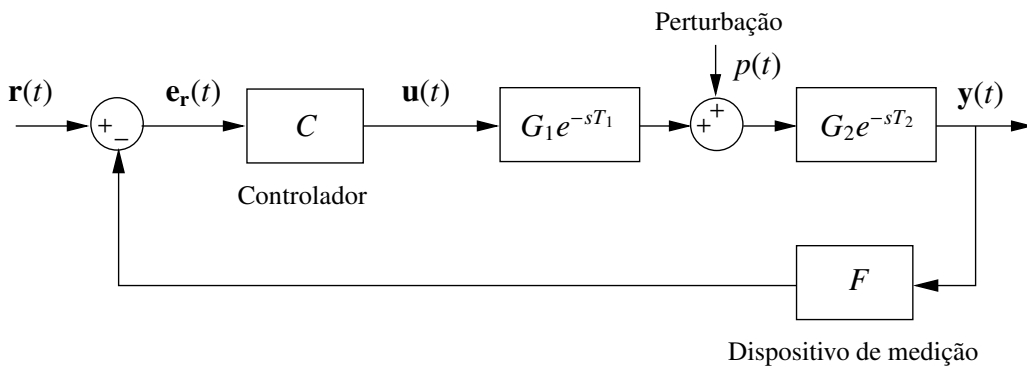


Figura 2.12: Diagrama de blocos do sistema de controle de um processo convencional.

O passo inicial do projeto, segundo a técnica desenvolvida e apresentada em [SMITH, 1957], consiste em projetar o controlador para o sistema de controle de fase mínima. Em outras palavras, deve-se desconsiderar qualquer atraso e projetar o controlador de forma a se obter a resposta desejada. Um diagrama de controle em malha fechada para o cenário do sistema de controle de fase mínima, em questão, é mostrado na Figura 2.13a.

Concluído o projeto do controlador ótimo que satisfaça a um conjunto de requisitos desejados para o sistema de controle de fase mínima da Figura 2.13a, estabelece-se, por construção, a partir da Figura 2.12, uma arquitetura ou diagrama de controle em malha fechada que forneça uma resposta com comportamento equivalente ao sistema de controle da Figura 2.13a. O diagrama de controle que possibilita tal equivalência é mostrado na Figura 2.13b. Em seguida, a partir de manipulações sobre o diagrama da Figura 2.13b, obtém-se o diagrama apresentado na Figura 2.13c e deste o da Figura 2.14.

O resultado deste processo é uma malha menor, de alta frequência, em torno do controlador. Esta malha menor opera como um gerador de pulsos, o qual, tem características semelhantes ao de um filtro passa altas, de modo a rejeitar as baixas frequências, sem alterar a precisão ou o comportamento da resposta do sistema de controle com atraso. Dessa maneira, a malha

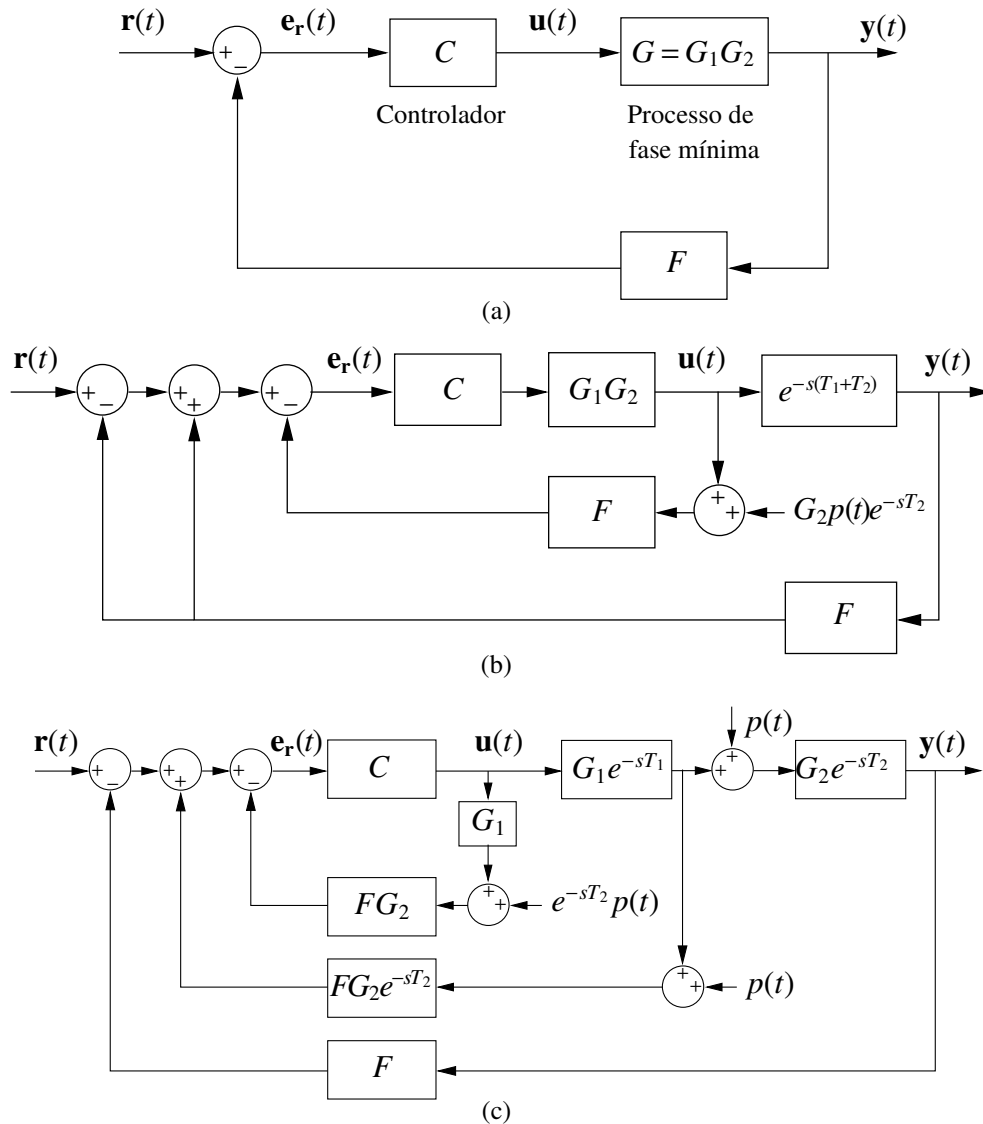


Figura 2.13: Etapas do projeto do sistema de controle segundo o preditor de Smith: (a) Sistema de controle de fase mínima. (b) Sistema de controle com atrasos equivalente ao da Figura 2.13a. (c) Sistema de controle com atrasos equivalente ao da Figura 2.13b.

menor possibilita utilizar o controlador projetado para o sistema sem atraso em um sistema com atraso, de forma a garantir que o sistema de controle com atraso tenha o mesmo desempenho do sistema de controle sem atraso. Ou seja, tem-se assim estabelecido um compensador de atrasos denominado preditor de Smith, cujo nome é em homenagem a seu criador [SMITH, 1957].

De forma simplificada, a idéia básica deste preditor pode ser apresentada na Figura 2.15 [HAGGLUND, 1992]. Neste caso,  $G$  é a planta,  $G_m$  é o modelo da planta,  $G_s$  é o modelo da planta sem atraso (modelo da planta de fase mínima),  $y_p(t)$  é saída da planta,  $y_m(t)$  é a saída do modelo da planta e  $y_s(t)$  é a saída do modelo da planta sem atraso. Observa-se ainda que, quanto mais precisos forem  $G_m$  e  $G_s$ , melhor será o funcionamento do sistema. Isto é, o comportamento da resposta do sistema de controle com atraso será tão mais próxima do comportamento do sistema de controle de fase mínima, quanto mais precisos forem os modelos de  $G_m$  e  $G_s$ .



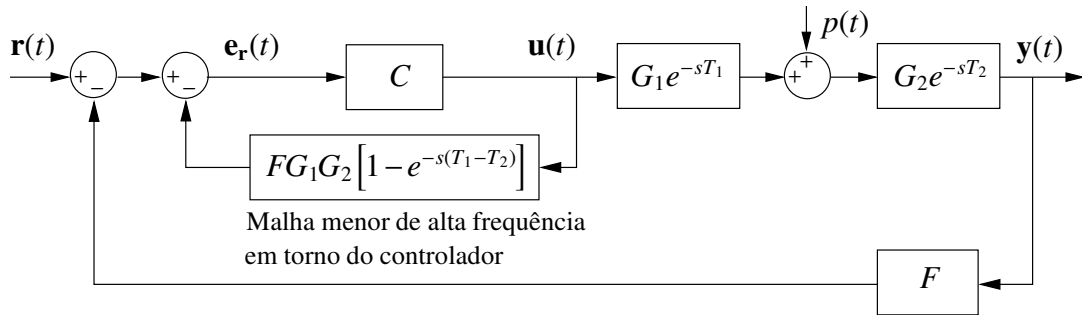


Figura 2.14: Diagrama de blocos da etapa final do projeto do preditor de Smith.

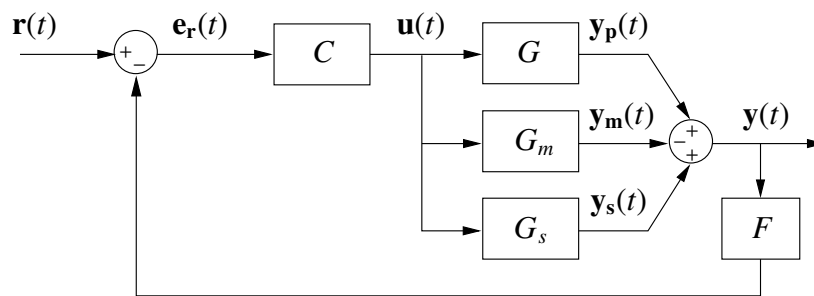


Figura 2.15: O preditor de Smith.

O preditor de Smith foi desenvolvido para sistemas invariantes no tempo. Para sistemas variantes no tempo, como os NCSs, há dificuldades na aplicação do mesmo, o que motivou e motiva o desenvolvimento de novas abordagens de compensação de atrasos, muitas delas, inspiradas no preditor de Smith [HAGGLUND, 1992; LINCOLN, 2002; LAI; HSU, 2010]. Por exemplo, em Hagglund [HAGGLUND, 1992] é apresentado o projeto de um controlador PI preditivo (PIP) para compensar atraso de transporte. O efeito do controlador PIP é similar ao do preditor de Smith [SMITH, 1957] e ao do controlador baseado em modelo interno (*internal model controller* - IMC). Entretanto, o projeto do controlador, para uma planta de primeira ordem com atraso, requer o cálculo de cinco parâmetros, ao se utilizar o preditor de Smith, quatro outros quando o IMC é utilizado e três quando o PIP é utilizado. Além disso, o controlador PIP tem vantagens semelhantes às dos controladores PIDs, podendo inclusive ser sintonizado através do processo de tentativa e erro [HAGGLUND, 1992].

Por outro lado, em Lincoln [LINCOLN, 2002] é apresentado um método para compensar atrasos variantes no tempo em sistemas de controle digitais semelhante ao do preditor de Smith. A idéia é medir os atrasos, através de técnicas de *timestamping*, projetar um compensador linear para atrasos variantes no tempo e adicioná-lo ao controlador original do sistema de controle, de forma a melhorar a estabilidade e o desempenho do sistema de controle. A principal vantagem dessa abordagem é que ela pode ser empregada mesmo sem se conhecer completamente o modelo do processo.

Finalmente, em Lai e Hsu [LAI; HSU, 2010] é apresentado um preditor de Smith adaptativo com um estimador de atraso *online* para uma estrutura de NCS remota. Com a utilização desta

abordagem foi obtida uma significativa redução do efeito do atraso sobre o sistema de controle, o que resulta em melhoria de seu desempenho e estabilidade. A vantagem desta técnica, verificada experimentalmente para o controle de posição do servo DC, está no fato de que, como os atrasos são estimados de forma *online*, mesmo na ocorrência de grandes atrasos, o sistema mantém a estabilidade e o desempenho. Todavia, vale a pena observar que, eventuais erros de estimação iniciais podem resultar em grandes *overshoots*, o que é algo indesejável. Esquemas de estimação também pode ser realizados em sistemas de controle guiados a eventos e com restrição de recursos, bem como, para sistemas de controle multi-agentes. Para mais detalhes sobre estas abordagens deve-se consultar [LIU, 2014] e suas referências.

## 2.5.2 Observadores e preditores distribuídos

A teoria clássica sobre observadores e preditores de estado não é nova e está estabelecida desde meados do século XX. Observadores de estado são, em geral, utilizados para estimar estados de um processo que, por alguma razão, são de difíceis medições, ou, cujo preço da instrumentação de medição oneraria o custo da implementação do sistema de controle. Já os preditores de estado são utilizados para estimar estados futuros da dinâmica de um processo. Ambos as técnicas são baseadas no modelo do processo.

Em NCSs, um dos métodos utilizados para compensar atrasos é baseado na utilização de observadores e preditores de estados [LUCK; RAY, 1990, 1994]. Neste caso, um dos desafios a ser enfrentado é a questão da variabilidade temporal dos atrasos, muito comum em NCSs, e que torna a análise do mesmo complicada. Para superar esta dificuldade Luck e Ray [LUCK; RAY, 1990, 1994] tornaram o NCS invariante no tempo. Com isto obtiveram um NCS determinístico. E, portanto, com atrasos de comunicações  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  constantes. Isto foi feito com a utilização de filas FIFO (*First-In-First-Out*)  $Q_1$  e  $Q_2$ , de comprimentos respectivos  $\mu$  e  $\theta$ , localizadas, respectivamente, nas entradas do atuador e do controlador, como ilustrado na Figura 2.16.

Este método é utilizado para NCSs com plantas cuja dinâmica pode ser representada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \phi_1) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.19)$$

além disso, na Figura 2.16, tem-se que:

$$\bar{\mathbf{z}}(k\tau_s) = \mathbf{y}(k\tau_s - \phi_2) \quad (2.20)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}(k\tau_s) = \{\bar{\mathbf{z}}(k\tau_s), \bar{\mathbf{z}}(k\tau_s - \tau_s), \dots\} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{u}(k\tau_s) = C(\bar{\mathbf{Z}}(k\tau_s)) \quad (2.22)$$

onde,  $\bar{\mathbf{z}}(k\tau_s)$  é o vetor de saída da planta atrasado,  $\bar{\mathbf{Z}}(k\tau_s)$  é o conjunto de saídas passadas atrasa-

das e  $C$  é a lei de controle. Os inteiros não negativos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são, respectivamente, os números de amostras atrasadas nos vetores de entrada e saída da planta. Como  $Q_1$  tem comprimento  $\mu$  e  $Q_2$  tem comprimento  $\theta$ , os valores máximos assumidos por  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são, respectivamente,  $\mu$  e  $\theta$ . Observa-se também que, a primeira amostra em  $Q_2$  processada pelo observador (Obs) é  $\mathbf{y}(k\tau_s - \theta)$  e a primeira entrada de controle no início de  $Q_1$  é  $\mathbf{u}(k\tau_s + \mu)$ , como ilustrado na Figura 2.16.

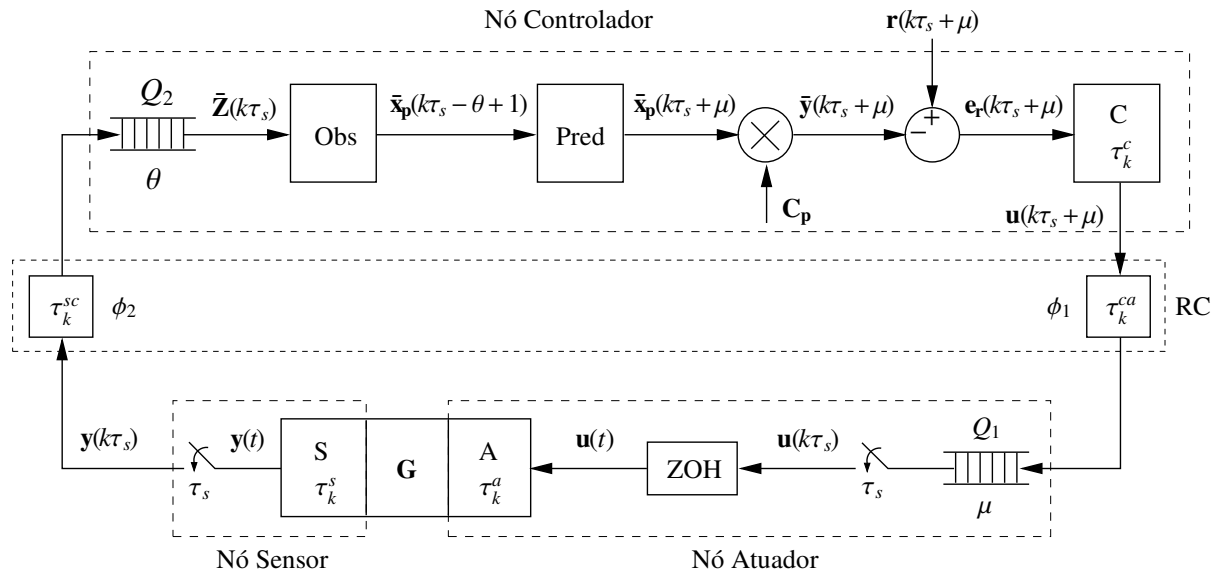


Figura 2.16: Diagrama de blocos, topologia S-C-A, do método de compensação de atraso baseado em preditor determinístico.

Dessa maneira, com a sequência de dados passados  $\bar{\mathbf{Z}}(k\tau_s)$ , armazenados em  $Q_2$ , os estados da planta são estimados, via observador de estados (Obs), executado no nó controlador. A partir dos estados estimados  $\bar{\mathbf{x}}_p(k\tau_s - \theta + 1)$  o preditor de estados (Pred) calcula o vetor de estados  $\bar{\mathbf{x}}_p(k\tau_s + \mu)$  que multiplicado por  $\mathbf{C}_p$  resulta em  $\bar{\mathbf{y}}(k\tau_s + \mu)$ , a partir do qual é obtido o erro de referência  $\mathbf{e}_r(k\tau_s + \mu)$ . Em seguida, com a execução da lei de controle, a entrada de controle preditiva  $\mathbf{u}(k\tau_s + \mu)$  é obtida, enviada ao nó controlador e armazenada na fila  $Q_1$ . Após conversões D/As da entrada de controle discreta  $\mathbf{u}(k\tau_s)$ , a entrada de controle contínua  $\mathbf{u}(t)$  é aplicada na entrada da planta. O valor de  $\mathbf{u}(t)$  permanece inalterado, devido a ação do segurador de ordem zero (do inglês - *Zero Order Hold* - ZOH), até a chegada nos atuadores do próximo valor do sinal de controle  $\mathbf{u}(k\tau_s + \tau_s)$ .

Para tratar da compensação de atrasos aleatórios Chan e Özgüner também utilizaram o método das filas, mas apenas com preditores de estados [CHAN; ÖZGÜNER, 1994; CHAN; ÖZGÜNER, 1995], como ilustrado na Figura 2.17.

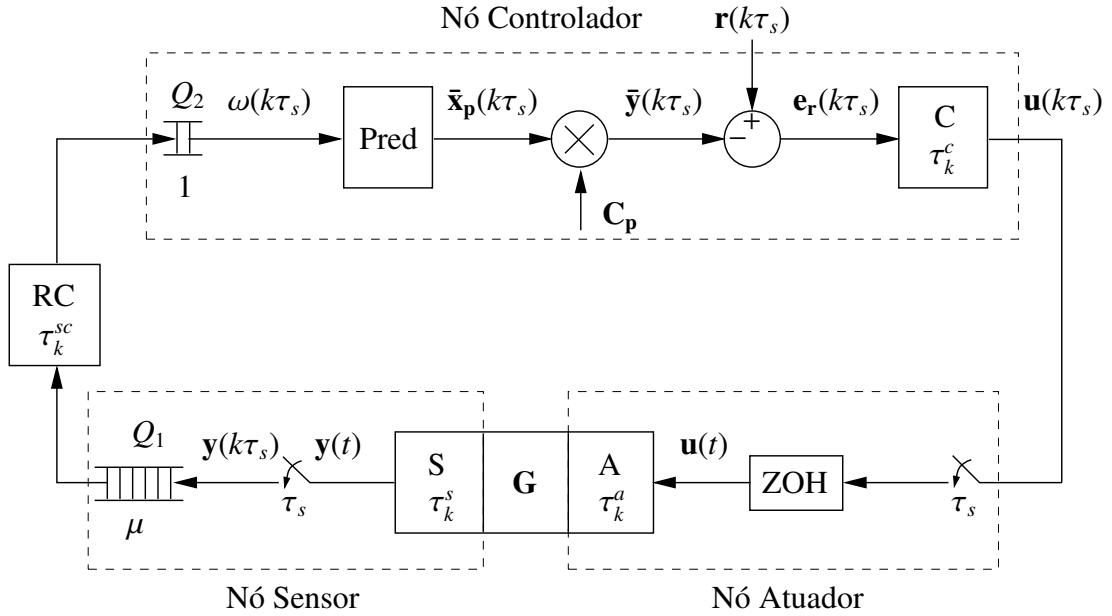


Figura 2.17: Diagrama de blocos, topologia S-CA, do método de compensação de atraso baseado em preditor probabilístico.

Neste caso, o modelo dinâmico da planta é definido a seguir

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.24)$$

e seu modelo dinâmico equivalente discreto, obtido com o segurador de ordem zero [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.34], é:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma \mathbf{u}(k\tau_s) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (2.26)$$

com

$$\Phi = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (2.27)$$

$$\Gamma = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (2.28)$$

Evidentemente, a supressão do observador de estados força o modelo dinâmico da planta ser de ordem completo. Isto é,  $\mathbf{y}(k\tau_s)$  deve ser igual a  $\mathbf{x}_p(k\tau_s)$ , caso contrário, um observador de estados deve ser adicionado ao NCS da Figura 2.17.

Dessa maneira, para melhorar a predição, Chan e Özgüner combinaram uma abordagem probabilística com o conhecimento do comprimento dos dados da fila. As filas FIFO  $Q_1$ , no nó sensor, e  $Q_2$  no nó controlador têm comprimentos  $\mu$  e 1, respectivamente. Neste caso, como  $Q_2$  tem comprimento 1 e é tipicamente um registrador de deslocamento, cuja saída é denotada

por  $\omega(k\tau_s)$ . O número de mensagens de dados armazenadas em  $Q_1$  é definido como  $i$  e os dados  $\mathbf{y}(k\tau_s)$  armazenados em  $Q_1$  são enviados a  $Q_2$ , via rede de comunicação, de acordo com a atribuição de prioridades, previamente definidas, dos componentes do NCS. Assim, o NCS é eminentemente guiado no tempo. Isto significa que, se no instante  $t_k^c$ , o dado  $\mathbf{y}(k\tau_s)$  não houver chegado ao nó controlador, isto é, em  $Q_2$ ,  $\omega(k\tau_s)$  será feito igual a  $\omega(k\tau_s - \tau_s)$  ou a qualquer um dos dados do conjunto  $\{\mathbf{y}(k\tau_s), \mathbf{y}(k\tau_s - \tau_s), \dots, \mathbf{y}(k\tau_s - \mu\tau_s)\}$  presente em  $Q_2$ .

Por outro lado, se  $i$  é conhecido e enviado juntamente com as amostras  $\{\mathbf{y}(k\tau_s), \dots, \mathbf{y}(k\tau_s - \mu\tau_s)\}$ , então a escolha de  $\omega(k\tau_s)$  se reduz ou a  $\mathbf{y}(k\tau_s - i\tau_s)$  ou a  $\mathbf{y}(k\tau_s - i\tau_s + \tau_s)$  [CHAN; ÖZGÜNER, 1994; CHAN; OZGUNER, 1995]. Com isso, o preditor tem como saber quando a mensagem de dados foi enviada e calcular o estado preditivo  $\bar{\mathbf{x}}(k\tau_s)$ , o qual é dado por:

$$\bar{\mathbf{x}}_p(k\tau_s) = \mathbf{P}_0 [\Phi^{i-1}\omega(k\tau_s) + \mathbf{W}_i] + \mathbf{P}_1 [\Phi^i\omega(k\tau_s) + \mathbf{W}_{i+1}] \quad (2.29)$$

com

$$\mathbf{W}_i = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 1 \\ \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{i-2}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) \\ \mathbf{u}(k\tau_s - 2\tau_s) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k\tau_s - i\tau_s + \tau_s) \end{bmatrix}, & \text{para } i \neq 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

e as matrizes  $\Phi$  e  $\Gamma$  de (2.29) e (2.30) são obtidas, respectivamente, de (2.27) e (2.28). Já  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_1$  de (2.29) são matrizes de ponderação e são calculadas a partir das probabilidades de ocorrência de  $\mathbf{y}(k\tau_s - i\tau_s)$  e  $\mathbf{y}(k\tau_s - i\tau_s + \tau_s)$ . Por fim, calculado  $\bar{\mathbf{x}}_p(k\tau_s)$  de (2.29) obtém-se imediatamente  $\bar{\mathbf{y}}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p\bar{\mathbf{x}}_p(k\tau_s)$ , a partir do qual calcula-se  $\mathbf{e}_r(k\tau_s)$  e após a execução da lei de controle se obtém a saída do controlador  $\mathbf{u}(k\tau_s)$  que é aplicada na entrada da planta, como ilustrado na Figura 2.17.

Metodologias de controle baseadas em filas, por um lado, têm a desvantagem de aumentar o atraso de controle do NCS. Por outro lado, têm a vantagem de possibilitar modelar o NCS com base em teorias clássicas e invariantes no tempo, como verificado nas abordagens previamente apresentadas [LUCK; RAY, 1990, 1994; CHAN; ÖZGÜNER, 1994; CHAN; OZGUNER, 1995]. Além disso, abordagens baseadas em observadores e preditores de estados são fortemente dependentes do modelo da planta. Dessa maneira, quanto mais preciso for o modelo da planta, melhor será o desempenho do observador e do preditor e, conseqüentemente, melhor será o desempenho da malha fechada [CHOW; TIPSUWAN, 2001; TIPSUWAN; CHOW, 2003].

Diversas outras abordagens de controle para NCSs baseadas em observadores e preditores de estados podem ser verificadas em [HESPANHA, 2007] e em suas referências. Entretanto, embora sejam muitas as vantagens de se utilizar observadores de estados, é importante salientar

que, a introdução de um observador de estados na malha de realimentação do controlador deve ser realizada de forma cautelosa. Isto porque, o observador de estados pode indesejavelmente reduzir as margens de fase e de ganho do sistema e assim afetar as propriedades de robustez e de estabilidade do sistema de controle [DOYLE; STEIN, 1979].

### 2.5.3 Controle estocástico ótimo

A teoria de controle estocástico não é nova. Seu desenvolvimento foi impulsionada pelos estudos e publicações de Kalman, em especial as dos filtros de Kalman discreto [KALMAN, 1960] e contínuo [KALMAN; BUCY, 1961], realizados no início da segunda metade do século passado. Tal desenvolvimento possibilitou introduzir ruídos de medição e perturbações variantes no tempo e de natureza estocástica no modelo do processo. Quando tal perturbação tem comportamento estocástico gaussiano, diz-se tratar de um problema de controle gaussiano quadrático linear (do inglês - *Linear Quadratic Gaussian* - LQG). Além disso, quando nem todos os estados são medidos, é possível projetar um estimador de estados ótimo que minimiza a variância do erro de estimação [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.408]. Este estimador de estados ótimo é o filtro de Kalman. Ele pode ser implementado nos domínios dos tempos discreto [KALMAN, 1960] e/ou contínuo [KALMAN; BUCY, 1961]. Por fim, quando um sistema de controle é amostrado com intervalo de amostragem variante no tempo, a variância do sinal de saída reduz em relação à variância do mesmo sistema de controle amostrado com intervalo de amostragem fixo (periódico) [ÅSTRÖM, 2007; MENG; CHEN, 2012; MISKOWICZ, 2014].

A partir de tal abordagem, para os NCSs de topologia S-C-A, o modelo de estados de tempo contínuo do processo controlado, em espaço de estados, é dado segundo Nilsson [NILSSON, 1998, p.32], por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k) + \mathbf{v}(t) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{w}(t)$  são processos estocásticos de ruído gaussiano branco não correlacionados e de médias nulas. E, sob as hipóteses de que:  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  são estocásticos, não correlacionados e com  $\tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} < \tau_s$ ;  $\tau_k^c \ll \tau_s$ , seja constante e esteja incluído em  $\tau_k^{ca}$ ; a rede seja livre de erros; cada mensagem de dados sempre seja constante e tenha o mesmo comprimento; o tráfego da rede não é sobrecarregado; os comprimentos das mensagens de dados de medição enviados do nó sensor para o nó controlador e as saídas de controle enviadas do nó controlador para o nó atuador sejam constantes; os nós controlador e atuador sejam guiados a eventos e o nó sensor seja guiado no tempo; e, por fim, a informação de todos os atrasos passados,  $\{\tau_0^{sc}, \tau_1^{sc}, \dots, \tau_k^{sc}, \tau_0^{ca}, \tau_1^{ca}, \dots, \tau_{k-1}^{ca}\}$ , sejam conhecidos, isto é, medidos via *timestamping*. Estabelecidas estas hipóteses, Nilsson

obteve, a partir da equação (2.31), o seguinte modelo equivalente discreto:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) \mathbf{u}(k\tau_s) + \Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) + \mathbf{v}(k\tau_s) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \mathbf{w}(k\tau_s) \quad (2.34)$$

onde

$$\Phi = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (2.35)$$

$$\Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) = \int_0^{\tau_s - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (2.36)$$

$$\Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) = \int_{\tau_s - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}}^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (2.37)$$

A lei de controle ótima, baseada em realimentação de estados e programação dinâmica que minimiza a função de custo

$$J_N = E(\mathbf{x}_{pN}^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_{pN}) + E\left(\sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k\tau_s) \\ \mathbf{u}(k\tau_s) \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k\tau_s) \\ \mathbf{u}(k\tau_s) \end{bmatrix}\right) \quad (2.38)$$

é dada por:

$$\mathbf{u}(k\tau_s) = -\mathbf{L}(\tau_k^{sc}, c_m(k\tau_s)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k\tau_s) \\ \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

onde, na equação (2.38)  $E$  denota a esperança matemática e  $\mathbf{Q}_N$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes de ponderação, com  $\mathbf{Q}$  simétrica e positiva semi-definida, dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

e em (2.40)  $\mathbf{Q}_{22}$  é positiva definida [NILSSON, 1998, p.92].

Já  $c_m(k\tau_s)$ , em (2.39), é o estado da cadeia de Markov [NILSSON, 1998, p.92]. Um exemplo simples de cadeia de Markov para modelar o comportamento da carga de uma rede de comunicação, isto é, o comportamento dos atrasos  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ , é mostrado na Figura 2.18.

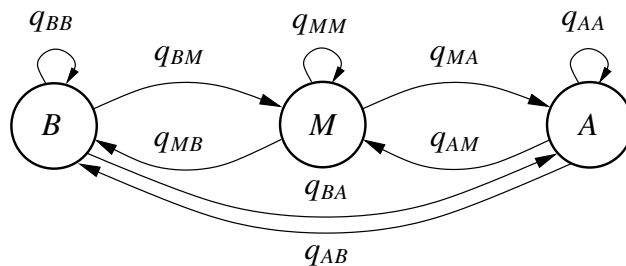


Figura 2.18: Exemplo de uma cadeia de Markov para modelar o estado de carga da rede.

Nesta figura, a carga do tráfego da rede é modelado por três estados: cargas baixa  $B$ ; média  $M$ ; e, alta  $A$ , respectivamente. As probabilidades de transições  $P$ , são indicadas sobre os arcos  $q_{ij}$  e dadas por [NILSSON, 1998, p.31].

$$q_{ij} = P\{c_{m+1} = j | c_m = i\}, \quad \text{com } i, j \in [B, M, A] \quad (2.41)$$

Além disso, quando a cadeia de Markov tem o estado  $c_k \in \{1, \dots, m\}$  a matriz de transição de estados  $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  é dada por  $q_{ij} = P\{c_{m+1} = j | c_m = i\}$  [NILSSON, 1998, p.76].

Os resultados de desempenho baseados na abordagem do controlador estocástico ótimo são melhores que os resultados clássicos [NILSSON, 1998, p.74]. A desvantagem dessa abordagem é a necessidade de uma grande quantidade de memória do controlador para armazenar os dados passados, tanto dos estados da planta e do controlador, como dos atrasos. Além disso, as hipóteses sobre as quais a teoria se sustenta são muito frágeis, uma vez que, é significativamente difícil assegurar que  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} < \tau_s$  ou ainda que nunca ocorra perda de pacotes durante o funcionamento do NCS [CHOW; TIPSUWAN, 2001]. Por fim, caso as informações de estado completo não sejam disponíveis, um filtro de Kalman pode ser utilizado para estimar os estados. Abordagens com controlador estocástico ótimo semelhantes a esta são obtidas por Nilsson e Gupta e são apresentadas em [NILSSON, 1998; GUPTA, 2009]. Nesta abordagem [NILSSON, 1998] são mantidas as mesmas hipóteses já apresentadas aqui e os atrasos não são modelados por uma cadeia de Markov, o que é equivalente a fazer em (2.39)  $c_m(k\tau_s) = 0$ . Já em Gupta [GUPTA, 2009] a hipótese de perdas de pacotes é relaxada.

## 2.6 Estabilidade de NCSs

A estabilidade de um NCS pode ser vista como a composição ou a verificação da estabilidade de dois sistemas. Um é o sistema de controle propriamente dito nNCS, e outro, a rede de comunicação. A rede comunicação é dita instável quando o tamanho da fila dos *buffers* dos nós componentes tende para o infinito quando o tempo cresce. Neste caso, quando a rede é instável os atrasos gerados por ela aumentam a tais níveis, que degradam o desempenho do sistema. O resultado desta degradação pode ser a instabilidade do NCS [LIAN; TILBURY, 2001].

A estabilidade via co-projeto é obtida na fase de projeto dos NCSs. Este tipo de estabilidade foi inicialmente suportada por técnicas de escalonamento [BRANICKY, 1995; CERVIN, 2003] e anos mais tarde pela abordagem de margem de *jitter*, denotada por  $J_m(L)$ . A definição da  $J_m(L)$  foi introduzida por Cervin em [CERVIN, 2004]. Seu advento foi possível graças ao teorema de estabilidade para sistemas de controle SISO (*single input single output*) com atrasos de entrada e saída limitados e variantes no tempo [KAO; LINCOLN, 2004]. Para a formulação deste critério de estabilidade admite-se que o sistema de controle nNCS seja estável. Além disso, o resultado



obtido é válido para o caso do sistema de controle de tempos contínuo, discreto e misto. Um sistema de controle é dito misto quando ele contém partes operando em tempo contínuo e partes operando em tempo discreto. Na Figura 2.19 é ilustrado o caso contínuo no tempo.

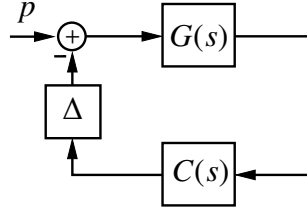


Figura 2.19: Sistema linear invariante no tempo com atraso variante no tempo na malha de realimentação, onde:  $p$  é a perturbação;  $G(s)$  e  $C(s)$  são, respectivamente, a planta e o controlador contínuos no tempo e  $\Delta$  é o operador de atraso variante no tempo.

Dessa maneira, para o sistema em malha fechada da Figura 2.19, com funções de transferências  $G(s)$  e  $C(s)$  com representações contínuas, o sistema é estável para qualquer atraso variante no tempo definido por

$$\Delta(v) = v(t - \delta(t)), \quad 0 \leq \delta(t) \leq \delta_{max} \quad (2.42)$$

se

$$\left| \frac{G(j\omega)C(j\omega)}{1 + G(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\delta_{max}\omega}, \quad \forall \omega \in [0, \infty], \quad (2.43)$$

O resultado precedente é válido para sistemas SISO e é baseado no teorema do ganho pequeno [JIANG, 1994]. Todavia, segundo os autores Kao e Lincoln, o mesmo pode ser generalizado para o caso de sistemas MIMO (*multiple-input-multiple-output*), através de técnicas LMIs (*linear matrix inequalities*)<sup>8</sup>. Observa-se ainda que, se o sistema de controle em malha fechada tem um pico de ressonância, então este é o ponto mais provável em que a equação (2.43) poderá vir a se tornar inválida. Assim, para um sistema com curva de Nyquist em que o pico de ressonância ocorra em torno da frequência de corte  $\omega_c$ , isto é, onde  $|C(j\omega_c)G(j\omega_c)| = 1$ , tem-se:

$$\left| \frac{G(j\omega_c)C(j\omega_c)}{1 + G(j\omega_c)C(j\omega_c)} \right| = \frac{1}{|e^{j\varphi_m} - 1|} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_m^2 + O(\varphi_m^4)}}, \quad (2.44)$$

onde  $\varphi_m$  é a margem de fase, que é assumida satisfazer  $\varphi_m < 1$  radiano. Fazendo na equação (2.43)  $\omega = \omega_c$ , obtém-se:

$$\left| \frac{G(j\omega_c)C(j\omega_c)}{1 + G(j\omega_c)C(j\omega_c)} \right| \approx \frac{1}{\varphi_m} < \frac{1}{\delta_{max}\omega_c}, \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_m > \delta_{max}\omega_c \quad (2.45)$$

a qual é, do teorema de Nyquist, a exata condição de estabilidade para um atraso constante  $\delta_{max}$ . Dessa maneira, a margem de *jitter* foi inspirada no conceito de margem de fase<sup>9</sup>. Assim, uma

<sup>8</sup>Tudo indica que a extensão de tal resultado não seja tão trivial assim. Até hoje espera-se por ela.

<sup>9</sup>Detalhes sobre a margem de fase, veja: [FRANKLIN, 2006, p.267], [FRANKLIN, 1998, p.36], [OGATA, 2003, p.440] e [KUO, 1992, p.406]

vez obtido o valor da margem de *jitter* é possível determinar a estabilidade e o desempenho do NCS, tal como é feito quando se utiliza a margem de fase na teoria clássica de controle.

Como hipótese, a abordagem da margem de *jitter* parte do pressuposto que  $\tau_k$  pode ser dividido em duas partes. Uma fixa  $L$  e uma variável  $J$ , denominada *jitter*, como mostrado na Figura 2.21. Além disso, considera-se que o sistema de controle seja semelhante ao da Figura 2.19 e tenha um ZOH na saída do controlador e a saída da planta seja amostrada periodicamente por um amostrador periódico (do inglês - *periodic sampler*)  $S_h$  como ilustrado na Figura 2.20.

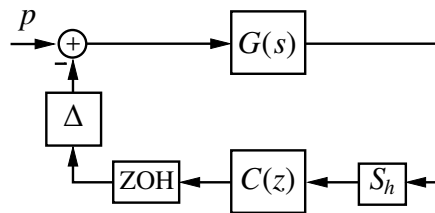


Figura 2.20: Sistema de controle com atraso variante no tempo na malha de realimentação, onde:  $p$  é a perturbação;  $G(s)$  e  $C(z)$  são, respectivamente, a planta contínua, controlador discreto e  $\Delta$  é o operador de atraso variante no tempo.

A partir dessas hipóteses define-se a seguir a margem de *jitter*.

**Definição 2.2 (Margem de *jitter*)** Dado um sistema como o da Figura 2.19, acrescida do ZOH e do  $S_h$ , como ilustrado na Figura 2.20, a margem de *jitter* é definida como o maior número  $J_m(L) > J$  para o qual a estabilidade da malha fechada do sistema de controle, submetido a qualquer valor de atraso variante no tempo contido no intervalo  $[L, L + J_m(L)]$ , é preservada.

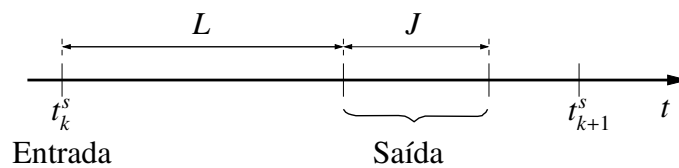


Figura 2.21: Divisão do atraso de controle  $\tau_k = L + J$  em parte constante  $L$  e parte variável  $J$ .

Observa-se que, como o critério de estabilidade obtido por Lincoln [KAO; LINCOLN, 2004] adveio do teorema de Nyquist, ele não é muito conservativo. Além disso, parte dessa conservatividade foi reduzida por Mirkin [MIRKIN, 2007] em cerca de 57%. Isto é, Mirkin obteve um novo limite para  $\delta_{max}$ . Este novo limite é  $\delta_{max} = (\pi/2)\delta'_{max} \approx 1,57\delta'_{max}$  [MIRKIN, 2007], onde  $\delta'_{max}$  é o atraso obtido por Lincoln [KAO; LINCOLN, 2004]. O significado explícito do aumento  $\delta_{max}$  obtido por Mirkin [MIRKIN, 2007] é o aumento do valor máximo de  $\tau_k$  em cerca de 57%. Tal aumento tem uma série de benefícios para o NCS, entre os quais: o valor de  $\tau_s$  pode ser aumentado, o que acarreta numa imediata redução da quantidade de pacotes de dados que trafegarão na rede de comunicação, redução do número de colisões de pacotes no

meio de comunicação, assim como, aumento das utilizações do barramento de comunicação e da largura de banda da rede de comunicação [HRISTU-VARSAKELIS; LEVINE, 2005, p.198].

Embora a abordagem de co-projeto via margem de *jitter* seja recente, a literatura a este respeito é diversificada [PEREZ, 2006, 2006; SANTOS, 2008; TABBARA, 2007; ERIKSSON, 2009]. Tal diversidade é justificada pela simplicidade da abordagem de co-projeto via margem de *jitter*, aliado ao fato do projeto do sistema de controle poder ser realizado utilizando técnicas clássicas de controle invariante no tempo.

## 2.7 Determinação do atraso de controle

Uma condição suficiente para que os NCSs operem de maneira estável é o cumprimento do máximo atraso de controle  $\tau_m$  suportado por cada malha de controle. Em outras palavras, se  $\tau_k \leq \tau_m$  a estabilidade do NCS é assegurada. Dessa maneira, obter  $\tau_m$  não conservativo é de fundamental relevância para a otimização dos recursos dos NCSs. Isto porque, em um sistema de dados amostrados,  $\tau_m$  está diretamente relacionado com  $\tau_s$ . Por conseguinte, quando se utiliza um ZOH em um sistema de controle linear invariante no tempo, a ação do segurador do ZOH introduz um atraso médio de  $\tau_s/2$  no sistema de controle [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.320], [FRANKLIN, 1998, p.63], [FRANKLIN, 2006, p.454]. Neste caso, diz-se que  $\tau_s$  é considerado um parâmetro comum do sistema de controle e da rede de comunicação [HALEVI; RAY, 1988].

Do ponto de vista da teoria clássica de controle, no tocante ao projeto do sistema de controle, tem-se que quanto menor o valor de  $\tau_s$ , mais a resposta do sistema discreto no tempo se aproxima da resposta do sistema contínuo no tempo [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.15]. Por outro lado, quanto menor o valor de  $\tau_s$ , maior a frequência de amostragem e, conseqüentemente, maior é o tráfego de pacotes na rede [HALEVI; RAY, 1988], bem como, maior largura de banda é requisitada. Dessa maneira, é fundamental a busca de um  $\tau_s$  máximo  $\tau_{s_m}$  que, por um lado, mantenha a integridade do sistema de controle discreto, e por outro lado, otimize a largura de banda da rede de comunicação. A busca desse  $\tau_{s_m}$  teórico tem sido realizada de forma indireta, através da determinação de  $\tau_k$  máximo, denotado por  $\tau_m$ .

A definição de  $\tau_m$  foi feita inicialmente por Kim [KIM, 1998] como o MADB (*Maximum Allowable Delay Bound*). Kim [KIM, 1998] determinou  $\tau_m$  através da teoria de Lyapunov e com um método de escalonamento conseguiu limitar e reduzir a intensidade dos atrasos do NCS. Já Walsh [WALSH, 1999; WALSH., 2002] definiu-se  $\tau_{s_m}$  como o MATI (*Maximum Allowable Transfer Interval*)<sup>10</sup> e o obteve para sistemas não lineares, com base na teoria de Lyapunov e no método das perturbações [KHALIL, 1996, p.203]. Entretanto, o valor de  $\tau_{s_m}$  obtido por Walsh foi muito conservativo. Desde então, iniciou-se uma corrida pela busca do  $\tau_{s_m}$  menos

<sup>10</sup>A notação para o MATI definida por Walsh foi  $\tau_m$ . Entretanto, aqui assumirá-se-a uma notação própria  $\tau_{s_m}$ .

conservativo [NEŠIĆ; TEEL, 2004a, 2004b; CARNEVALE, 2007b]. Diversos foram os métodos e abordagens utilizados na tentativa de determinar  $\tau_{sm}$  não conservativo. A seguir serão apresentados alguns deles.

### 2.7.1 Método de escalonamento

Os mais diversos métodos de escalonamentos são frequentemente utilizados na teoria de sistemas em tempo real, como forma de pré-estabelecer o comportamento temporal de um sistema. Este comportamento temporal pode se dá a nível de CPU, barramento de comunicação, ou até mesmo, a nível de máquina virtual, como utilizado, por exemplo, na máquina virtual Java presente na linguagem de programação Java.

Em NCSs, métodos de escalonamento também são intensamente utilizados e, muitas vezes, indispensáveis. Neste sentido, métodos de escalonamento foram utilizados por Kim [KIM, 1998] para limitar e reduzir a intensidade dos atrasos do NCS, bem como, para determinar o valor de  $\tau_m$  por meio do método de estabilidade de Lyapunov. Para tal, Kim modelou o NCS com três atrasos:  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^{ca}$  (vide Definição 2.1) e a dinâmica de cada malha de controle do NCS para o  $k$ -ésimo COAC como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t - \tau_2) + \mathbf{F}_3\mathbf{x}(t - \tau_3) \quad (2.46)$$

onde:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_p^T(t) \quad \mathbf{x}_c^T(t)]^T, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \mathbf{A}_c \mathbf{C}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$0 \leq \tau_1 = \tau_k^{sc} \leq \tau_{k_{max}}^{sc} = \tau_{1_{max}} \quad (2.49)$$

$$0 \leq \tau_2 = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} + \tau_k^c \leq \tau_{k_{max}}^{sc} + \tau_{k_{max}}^{ca} + \tau_{k_{max}}^c = \tau_{2_{max}} \quad (2.50)$$

$$0 \leq \tau_3 = \tau_k^{ca} + \tau_k^c \leq \tau_{k_{max}}^{ca} + \tau_{k_{max}}^c = \tau_{3_{max}} \quad (2.51)$$

com  $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^{n_p}$  e  $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ , respectivamente, os estados da planta e do controlador, cujas representações em espaço de estados são dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k^{ca}) \quad (2.52)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.53)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{e}_r(t - \tau_k^{sc}) \quad (2.54)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) \quad (2.55)$$

As matrizes de estado  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$ ,  $\mathbf{C}_p$  e  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$  e  $\mathbf{C}_c$  são, respectivamente, da planta (índice  $p$ )

e do controlador (índice  $c$ ) com dimensões apropriadas. Portanto, cada malha de controle do NCS pode ser descrita como em (2.46) com três tipos de atrasos. Neste caso, Kim [KIM, 1998; PARK, 2002] mostrou que a malha de controle do NCS, dada em (2.46), é estável se

$$\tau_k < \frac{\sigma}{\delta \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{F}_i(\mathbf{F} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i)\|} = \tau_m \quad (2.56)$$

onde:  $\tau_k = \max_i \tau_{i_{max}}$ ,  $\sigma = \frac{\lambda_{min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{max}(\mathbf{P})}$ ,  $\delta = \left[ \frac{\lambda_{max}(\mathbf{P})}{\lambda_{min}(\mathbf{P})} \right]^{1/2}$ ,  $\lambda_{max}(\cdot)$  e  $\lambda_{min}(\cdot)$  são, respectivamente, o máximo e o mínimo autovalores da matriz e, finalmente,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes definidas positivas simétricas da seguinte equação de Lyapunov:

$$\left( \mathbf{F} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left( \mathbf{F} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i \right) = -\mathbf{Q} \quad (2.57)$$

## 2.7.2 Método das perturbações

O método das perturbações [KHALIL, 1996, p.203] foi aplicado, inicialmente em NCS, por Walsh [WALSH, 1999, 2001]. Nestes artigos os autores determinaram o comportamento assintótico do NCS para sistemas não lineares. O controlador do NCS era previamente projetado sem considerar a presença da rede de comunicação. Isto é, o controlador era projetado para a topologia nNCS, ilustrada na Figura 2.4a. Como a introdução da rede no sistema de controle causa uma perturbação no sistema de controle, Walsh modelou o NCS com o método das perturbações. Já em Walsh [WALSH, 1999; WALSH., 2002] foi utilizado o método das perturbações para determinar o valor de  $\tau_{sm}$  do NCS, respectivamente, para as topologias S-CA e S-C-A.

### Topologia S-CA

Um diagrama da topologia S-CA é ilustrado na Figura 2.4b. Para esta topologia a representação dinâmica da planta, em espaço de estados, é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (2.58)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.59)$$

onde:  $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^{n_p}$  é o estado da planta. Sem perda de generalidade,  $\mathbf{D}_p = \mathbf{0}$ . E, a representação dinâmica do controlador em espaço de estados, projetado sem considerar os efeitos da rede de comunicação, é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (2.60)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (2.61)$$

onde, no erro de referência  $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t - \tau_k^{sc}) = \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$  é considerado apenas a parte dinâmica, isto é,  $\mathbf{r}(t) = 0$ , o que resulta em:

$$\mathbf{e}_r(t) = -\hat{\mathbf{y}}(t) = -\mathbf{y}(t - \tau^{sc}) \quad (2.62)$$

Dessa maneira, substituindo a equação (2.62) em (2.60) e em (2.61), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) - \mathbf{B}_c \hat{\mathbf{y}}(t) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) - \mathbf{D}_c \hat{\mathbf{y}}(t) \quad (2.64)$$

Devido a introdução da rede de comunicação no sistema de controle, existirá sempre um erro  $\mathbf{e}(t)$  associado à saída da planta  $\hat{\mathbf{y}}(t)$ . Este erro foi considerado por [WALSH, 1999] como  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$ . Entretanto, neste texto será considerado segundo  $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$  e como em [WALSH, 1999] é consequência direta do efeito do atraso introduzido pela rede de comunicação sobre o sistema de controle. Essa mudança não modifica a análise nem os resultados da mesma.

Por fim, definindo  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_p(t) \ \mathbf{x}_c(t)]^T$ , desde que  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}(t) \ \mathbf{e}(t)]^T$  seja o estado do NCS em malha fechada, e  $t_i$  o instante de transmissão de um pacote. Para  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , a dinâmica do sistema global pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = [\dot{\mathbf{x}}(t) \ \dot{\mathbf{e}}(t)]^T = [\dot{\mathbf{x}}_p(t) \ \dot{\mathbf{x}}_c(t) \ \dot{\mathbf{e}}(t)]^T = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) \quad (2.65)$$

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}_p(t) \ \mathbf{x}_c(t) \ \mathbf{e}(t)]^T, \quad (2.66)$$

onde:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \\ -\mathbf{B}_c \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p - \mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Considerações complementares, a respeito da estabilidade do NCS, obtidas a partir da representação precedente serão apresentadas no tópico seguinte, tanto para a topologia S-C-A, quanto para S-CA.

### Topologia S-C-A

Um diagrama da topologia S-C-A é ilustrado na Figura 2.4d. Para esta topologia a representação dinâmica da planta, em espaço de estados, é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (2.69)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.70)$$

e a representação dinâmica do controlador, em espaço de estados, é dada por (2.63) e (2.64). Além disso, para este caso o erro  $\mathbf{e}(t)$  é associado às saídas da planta  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  e do controlador  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ . Tal erro é determinado a seguir e é consequência direta do efeito do atraso introduzido pela rede sobre o sistema de controle [WALSH., 2002].

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(t) \\ \mathbf{e}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Finalmente, a representação dinâmica do NCS em malha fechada é dado por:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = [\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \ \dot{\mathbf{e}}(t)]^T = [\dot{\mathbf{x}}_p(t) \ \dot{\mathbf{x}}_c(t) \ \dot{\mathbf{e}}_p(t) \ \dot{\mathbf{e}}_c(t)]^T = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) \quad (2.72)$$

com

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}_p(t) \ \mathbf{x}_c(t) \ \mathbf{e}_p(t) \ \mathbf{e}_c(t)]^T, \quad (2.73)$$

e:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_p \mathbf{D}_c & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{B}_c & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p) & -\mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c \mathbf{C}_p & -\mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c \times n_p} & \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c & -\mathbf{C}_p \mathbf{B}_p \\ \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c \times n_p} & \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \quad (2.77)$$

Como foi assumido, em ambas as topologias, que o controlador foi projetado sem considerar os efeitos da rede,  $\mathbf{A}_{11}$  é dita de Hurwitz<sup>11</sup>.

Para determinar  $\tau_{sm}$ , Walsh escreveu as equações de estado do NCS em malha fechada como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_{11} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)), \quad (2.78)$$

onde

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{A}_{12} \mathbf{e}(t) \quad (2.79)$$

é considerado uma perturbação evanescente (do inglês - *vanishing disturbance*) generalizada<sup>12</sup>

<sup>11</sup>Uma matriz é dita de Hurwitz, quando todos seus autovalores têm parte real negativa [KHALIL, 1996, p.123].

<sup>12</sup> $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$  é uma perturbação evanescente se  $\mathbf{g}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t$ .

[KHALIL, 1996, p.204], que sob condições de operação normal, quando  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) \rightarrow \mathbf{0}$ , pois  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  carregará  $\mathbf{x}(t)$  estritamente. Dessa maneira, desde que se conseguisse uma forma de fazer  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) \rightarrow \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , estaria demonstrado a estabilidade do NCS. Walsh demonstrou no caso, a seguinte condição de estabilidade do NCS:

$$\frac{\|\mathbf{D}\| \|\mathbf{A}_{11}\| \|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\|^{-1} \left( e^{\|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\| \tau_{sm}} - 1 \right) e^{\|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\| \tau_{sm}}}{1 - \|\mathbf{D}\| \|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\|^{-1} \left( e^{\|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\| \tau_{sm}} - 1 \right)} < \frac{1}{2\lambda_{max}(\mathbf{P})} \quad (2.80)$$

$$1 - \|\mathbf{D}\| \|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\|^{-1} \left( e^{\|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\| \tau_{sm}} - 1 \right) > 0, \quad (2.81)$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica definida positiva solução da equação de Lyapunov  $\mathbf{P}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{P} = -\mathbf{I}$  do nNCS e a matriz  $\mathbf{D}$  é, respectivamente, para as topologias S-CA e S-C-A, dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \mathbf{C}_p & \mathbf{0}_{(n_p + n_c) \times n_c} \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

onde, evidentemente em (2.82) e (2.83) a matriz  $\mathbf{A}_{12}$  é, respectivamente, dada por (2.67) e (2.75). Além disso, pode-se observar, da equação (2.80), que após algumas manipulações matemáticas, é possível mostrar que

$$\tau_{sm} < \frac{1}{b} \ln \left\{ \frac{\left( 1 - \frac{k_1}{a} \right) + \sqrt{\left( 1 - \frac{k_1}{a} \right)^2 + \frac{4k_1}{a} \left( 1 + \frac{b}{c} \right)}}{2} \right\} \quad (2.84)$$

com  $a = \|\mathbf{A}_{11}\|$ ,  $b = \|\mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}\|$ ,  $c = \|\mathbf{D}\|$ ,  $k_1 = 1/[2\lambda_{max}(\mathbf{P})]$  e  $\ln$  denota a função logaritmo natural, também conhecida como logaritmo neperiano.

O valor de  $\tau_{sm}$  determinado por Walsh para topologia S-C-A foi cerca de dez mil vezes menor que o valor obtido em simulação [WALSH., 2002], o que veio a caracterizar o método das perturbações como conservador. Já em [NEŠIĆ; TEEL, 2004a] essa conservatividade foi reduzida em cerca de mil vezes. Contudo, ainda assim, o valor de  $\tau_{sm}$  determinado por Nešić ainda era cerca de dez vezes menor que o esperado, obtido em simulação. Para conseguir determinar o valor do MATI mais próximo do ideal, inicialmente em [NEŠIĆ; TEEL, 2004a] foram utilizados os teoremas do ganho pequeno [JIANG, 1994] para provar a estabilidade entrada-estado (do inglês - *Input-to-State Stable* - ISS). Em seguida, estes autores conseguiram melhorar o resultado utilizando o teorema do ganho pequeno combinado com a teoria de estabilidade de Lyapunov [CARNEVALE, 2007a, 2007b]. As abordagens desenvolvidas em [NEŠIĆ; TEEL, 2003, 2004a, 2004b; CARNEVALE, 2007b, 2007a] para determinar  $\tau_{sm}$  tiveram como ponto de partida a representação em espaço de estados do NCS em malha fechada, topologia S-C-A, das



equações (2.72)-(2.77). Neste caso,  $\tau_{s_m}$  é dado por:

$$\tau_{s_m} < \frac{1}{L} \ln \left( \frac{L + \gamma}{\rho L + \gamma} \right) \quad (2.85)$$

onde  $\rho$  caracteriza as propriedades de estabilidade do protocolo de escalonamento utilizado e, tipicamente, depende do número de nós da rede;  $L$  caracteriza o possível crescimento do erro entre os valores reais de entrada e saída e seus últimos valores transmitidos via rede, isto é,  $L > 0$  diz respeito à expansão da função de Lyapunov do protocolo de comunicação entre tempos de transmissão;  $\gamma$  é o ganho de perturbação  $\mathcal{L}_p$  que captura as propriedades de robustez do sistema sem a rede, isto é, do sistema de controle nNCS [NEŠIĆ; TEEL, 2003] e diz respeito à contração da função de Lyapunov do protocolo de comunicação entre tempos de transmissão [CARNEVALE, 2007a]. Desde então, diversos protocolos de rede têm sido propostos e/ou melhorados para suportar um MATI menos conservativo [HEEMELS, 2010; TOLIC; HIRCHE, 2017].

### 2.7.3 Análise - MATI não conservativo

A não determinação analítica exata do MATI impacta diretamente na não otimização dos recursos físicos dos NCSs. O que leva, inevitavelmente, à necessidade de maior largura de banda da rede de comunicação e utilização de CPUs dos nós componentes com maior capacidade de processamento. Além disso, requer, sensores e atuadores com conversores A/D (*Anologic to Digital*) e D/A (*Digital to Anologic*) com taxas de conversões mais rápidas do que de fato é necessário. Todos esses fatores impactam diretamente no aumento do custo final da instrumentação para implementação dos NCSs. Além disso, como efeito colateral, causam o aumento do consumo de energia dos nós [XIA, 2008]; provoca o estresse dos componentes, uma vez que, para satisfazer os requisitos temporais impostos pelo MATI, as CPUs dos nós componentes têm que operar com frequências de *clocks* maiores que as necessárias; assim como, aumento do tráfego de pacotes de dados na rede de comunicação, uma vez que, uma quantidade maior que o necessário de pacotes de dados passa a trafegar na rede.

## 2.8 Considerações finais

Embora os NCSs tenham surgido a cerca de quarenta anos, o desenvolvimento teórico da área ainda não se consolidou [CARNEVALE, 2007a]. Trata-se de um problema multidisciplinar cujas dificuldades são visivelmente desafiadoras. Uns tentam ou tentaram resolvê-lo do ponto de vista da teoria de controle, outros com teorias de sistemas em tempo real. Assim, historicamente as abordagens são desenvolvidas sob uma ou outra visão. Contudo, em ambas as vertentes, as metodologias, abordagens e os resultados obtidos, ainda que apresentem vantagens e desvan-

tagens, como mostrado neste capítulo, são quase sempre baseados em hipóteses não realistas [CHOW; TIPSUWAN, 2001]. Portanto, ainda são necessários grandes investimentos em pesquisa para que os NCSs sejam efetivamente utilizados em plenitude, sem a subutilização dos recursos físicos do sistema, como é feito atualmente.

Dessa maneira, muito esforço tem sido despendido para desenvolver o arcabouço teórico necessário para superar as dificuldades e limitações até então enfrentadas, onde o problema central é o atraso e seus efeitos sobre o sistema de controle. Para amenizar os efeitos do atraso ou obtê-lo analiticamente de forma a preservar a estabilidade do NCS diversas técnicas foram propostas na literatura. Entretanto, como referenciado neste capítulo, todas estas soluções são obtidas a partir de hipóteses quase sempre não realistas ou um tanto quanto restritivas [CHOW; TIPSUWAN, 2001]. Uma dessas considerações é a de fazer o NCS invariante no tempo. Isso, embora facilite o tratamento sob o ponto de vista da análise matemática, parece inadequado para abordar um problema que é eminentemente variante no tempo. Além disso, tal abordagem torna o atraso de controle maior do que de fato ele é, sem garantias reais de que na prática ele seja inferior ao valor máximo pré-estabelecido em projeto. Uma dessas técnicas é a de coprojeto, realizada com base na margem de *jitter*, a qual, especifica na fase de projeto, ainda que de forma conservativa, um limitante para o atraso máximo suportado, de forma a garantir a operacionalidade do NCS. Outras técnicas tradicionais que tratam o NCS como um sistema invariante no tempo são baseadas em observadores e preditores de estados. Entretanto, ambas são obtidas sob pena do aumento do atraso de controle.

Uma forma de superar o aumento do atraso de controle é tratar os NCSs como sistemas variantes no tempo. Todavia, embora nada impeça que isto seja feito, as dificuldades analíticas enfrentadas nesta direção são desafiadoras. Como mostrado neste capítulo, os primeiros passos no desenvolvimento de observadores e preditores de estados variantes no tempo já foram dados. Isto torna possível, em alguns casos, relaxar hipóteses reais como a da perda de pacotes de dados. Um exemplo evidenciado é obtido quando os controladores dos NCSs são projetados sob a ótica de observadores e preditores de estados estocásticos ótimos. Outro exemplo desse esforço está voltado para a direção do desenvolvimento matemático de técnicas de análise e projeto de sistemas amostrados variantes no tempo, as quais permitem modelar e projetar sistemas de controle baseado em eventos. Direções estas que, são atualmente vistas como potenciais candidatas para tratar adequadamente o problema de atrasos variantes no tempo, intrínseco aos NCSs.

Neste sentido, este trabalho tem sido conduzido com foco no desenvolvimento de metodologias que suportem o projeto de NCSs onde coexistam os paradigmas de amostragem guiadas no tempo e a eventos. Os resultados iniciais obtidos são encorajadores e parecem apontar no sentido do início da solução definitiva do problema de controle em rede. Nos capítulos seguintes são apresentados estes primeiros passos e a explicitação dos mesmos através do comportamento da resposta ao degrau unitário dos NCSs, obtidas via simulação, a partir das metodologias de-

envolvidas. Ressalva-se que nos trabalhos encontrados na literatura o intervalo de amostragem variante no tempo é apenas dos sensores [ÅSTRÖM, 2007; MENG; CHEN, 2012; ZHANG; PENG, 2015]. Nesta tese os intervalos de amostragem de todos os componentes: sensor, controlador e atuador, podem ser variantes no tempo.

Assim sendo, no capítulo seguinte serão apresentadas as definições dos modos de operação dos nós, assim como, os desdobramentos e implicações destes conceitos. Será demonstrado, por exemplo, que quando um nó é guiado a eventos o intervalo de amostragem de execução do algoritmo que ele executa muda de valor a cada COAC. Neste caso, é possível que todos os intervalos de amostragem dos componentes de um NCS tenham valores diferentes. Isso não só muda a forma de abordar o problema, como também, tem se mostrado ser uma maneira que conduz a resultados inovadores e definitivos na solução do problema dos NCSs.

# Capítulo 3

## Intervalos de amostragem dos componentes

### 3.1 Introdução

Como verificado nas discussões apresentadas em algumas partes do Capítulo 2, projetar e analisar NCSs sob a perspectiva de teorias baseadas em eventos parece ser a maneira mais adequada para superar os problemas decorrentes das variabilidades temporais dos atrasos nos mesmos. A utilização destas teorias resulta em benefícios significativos e almejados pela comunidade de controle, tais como, a redução do tráfego de pacotes de dados pelo barramento de comunicação [ÅRZÉN, 1999; HEEMELS, 2008], assim como, a redução da variância do sinal de saída da planta [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999].

Portanto, como evidenciado, existem razões concretas para o desenvolvimento de teorias de controle baseado em eventos. Contudo, o problema é que tais teorias ou não existem, ou estão em fase embrionária de desenvolvimento. Neste sentido, esta tese foi conduzida com foco no desenvolvimento de metodologias que suportem o projeto de NCSs onde coexistam os paradigmas de amostragem guiadas no tempo e a eventos.

Os passos iniciais na direção de tais metodologias foram dados, a partir das definições dos modos de operação dos nós dos NCSs, realizados na próxima seção. Em decorrência destas definições foi constatado e é analiticamente provado que quando o NCS funciona com os nós componentes guiados a eventos, os intervalos de amostragem dos componentes são, em geral, distintos. Ou seja, os intervalos de amostragem podem assumir valores diferentes para ciclos de operação do algoritmo de controle (COAC) distintos.

Para formalizar matematicamente as assertivas pré-anunciadas e ou outras ainda não explicitadas, neste capítulo serão apresentadas a modelagem e a determinação analítica dos intervalos de amostragem dos controladores e dos atuadores dos NCSs [SILVA; LIMA, 2018]. O conhecimento dos intervalos de amostragem dos controladores, assim como, dos atuadores de um NCS

em cada COAC é de fundamental relevância para entender o contexto do problema em estudo e, dessa forma, tornar possível projetar e simular um NCS. Os resultados dos modelos doravante obtidos serão para NCSs com controladores e atuadores guiados a eventos ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo.

A partir desses modelos torna-se imediata a determinação das dinâmicas de tempo discreto dos NCSs com controladores e atuadores guiados a eventos ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo. Inicialmente, os IAC e os IAA serão obtidos assumindo que os sensores são guiados no tempo. Posteriormente, a hipótese dos sensores serem guiados no tempo é relaxada e os resultados são estendidos para o caso dos sensores serem guiados a eventos. O relaxamento dessa hipótese pode ser feito de forma direta e imediata, sem causar grandes mudanças nos resultados a seguir apresentados. Em outras palavras, os nós sensores podem operar, normalmente, e desde que desejado, sob a estratégia guiada a eventos. Entretanto, a implicação dessa mudança de paradigma de operação de tempo para eventos resulta na imediata transformação de um sistema invariante no tempo, quando operando guiado no tempo, para um sistema variante no tempo, quando operando guiado a eventos ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo.

## 3.2 Preliminares

A seguir serão abordados os conceitos de amostragem e de controle baseado em eventos e no tempo. Conceitos formais como os de períodos de amostragem, de nós sensores, nós controladores e nós atuadores guiados no tempo, a eventos ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo e, as implicações de cada um destes modos de operação dos nós serão apresentados.

### 3.2.1 Amostragem

A teoria de amostragem é ampla e utilizada em diversas áreas, desde a estatística aos sistemas de dados amostrados [JURY, 1958; KALMAN; BERTRAM, 1959], tão comuns nas teorias de controle e das comunicações. De uma maneira geral, define-se amostragem como [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.31]:

**Definição 3.1 (Amostragem)** *É o ato ou processo de tomar uma pequena parte ou quantidade de alguma coisa como uma amostra para teste ou análise.*

A amostragem de um sinal  $\mathbf{y}(t)$  de tempo contínuo é realizada nos instantes  $t_k^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , chamados instantes de amostragem, de forma a se obter a sequência de números  $\{\mathbf{y}(t_k^s)\}$ . Cada termo  $\mathbf{y}(t_k^s)$  desta sequência representa a  $k$ -ésima amostra do sinal  $\mathbf{y}(t)$ . A sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$  pode ser ou não conhecida a priori. Quando os instantes de amostragem são conhecidos a priori, tem-se o que se chama de amostragem periódica

[ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.31], também chamada amostragem convencional [KALMAN; BERTRAM, 1959]. Neste caso, os instantes de amostragem são conhecidos e dados por  $t_k^s = k\tau_s$ , onde  $\tau_s$  é chamado de período de amostragem.

Quando os instantes de amostragem não são igualmente espaçados no tempo e não são conhecidos a priori tem-se o que se chama de amostragem aleatória [KALMAN; BERTRAM, 1959], também conhecida como amostragem baseada em eventos [FRANKLIN, 1998, p.3]. Neste caso, os instantes de amostragem são dados por  $t_{k+1}^s = t_k^s + \tau_{s_k}$ , onde  $\tau_{s_k}$  é o intervalo de amostragem [KALMAN; BERTRAM, 1959; FRANKLIN, 1998, p.59]. Evidentemente, os valores de  $t_k^s$ ,  $t_{k+1}^s$  e de  $\tau_{s_k}$  são aleatórios, isto é,  $t_k^s$ ,  $t_{k+1}^s$  e  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , são variáveis aleatórias [KALMAN; BERTRAM, 1959]. Um exemplo clássico deste tipo de amostragem é obtido quando se utiliza um *encoder* para determinar o instante de amostragem, através da geração de um pulso, que inicializa o processo de amostragem [FRANKLIN, 1998, p.3]. Diversos outros exemplos podem ser encontrados nas seguintes referências [ÅRZÉN, 1999; ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002; ÅSTRÖM, 2007].

### 3.2.2 Controle baseado em eventos e no tempo

A idéia inicial de mesclar as teorias de controle com os conceitos de eventos não é nova, data dos anos cinquenta [KALMAN, 1957; ELLIS, 1959; KALMAN; BERTRAM, 1959]. Desde então, muito poucos frutos surgiram desta associação. A razão disto sempre foi a dificuldade enfrentada para se desenvolver ferramentas e/ou modelos matemáticos adequados para tratar de forma eficiente problemas eminentemente variantes no tempo. Diante deste problema, diversos questionamentos afloram naturalmente, como por exemplo, o que vem a ser um evento? Cujas resposta é, em geral, um: “acontecimento incerto, casual, esporádico. Do ponto de vista da estatística, um evento representa a ocorrência, num fenômeno aleatório, de um membro de um determinado conjunto que se define a priori”. Para efeito de formalização serão apresentadas, a seguir, as definições de: espaço amostral; experimento; evento; períodos de amostragem; intervalos de amostragem; nós sensores, controladores e atuadores guiados a eventos e no tempo; nós controladores e atuadores simultaneamente guiados a eventos e no tempo. Também serão discutidas as implicações de algumas destas definições.

**Definição 3.2 (Experimento)** *Um experimento  $\mathcal{E}$  é o ato ou processo de tomar uma pequena parte ou quantidade de alguma coisa como uma amostra para teste ou análise.*

Um exemplo clássico de experimento é o do lançamento de uma moeda para se verificar qual de suas faces é validada.

**Definição 3.3 (Espaço amostral)** *Um espaço amostral, ou espaço amostral universal  $E$  de um experimento ou teste aleatório  $\mathcal{E}$  é o conjunto de todos os resultados possíveis de  $\mathcal{E}$ .*

No caso, se o experimento é lançar uma moeda e verificar a face voltada para cima, o espaço amostral é o conjunto  $E = \{cara, coroa\}$ .

**Definição 3.4 (Evento)** *Um evento  $e$  relativo a um particular espaço amostral  $E$  associado a um experimento  $\mathcal{E}$  é um conjunto de resultados possíveis do experimento. Isto é,  $e$  é um subconjunto do espaço amostral  $E$ .*

Por exemplo, para o caso do experimento ser lançar uma moeda e verificar a face voltada para cima, os eventos possíveis são os conjuntos:  $e = \{cara\}$ ,  $e = \{coroa\}$  e,  $e = \{cara, coroa\}$ .

Um exemplo de interesse em sistemas de controle em rede é o da transferência de pacotes de dados em uma rede de comunicação, de largura de banda limitada, que interconecta os componentes de vários sistemas de controle, ou seja, de vários NCSs. Neste caso, em cada NCS pacotes de dados são enviados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador.

Para este cenário, considera-se que  $E_s$  seja o espaço amostral, cujos membros são os eventos de amostragem dos nós sensores de cada NCS, e que o  $k$ -ésimo evento de amostragem  $e_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , ocorra no instante de amostragem  $t_k^s$ . Assim,  $E_s = \{e_0, e_1, \dots, e_k, \dots\}$  e, portanto, cada evento  $e_0, e_1, \dots, e_k, \dots$  está associado ao seu respectivo instante de amostragem  $t_0^s, t_1^s, \dots, t_k^s, \dots$ . Consequentemente, o intervalo de amostragem do  $k$ -ésimo COAC  $\tau_{s_k}$  é dado pela diferença entre os instantes de amostragem da  $(k+1)$ -ésima e da  $k$ -ésima amostras, isto é,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  [KALMAN; BERTRAM, 1959; FRANKLIN, 1998, p.59]. Quando os instantes de amostragem não são conhecidos a priori, o que caracteriza a aleatoriedade,  $\tau_{s_k}$  é variante no tempo, e o nó sensor é dito guiado a eventos. Por outro lado, se os instantes de amostragem são conhecidos a priori, isto é, dados por alguma relação analítica conhecida e invariante no tempo, como por exemplo  $t_k^s = k\tau_s$  [KALMAN; BERTRAM, 1959; ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.31], onde  $\tau_s$  é o período de amostragem, invariante no tempo, diz-se que o nó sensor é guiado no tempo. Tais definições serão formalizadas a seguir.

**Definição 3.5 (Nó sensor guiado no tempo)** *Um nó sensor é dito guiado no tempo quando a sequência  $\{t_k^s\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes de amostragem  $t_k^s$ , é conhecida a priori e definida por alguma relação analítica conhecida e invariante no tempo, como por exemplo,  $t_k^s = k\tau_s$ , onde  $\tau_s$  é o período de amostragem (Definição 3.7).*

**Definição 3.6 (Nó sensor guiado a eventos)** *Um nó sensor é dito guiado a eventos quando a sequência  $\{t_k^s\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes de amostragem  $t_k^s$ , coincide com a sequência de instantes de ocorrência dos eventos de amostragem. Assim,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  é o IAS (Definição 3.8) que é variante no tempo e pode até ter comportamento estocástico.*

**Definição 3.7 (Período de amostragem do sensor)** *O período de amostragem do sensor (PAS)  $\tau_s$  é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes de amostragem  $t_k^s$  e  $t_{k+1}^s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  consecutivos. Ou seja,  $\tau_s = t_{k+1}^s - t_k^s$  é invariante no tempo.*

**Definição 3.8 (Intervalo de amostragem do sensor)** *O intervalo de amostragem do sensor (IAS)  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  do  $k$ -ésimo COAC é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes de amostragem  $t_k^s$  e  $t_{k+1}^s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  consecutivos. Ou seja,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  é variante no tempo.*

No que diz respeito ao nó controlador, considere-se  $E_c$  o espaço amostral, cujos membros são os eventos de execução da lei de controle nos nós controladores de cada NCS e ainda que o  $k$ -ésimo evento de execução da lei de controle  $c_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , ocorra no instante de início da execução da lei de controle  $t_k^c$ . Assim,  $E_c = \{c_0, c_1, \dots, c_k, \dots\}$  e, portanto, cada evento  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  está associado ao respectivo instante de início da execução da lei de controle  $t_0^c, t_1^c, \dots, t_k^c, \dots$  no nó controlador. Evidencia-se ainda que, cada nó controlador poderá operar de três modos distintos, a saber: modo guiado no tempo, modo guiado a eventos e modo simultaneamente guiado a eventos e no tempo. Para efeito de formalização, as definições de período de amostragem do controlador (PAC), intervalo de amostragem do controlador (IAC) e dos modos de operação dos nós controladores são consistidas como:

**Definição 3.9 (Nó controlador guiado no tempo)** *Um nó controlador é dito guiado no tempo quando a sequência  $\{t_k^c\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes dos inícios das execuções da lei de controle  $t_k^c$  é conhecida a priori. Ou seja, os instantes  $t_k^c$  são dados por alguma relação matemática analítica conhecida e invariante no tempo, como por exemplo,  $t_k^c = k\tau_c$ , onde  $\tau_c$  é o período de amostragem do controlador (Definição 3.12).*

**Definição 3.10 (Nó controlador guiado a eventos)** *Um nó controlador é dito guiado a eventos quando a sequência  $\{t_k^c\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes dos inícios das execuções da lei de controle  $t_k^c$ , coincidir com a sequência de instantes de chegadas de pacotes de dados no nó controlador.*

**Definição 3.11 (Nó controlador simultaneamente guiado a eventos e no tempo)** *Um nó controlador é dito simultaneamente guiado a eventos e no tempo quando ele opera como no modo guiado a eventos. Porém, os relógios (clocks) dos nós sensores e controladores são sincronizados por um clock global, de forma a possibilitar a determinação do atraso de comunicação sensor controlador  $\tau_k^{sc}$ , ou via timestamping ou através de alguma outra técnica de determinação de atraso.*

**Definição 3.12 (Período de amostragem do controlador)** *O período de amostragem do controlador (PAC)  $\tau_c$  é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes consecutivos  $t_k^c$  e  $t_{k+1}^c$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de inícios de execução da lei de controle. Isto é,  $\tau_c = t_{k+1}^c - t_k^c$  é invariante no tempo.*

**Definição 3.13 (Intervalo de amostragem do controlador)** *O intervalo de amostragem do controlador (IAC)  $\tau_{c_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes consecutivos de inícios de execução da lei de controle  $t_k^c$  e  $t_{k+1}^c$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Assim, para o  $k$ -ésimo COAC  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  é variante no tempo.*



Observa-se como consequência imediata das Definições 3.10 e 3.11, que a sequência de instantes  $\{t_k^c\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  nem sempre é conhecida a priori. E, a depender do protocolo de acesso ao meio de comunicação da rede de comunicação utilizada, os instantes  $t_k^c$  desta sequência  $\{t_k^c\}$  poderão até mesmo serem estocásticos. Dessa maneira, para o  $k$ -ésimo COAC, o intervalo de tempo  $\tau_{c_k}$  entre dois inícios consecutivos de execução da lei de controle é dado por  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  e é chamado de intervalo de amostragem do controlador (IAC) (caso variante no tempo - Definição 3.13) ou período de amostragem do controlador (PAC)  $\tau_c$  (caso invariante no tempo - Definição 3.12).

Para o nó atuador, considere-se que  $E_a$  seja o espaço amostral, cujos membros são os eventos de início das comutações das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos nós atuadores de cada NCS, e que o  $k$ -ésimo evento de início das comutações da lei de controle  $a_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , ocorra no instante  $t_k^a$ . Desse modo,  $E_a = \{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\}$  e, portanto, cada evento  $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$  está associado ao respectivo instante de início das comutações das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos nós atuadores  $t_0^a, t_1^a, \dots, t_k^a, \dots$ . Além disso, cada nó atuador poderá operar sob a regência de três modos de operação distintos, a saber: modo guiado no tempo, modo guiado a eventos e modo simultaneamente guiado a eventos e no tempo, cujas definições de período de amostragem do atuador (PAA), intervalo de amostragem do atuador (IAA) e dos modos de operação dos nós atuadores, serão a seguir formalizados:

**Definição 3.14 (Nó atuador guiado no tempo)** *Um nó atuador é dito guiado no tempo quando a sequência  $\{t_k^a\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes dos inícios das comutações  $t_k^a$  das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores são conhecidos a priori. Ou seja, são dados por alguma relação matemática analítica conhecida e invariante no tempo, como por exemplo,  $t_k^a = k\tau_a$ , onde  $\tau_a$  é o período de amostragem do atuador (Definição 3.17).*

**Definição 3.15 (Nó atuador guiado a eventos)** *Um nó atuador é dito guiado a eventos quando a sequência  $\{t_k^a\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de instantes dos inícios das comutações  $t_k^a$  das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores coincidir com a sequência de instantes das chegadas de pacotes de dados no nó atuador.*

**Definição 3.16 (Nó atuador simultaneamente guiado a eventos e no tempo)** *Um nó atuador é dito simultaneamente guiado a eventos e no tempo quando ele opera como no modo guiado a eventos. Mas, os clocks dos nós controladores e atuadores estão sincronizados por um clock global, de forma a possibilitar a determinação do atraso de comunicação controlador atuador  $\tau_k^{ca}$ , ou via timestamping ou através de alguma outra técnica de determinação de atraso.*

**Definição 3.17 (Período de amostragem do atuador)** *O período de amostragem do atuador (PAA)  $\tau_a$  é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes consecutivos  $t_k^a$  e  $t_{k+1}^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de inícios de comutações das amostras da sequência de sinais de controle  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  nos atuadores. Isto é,  $\tau_a = t_{k+1}^a - t_k^a$  é invariante no tempo.*

**Definição 3.18 (Intervalo de amostragem do atuador)** *O intervalo de amostragem do atuador (IAA)  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  é o intervalo de tempo compreendido entre dois instantes consecutivos  $t_k^a$  e  $t_{k+1}^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  de inícios de comutações das amostras da sequência de sinais de controle  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  nos atuadores. Assim, para o  $k$ -ésimo COAC  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  é variante no tempo.*

Pode-se observar também das Definições 3.15 e 3.16, que a sequência de instantes  $\{t_k^a\}$  nem sempre é conhecida a priori. E, a depender do protocolo de acesso ao meio de comunicação da rede de comunicação utilizada, tais instantes poderão até mesmo ser estocásticos. Dessa maneira, para o  $k$ -ésimo COAC, o intervalo de tempo  $\tau_{a_k}$  entre dois inícios consecutivos de comutações das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores é dado por  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$ , e é chamado de intervalo de amostragem do atuador (IAA), conforme Definição 3.18.

**Observação 3.1 (Modos de operação dos nós atuadores)** *Embora sejam possíveis os três modos de operação dos nós atuadores apresentados nas Definições 3.14, 3.15 e 3.16 é consenso da comunidade científica utilizar o modo de operação guiado a eventos (ou ainda aqui no contexto da definição de nó atuador simultaneamente guiado a eventos e no tempo), uma vez que, não faz sentido que os pacotes da sequência de amostras do sinal de controle  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  que chegarem ao nó atuador não sejam imediatamente (automaticamente) aplicadas nas entradas da planta. Caso estas amostras não fossem imediatamente (automaticamente) aplicadas nas entradas da planta o atraso de controle aumentaria, o que é algo indesejável [CHOW; TIPSUWAN, 2001; NILSSON, 1998].*

Por uma questão de comodidade a Definição 2.1 será repetida aqui como a Definição 3.19. Observa-se ainda que muitas das definições anteriores a esta serão, ou poderão ser, novamente contempladas pela mesma razão.

**Definição 3.19** *Considere  $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$  seja o  $k$ -ésimo ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC), denota-se:  $\tau_k^s$  como o intervalo de tempo para a aquisição das informações provenientes dos sensores;  $\tau_k^{sc}$  como o intervalo de tempo para que a mensagem enviada pelo nó sensor chegue ao nó controlador;  $\tau_k^c$  como o intervalo de tempo para execução do algoritmo de controle embarcado no nó controlador;  $\tau_k^{ca}$  como o intervalo de tempo para que a mensagem enviada pelo nó controlador chegue ao nó atuador;  $\tau_k^a$  como o intervalo de tempo de comutação para execução da mensagem de controle no atuador;  $t_k^s$ ,  $t_k^c$  e  $t_k^a$  são, respectivamente, o instante de amostragem dos sensores, o instante de início da execução do algoritmo de controle dos controladores e o instante de início das comutações das amostras  $\{\mathbf{u}(t_k^c - \tau_k^{ca})\}$  do sinal de controle nos atuadores;  $\tau_s = t_{k+1}^s - t_k^s$  como o período de amostragem dos sensores (PAS) invariante no tempo, isto é,  $t_k^s = k\tau_s$ ;  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  como o intervalo de amostragem dos sensores (IAS) variante no tempo;  $\tau_c = t_{k+1}^c - t_k^c$  como o período de amostragem do controlador (PAC) invariante no tempo, isto é,  $t_k^c = k\tau_c$ ;  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  como o intervalo de amostragem do*

controlador (IAC) variante no tempo;  $\tau_a = t_{k+1}^a - t_k^a$  como o período de amostragem dos atuadores (PAA) invariante no tempo, isto é,  $t_k^a = k\tau_a$ ;  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  como o intervalo de amostragem do atuador (IAA) variante no tempo e  $\tau_k$  como o atraso de controle. Isto é,  $\tau_k$  é a soma de todos os atrasos de malha, decorridos, desde o início do processo de amostragem dos sensores, até o início da atuação dos atuadores na planta.

Como visto, o intuito da Definição 3.19 é relembrar a notação adotada e simplificar a dedução das expressões dos períodos de amostragem e intervalos de amostragem dos controladores e atuadores do NCS. Posteriormente, será enfatizado que quando os nós controladores e atuadores são guiados a eventos ou simultaneamente guiados a evento e no tempo, os intervalos de amostragem dos controladores e atuadores serão variantes no tempo, desde que, algum dos atrasos que antecedem estes componentes variem no tempo, ou durante o  $k$ -ésimo COAC ou durante  $(k + 1)$ -ésimo COAC. Isto é, para o caso dos controladores seus intervalos de amostragem serão variantes no tempo se  $\tau_k^s$ , ou  $\tau_k^{sc}$ , ou  $\tau_{k+1}^s$ , ou  $\tau_{k+1}^{sc}$  variar no tempo. Já para o caso dos atuadores seus intervalos de amostragem serão variantes no tempo se  $\tau_k^s$ , ou  $\tau_k^{sc}$ , ou  $\tau_k^c$ , ou  $\tau_k^{ca}$ , ou  $\tau_{k+1}^s$ , ou  $\tau_{k+1}^{sc}$ , ou  $\tau_{k+1}^c$ , ou  $\tau_{k+1}^{ca}$  variar no tempo.

A seguir, as expressões dos períodos/intervalos de amostragem dos controladores e dos atuadores serão obtidas, para NCSs submetidos a atrasos de controle menor e maior que um período/intervalo de amostragem dos sensores e, com e sem perdas de pacotes, para a topologia S-C-A. A generalização dos períodos/intervalos de amostragem do controlador e do atuador para as outras topologias é imediata.

### 3.3 NCSs sem perdas de pacotes

Nesta seção serão deduzidas as expressões dos períodos de amostragem dos controladores  $\tau_c$  e atuadores  $\tau_a$ . Assim como, os intervalos de amostragem dos controladores  $\tau_{c_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  e atuadores  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Tais deduções serão realizadas para NCSs não sujeitos a perda de pacotes. Neste caso, o atraso de controle  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  poderá ser maior ou menor que o período de amostragem dos sensores  $\tau_s$ . Ou ainda, maior ou menor que o intervalo de amostragem dos sensores  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

#### 3.3.1 Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ com $\tau_k \leq \tau_s$

A soma de todos os tempos de atrasos resultantes das execuções das tarefas nos nós e das transmissões das mensagens pela rede de comunicação é denominado de atraso de controle  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  [WITTENMARK, 1995]. Denotado por  $\tau_k$ , o atraso de controle do  $k$ -ésimo COAC, pode ser menor, igual ou maior que  $\tau_s$  ou que  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Para o caso da topologia S-C-A,

com  $\tau_k \leq \tau_s$ , tem-se que  $\tau_k$  é dado pela seguinte equação:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \leq \tau_s \quad (3.1)$$

Observa-se ainda que para o cenário previamente estabelecido, em que os nós sensores são guiados no tempo, os nós controladores são guiados a eventos, ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo, e os nós atuadores são guiados a eventos. Quando  $\tau_k \leq \tau_s$ , o comportamento dos atrasos, períodos de amostragem, intervalos de amostragem e instantes de amostragem dos componentes podem ser ilustrados como mostrado na Figura 3.1.

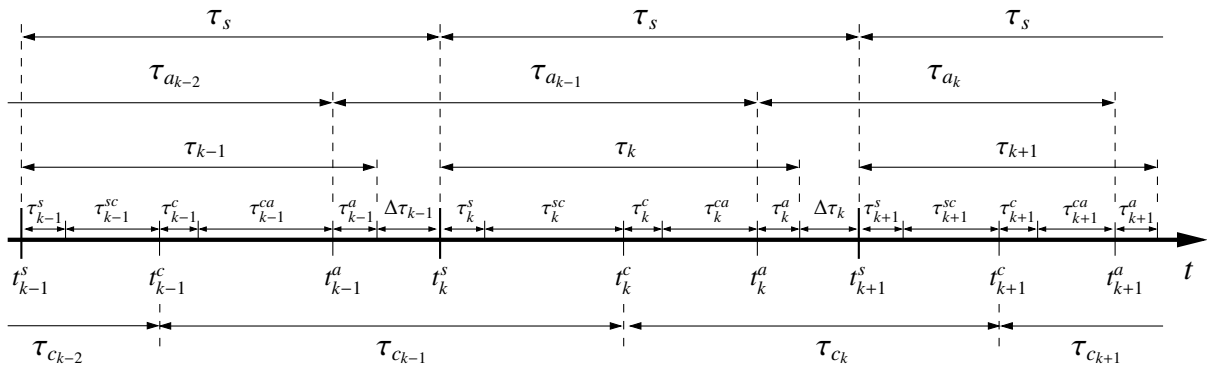


Figura 3.1: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

Naturalmente, da Figura 3.1 obtém-se que o instante de início da execução da lei de controle  $t_k^c$  é dado por:

$$t_k^c = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{c_i} \quad (3.2)$$

com  $t_0^c = \tau_0^s + \tau_0^{sc}$ . Analogamente, o instante  $t_k^a$  de início das comutações das amostras do sinal de controle nos atuadores é dado por:

$$t_k^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca} + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{a_i} \quad (3.3)$$

com  $t_0^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca}$ .

Para o caso em que a temporização do NCS é como a apresentada na Figura 3.1 o intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  é obtido analiticamente segundo o seguinte teorema [SILVA; LIMA, 2018].

**Teorema 3.1 (IAC com  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC do  $k$ -ésimo COAC. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e o*

NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes, então  $\tau_{c_k}$  é dado por:

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.4)$$

ou

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.5)$$

desde que na equação (3.4)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$ .  $\diamond$

**Prova:** Admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos. Admita ainda que o atraso de controle do  $k$ -ésimo COAC seja dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.6)$$

e que  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Além disso, o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes. Nessas condições, sempre existirá um  $\Delta\tau_k \geq 0$ , tal que

$$\Delta\tau_k = \tau_s - \tau_k \geq 0 \quad (3.7)$$

substituindo a equação (3.6) na equação (3.7), obtém-se:

$$\Delta\tau_k = \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a \quad (3.8)$$

e como da Figura 3.1,  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$ , é dado por:

$$\tau_{c_k} = \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a + \Delta\tau_k + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} \quad (3.9)$$

substituindo a equação (3.8) na equação (3.9), obtém-se:

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^s \quad (3.10)$$

evidentemente, desde que na equação (3.10)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$ , a mesma resulta em

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.11)$$

o que conclui a prova.  $\square$

Observa-se da equação (3.10) que quando o controlador é guiado a eventos, se  $\tau_{k+1}^{sc}$ , ou  $\tau_k^{sc}$ , ou  $\tau_{k+1}^s$ , ou  $\tau_k^s$  variar no tempo, então  $\tau_{c_k}$  também será variante no tempo. Nota-se ainda que, a expressão do intervalo de amostragem do controlador, equação (3.10), é dependente apenas do período de amostragem dos sensores, dos atrasos para aquisição dos dados  $\tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^s$  e dos atrasos de comunicação sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ . Isso motiva o seguinte corolário.

**Corolário 3.1 (IAC com atraso  $\tau_k \leq \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_k^s, \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC do  $k$ -ésimo COAC do NCS. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes, então,  $\tau_{c_k}$  é dependente apenas de  $\tau_s, \tau_k^s, \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ .  $\diamond$*

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 3.1, equação (3.4). Observa-se que  $\tau_{c_k}$  depende apenas de  $\tau_s, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .  $\square$

**Corolário 3.2 (IAC guiado no tempo)** *Sejam  $\tau_s, \tau_k^s, \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC guiado no tempo do  $k$ -ésimo COAC do NCS. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes e invariante no tempo, então,  $\tau_{c_k} = \tau_s$ .  $\diamond$*

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 3.1, equação (3.4). Observa-se que  $\tau_{c_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  dependente apenas de  $\tau_s, \tau_k^s, \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Além disso, o nó sensor é guiado no tempo e por hipótese o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes e é invariante no tempo, portanto,  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$ . Ainda por hipótese, como o nó controlador e o nó sensor do NCS são guiados no tempo o NCS é invariante no tempo. Isto significa que o controlador do NCS é invariante no tempo. Por conseguinte,  $\tau_k^{sc} = \tau_{k+1}^{sc}$ . Portanto, fazendo  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$  e  $\tau_k^{sc} = \tau_{k+1}^{sc}$  na equação (3.4), obtém-se que  $\tau_{c_k} = \tau_s$ .  $\square$

**Teorema 3.2 (IAA com  $\tau_k \leq \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_k^{ca}$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_k}$  o IAA do  $k$ -ésimo COAC do NCS. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes, então  $\tau_{a_k}$  é dado por:*

$$\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \quad (3.12)$$

ou

$$\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.13)$$

desde que na equação (3.12)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$  e  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ .  $\diamond$

**Prova:** Admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos. Admita ainda que o atraso de controle  $\tau_k$  do  $k$ -ésimo COAC seja dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.14)$$

e que  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e que o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes. Neste caso, sempre existirá um  $\Delta\tau_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , tal que

$$\Delta\tau_k = \tau_s - \tau_k \geq 0 \quad (3.15)$$

Assim, substituindo a equação (3.14) na equação (3.15), obtém-se:

$$\Delta\tau_k = \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a \quad (3.16)$$

e por definição  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  (veja Figura 3.1), é dado por:

$$\tau_{a_k} = \tau_k^a + \Delta\tau_k + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \quad (3.17)$$

finalmente, substituindo a equação (3.16) na equação (3.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_{a_k} &= \tau_k^a + \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \Rightarrow \\ \tau_{a_k} &= \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e, desde que,  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$  e  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ , a equação (3.18) reduz a:

$$\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.19)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 3.3 (IAA guiado no tempo)** *Sejam  $\tau_s, \tau_k^s, \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes e  $\tau_{a_k}$  é o IAA guiado no tempo do  $k$ -ésimo COAC do NCS invariante no tempo, então  $\tau_{a_k} = \tau_s$ .  $\diamond$*

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 3.2, equação (3.12). Por hipótese, o NCS, topologia S-C-A, opera sem perda de pacotes, é guiado no tempo e invariante no tempo. Por conseguinte:  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s, \tau_k^{sc} = \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^c = \tau_{k+1}^c$  e  $\tau_k^{ca} = \tau_{k+1}^{ca}$ . Fato este que reduz a equação (3.12) a  $\tau_{a_k} = \tau_s$ .  $\square$

### 3.3.2 Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ com $\tau_k > \tau_s$

Para auxiliar a compreensão das explanações que se seguem é apresentada na Figura 3.2, a relação de precedência temporal de execução das tarefas nos nós componentes e transferência das mensagens pela rede de comunicação em um NCS com  $\tau_k > \tau_s$  e sem perda de pacotes.

Neste caso, tem-se que o atraso de controle é dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a > \tau_s \quad (3.20)$$

em geral,  $\tau_k^{ca} \leq \tau_s$  mas, eventualmente, pode ocorrer que  $\tau_s < \tau_k^{ca} \leq 2\tau_s$ . Além disso,  $\tau_k^{sc} < \tau_s$  e  $\tau_k^{sc} + \tau_k^s \leq \tau_s$ , uma vez que como o nó sensor é guiado no tempo a cada intervalo de tempo  $\tau_s$  ocorre uma nova amostragem. Assim, desde que se tenha um NCS com estrutura direta  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ . Evidentemente, para NCSs com estrutura hierárquica pode-se ter  $\tau_k^{sc} > \tau_s$ . Detalhes sobre NCSs com estruturas direta e hierárquica podem ser vistos nas referências [CHOW; TIPSUWAN, 2001; TIPSUWAN; CHOW, 2003].

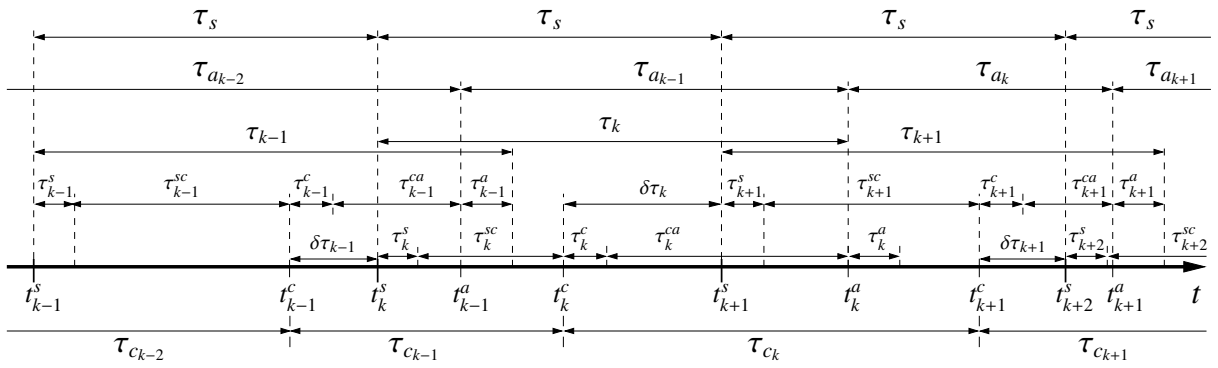


Figura 3.2: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para  $\tau_k > \tau_s$  e sem perda de pacotes - dedução do IAC.

Nestas condições serão estabelecidos os próximos teoremas e corolários, sobre os intervalos de amostragem do controlador e do atuador, assim como, os períodos de amostragem do controlador e do atuador. Isto será feito para o controlador operando nos modos: guiado a eventos, simultaneamente guiado a eventos e no tempo, e guiado no tempo.

**Teorema 3.3 (IAC para NCSs sem perdas de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC do  $k$ -ésimo COAC. Se  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A, então  $\tau_{c_k}$  é dado por:*

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.21)$$

ou

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.22)$$

desde que na equação (3.21)  $\tau_{k+1}^s = \tau_k^s$ .  $\diamond$

**Prova:** Admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos e que não ocorram perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A. Nestas condições, ainda que  $\tau_k > \tau_s, \tau_k^{sc} < \tau_s$  e  $\tau_k^{sc} + \tau_k^s \leq \tau_s$ , uma vez que, como o nó sensor é guiado no tempo, a cada  $\tau_s$  ocorre uma nova amostragem. Observa-se ainda, da Definição 3.12 que  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$ . Além disso, da Figura 3.2, obtém-se diretamente que:

$$\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c = \delta\tau_k + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} \quad (3.23)$$

com  $\delta\tau_k$  dado por

$$\delta\tau_k = \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.24)$$



no caso, substituindo a equação (3.24) na equação (3.23), obtém-se

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.25)$$

finalmente, desde que  $\tau_{k+1}^s = \tau_k^s$  a equação (3.25) reduz-se a

$$\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.26)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 3.4 (IAC guiado no tempo para NCSs sem perdas de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC guiado no tempo do  $k$ -ésimo COAC. Se  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A, com controlador guiado no tempo, então  $\tau_{c_k} = \tau_s$ .*  $\diamond$

**Prova:** A prova é análoga à do Corolário 3.2 e segue diretamente do Teorema 3.3.  $\square$

De modo ilustrativo, o cenário da temporização do NCS sem a ocorrência de perdas de pacotes e com  $\tau_k > \tau_s$  é mostrado na Figura 3.3. Tal figura auxiliará na dedução da expressão do intervalo de amostragem do atuador (IAA).

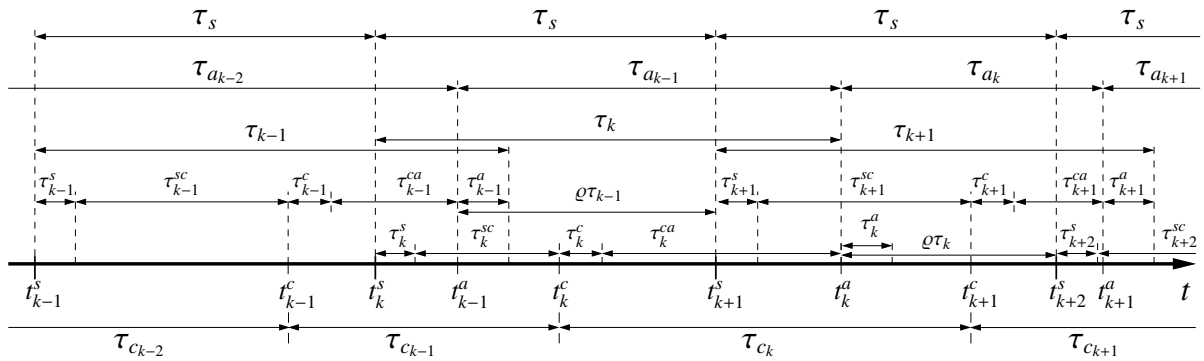


Figura 3.3: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal com  $\tau_k > \tau_s$  e sem perda de pacotes - dedução do IAA.

**Teorema 3.4 (IAA para NCSs sem perdas de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Seja  $d_k \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$  e sejam  $\tau_s, \tau_k^{sc}, \tau_{k-1}^{sc}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-1}^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_k}$  o IAA do  $k$ -ésimo COAC. Se  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A, então  $\tau_{a_k}$  é dado por:*

$$\tau_{a_k} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \quad (3.27)$$

com<sup>1</sup>

$$d_k = \left\lceil \frac{\tau_k - \tau_k^a}{\tau_s} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.28)$$

ou

$$\tau_{a_k} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.29)$$

desde que na equação (3.27)  $\tau_{k+1}^s = \tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_k^c$ .  $\diamond$

**Prova:** Admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos e que não ocorram perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A. Nestas condições, ainda que  $\tau_k > \tau_s$ ,  $\tau_k^{sc} < \tau_s$  e  $\tau_k^{sc} + \tau_k^s \leq \tau_s$ , uma vez que, como o nó sensor é guiado no tempo, a cada intervalo de tempo  $\tau_s$  ocorre uma nova amostragem no nó sensor. Agora da Figura 3.3, observa-se que:

$$\varrho_k = \left\lceil \frac{\tau_k - \tau_k^a}{\tau_s} \right\rceil \tau_s - (\tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}) = d_k \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \quad (3.30)$$

onde

$$d_k = \left\lceil \frac{\tau_k - \tau_k^a}{\tau_s} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.31)$$

Como ilustrado na da Figura 3.3 o IAA,  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  é por definição dado por:

$$\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a = \varrho_k + \tau_s - \varrho_{k+1} \quad (3.32)$$

no caso, substituindo  $\varrho_{k+1}$  e  $\varrho_k$  da equação (3.30) na equação (3.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_{a_k} &= d_k \tau_s - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} + \tau_s - (d_{k+1} \tau_s - \tau_{k+1}^s - \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k+1}^c - \tau_{k+1}^{ca}) \Rightarrow \\ \tau_{a_k} &= (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \end{aligned} \quad (3.33)$$

finalmente, desde que  $\tau_{k+1}^s = \tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_k^c$  a equação (3.33) reduz-se a

$$\tau_{a_k} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.34)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 3.5 (IAA guiado no tempo para NCSs sem perdas de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s$ ,  $\tau_k^s$ ,  $\tau_{k+1}^s$ ,  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_k}$  o IAA guiado no tempo do  $k$ -ésimo COAC. Se  $\tau_k > \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de pacotes no NCS, topologia S-C-A, com atuador guiado no tempo, então  $\tau_{a_k} = \tau_s$ .*  $\diamond$

**Prova:** A prova diretamente do Teorema 3.4. Da hipótese que o atuador é guiado no tempo

<sup>1</sup>O símbolo matemático  $\lceil x \rceil$  significa o teto de  $x$ , isto é, o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo  $\lceil 3,5 \rceil = 4$ .

tem-se que  $\tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} = \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  e, portanto,  $d_k = d_{k+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Dessas igualdades decorre que a equação (3.27) reduz-se a  $\tau_{a_k} = \tau_s$ .  $\square$

### 3.4 NCSs com perda de um pacote

Quando o NCS opera com perda de pacotes e estas perdas não ocorrem em COAC consecutivos estabelece-se dois cenários de temporizações. O primeiro deles ocorre quando  $\tau_k \leq \tau_s$ , como ilustrado na Figura 3.4. A outra possibilidade, contemplada no segundo cenário, ocorre quando  $\tau_k > \tau_s$ , como ilustrado na Figura 3.5. Neste caso, contrariamente a quando não ocorre perdas de pacotes, as indexações do IAC  $\tau_{c_i}$  e do IAA  $\tau_{a_i}$  são realizadas com subscritos,  $i$  e  $\iota$ , diferentes do  $k$  que representa o  $k$ -ésimo COAC. A diferença de tais representações se justifica, basicamente, em decorrência das dificuldades ou até mesmo devido à provável impossibilidade de se realizar tais associações utilizando-se apenas o subscrito  $k$ .

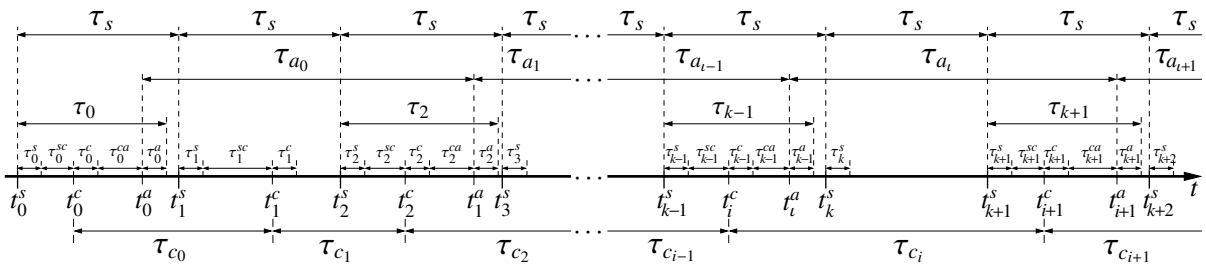


Figura 3.4: Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_s$  para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

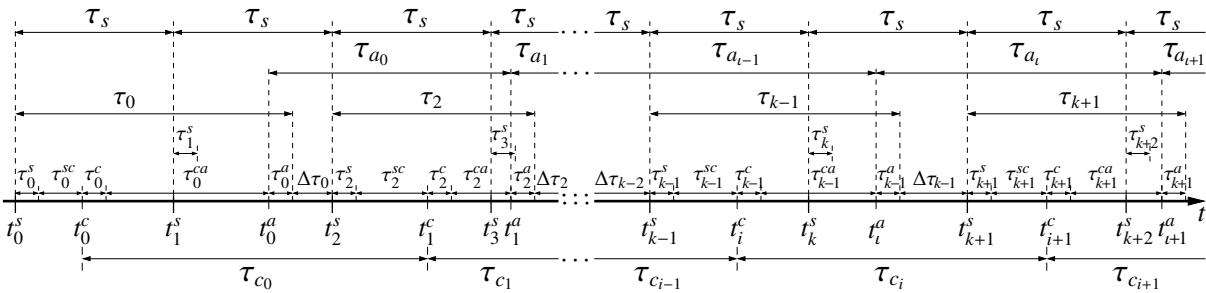


Figura 3.5: Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$  para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

**Observação 3.2 (Interpretação das Figuras 3.4 e 3.5)** Na Figura 3.4 o pacote do link da malha direta do 1-ésimo COAC foi perdido. Isto é, o pacote gerado no nó sensor não chegou ao nó atuador. Na malha de realimentação os pacotes dos 3,  $k$ ,  $(k + 2)$ -ésimos COAC foram

perdidos. Isto é, os pacotes de dados gerados no nó sensor não chegaram ao nó controlador. Considerações análogas podem ser feitas a respeito da Figura 3.5.

Naturalmente, em decorrência das mudanças precedentemente discutidas no parágrafo anterior, parece óbvio que as indexações dos instantes de inícios da execução da lei de controle e das comutações das amostras da sequência do sinal de controle  $\{\mathbf{u}(t_i^c - \tau_k^{ca})\}$  nos atuadores, também devam mudar, respectivamente, para  $i$  e  $\iota$ . Disto resulta, respectivamente, os instantes  $t_i^c$  e  $t_\iota^a$ , como ilustrado nas Figuras 3.4 e 3.5. Todavia, tais mudanças implicariam diretamente na perda da referência, índice  $k$ , do  $k$ -ésimo COAC. Para superar os problemas das indexações do IAC e do IAA sem suprimir a referência  $k$  dos instantes de inícios da execução da lei de controle e das comutações das amostras da sequência do sinal de controle  $\{\mathbf{u}(t_i^c - \tau_k^{ca})\}$  nos atuadores, doravante tais instantes passarão a ser denotados, respectivamente, por  $t_{n_i}^c$  e  $t_{k_\iota}^a$ ,  $\forall i, \iota, k, n \in \mathbb{Z}_+$ . Neste caso, os índices  $n$  e  $k$  representam, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e os índices  $i$  e  $\iota$  representam nesta ordem o  $i$ -ésimo IAC e o  $\iota$ -ésimo IAA. De outro modo, o instante  $t_{n_i}^c$  representa o  $i$ -ésimo instante de início da execução da lei de controle com IAC  $\tau_{c_i}$  e que se inicia no decorrer do  $n$ -ésimo COAC. Analogamente, o instante  $t_{k_\iota}^a$  representa o  $\iota$ -ésimo instante de início das comutações do sinal de controle nos atuadores com IAA  $\tau_{a_\iota}$  cujo início se dá no decorrer do  $k$ -ésimo COAC.

Em decorrência das considerações realizadas no parágrafo anterior, as Figuras 3.4 e 3.5 passam a ter suas nomenclaturas readaptadas e explicitadas, respectivamente, nas Figuras 3.6 e 3.7

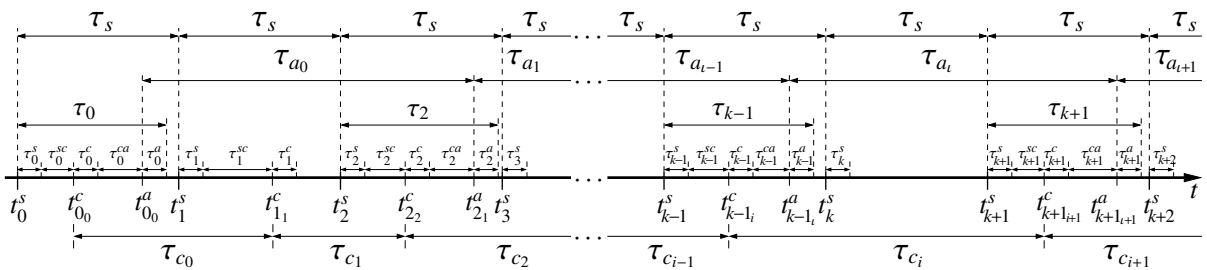


Figura 3.6: Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_s$  para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

De forma complementar, vale ressaltar ainda, a partir dos diagramas de temporizações do NCS, topologia S-C-A, apresentados nas Figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 que os pacotes de dados podem ser perdidos ou nas malhas de realimentação, *links* de comunicação sensor controlador, ou ainda, nas malhas diretas, *links* de comunicação controlador atuador. Por exemplo, nas Figuras 3.4 e 3.6, pode-se observar que durante os COAC 0, 1 e 2 os pacotes de dados das malhas de realimentação não foram perdidos. Neste caso, segundo o Teorema 3.1, os IAC dos COAC 0 e 1 são  $\tau_{c_0} = \tau_s + \tau_1^s + \tau_1^{sc} - \tau_0^s - \tau_0^{sc}$  e  $\tau_{c_1} = \tau_s + \tau_2^s + \tau_2^{sc} - \tau_1^s - \tau_1^{sc}$ , respectivamente. Os demais

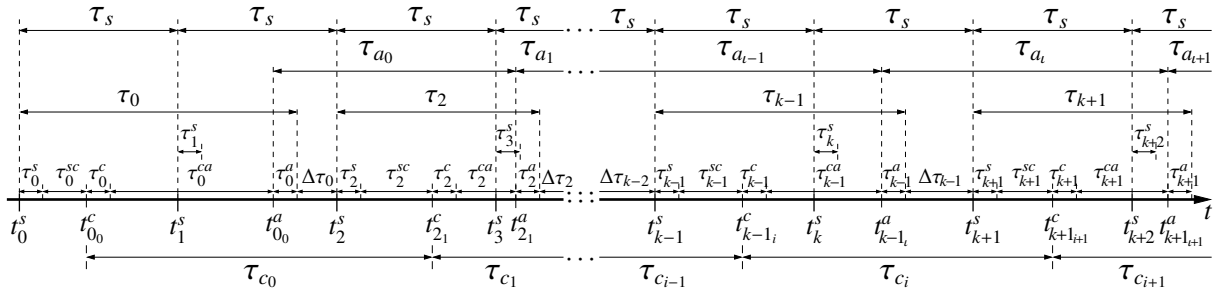


Figura 3.7: Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes e  $\tau_k > \tau_s$  para a topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

COAC são intercalados, ora com um COAC sem perdas de pacotes, ora com um COAC com perdas de pacotes. Além disso, quando ocorrem perdas de pacotes, estas ocorrem diretamente nas malhas de realimentação. Portanto, os IAC não são dados pelos teoremas precedentes. Analogamente, no tocante às malhas diretas, quando ocorre perdas de pacotes de dados os IAA também não são dados segundo os teoremas até então apresentados.

Quanto às Figuras 3.5 e 3.7, comentários análogos aos tecidos no parágrafo anterior podem ser apresentados. Obviamente, neste caso, as referências dos teoremas e figuras precedentemente citados sofrem as devidas modificações.

Outro ponto que merece destaque, diz respeito à definição dos instantes de inícios de execução da lei de controle  $t_{k_i}^c$  e das comutações dos sinais de controle nos atuadores  $t_{n_i}^a$ , quando ocorrem perdas de pacotes de dados no NCS. Neste caso,  $t_{k_i}^c$  é dado por:

$$t_{k_i}^c = k_0\tau_s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \sum_{m=0}^{i-1} \tau_{c_m} \quad (3.35)$$

com  $t_{k_0}^c = k_0\tau_s + \tau_k^s + \tau_k^{sc}$ . Desta maneira, desde que não ocorra perda de pacotes na malha de realimentação durante COAC 0, tem-se que  $k = 0$ , assim  $k_0 = 0_0 = 0$  e portanto  $t_{0_0}^c = \tau_0^s + \tau_0^{sc}$ . Por outro lado, se ocorrer perda de pacotes na malha de realimentação durante o COAC 0 a primeira execução da lei de controle só ocorrerá durante COAC 1. Neste caso,  $k = 1$  e dessa maneira  $k_0 = 1_0 = 1$ , portanto  $t_{1_0}^c = \tau_s + \tau_1^s + \tau_1^{sc}$ .

Analogamente, o  $i$ -ésimo instante de início das comutações das amostras do sinal de controle nos atuadores  $t_{n_i}^a$ , que ocorre no decorrer do  $n$ -ésimo COAC é dado por:

$$t_{n_i}^a = n_0\tau_s + \tau_n^s + \tau_n^{sc} + \tau_n^c + \tau_n^{ca} + \sum_{m=0}^{i-1} \tau_{a_m} \quad (3.36)$$

com  $t_{n_0}^a = n_0\tau_s + \tau_n^s + \tau_n^{sc} + \tau_n^c + \tau_n^{ca}$ . Neste caso, desde que não ocorra perda de pacotes na malha direta durante o COAC 0,  $n = 0$ , dessa maneira,  $n_0 = 0_0 = 0$  e portanto  $t_{0_0}^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca}$ .

Por outro lado, se ocorrer perda de pacotes de dados na malha direta durante o COAC 0 e não ocorrer perda de pacotes de dados no COAC 1 a primeira comutação do sinal de controle nos atuadores só ocorrerá durante o COAC 1. Por conseguinte,  $n = 1$  e dessa maneira  $n_0 = 1_0 = 1$ , portanto,  $t_{1_0}^a = \tau_s + \tau_1^s + \tau_1^{sc} + \tau_1^c + \tau_1^{ca}$  e assim sucessivamente.

Para os cenários aqui discutidos, a seguir serão obtidos os IAC e os IAA.

### 3.4.1 NCSs com perda de um pacote e $\tau_k \leq \tau_s$

Quando o NCS opera com perda de não mais que um pacote em COAC não consecutivos e  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , seu diagrama de temporização é como o mostrado na Figura 3.6. Neste caso, o IAC é analiticamente dado segundo o teorema subsequente.

**Teorema 3.5 (IAC para NCSs sem perda de pacotes em COAC consecutivos e  $\tau_k \leq \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-1}^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k-1}^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_i}, \forall i \in \mathbb{Z}_+$ , o  $i$ -ésimo IAC de um NCS com nó controlador operando no modo GE ou no modo GET. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de mais de um pacote na malha de realimentação em COAC consecutivos do NCS, topologia S-C-A, então, o  $i$ -ésimo IAC  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{k-1+i}^c$  é dado por:*

$$\tau_{c_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.37)$$

ou

$$\tau_{c_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.38)$$

desde que na equação (3.37)  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$ . ◇

**Prova:** A prova é feita por construção. Da hipótese do nó controlador operar no modo GE ou no modo GET tem-se que a sequência dos instantes de inícios das execuções da lei de controle  $\{t_{k_i}^c\}$  tem seus termos  $t_{k_i}^c$ , possivelmente, aleatórios  $\forall k, i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Além disso, da hipótese de  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k$  e o NCS, topologia S-C-A, operar com perdas de não mais que um pacote na malha de realimentação em COAC consecutivos, tem-se estabelecido o cenário de operação ilustrado na Figura 3.6. Neste caso, por definição, o  $i$ -ésimo IAC  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{k-1+i}^c$  é dado por

$$\tau_{c_i} = \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a + \Delta\tau_{k-1} + \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} \quad (3.39)$$

onde, embora não ilustrado na Figura 3.6,  $\Delta\tau_{k-1} = \tau_s - \tau_{k-1}$ , ou seja:

$$\Delta\tau_{k-1} = \tau_s - (\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a) \quad (3.40)$$

que substituído na equação (3.39) resulta em

$$\tau_{c_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.41)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$ , a equação (3.41) se reduz a:

$$\tau_{c_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.42)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.6 (IAA para NCSs sem perda de pacotes em COAC consecutivos e  $\tau_k \leq \tau_s$ )** *Sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-1}^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k-1}^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_i}$  o  $i$ -ésimo IAA de um NCS com nó atuador operando no modo GE. Se  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e não ocorrerem perdas de mais que um pacote na malha direta em COAC consecutivos, então o  $i$ -ésimo IAA  $\tau_{a_i} = t_{k+1+i}^a - t_{k-1}^c$  é dado por:*

$$\tau_{a_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.43)$$

ou

$$\tau_{a_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.44)$$

desde que na equação (3.43)  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_{k-1}^c$ .  $\diamond$

**Prova:** A prova é feita por construção. Da hipótese do nó controlador operar no modo GE tem-se que a sequência dos instantes de início das comutações do sinal de controle nos atuadores  $\{t_{k_i}^a\}$  tem seus termos  $t_{k_i}^a \forall k, i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  aleatórios. Além disso, da hipótese de  $\tau_k \leq \tau_s, \forall k$  e o NCS operar com perdas de não mais que um pacote na malha direta em COAC consecutivos, tem-se estabelecido o cenário de operação ilustrado na Figura 3.6. Neste caso, por definição o  $i$ -ésimo IAA  $\tau_{a_i} = t_{k+1+i}^a - t_{k-1}^c$  é dado por

$$\tau_{a_i} = \tau_{k-1}^a + \Delta\tau_{k-1} + \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \quad (3.45)$$

onde, embora não ilustrado na Figura 3.6,  $\Delta\tau_{k-1} = \tau_s - \tau_{k-1}$ , ou seja:

$$\Delta\tau_{k-1} = \tau_s - (\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a) \quad (3.46)$$

que substituído na equação (3.45) resulta em

$$\tau_{a_i} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.47)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_{k-1}^c$ , a equação (3.47) se reduz a:

$$\tau_{c_k} = 2\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.48)$$

o que conclui a prova.  $\square$

### 3.4.2 NCSs com perda de um pacote e $\tau_k > \tau_s$

Quando o NCS opera com perda de mais de um pacote em COAC sucessivos e  $\tau_k > \tau_s$ , o diagrama de temporização do NCS é apresentado na Figura 3.7.

Neste caso, tem-se que o atraso de controle é dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a > \tau_s \quad (3.49)$$

Para o cenário em questão,  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , ou ainda,  $\tau_k^{sc} + \tau_k^s \leq \tau_s$ . Isto porque a cada  $\tau_s$  unidades de tempo, no instante  $t_{k-1}^s$ , o nó sensor é amostrado e, portanto, caso o pacote do  $(k-1)$ -ésimo COAC ainda não tenha sido transmitido, do nó sensor para o nó controlador, no instante  $t_k^s$  uma nova amostragem é realizada e os dados presentes no *buffer* de transmissão do nó sensor, amostrados no instante  $t_{k-1}^s$ , serão substituídos pelos dados amostrados no instante  $t_k^s$ . Evidentemente, caso a amostragem no nó sensor não ocorra, por alguma razão eventual, então tem-se que  $\tau_k^{sc}$  poderá ser maior ou igual a  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_k^{sc} \geq \tau_s$  e os dados amostrados no instante  $t_{k-1}^s$  permanecem no *buffer* de transmissão do nó sensor. Quanto ao atraso  $\tau_k^{ca}$ , em geral, ele pode ser maior que  $\tau_s$ . Nestas condições serão estabelecidos os próximos teoremas e corolários dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador para o controlador e o atuador operando nos modos GE e GET. Os períodos de amostragem do controlador e do atuador, operando no modo GT, serão obtidos na forma de corolários.

**Teorema 3.7 (IAC para NCSs sem perda de pacotes em COAC consecutivos e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Considere  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  e sejam  $\tau_s$ ,  $\tau_{k+1}^{sc}$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_{k+1}^{ca}$ ,  $\tau_{k-1}^{ca}$ ,  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_i}$  o  $i$ -ésimo IAC do NCS. Se o NCS opera com nós sensores GT, nó controlador GE ou GET, não ocorrerem perdas de mais de um pacote em COAC consecutivos e  $\tau_k > \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então, existe  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ , se, e somente se,  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{k-1-i}^c$  é dado por:*

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.50)$$

e  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$  é dado por:

$$d_{k-1} = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.51)$$



ou

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.52)$$

desde que na equação (3.50)  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$ .  $\diamond$

**Prova:** A prova é dividida em duas etapas: a etapa do *se* e a etapa do *somente se*.

Neste caso, a prova do *somente se* é feita por construção. Para tal, admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos, isto é, os nós sensores são guiados no tempo. Da hipótese que  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , cada COAC é finalizado apenas após decorrido cada intervalo de tempo  $d_{k-1}\tau_s$ , com  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$ . Além disso, da hipótese de não ocorrerem perdas de mais de um pacote em COAC consecutivos, o valor de  $d_{k-1}$  é obtido diretamente da Figura 3.7, e se refere a quão maior que  $\tau_s$  é o atraso de controle. Assim,  $d_{k-1} = (\tau_{k-1} + \Delta\tau_{k-1})/\tau_s = \lceil \tau_{k-1}/\tau_s \rceil$ , onde  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} < \tau_s$  é o intervalo de tempo complementar a  $\tau_{k-1}$ . Ou seja,  $\Delta\tau_{k-1}$  é o intervalo de tempo, a partir do início de uma nova atuação, até o instante de início de uma nova amostragem dos sensores (veja Figura 3.7). Como  $\tau_{k-1}$  é obtido da equação (3.49), no  $(k-1)$ -ésimo COAC tem-se estabelecida a equação (3.51). Isto é,

$$d_{k-1} = \frac{\tau_{k-1} + \Delta\tau_{k-1}}{\tau_s} = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}}{\tau_s} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.53)$$

Além disso, como o modo de operação do nó controlador é, por hipótese, GE ou GET e o  $i$ -ésimo IAC  $\tau_{c_i}$  é, por definição, a diferença entre dois instantes  $t_{n_i}^c$  consecutivos, ou seja,  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{k-i}^c$ . Dessa maneira, da definição do IAC e com o auxílio do diagrama de temporização do NCS, ilustrado na Figura 3.7, obtém-se:

$$\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{k-i}^c = \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a + \Delta\tau_{k-1} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} \quad (3.54)$$

Da equação (3.49), reescrita na forma do  $(k-1)$ -ésimo COAC, tem-se:

$$\tau_{k-1} = \tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a \quad (3.55)$$

como, por definição,  $\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1}$ , substituindo a equação (3.55) na expressão de  $\Delta\tau_{k-1}$ , obtém-se:

$$\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - (\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a) \quad (3.56)$$

que substituída na equação (3.54), resulta em:

$$\begin{aligned} \tau_{c_i} &= \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} - \tau_{k-1}^a \Rightarrow \\ \tau_{c_i} &= d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} \end{aligned} \quad (3.57)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$ , a equação (3.57) se reduz a:

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.58)$$

Por outro lado, a prova do *se* é feita admitindo que  $\tau_{c_i}$ , seja dado por:

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} \quad (3.59)$$

assim, somando e subtraindo os termos  $\tau_{k-1}^c$ ,  $\tau_{k-1}^{ca}$  e  $\tau_{k-1}^a$  à equação (3.59), obtém-se:

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s - \tau_{k-1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} - \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a - \tau_{k-1}^a \quad (3.60)$$

daí, reescrevendo a equação (3.49) para o  $(k-1)$ -ésimo COAC obtém-se  $\tau_{k-1}$  dado pela equação (3.55), a qual, substituída na equação (3.60) resulta:

$$\tau_{c_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a - \tau_{k-1} \quad (3.61)$$

como  $\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , a equação (3.61) resulta em:

$$\tau_{c_i} = \Delta\tau_{k-1} + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a \quad (3.62)$$

evidentemente, se  $\tau_k > \tau_s \Rightarrow \tau_s - \tau_k < 0$ . Logo, sempre existirá um  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$ , tal que  $0 \leq d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ . Isto é, sempre existirá um  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$ , tal que o  $\Delta\tau_{k-1}$  da equação (3.62) seja não negativo e menor que  $\tau_s$ . Ou seja,  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ . O que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.8 (IAA para NCSs sem perda de pacotes em COAC consecutivos e  $\tau_k > \tau_s$ )** *Considere  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  e sejam  $\tau_s$ ,  $\tau_{k+1}^{sc}$ ,  $\tau_{k-1}^{sc}$ ,  $\tau_{k+1}^{ca}$ ,  $\tau_{k-1}^{ca}$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_i}$  o  $i$ -ésimo IAA do NCS. Se o NCS opera com nós sensores GT, nós atuadores GE, não ocorrerem perdas de mais de um pacote em COAC consecutivos e  $\tau_k > \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então, existe  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ , se, e somente se,  $\tau_{a_i}$  é dado por:*

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.63)$$

e  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$  é dado por:

$$d_{k-1} = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.64)$$

ou

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.65)$$

desde que na equação (3.63)  $\tau_k^s = \tau_{k-1}^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_{k-1}^c$ .  $\diamond$

**Prova:** A prova é dividida em duas etapas: a etapa do *se*, e a etapa do *somente se*.

Neste caso, a prova do *somente se* é feita por construção. Para tal, admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos, isto é, os nós sensores são guiados no tempo. Da hipótese que  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , cada COAC é finalizado apenas após decorrido cada intervalo de tempo  $d_{k-1}\tau_s$ , com  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$ . Além disso, da hipótese de não ocorrerem perdas de mais de um pacote em COAC consecutivos, o valor de  $d_{k-1}$  é obtido diretamente da Figura 3.7, e se refere a quão maior que  $\tau_s$  é o atraso de controle. Assim,  $d_{k-1} = (\tau_{k-1} + \Delta\tau_{k-1})/\tau_s = \lceil \tau_{k-1}/\tau_s \rceil$ , onde  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} < \tau_s$  é o intervalo de tempo complementar a  $\tau_{k-1}$ . Ou seja,  $\Delta\tau_{k-1}$  é o intervalo de tempo, a partir do início de uma nova atuação, até o instante de início de uma nova amostragem dos sensores (veja Figura 3.7). Como  $\tau_{k-1}$  é obtido da equação (3.49), no  $(k-1)$ -ésimo COAC tem-se estabelecida a equação (3.64). Isto é,

$$d_{k-1} = \frac{\tau_{k-1} + \Delta\tau_{k-1}}{\tau_s} = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}}{\tau_s} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a}{\tau_s} \right\rceil \quad (3.66)$$

Além disso, como o modo de operação do nó atuador é, por hipótese, GE e o  $\iota$ -ésimo IAA  $\tau_{a_i}$  é, por definição, a diferença entre dois instantes  $t_{n_i}^a$  consecutivos, ou seja,  $\tau_{a_i} = t_{k+1, \iota+1}^a - t_{k-1, \iota}^a$ . Dessa maneira, da definição do IAA e com o auxílio do diagrama de temporização do NCS, ilustrado na Figura 3.7, obtém-se a seguinte expressão:

$$\tau_{a_i} = t_{k+1, \iota+1}^a - t_{k-1, \iota}^a = \tau_{k-1}^a + \Delta\tau_{k-1} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \quad (3.67)$$

Da equação (3.49) reescrita para o  $(k-1)$ -ésimo COAC, tem-se:

$$\tau_{k-1} = \tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a \quad (3.68)$$

como, por definição,  $\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1}$ , substituindo a equação (3.68) na expressão de  $\Delta\tau_{k-1}$ , resulta:

$$\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - (\tau_{k-1}^s + \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k-1}^c + \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a) \quad (3.69)$$

o que substituindo a equação (3.69) na equação (3.67), obtém-se.

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.70)$$

e desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_{k-1}^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_{k-1}^c$  a equação (3.70) se reduz a:

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.71)$$

Consoante ao caso anterior, a prova do, *se*, é feita admitindo por hipótese que  $\tau_{a_i}$  seja dado por

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc} - \tau_{k-1}^c - \tau_{k-1}^{ca} \quad (3.72)$$

portanto, somando e subtraindo o termo  $\tau_{k-1}^a$  à equação (3.72), obtém-se:

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^s - \tau_{k-1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_{k-1}^{sc} + \tau_{k+1}^c - \tau_{k-1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_{k-1}^{ca} + \tau_{k-1}^a - \tau_{k-1}^a \quad (3.73)$$

o valor de  $\tau_{k-1}$  é por definição dado pela equação (3.68) que substituída na equação (3.73) resulta:

$$\tau_{a_i} = d_{k-1}\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} + \tau_{k-1}^a - \tau_{k-1} \quad (3.74)$$

como  $\Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , a equação (3.74) resulta

$$\tau_{a_i} = \Delta\tau_{k-1} + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} + \tau_{k-1}^a \quad (3.75)$$

é óbvio que se  $\tau_k > \tau_s$ , tem-se que  $\tau_s - \tau_k < 0$  e portanto, sempre existirá um  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$ , tal que  $0 \leq d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ . Isto é, sempre existirá um  $d_{k-1} \in \mathbb{Z}_+^*$ , tal que o  $\Delta\tau_{k-1}$  da equação (3.75) seja não negativo e menor que  $\tau_s$ . Ou seja,  $0 \leq \Delta\tau_{k-1} = d_{k-1}\tau_s - \tau_{k-1} < \tau_s$ . O que conclui a prova.  $\square$

Observa-se das equações (3.50) e (3.51) que quando o controlador é guiado a eventos, se algum dos atrasos  $\tau_{k-1}^s$ ,  $\tau_{k-1}^{sc}$ ,  $\tau_{k-1}^c$ ,  $\tau_{k-1}^{ca}$ ,  $\tau_{k-1}^a$ ,  $\tau_{k+1}^s$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$  variar no tempo, então, conseqüentemente  $\tau_{c_i}$  também variará no tempo. Nota-se ainda que, a expressão do IAC, dada pela equação (3.50) ou pela equação (3.52), é dependente apenas de intervalos de tempos múltiplos do período de amostragem dos sensores  $d_{k-1}\tau_s$  e dos atrasos  $\tau_{k-1}^s$ ,  $\tau_{k+1}^s$ ,  $\tau_{k-1}^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ . Observa-se ainda, da equação (3.51) que se  $d_{k-1} = 1$ , então  $\tau_k \leq \tau_s$  e o IAC é obtido do Teorema 3.1. É claro que, quando o controlador opera no modo guiado no tempo, por definição de projeto, os atrasos são constantes, invariantes no tempo, e  $\tau_k \leq \tau_s$ , portanto,  $\tau_{c_i} = \tau_s$  sempre. Evidentemente, para o IAA, comentários análogos a estes podem ser feitos, a partir das equações (3.63)-(3.65).

A seguir será realizada a determinação das expressões do IAC e do IAA com nó sensor guiado no tempo, nós controladores e atuadores guiados a eventos ou simultaneamente guiado a eventos e no tempo, de forma a relaxar as hipóteses de perdas de pacotes e de atrasos de controle menor ou igual, ou maior que um PAS.

### 3.5 Determinação de $\tau_{c_i}$ e $\tau_{a_i}$ - uma abordagem unificada

A determinação de  $\tau_{c_i}$  e  $\tau_{a_i}$  de forma unificada é necessária e se justifica por diversas razões. A primeira delas, diz respeito à unificação de todas as expressões dos IAC e dos IAA em apenas uma expressão para o IAC e outra para o IAA. A segunda, é mais relevante ainda e, diz respeito ao relaxamento de hipóteses como a de perdas de pacotes e de  $\tau_k \leq \tau_s$  ou  $\tau_k > \tau_s$ . Na verdade, estabelecer hipótese baseadas no valor de  $\tau_k$  não é algo desejável. Isto porque quando a lei de controle é executada  $\tau_k$  ainda é desconhecido. Ou seja, os atrasos  $\tau_k^c$ ,  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k^a$  ainda estão por acontecer. Portanto, para um observador presente no nó controlador, tais atrasos são não causais. Além disso, caso um pacote de dados se perca na malha direta durante o  $k$ -ésimo COAC, tal COAC é interrompido antes do seu fim. Neste caso, em decorrência da não finalização do  $k$ -ésimo COAC  $\tau_k$  é inexistente.

Comentário semelhante à segunda razão apresentada no parágrafo precedente também pode ser realizado para o caso do atuador. Entretanto, como o atuador é, em geral, guiado a eventos e não desempenha o papel de executar uma lei de controle e se sim de aplicar às entradas da planta as amostras da sequência do sinal de controle  $\{\mathbf{u}(t_i^c - \tau_k)\}$ , dessa maneira o fato de se saber o valor de  $\tau_k$  torna-se irrelevante. Portanto, saber se  $\tau_k \leq \tau_s$  ou  $\tau_k > \tau_s$  é irrelevante, pelo menos do ponto de vista de implementação do NCS. É óbvio que, do ponto de vista teórico e prático, se deseja ter sempre um  $\tau_k$  mínimo.

Em face das justificativas e argumentos pré-apresentados a seguir serão estabelecidas as expressões analíticas do IAC e do IAA. Neste sentido, para facilitar o entendimento a respeito do comportamento temporal do NCS, operando com o relaxamento de hipóteses, como as discutidas nos dois parágrafos anteriores, na Figura 3.8 é apresentado um diagrama de temporização o mais geral possível.

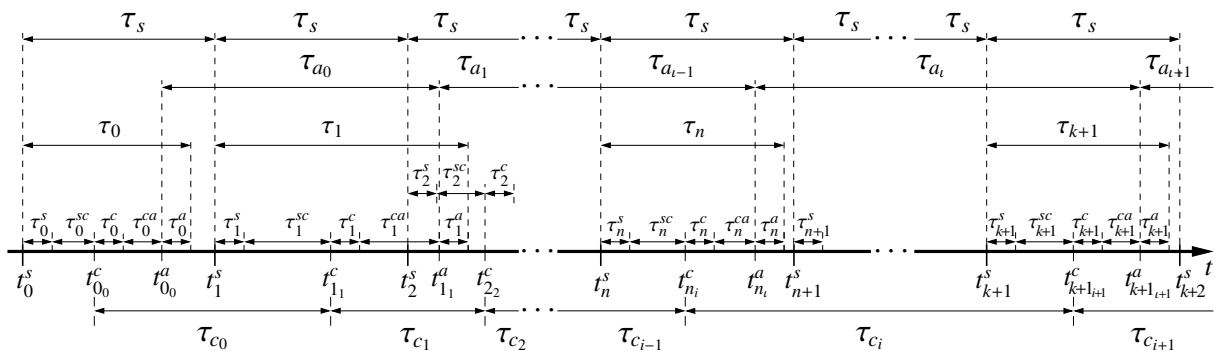


Figura 3.8: Diagrama de temporização do NCS, com perda de pacotes,  $\tau_k \leq \tau_s$  e  $\tau_k > \tau_s$ , de topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

Entre outras coisas, pode-se verificar neste diagrama as interrupções, ou por assim dizer, as não finalizações dos COAC de números 2 e  $n + 1$ , com as respectivas perdas dos pacotes de

dados da malha direta e da malha de realimentação do NCS. Verifica-se também no diagrama apresentado que  $\tau_k \leq \tau_s$  para os COAC 0,  $n$  e  $k + 1$ . Finalmente, pode-se observar ainda que  $\tau_k > \tau_s$  para o COAC 1, isto é, para  $k = 1$ .

**Teorema 3.9 (IAC - uma abordagem unificada)** *Considere que  $n, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_n^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_i}$  o  $i$ -ésimo IAC. Se o NCS, topologia S-C-A, opera com nós sensores GT, nó controlador GE ou GET, independentemente do valor de  $\tau_k$  na presença ou não de perda de pacotes, então,  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c$  é dado por:*

$$\tau_{c_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} \quad (3.76)$$

ou

$$\tau_{c_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^{sc} \quad (3.77)$$

desde que na equação (3.76)  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$ .  $\diamond$

**Prova:** A prova é feita por construção. Para tal, admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos e que possa ocorrer no NCS, topologia S-C-A: perdas de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_s$  e/ou  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Considere ainda que o NCS tenha nós sensores GT, nó controlador GE ou GET, e que  $n, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC, como ilustrado na Figura 3.8. Nestas condições, o  $i$ -ésimo IAC do NCS é, por definição,  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c$ , ou seja:

$$\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c = (t_{k+1}^s - t_n^s) - (t_{n_i}^c - t_n^s) + (t_{k+1+i}^c - t_{k+1}^s) \quad (3.78)$$

com  $t_{k+1}^s - t_n^s = (k + 1 - n)\tau_s, t_{n_i}^c - t_n^s = \tau_n^s + \tau_n^{sc}$  e  $t_{k+1+i}^c - t_{k+1}^s = \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc}$ , que substituídos na equação (3.78) resulta em

$$\tau_{c_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} \quad (3.79)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  a equação (3.79) reduz-se a

$$\tau_{c_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^{sc} \quad (3.80)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.10 (IAA - uma abordagem unificada)** *Considere que  $n, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $\tau_s, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_i}$  o  $i$ -ésimo IAA. Se o*

NCS, topologia S-C-A, tem nós sensores GT, nós atuadores GE ou GET, independentemente do valor de  $\tau_k$ , na presença ou não de perda de pacotes, então,  $\tau_{a_i} = t_{k+1, i+1}^a - t_{n_i}^a$  é dado por:

$$\tau_{a_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} - \tau_n^c - \tau_n^{ca} \quad (3.81)$$

ou

$$\tau_{a_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^{sc} - \tau_n^{ca} \quad (3.82)$$

desde que na equação (3.81)  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_n^c$ .  $\diamond$

**Prova:** A prova é feita por construção. Para tal, admita que a cada intervalo de tempo  $\tau_s$ , os sensores sejam lidos e que possa ocorrer no NCS, topologia S-C-A: perdas de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_s$  e/ou  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Considere ainda que o NCS tenha nós sensores GT, nós atuadores GE ou GET, e que  $n, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC, como ilustrado na Figura 3.8. Nestas condições, o  $i$ -ésimo IAA do NCSs é, por definição,  $\tau_{a_i} = t_{k+1, i+1}^a - t_{n_i}^a$ , ou seja:

$$\tau_{a_i} = t_{k+1, i+1}^a - t_{n_i}^a = (t_{k+1}^s - t_n^s) - (t_{n_i}^a - t_n^s) + (t_{k+1, i+1}^a - t_{k+1}^s) \quad (3.83)$$

com  $t_{k+1}^s - t_n^s = (k + 1 - n)\tau_s$ ,  $t_{n_i}^a - t_n^s = \tau_n^s + \tau_n^{sc} + \tau_n^c + \tau_n^{ca}$  e  $t_{k+1, i+1}^a - t_{k+1}^s = \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca}$ , que substituídos na equação (3.83) resulta em

$$\tau_{a_i} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} - \tau_n^c - \tau_n^{ca} \quad (3.84)$$

e, evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_n^c$  a equação (3.84) reduz-se a

$$\tau_{a_j} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^{sc} - \tau_n^{ca} \quad (3.85)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Observação 3.3 (Hipóteses não realistas sobre  $\tau_k$ )** Os teoremas dos IAC e dos IAA estabelecidos nas seções anteriores a esta, são baseados em hipóteses quase sempre não realistas, tais como a de não haver perdas de pacotes ou de  $\tau_k \leq \tau_s$ , ou ainda de  $\tau_k > \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Porém, na prática, nada ou ninguém garante que as condições e/ou restrições de projeto impostas sejam satisfeitas durante o funcionamento do NCS. Isto justifica o estabelecimento dos teoremas desta seção, os quais, são suficientemente gerais para estabelecer as expressões do IAC e do IAA em tempo real e sob qualquer condição de operação do NCS com nós sensores guiados no tempo, nós controladores e atuadores guiados a eventos ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo.

**Observação 3.4 (Não causalidades de atrasos)** Estabelecer os teoremas do IAC e do IAA sem

as hipóteses de  $\tau_k \leq \tau_s$ , ou de  $\tau_k > \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , como feito nesta seção é uma vantagem. Uma vez que, elimina a necessidade de envio de informações relativas aos valores dos atrasos  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  do nó atuador para o nó controlador, a partir do qual será obtido o valor de  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Observa-se ainda que o envio do valor de  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  do nó atuador para o nó controlador até o instante de execução da lei de controle  $t_{k_i}^c$ ,  $\forall k, i \in \mathbb{Z}_+$ , é impossível, uma vez que  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k^a$ , no instante  $t_{k_i}^c$ , ainda está por acontecer. Em outras palavras, os instantes  $t_{k_i}^a$  e  $t_{k_i}^a + \tau_k^a$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}_+$ , são, para um observador presente no nó controlador, não causais e, por conseguinte,  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k^a$  também são não causais.

A seguir, serão determinadas as expressões do IAC e do IAA com o IAS variante no tempo.

### 3.6 Determinação de $\tau_{c_k}$ e $\tau_{a_k}$ em função do IAS

A determinação das expressões do IAC e do IAA com o IAS variante no tempo é relevante no estudo dos NCSs. Uma vez que, ter os sensores com amostragem variante no tempo, amostragem aleatória ou amostragem de Lebesgue [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002], possibilita reduzir o tráfego de pacotes na rede de comunicação [ÅRZÉN, 1999; ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002; ÅSTRÖM, 2007; HEEMELS, 2008; HENNINGSSON, 2008], além de possibilitar a redução das variâncias dos sinais de saída dos NCSs [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999].

Com esta motivação, a seguir serão determinados o IAC e o IAA para NCSs com nós sensores GE, nós controladores e atuadores GE ou simultaneamente GET. Tais deduções serão realizadas, inicialmente, para o caso específico do atraso de controle  $\tau_k$  ser menor ou igual a um IAS  $\tau_{s_k}$  variante no tempo. Isto é,  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , caso em que a temporização do NCS é ilustrada na Figura 3.9. Em seguida o IAC e o IAA são determinados para o caso geral com o IAS variante no tempo e com o relaxamento das hipóteses de perdas de pacotes e do valor de  $\tau_k$  ser menor ou igual, ou ainda, maior que um IAS.

#### 3.6.1 NCSs com $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ e sem perda de pacotes

Nesta subseção serão determinados o IAC e o IAA quando o NCS opera com nós sensores GE, nó controlador GE ou simultaneamente GET e nós atuadores GE. Será assumido como hipótese que o atraso de controle  $\tau_k$  é menor ou igual a um IAS  $\tau_{s_k}$ , variante no tempo, isto é,  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Neste caso, o diagrama de temporização do NCS é ilustrado na Figura 3.9. Para o cenário pré-estabelecido, nos dois teoremas seguintes serão obtidos, respectivamente, o IAC e o IAA.

Quando o NCS opera com IAS variante no tempo, seja de forma estocástica ou não estocástica, os instantes de amostragem dos sensores são dados segundo a equação (3.86) [KALMAN,



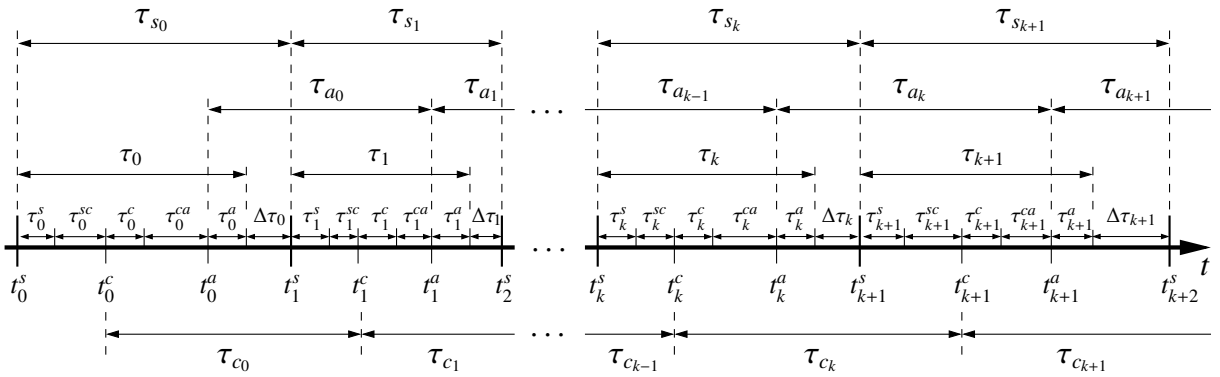


Figura 3.9: Diagrama de temporização do NCS, sem perda de pacotes,  $\tau_k \leq \tau_s$ , topologia S-C-A com o IAS variante no tempo, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal.

1957, p.56]<sup>2</sup>, aqui reapresentada com notação própria, segundo:

$$t_k^s = \sum_{n=0}^{k-1} \tau_{s_n} \quad (3.86)$$

com  $t_0^s = 0$ . Analogamente, os instantes de inícios das execuções da lei de controle  $t_k^c$  são dados por:

$$t_k^c = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \sum_{n=0}^{k-1} \tau_{c_n} \quad (3.87)$$

com  $t_0^c = \tau_0^s + \tau_0^{sc}$ . E, os instantes de inícios das comutações dos sinais de controle nos atuadores  $t_k^a$  são dados por:

$$t_k^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca} + \sum_{n=0}^{k-1} \tau_{a_n} \quad (3.88)$$

com  $t_0^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca}$ .

Para o cenário discutido, a seguir serão obtidos o IAC e o IAA.

**Teorema 3.11 (IAC com  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ )** *Sejam  $\tau_{s_k}, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_k^{sc}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_k}$  o IAC do  $k$ -ésimo COAC. Se o NCS tem nós sensores GE, nó controlador GE ou GET, não é submetido a perda de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  é dado por:*

$$\tau_{c_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.89)$$

ou

$$\tau_{c_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.90)$$

<sup>2</sup>Evidentemente, em 1957 ainda não existiam os NCSs, todavia as teorias de controle estocástico, embora embrionárias, já se justificavam, como pode ser verificado em diversos trabalhos da época, como por exemplo, a tese de Kalman [KALMAN, 1957].

desde que na equação (3.89)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$ . ◇

**Prova:** Da hipótese que os nós sensores são GE, o IAS é, por definição,  $\tau_k^s = t_{k+1}^s - t_k^s$  e é variante no tempo. Neste caso, a cada  $\tau_{s_k}$ , os sensores são lidos. Outra hipótese do teorema é que o atraso de controle  $\tau_k$  do  $k$ -ésimo COAC seja dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.91)$$

e que  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ . Assim, sempre existirá um  $\Delta\tau_k \geq 0$ , tal que

$$\Delta\tau_k = \tau_{s_k} - \tau_k \geq 0 \quad (3.92)$$

substituindo a equação (3.91) na equação (3.92), obtém-se:

$$\Delta\tau_k = \tau_{s_k} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a \quad (3.93)$$

Finalmente, da hipótese que o nó controlador é GE ou GET tem-se, por definição, que  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$ . Pode-se observar ainda que a partir do conjunto de hipóteses do teorema, constrói-se a Figura 3.9, da qual obtém-se:

$$\tau_{c_k} = \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a + \Delta\tau_k + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} \quad (3.94)$$

portanto, substituindo-se a equação (3.93) na equação (3.94), obtém-se:

$$\tau_{c_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} \quad (3.95)$$

evidentemente, desde que na equação (3.95)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$ , a equação (3.95) resulta em

$$\tau_{c_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc} \quad (3.96)$$

o que conclui a prova. □

**Observação 3.5 (IAC com o IAS variante no tempo)** Quando o IAS é variante no tempo (Amostragem aleatória ou de Lebesgue) a expressão do IAC, equação (3.89), é dependente apenas do IAS  $\tau_{s_k}$  do  $k$ -ésimo COAC, dos atrasos para aquisição dos dados  $\tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^s$  e dos atrasos de comunicação sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ .

**Observação 3.6 (Não causalidades do IAS e do IAC variantes no tempo)** Para se determinar  $\tau_{c_k}$  é necessário enviar o valor de  $\tau_{s_k}$  do nó sensor ao nó controlador no mesmo pacote da amostra  $y(t_k^s)$ , obtida do sinal  $y(t)$  no instante  $t_k^s$ . O valor de  $\tau_{s_{k-1}}$  pode ser obtido acessando-se um timer, presente no nó sensor, a cada vez que uma amostra for tomada, isto é, nos instantes

da sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$ . Entretanto, o valor de  $\tau_{s_k}$  não é conhecido no instante  $t_k^s$ , a menos que seja estimado ou obtido a partir do modelo em malha fechada do nNCSC.

**Teorema 3.12 (IAA com  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ )** Sejam  $\tau_{s_k}$ ,  $\tau_{k+1}^{sc}$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_{k+1}^{ca}$ ,  $\tau_k^{ca}$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_k}$  o IAA do  $k$ -ésimo COAC. Se o NCS tem nós sensores GE, nós atuadores GE, não é submetido a perda de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  é dado por:

$$\tau_{a_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \quad (3.97)$$

ou

$$\tau_{a_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.98)$$

desde que na equação (3.97)  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$  e  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ .  $\diamond$

**Prova:** Da hipótese que os nós sensores são GE, o IAS é, por definição,  $\tau_k^s = t_{k+1}^s - t_k^s$  e é variante no tempo. Neste caso, a cada  $\tau_{s_k}$ , os sensores são lidos. Outra hipótese do teorema é que o atraso de controle do  $k$ -ésimo COAC seja dado por:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.99)$$

e que  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ . Neste caso, sempre existirá um  $\Delta\tau_k \geq 0$ , tal que

$$\Delta\tau_k = \tau_{s_k} - \tau_k \geq 0 \quad (3.100)$$

substituindo a equação (3.99) na equação (3.100) obtém-se:

$$\Delta\tau_k = \tau_{s_k} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a \quad (3.101)$$

Finalmente, da hipótese que os nós atuadores são GE ou GET tem-se, por definição, que  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$ . Pode-se observar ainda que a partir do conjunto de hipóteses do teorema, constrói-se a Figura 3.9, da qual obtém-se:

$$\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a = \tau_k^a + \Delta\tau_k + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \quad (3.102)$$

portanto, substituindo-se a equação (3.101) na equação (3.102) obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_{a_k} &= \tau_k^a + \tau_{s_k} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} \Rightarrow \\ \tau_{a_k} &= \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \end{aligned} \quad (3.103)$$

e desde que  $\tau_k^s = \tau_{k+1}^s$  e  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ , a equação (3.103) se reduz à equação.

$$\tau_{a_k} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca} \quad (3.104)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 3.6 (IAA com IAS variante no tempo)** *Sejam  $\tau_{s_k}$ ,  $\tau_k^s$ ,  $\tau_{k+1}^s$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_{k+1}^{sc}$ ,  $\tau_k^c$ ,  $\tau_{k+1}^c$ ,  $\tau_k^{ca}$ ,  $\tau_{k+1}^{ca}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e sejam  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$ , respectivamente, o IAC e o IAA do  $k$ -ésimo COAC. Se o NCS tem nós sensores GE, nó controlador GE ou GET e nós atuadores GE, não é submetido a perda de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  é dado por:*

$$\tau_{a_k} = \tau_{c_k} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} \quad (3.105)$$

ou

$$\tau_{a_k} = \tau_{c_k} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^{ca} \quad (3.106)$$

desde que na equação (3.105)  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ .  $\diamond$

**Prova:** Segue diretamente dos Teoremas 3.11 e 3.12. Isto é, para se obter a equação (3.105), deve-se substituir a equação (3.89) na equação (3.97). Por outro lado, para se obter a equação (3.106), deve-se substituir a equação (3.90) na equação (3.98) ou considerar que na equação (3.105)  $\tau_k^c = \tau_{k+1}^c$ .  $\square$

**Observação 3.7 (NCSs são sistemas híbridos)** *Dos teoremas e corolário do IAC e do IAA fica evidente que a análise matemática do NCS é por demais complicada, pois os componentes do mesmo têm intervalos de amostragem diferentes e, em geral, variantes no tempo. Embora, considera-se para fins de análise discretizar a planta, esta é de natureza completamente de tempo contínuo, o que vem a caracterizar os NCSs como sistemas híbridos, nos quais, coexistem dinâmicas discretas, controladores, e dinâmicas contínuas, plantas [BRANICKY, 1995].*

### 3.6.2 NCSs com $\tau_k$ qualquer e com e sem perda de pacotes

Quando o NCS opera com nós sensores GE, nó controlador GE ou simultaneamente GET, nós atuadores GE e com atraso de controle  $\tau_k$  qualquer, o IAS  $\tau_{s_k}$  é variante no tempo e o NCS está sujeito a perda de pacotes em qualquer dos seus *links* de comunicação, o diagrama de temporização do NCS é ilustrado na Figura 3.10. Para o cenário pré-estabelecido, nos dois teoremas seguintes serão obtidos, respectivamente, o IAC e o IAA.

Quando o NCS opera sujeito a perda de pacotes e com atraso de controle qualquer sua temporização é como a apresentada na Figura 3.10. Neste caso, os instantes de amostragem dos

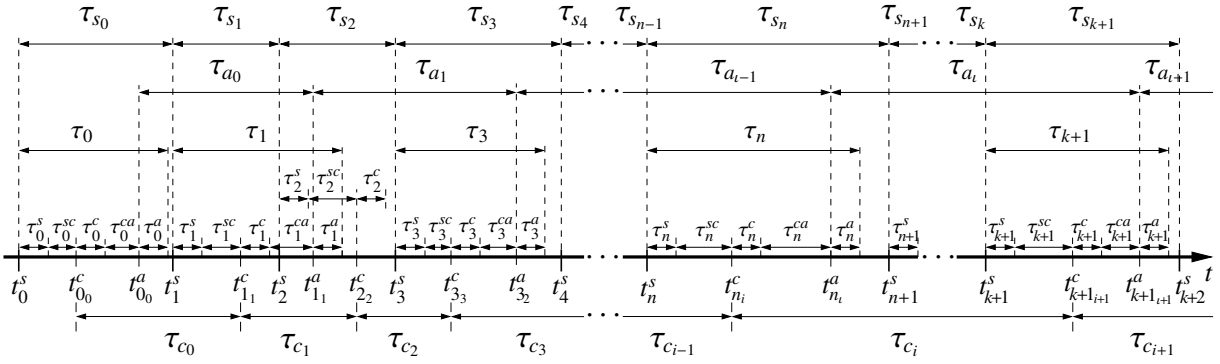


Figura 3.10: Diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para o NCS operando com e sem perda de pacotes e com  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$  ou  $\tau_k > \tau_{s_k}$ .

sensores também continuam sendo dados segundo a equação (3.86). Todavia, os instantes de inícios de execução da lei de controle  $t_{k_i}^c$  passam a ser dados por:

$$t_{l_i}^c = \tau_l^s + \tau_l^{sc} + \sum_{n=0}^{l-1} \tau_{s_n} + \sum_{n=0}^{i-1} \tau_{c_n} \quad (3.107)$$

onde  $t_{l_0}^c = \tau_l^s + \tau_l^{sc} + \sum_{n=0}^{l-1} \tau_{s_n}$  e  $l \in \mathbb{Z}_+$  é o COAC em que a lei de controle é executada pela primeira vez. Para ilustrar, como exemplo, considera-se que os dois primeiros pacotes da malha de realimentação são perdidos durante os dois primeiros COAC. Neste caso, a lei de controle é executada pela primeira vez durante o terceiro COAC, isto é,  $k = 2$ . Por conseguinte,  $l = 2$  e  $t_{l_0}^c = t_{2_0}^c = \tau_2^s + \tau_2^{sc} + \sum_{n=0}^1 \tau_{s_n} = \tau_2^s + \tau_2^{sc} + \tau_{s_0} + \tau_{s_1}$ .

Analogamente, o  $\iota$ -ésimo instante de início das comutações das amostras do sinal de controle nos atuadores  $t_{f_i}^a$ , que ocorre no decorrer do  $f$ -ésimo COAC, é dado por:

$$t_{f_i}^a = \tau_f^s + \tau_f^{sc} + \tau_f^c + \tau_f^{ca} + \sum_{n=0}^{f-1} \tau_{s_n} + \sum_{n=0}^{\iota-1} \tau_{a_n} \quad (3.108)$$

onde  $t_{f_0}^a = \tau_f^s + \tau_f^{sc} + \tau_f^c + \tau_f^{ca} + \sum_{n=0}^{f-1} \tau_{s_n}$  e  $f \in \mathbb{Z}_+$  é o COAC em que as comutações das amostras do sinal de controle nos atuadores ocorre pela primeira vez. Neste caso, desde que não ocorra perda de pacotes durante COAC 0,  $f = 0$ . Dessa maneira,  $f_0 = 0_0 = 0$  e portanto  $t_{0_0}^a = \tau_0^s + \tau_0^{sc} + \tau_0^c + \tau_0^{ca}$ . Por outro lado, se ocorrer perda de pacotes de dados nos COAC 0 e 1 e não ocorrer perda de pacotes de dados no COAC 2 a primeira comutação do sinal de controle nos atuadores só ocorrerá durante o COAC 2. Por conseguinte,  $f = 2$  e  $f_0 = 2_0 = 2$ . Portanto,  $t_{2_0}^a = \tau_2^s + \tau_2^{sc} + \tau_2^c + \tau_2^{ca} + \sum_{n=0}^1 \tau_{s_n} = \tau_2^s + \tau_2^{sc} + \tau_2^c + \tau_2^{ca} + \tau_{s_0} + \tau_{s_1}$  e assim sucessivamente.

Para os cenários discutidos, a seguir serão obtidos o IAC e o IAA.

**Teorema 3.13 (IAC com  $\tau_k$  qualquer e IAS variante no tempo)** *Sejam  $n, k \in \mathbb{Z}_+$  com  $k \geq n$ , respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $\tau_{s_k}, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_n^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_n^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c$  o  $i$ -ésimo IAC. Se o NCS tem nós sensores GE, nó controlador GE ou GET, está submetido ou não à perda de pacotes, então  $\tau_{c_i}$  é dado por:*

$$\tau_{c_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} \quad (3.109)$$

ou por

$$\tau_{c_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^{sc} \quad (3.110)$$

desde que na equação (3.109)  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$ , independentemente, do valor que o atraso de controle  $\tau_k$  possa assumir.  $\diamond$

**Prova:** Da hipótese que os nós sensores são GE, o IAS é, por definição,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  e é variante no tempo. Neste caso, a cada  $\tau_{s_k}$ , os sensores são lidos. Outra hipótese do teorema é que o nó controlador é ou GE ou simultaneamente GET. Como já definido neste texto, quando o controlador opera no modo simultaneamente GET é possível determinar  $\tau_k^{sc}$  durante a operação do NCS. Além disso, considere que  $n, k \in \mathbb{Z}_+$ , com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e que possa ocorrer ou não perdas de pacotes no NCS, como ilustrado no diagrama de temporização da Figura 3.10. Nestas condições, o  $i$ -ésimo IAC do NCS é, por definição,  $\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c$ , e é dado por:

$$\tau_{c_i} = t_{k+1+i}^c - t_{n_i}^c = (t_{k+1}^s - t_n^s) - (t_{n_i}^c - t_n^s) + (t_{k+1+i}^c - t_{k+1}^s) \quad (3.111)$$

onde:  $t_{k+1}^s - t_n^s = \sum_{j=n}^k \tau_{s_j}$ ,  $t_{n_i}^c - t_n^s = \tau_n^s + \tau_n^{sc}$  e  $t_{k+1+i}^c - t_{k+1}^s = \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc}$ , que substituídos na equação (3.111) resulta em

$$\tau_{c_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} \quad (3.112)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  a equação (3.112) reduz-se a

$$\tau_{c_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_n^{sc} \quad (3.113)$$

Finalmente, como verificado até este ponto da demonstração, a expressão do IAC foi obtida sem que nenhuma consideração a respeito do atraso de controle  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , fosse necessária. Neste caso, independentemente do valor  $\tau_k$  as equações (3.112) e (3.113) são válidas. Portanto,  $\tau_k$  pode ser qualquer, inclusive, maior do que  $\tau_{s_k}$ , o que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.14 (IAA com  $\tau_k$  qualquer e IAS variante no tempo)** *Sejam  $n, k \in \mathbb{Z}_+$  com  $k \geq n$ , respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $\tau_{s_k}, \tau_{k+1}^{sc}, \tau_n^{sc}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_n^{ca}, \tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  apresentados na Definição 3.19 e  $\tau_{a_i} = t_{k+1+i}^a - t_{n_i}^a$  o  $i$ -ésimo IAA. Se o NCS tem nós sensores GE e nós atuadores GE, está submetido ou não à perda de pacotes, então  $\tau_{a_i}$  é dado por:*

$$\tau_{a_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} - \tau_n^c - \tau_n^{ca} \quad (3.114)$$

ou

$$\tau_{a_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^{sc} - \tau_n^{ca} \quad (3.115)$$

desde que na equação (3.114)  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_n^c$ , independentemente, do valor que o atraso de controle  $\tau_k$  possa assumir.  $\diamond$

**Prova:** Da hipótese que os nós sensores são GE, o IAS é, por definição,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$  é variante no tempo. Neste caso, a cada  $\tau_{s_k}$ , os sensores são lidos. Outra hipótese do teorema é que os nós atuadores são GE. Além disso, considere que  $n, k \in \mathbb{Z}_+$ , com  $k \geq n$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e que possa ocorrer ou não perdas de pacotes no NCS, como ilustrado no diagrama de temporização da Figura 3.10. Nestas condições, o  $i$ -ésimo IAA do NCS é, por definição,  $\tau_{a_i} = t_{k+1+i}^a - t_{n_i}^a$ , e é dado por:

$$\tau_{a_i} = t_{k+1+i}^a - t_{n_i}^a = (t_{k+1}^s - t_n^s) - (t_{n_i}^a - t_n^a) + (t_{k+1+i}^a - t_{k+1}^s) \quad (3.116)$$

onde:  $t_{k+1}^s - t_n^s = \sum_{j=n}^k \tau_{s_j}$ ,  $t_{n_i}^a - t_n^a = \tau_n^s + \tau_n^{sc} + \tau_n^c + \tau_n^{ca}$  e  $t_{k+1+i}^a - t_{k+1}^s = \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca}$ , que substituídos na equação (3.116) resulta em

$$\tau_{a_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^s - \tau_n^{sc} - \tau_n^c - \tau_n^{ca} \quad (3.117)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_{k+1}^s = \tau_n^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_n^c$  a equação (3.117) reduz-se a

$$\tau_{a_i} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_n^{sc} - \tau_n^{ca} \quad (3.118)$$

Finalmente, como verificado até este ponto da demonstração, a expressão do IAA foi obtida sem que nenhuma consideração a respeito do atraso de controle  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , fosse necessária. Neste caso, independentemente do valor  $\tau_k$  as equações (3.117) e (3.118) são válidas. Portanto,  $\tau_k$  pode ser qualquer, inclusive, maior do que  $\tau_{s_k}$ , o que conclui a prova.  $\square$

### 3.7 Determinação do atraso de controle máximo

O atraso de controle máximo  $\tau_m$  vem sendo, até então, obtido de forma conservativa. Como já visto no Capítulo 2 desta tese diversas técnicas foram utilizadas para se determinar o  $\tau_m$ . Entre as quais se destacam técnicas, conjuntamente, baseadas em teoria de Lyapunov e: teoria de escalonamento [KIM, 1998] - determina-se  $\tau_m$  de forma direta; teoria das perturbações [WALSH, 1999; WALSH., 2002] - determina-se  $\tau_m$  de forma indireta via determinação do máximo intervalo de amostragem admissível  $\tau_{s_m}$ ; estabilidade entrada-estado e teorema do ganho pequeno [NEŠIĆ; TEEL, 2003, 2004a, 2004b; CARNEVALE, 2007b, 2007a] - também obtido via determinação de  $\tau_{s_m}$ .

Outra técnica, também conservativa, utilizada para se determinar  $\tau_m$  é a margem de *jitter* [CERVIN, 2004; MIRKIN, 2007]. Todos os resultados de  $\tau_m$  obtidos por estas técnicas são respaldados por algum teste de estabilidade. Tal procedimento torna o resultado conservativo. Isto porquê, testes de estabilidade são obtidos tendo em vista apenas condições necessárias, e não necessárias e suficientes. A seguir a determinação de  $\tau_m$ , com notação própria  $\tau_{k_{max}}$ , será feita a partir da temporização do NCS com estrutura direta ou não hierárquica.

**Teorema 3.15 (Determinação de  $\tau_{k_{max}}$  com PAS invariante no tempo)** *Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$  o  $k$ -ésimo COAC, e sejam  $t_k^s, t_k^c, t_k^a, \tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  (topologia S-C-A) apresentados na Definição 3.19, se o NCS tem arquitetura baseada em estrutura direta com topologia S-C-A e nó sensor guiado no tempo, então, o atraso de controle máximo,  $\tau_{k_{max}}$  é*

$$\tau_{k_{max}} = 2\tau_s \quad (3.119)$$

onde,  $\tau_s$  é o PAS invariante no tempo. ◇

**Prova:** Seja  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $t_k^s, t_k^c, t_k^a, \tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  (topologia S-C-A) apresentados na Definição 3.19. Considera-se ainda que o NCS tenha arquitetura baseada em estrutura direta com topologia S-C-A e nó sensor guiado no tempo (PAS  $\tau_s$  invariante no tempo). Nestas condições

$$t_k^c = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} \quad (3.120)$$

e por esta equação o valor máximo de  $t_k^c$ , denotado por  $t_{k_{max}}^c$ , ocorre quando o atraso de comunicação sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  for máximo, o qual é neste caso denotado por  $\tau_{k_{max}}^{sc}$ . Dessa maneira, da equação (3.120) obtém-se:

$$t_{k_{max}}^c = t_k^s + \tau_k^s + \tau_{k_{max}}^{sc} \Rightarrow \tau_{k_{max}}^{sc} = t_{k_{max}}^c - t_k^s - \tau_k^s \quad (3.121)$$

Por outro lado, como nos NCSs com arquitetura baseada em estrutura direta os nós compo-



nentes estão conectados diretamente a uma rede de comunicação local, as informações enviadas ou recebidas pelos nós não trafegam em camadas superiores de redes. Isto é, os pacotes não passam por roteadores e/ou outros *hardware* com memórias, nos quais estas informações possam ficar armazenadas para transmissão/retransmissão posterior. Nestas condições, para que não ocorra amostragem vazia durante o  $k$ -ésimo COAC  $t_k^c \leq t_{k+1}^s$  e assim

$$t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s = t_k^s + \tau_s \quad (3.122)$$

Portanto, substituindo a equação (3.122) na equação (3.121) obtém-se:

$$\tau_{k_{max}}^{sc} = t_{k+1}^s - t_k^s - \tau_k^s = \tau_s - \tau_k^s \quad (3.123)$$

Em outras palavras, como o nó sensor é guiado no tempo, a cada  $\tau_s$  segundos uma nova amostra  $y(t_k^s)$  do sinal  $y(t)$  é tomada. Neste caso, para evitar que a amostra  $y(t_k^s)$  seja sobreposta no *buffer* de entrada do nó controlador pela amostra  $y(t_{k+1}^s)$ , obrigatoriamente  $t_k^c \leq t_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Portanto,  $t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

Deve-se observar ainda que, no instante  $t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s$  tem-se o início da execução da lei de controle no nó controlador. Além disso, no instante  $t_{k+1}^c$  a amostra  $y(t_{k+1}^s)$  já deve estar armazenada no *buffer* de entrada do nó controlador. Assim

$$\begin{aligned} t_{k+1_{max}}^c &= t_{k+1}^s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} \Rightarrow \tau_{k+1_{max}}^{sc} = t_{k+1_{max}}^c - t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^s \Rightarrow \\ \tau_{k+1_{max}}^{sc} &= t_{k+2}^s - t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^s = \tau_s - \tau_{k+1}^s \end{aligned} \quad (3.124)$$

e, por construção:

$$t_k^a - t_k^c = \tau_k^c + \tau_k^{ca} \Rightarrow t_k^a = t_k^c + \tau_k^c + \tau_k^{ca} \quad (3.125)$$

Como é assumido que  $t_k^c$  é máximo, então  $t_k^a$ , equação (3.125), será máximo quando  $\tau_k^{ca}$  for máximo. Assim, se  $t_{k_{max}}^a$  denotar o máximo  $t_k^a$  e  $\tau_{k_{max}}^{ca}$  denotar o máximo  $\tau_k^{ca}$ , obtém-se da equação (3.125) que:

$$t_{k_{max}}^a = t_{k_{max}}^c + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.126)$$

e para que a amostra  $y(t_{k+1}^s)$  não sobreponha a amostra  $y(t_k^s)$  antes do sinal  $\mathbf{u}(t - \tau_k^{ca})$  do  $k$ -ésimo COAC ser aplicado às entradas da planta, tem-se que

$$t_{k_{max}}^a + \tau_k^a = t_{k+1_{max}}^c = t_{k+2}^s \Rightarrow t_{k_{max}}^a = t_{k+2}^s - \tau_k^a \quad (3.127)$$

agora, substituindo as equações (3.122) e (3.127) na equação (3.126) resulta:

$$t_{k+2}^s - \tau_k^a = t_{k+1}^s + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} \Rightarrow \tau_{k_{max}}^{ca} = t_{k+2}^s - t_{k+1}^s - \tau_k^a - \tau_k^c \Rightarrow \tau_{k_{max}}^{ca} = \tau_s - \tau_k^a - \tau_k^c \quad (3.128)$$

finalmente, da hipótese do NCS ser de topologia S-C-A tem-se que:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.129)$$

e definindo o valor máximo de  $\tau_k$  como  $\tau_{k_{max}}$ , este ocorrerá quando  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  forem máximos, isto é,

$$\tau_{k_{max}} = \tau_k^s + \tau_{k_{max}}^{sc} + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} + \tau_k^a \quad (3.130)$$

por fim, substituindo as equações (3.123) e (3.128) na equação (3.130) resulta que:

$$\tau_{k_{max}} = \tau_k^s + \tau_s - \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_s - \tau_k^a - \tau_k^c + \tau_k^a \Rightarrow \tau_{k_{max}} = 2\tau_s \quad (3.131)$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.16 (Determinação de  $\tau_{k_{max}}$  com IAS variantes no tempo)** *Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$  o  $k$ -ésimo COAC, e sejam  $t_k^s, t_k^c, t_k^a, \tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  (topologia S-C-A) apresentados na Definição 3.19. Se o NCS tem arquitetura baseada em estrutura direta com topologia S-C-A e nós sensores guiados a eventos, então, o atraso de controle máximo  $\tau_{k_{max}}$  é*

$$\tau_{k_{max}} = \tau_{s_k} + \tau_{s_{k+1}} \quad (3.132)$$

onde,  $\tau_{s_k}$  e  $\tau_{s_{k+1}}$  são os IASs, respectivamente, do  $k$ -ésimo e do  $(k+1)$ -ésimo COAC.  $\diamond$

**Prova:** Seja  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , o  $k$ -ésimo COAC e sejam  $t_k^s, t_k^c, t_k^a, \tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a$  e  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$  (topologia S-C-A) apresentados na Definição 3.19. Considera-se ainda que o NCS tenha arquitetura baseada em estrutura direta com topologia S-C-A e nós sensores guiados a eventos (IAS  $\tau_{s_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  variante no tempo). Nestas condições, por construção e/ou por definição

$$t_k^c = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} \quad (3.133)$$

e por esta equação o valor máximo de  $t_k^c$ , denotado por  $t_{k_{max}}^c$ , ocorre quando  $\tau_k^{sc}$ , for máximo. Denotando,  $\tau_{k_{max}}^{sc}$  como o valor máximo de  $\tau_k^{sc}$ , a equação (3.133) resulta:

$$t_{k_{max}}^c = t_k^s + \tau_k^s + \tau_{k_{max}}^{sc} \Rightarrow \tau_{k_{max}}^{sc} = t_{k_{max}}^c - t_k^s - \tau_k^s \quad (3.134)$$

Agora, como nos NCSs com arquitetura baseada em estrutura direta os nós componentes estão conectados diretamente a uma rede de comunicação local, as informações enviadas ou recebidas pelos nós não trafegam em camadas superiores de redes, isto é, os pacotes não passam por roteadores e/ou outros *hardware* com memórias, nos quais estas informações possam ficar armazenadas para transmissão/retransmissão posterior. Nestas condições, para que não ocorra

amostragem vazia durante o  $k$ -ésimo COAC,  $t_k^c \leq t_{k+1}^s$ , e assim

$$t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s = t_k^s + \tau_{s_k} \quad (3.135)$$

Portanto, substituindo a equação (3.135) na equação (3.134) obtém-se:

$$\tau_{k_{max}}^{sc} = t_{k+1}^s - t_k^s - \tau_k^s = \tau_{s_k} - \tau_k^s \quad (3.136)$$

Em outras palavras como os nós sensores são guiados a eventos, a cada intervalo de tempo  $\tau_{s_k}$  uma nova amostra  $y(t_k^s)$  do sinal  $y(t)$  é tomada. Neste caso, para evitar que a amostra  $y(t_k^s)$  seja sobreposta no *buffer* de entrada do nó controlador pela amostra  $y(t_{k+1}^s)$ , obrigatoriamente  $t_k^c \leq t_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Portanto,  $t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

Deve-se observar ainda que, no instante  $t_{k_{max}}^c = t_{k+1}^s$  tem-se o início da execução da lei de controle no nó controlador. Além disso, no instante  $t_{k+1}^c$  a amostra  $y(t_{k+1}^s)$  já deve estar armazenada no *buffer* de entrada do nó controlador. Assim

$$\begin{aligned} t_{k+1_{max}}^c &= t_{k+1}^s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} \Rightarrow \tau_{k+1_{max}}^{sc} = t_{k+1_{max}}^c - t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^s \Rightarrow \\ \tau_{k+1_{max}}^{sc} &= t_{k+2}^s - t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^s = \tau_{s_{k+1}} - \tau_{k+1}^s \end{aligned} \quad (3.137)$$

e, por construção:

$$t_k^a - t_k^c = \tau_k^c + \tau_k^{ca} \Rightarrow t_k^a = t_k^c + \tau_k^c + \tau_k^{ca} \quad (3.138)$$

Como é assumido que  $t_k^c$  é máximo,  $t_k^a$  da equação (3.138) será máximo quando  $\tau_k^{ca}$  for máximo. Assim, denotando  $t_{k_{max}}^a$  como o máximo  $t_k^a$  e  $\tau_{k_{max}}^{ca}$  como o máximo  $\tau_k^{ca}$ , da equação (3.138), obtém-se que:

$$t_{k_{max}}^a = t_{k_{max}}^c + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.139)$$

e para que a amostra  $y(t_{k+1}^s)$  não sobreponha a amostra  $y(t_k^s)$  antes do sinal  $\mathbf{u}(t - \tau_k^{ca})$  do  $k$ -ésimo COAC ser aplicado às entradas da planta, tem-se que

$$t_{k_{max}}^a + \tau_k^a = t_{k+1_{max}}^c = t_{k+2}^s \Rightarrow t_{k_{max}}^a = t_{k+2}^s - \tau_k^a \quad (3.140)$$

agora, substituindo as equações (3.135) e (3.140) na equação (3.139) resulta:

$$\begin{aligned} t_{k+2}^s - \tau_k^a &= t_{k+1}^s + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} \Rightarrow \tau_{k_{max}}^{ca} = t_{k+2}^s - t_{k+1}^s - \tau_k^a - \tau_k^c \Rightarrow \\ \tau_{k_{max}}^{ca} &= \tau_{s_{k+1}} - \tau_k^a - \tau_k^c \end{aligned} \quad (3.141)$$

finalmente, da hipótese do NCS ser de topologia S-C-A, tem-se que:

$$\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a \quad (3.142)$$

donde, naturalmente, o valor máximo de  $\tau_k$ , denotado por  $\tau_{k_{max}}$ , ocorrerá quando  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  forem máximos, ou seja:

$$\tau_{k_{max}} = \tau_k^s + \tau_{k_{max}}^{sc} + \tau_k^c + \tau_{k_{max}}^{ca} + \tau_k^a \quad (3.143)$$

por fim, substituindo as equações (3.136) e (3.141) na equação (3.143) resulta que:

$$\tau_{k_{max}} = \tau_k^s + \tau_{s_k} - \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_{s_{k+1}} - \tau_k^a - \tau_k^c + \tau_k^a \Rightarrow \tau_{k_{max}} = \tau_{s_k} + \tau_{s_{k+1}} \quad (3.144)$$

o que conclui a prova.  $\square$

### 3.8 Limitantes dos intervalos de amostragem

Os valores limites, máximo e mínimo, dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador serão doravante inferidos dos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14. Para tal, considere que:  $\tau_{a_{k_{max}}}$  e  $\tau_{a_{k_{min}}}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_{a_k}$  quando o NCS opera sem perdas de pacotes;  $\tau_{c_{k_{max}}}$  e  $\tau_{c_{k_{min}}}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_{c_k}$  quando o NCS opera sem perdas de pacotes; considere ainda que:  $\tau_{a_{i_{max}}}$  e  $\tau_{a_{i_{min}}}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos pelo IAA  $\tau_{a_i}$  quando o NCS opera com perdas de pacotes;  $\tau_{c_{i_{max}}}$  e  $\tau_{c_{i_{min}}}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos pelo  $\tau_{c_i}$  quando o NCS opera com perdas de pacotes;  $\tau_{k_{max}}^s$  e  $\tau_{k_{min}}^s$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_k^s$ ;  $\tau_{k_{max}}^{sc}$  e  $\tau_{k_{min}}^{sc}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_k^{sc}$ ;  $\tau_{k_{max}}^c$  e  $\tau_{k_{min}}^c$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_k^c$ ;  $\tau_{k_{max}}^{ca}$  e  $\tau_{k_{min}}^{ca}$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_k^{ca}$ ;  $\tau_{k_{max}}^a$  e  $\tau_{k_{min}}^a$  sejam, respectivamente, o máximo e o mínimo valores que podem ser assumidos por  $\tau_k^a$ . Portanto, quando  $\tau_k \leq \tau_s$ , do Teorema 3.1 e das definições do parágrafo anterior tem-se que:

$$\tau_{c_{k_{max}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^s - \tau_{k_{min}}^{sc} \quad (3.145)$$

$$\tau_{c_{k_{min}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^s - \tau_{k_{max}}^{sc} \quad (3.146)$$

desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo,  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k_{min}}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{k_{max}}^s$  e como consequência as equações (3.145) e (3.146) se reduzem a:

$$\tau_{c_{k_{max}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^{sc} \quad (3.147)$$

$$\tau_{c_{k_{min}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^{sc} \quad (3.148)$$

analogamente, quando  $\tau_k > \tau_s$  e o NCS não é submetido a perda de pacotes, obtém-se diretamente do Teorema 3.3 que:

$$\tau_{c_{kmax}} = \tau_s + \tau_{k+1max}^s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{kmin}^s - \tau_{kmin}^{SC} \quad (3.149)$$

$$\tau_{c_{kmin}} = \tau_s + \tau_{k+1min}^s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{kmax}^s - \tau_{kmax}^{SC} \quad (3.150)$$

obviamente, desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo,  $\tau_{k+1max}^s = \tau_{kmin}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1min}^s = \tau_{kmax}^s$  e como consequência as equações (3.149) e (3.150) se reduzem a:

$$\tau_{c_{kmax}} = \tau_s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{kmin}^{SC} \quad (3.151)$$

$$\tau_{c_{kmin}} = \tau_s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{kmax}^{SC} \quad (3.152)$$

Quando o NCS opera com perda de não mais que um pacote em COAC não consecutivos e  $\tau_k \leq \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , os IAC máximos e mínimos, respectivamente, denotados por  $\tau_{c_{imax}}$  e  $\tau_{c_{imin}}$ , são dados diretamente do Teorema 3.5 por:

$$\tau_{c_{imax}} = 2\tau_s + \tau_{k+1max}^s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{k-1min}^s - \tau_{k-1min}^{SC} \quad (3.153)$$

$$\tau_{c_{imin}} = 2\tau_s + \tau_{k+1min}^s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{k-1max}^s - \tau_{k-1max}^{SC} \quad (3.154)$$

e, obviamente, desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo,  $\tau_{k+1max}^s = \tau_{k-1min}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1min}^s = \tau_{k-1max}^s$ , e como consequência as equações (3.153) e (3.154) se reduzem a:

$$\tau_{c_{imax}} = 2\tau_s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{k-1min}^{SC} \quad (3.155)$$

$$\tau_{c_{imin}} = 2\tau_s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{k-1max}^{SC} \quad (3.156)$$

Quando  $\tau_k > \tau_s$  e o NCS é submetido a perda de um pacote, isto é, não ocorrem perda de mais de um pacote em COAC sucessivos, obtém-se diretamente do Teorema 3.7 que:

$$\tau_{c_{imax}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1max}^s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{kmin}^s - \tau_{kmin}^{SC} \quad (3.157)$$

$$\tau_{c_{imin}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1min}^s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{kmax}^s - \tau_{kmax}^{SC} \quad (3.158)$$

ou, desde que  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo, isto é,  $\tau_{k+1max}^s = \tau_{kmin}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1min}^s = \tau_{kmax}^s$ , que por conseguinte, obtém-se das equações (3.157) e (3.158):

$$\tau_{c_{kmax}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1max}^{SC} - \tau_{kmin}^{SC} \quad (3.159)$$

$$\tau_{c_{kmin}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1min}^{SC} - \tau_{kmax}^{SC} \quad (3.160)$$

Em face das expressões do IAC serem, até então, obtidas com base em hipóteses sobre o

valor do atraso de controle  $\tau_k$  ser menor ou igual ou maior que o IAS, uma abordagem unificada para a determinação do IAC foi proposta. Neste caso, o NCS também tem nós sensores GT, nós controladores GE ou GET e nós atuadores GE. Nestas condições, independentemente do valor de  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , na presença ou não de perda de pacotes, o IAC mínimo e máximo denotados, respectivamente, por  $\tau_{c_{i_{\min}}}$  e  $\tau_{c_{i_{\max}}}$  são obtidos do Teorema 3.9 e dados por:

$$\tau_{c_{i_{\max}}} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1_{\max}}^s + \tau_{k+1_{\max}}^{SC} - \tau_{n_{\min}}^s - \tau_{n_{\min}}^{SC} \quad (3.161)$$

$$\tau_{c_{i_{\min}}} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1_{\min}}^s + \tau_{k+1_{\min}}^{SC} - \tau_{n_{\max}}^s - \tau_{n_{\max}}^{SC} \quad (3.162)$$

ou, desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo, isto é,  $\tau_{k+1_{\max}}^s = \tau_{n_{\min}}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1_{\min}}^s = \tau_{n_{\max}}^s$ . Por conseguinte, obtém-se das equações (3.161) e (3.162) que:

$$\tau_{c_{i_{\max}}} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1_{\max}}^{SC} - \tau_{n_{\min}}^{SC} \quad (3.163)$$

$$\tau_{c_{i_{\min}}} = (k + 1 - n)\tau_s + \tau_{k+1_{\min}}^{SC} - \tau_{n_{\max}}^{SC} \quad (3.164)$$

Quando o NCS tem nós sensores GE, nós controladores GE ou GET e nós atuadores GE e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , os IAC máximo e mínimo são obtidos do Teorema 3.11 e dados por:

$$\tau_{c_{k_{\max}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{\max}}^s + \tau_{k+1_{\max}}^{SC} - \tau_{k_{\min}}^s - \tau_{k_{\min}}^{SC} \quad (3.165)$$

$$\tau_{c_{k_{\min}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{\min}}^s + \tau_{k+1_{\min}}^{SC} - \tau_{k_{\max}}^s - \tau_{k_{\max}}^{SC} \quad (3.166)$$

evidentemente, desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo, isto é,  $\tau_{k+1_{\max}}^s = \tau_{k_{\min}}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1_{\min}}^s = \tau_{k_{\max}}^s$ , obtém-se, por conseguinte, das equações (3.165) e (3.166) que:

$$\tau_{c_{k_{\max}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{\max}}^{SC} - \tau_{k_{\min}}^{SC} \quad (3.167)$$

$$\tau_{c_{k_{\min}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{\min}}^{SC} - \tau_{k_{\max}}^{SC} \quad (3.168)$$

Por outro lado, quando o NCS tem nós sensores GE, nós controladores GE ou GET, nós atuadores GE e o valor de  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  é qualquer, na presença ou não de perda de pacotes, os IAC máximo e mínimo são obtidos segundo o Teorema 3.13 e são dados por:

$$\tau_{c_{i_{\max}}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{\max}}^s + \tau_{k+1_{\max}}^{SC} - \tau_{n_{\min}}^s - \tau_{n_{\min}}^{SC} \quad (3.169)$$

$$\tau_{c_{i_{\min}}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{\min}}^s + \tau_{k+1_{\min}}^{SC} - \tau_{n_{\max}}^s - \tau_{n_{\max}}^{SC} \quad (3.170)$$

obviamente, desde que,  $\tau_k^s$  seja invariante no tempo, isto é,  $\tau_{k+1_{\max}}^s = \tau_{k_{\min}}^s$ , bem como,  $\tau_{k+1_{\min}}^s =$

$\tau_{k_{max}}^s$ , obtém-se, por conseguinte, das equações (3.169) e (3.170) que:

$$\tau_{c_{i_{max}}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{max}}^{sc} - \tau_{n_{min}}^{sc} \quad (3.171)$$

$$\tau_{c_{i_{min}}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{min}}^{sc} - \tau_{n_{max}}^{sc} \quad (3.172)$$

Da mesma forma, os valores máximo e mínimo dos IAA são obtidos dos Teoremas 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10, 3.12 e 3.14. Dessa maneira, quando  $\tau_k \leq \tau_s$  do Teorema 3.2 tem que:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^s - \tau_{k_{min}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^c - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.173)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^s - \tau_{k_{max}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^c - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.174)$$

e, desde que,  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo tem-se:  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{k_{min}}^c$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{k_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{k_{max}}^c$ , como consequência as equações (3.173) e (3.174) se reduzem a:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.175)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.176)$$

Analogamente, quando  $\tau_k > \tau_s$  e o NCS não é submetido a perda de pacotes, obtém-se do Teorema 3.4 que:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^s - \tau_{k_{min}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^c - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.177)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^s - \tau_{k_{max}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^c - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.178)$$

ou, desde que  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo tem-se  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{k_{min}}^c$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{k_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{k_{max}}^c$ . O que reduz as equações (3.177) e (3.178) a:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.179)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = (d_k - d_{k+1} + 1)\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.180)$$

Quando o NCS opera com perda de não mais que um pacote em COAC não consecutivos e  $\tau_k \leq \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , os IAA máximos e mínimos, respectivamente, denotados por  $\tau_{a_{i_{max}}}$  e  $\tau_{a_{i_{min}}}$ , são dados diretamente do Teorema 3.6 por:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = 2\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k-1_{min}}^s - \tau_{k-1_{min}}^{sc} - \tau_{k-1_{min}}^c - \tau_{k-1_{min}}^{ca} \quad (3.181)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = 2\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k-1_{max}}^s - \tau_{k-1_{max}}^{sc} - \tau_{k-1_{max}}^c - \tau_{k-1_{max}}^{ca} \quad (3.182)$$

e, desde que,  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo,  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k-1_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{k-1_{min}}^c$ , bem como  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{k-1_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{k-1_{max}}^c$ , e como consequência as equações (3.181) e (3.182) se reduzem a:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = 2\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k-1_{min}}^{SC} - \tau_{k-1_{min}}^{ca} \quad (3.183)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = 2\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k-1_{max}}^{SC} - \tau_{k-1_{max}}^{ca} \quad (3.184)$$

Quando  $\tau_k > \tau_s$  e o NCS é submetido a perda sucessiva de não mais que um pacote tem-se do Teorema 3.8 que:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^s - \tau_{k_{min}}^{SC} - \tau_{k_{min}}^c - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.185)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^s - \tau_{k_{max}}^{SC} - \tau_{k_{max}}^c - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.186)$$

e, desde que,  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo tem-se:  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{k_{min}}^c$ , como consequência, as equações (3.185) e (3.186) se reduzem a:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^{SC} - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.187)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = d_k \tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^{SC} - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.188)$$

Para o NCS com nós sensores GT, nós controladores GE ou GET e nós atuadores GE, na presença ou não de perda de pacotes e para  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  qualquer, os valores máximos e mínimos de  $\tau_{a_i}$ , denotado por  $\tau_{a_{i_{max}}}$ , são dados a partir do Teorema 3.10 por:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = (k+1-n)\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{n_{min}}^s - \tau_{n_{min}}^{SC} - \tau_{n_{min}}^c - \tau_{n_{min}}^{ca} \quad (3.189)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = (k+1-n)\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{n_{max}}^s - \tau_{n_{max}}^{SC} - \tau_{n_{max}}^c - \tau_{n_{max}}^{ca} \quad (3.190)$$

naturalmente, desde que  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo, tem-se que  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{n_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{n_{min}}^c$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{n_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{n_{max}}^c$ , o que reduz as equações (3.189) e (3.190) a:

$$\tau_{a_{i_{max}}} = (k+1-n)\tau_s + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{n_{min}}^{SC} - \tau_{n_{min}}^{ca} \quad (3.191)$$

$$\tau_{a_{i_{min}}} = (k+1-n)\tau_s + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{n_{max}}^{SC} - \tau_{n_{max}}^{ca} \quad (3.192)$$

Quando o NCS tem nós sensores GE, nós controladores GE ou GET e nós atuadores GE e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  os IAA máximo e mínimo são obtidos do Teorema 3.12 e dados por:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{SC} + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^s - \tau_{k_{min}}^{SC} - \tau_{k_{min}}^c - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.193)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{SC} + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^s - \tau_{k_{max}}^{SC} - \tau_{k_{max}}^c - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.194)$$



obviamente, desde que  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  sejam invariantes no tempo, tem-se que  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{k_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{k_{min}}^c$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{k_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{k_{max}}^c$ , o que reduz as equações (3.193) e (3.194) a:

$$\tau_{a_{k_{max}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{k_{min}}^{sc} - \tau_{k_{min}}^{ca} \quad (3.195)$$

$$\tau_{a_{k_{min}}} = \tau_{s_k} + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{k_{max}}^{sc} - \tau_{k_{max}}^{ca} \quad (3.196)$$

Por fim, quando o NCS tem nós sensores GE, nós controladores GE ou GET e nós atuadores GE e para qualquer valor de  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  na presença ou não de perda de pacotes, os valores máximo e mínimo do IAA são obtidos do Teorema 3.14 e dados por:

$$\tau_{a_{max}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{max}}^s + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^c + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{n_{min}}^s - \tau_{n_{min}}^{sc} - \tau_{n_{min}}^c - \tau_{n_{min}}^{ca} \quad (3.197)$$

$$\tau_{a_{min}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{min}}^s + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^c + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{n_{max}}^s - \tau_{n_{max}}^{sc} - \tau_{n_{max}}^c - \tau_{n_{max}}^{ca} \quad (3.198)$$

analogamente, quando  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c$  são invariantes no tempo, tem-se que  $\tau_{k+1_{max}}^s = \tau_{n_{min}}^s$  e  $\tau_{k+1_{max}}^c = \tau_{n_{min}}^c$ , bem como,  $\tau_{k+1_{min}}^s = \tau_{n_{max}}^s$  e  $\tau_{k+1_{min}}^c = \tau_{n_{max}}^c$ , o que reduz as equações (3.197) e (3.198) a:

$$\tau_{a_{max}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{max}}^{sc} + \tau_{k+1_{max}}^{ca} - \tau_{n_{min}}^{sc} - \tau_{n_{min}}^{ca} \quad (3.199)$$

$$\tau_{a_{min}} = \left( \sum_{j=n}^k \tau_{s_j} \right) + \tau_{k+1_{min}}^{sc} + \tau_{k+1_{min}}^{ca} - \tau_{n_{max}}^{sc} - \tau_{n_{max}}^{ca} \quad (3.200)$$

Finalmente, deve-se ressaltar que  $\tau_{k+1_{min}}^{sc}$  e  $\tau_{k+1_{min}}^{ca}$  ocorrem no NCS quando se tem comunicação perfeita. Isto é, quando um dado é armazenado no *buffer* de transmissão do nó sensor ou do nó controlador, respectivamente, e é transmitido imediatamente, sem que haja qualquer problema na comunicação, tal como, por exemplo, tentativa de retransmissão.

### 3.9 Considerações complementares

Como verificado, os resultados obtidos naquilo que diz respeito à determinação dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador para NCSs com nós sensores guiados no tempo ou a eventos, nós controladores e atuadores guiados no tempo ou a eventos foram determinados. Para tal, a partir das definições dos modos de operação dos nós, é possível concluir que nós guiados no tempo têm seus *clocks* locais sincronizados por um *clock* global e nós guiados a eventos não têm *clocks* locais sincronizados por um *clock* global. Portanto, para nós guiados no tempo ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo é possível determinar os atrasos de comunicação através de alguma técnica de determinação de atraso, como por exemplo, via *timestamping*.

Neste caso, a partir dos atrasos determinados é possível obter, com os teoremas precedentes, os intervalos de amostragem dos controladores e atuadores. De outro modo, tais intervalos de amostragem podem ser determinados com os próprios *clocks* locais dos nós. Maneira esta que, viabiliza a determinação dos intervalos de amostragem dos controladores e atuadores para nós guiados a eventos.

Quando se tem um nó controlador guiado a eventos ou simultaneamente guiado a eventos e no tempo, a lei de controle é variante no tempo e de dimensão infinita. Neste caso, o controlador tem intervalo de amostragem variante no tempo de acordo com a variação dos atrasos. Dessa maneira, independentemente da rede de comunicação utilizada, sua dinâmica é matematicamente representada pelos atrasos e, naturalmente, pelos intervalos de amostragem dos componentes. Portanto, os modelos desenvolvidos se aplicam para qualquer tipo de rede. Naturalmente, como o controlador neste cenário tem intervalo de amostragem variante no tempo, ele precisa ser recalculado a cada COAC. Os possíveis impactos relacionados a possíveis problemas aritméticos direta ou indiretamente correlacionados com estes recálculos não são investigados neste trabalho.

Por fim, observações sobre os valores máximos e mínimos dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador são feitas. Neste caso, é conhecido da literatura dos sistemas invariantes no tempo que valores muito pequenos de períodos de amostragem podem causar problemas, inclusive de instabilizar o sistema discreto, como mostrado em Åström [ÅSTRÖM, 1980, 1984]. Todavia, para a solução aqui proposta este problema não deve ocorrer, devido à construção geométrica e temporal do sistema que, naturalmente, impede a ocorrência consecutiva de pequenos intervalos de amostragem do controlador e do atuador. Em outras palavras, após a ocorrência de um pequeno intervalo de amostragem do controlador ou do atuador, o intervalo de amostragem seguinte é sempre relativamente grande. Isto é, da mesma ordem de grandeza do período/intervalo de amostragem dos sensores ou maior. Dessa maneira, pequenos intervalos de amostragem do controlador ou do atuador não chegam a ser algo problemático.

Por outro lado, a ocorrência de intervalos de amostragem máximos, ou do controlador ou do atuador pode ser, em geral, problemática. Neste caso, pode ocorrer três situações. Na primeira o NCS opera sem perdas de pacotes e  $\tau_k \leq \tau_s$ . Situação esta que é pouco problemática. Isto porquê, os atrasos são pequenos, menores que o período/intervalo de amostragem dos sensores. Consequentemente, os intervalos de amostragem do controlador e do atuador, por construção, não serão maiores, respectivamente, que dois períodos/intervalos de amostragem dos sensores. Isto é,  $\tau_{c_k} \leq 2\tau_s$  e  $\tau_{a_k} \leq 2\tau_s$ .

A segunda situação ocorre quando  $\tau_k > \tau_s$  e não ocorre perdas de pacotes no NCS. Neste caso, também tem-se que  $\tau_{c_k} \leq 2\tau_s$  e  $\tau_{a_k} \leq 2\tau_s$ . Todavia, o fato de  $\tau_k > \tau_s$  implica que os atrasos que compõem  $\tau_k$  aumentaram. Fato este que pode resultar em maior degradação de desempenho da resposta do NCS. Entretanto, ainda assim esta situação não chega a ser tão crítica, uma vez

que, por construção  $\tau_k \leq 2\tau_s$ .

A terceira situação se dá quando  $\tau_k > \tau_s$  e ocorre perdas de pacotes no NCS. Neste caso, os valores máximos dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador podem ser maiores que os valores máximos de  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$  suportados e definidos em projeto. Nesta situação, observadores e preditores de estados podem ser executados sempre que um determinado valor máximo de  $\tau_{c_k}$ , especificado em projeto, ocorrer. Por outro lado, desde que o NCS opere sem observadores e preditores de estados e os pacotes de dados passarem a ser perdidos (não entregues) de forma sucessiva, o valor dos intervalos de amostragem dos controladores e atuadores do NCS crescem infinitamente. Neste caso, o NCS passará a operar em malha aberta. E, certamente, se instabilizará a menos que algo (controle local automático, alarme) ou alguém (operador) intervenha na operação do sistema de controle. Neste caso, do ponto de vista de controle automático, uma das soluções de tal problema pode ser a implementação de observadores e preditores de estados no controlador.

Todavia, embora seja comum a utilização de observadores e preditores de estados na teoria dos NCSs, eles nem sempre resolvem os problemas de atrasos e perdas de pacotes. Isto porquê, tais algoritmos são executados no nó controlador. Todavia, para a topologia S-C-A de NCS, não há como garantir que os pacotes gerados no nó controlador cheguem aos nós atuadores. Neste caso, uma possível maneira de contornar tal problema pode ser a execução de tais estratégias, diretamente, do próprio nó atuador do NCS<sup>3</sup>. Além disso, estes algoritmos devem ser executados sempre que o intervalo de amostragem dos atuadores ultrapassar um valor máximo, pré-definido na fase de projeto do NCS. Outra solução possível, e manual, é a intervenção de um operador humano.

### 3.10 Considerações finais

Neste capítulo foram demonstradas as expressões dos intervalos de amostragem dos controladores guiados a eventos (GE) e simultaneamente guiados a eventos e no tempo (GET) para os NCSs. Tais resultados foram formalizados segundo os Teoremas 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9, 3.11 e 3.13. Foram obtidos também os intervalos de amostragem dos atuadores GE. Tais intervalos de amostragem foram definidos e apresentados nos Teoremas 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10, 3.12 e 3.14. Foi verificado, segundo o Corolário 3.1, que o intervalo de amostragem dos controladores é dependente apenas do período/intervalo de amostragem dos sensores da malha e dos atrasos que ocorrem antes do pacote chegar no nó controlador. No Corolário 3.2, foi provado que o intervalo de amostragem dos controladores guiados no tempo é igual ao período de amostragem dos sensores da malha.

---

<sup>3</sup>Evidentemente, isso só será possível se a infra-estrutura de *hardware* do nó atuador for dotada dos recursos físicos necessários para a implementação dos observadores e preditores de estados em questão.

Analogamente, segundo o Teorema 3.2 foi verificado que o intervalo de amostragem dos atuadores é dependente apenas do período de amostragem dos sensores da malha e dos atrasos que ocorrem antes do pacote chegar no nó atuador. Além disso, no Corolário 3.3, foi provado que o intervalo de amostragem dos atuadores guiados no tempo é igual ao período de amostragem dos sensores da malha. Também foram estabelecidos limitantes para os períodos de amostragem máximos e mínimos dos controladores e atuadores em função dos atrasos máximos e mínimos que ocorrem no NCS.

Discussões adicionais sobre os modos de operação dos nós e os possíveis problemas decorrentes das variabilidades dos intervalos de amostragem dos componentes também foram realizadas.

No capítulo seguinte serão apresentadas as discretizações do controlador e da planta com base nos paradigmas tempo e eventos discutidos neste capítulo. Neste sentido, diversos modelos de tempo discreto são obtidos com base nos diversos modos de operação dos nós componentes. Por fim, é apresentado, como uma das contribuições desta tese, um amplo estudo sobre o comportamento do ZOH. Estudo este, com o qual se consegue explicar os efeitos dos atrasos variantes no tempo em NCSs.

# Capítulo 4

## Discretização da planta e do controlador

### 4.1 Introdução

Neste capítulo a discretização da planta, cuja dinâmica é, eminentemente, de tempo contínuo é abordada. A razão de tal escolha é a de facilitar a análise do sistemas de controle em rede. Todavia, naturalmente, uma abordagem na qual a planta é analisada sob a ótica de tempo contínuo pode ser realizada, utilizando-se da teoria de sistemas híbridos. Entretanto, tal escolha não foi adotada, por razões inerentes da área, como por exemplo, complexidade, assim como, pelo fato desta teoria ainda está em fase de desenvolvimento [BRANICKY, 1995].

Neste sentido, serão deduzidas as expressões dos controladores de tempo discreto ou digitais, em que o atraso de controle pode ser menor ou maior que o período de amostragem dos sensores (PAS). Tal discretização é válida, tanto para controladores operando nos modos guiado a eventos (GE), guiado no tempo (GT), assim como para aqueles, simultaneamente guiados a eventos e no tempo (GET). Será mostrado que, quando o controlador é GE ou GET, o intervalo de amostragem do mesmo é variante no tempo. Portanto, os parâmetros da expressão do controlador discretizado variam a cada ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC). Em outras palavras, os coeficientes da equação de diferença resultante da discretização do controlador, variam, ou estão sujeitas a variações de um COAC para o outro. Esta variabilidade temporal pode ser estocástica, dependendo do protocolo de acesso ao meio da rede de comunicação utilizada no NCS e, da forma como as tarefas embarcadas nos nós componentes são executadas.

Para possibilitar a discretização do controlador operando no modo GET foi necessário criar um modelo matemático “fictício”. Isto é, uma “abstração” matemática, utilizando-se como referencial de integração o instante de amostragem dos sinais nos nós sensores e o instante de chegada dos pacotes de dados no nó controlador. Com esse modelo “fictício” foi possível compatibilizar os conceitos físicos do controlador operando no modo GE, no modo GT e no modo GET, com o significado físico das expressões matemáticas deduzidas que representam o modelo do controlador discretizado.

Embora, não seja muito comum a existência de modelos matemáticos “fictícios” na literatura. Um exemplo clássico de modelos matemáticos que se utilizam deste tipo de artifício é encontrado na dedução do filtro de Kalman [KALMAN, 1960; KALMAN; BUCY, 1961]. Durante o desenvolvimento da teoria de tal filtro, Kalman adicionou um termo (por alguns chamado ruído “fictício” [DOYLE; STEIN, 1979] à expressão matemática da saída da planta de forma a possibilitar representar o ruído de quantização e as incertezas presentes nas malhas de controle.

Um outro exemplo de modelo “fictício” encontrado na literatura é do segurador triangular, o qual, é utilizado para aproximar um sinal contínuo por poligonais [JURY, 1958, p.288], [RA-GAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.287]. Por se tratar do modelo de um segurador, este exemplo é ainda mais adequado e próximo daquele que será proposto neste capítulo. Dessa maneira, e sob a inspiração das idéias da introdução do ruído “fictício” no modelo matemático do filtro de Kalman e do modelo do segurador triangular, um modelo matemático “fictício” de segurador baseado no ZOH (*Zero Order Hold*) foi desenvolvido para possibilitar a correta discretização do controlador operando no modo GET.

Por fim, um amplo estudo sobre o comportamento dos ZOHs invariantes e variantes no tempo é apresentado. Desse estudo surgiu o conceito de fase relativa. Conceito este que explica os efeitos dos atrasos variantes no tempo em um sistema de controle com atrasos variantes no tempo. Bem como, elucida a invalidade física dos modelos matemáticos equivalentes discretos de sistemas físicos submetidos a atrasos variantes no tempo. Tais resultados constituem-se em contribuições genuínas desta tese.

## 4.2 Preliminares sobre Controle digital

A topologia clássica de um sistema de controle digital é como ilustrada na Figura 4.1 [FRANKLIN, 2006, p.453].

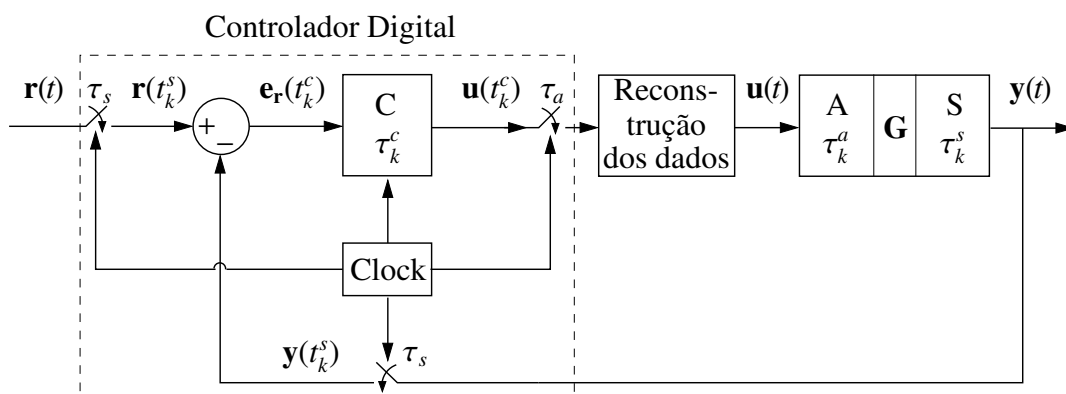


Figura 4.1: Diagrama de blocos de um sistema de controle digital.

Para o sistema pré-apresentado  $\tau_s$ ,  $\tau_c$  e  $\tau_a$ , são respectivamente, os períodos de amostragem

dos sensores, do controlador e dos atuadores. Os cálculos do sinal do erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  e do algoritmo de controle do controlador  $C$ , para compensação do sinal de saída da planta  $G$  são realizados por uma unidade computacional denominada computador digital<sup>1</sup>. Estes cálculos são realizados a partir de amostras  $\mathbf{y}(t_k^s)$  obtidas por conversores A/Ds a uma taxa de amostragem  $1/\tau_s$  (isto é, com período de amostragem  $\tau_s$ ), diretamente da saída da planta. Para que a obtenção de  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  seja isenta de erros, os sinais analógicos da saída da planta  $\mathbf{y}(t)$  e de referência  $\mathbf{r}(t)$  devem ser amostrados simultaneamente pelo computador digital, como ilustrado na Figura 4.1, pelo bloco *Clock*.

Teoricamente, é, em geral, assumido que a amostragem dos sinais  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{r}(t)$  pelos conversores A/Ds, a execução do algoritmo de controle em  $C$  e, a aplicação do sinal de controle  $\mathbf{u}(t_k^c)$  após as conversões D/As nos atuadores sejam sincronizadas e realizadas simultaneamente [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.33], como indicado pelo bloco *Clock* da Figura 4.1.

Entretanto, na prática, cada etapa deste processo leva um intervalo de tempo não nulo para ser realizada [HANSELMANN, 1987; MARTI, 2001]. As conversões A/Ds para aquisição dos dados na saída da planta e na entrada de referência, durante o  $k$ -ésimo COAC, são realizadas em um intervalo de tempo  $\tau_k^s = \tau^s$  invariante no tempo. A execução do algoritmo de controle do controlador  $C$ , do  $k$ -ésimo COAC, é realizada em um intervalo de tempo  $\tau_k^c = \tau^c$  invariante no tempo. Finalmente, as conversões D/As e a aplicação do sinal de controle,  $\mathbf{u}(t_k^c)$ , durante o  $k$ -ésimo COAC nos atuadores, são realizadas em um intervalo de tempo  $\tau_k^a = \tau^a$  invariante no tempo. A soma desses tempos resulta no atraso de controle  $\tau_k = \tau$  invariante no tempo, o qual é ilustrado na Figura 4.2 e quantificado pela expressão.

$$\tau = \tau^s + \tau^c + \tau^a \quad (4.1)$$

Todavia, como já enfatizado, em geral, nas análises  $\tau$  é considerado nulo. Considerar  $\tau = 0$  é o mesmo que assumir a hipótese de sincronismo perfeito entre os conversores A/Ds, D/As e a execução do algoritmo de controle. Uma das implicações da hipótese de sincronismo perfeito, resulta em  $\tau_s = \tau_c = \tau_a$ , o que é provado, posteriormente, no Teorema 4.1.

Dessa maneira, a cada  $\tau_s$  unidades de tempo, o computador digital fornece um pulso de *clock* ou uma interrupção, que aciona os conversores A/Ds, D/As e o início da execução do algoritmo de controle.

Da amostragem dos sinais analógicos  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{r}(t)$  resultam, respectivamente, os sinais amostrados  $\mathbf{y}(t_k^s)$  e  $\mathbf{r}(t_k^s)$ . A partir das amostras  $\mathbf{y}(t_k^s)$  e  $\mathbf{r}(t_k^s)$  o erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c) = \mathbf{r}(t_k^s) - \mathbf{y}(t_k^s)$  é calculado. Imediatamente, após a obtenção de  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  o algoritmo de controle é executado

<sup>1</sup>A denominação computador digital se emprega a qualquer unidade computacional de processamento dos algoritmos de controle. Este computador digital é, geralmente, dotado de conversores A/Ds, D/As, portas de entradas e saídas, memórias e, pode ser desde um PC (*Personal Computer*), um PLC (*Programmable Logic Controller*), um DSP (*Digital Signal Processing*), um microcontrolador, etc. [FRANKLIN, 2006, p.470] e [KUO, 1992, c.12].

obtendo-se a saída do controlador  $\mathbf{u}(t_k^c)$  a qual é, em seguida, aplicada na entrada da planta.

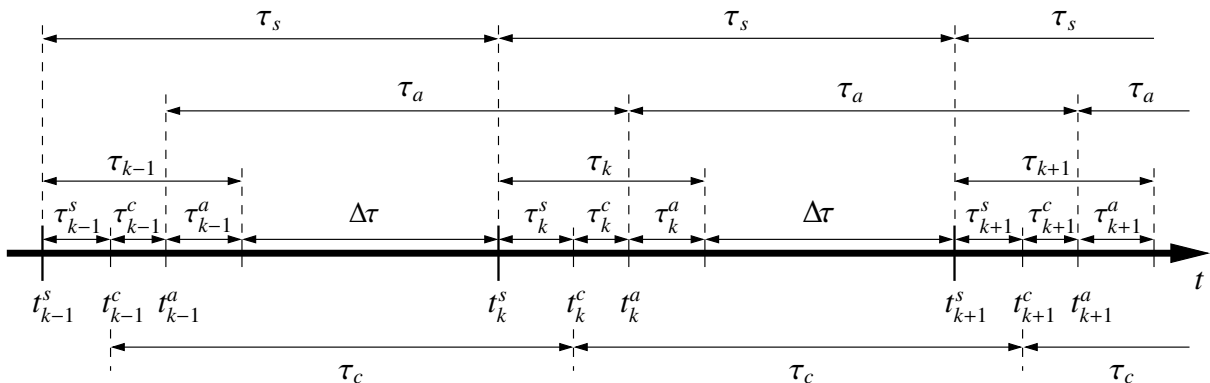


Figura 4.2: Relação de precedência temporal das tarefas executadas no computador digital.

Observa-se na Figura 4.2 que a ocorrência de cada uma destas etapas (tarefas) segue uma ordem de precedência temporal. Em outras palavras, a ocorrência de uma está intrinsecamente relacionada à ocorrência das outras. Isto não quer dizer, entretanto, que no momento da geração da interrupção pelo *clock*, durante o  $k$ -ésimo COAC, se ocorrer uma falha na execução de uma dessas três etapas o computador digital pára de executar. Neste caso, o computador digital substitui os eventuais dados problemáticos do  $k$ -ésimo COAC pelos dados sem problemas do  $(k - 1)$ -ésimo COAC ou, estima o dado com problema e continua executando normalmente as tarefas nele embarcadas.

O sistema de controle digital descrito nesta seção foi denominado no Capítulo 2 de sistema de controle não conectado em rede (do inglês - *nonnetworked control system* - nNCS) de tempo discreto ou digital (nNCSD), para o qual, a seguir será demonstrado, através do Teorema 4.1, que  $\tau_s = \tau_c = \tau_a$ .

**Teorema 4.1 (PAS, PAC e PAA do nNCS)** *Seja  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  o  $k$ -ésimo COAC e sejam:  $\tau = \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_k^a$ ,  $\tau_s$ ,  $\tau_c$  e  $\tau_a$ ,  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^a$  definidos na Definição 3.19. Se os clocks dos nós componentes são sincronizados e  $\tau \leq \tau_s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , então:*

$$\tau_s = \tau_c = \tau_a \tag{4.2}$$

◇

**Prova:** A prova é realizada de forma direta. Observa-se que, se os *clocks* dos componentes são sincronizados e a amostragem dos componentes ocorrem ao mesmo tempo, isto é, de forma simultânea. Neste caso, para o  $k$ -ésimo COAC, tem-se que  $t_k^s = t_k^c = t_k^a$ , o que implica, diretamente, que  $\tau_s = \tau_c = \tau_a$  (Veja Figura 4.2). Por outro lado, mesmo não admitindo a hipótese da simultaneidade da amostragem dos componentes, é possível mostrar, como realizado nas provas



dos Teoremas 3.1 e 3.2, que

$$\tau_c = \tau_s + \tau_{k+1}^s - \tau_k^s = \tau_s \quad (4.3)$$

$$\tau_a = \tau_s + \tau_{k+1}^s - \tau_k^s + \tau_{k+1}^c - \tau_k^c = \tau_s \quad (4.4)$$

desde que:  $\tau_{k+1}^s = \tau_k^s$  e  $\tau_{k+1}^c = \tau_k^c$ . Portanto, das equações (4.3) e (4.4) tem-se que  $\tau_s = \tau_c = \tau_a$ .  $\square$

### 4.3 Métodos de discretização

Embora se saiba que a discretização seja, algumas vezes, rejeitada como sendo ineficiente com relação às taxas de amostragem necessárias, em muitos casos sua utilização é justificável. Uma das possíveis razões para tal escolha é que no sentido de explorar a precisão do projeto discreto, devem pré-existir decisões, tais como, a frequência de amostragem e, possivelmente, sobre as variações de amostragem (amostragem não simultânea de todas as entradas), ou ainda, sobre atrasos computacionais, os quais, devem ser conhecidos a priori [HANSELMANN, 1987].

Outra situação é quando o sistema de controle analógico é substituído pelo sistema de controle de tempo discreto<sup>2</sup>. Neste caso, o controlador de tempo contínuo existe e está prontamente disponível. Fato este que, por si só, constitui-se em uma motivação natural para se tentar converter o controlador de tempo contínuo, diretamente, em um controlador de tempo discreto [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.293].

Também utiliza-se frequentemente a discretização em aplicações de filtros digitais, para os quais os projetistas utilizam o conhecimento do projeto de filtros analógicos para projetá-lo e, em seguida, a partir da função de transferência de tempo contínuo do filtro, obtém-se sua representação equivalente de tempo discreto [FRANKLIN, 1998, c.6].

Diversos são os métodos utilizados para aproximar ou converter uma representação de tempo de contínuo em sua equivalente de tempo discreto. Tais aproximações são obtidas ou por técnicas de diferenciação, ou por técnicas de integração ou ainda por ambas. A seguir serão abordados alguns destes métodos.

#### 4.3.1 Técnicas de discretização baseadas em diferenciação

Da definição da derivada de uma função  $\mathbf{x}(t)$ , denotada por  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  e para pequenos valores de  $T$  pode-se fazer as seguintes aproximações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \approx \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \quad (4.5)$$

<sup>2</sup>Na literatura sistema de controle de tempo discreto também é chamado de sistema de controle via computador.

ou, de outro modo, por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - T)}{T} \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - T)}{T} \quad (4.6)$$

A partir das aproximações da derivada da função  $\mathbf{x}(t)$  dadas pelas equações (4.5) e (4.6) e da definição dos operadores deslocamento  $q$  e diferenciação  $p$  dados, respectivamente, por  $\mathbf{x}(t + T) \triangleq q\mathbf{x}(t)$  e  $\dot{\mathbf{x}}(t) \triangleq p\mathbf{x}(t)$ , as equações (4.5) e (4.6) resultam, respectivamente, em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = p\mathbf{x}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T} = \frac{q\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)}{T} = \left(\frac{q - 1}{T}\right)\mathbf{x}(t) \quad (4.7)$$

e

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = p\mathbf{x}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - T)}{T} = \frac{\mathbf{x}(t) - q^{-1}\mathbf{x}(t)}{T} = \left(\frac{q - 1}{qT}\right)\mathbf{x}(t) \quad (4.8)$$

donde, se conclui da equação (4.7) que

$$p \approx \frac{q - 1}{T} \Rightarrow q \approx 1 + pT \quad (4.9)$$

e da equação (4.8) que

$$p \approx \frac{q - 1}{qT} \Rightarrow q \approx \frac{1}{1 - pT} \quad (4.10)$$

além disso, como  $z = e^{sT}$  [JURY, 1958, p.38], então substituindo  $q$  por  $z$  e  $p$  por  $s$ , nas equações (4.9) e (4.10) [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.294], obtém-se, respectivamente:

$$z = e^{sT} \approx 1 + sT \Rightarrow s \approx \frac{z - 1}{T} \quad (4.11)$$

$$z = e^{sT} \approx \frac{1}{1 - sT} \Rightarrow s \approx \frac{z - 1}{zT} \quad (4.12)$$

A aproximação expressa na equação (4.11) é comumente chamada de método de Euler e representa a aproximação da série de potências de  $e^{sT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sT)^n}{n!}$ , de ordem infinita, pelos seus dois primeiros termos. Neste caso, o semi-plano esquerdo,  $Re(s) \leq 0$ , região de estabilidade da transformada de Laplace, é mapeado no domínio  $z$  sobre o disco unitário, isto é,  $Re(z) \leq 1$ . Já a aproximação referente à equação (4.12) mapeia o semi-plano  $Re(s) \leq 0$  no disco,  $[Re(z) - \frac{1}{2}]^2 + [Im(z)]^2 = \frac{1}{4}$ , o qual tem raio  $\frac{1}{2}$  e é centrado no ponto  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

As equações (4.11) e (4.12) também podem ser obtidas por integração numérica como mostrado em Franklin [FRANKLIN, 1998, p.189].

Outra aproximação comum é a chamada transformação bilinear, também conhecida como aproximação de Tustin [JURY, 1958, p.170], [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.294], a qual é dada por

$$z = e^{sT} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right) \quad (4.13)$$

e corresponde ao método trapezoidal para integração numérica [FRANKLIN, 1998, p.191] e [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.74]. A transformação bilinear mapeia o plano  $Re(s) \leq 0$  no disco de raio unitário centrado na origem. Isto significa que, sistemas de tempo contínuo estáveis serão transformados em sistemas equivalentes de tempo discreto estáveis, assim como, sistemas de tempo contínuo instáveis serão transformados em sistemas equivalentes de tempo discreto instáveis [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.295].

Utilizando-se as equações (4.11), (4.12) e (4.13) obtém-se diretamente a discretização ou aproximação do sistema contínuo para o discreto, substituindo-se o  $s$  dado nas referidas equações diretamente na função de transferência  $G(s)$  do sistema a ser discretizado, isto é:

$$H(z) \approx G(s) \Big|_{s=\ln z/T} \quad (4.14)$$

### 4.3.2 Técnicas de discretização baseadas em integração

Técnicas de integração também podem ser utilizadas para se obter os mesmos resultados precedentemente apresentados. Os desenvolvimentos matemáticos empregados em tais técnicas são mostrados em Franklin [FRANKLIN, 1998, p.189], bem como, em Kuo [KUO, 1992, p.424] e Ragazzini [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958].

### 4.3.3 Métodos de discretização no domínio do tempo

Dois métodos utilizados para discretizar ou aproximar representações dinâmicas de tempo contínuo, em espaço de estados, em representações de tempo discreto, também em espaço de estados, são as invariâncias à rampa e ao degrau. Tais métodos serão descritos a seguir.

#### Método da invariância à rampa

Invariância à rampa é o nome designado à discretização de um sistema de tempo contínuo, de dinâmica representada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.16)$$

cujo sinal de entrada  $\mathbf{u}(t)$  varia segundo uma rampa entre instantes de amostragem  $t_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , consecutivos. Ou seja,  $\mathbf{u}(t)$  varia segundo uma rampa ao longo do intervalo de tempo de cada período de amostragem  $T_k = t_{k+1} - t_k$ .

Da integração da equação (4.15) ao longo de um período de amostragem  $T_k = t_{k+1} - t_k$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{k+1}) &= \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \Gamma_0(t_{k+1}, t_k)\mathbf{u}(t_k) + \frac{1}{T_k}\Gamma_1(t_{k+1}, t_k) [\mathbf{u}(t_{k+1}) - \mathbf{u}(t_k)] \\ &= \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \frac{1}{T_k}\Gamma_1(t_{k+1}, t_k)\mathbf{u}(t_{k+1}) + \left[ \Gamma_0(t_{k+1}, t_k) - \frac{1}{T_k}\Gamma_1(t_{k+1}, t_k) \right] \mathbf{u}(t_k)\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde:

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)} = e^{\mathbf{A}T_k} \quad (4.18)$$

$$\Gamma_0(t_{k+1}, t_k) = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} = \int_0^{T_k} e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \quad (4.19)$$

$$\Gamma_1(t_{k+1}, t_k) = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{\mathbf{A}s} (t_{k+1} - t_k - s) ds \mathbf{B} = \int_0^{T_k} e^{\mathbf{A}s} (T_k - s) ds \mathbf{B} \quad (4.20)$$

que é um sistema variante no tempo desde que  $T_k$  seja variante no tempo. Por outro lado, se  $t_k = kT$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , onde  $T = t_{k+1} - t_k$  é o período de amostragem invariante no tempo, as equações (4.17)-(4.20), reduzem a [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.258]:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(kT + T) &= \Phi\mathbf{x}(kT) + \Gamma_0\mathbf{u}(kT) + \frac{1}{T}\Gamma_1 [\mathbf{u}(kT + T) - \mathbf{u}(kT)] \\ &= \Phi\mathbf{x}(kT) + \frac{1}{T}\Gamma_1\mathbf{u}(kT + T) + \left[ \Gamma_0 - \frac{1}{T}\Gamma_1 \right] \mathbf{u}(kT)\end{aligned}\quad (4.21)$$

onde:

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad (4.22)$$

$$\Gamma_0 = \int_0^T e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \quad (4.23)$$

$$\Gamma_1 = \int_0^T e^{\mathbf{A}s} (T - s) ds \mathbf{B} \quad (4.24)$$

Naturalmente, reescrevendo a equação (4.16) com  $t = t_k = kT$ , juntamente com a equação (4.21), obtém-se:

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi\mathbf{x}(kT) + \frac{1}{T}\Gamma_1\mathbf{u}(kT + T) + \left[ \Gamma_0 - \frac{1}{T}\Gamma_1 \right] \mathbf{u}(kT) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (4.26)$$

as quais, após aplicação da transformada z resultam:

$$z\mathbf{X}(z) = \Phi\mathbf{X}(z) + \left[ \frac{\Gamma_1}{T}z + \Gamma_0 - \frac{\Gamma_1}{T} \right] \mathbf{U}(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \left[ \frac{\Gamma_1}{T}(z - 1) + \Gamma_0 \right] \mathbf{U}(z) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \quad (4.28)$$

Substituindo a equação (4.27) na equação (4.28), obtém-se que  $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{U}(z)$ , onde  $\mathbf{H}(z)$  é a função de transferência e é dada por:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \left[ \frac{\Gamma_1}{T}(z - 1) + \Gamma_0 \right] + \mathbf{D} \quad (4.29)$$

Neste caso, quando o sistema amostrado for um integrador, cuja função de transferência é  $G(s) = 1/s$ , tem-se que  $\mathbf{A} = \mathbf{D} = 0$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{C} = 1$  [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.259]. Por conseguinte, a equação (4.29) resulta em

$$H(z) = (z - 1)^{-1} \left[ \frac{T^2}{2T}(z - 1) + T \right] = \frac{T}{2} \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right) \quad (4.30)$$

que é a transformação bilinear. Contudo, evidentemente, para cada função de transferência  $G(s)$  utilizada, obtém-se da equação (4.29) um  $H(z)$ .

**Observação 4.1 (Discretização baseada na invariância à rampa)** *O método de discretização da invariância à rampa é equivalente ao método de discretização baseado em segurador de ordem um (do inglês, First-Order Hold - FOH) preditivo. Além disso, devido à natureza preditiva (veja equações (4.17) ou (4.21), nas quais o sinal de entrada, respectivamente,  $\mathbf{u}(t_{k+1})$  ou  $\mathbf{u}(kT + T)$ , tem ação futura da invariância à rampa, deve existir um atraso no controlador [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.298].*

### Método da invariância ao degrau

Assim como o método da invariância à rampa, o método da invariância ao degrau é utilizado para se obter representações discretas de sistemas cujas dinâmicas são como a apresentada nas equações (4.15) e (4.16). Neste caso, o sinal de entrada é um sinal constante por partes (*piecewise*) e muda de valor nos instantes de amostragem. Em outras palavras, o sinal de entrada é constante ao longo de um intervalo de amostragem. Por esta razão, tal método é denominado de invariância ao degrau [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.297]. Além disso, com a utilização de tal método é possível obter a representação de tempo discreto variante no tempo, o que pode vir a ser uma vantagem, sobretudo, quando se desejar obter a representação de tempo discreto com intervalos de amostragem variantes no tempo. Outra vantagem da utilização da invariância ao degrau é a da causalidade do sinal de entrada da representação de tempo discreto, que não tem ação preditiva, não causal, como verificado no método da invariância à rampa. Tal razão, por si só, justifica a escolha da invariância ao degrau como método de discretização, doravante utilizado.

## 4.4 Discretização da planta

Do ponto vista da representação dinâmica de tempo contínuo ou de tempo discreto os modelos de plantas podem ou não ser representados com atraso. Além disso, relativamente às representações de tempo discreto, tais dinâmicas podem evoluir com períodos de amostragem dos sensores (PAS) invariantes<sup>3</sup> ou com intervalos de amostragem dos sensores (IAS) variantes no tempo<sup>4</sup>.

Neste sentido, a obtenção dos modelos equivalentes discretos de tais plantas, considerando-se ou não a existência de atraso, com PAS invariante no tempo ou com IAS variantes no tempo, são os objetos de estudo desta seção. Como hipótese adicional, será considerado que quando o atraso for não nulo este deve ser menor que um PAS/IAS, independentemente, das naturezas dos PAS/IAS e dos atrasos.

### 4.4.1 Com PAS invariante no tempo e $\tau_k = 0$

O modelo da representação dinâmica da planta em espaço de estados com atraso de controle nulo, isto é,  $\tau_k = 0$ , é:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.32)$$

Pode-se obter o modelo equivalente de tempo discreto, ou simplesmente, modelo equivalente discreto da planta, a partir das equações (4.31) e (4.32). A solução geral da equação (4.31) no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  é:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s') ds' \quad (4.33)$$

Para resolver a integral à direita da igualdade da equação (4.33) deve-se observar, a partir da Figura 4.3, que o sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  na entrada da planta é contínuo e constante por partes<sup>5</sup>. Dessa maneira, na equação (4.33)  $\mathbf{u}(s')$  é constante no intervalo  $[t_k^s, t]$  e portanto a integral da equação (4.33) é resolvida como segue:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s') ds' = \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.34)$$

<sup>3</sup>O caso clássico e mais utilizado de amostragem invariante no tempo é a amostragem convencional [KALMAN; BERTRAM, 1959], também, recentemente, chamada de amostragem Riemann [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002]. Neste caso, o período de amostragem dos sensores é invariante no tempo.

<sup>4</sup>Quando os IAS são variantes no tempo os instantes de amostragem são, frequentemente, aleatórios. Neste caso, denomina-se tal amostragem de amostragem aleatória [KALMAN; BERTRAM, 1959], também chamada de amostragem de Lebesgue [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002].

<sup>5</sup>Deve-se salientar que o sinal de erro  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  na entrada do controlador é impulsivo. Assim, o valor de cada amostra de  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  fica armazenada no *buffer* do controlador até que uma nova aquisição seja realizada.

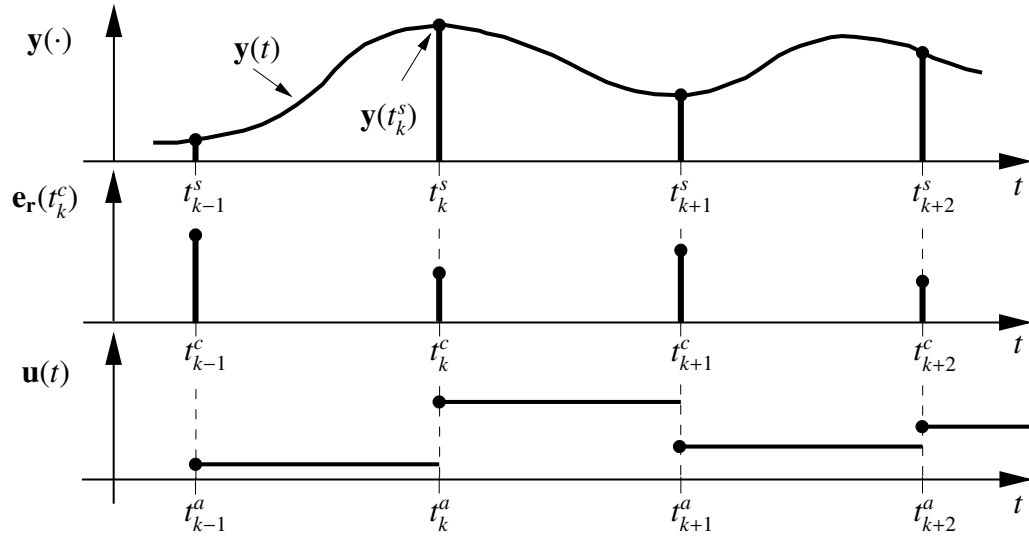


Figura 4.3: Relações entre os sinais: de saídas da planta  $\mathbf{y}(t)$  de tempo contínuo e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Para resolver a integral da equação (4.34) deve-se fazer a seguinte substituição  $s = t - s'$ , donde resulta que  $ds = -ds'$  e os novos limites de integração passam a ser  $s = t - s' \Big|_{s'=t_k^s} = t - t_k^s$  e  $s = t - s' \Big|_{s'=t} = t - t = 0$ , cuja integral resulta em:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} ds' = - \int_{t-t_k^s}^0 e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_0^{t-t_k^s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.35)$$

substituindo a equação (4.35) na equação (4.33) resulta:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{t-t_k^s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.36)$$

Finalmente, como o modelo de amostragem da planta, apresentado na Figura 4.3, é invariante no tempo e do tipo convencional, a equação (4.36) pode ser reescrita com  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t = t_{k+1}^s = k\tau_s + \tau_s, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , o que reduz a equação (4.36) a:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(k\tau_s) \quad (4.37)$$

que reescrita de forma simplificada, conjuntamente com a equação (4.32) no instante  $k\tau_s$  obtém-se, respectivamente:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_p \mathbf{u}(k\tau_s) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s), \quad (4.39)$$

onde:

$$\Phi_{\mathbf{p}} = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}\tau_s} \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}} = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (4.41)$$

que é o modelo equivalente discreto da planta de tempo contínuo das equações (4.31) e (4.32). O comportamento entre amostras, ou seja, nos instantes  $t_k^s$  da sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$ , com  $t_k^s = t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , pode ser obtido a partir da equação (4.36).

#### 4.4.2 Com IAS variante no tempo e $\tau_k = 0$

Quando a amostragem de um sinal  $\mathbf{y}(t)$  é realizada utilizando-se de alguma técnica de cruzamento de nível, o resultado obtido é uma sequência de amostras  $\{\mathbf{y}(t_k^s)\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  cujos instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$  são aleatórios. Por conseguinte, como o intervalo de amostragem dos sensores é, por definição,  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$ , tem-se que os intervalos de amostragem  $\tau_{s_k}$  são os termos, também aleatórios, da sequência  $\{\tau_{s_k}\}$ . Para este caso, uma ilustração semelhante à apresentada na Figura 4.3 é mostrada na Figura 4.4. Nesta figura, o termo  $q$ , definido no Capítulo 2, equação (2.8), representa um quantum.

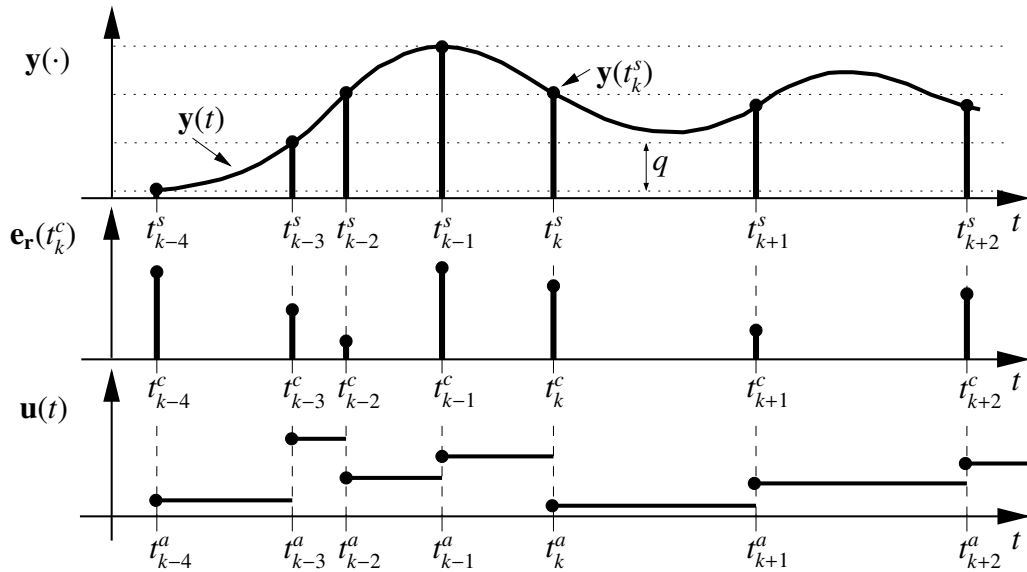


Figura 4.4: Relações entre os sinais: de saídas da planta  $\mathbf{y}(t)$  de tempo contínuo e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Neste caso, pode-se obter o modelo equivalente discreto da planta, cuja dinâmica é apresentada nas equações (4.31) e (4.32), da mesma maneira que fora obtida até a equação (4.36) da subseção precedente. Equação esta, por comodidade, repetida a seguir:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(t-t_k^s)} \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t_k^s) + \int_0^{t-t_k^s} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.42)$$



a qual, para  $t = t_{k+1}^s$  e utilizando-se o fato que  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$ , a equação (4.42) resulta em:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = e^{\mathbf{A}_p \tau_{s_k}} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{\tau_{s_k}} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.43)$$

Por fim, reescrevendo a equação (4.43) de forma simplificada e a equação (4.32) no instante  $t_k^s$  obtém-se, respectivamente:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k}) \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_p(\tau_{s_k}) \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s), \quad (4.45)$$

onde:

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_p \tau_{s_k}} \quad (4.46)$$

$$\Gamma_p(\tau_{s_k}) = \int_0^{\tau_{s_k}} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.47)$$

que é o modelo equivalente discreto da planta de tempo contínuo das equações (4.31) e (4.32) com intervalo de amostragem  $\tau_{s_k}$  variante no tempo de forma estocástica. O comportamento entre amostras, ou seja, nos instantes  $t_k^s$  da sequência de instantes de amostragem  $\{t_k^s\}$ , com  $t_k^s = t_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , pode ser obtido a partir da equação (4.42).

### 4.4.3 Com PAS invariante no tempo e $\tau_s \geq \tau \neq 0$

A representação dinâmica da planta, em espaço de estados, considerando-se que o período de amostragem dos sensores  $\tau_s$  e o atraso de controle  $\tau$  invariantes no tempo e menor do que ou igual a  $\tau_s$ , isto é,  $\tau \neq 0$  e  $\tau \leq \tau_s$  ou, equivalentemente,  $\tau_s \geq \tau \neq 0$ , é da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.49)$$

A solução geral da equação (4.48) no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  é:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' \quad (4.50)$$

A integral à direita da igualdade da equação (4.50) é resolvida em virtude do efeito ZOH sobre o sinal  $\mathbf{u}(t - \tau)$  da entrada da planta, o que o torna constante nos intervalos  $[t_k^s, t_k^s + \tau]$  e  $[t_k^s + \tau, t]$ , como ilustrado na Figura 4.5 e de onde resulta que:

$$\begin{aligned} \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' &= \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau-\tau+\tau_s-\tau_s-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \\ &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau)} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau-\tau_s-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \end{aligned} \quad (4.51)$$

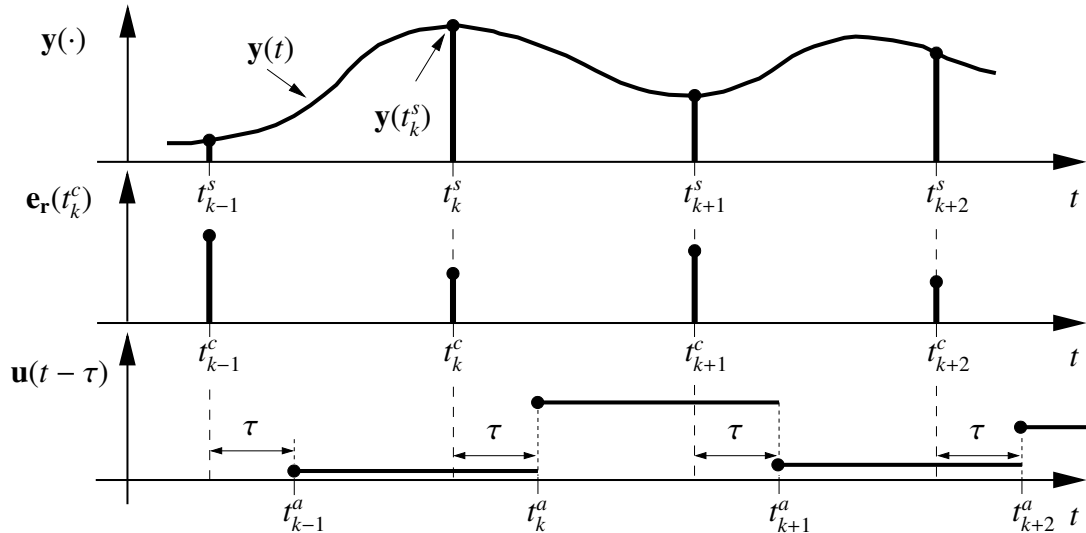


Figura 4.5: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $e_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $u(t - \tau)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Similarmente ao caso precedente, para resolver as integrais à direita da igualdade da equação (4.51) deve-se fazer, para a primeira integral, após a igualdade, a seguinte substituição  $s = t + \tau - \tau_s - s'$ , donde resulta que  $ds = -ds'$  e os novos limites de integração são  $s = t + \tau - \tau_s - s' \Big|_{s'=t_k^s} = t - t_k^s - \tau_s + \tau$  e  $s = t + \tau - \tau_s - s' \Big|_{s'=t_k^s + \tau} = t + \tau - \tau_s - t_k^s - \tau = t - t_k^s - \tau_s$ . Analogamente, para a segunda integral, após a igualdade da equação (4.51), correspondentemente, a substituição  $s = t - s''$ , donde resulta que  $ds = -ds''$  e os novos limites de integração passam a ser dados por  $s = t - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau} = t - t_k^s - \tau$  e  $s = t - s'' \Big|_{s''=t} = t - t = 0$ , que substituídos nas respectivas integrais à direita da igualdade da equação (4.51), resulta:

$$\int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau-\tau_s-s')} ds' = - \int_{t-t_k^s-\tau_s+\tau}^{t-t_k^s-\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_{t-t_k^s-\tau_s}^{t-t_k^s-\tau_s+\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.52)$$

$$\int_{t_k^s + \tau}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' = - \int_{t-t_k^s-\tau}^0 e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_0^{t-t_k^s-\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.53)$$

Daí, substituindo as equações (4.52) e (4.53) na equação (4.51), obtém-se:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau)} \int_{t-t_k^s-\tau_s}^{t-t_k^s-\tau_s+\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_0^{t-t_k^s-\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.54)$$

e, finalmente, substituindo a equação (4.54) na equação (4.50), obtém-se:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{t-t_k^s-\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau)} \int_{t-t_k^s-\tau_s}^{t-t_k^s-\tau_s+\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.55)$$

e como foi assumido que o intervalo de amostragem dos sensores e o atraso de controle são invariantes no tempo, a equação (4.55) pode ser reescrita com  $t_{k-1}^s = (k-1)\tau_s$ ,  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t = t_{k+1}^s = (k+1)\tau_s$ , o que resulta em:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \int_0^{\tau_s-\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(k\tau_s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau)} \int_0^{\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) \quad (4.56)$$

Neste caso, pode-se observar que a equação (4.56) é da forma:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_{p0} \mathbf{u}(k\tau_s) + \Gamma_{p1} \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) \quad (4.57)$$

onde:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.58)$$

$$\Gamma_{p0} = \int_0^{\tau_s-\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.59)$$

$$\Gamma_{p1} = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau)} \int_0^{\tau} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.60)$$

Reescrevendo a equação (4.49) no instante  $k\tau_s$ , obtém-se:

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (4.61)$$

Por fim, o sistema de equações discretas equivalente ao sistema de equações contínuas da planta é explicitado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_{p0} \mathbf{u}(k\tau_s) + \Gamma_{p1} \mathbf{u}(k\tau_s - \tau_s) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (4.63)$$

onde as matrizes  $\Phi_p$ ,  $\Gamma_{p0}$  e  $\Gamma_{p1}$  da equação (4.62) são, respectivamente, dadas pelas equações (4.58), (4.59) e (4.60). Além disso, o comportamento entre amostras, ou seja, nos instantes  $t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , pode ser obtido a partir da equação (4.55). Neste caso, a malha é fechada sempre e apenas nos instantes  $t_k^a$  da sequência  $\{t_k^a\}$  ou, de outro modo nos instantes  $t_k^a + \tau_k^a$  da sequência  $\{t_k^a + \tau_k^a\}$ , desde que  $\tau_k^a$  seja, a rigor, considerado não nulo. Para efeito de análise, a primeira opção é mais simples, razão pela qual, é a utilizada neste texto.

#### 4.4.4 Com PAS invariante no tempo $\tau_s \geq \tau_k \neq 0$

Quando o intervalo de amostragem dos sensores é invariante no tempo  $\tau_s$  e o atraso de controle  $\tau_k$  é variante no tempo e menor do que ou igual a  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_k \neq 0$  e  $\tau_k \leq \tau_s$  ou, equivalente-

mente,  $\tau_s \geq \tau_k \neq 0$ , o modelo da representação dinâmica da planta, em espaço de estados, é da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k) \quad (4.64)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.65)$$

A dedução do modelo equivalente discreto dinâmico da planta é obtido exatamente como realizado na subseção precedente. Duas mudanças ocorre deste para aquele caso. A primeira delas se dá na Figura 4.5 que é modificada para a Figura 4.6. Por fim, a segunda mudança ocorre no próprio modelo equivalente discreto que passa a ser variante no tempo, como evidenciado nas equações seguintes:

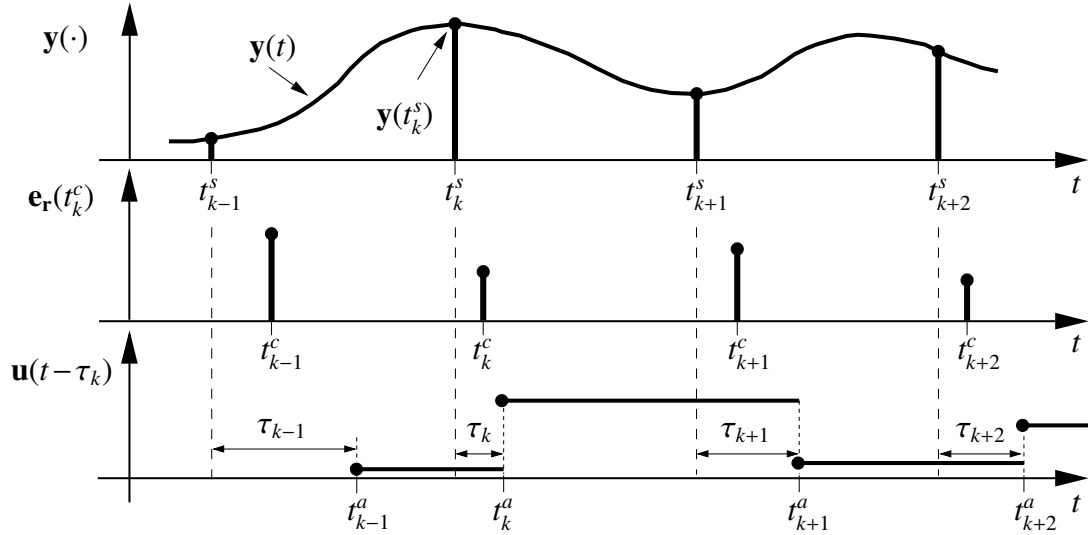


Figura 4.6: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_k) \mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p1}(\tau_k) \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.66)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.67)$$

onde:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.68)$$

$$\Gamma_{p0}(\tau_k) = \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.69)$$

$$\Gamma_{p1}(\tau_k) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.70)$$

#### 4.4.5 Com IAS variante no tempo $\tau_{s_k} \geq \tau_k \neq 0$

Quando a amostragem de um sinal  $\mathbf{y}(t)$  é realizada utilizando-se de alguma técnica de cruzamento de nível, os intervalos de amostragem  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , da sequência de

intervalos de amostragem dos sensores  $\{\tau_{s_k}\}$  serão aleatórios. Além disso, considerando-se o modelo da planta com atraso de controle  $\tau_k$  não nulo, isto é,  $\tau_k \neq 0$  variante no tempo e  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Para este cenário, uma ilustração semelhante à apresentada na Figura 4.5 é mostrada a seguir na Figura 4.7, na qual,  $q$  definido na equação (2.8), representa um quantum.

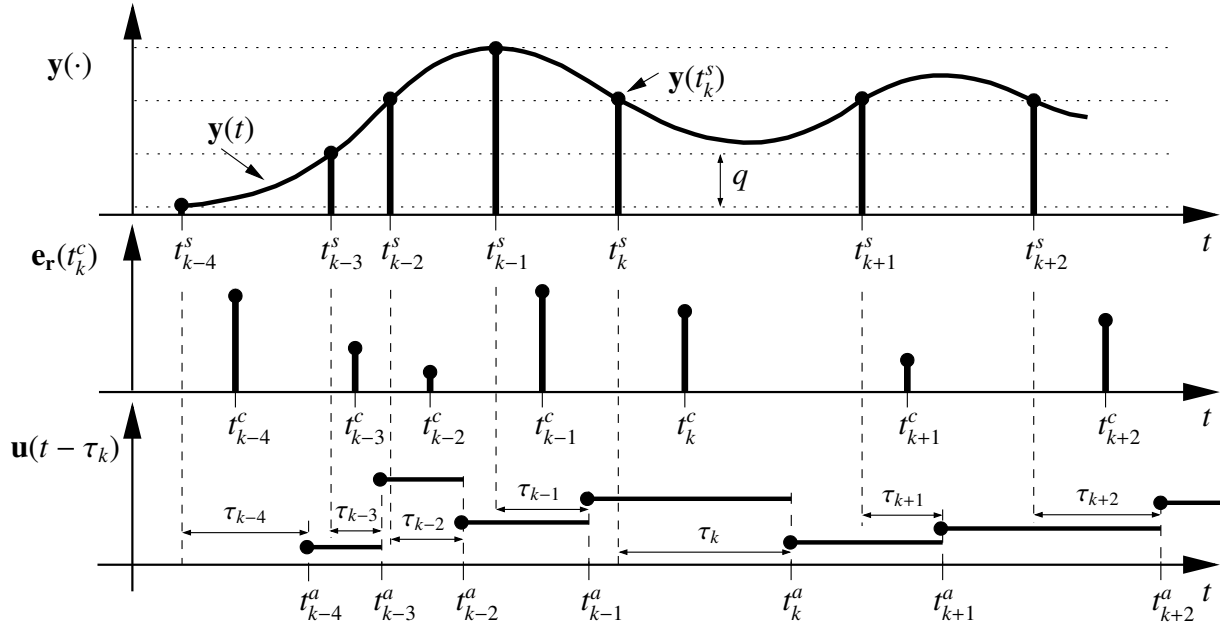


Figura 4.7: Relações entre os sinais: de saída da planta  $\mathbf{y}(t)$  de tempo contínuo e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e sinal de controle de tempo contínuo  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  na entrada da planta, onde  $\tau_k = \tau_{r_k} + \tau_{d_k}$ , com  $\tau_{r_k} = \tau_k^s + \tau_k^{sc}$  e  $\tau_{d_k} = \tau_k^c + \tau_k^{ca} + \tau_k^a$ , para NCSs de topologia S-C-A.

Para o cenário em questão a representação dinâmica da planta, em espaço de estados, é análoga à dada pelas equações (4.48) e (4.49), com a diferença que o atraso de controle  $\tau_k$  é variante no tempo. Dessa maneira, tal representação é da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k) \quad (4.71)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.72)$$

e a solução geral da equação (4.71) no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s$  é

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_k) ds' \quad (4.73)$$

onde, a integral à direita da igualdade da equação (4.73) é resolvida considerando-se que o sinal  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  da entrada da planta, na presença do ZOH, seja constante nos intervalos  $[t_k^s, t_k^s + \tau_k]$  e  $[t_k^s + \tau_k, t]$ , como ilustrado na Figura 4.7. Dessa forma, a solução da referida integral é:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_k) ds' = \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_k} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau_k-\tau_k+\tau_{s_k}-\tau_{s_k}-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau_k}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s)$$

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_k) ds' = e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k}-\tau_k)} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_k} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau_k-\tau_{s_k}-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau_k}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.74)$$

Analogamente ao caso precedente, para resolver as integrais à direita da igualdade da equação (4.74) deve-se fazer, para a primeira integral, após a igualdade, a seguinte substituição  $s = t + \tau_k - \tau_{s_k} - s'$ , donde resulta que  $ds = -ds'$  e os novos limites de integração são  $s = t + \tau_k - \tau_{s_k} - s' \Big|_{s'=t_k^s} = t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_k$  e  $s = t + \tau_k - \tau_{s_k} - s' \Big|_{s'=t_k^s + \tau_k} = t + \tau_k - \tau_{s_k} - t_k^s - \tau_k = t - t_k^s - \tau_{s_k}$ . Analogamente, para a segunda integral, após a igualdade da equação (4.74), correspondentemente, a substituição  $s = t - s''$ , donde resulta que  $ds = -ds''$  e os novos limites de integração passam a ser dados por  $s = t - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau_k} = t - t_k^s - \tau_k$  e  $s = t - s'' \Big|_{s''=t} = t - t = 0$ , que substituídos nas respectivas integrais à direita da igualdade da equação (4.74) resulta:

$$\int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_k} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau_k-\tau_{s_k}-s')} ds' = - \int_{t-t_k^s-\tau_{s_k}+\tau_k}^{t-t_k^s-\tau_{s_k}} e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_{t-t_k^s-\tau_{s_k}}^{t-t_k^s-\tau_{s_k}+\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.75)$$

$$\int_{t_k^s + \tau_k}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' = - \int_{t-t_k^s-\tau_k}^0 e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_0^{t-t_k^s-\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.76)$$

Daí, substituindo as equações (4.75) e (4.76) na equação (4.74), resulta em:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_k) ds' = e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k}-\tau_k)} \int_{t-t_k^s-\tau_{s_k}}^{t-t_k^s-\tau_{s_k}+\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_0^{t-t_k^s-\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.77)$$

e, finalmente, substituindo a equação (4.77) na equação (4.73), obtém-se:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{t-t_k^s-\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k}-\tau_k)} \int_{t-t_k^s-\tau_{s_k}}^{t-t_k^s-\tau_{s_k}+\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.78)$$

por fim, fazendo  $t = t_{k+1}^s$  e, além disso, como, por definição  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s$ , que substituídos na equação (4.78) resulta

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = e^{\mathbf{A}_p \tau_{s_k}} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{\tau_{s_k}-\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k}-\tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.79)$$

Neste caso, pode-se observar que a equação (4.79) é da forma:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k}) \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_{s_k}, \tau_k) \mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p1}(\tau_{s_k}, \tau_k) \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.80)$$

onde:

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_p \tau_{s_k}} \quad (4.81)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_0}(\tau_{s_k}, \tau_k) = \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.82)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_1}(\tau_{s_k}, \tau_k) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k} - \tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.83)$$

Reescrevendo a equação (4.72) no instante  $t_k^s$  resulta:

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.84)$$

Dessa maneira, o sistema de equações discretas equivalente ao sistema de equações contínuas da planta é explicitado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k}) \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{\mathbf{p}_0}(\tau_{s_k}, \tau_k) \mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{\mathbf{p}_1}(\tau_{s_k}, \tau_k) \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.85)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.86)$$

onde as matrizes  $\Phi_p(\tau_{s_k})$ ,  $\Gamma_{\mathbf{p}_0}(\tau_{s_k}, \tau_k)$  e  $\Gamma_{\mathbf{p}_1}(\tau_{s_k}, \tau_k)$  da equação (4.85) são dadas, respectivamente, pelas equações (4.81), (4.82) e (4.83). Para este cenário, o comportamento entre amostras, isto é, nos instantes  $t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , da sequência  $\{t_k^a\}$  pode ser obtido a partir da equação (4.78).

## 4.5 Planta submetida a atrasos maiores que os IAS e SPP

Quando a planta é submetida a atrasos de controle de valores superiores aos dos intervalos de amostragem dos sensores (IAS)  $\tau_{s_k}$  e o NCS opera sem perda de pacotes (SPP), quatro situações são possíveis. A primeira é quando o atraso de controle  $\tau$  e o IAS são ambos invariantes no tempo. Neste caso, o IAS é denominado período de amostragem do sensor (PAS)  $\tau_s$  e é invariante no tempo. A segunda ocorre quando o IAS é invariante no tempo  $\tau_s$  e o atraso de controle  $\tau_k$  é variante no tempo. A terceira ocorre quando ambos, atraso de controle  $\tau_k$  e o IAS  $\tau_{s_k}$ , são variantes no tempo. A quarta e última opção ocorre quando o IAS  $\tau_{s_k}$  é variante no tempo e o atraso de controle  $\tau$  é invariante no tempo. As três primeiras situações são de interesse direto para esta tese e seus modelos equivalentes discretos serão apresentados a seguir.

### 4.5.1 Com atraso e IAS invariantes no tempo

Quando o atraso de controle  $\tau$  é invariante no tempo e maior do que o período de amostragem dos sensores  $\tau_s$ ,  $\tau > \tau_s$ , a modelagem de  $\tau$  é realizada como a soma de duas parcelas. Uma múltipla de  $\tau_s$ , denotada por  $\tau^i$  e outra sub-múltipla de  $\tau_s$ , denotada por  $\tau^f$ , com<sup>6</sup>  $0 < \tau^f < \tau_s$ . Em resumo,

$$\tau = \tau^i + \tau^f \quad (4.87)$$

<sup>6</sup>Os sobrescritos  $i$  e  $f$  de  $\tau$  significam, respectivamente, inteiro e fracionário.

e para  $b \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\tau^i$  e  $\tau^f$  são definidos segundo as equações<sup>7</sup>:

$$\tau^i = (b - 1)\tau_s, \quad \text{onde } b = \left\lceil \frac{\tau}{\tau_s} \right\rceil \quad (4.88)$$

$$\tau^f = \tau - \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_s} \right\rfloor \tau_s \quad (4.89)$$

Para ilustrar as definições precedentes, considera-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.1 (Obtendo  $\tau^i$  e  $\tau^f$  invariantes no tempo)** Considere que a planta seja submetida a um atraso de controle  $\tau = 4,8$  ms. Determine  $\tau^i$  e  $\tau^f$ , dado que,  $\tau_s = 2,0$  ms.

**Solução 4.1** A partir dos valores de  $\tau_s = 2,0$  ms,  $\tau = 4,8$  ms e da equação (4.88) determina-se, inicialmente, o valor de  $b$  e em seguida o valor de  $\tau^i$ , logo:

$$b = \left\lceil \frac{4,8}{2,0} \right\rceil = \lceil 2,4 \rceil = 3,0, \quad \text{donde resulta que } \tau^i = (3 - 1)2 = 4,0 \text{ ms}$$

por fim, substituindo os valores de  $\tau = 4,8$  ms e de  $\tau_s = 2,0$  ms na equação (4.89), obtém-se  $\tau^f = 4,8 - \left\lfloor \frac{4,8}{2,0} \right\rfloor 2,0 = 4,8 - \lfloor 2,4 \rfloor 2,0 = 4,8 - 4,0 = 0,8$  ms.

Para o cenário preestabelecido e a partir do modelo dinâmico da planta na representação em espaço de estados, dado nas equações seguintes,

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau) \quad (4.90)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.91)$$

obtém-se a representação equivalente discreta do modelo da planta para  $\tau > \tau_s$ . Representação esta, obtida a partir da resolução da equação diferencial (4.90) no intervalo de tempo de um período de amostragem dos sensores das malhas [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.40]. A solução geral da equação (4.90), válida no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s$  é:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' \quad (4.92)$$

A integral à direita da igualdade da equação (4.92) é resolvida de forma que o sinal de entrada da planta  $\mathbf{u}(t - \tau)$ , seja constante nos intervalos  $[t_k^s, t_k^s + \tau^f]$  e  $[t_k^s + \tau^f, t]$ , como ilustrado na Figura 4.8, o que resulta em:

<sup>7</sup>O símbolo matemático  $\lfloor x \rfloor$  significa o piso de  $x$ , isto é, o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Por outro lado, o símbolo matemático  $\lceil x \rceil$  significa o teto de  $x$ , isto é, o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$  e  $\lceil 3,5 \rceil = 4$ .



$$\begin{aligned} \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' &= \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau^f} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau^f - \tau^f + \tau_s - \tau_s - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \\ &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau^f)} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau^f} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau^f - \tau_s - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \end{aligned} \quad (4.93)$$

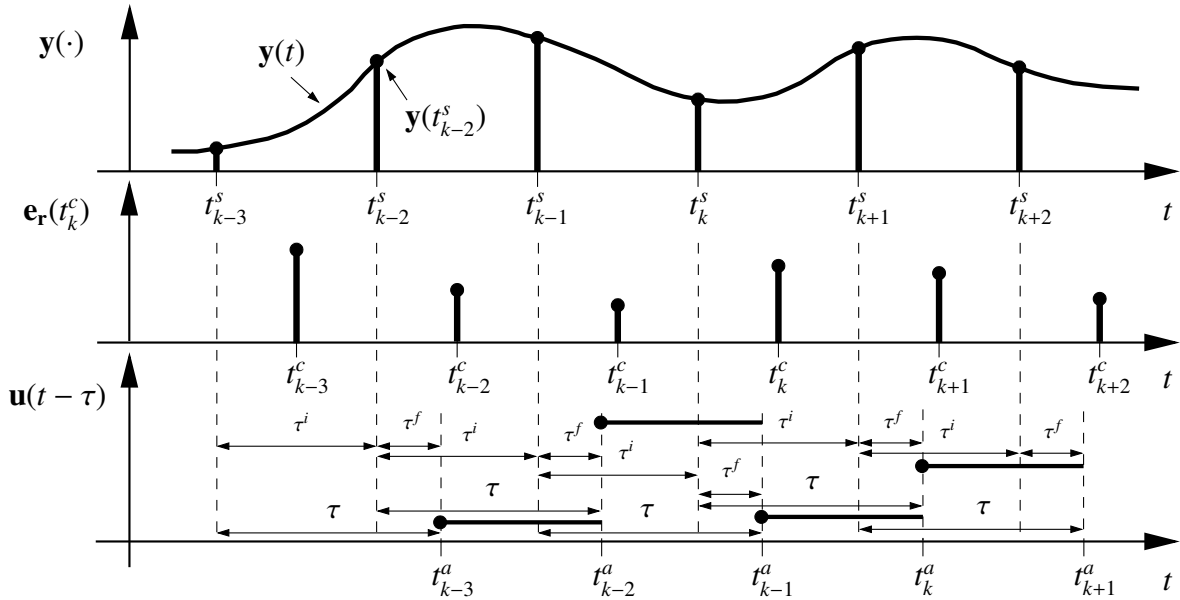


Figura 4.8: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $e_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $u(t - \tau)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

As duas últimas integrais à direita da igualdade da equação (4.93) são resolvidas fazendo-se para a penúltima integral a substituição  $s = t + \tau^f - \tau_s - s'$ , o que resulta em  $ds = -ds'$  e os limites de integração passam a ser  $s = t + \tau^f - \tau_s - s' \Big|_{s'=t_k^s} = t - t_k^s - \tau_s + \tau^f$  e  $s = t + \tau^f - \tau_s - s' \Big|_{s'=t_k^s + \tau^f} = t - t_k^s - \tau_s$ . Analogamente, para a última integral após a igualdade da equação (4.93) a substituição  $s = t - s''$ , o que resulta em  $ds = -ds''$  e os limites de integração passam a ser  $s = t - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau^f} = t - t_k^s - \tau^f$  e  $s = t - s'' \Big|_{s''=t} = 0$ , que substituídos nas respectivas integrais resultam:

$$\int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau^f} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau^f - \tau_s - s')} ds' = - \int_{t - t_k^s - \tau_s + \tau^f}^{t - t_k^s - \tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_{t - t_k^s - \tau_s}^{t - t_k^s - \tau_s + \tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.94)$$

$$\int_{t_k^s + \tau^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' = - \int_{t - t_k^s - \tau^f}^0 e^{\mathbf{A}_p s} ds = \int_0^{t - t_k^s - \tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \quad (4.95)$$

substituindo as integrais expressas nas equações (4.94) e (4.95) na equação (4.93) obtém-se:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau) ds' = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau^f)} \int_{t - t_k^s - \tau_s}^{t - t_k^s - \tau_s + \tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \int_0^{t - t_k^s - \tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (4.96)$$

que substituída na equação (4.92), resulta:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)}\mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{t-t_k^s-\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau^f)} \int_{t-t_k^s-\tau_s}^{t-t_k^s-\tau_s+\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.97)$$

Por fim, como  $\tau > \tau_s$ , das equações (4.88) e (4.89), a equação (4.97) pode ser reescrita fazendo-se nos argumentos de  $\mathbf{u}(\cdot)$  as substituições:  $t_{k-1}^s = k\tau_s - b\tau_s$  e  $t_k^s = k\tau_s - (b-1)\tau_s$  e nos argumentos de  $\mathbf{x}_p(\cdot)$  as substituições:  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t = t_{k+1}^s = k\tau_s + \tau_s$ , o que resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) &= e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \int_0^{\tau_s-\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(k\tau_s - (b-1)\tau_s) + \\ &+ e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau^f)} \int_0^{\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(k\tau_s - b\tau_s) \end{aligned} \quad (4.98)$$

e como a equação (4.98) é da forma:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_{p0} \mathbf{u}(k\tau_s - (b-1)\tau_s) + \Gamma_{p1} \mathbf{u}(k\tau_s - b\tau_s) \quad (4.99)$$

obtém-se da comparação direta das equações (4.98) e (4.99), que:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.100)$$

$$\Gamma_{p0} = \int_0^{\tau_s-\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.101)$$

$$\Gamma_{p1} = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s-\tau^f)} \int_0^{\tau^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.102)$$

Reescrevendo a equação (4.91) no instante  $k\tau_s$ , obtém-se:

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (4.103)$$

Dessa maneira, o sistema de equações de tempo discreto, equivalente ao sistema de equações de tempo contínuo da planta é dado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(k\tau_s + \tau_s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) + \Gamma_{p0} \mathbf{u}(k\tau_s - (b-1)\tau_s) + \Gamma_{p1} \mathbf{u}(k\tau_s - b\tau_s) \quad (4.104)$$

$$\mathbf{y}(k\tau_s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k\tau_s) \quad (4.105)$$

onde as matrizes  $\Phi_p$ ,  $\Gamma_{p0}$  e  $\Gamma_{p1}$  da equação (4.104) são dadas, respectivamente, pelas equações (4.100), (4.101) e (4.102). Para este caso, o comportamento entre amostras, isto é, nos instantes  $t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , da sequência  $\{t_k^a\}$ , pode ser obtido a partir da equação (4.97).

### 4.5.2 Com atrasos variantes no tempo e IAS invariante no tempo

Neste caso, os desenvolvimentos são todos idênticos aos da Subseção 4.5.1. Uma das poucas mudanças ocorre no modelo dinâmico da planta, na representação em espaço de estados, que passa a ser com atraso variante no tempo e, portanto, dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_{k-1}) \quad (4.106)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.107)$$

e em consequência do atraso variante no tempo a Figura 4.8 é adaptada e passa a ser como a Figura 4.9.

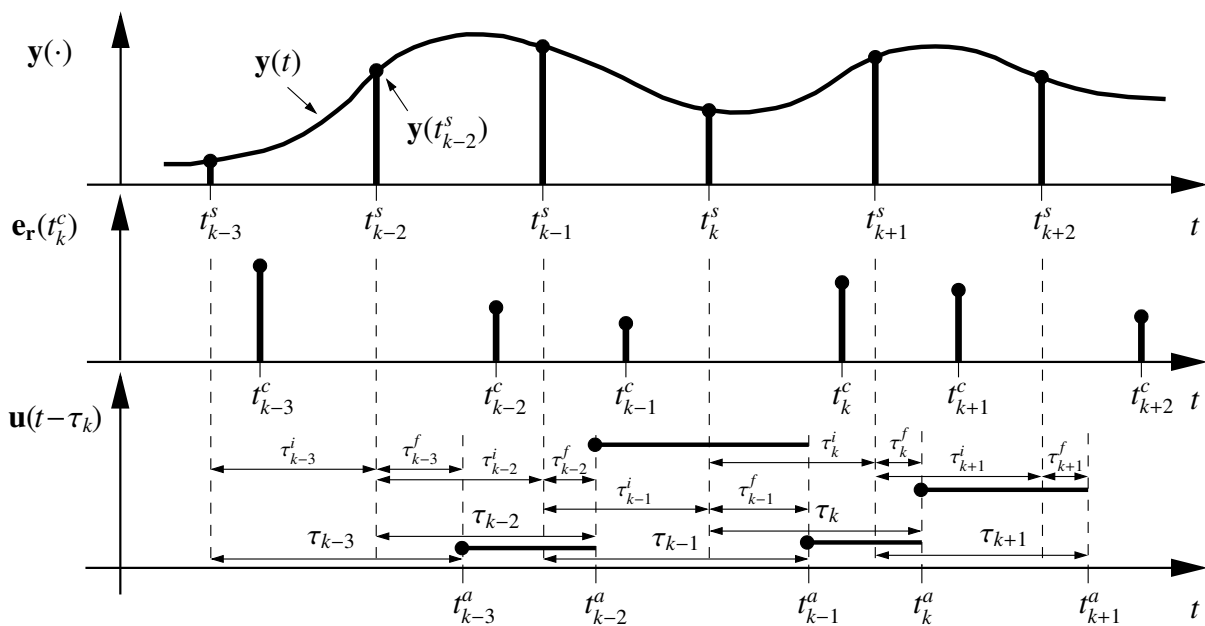


Figura 4.9: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $e_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $u(t - \tau_k)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Além disso, naturalmente, nos desenvolvimentos matemáticos deve-se acrescentar o subscrito  $k - 1$  nas variáveis  $\tau, \tau^i, \tau^f$  e  $b$ , as quais passam a ser  $\tau_{k-1}, \tau_{k-1}^i, \tau_{k-1}^f$  e  $b_{k-1}$ . Dessa maneira, o sistema de equações de tempo discreto, equivalente ao sistema de equações de tempo contínuo da planta, passa a ser dado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_{k-1}^f) \mathbf{u}(t_k^s - (b_{k-1} - 1)\tau_s) + \Gamma_{p1}(\tau_{k-1}^f) \mathbf{u}(t_k^s - b_{k-1}\tau_s) \quad (4.108)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.109)$$

onde

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.110)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_0}(\tau_{k-1}^f) = \int_0^{\tau_s - \tau_{k-1}^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.111)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_1}(\tau_{k-1}^f) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_{k-1}^f)} \int_0^{\tau_{k-1}^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.112)$$

com

$$\tau_{k-1}^f = \tau_{k-1} - \left\lfloor \frac{\tau_{k-1}}{\tau_s} \right\rfloor \tau_s \quad (4.113)$$

e

$$\tau_{k-1}^i = (b_{k-1} - 1)\tau_s, \quad \text{onde } b_{k-1} = \left\lceil \frac{\tau_{k-1}}{\tau_s} \right\rceil \quad (4.114)$$

onde, analogamente ao caso da subseção precedente,  $\tau_{k-1}$  é dado por

$$\tau_{k-1} = \tau_{k-1}^i + \tau_{k-1}^f \quad (4.115)$$

### 4.5.3 Com atrasos e IAS variantes no tempo

Quando o atraso de controle  $\tau_k$  e o intervalo de amostragem dos sensores  $\tau_{s_k}$  são ambos variantes no tempo e  $\tau_k > \tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , a modelagem de  $\tau_k$  também pode ser realizada como a soma de duas parcelas. Por conveniência considera-se que  $n, k \in \mathbb{Z}_+$  com  $n < k$ , denotem, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC. Além disso, o fechamento da malha relativamente à amostra  $y(t_n^s)$ , obtida no  $n$ -ésimo COAC, só se dá no decorrer do  $k$ -ésimo COAC. Para as condições preestabelecidas, o atraso de controle  $\tau_n$  do  $n$ -ésimo COAC é representado como a soma de duas parcelas. A primeira, denotada por  $\tau_n^i$ , é relativa à diferença entre os instantes de início do  $k$ -ésimo COAC  $t_k^s$  e o instante de início do  $n$ -ésimo COAC  $t_n^s$ . Seu valor é dado por

$$\tau_n^i = t_k^s - t_n^s = \sum_{m=n}^{k-1} \tau_{s_m} \quad (4.116)$$

e a segunda, denotada por  $\tau_n^f$  é obtida da igualdade  $\tau_n = \tau_n^i + \tau_n^f$  e da equação (4.116), o que resulta em:

$$\tau_n^f = \tau_n - \tau_n^i = \tau_n - \sum_{m=n}^{k-1} \tau_{s_m} \quad (4.117)$$

com  $0 < \tau_n^f < \tau_{s_k}$ .

Para ilustrar a discussão precedente, considera-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.2 (Obtendo  $\tau_n^i$  e  $\tau_n^f$  variantes no tempo)** Considere que  $n = 5$  e  $k = 7$  sejam, respectivamente, o  $n$ -ésimo e o  $k$ -ésimo COAC e seja  $\tau_n = 3,8$  ms. Determine  $\tau_n^i$  e  $\tau_n^f$ , dado que,  $\tau_{s_n} = 1,2$  ms e  $\tau_{s_{n+1}} = 2,1$  ms.

**Solução 4.2** Para  $n = 5$ ,  $k = 7$ ,  $\tau_{s_n} = \tau_{s_5} = 1,2$  ms e  $\tau_{s_{n+1}} = \tau_{s_6} = 2,1$  ms, obtém-se diretamente

da equação (4.116) que

$$\tau_5^i = \sum_{m=5}^6 \tau_{s_m} = \tau_{s_5} + \tau_{s_6} = 1,2 + 2,1 = 3,3 \text{ ms}$$

por fim, substituindo os valores de  $\tau_5^i = 3,3 \text{ ms}$  e de  $\tau_n = \tau_5 = 3,8 \text{ ms}$  na equação (4.117), obtém-se  $\tau_5^f = \tau_5 - \tau_5^i = 3,8 - 3,3 = 0,5 \text{ ms}$ .

Para as condições preestabelecidas e considerando-se o modelo dinâmico da planta, na representação em espaço de estados, dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_{k-1}) \quad (4.118)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.119)$$

a obtenção da representação equivalente discreta do modelo da planta para  $\tau_k > \tau_{s_k}$ , também é realizada resolvendo a equação diferencial (4.118) no intervalo de tempo de um intervalo de amostragem dos sensores das malhas. Neste caso, a solução geral da equação (4.118), válida no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s$  é:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_{k-1}) ds' \quad (4.120)$$

A integral à direita da igualdade da equação (4.120) é resolvida de forma que o sinal de entrada da planta  $\mathbf{u}(t - \tau_{k-1})$ , seja constante nos intervalos  $[t_k^s, t_k^s + \tau_{k-1}^f]$  e  $[t_k^s + \tau_{k-1}^f, t]$ , como ilustrado na Figura 4.10, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_{k-1}) ds' &= \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_{k-1}^f} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau_{k-1}^f - \tau_{k-1}^f + \tau_{s_k} - \tau_{s_k} - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-2}^s) + \\ + \int_{t_k^s + \tau_{k-1}^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f)} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_{k-1}^f} e^{\mathbf{A}_p(t+\tau_{k-1}^f - \tau_{s_k} - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-2}^s) + \\ &+ \int_{t_k^s + \tau_{k-1}^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \end{aligned} \quad (4.121)$$

As duas últimas integrais à direita da igualdade da equação (4.121) são resolvidas fazendo-se para a penúltima integral a substituição  $s = t + \tau_{k-1}^f - \tau_{s_k} - s'$ , o que resulta em  $ds = -ds'$  e os limites de integração passam a ser  $s = t + \tau_{k-1}^f - \tau_{s_k} - s' \Big|_{s'=t_k^s} = t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_{k-1}^f$  e  $s = t + \tau_{k-1}^f - \tau_{s_k} - s' \Big|_{s'=t_k^s + \tau_{k-1}^f} = t - t_k^s - \tau_{s_k}$ . Analogamente, para a última integral após a igualdade da equação (4.121) a substituição  $s = t - s''$ , o que resulta em  $ds = -ds''$  e os limites de integração passam a ser  $s = t - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau_{k-1}^f} = t - t_k^s - \tau_{k-1}^f$  e  $s = t - s'' \Big|_{s''=t} = 0$ , que substituídos

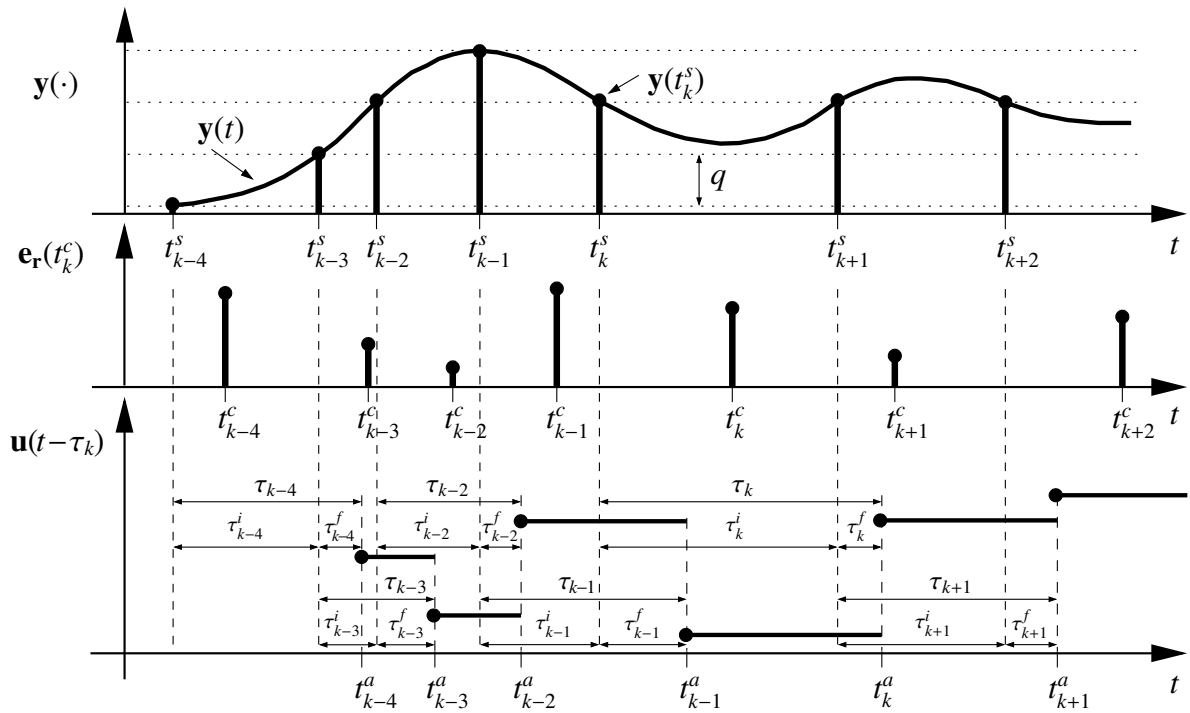


Figura 4.10: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $e_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $u(t - \tau_k)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

nas respectivas integrais resultam:

$$\int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_{k-1}^f} e^{A_p(t + \tau_{k-1}^f - \tau_{s_k} - s')} ds' = - \int_{t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_{k-1}^f}^{t - t_k^s - \tau_{s_k}} e^{A_p s} ds = \int_{t - t_k^s - \tau_{s_k}}^{t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \quad (4.122)$$

$$\int_{t_k^s + \tau_{k-1}^f}^t e^{A_p(t-s)} ds'' = - \int_{t - t_k^s - \tau_{k-1}^f}^0 e^{A_p s} ds = \int_0^{t - t_k^s - \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \quad (4.123)$$

substituindo as integrais expressas nas equações (4.122) e (4.123) na equação (4.121) obtém-se:

$$\int_{t_k^s}^t e^{A_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_{k-1}) ds' = e^{A_p(\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f)} \int_{t - t_k^s - \tau_{s_k}}^{t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-2}^s) + \int_0^{t - t_k^s - \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (4.124)$$

que substituída na equação (4.120) resulta:

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{A_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{t - t_k^s - \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + e^{A_p(\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f)} \int_{t - t_k^s - \tau_{s_k}}^{t - t_k^s - \tau_{s_k} + \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-2}^s) \quad (4.125)$$

Por fim, deve-se fazer na equação (4.125)  $t = t_{k+1}^s = t_k^s + \tau_{s_k}$ , o que resulta em

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = e^{A_p \tau_{s_k}} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-1}^s) + e^{A_p(\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f)} \int_0^{\tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{k-2}^s) \quad (4.126)$$

e como a equação (4.126) é da forma:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)\mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \Gamma_{p1}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)\mathbf{u}(t_{k-2}^s) \quad (4.127)$$

obtem-se da comparação direta das equações (4.126) e (4.127), que:

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{A_p \tau_{s_k}} \quad (4.128)$$

$$\Gamma_{p0}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f) = \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.129)$$

$$\Gamma_{p1}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f) = e^{A_p(\tau_{s_k} - \tau_{k-1}^f)} \int_0^{\tau_{k-1}^f} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.130)$$

Reescrevendo a equação (4.119) no instante  $t_k^s$  obtém-se:

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.131)$$

Dessa maneira, o sistema de equações de tempo discreto, equivalente ao sistema de equações de tempo contínuo da planta é dado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)\mathbf{u}(t_{k-1}^s) + \Gamma_{p1}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)\mathbf{u}(t_{k-2}^s) \quad (4.132)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.133)$$

onde as matrizes  $\Phi_p(\tau_{s_k})$ ,  $\Gamma_{p0}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)$  e  $\Gamma_{p1}(\tau_{s_k}, \tau_{k-1}^f)$  da equação (4.132) são dadas, respectivamente, pelas equações (4.128), (4.129) e (4.130).

## 4.6 Discretização da planta - abordagem unificada

Nesta seção serão obtidos os modelos equivalentes discretos da planta quando amostrada com PAS  $\tau_s$  invariante no tempo ou IAS  $\tau_{s_k}$  variante no tempo, com atrasos inferiores ou superiores ao PAS/IAS e com o NCS submetido ou não à perda de pacotes. Condições estas, que englobam todas as outras, até então apresentadas. Razão pela qual foi intitulada de abordagem unificada.

### 4.6.1 NCS CPP atrasos variantes no tempo e PAS invariante

Quando é assumido, por hipótese, que o NCS opera com perda de pacotes (CPP), atrasos variantes no tempo de valores inferiores ou superiores ao PAS invariante no tempo, seu comportamento temporal é apresentado na Figura 4.11. Pode-se verificar nesta figura que  $k - n + 5$  COAC são explicitados. Além disso, pode-se observar que no decorrer destes  $k - n + 5$  COAC, um pacote de dados na malha de realimentação é perdido no  $(n - 2)$ -ésimo COAC, o que explica a ausência, na figura, do instante  $t_{n-2-i-2}^c$ . De modo complementar, observa-se ainda, a partir do

$(n + 1)$ -ésimo COAC, que  $k - n - 2$  pacotes de dados são perdidos até o  $(k - 1)$ -ésimo COAC.

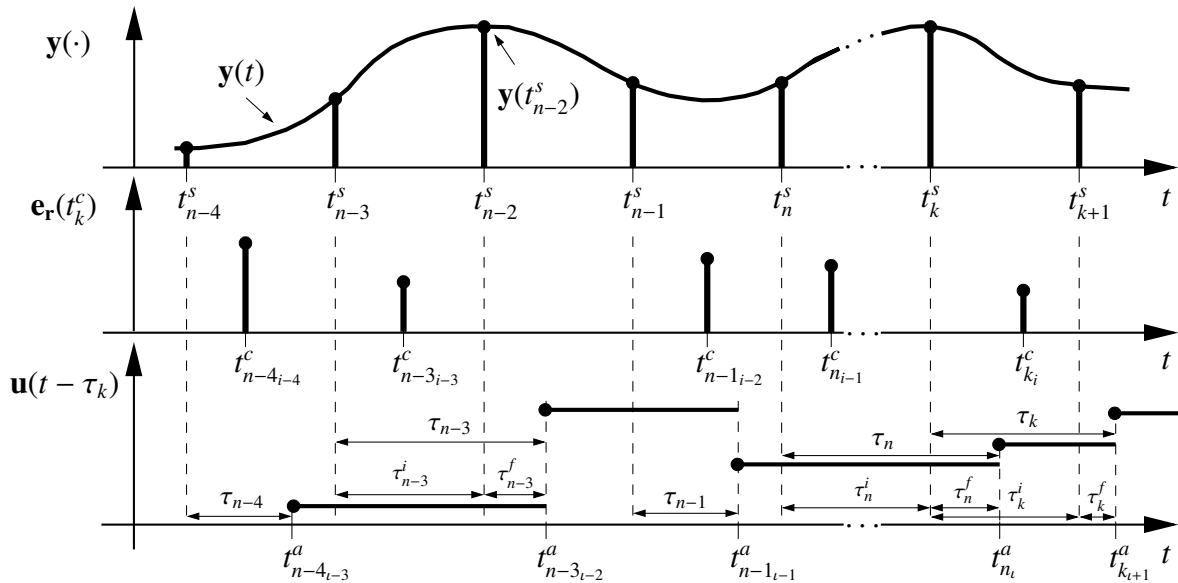


Figura 4.11: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Para as condições preestabelecidas e considerando-se o modelo dinâmico da planta, na representação em espaço de estados, dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_n) \quad (4.134)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.135)$$

para o qual, analogamente aos casos de discretização precedentes, obtém-se o seguinte modelo equivalente discreto:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_s) \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_s, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_n^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_s, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_{n-1}^s) \quad (4.136)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.137)$$

com

$$\Phi_p(\tau_s) = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.138)$$

$$\Gamma_{p_0}(\tau_s, \tau_n^f) = \int_0^{\tau_s - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.139)$$

$$\Gamma_{p_1}(\tau_s, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.140)$$

Outro fato relevante e que pode ocorrer no nó atuador, sobretudo quando se tem  $\tau_k > \tau_s$  é processo de multi-amostragem do atuador. Neste caso, dois ou mais pacotes de dados podem chegar no nó atuador durante o intervalo de tempo de um PAS  $\tau_s$ . Tal fato é ilustrado na parte



inferior da Figura 4.12 no decorrer do  $k$ -ésimo COAC.

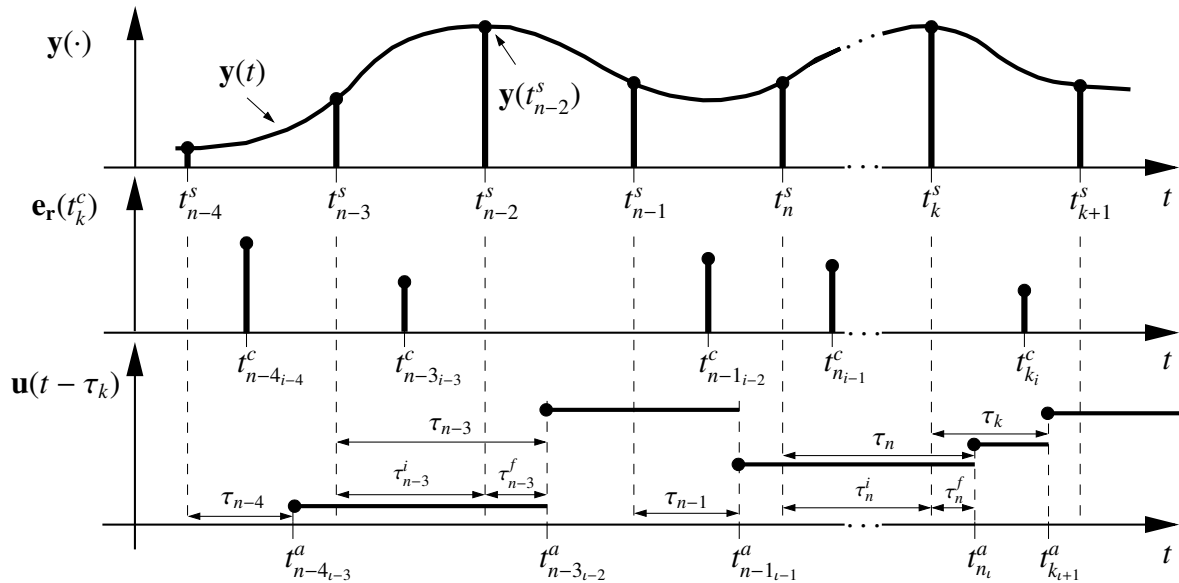


Figura 4.12: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $\mathbf{u}(t - \tau)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

O modelo equivalente discreto da planta é obtido de modo semelhante aos já apresentados neste capítulo. Dessa maneira, integrando a equação (4.134) no intervalo  $[t_k^s, t]$ , com  $t_k^s \leq t \leq t_{k+1}^s$  obtém-se como solução geral a equação

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}_p(t-t_k^s)} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_n) ds' \quad (4.141)$$

cuja integral à direita da igualdade da equação (4.141) é resolvida de forma que o sinal de entrada da planta  $\mathbf{u}(t - \tau_n)$ , seja constante nos intervalos  $[t_k^s, t_k^s + \tau_n^f]$ ,  $[t_k^s + \tau_n^f, t_k^s + \tau_k]$  e  $[t_k^s + \tau_k, t]$ , como ilustrado na Figura 4.12, o que resulta em:

$$\int_{t_k^s}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s' - \tau_n) ds' = \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p(t-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) + \int_{t_k^s + \tau_n^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s'' - \tau_n) ds'' \quad (4.142)$$

Cada integral à direita da igualdade da equação (4.142) será resolvida separadamente. Assim, a primeira dessas integrais é

$$\begin{aligned} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p(t-s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) &= \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p(t + \tau_n^f - \tau_n^f + \tau_k - \tau_k - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) = \\ e^{\mathbf{A}_p(\tau_k - \tau_n^f)} \int_{t_k^s}^{t_k^s + \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p(t + \tau_n^f - \tau_k - s')} ds' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_k - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) \end{aligned} \quad (4.143)$$

onde a última igualdade decorre da substituição  $s = t + \tau_n^f - \tau_k - s'$ , com  $t = t_k^s + \tau_k$ , donde

obtem-se:  $ds = -ds'$  e os novos limites de integração:  $s = t_k^s + \tau_k + \tau_n^f - \tau_k - s' \Big|_{s'=t_k^s} = \tau_n^f$  e  $s = t_k^s + \tau_k + \tau_n^f - \tau_k - s' \Big|_{s'=t_k^s + \tau_n^f} = 0$ .

A segunda integral à direita da igualdade da equação (4.142) é resolvida de modo análogo. Assim

$$\begin{aligned} \int_{t_k^s + \tau_n^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s'' - \tau_n) ds'' &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_{t_k^s + \tau_n^f}^{t_k^s + \tau_k} e^{\mathbf{A}_p(t + \tau_k - \tau_s - s'')} ds'' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_n^s) + \int_{t_k^s + \tau_k}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s''')} ds''' \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \\ \int_{t_k^s + \tau_n^f}^t e^{\mathbf{A}_p(t-s'')} \mathbf{B}_p \mathbf{u}(s'' - \tau_n) ds'' &= e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_n^s) + \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) \end{aligned} \quad (4.144)$$

onde a primeira integral da última igualdade decorre da substituição  $s = t + \tau_k - \tau_s - s'' = t_k^s + \tau_k - s''$ , com  $t = t_k^s + \tau_s$ , donde obtém-se:  $ds = -ds''$  e os novos limites de integração:  $s = t_k^s + \tau_k - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau_n^f} = \tau_k - \tau_n^f$  e  $s = t_k^s + \tau_k - s'' \Big|_{s''=t_k^s + \tau_k} = 0$ .

Substituindo as equações (4.143) e (4.144) na equação (4.142) e por fim o resultado dessa substituição na equação (4.141), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) &= e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \mathbf{x}_p(t_k^s) + \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_k^s) + e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_n^s) + \\ &+ e^{\mathbf{A}_p(\tau_k - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t_{n-1}^s) \end{aligned} \quad (4.145)$$

e como a equação (4.145) é da forma:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_k) \mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_k, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_n^s) + \Gamma_{p_2}(\tau_k, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_{n-1}^s) \quad (4.146)$$

obtem-se da comparação direta das equações (4.145) e (4.146), que:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (4.147)$$

$$\Gamma_{p_0}(\tau_k) = \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.148)$$

$$\Gamma_{p_1}(\tau_k, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.149)$$

$$\Gamma_{p_2}(\tau_k, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_k - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.150)$$

Reescrevendo a equação (4.135) no instante  $t_k^s$  obtém-se:

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.151)$$

dessa maneira, o sistema de equações de tempo discreto, equivalente ao sistema de equações de

tempo contínuo da planta é dado pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_n^f) \mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_k, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_n^s) + \Gamma_{p_2}(\tau_k, \tau_n^f) \mathbf{u}(t_{n-1}^s) \quad (4.152)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.153)$$

onde as matrizes  $\Phi_p$ ,  $\Gamma_{p_0}(\tau_n^f)$ ,  $\Gamma_{p_1}(\tau_k, \tau_n^f)$  e  $\Gamma_{p_2}(\tau_n^f)$  da equação (4.152) são dadas, respectivamente, pelas equações (4.147), (4.148), (4.149) e (4.150).

#### 4.6.2 NCS CPP atrasos e IAS variantes no tempo

Para o caso em que o NCS opera com perda de pacotes (CPP) e o atraso de controle  $\tau_k$  pode assumir qualquer valor, inclusive, pode ser maior que um IAS  $\tau_{s_k}$ . Nestas condições o comportamento temporal do NCS é mostrado na Figura 4.13. Demais comentários a respeito desta figura são análogos aos realizados na subseção precedente para a Figura 4.11.

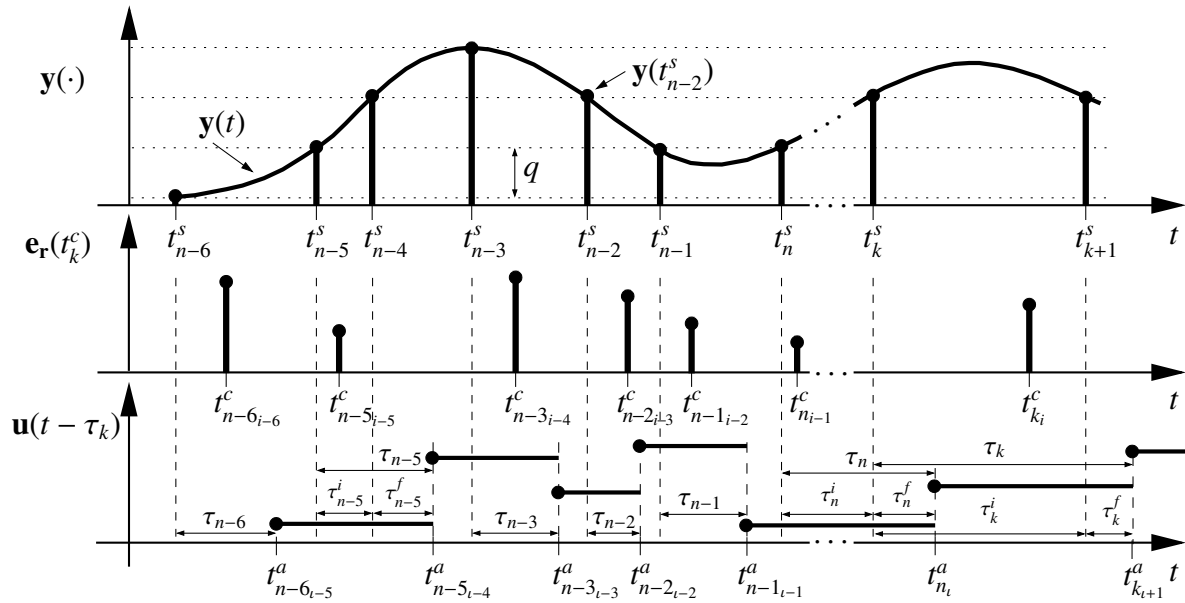


Figura 4.13: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência de tempo discreto  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  e o sinal de controle de tempo contínuo  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  na entrada da planta.

Para as condições pré-estabelecidas e considerando-se o modelo dinâmico da planta, na representação em espaço de estados, dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_n) \quad (4.154)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (4.155)$$

para o qual, analogamente aos casos de discretização precedentes, obtém-se o seguinte modelo

equivalente discreto:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_{s_k}, \tau_n^f)\mathbf{u}(t_n^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_{s_k}, \tau_n^f)\mathbf{u}(t_{n-1}^s) \quad (4.156)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.157)$$

com

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_p\tau_{s_k}} \quad (4.158)$$

$$\Gamma_{p_0}(\tau_{s_k}, \tau_n^f) = \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.159)$$

$$\Gamma_{p_1}(\tau_{s_k}, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k} - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (4.160)$$

Por outro lado, quando além das condições pré-estabelecidas ocorre multi-amostragem nos atuadores o comportamento temporal do NCS passa a ser dado segundo a Figura 4.14.

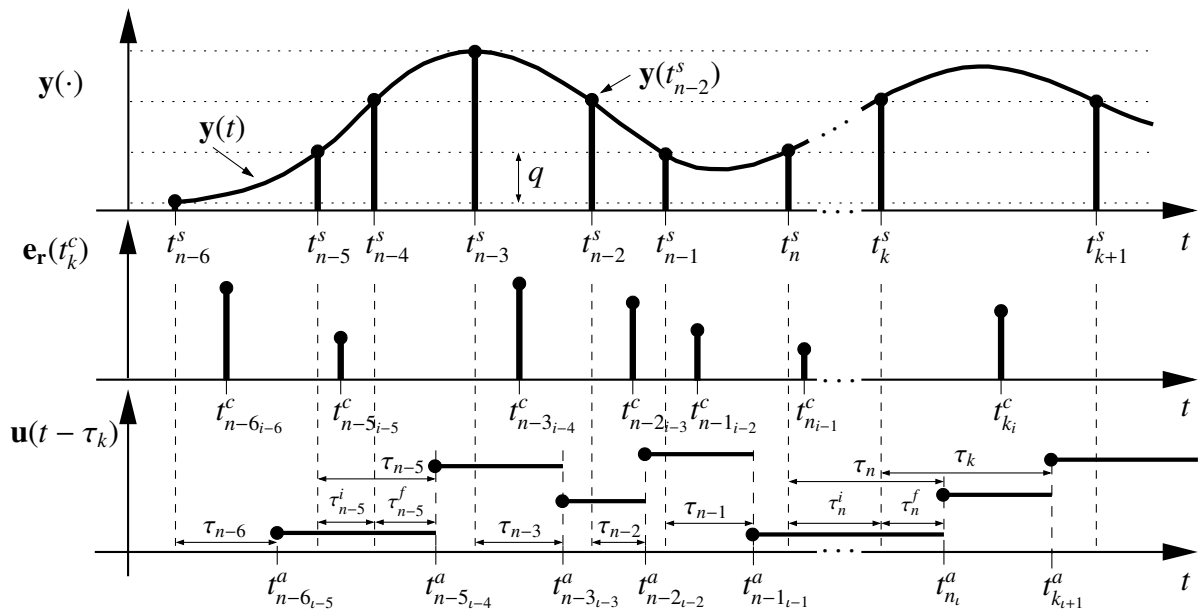


Figura 4.14: Relações entre os sinais: de saídas da planta de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  e de tempo discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ; sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto e o sinal de controle  $\mathbf{u}(t - \tau)$  de tempo contínuo na entrada da planta.

Neste caso, procedendo de maneira análoga ao ocorrido na subseção precedente, para o modelo em espaço de estados da planta dado pelas equações (4.154) e (4.155), obtém-se o seguinte modelo equivalente discreto.

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_{s_k}, \tau_k)\mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_{s_k}, \tau_k, \tau_n^f)\mathbf{u}(t_n^s) + \Gamma_{p_2}(\tau_{s_k}, \tau_k, \tau_n^f)\mathbf{u}(t_{n-1}^s) \quad (4.161)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (4.162)$$

onde:

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}\tau_{s_k}} \quad (4.163)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_0}(\tau_{s_k}, \tau_k) = \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_k} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (4.164)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_1}(\tau_{s_k}, \tau_k, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\tau_{s_k} - \tau_k)} \int_0^{\tau_k - \tau_n^f} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (4.165)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}_2}(\tau_{s_k}, \tau_n^f) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\tau_k - \tau_n^f)} \int_0^{\tau_n^f} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (4.166)$$

## 4.7 Discretização do controlador

Nesta seção são deduzidas as expressões dos modelos equivalentes discretos (MED) do controlador. Tais modelos são válidos, tanto para controladores operando nos modos guiado no tempo (GT), guiado a eventos (GE), assim como para aqueles, operando no modo simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET). Será mostrado que, quando o controlador opera nos modos GE e GET, o intervalo de amostragem do mesmo é variante no tempo. Por conseguinte, os coeficientes da equação de diferença do controlador variam a cada ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC). Em outras palavras, os coeficientes da equação de diferença resultante da discretização do controlador, variam, ou estão sujeitos a variações de um COAC para o outro. Esta variabilidade temporal pode ser estocástica, dependendo do protocolo de acesso ao meio da rede de comunicação, utilizada no NCS, e da forma como as tarefas embarcadas nos nós componentes são executadas.

Para possibilitar a discretização do controlador foi necessário fazer uma consideração “fictícia” sobre o comportamento físico do nó controlador. A partir dessa consideração foi possível obter os MEDs do controlador operando no modo GE, no modo GT e no modo GET.

Embora, não seja muito comum a existência de modelos matemáticos “fictícios” na literatura. Um exemplo clássico de modelos matemáticos que se utilizam deste tipo de artifício é encontrado na dedução do filtro de Kalman [KALMAN, 1960; KALMAN; BUCY, 1961]. Durante o desenvolvimento da teoria de tal filtro, Kalman adicionou um termo (por alguns chamado ruído “fictício” [DOYLE; STEIN, 1979]) à expressão matemática da saída da planta de forma a possibilitar representar o ruído de quantização e as incertezas presentes nas malhas de controle.

Um outro exemplo de modelo “fictício” encontrado na literatura é o do segurador triangular, o qual, é utilizado para aproximar um sinal contínuo por poligonais [JURY, 1958, p.288], [RA-GAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.287]. Por se tratar do modelo de um segurador, este exemplo é ainda mais adequado e próximo daquele que foi desenvolvido e que será apresentado a seguir. Dessa maneira, e sob a inspiração das idéias da introdução do ruído “fictício” no modelo

matemático do filtro de Kalman e do modelo do segurador triangular, um modelo matemático “fictício” de segurador, baseado no ZOH (*Zero Order Hold*), foi desenvolvido para possibilitar a discretização do controlador operando nos modos GT, GE, GET e GETM.

### 4.7.1 MED do controlador GT

Quando o controlador opera no modo GT seu modelo dinâmico é invariante no tempo. Como já provado no Capítulo 3 o controlador de tempo discreto é invariante no tempo e tem intervalo de amostragem invariante no tempo. Neste caso, as relações entre os sinais: da saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$ , de tempo discreto atrasado  $y(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros de referência de tempo contínuo atrasado  $e_r(t - \tau_k^{sc})$  e de tempo discreto atrasado  $e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$  são apresentadas na Figura 4.15.

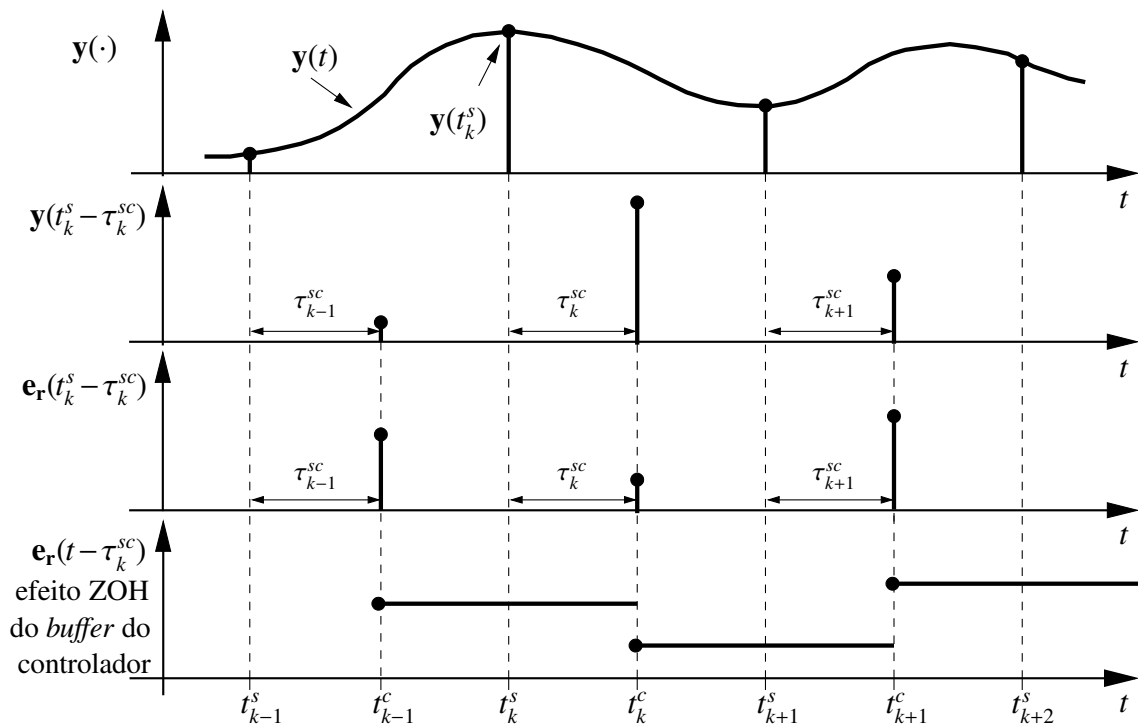


Figura 4.15: Relações entre os sinais: da saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e de tempo discreto atrasado  $y(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros de referência de tempo contínuo atrasado  $e_r(t - \tau_k^{sc})$  e de tempo discreto atrasado  $e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$  com  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , para o controlador operando no modo GT.

O MED do controlador é obtido a partir do comportamento do erro de referência de tempo discreto  $e_r(t_k^c) = e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$  ilustrado na Figura 4.15. Neste caso, muito embora o sinal  $e_r(t_k^c)$  na entrada do controlador seja pulsado é possível considerá-lo como degrais, uma vez que, a informação presente no *buffer* de entrada do controlador se mantém inalterada até que a próxima amostra do erro de referência  $e_r(t_{k+1}^c)$  substitua a atual amostra  $e_r(t_k^c)$ , como explicitado na referida figura. Assim, embora “fictício”, tal efeito é similar ao de um ZOH (*Zero Order Hold*).

Desse modo, é possível obter os MEDs do controlador pelo método da invariância ao degrau.

Assim, o modelo equivalente discreto (MED) do controlador, operando no modo guiado no tempo (GT) é obtido a partir da representação dinâmica em espaço de estados de tempo contínuo do controlador. Tal representação é apresentada nas equações seguintes:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (4.167)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (4.168)$$

onde:  $\mathbf{x}_c(t)$  é o estado do controlador,  $\mathbf{e}_r(t)$  é o erro de referência,  $\mathbf{u}(t)$  é a saída do controlador. Ambos na representação de tempo contínuo. E,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  são as matrizes da representação em espaço de estados do controlador de tempo contínuo. Neste caso, o MED do controlador de tempo contínuo apresentado nas equações (4.167) e (4.168), obtido pelo método da invariância ao degrau, é:

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c \mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (4.169)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t_k^c), \quad (4.170)$$

onde

$$\Phi_c = e^{\mathbf{A}_c \tau_s} \quad (4.171)$$

$$\Gamma_c = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c \quad (4.172)$$

O sistema de controle com este controlador em operação e não submetido a atrasos é aqui denominado de sistema de controle não conectado em rede com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD). Além disso, quando o NCS opera com este controlador com intervalo de amostragem  $\tau_c = \tau_s$ , invariante no tempo (período de amostragem), e é submetido a atrasos variantes no tempo, é denominado de NCS com atrasos variantes (NCSav).

#### 4.7.2 MED do controlador GE/GET

Quando o controlador opera no modo GE e/ou GET, a temporização do NCS, não submetido à perda de pacotes é como a apresentada na Figura 1.3. Neste caso, se qualquer um dos atrasos de aquisição  $\tau_k^s$  ou  $\tau_{k+1}^s$  ou os atrasos de comunicação sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  ou  $\tau_{k+1}^{sc}$  variar o IAC  $\tau_{c_k}$  será variante no tempo. A consequência da variabilidade temporal dos atrasos e, por conseguinte, do IAC é um controlador, cujo MED é variante no tempo. Isto significa que os coeficientes da equação de diferença do controlador mudam a cada COAC. Além disso, as relações entre os sinais: da saída da planta contínuo  $\mathbf{y}(t)$ , discreto  $\mathbf{y}(t_k^s)$  e discreto atrasado  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros contínuo atrasado  $\mathbf{e}_r(t - \tau_k^{sc})$  e discreto atrasado  $\mathbf{e}_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$ , com  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , com

o controlador operando nos modos GE e/ou GET são apresentadas na Figura 4.16.

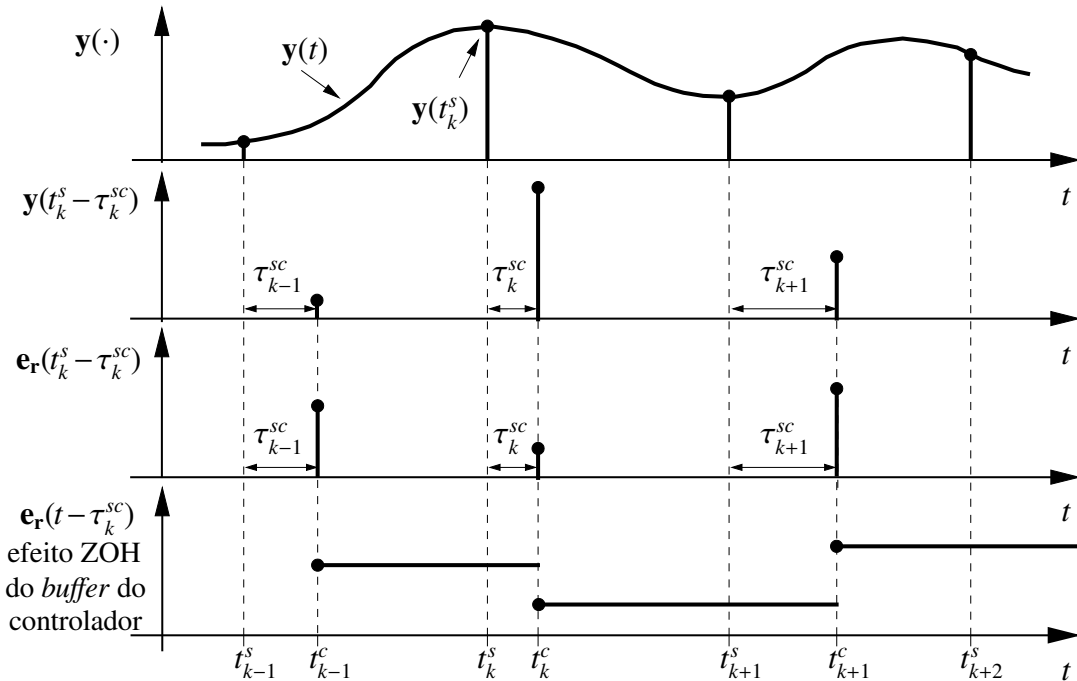


Figura 4.16: Relações entre os sinais: da saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e de tempo discreto atrasado  $y(t_k^s - \tau_k^{sc})$ ; erros de referência de tempo contínuo atrasado  $e_r(t - \tau_k^{sc})$  e de tempo discreto atrasado  $e_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$ , com  $\tau_k^{sc} < \tau_s$ , com o controlador operando nos modos GE e/ou GET.

O MED do controlador cuja dinâmica de tempo contínuo em espaço de estados é definida pelas equações (4.167) e (4.168) obtido via invariância ao degrau, com IAC  $\tau_{c_k}$  variante no tempo e determinado por algum dos teoremas apresentados no Capítulo 3 é:

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c(\tau_{c_k})\mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c(\tau_{c_k})\mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (4.173)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c\mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (4.174)$$

onde:

$$\Phi_c(\tau_{c_k}) = e^{\mathbf{A}_c\tau_{c_k}} \quad (4.175)$$

$$\Gamma_c(\tau_{c_k}) = \int_0^{\tau_{c_k}} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c \quad (4.176)$$

são variantes no tempo, desde que,  $\tau_{c_k}$  seja variante no tempo. Naturalmente, como já provado no Capítulo 3, a variabilidade temporal de  $\tau_{c_k}$  é decorrente dos atrasos introduzidos no NCS pelo nó sensor  $\tau_k^s$  e pela rede de comunicação  $\tau_k^{sc}$ . Além disso, como a lei de controle é dependente do IAC  $\tau_{c_k}$ , o mesmo deve ser determinado a cada COAC. O IAC pode ser, ou medido a partir do *clock* local do nó controlador, ou obtido a partir dos atrasos determinados<sup>8</sup>. Todavia, como

<sup>8</sup>Uma das técnicas, comumente, utilizada para a determinação de atrasos em sistemas distribuídos é a técnica de *timestamping* [JOHANNESSEN, 2004; IEEE, 2009].



$\tau_{c_k}$  é não causal, o que se pode determinar ou medir de fato é  $\tau_{c_{k-1}}$ .

Vale ressaltar ainda que do ponto de vista matemático os MEDs do controlador operando no modo GE ou GET são idênticos. A diferença é meramente conceitual e filosófica. Desse modo, quando o controlador do NCS opera no modo GET, conceitualmente, os relógios presentes nos nós componentes do NCS devem estar sincronizados por um relógio global. De outro modo, quando o sincronismo de tais relógios não é um requisito, diz-se que o modo de operação do controlador é guiado a eventos (GE). Neste caso, não é necessária a existência de um relógio global. Em ambos os casos, a lei a de controle é executada imediatamente após a chegada de um pacote de dados proveniente do nó sensor no nó controlador. A consequência disso é a variabilidade temporal do IAC.

### 4.7.3 Modo GETM de operação do controlador

O modo GETM de operação do controlador é semelhante ao modo GE e/ou GET, com apenas uma modificação na condição inicial do IAC do controlador. Daí o nome GETM, M de modificado. Neste caso, a condição inicial do IAC  $\tau_{c_0}$  pode ser menor, igual ou maior que o PAS  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_{c_0} < \tau_s$  ou  $\tau_{c_0} = \tau_s$  ou  $\tau_{c_0} > \tau_s$ . O efeito de fazer  $\tau_{c_0} < \tau_s$  é, evidentemente, o de tornar o primeiro COAC mais rápido, uma vez que, quanto menor for o valor de  $\tau_{c_0}$  mais próximo da borda do disco unitário estarão os pólos do primeiro COAC do controlador. Já o efeito de fazer  $\tau_{c_0} > \tau_s$  é contrário ao de fazer  $\tau_{c_0} < \tau_s$ . Desse modo, quando  $\tau_{c_0} > \tau_s$  o primeiro COAC é mais lento, uma vez que, quanto maior for o valor de  $\tau_{c_0}$  mais no centro do disco unitário estarão os pólos do primeiro COAC do controlador. Uma possível consequência disso é a redução do *overshoot* da RDU do NCS.

**Observação 4.2 (MEDs da Planta e do Controlador)** *Os MEDs da planta e do controlador podem ser obtidos diretamente das funções de transferências de tempo contínuo da planta  $G(s)$  e do controlador  $C_d(s)$  do nNCS, tanto para um sistema de controle SISO (Single Input Single Output), quanto para um sistema controle MIMO (Multiple Input Multiple Output).*

## 4.8 Efeito ZOH da discretização

Um efeito relevante a ser ressaltado no processo de discretização de um sistema de controle de tempo contínuo é o atraso associado com a ação do segurador (*hold*). Nesse sentido, a seguir é apresentado um estudo detalhado sobre a ação do ZOH e seus efeitos sobre o sistema de controle. Nessa discussão será avaliado o ZOH com largura de pulsos invariante no tempo, assim como, com largura de pulsos variantes no tempo.

Quando um sistema de controle está em operação o sinal de controle  $\mathbf{u}(t_k^c)$  resultante da execução da lei de controle é gerado após o cálculo do sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c) =$

$\mathbf{r}(t_k^s) - \mathbf{y}(t_k^s)$ , a partir dos sinais amostrados  $\mathbf{y}(t_k^s)$  e  $\mathbf{r}(t_k^s)$ . Tais sinais são obtidos simultaneamente a cada PAS  $\tau_s$ , por meio da leitura dos sinais contínuos da saída da planta  $\mathbf{y}(t)$  e da entrada de referência do controlador  $\mathbf{r}(t)$ , realizada por conversores A/Ds como ilustrado na Figura 4.1. Destes, os sinais contínuos  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  e seus respectivos amostrados, são ilustrados na Figura 4.17.

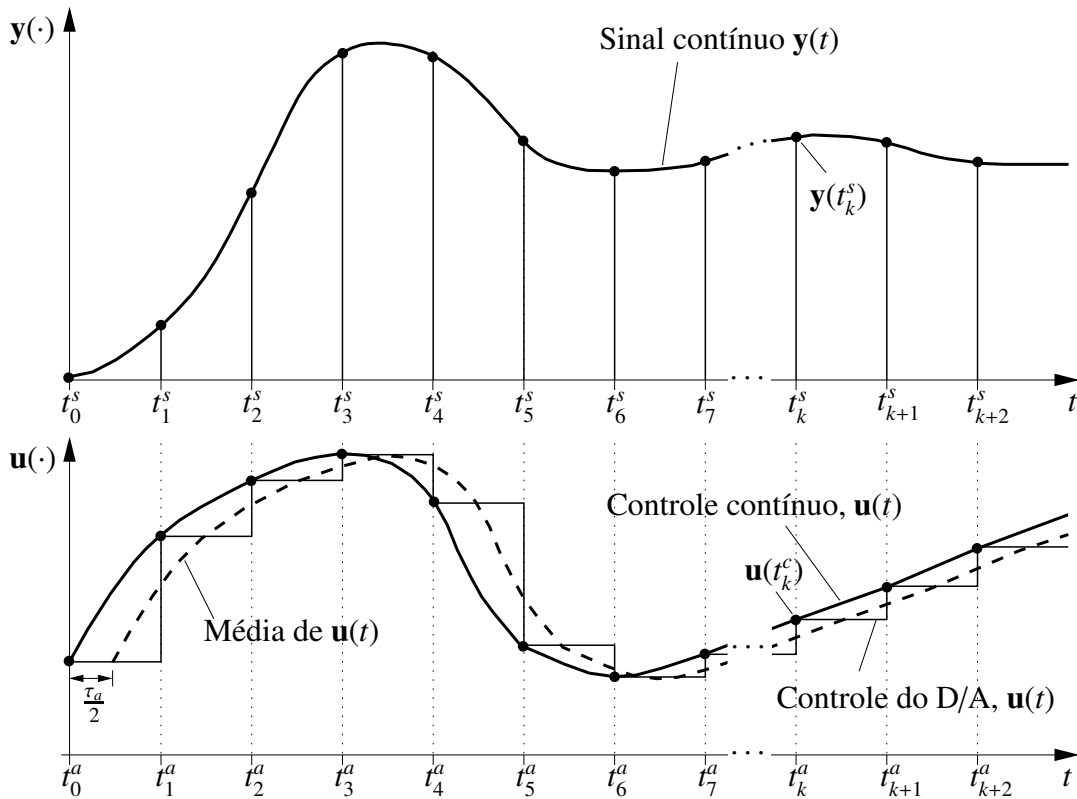


Figura 4.17: Atraso causado pela ação do ZOH, com  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t_k^a = k\tau_a$ .

É relevante observar na Figura 4.17 que o valor de  $\mathbf{u}(t_k^c)$  permanece constante até que a próxima amostra resultante da leitura dos sensores esteja disponível ao controlador. Desse modo, o sinal contínuo  $\mathbf{u}(t)$  na entrada dos atuadores é constituído de degraus. O efeito destes degraus sobre o sistema de controle é a introdução de um atraso, que na média retarda o sinal contínuo  $\mathbf{u}(t)$  em  $\tau_a/2$ , como ilustrado pela linha tracejada da Figura 4.17 [FRANKLIN, 2006, p.454]. Já quando a largura dos pulsos  $\tau_{ak}$  na entrada da planta são variantes no tempo a Figura 4.17 é modificada para Figura 4.18.

O atraso médio  $\tau_a/2$  introduzido pela ação do segurador tem efeito direto na seleção do PAS  $\tau_s$  do sistema de controle. Para reduzir tal efeito, pode-se diminuir suficientemente o valor de  $\tau_s$  o que não é desejável, ou ainda, introduzir este atraso diretamente no projeto do controlador. Em geral, para se obter um desempenho satisfatório do sistema equivalente discreto, a taxa de amostragem  $\omega_s$  deverá estar relacionada com a largura de banda  $\omega_{BW}$  do sistema de controle em

malha fechada, segundo a relação:

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{\tau_s} \geq 20\omega_{BW} \Rightarrow \tau_s \leq \frac{\pi}{10\omega_{BW}} \quad (4.177)$$

além disso, desde que  $\omega_s \geq 30\omega_{BW}$ , o sistema equivalente discreto apresentará desempenho semelhante ao do sistema de tempo contínuo. E, portanto, pode ser utilizado com segurança. Taxas de amostragem inferiores à apresentada na equação (4.177) podem ser obtidas, desde que, se considere o efeito do atraso médio  $\tau_a/2$  diretamente no projeto do controlador [FRANKLIN, 2006, p.468].

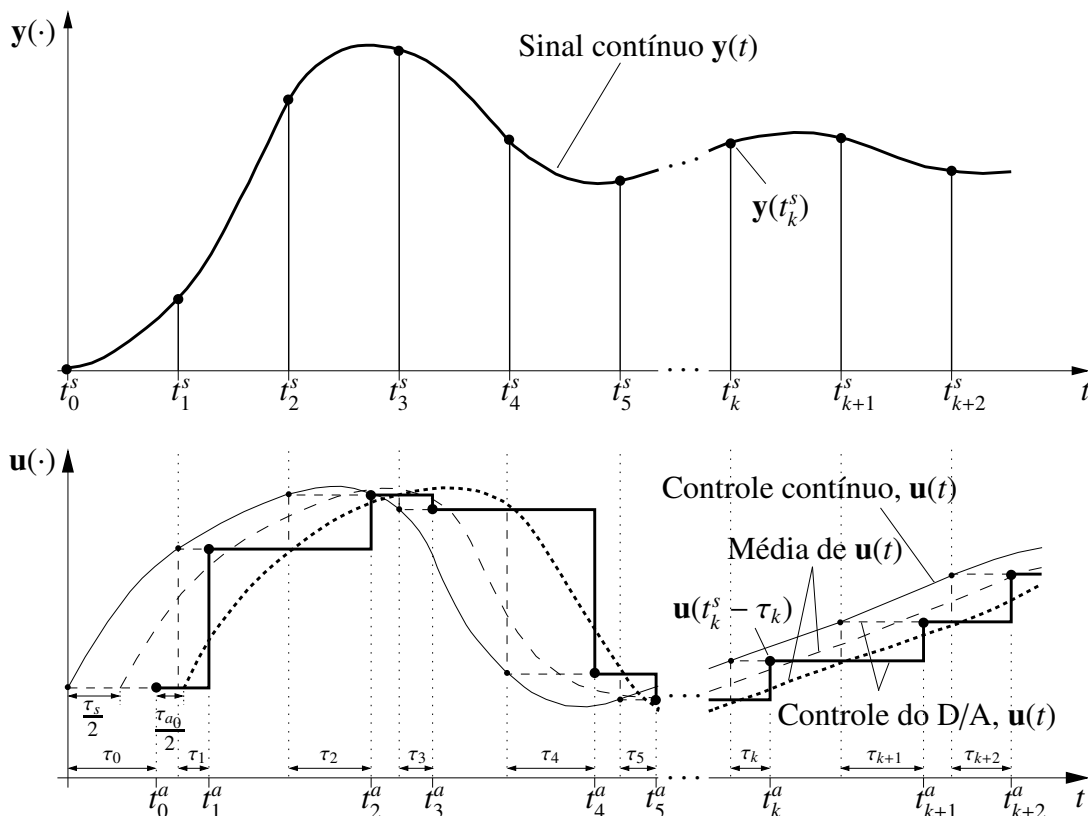


Figura 4.18: Atrazo causado pela ação do ZOH, com  $t_k^s = k\tau_s$  e  $t_{k+1}^a = t_k^a + \tau_{a_k}$ .

Quando um ZOH é utilizado em um sistema de controle, o sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$ , reconstruído e aplicado na entrada da planta, tem valor constante entre os instantes de amostragem do atuador  $t_k^a$ . Em outras palavras,  $\mathbf{u}(t)$  é constituído de pulsos de valores constantes e de largura invariante ou variante no tempo, segundo o modo de operação dos atuadores. Dessa maneira, quando os atuadores operam no modo guiado no tempo (GT) a largura de cada um destes pulsos é constante, invariante no tempo e de valor igual a um PAA  $\tau_a$ , conseqüentemente, os instantes de amostragem do atuador são dados por  $t_k^a = k\tau_a$ , como ilustrado na Figura 4.17.

Por outro lado, quando os atuadores operam no modo guiado a eventos (GE) ou no modo simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET) a largura  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  de cada um destes pulsos varia ao longo do tempo, como ilustrado na Figura 4.18. Neste caso, os IAA

$\tau_{a_k}$  são variantes no tempo e dados por  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$ . Entretanto, tanto no primeiro como no segundo caso, esses pulsos podem estar na origem ou deslocados da origem. O comportamento da resposta em frequência de tais pulsos será abordado a seguir.

### 4.8.1 Resposta em frequência - pulso na origem

Sem perda de generalidade, considera-se, inicialmente, o caso em que a largura de cada um destes pulsos  $\mathbf{g}_h(t)$  seja constante e dada por  $\tau_a = \tau_s$ , como ilustrado na Figura 4.19a. Notadamente,  $\mathbf{g}_h(t)$  pode ser decomposto em duas funções degraus unitárias  $\mathbf{u}(t)$  e  $-\mathbf{u}(t - \tau_a)$ , como ilustrado na Figura 4.19b.

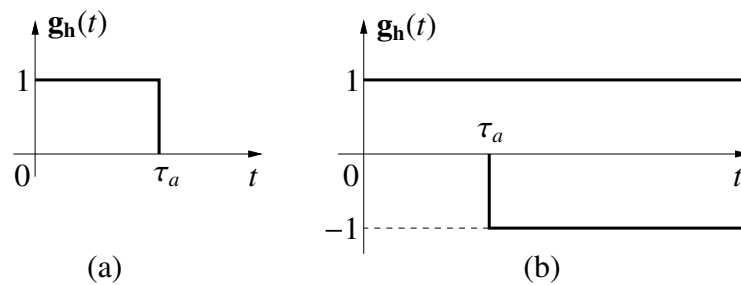


Figura 4.19: (a) Resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_a$  invariante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.35].

A representação matemática de  $\mathbf{g}_h(t)$  no domínio do tempo é

$$\mathbf{g}_h(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \tau_a) \quad (4.178)$$

e representa a resposta impulsiva do ZOH, cuja transformada de Laplace é

$$\mathbf{G}_h(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau_a} = \frac{1}{s} (1 - e^{-s\tau_a}) \quad (4.179)$$

Um resultado conhecido na literatura é a análise da resposta em frequência do pulso unitário  $\mathbf{g}_h(t)$ . A partir de tal análise obtém-se a amplitude e a fase deste pulso. Como este resultado é relevante para as deduções posteriores, ele será apresentado em destaque, na forma do seguinte lema.

**Lema 4.1 (Amplitude e fase do pulso na origem)** *Se o pulso unitário  $\mathbf{g}_h(t)$  da Figura 4.19a está na origem, tem largura  $\tau_a$ , representação matemática no domínio do tempo contínuo dada pela equação (4.178) e resposta impulsiva dada pela equação (4.179), então, a resposta em frequência de  $\mathbf{g}_h(t)$  é  $\mathbf{G}_h(j\omega) = |\mathbf{G}_h(j\omega)|/\underline{\mathbf{G}_h(j\omega)}$  tem amplitude  $|\mathbf{G}_h(j\omega)|$  não linear e fase*

$\angle \mathbf{G}_h(j\omega)$  linear, dadas, respectivamente, por

$$|\mathbf{G}_h(j\omega)| = \tau_a \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_a}{2}} \right| = \tau_a \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right) \right| \quad (4.180)$$

$$\angle \mathbf{G}_h(j\omega) = -\frac{\omega\tau_a}{2} \quad (4.181)$$

◇

**Prova:** Seja  $\mathbf{g}_h(t)$  o pulso unitário da Figura 4.19a de largura  $\tau_a$ , cuja representação matemática no domínio do tempo contínuo é dada pela equação (4.178) e resposta impulsiva dada pela equação (4.179). A amplitude e a fase de  $\mathbf{g}_h(t)$  é obtida diretamente da equação (4.179), fazendo  $s = j\omega$ , o que resulta em:

$$\mathbf{G}_h(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_a}) = \frac{1}{j\omega} [1 - \cos(\omega\tau_a) + j\text{sen}(\omega\tau_a)] \quad (4.182)$$

onde, a última igualdade é resultante da identidade de Euler [AVILA, 2000, p.22], [HÖNIG, 1981, p.29]. Além disso,  $\omega$  é a frequência dada em radianos por segundos.

A amplitude  $|\mathbf{G}_h(j\omega)|$  é obtida, diretamente, da equação (4.182) e é dada por:

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}_h(j\omega)| &= \frac{1}{|\omega|} \sqrt{[1 - \cos(\omega\tau_a)]^2 + \text{sen}^2(\omega\tau_a)} = \\ &= \frac{1}{|\omega|} \sqrt{1 - 2\cos(\omega\tau_a) + \cos^2(\omega\tau_a) + \text{sen}^2(\omega\tau_a)} = \frac{1}{|\omega|} \sqrt{1 - 2\cos(\omega\tau_a) + 1} = \\ &= \frac{1}{|\omega|} \sqrt{2[1 - \cos(\omega\tau_a)]} = \frac{1}{|\omega|} \sqrt{\frac{4}{2}[1 - \cos(\omega\tau_a)]} = \frac{2}{|\omega|} \sqrt{\frac{1 - \cos(\omega\tau_a)}{2}} = \\ &= \frac{\tau_a}{\left|\frac{\omega\tau_a}{2}\right|} \left| \text{sen}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right) \right| = \tau_a \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_a}{2}} \right| = \tau_a \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (4.183)$$

A fase  $\angle \mathbf{G}_h(j\omega)$  também é obtida da equação (4.182). Para tal, deve-se fazer a seguinte manipulação matemática

$$\mathbf{G}_h(j\omega) = \frac{1 - \cos(\omega\tau_a) + j\text{sen}(\omega\tau_a)}{j\omega} = \frac{\text{sen}(\omega\tau_a) - j[1 - \cos(\omega\tau_a)]}{\omega} \quad (4.184)$$

da qual se obtém a fase de  $\mathbf{G}_h(j\omega)$ , que é, por definição, dada por

$$\angle \mathbf{G}_h(j\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{1 - \cos(\omega\tau_a)}{\text{sen}(\omega\tau_a)}\right) = -\text{arctg}\left(\text{tg}\left(\frac{\omega\tau_a}{2}\right)\right) = -\frac{\omega\tau_a}{2} \quad (4.185)$$

Por fim, como o  $\text{sinc}(\cdot)$  é uma função não linear a amplitude  $|\mathbf{G}_h(j\omega)|$ , dada pela equação (4.183), é não linear. Por outro lado, a fase de  $\mathbf{G}_h(j\omega)$  é  $\angle \mathbf{G}_h(j\omega)$  que segundo a equação (4.185) é dada por  $-\frac{\omega\tau_a}{2}$  é linear. □

Naturalmente, quando  $\tau_a = \tau_s$ , do Lema 4.1 resulta que

$$\mathbf{G}_h(j\omega) = \tau_s \left| \text{sinc} \left( \frac{\omega\tau_s}{2} \right) \right| \angle -\frac{\omega\tau_s}{2} \quad (4.186)$$

portanto, a introdução de um ZOH em um sistema de controle introduz um atraso médio de  $\tau_a/2$  ou de  $\tau_s/2$ , quando  $\tau_a = \tau_s$ , no mesmo [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.36]. Além disso, da equação (4.186) se obtém os gráficos de amplitude e fase de  $\mathbf{G}_h(j\omega)$ . Tais gráficos são ilustrados na Figura 4.20 para três pulsos de larguras diferentes:  $\tau_s = \tau_a$ ,  $\tau_s = 0,8\tau_a$  e  $\tau_s = 0,3\tau_a$ .

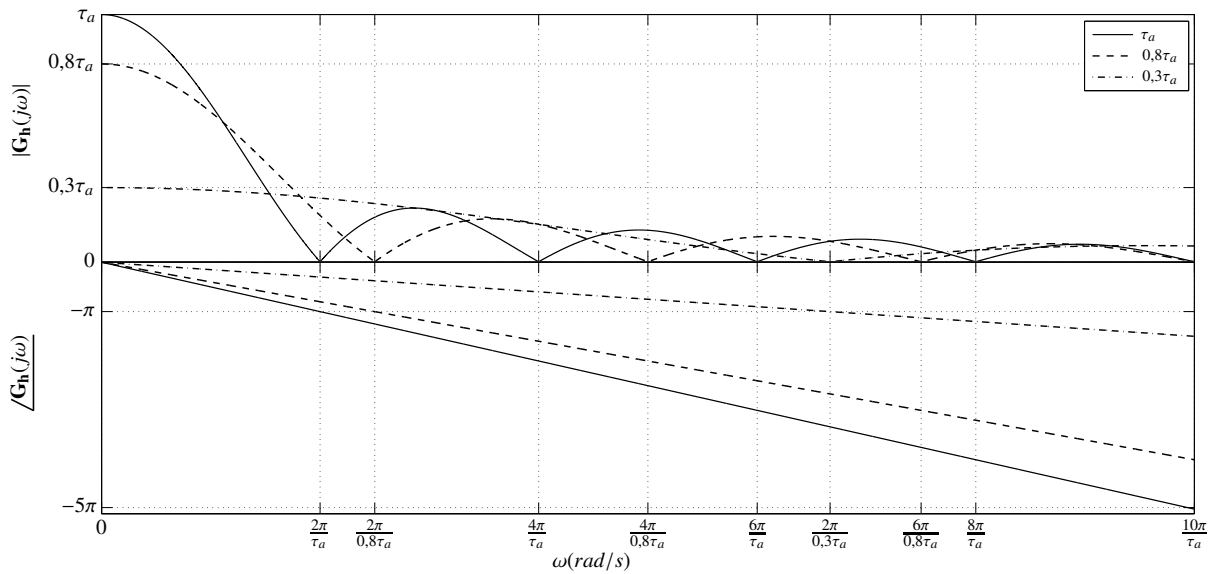


Figura 4.20: Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs, com pulsos na origem de larguras:  $\tau_a$ ,  $0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$ .

Para um sistema de controle invariante no tempo a largura de cada um desses pulsos é o PAC ou o PAA, conforme a discretização seja, respectivamente, do controlador ou da planta. Complementarmente, quando se trata da discretização de uma planta submetida a atrasos variantes no tempo, a largura de cada um desses pulsos são os IAA  $\tau_{dk}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ . E, se a discretização for de um controlador de um NCS, topologia S-C-A ou S-CA, a largura de cada um desses pulsos é o próprio IAC, isto é,  $\tau_{ck}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ .

De volta à discussão da Figura 4.20, evidentemente, a fase de cada um desses pulsos é uma reta cujo coeficiente angular é o negativo da metade da largura do pulso, isto é:  $-\tau_a/2$ ,  $-0,8\tau_a/2$  e  $-0,3\tau_a/2$ . Desse modo, quanto maior for a largura de cada um desses pulsos, maior também será a inclinação de cada uma dessas retas. E, conseqüentemente, maior também será o atraso médio  $0,5\tau_a$ ,  $0,4\tau_a$  e  $0,15\tau_a$  gerado por cada um desses pulsos. Tais assertivas ficam ainda mais evidentes quando se analisa a Figura 4.20.

Na subseção seguinte serão deduzidas as expressões de amplitude e fase da resposta em frequência de um pulso deslocado da origem.

### 4.8.2 Resposta em frequência - pulso deslocado da origem

Quando o sistema de controle é submetido a atrasos variantes no tempo a largura  $\tau_{a_k}$  dos pulsos  $\mathbf{g}_{h_k}(t)$  do ZOH é variante no tempo. Um exemplo típico de tal descrição ocorre nos NCSs quando os atuadores operam no modo GE ou GET, como ilustrado na Figura 4.18. Neste caso, os IAAs são variantes no tempo, dados por  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a$  e podem assumir valores menores, iguais ou maiores que o PAS. Fato este que ocorre, independentemente, dos sensores serem GTs (PAS  $\tau_s$  invariante no tempo) ou GEs (IAS  $\tau_{s_k}$  variante no tempo), como mostrado no Capítulo 3 deste documento.

Em decorrência da variabilidade temporal da largura  $\tau_{a_k}$  dos pulsos aplicados pelo ZOH na entrada da planta ou do controlador, a seguir será realizada a análise em frequência desses pulsos. O primeiro desses pulsos  $\mathbf{g}_{h_0}(t)$ , tem largura  $\tau_{a_0}$ , pode estar ou não localizado na origem. Quando este pulso está localizado na origem ele é como o ilustrado na Figura 4.21.

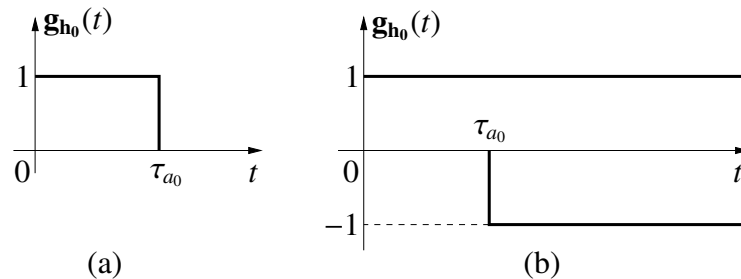


Figura 4.21: (a) Resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_{a_0}$  variante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH de largura  $\tau_{a_0}$  variante no tempo.

As respostas impulsiva e em frequência desse pulso foram abordadas na subseção precedente. Doravante será apresentada as respostas impulsiva e em frequência do pulso de largura  $\tau_{c_k}$  ou  $\tau_{a_k}$ , deslocado da origem, respectivamente, para os instantes  $t_k^c$  ou  $t_k^a$ . Evidentemente, quando se tratar da discretização do controlador tal pulso terá largura  $\tau_{c_k}$  e será deslocado para o instante  $t_k^c$ . Formalmente,  $t_k^c$  é o instante de início da execução da lei de controle no controlador e não o instante de finalização da execução da lei de controle  $t_k^c + \tau_{c_k}$ , quando formalmente dar-se o início do pulso. Analogamente, quando se tratar da discretização da planta, tal pulso terá largura  $\tau_{a_k}$  e será deslocado para o instante  $t_k^a$ . Formalmente,  $t_k^a$  é o instante de início das conversões D/A e não o início das comutações dos atuadores que formalmente, inicia no instante  $t_k^a + \tau_{a_k}$ . Todavia sem perda de generalidade e para simplificar a notação tais instantes serão considerados como  $t_k^c$  ou  $t_k^a$ , conforme tratar-se, respectivamente, do controlador ou do atuador. Para o caso da discretização da planta o pulso deslocado para o instante  $t_k^a$  é apresentado na Figura 4.22.

O primeiro pulso, já apresentado na subseção precedente, reapresentado na Figura 4.21, pode ser obtido da Figura 4.22, fazendo  $k = 0$ . Neste caso, obtém-se para o caso do atuador um pulso de largura  $\tau_{a_0}$  e para o caso do controlador um pulso de largura  $\tau_{c_0}$ .

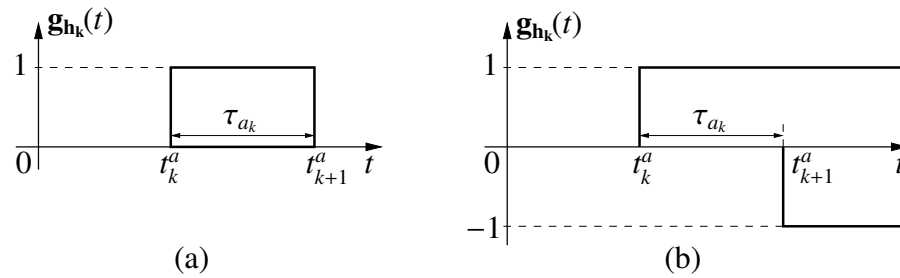


Figura 4.22: (a) Resposta impulsiva de um pulso do ZOH de largura  $\tau_{a_k}$  variante no tempo. (b) Componentes da função degrau da resposta impulsiva de um ZOH.

A representação matemática no domínio do tempo contínuo do pulso  $g_{hk}(t)$  apresentado na Figura 4.22 é

$$g_{hk}(t) = u(t - t_k^a) - u(t - t_{k+1}^a) \quad (4.187)$$

e representa a resposta impulsiva do  $k$ -ésimo pulso do ZOH, cuja transformada de Laplace é, com  $t_{k+1}^a = t_k^a + \tau_{a_k}$ , dada por:

$$G_{hk}(s) = \frac{1}{s}e^{-st_k^a} - \frac{1}{s}e^{-st_{k+1}^a} = e^{-st_k^a} \left[ \frac{1}{s} (1 - e^{-s\tau_{a_k}}) \right] \quad (4.188)$$

cuja resposta em frequência pode ser obtida fazendo, na equação (4.188),  $s = j\omega$ , o que resulta em:

$$G_{hk}(j\omega) = e^{-j\omega t_k^a} \left[ \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_{a_k}}) \right] \quad (4.189)$$

Além disso, da teoria dos números complexos, apresentada no Lema seguinte, sabe-se que:

**Lema 4.2 (Amplitude e fase do produto de dois números complexos)** *Se  $z$ ,  $u$  e  $v$  são números complexos, com  $z = uv$ ,  $u = |u|/\angle u$  e  $v = |v|/\angle v$ , então:*

$$|z| = |uv| = |u||v| \quad (4.190)$$

$$\angle z = \angle u + \angle v = \angle u + \theta_v \quad (4.191)$$

◇

**Prova:** É simples e direta, conforme pode-se verificar em [AVILA, 2000, p.9 e p.13] e [HöNIG, 1981, p.5 e p.8]. □

Por fim, tem-se como consequência imediata dos Lemas 4.1 e 4.2 as expressões de magnitude e fase da resposta em frequência do pulso deslocado da origem, as quais são apresentadas no seguinte lema.

**Lema 4.3 (Amplitude e fase do pulso deslocado da origem)** *Se o  $k$ -ésimo pulso unitário  $g_{hk}(t)$  da Figura 4.19a, de largura  $\tau_{a_k}$ , tem representação matemática no domínio do tempo contínuo dada pela equação (4.187) e resposta impulsiva dada pela equação (4.189), então, a resposta*



em frequência de  $\mathbf{g}_{hk}(t)$  é  $\mathbf{G}_{hk}(j\omega) = |\mathbf{G}_{hk}(j\omega)|/\underline{\mathbf{G}_{hk}(j\omega)}$  tem amplitude  $|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)|$  não linear e fase  $\underline{\mathbf{G}_{hk}(j\omega)}$  linear, dadas, respectivamente, por

$$|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)| = \tau_{a_k} \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}} \right| = \tau_{a_k} \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}\right) \right| \quad (4.192)$$

$$\underline{\mathbf{G}_{hk}(j\omega)} = -\omega \left( \frac{\tau_{a_k}}{2} + t_k^a \right) \quad (4.193)$$

◇

**Prova:** Seja  $\mathbf{g}_h(t)$  o pulso unitário da Figura 4.19a de largura  $\tau_{a_k}$ , cuja representação matemática no domínio do tempo contínuo é dada pela equação (4.187) e resposta impulsiva dada pela equação (4.188). A amplitude e a fase de  $\mathbf{g}_{hk}(t)$  é obtida diretamente da equação (4.188), fazendo  $s = j\omega$ , o que resulta na equação (4.189). Decorre diretamente do Lema 4.1 e da Proposição 4.2 aplicados à equação (4.189) que:

$$|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)| = \tau_{a_k} \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}} \right| = \tau_{a_k} \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{a_k}}{2}\right) \right| \quad (4.194)$$

$$\underline{\mathbf{G}_{hk}(j\omega)} = -\omega \left( \frac{\tau_{a_k}}{2} + t_k^a \right) \quad (4.195)$$

Por fim, como o  $\text{sinc}(\cdot)$  é uma função não linear a amplitude  $|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)|$ , dada pela equação (4.194), é não linear. Por outro lado, a fase de  $\mathbf{G}_{hk}(j\omega)$  é  $\underline{\mathbf{G}_{hk}(j\omega)}$  que segundo a equação (4.195) é linear. □

Naturalmente, os resultados precedentemente apresentados sobre as respostas em frequência são para um pulso na origem e um pulso deslocado da origem. Entretanto, levando-se em consideração todos os pulsos do ZOH surge a questão. As expressões de magnitude e fase do ZOH mudam quando são considerados todos os pulsos? Se mudam, quais seriam as expressões de magnitude e fase da sequência de pulsos do ZOH? E, quais seriam as implicações de tais mudanças?

A resposta à primeira questão do parágrafo precedente é não. Mesmo considerando todos os pulsos do ZOH, cada pulso do ZOH tem sua própria resposta em frequência, com sua curva de magnitude e fase dadas segundo os Lemas 4.1 e 4.3, respectivamente, para o pulso na origem e para os pulsos deslocados da origem. A resposta à primeira questão acaba invalidando a segunda e a terceira questões. Todavia, tais questionamentos são relevantes na perspectiva de uma tentativa de construção de um gráfico de fase que contemple, ao mesmo tempo, a fase de todos os pulsos do ZOH.

Como já mostrado nos Lemas 4.1 e 4.3 a magnitude  $|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)|$  de cada pulso de largura  $\tau_a$ , independentemente de está na origem ou deslocado da origem é a mesma. Tais magnitudes são dadas pelas equações (4.180) e (4.192), as quais são não lineares e também contínuas já que a

função  $\text{sinc}(\cdot)$  é contínua e periódica nas frequências  $2(k+1)\pi/\tau_a, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$  (nestas frequências a magnitude  $|\mathbf{G}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)|$  é nula). Quanto à fase  $\angle \mathbf{G}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)$  é dada pelas equações (4.181) e (4.193), respectivamente, para o pulso na origem e para um pulso deslocado da origem. Obviamente, o gráfico da fase de cada pulso do ZOH é uma reta que vai da origem (frequência zero) até o infinito (frequência infinita). Portanto, cada pulso do ZOH gera uma curva de fase que é uma reta. Desse modo, quando se considera todos os infinitos pulsos do ZOH, tem-se infinitas retas, curvas de fase, de modo que fica impossível obter um gráfico de fase global que forneça alguma informação global sobre a fase do ZOH (todos os pulsos do ZOH). A discussão de uma ideia que torne viável a construção do gráfico global de fase do ZOH é discutida no parágrafo seguinte.

Na equação (4.193) a cada período  $\tau_a$ , ou dito de outro modo, a cada frequência  $2(k+1)\pi/\tau_a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , ou ainda, a cada instante  $t_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  na expressão da fase, equação (4.193), o instante  $t_k^a$  muda de valor (nesses instantes a magnitude  $|\mathbf{G}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)|, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  é nula, isto é, nos pontos de frequência  $2(k+1)\pi/\tau_a, \forall k \in \mathbb{Z}_+, |\mathbf{G}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)| = 0$ ). Evidentemente, a cada instante  $t_k^a$  um novo pulso do ZOH se inicia e, naturalmente, surge uma nova reta da curva de fase deste novo pulso. A ideia que surgiu para viabilizar a construção do gráfico de fase global do ZOH (todos os pulsos do ZOH) consiste em plotar apenas uma faixa de frequência correspondente a um período  $\tau_a$  de duração desta reta. Esta faixa de frequência corresponde a um intervalo de frequência de  $[2k\pi/\tau_a, 2(k+1)\pi/\tau_a), \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , ou ainda, dito de outro modo a cada intervalo de frequência  $[\omega_k, \omega_{k+1})$ , onde  $\omega_k = t_k^a/\tau_a$ , com  $t_k^a = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , quando termina um pulso e inicia outro [RAGAZZINI; FRANKLIN, 1958, p.36].

Seguindo o procedimento descrito no parágrafo precedente obtém-se uma curva de fase global do ZOH que é na verdade apenas uma espécie de “rastros” de fase deixado por cada pulso. Com este “rastros” é possível ter uma visão global da curva de fase do ZOH como um todo. Além disso, tal “rastros”, ou gráfico global de fase  $\angle \mathbf{R}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)$  da sequência de pulsos do ZOH é linear por partes e descontínua nos pontos de frequência  $2(k+1)\pi/\tau_a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Uma fórmula geral do “rastros” de fase  $\angle \mathbf{R}_{\mathbf{h}_k}(j\omega), \forall k \in \mathbb{Z}_+$  do ZOH invariante no tempo, isto é, com  $\tau_{a_k} = \tau_a = \tau_s$  é dado pela equação

$$\angle \mathbf{R}_{\mathbf{h}_k}(j\omega) = \begin{cases} -\omega \left( \frac{\tau_a}{2} + t_0^a \right) & \text{se } 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{\tau_a} \\ -\omega \left( \frac{\tau_a}{2} + t_1^a \right) & \text{se } \frac{2\pi}{\tau_a} \leq \omega < \frac{4\pi}{\tau_a} \\ \vdots & \vdots \\ -\omega \left( \frac{\tau_a}{2} + t_k^a \right) & \text{se } \frac{2k\pi}{\tau_a} \leq \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\tau_a}, k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (4.196)$$

A ideia e formulação do gráfico do “rastros” de fase do ZOH é mais uma inovação trazida por esta tese. Tal gráfico não existe em qualquer outro texto.

Para ilustrar a discussão precedente, na Figura 4.23 é apresentada as respostas em frequência de três sequências de pulsos de larguras  $\tau_a, 0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$ . Cada uma dessas sequências de pulso

representa um ZOH com pulsos de larguras:  $\tau_a$ ,  $0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$  invariantes no tempo. Na parte superior da Figura 4.23 é apresentada as respostas em frequência das magnitudes dos pulsos dos três ZOHs e na parte inferior da figura é apresentado os “rastros” de fase  $\angle \mathbf{R}_{hk}(j\omega)$  dos três ZOHs. Neste contexto, com relação às curvas de magnitude pode-se observar que quanto menor é a largura do pulso  $0,3\tau_a$ , maior é a frequência  $\omega = 2\pi/0,3\tau_a$  para que  $|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)| = 0$  pela primeira vez. Nessa frequência, a fase  $\angle \mathbf{G}_{hk}(j\omega)$  desse pulso é  $\angle \mathbf{G}_{hk}(j\omega) = -\pi$ .

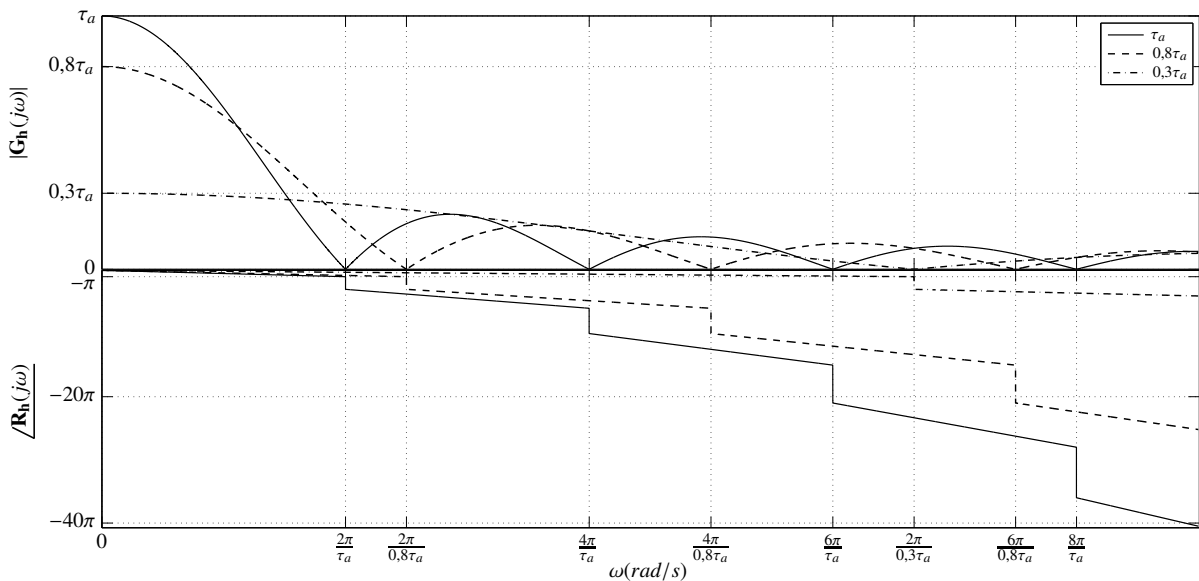


Figura 4.23: Amplitude e “rastros” de fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $\tau_a$ ,  $0,8\tau_a$  e  $0,3\tau_a$ .

Da teoria clássica de controle sabe-se que quanto menor é a largura dos pulsos do ZOH tão mais próxima é a curva da resposta ao degrau de tempo discreto da curva de resposta ao degrau de tempo contínuo. A razão disso está fundamentada na discussão precedente sobre o comportamento da magnitude e fase do ZOH. Desse modo, quanto mais estreito são os pulsos do ZOH melhor é o comportamento de magnitude e fase do filtro passa baixa que o ZOH introduz no sistema de controle. Por essa ótica, o ideal seria que os pulsos do ZOH de largura  $\tau_a$  fossem os mais estreitos possíveis. Entretanto, ter a largura  $\tau_a$  de tais pulsos tão estreitos quando possível é algo indesejável em um sistema de controle, pois implica em fazer o período de amostragem  $\tau_s$  tão pequeno quanto possível. Isso força a frequência de amostragem ser muito grande, o que também é indesejável. Melhor seria poder fazer apenas o primeiro pulso do ZOH tão estreito quanto possível. Para tornar isso viável, com eficiência, seria preciso tornar o sistema de controle variante no tempo. Ou, posto de outro modo, fazer os IAC, os IAA e os IAS variantes no tempo. O primeiro e o segundo casos serão discutidos a seguir.

Para elucidar um princípio de discussão sobre a relevância ou não de se fazer os IAC, os IAA e os IAS variantes no tempo, um exemplo simples será doravante apresentado. Nesse exemplo são apresentadas as respostas em frequência de três diferentes ZOHs, dois dos quais com pulsos

de largura  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo. O primeiro desses ZOHs tem pulsos de largura  $\tau_a = \tau_s$  invariante no tempo. O segundo ZOH está submetido a uma sequência de atrasos de controle  $\tau_k$  do tipo  $\{0,8\tau_a, 0,3\tau_a, 0,8\tau_a, 0,3\tau_a, \dots\}$  o que resulta na seguinte sequência de IAA  $\tau_{a_k} \{0,5\tau_a, 1,5\tau_a, 0,5\tau_a, 1,5\tau_a, \dots\}$ . A magnitude de tais pulsos é ilustrada na parte superior da Figura 4.24. A composição das curvas de fase, ou seja, o “rastros” de fase, deixado por cada pulso desse ZOH é apresentada na parte inferior da Figura 4.24 pela linha tracejada, legenda *MmMm*. Neste caso, é bom ressaltar que, embora cada pulso tenha uma curva de fase linear, a composição dessas curvas gera uma curva de fase, “rastros” de fase, que é linear por partes, com saltos nos instantes  $t_k^a$  de mudança de um pulso para outro.

O terceiro ZOH está submetido a uma sequência de atrasos de controle  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , da forma  $\{0,3\tau_a, 0,8\tau_a, 0,3\tau_a, 0,8\tau_a, \dots\}$  o que resulta na seguinte sequência de IAA  $\tau_{a_k} \{1,5\tau_a, 0,5\tau_a, 1,5\tau_a, 0,5\tau_a, \dots\}$ . A magnitude de tais pulsos é ilustrada na parte superior da Figura 4.24. A composição das curvas de fase, “rastros” de fase, de cada pulso desse ZOH é apresentada na parte inferior da Figura 4.24 pela linha pontilhada, legenda *mMmM*.

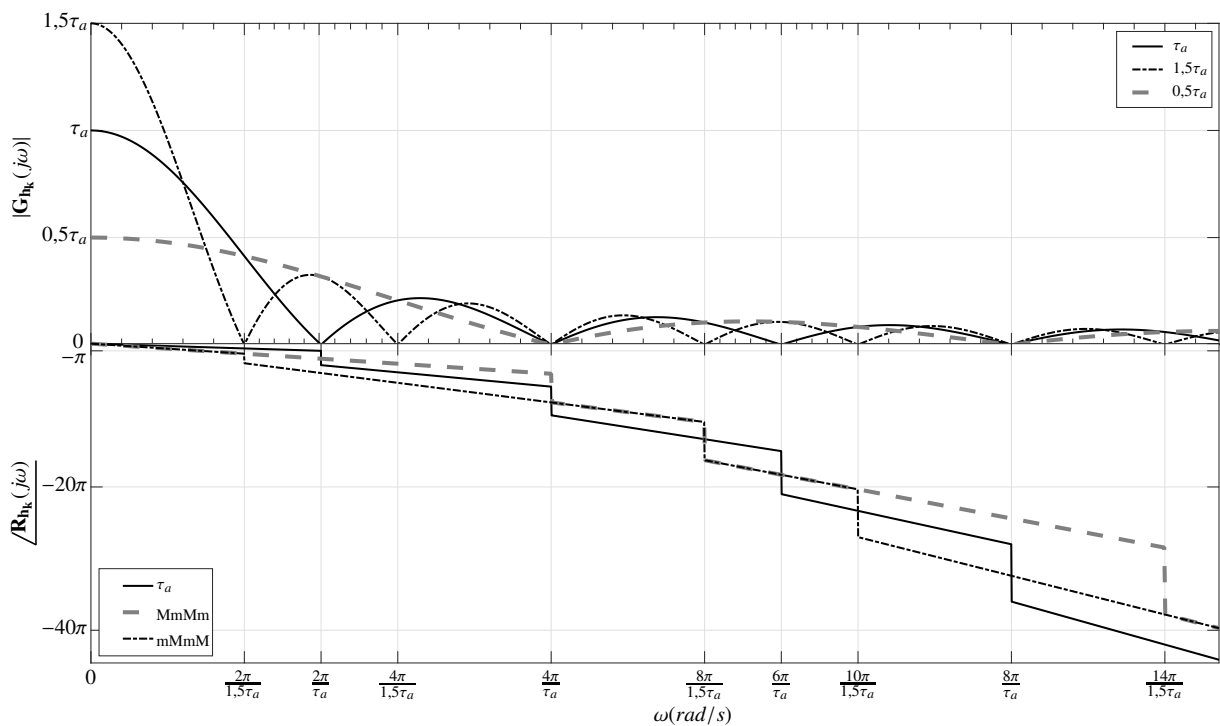


Figura 4.24: Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,5\tau_a$ ,  $\tau_a$  e  $1,5\tau_a$ .

Uma fórmula geral do “rastros” de fase  $\angle R_{h_k}(j\omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  do ZOH variante no tempo, isto é, com<sup>9</sup>  $\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1} - \tau_k$  é dado pela equação

<sup>9</sup>Evidentemente, o valor do IAA  $\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1} - \tau_k$  é para o NCS operando sem perda de pacotes e com  $\tau_k \leq \tau_s$ .

$$\underline{\mathbf{R}}_{\mathbf{h}_k}(j\omega) = \begin{cases} -\omega \left( \frac{\tau_{a_0}}{2} + t_0^a \right) & \text{se } 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{\tau_{a_0}} \\ -\omega \left( \frac{\tau_{a_1}}{2} + t_1^a \right) & \text{se } \frac{2\pi}{\tau_{a_0}} \leq \omega < \frac{2\pi}{\tau_{a_0}} + \frac{2\pi}{\tau_{a_1}} \\ \vdots & \vdots \\ -\omega \left( \frac{\tau_{a_k}}{2} + t_k^a \right) & \text{se } \omega_{k-1} \leq \omega < \omega_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (4.197)$$

onde,  $\omega_k = \omega_{k-1} + \frac{2\pi}{\tau_{a_k}} = \sum_{n=0}^k \frac{2\pi}{\tau_{a_n}}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , com  $\omega_{-1} = 0$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_{a_0}}$ . Portanto, o “rastros” de fase  $\underline{\mathbf{R}}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)$ , equação (4.197), da sequência de pulsos do ZOH é linear por partes e descontínua nos pontos de frequência  $\omega_k$ . Além disso, as frequências  $\omega_k$  ocorrem quando termina um pulso e inicia outro. Isto é, em termos do tempo, nos instantes  $t_k^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , quando termina um pulso e inicia outro.

Com relação às curvas de magnitude pode-se observar que quanto menor é a largura do pulso  $0,3\tau_a$ , maior é a frequência  $\omega = 2\pi/0,3\tau_a$  para que  $|\mathbf{G}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)| = 0$  pela primeira vez. Nessa frequência, a fase  $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{h}_k}(j\omega)$  desse pulso é  $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{h}_k}(j\omega) = -\pi$ .

A ideia e formulação do gráfico do “rastros” de fase do ZOH com largura de pulsos  $\tau_{a_k}$  variantes no tempo é mais uma inovação trazida por esta tese. Tal gráfico também não existe em qualquer outro texto.

## 4.9 Conceito de fase relativa

A ideia do conceito de fase relativa surgiu após cerca de dez anos de reflexão sobre o comportamento das respostas ao degrau unitário (RDU) apresentadas no Capítulo 1, para os NCSs submetidos às sequências de atrasos:  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  e  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . A análise destas curvas de RDUs levavam sempre ao mesmo questionamento. Por que o comportamento das RDUs dos NCSs mudavam tanto quando a sequência de atrasos a eles submetidos mudava da primeira para a segunda sequência de atrasos, já que as sequências de atrasos aplicadas aos NCSs são tão parecidas e têm o mesmo valor médio de atraso  $\tau_{k_m} = (0,8\tau_s + 0,1\tau_s)/2 = 0,45\tau_s$ ?

Todas as tentativas de responder este questionamento conduziam a uma reflexão sobre o comportamento dos *overshoots* das RDUs dos NCSs. Do senso comum sabe-se que em qualquer sistema de controle com atraso, quanto maior o atraso maior também será o *overshoot* de sua RDU. Neste caso, parece óbvio que se o atraso diminui, o *overshoot* também diminui e vice-versa. Entretanto, da análise das RDUs do exemplo apresentado essa lógica parece não funcionar para os NCSs. Contudo, sabe-se que só existe uma maneira de reduzir o *overshoot*: diminuindo o valor do atraso, ou de modo equivalente, injetando avanço de fase no sistema. Neste caso, se este raciocínio estiver correto, pode-se concluir que de alguma forma o próprio NCS deve introduzir um avanço de fase no sistema de controle de modo a neutralizar o atraso e ainda melhorar o desempenho da RDU do sistema.

Da conclusão apresentada no parágrafo precedente fica claro que só há uma forma do sistema de controle gerar avanço de fase. Deve haver uma “espécie” de “elemento” físico que introduz esse avanço de fase no sistema. Dessa análise concluiu-se que este “elemento” físico deveria existir e mais, tal “elemento” físico deveria ser um ZOH. Além disso, tal ZOH deveria ser um ZOH “fantasma” presente na saída da planta. Para tornar a explicação mais clara, na Figura 4.25 são apresentados os sinais de saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e o sinal de tempo contínuo  $u(t - \tau_k)$  do ZOH físico presente na entrada da planta.

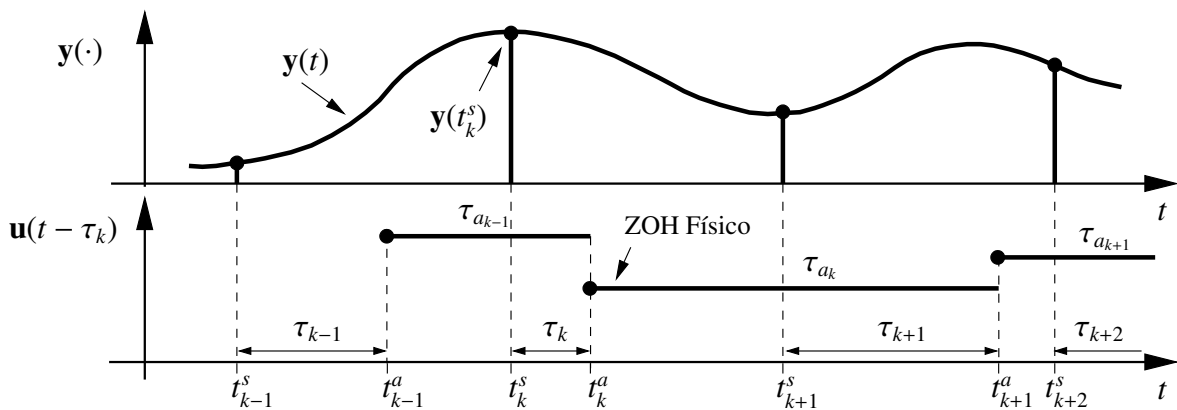


Figura 4.25: Relações entre os sinais de saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$  e de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e o sinal de tempo contínuo  $u(t - \tau_k)$  do ZOH presente na entrada da planta.

Por outro lado, das análises realizadas e pré-apresentadas concluiu-se que deveria existir um “elemento” físico no sistema de controle que poderia introduzir atraso ou avanço de fase no sistema de controle. Além disso, o efeito físico deste “elemento” físico, aqui denominado de ZOH “fantasma”, presente na saída da planta existe fisicamente no sistema, mas ninguém ver ou toca neste ZOH, ele é invisível, “fantasma”, como ilustrado na Figura 4.26. Tais análises e a previsão teórica da existência física do ZOH “fantasma” é uma das contribuições desta tese.

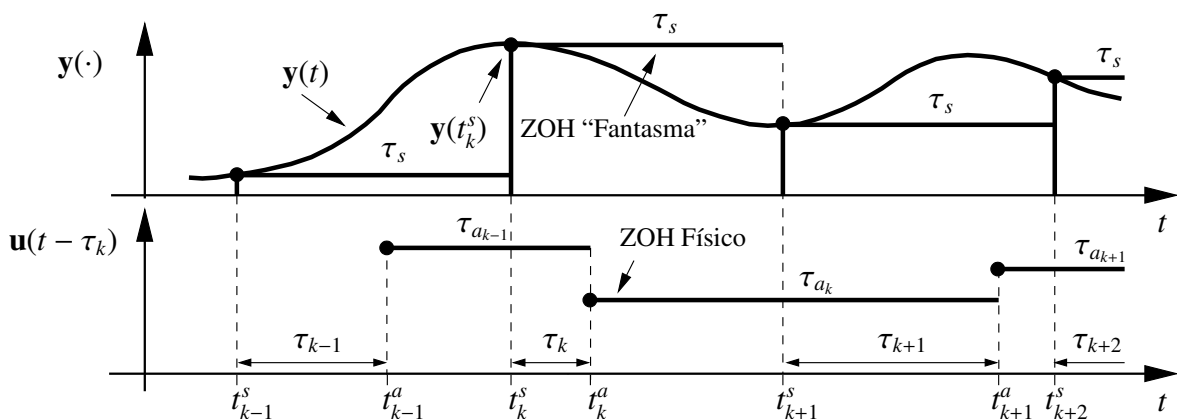


Figura 4.26: Relações entre os sinais de saída da planta de tempo contínuo  $y(t)$ , de tempo discreto  $y(t_k^s)$  e ZOH “fantasma” e o sinal de tempo contínuo  $u(t - \tau_k)$  do ZOH presente na entrada da planta.

A existência de dois ZOHs: um físico, “visível”, presente na entrada da planta e um físico, “fantasma”, presente na saída da planta resulta em duas curvas de fases, como ilustrado na Figura 4.27. Cada curva de fase corresponde a um pulso do ZOH presente na entrada da planta  $\angle G_{he_k}(j\omega)$  e a um pulso do ZOH “fantasma”  $\angle G_{hs_k}(j\omega)$  presente na saída da planta. Pulsos estes introduzidos por cada um dos ZOHs físicos presentes no sistema de controle. As curvas de fase de tais pulsos são ilustradas na Figura 4.27. Tais ZOHs operam simultaneamente, podendo introduzir avanço de fase ou atraso de fase no sistema de controle. Além disso, a curva de fase de cada pulso do ZOH presente na entrada da planta é função da largura  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  dos pulsos e dos instantes  $t_k^a$  de início de cada pulso do ZOH. Analogamente, a curva de fase de cada pulso do ZOH “fantasma” presente na saída da planta é função da largura  $\tau_s$  ou  $\tau_{s_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  dos pulsos e dos instantes  $t_k^s$  de início de cada pulso do ZOH “fantasma”.

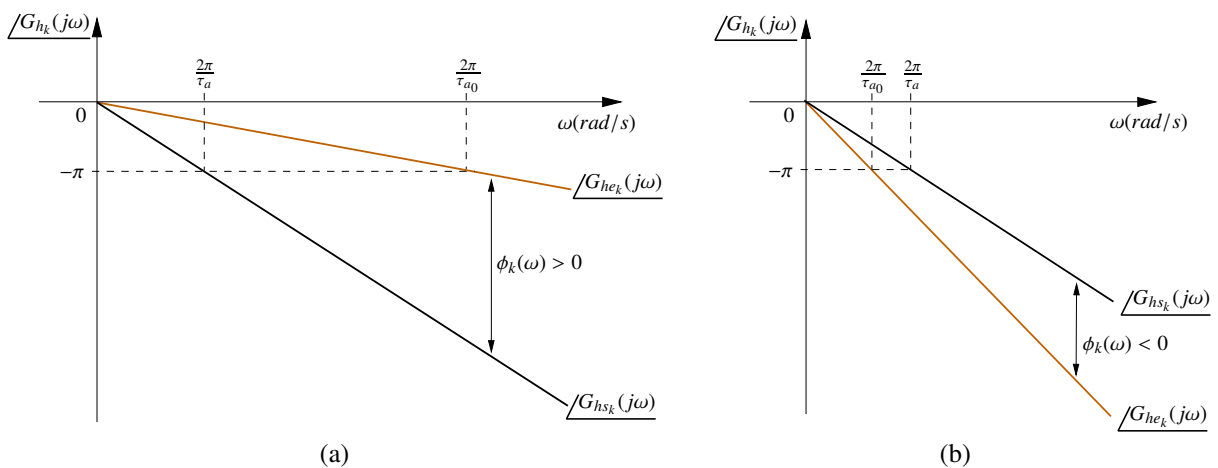


Figura 4.27: Fase relativa  $\phi_k(\omega) = \angle G_{hi_k}(j\omega) - \angle G_{hv_k}(j\omega)$ : (a) positiva  $\phi_k(\omega) > 0$ ; (b) negativa  $\phi_k(\omega) < 0$ .

Foi verificado também que quanto mais largo é cada pulso do ZOH presente na entrada da planta, maior é o atraso médio introduzido por cada pulso desse ZOH. E, quanto mais estreito é o pulso do ZOH presente na entrada da planta, menor é o atraso médio introduzido por cada pulso do ZOH. No contexto dos sistemas de controle com atrasos variantes no tempo, a largura  $\tau_{a_k}$  dos pulsos do ZOH presente na entrada da planta variam e podem ser maior, igual, ou menor que o PAS ou IAS (isto é,  $\tau_{a_k} > \tau_s$ ,  $\tau_{a_k} = \tau_s$  ou  $\tau_{a_k} < \tau_s$ ). As variações temporais dos atrasos e, conseqüentemente, dos IAAs  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  introduzem no sistema de controle uma fase relativa. O conceito de fase relativa foi ilustrado na Figura 4.27 e é formalmente apresentado, como uma das contribuições desta tese, na seguinte definição.

**Definição 4.1 (Fase relativa)** Fase relativa  $\phi_k(\omega)$  é a diferença entre as fases do  $k$ -ésimo pulso do ZOH presente na entrada da planta  $\angle G_{he_k}(j\omega)$  e a fase do  $k$ -ésimo pulso do ZOH “fan-

tasma” presente na saída da planta  $\underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)$ . Matematicamente, tem-se:

$$\phi_k(\omega) \triangleq \underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) - \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega) \quad (4.198)$$

Como a fase relativa pode ser positiva  $\phi_k(\omega) > 0 \Rightarrow \underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) > \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)$ , ou negativa  $\phi_k(\omega) < 0 \Rightarrow \underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) < \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)$  ou nula  $\underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) = \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)$ , pode ocorrer a introdução de um avanço relativo de fase ou de um atraso relativo de fase no sistema de controle variante no tempo. O avanço relativo de fase sempre ocorrerá quando a fase relativa for positiva, conforme Definição 4.2. E, o atraso relativo de fase sempre ocorrerá quando a fase relativa for negativa, conforme Definição 4.3. As definições de avanço relativo de fase e de atraso relativo de fase também são contribuições desta tese.

**Definição 4.2 (Avanço relativo de fase)** *Avanço relativo de fase  $\delta_{P_k}(\omega)$  é toda e qualquer taxa de variação positiva da fase relativa  $\phi_k(\omega)$ . Matematicamente, tem-se:*

$$\delta_{P_k}(\omega) \triangleq \frac{d\phi_k(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} [\underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) - \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)] > 0 \quad (4.199)$$

**Definição 4.3 (Atraso relativo de fase)** *Atraso relativo de fase  $\delta_{N_k}(\omega)$  é toda e qualquer taxa de variação negativa da fase relativa  $\phi_k(\omega)$ . Matematicamente, tem-se:*

$$\delta_{N_k}(\omega) \triangleq \frac{d\phi_k(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} [\underline{G}_{\text{he}_k}(j\omega) - \underline{G}_{\text{hs}_k}(j\omega)] < 0 \quad (4.200)$$

A expressão da fase relativa gerada pelos pulsos variantes no tempo dos ZOHs será obtida no teorema seguinte.

**Teorema 4.2 (Fase relativa dos pulsos dos ZOHs)** *Se  $\underline{G}_{\text{hs}_n}(j\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  é a fase do  $n$ -ésimo pulso de largura  $\tau_s$  do ZOH “fantasma” invariante no tempo e  $\underline{G}_{\text{he}_n}(j\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$  é a fase do  $n$ -ésimo pulso de largura  $\tau_{a_n}$  do ZOH variante no tempo, então a fase relativa  $\phi_0(\omega)$  do primeiro pulso dos ZOHs e a fase relativa do  $n$ -ésimo pulso  $\phi_n(\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$  dos ZOHs são:*

$$\phi_0(\omega) = \frac{\omega}{2} (\tau_s - \tau_{a_0}) \quad (4.201)$$

$$\phi_n(\omega) = \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2} (\tau_{n-1} + \tau_n) \right] \quad (4.202)$$

◇

**Prova:** A prova decorre diretamente da Definição 4.1. Assim, quando  $k = 0$ , tem-se da equação (4.198) e do Lema 4.1, equação (4.181), que

$$\phi_0(\omega) = \underline{G}_{\text{he}_0}(j\omega) - \underline{G}_{\text{hs}_0}(j\omega) = -\frac{\omega\tau_{a_0}}{2} - \left( -\frac{\omega\tau_s}{2} \right) = \frac{\omega}{2} (\tau_s - \tau_{a_0}) \quad (4.203)$$



onde,  $\tau_s = \tau_a$  é o PAA, isto é, a largura do pulso do ZOH “fantasma”, que neste caso é invariante no tempo e  $\tau_{a_0}$  é a largura do primeiro pulso do ZOH presente na entrada da planta, que neste caso é variante no tempo. Continuando o procedimento, quando  $k = 1$  tem-se da Definição 4.1, equação (4.198) e do Lema 4.3, equação (4.193), que

$$\begin{aligned}\phi_1(\omega) &= \underline{\angle G_{\text{he}_1}(j\omega)} - \underline{\angle G_{\text{hs}_1}(j\omega)} = -\omega \left( \frac{\tau_{a_0}}{2} + t_0^a \right) - \left[ -\omega \left( \frac{\tau_s}{2} + t_1^s \right) \right] \\ &= -\omega \left( \frac{\tau_s + \tau_1 - \tau_0}{2} + \tau_0 \right) + \omega \left( \frac{\tau_s}{2} + \tau_s \right) = \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2} (\tau_0 + \tau_1) \right]\end{aligned}\quad (4.204)$$

onde<sup>10</sup>,  $\tau_{a_0} = \tau_s + \tau_1 - \tau_0$ ,  $t_0^a = \tau_0$  e  $t_1^s = \tau_s$ . Continuando esse procedimento, tem-se da Definição 4.1, equação (4.198) e do Lema 4.3, equação (4.193), que quando  $k = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\phi_n(\omega) &= \underline{\angle G_{\text{he}_n}(j\omega)} - \underline{\angle G_{\text{hs}_n}(j\omega)} = -\omega \left( \frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + t_{n-1}^a \right) - \left[ -\omega \left( \frac{\tau_s}{2} + t_n^s \right) \right] \\ &= -\omega \left( \frac{\tau_s + \tau_n - \tau_{n-1}}{2} + t_{n-1}^s + \tau_{n-1} \right) + \omega \left( \frac{\tau_s}{2} + n\tau_s \right) \\ &= -\omega \left( \frac{\tau_s + \tau_n - \tau_{n-1}}{2} + (n-1)\tau_s + \tau_{n-1} \right) + \omega \left( \frac{\tau_s}{2} + n\tau_s \right) \\ \phi_n(\omega) &= \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2} (\tau_{n-1} + \tau_n) \right]\end{aligned}\quad (4.205)$$

onde  $\tau_{a_{n-1}} = \tau_s + \tau_n - \tau_{n-1}$ ,  $t_n^s = n\tau_s$  e  $t_n^a = t_n^s + \tau_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .  $\square$

Uma consequência imediata do teorema precedente é que a fase relativa introduzida pelo primeiro pulso de largura  $\tau_{a_0}$  do ZOH presente na entrada da planta será positiva apenas quando a largura  $\tau_{a_0}$  desse pulso for menor que a largura  $\tau_s$  do pulso do ZOH “fantasma” presente na saída da planta. Neste caso, a fase relativa máxima ocorrerá quando  $\tau_{a_0}$  for mínimo. Tal resultado será formalizado e provado no teorema seguinte.

**Corolário 4.1 (Fase relativa do primeiro pulso dos ZOHs)** *Se  $\underline{\angle G_{\text{hs}_0}(j\omega)}$  é a fase do primeiro pulso de largura  $\tau_s$  do ZOH “fantasma” presente na saída da planta e  $\underline{\angle G_{\text{he}_0}(j\omega)}$  é a fase do primeiro pulso de largura  $\tau_{a_0}$  do ZOH presente na entrada da planta, então a fase relativa  $\phi_0(\omega)$  do primeiro pulso do ZOH será positiva se  $\tau_{a_0} < \tau_s$ , nula se  $\tau_{a_0} = \tau_s$  e negativa se  $\tau_{a_0} > \tau_s$ .  $\diamond$*

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 4.2, equação (4.201), que  $\phi_0(\omega)$  será positiva, isto é

$$\phi_0(\omega) = \frac{\omega}{2} (\tau_s - \tau_{a_0}) > 0 \quad (4.206)$$

quando  $\tau_{a_0} < \tau_s$ . Analogamente,  $\phi_0(\omega)$  será nula se  $\tau_s = \tau_{a_0}$  e negativa quando  $\tau_{a_0} > \tau_s$ .  $\square$

<sup>10</sup>Do Teorema 3.2, equação (3.12):  $\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} = \tau_s + \tau_{k+1} - \tau_k$ , para  $\tau_k^a = \tau_{k+1}^a$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Teorema 4.3 (Fase relativa máxima do primeiro pulso dos ZOHs)** *A fase relativa  $\phi_0(\omega)$  introduzida pelo primeiro pulso dos ZOHs, será máxima quando a largura  $\tau_{a_0}$  desse pulso for mínima  $\tau_{a_{0min}}$ .*  $\diamond$

**Prova:** Quando o pulso do ZOH de entrada da planta está na origem a prova segue diretamente do Teorema 4.2, equação 4.201, quando  $k=0$ , que assume seu valor máximo  $\phi_{0max}(\omega)$ , isto é

$$\phi_{0max}(\omega) = \frac{\omega}{2}(\tau_s - \tau_{a_{0min}}) \quad (4.207)$$

quando  $\tau_{a_0}$  assume seu valor mínimo  $\tau_{a_{0min}}$ . E, quando o primeiro pulso do ZOH de entrada da planta não está na origem a fase relativa gerada pelos ZOHs em decorrência deste pulso é dada por

$$\phi_0(\omega) = \omega \left[ \frac{\tau_s}{2} - \left( \frac{\tau_{a_0}}{2} + t_0^a \right) \right] \quad (4.208)$$

Por fim, decorre da equação (4.208) que a fase relativa introduzida pelo primeiro pulso do ZOH de entrada da planta será máxima  $\phi_{0max}(\omega)$  quando a largura  $\tau_{a_0}$  deste pulso assumir seu valor mínimo  $\tau_{a_{0min}}$ .  $\square$

Considerando o caso em que  $\tau_k < \tau_s$ , o primeiro pulso aplicado na entrada do planta tem largura  $\tau_{a_0} = \tau_s + \tau_1 - \tau_0$ , conforme Teorema 3.2. Para que este pulso gere uma fase relativa positiva tem que  $\tau_0 + \tau_1 < 2\tau_s$ . Tal resultado, será formalizado e provado no teorema seguinte.

**Teorema 4.4 (Fase relativa positiva)** *Seja  $\phi_n(\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$  a fase relativa do  $n$ -ésimo pulso do ZOH presente na entrada da planta. Se a soma  $\tau_{n-1} + \tau_n$  dos atrasos de controle dos  $n - 1$  e  $n$ -ésimo COACs for inferior a  $2\tau_s$ , isto é,  $\tau_{n-1} + \tau_n < 2\tau_s$ , então  $\phi_n(\omega)$  será positiva.*  $\diamond$

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 4.2, equação (4.202). Desta equação resulta que  $\phi_n(\omega) = \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} + \tau_n) \right]$ , que será positiva, obviamente, quando  $\tau_{n-1} + \tau_n < 2\tau_s$ .  $\square$

**Teorema 4.5 (Os dois primeiros atrasos de controle:  $\tau_0$  e  $\tau_1$ )** *A fase relativa  $\phi_0(\omega)$ , do primeiro pulso dos ZOHs, será máxima quando o primeiro atraso de controle  $\tau_0$  for máximo e o segundo atraso de controle  $\tau_1$  for mínimo.*  $\diamond$

**Prova:** A prova segue diretamente do Teorema 4.3. Como  $\tau_{a_0}$  deve ser mínimo  $\tau_{a_{0min}}$  para que se tenha fase relativa  $\phi_0(\omega)$  máxima, decorre do Teorema 3.2, equação (3.12) que  $\tau_{a_{0min}} = \tau_s + \tau_{1min} - \tau_{0max}$ . Portanto, para que a fase relativa introduzida pelo primeiro pulso do ZOH presente na entrada da planta seja maximizada o primeiro atraso de controle  $\tau_0$  deve ser máximo  $\tau_{0max}$  e segundo atraso de controle  $\tau_1$  deve ser mínimo  $\tau_{1min}$ .  $\square$

**Observação 4.3 (Os dois primeiros atrasos de controle:  $\tau_0$  e  $\tau_1$ )** *O Teorema 4.5 dá uma clareza gigantesca à área dos NCSs e põe “por terra” a ideia de que “atraso bom” é atraso de valor pequeno ou de valor nulo. Como mostrado no teorema supracitado, isto não é verdade.*

Como provado no Teorema 4.5 a fase relativa máxima introduzida pelo primeiro pulso do ZOH variante no tempo ocorrerá quando o atraso de controle inicial  $\tau_0$  for máximo, isto é,  $\tau_{0_{max}}$  e o segundo  $\tau_1$  for mínimo, isto é,  $\tau_{1_{min}}$ . A pergunta natural que surge nesse ponto é: será que existe uma sequência de atrasos de controle que maximize a fase relativa introduzida pelo ZOH variante no tempo? E, se essa sequência de atrasos existe, é possível estabelecê-la? A resposta a estas perguntas é sim. Tais indagações serão estabelecidas e provadas nos teoremas seguintes.

**Teorema 4.6 (Sequências ótimas de atrasos e IAAs)** *Se um sistema de controle é submetido a atrasos variantes no tempo, então, as respectivas sequências ótimas de atrasos e IAAs que maximizam a fase relativa são:  $\{\tau_{0_{max}}, \tau_{1_{min}}, \tau_{2_{max}}, \tau_{3_{min}}, \dots\}$  e  $\{\tau_{a_{0_{min}}}, \tau_{a_{1_{max}}}, \tau_{a_{2_{min}}}, \tau_{a_{3_{max}}}, \dots\}$ .*  $\diamond$

**Prova:** Do Teorema 4.3, a fase relativa do primeiro pulso  $\phi_0(\omega)$  do ZOH será máxima  $\phi_{0_{max}}(\omega)$  quando  $\tau_0$  for máximo, isto é,  $\tau_{0_{max}}$  e  $\tau_1$  for mínimo, isto é,  $\tau_{1_{min}}$ . Este fato se traduz num primeiro pulso de largura  $\tau_{a_0}$  mínima  $\tau_{a_{0_{min}}}$  aplicado na entrada da planta. Para os outros pulsos a fase relativa  $\phi_n(\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  é dada pela equação (4.202), Teorema 4.2, aqui repetida por comodidade  $\phi_n(\omega) = \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} + \tau_n) \right]$ . Desta equação é possível concluir que a fase relativa máxima  $\phi_{n_{max}}(\omega) = \omega \left[ \tau_s - \frac{1}{2}(\tau_{n-1_{min}} + \tau_{n_{min}}) \right]$ , o que faz com que o IAA do  $(n-1)$ -ésimo COAC  $\tau_{a_{n-1}} = \tau_s + \tau_n - \tau_{n-1} = \tau_s + \tau_{n_{min}} - \tau_{n-1_{min}} = \tau_s$ , uma vez que,  $\tau_{n_{min}} = \tau_{n-1_{min}}$ , o que torna o ZOH invariante no tempo. Neste caso, a fase relativa seria nula, visto que os IAA  $\tau_{a_{n-1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  seriam constantes. Desse modo, é óbvio que, para que a fase relativa seja não nula  $\phi_n(\omega) \neq 0$ , os atrasos  $\tau_{n-1}$  e  $\tau_n$  devem ser diferentes, ou seja,  $\tau_{n-1} \neq \tau_n$ .

Observa-se que por questões de simplificações matemáticas que o IAA do ZOH presente na entrada da planta não aparece explicitamente na equação (4.202). Uma expressão geral da fase relativa  $\phi_n(\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  em que apareça explicitamente o IAA, ou seja, a largura do pulso do ZOH presente na entrada da planta pode ser obtida da equação (4.205), tal como

$$\begin{aligned} \phi_n(\omega) &= \underline{\mathcal{L}\mathbf{G}_{\text{hv}_n}(j\omega)} - \underline{\mathcal{L}\mathbf{G}_{\text{hi}_n}(j\omega)} = -\omega \left( \frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + t_{n-1}^a \right) - \left[ -\omega \left( \frac{\tau_s}{2} + t_n^s \right) \right] \\ &= -\omega \left( \frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + t_{n-1}^s + \tau_{n-1} \right) + \omega \left( \frac{\tau_s}{2} + n\tau_s \right) = -\omega \left( \frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + (n-1)\tau_s + \tau_{n-1} \right) + \omega \left( \frac{\tau_s}{2} + n\tau_s \right) \\ &= \omega \left[ \frac{3\tau_s}{2} - \left( \frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + \tau_{n-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.209)$$

onde  $t_n^s = n\tau_s$  e  $t_{n-1}^a = t_{n-1}^s + \tau_{n-1} = (n-1)\tau_s + \tau_{n-1}$ . Além disso, do Teorema 3.2, equação (3.12), sem perda de generalidade, pode-se fazer  $\tau_k^a = \tau_{k+1}^a$ , o que resulta em:

$$\tau_{a_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} + \tau_{k+1}^c + \tau_{k+1}^{ca} + \tau_{k+1}^a - \tau_k^s - \tau_k^{sc} - \tau_k^c - \tau_k^{ca} - \tau_k^a = \tau_s + \tau_{k+1} - \tau_k \quad (4.210)$$

Dando continuidade à prova, decorre da equação (4.209) que para  $n = 1$  a fase relativa  $\phi_1(\omega) = \omega \left[ \frac{3\tau_s}{2} - \left( \frac{\tau_{a_0}}{2} + \tau_0 \right) \right]$ , onde  $\tau_{a_0} = \tau_s + \tau_1 - \tau_0$  é a largura do primeiro pulso do ZOH presente na entrada planta. Neste caso,  $\phi_1(\omega)$  será máxima se  $\frac{\tau_{a_0}}{2} + \tau_0$  for mínimo. Como

do Teorema 4.3  $\tau_0$  é máximo, isto é,  $\tau_{0_{max}}$  e  $\tau_1$  é mínimo, isto é,  $\tau_{1_{min}}$ ,  $\tau_{a_0}$  é mínimo, isto é,  $\tau_{a_{0_{min}}}$ . Portanto,  $\phi_1(\omega)$  é máxima, quando  $\tau_0$  é máximo,  $\tau_1$  é mínimo e, conseqüentemente,  $\tau_{a_0}$  é mínimo.

Para  $n = 2$ , a fase relativa  $\phi_2(\omega) = \omega \left[ \frac{3\tau_s}{2} - \left( \frac{\tau_{a_1}}{2} + \tau_1 \right) \right]$ , onde  $\tau_{a_1} = \tau_s + \tau_2 - \tau_1$  é a largura do segundo pulso do ZOH presente na entrada da planta. Neste caso,  $\phi_2(\omega)$  será máxima se  $\frac{\tau_{a_1}}{2} + \tau_1$  for mínimo. Uma vez que  $\tau_1$  é mínimo, será assumido que  $\tau_{a_1}$  seja máximo, uma vez que,  $\tau_{a_{1_{max}}} = \tau_s + \tau_{2_{max}} - \tau_{1_{min}}$ , de onde resulta que  $\tau_2$  máximo  $\tau_{2_{max}}$ . Portanto,  $\phi_2(\omega)$  é máxima  $\phi_{2_{max}}(\omega)$ . E, como  $\tau_2$  é máximo  $\tau_{2_{max}}$ ,  $\tau_{a_2}$  deve ser mínimo  $\tau_{a_{2_{min}}}$ . Todavia, o fato de  $\tau_{a_2}$  ser mínimo força  $\tau_3$  ser mínimo  $\tau_{3_{min}}$ .

Seguindo este procedimento estabelece-se que a seqüência ótima de atrasos de controle submetido ao ZOH presente na entrada da planta é  $\{\tau_{0_{max}}, \tau_{1_{min}}, \tau_{2_{max}}, \tau_{3_{min}}, \dots\}$  e que a seqüência ótima de IAA é  $\{\tau_{a_{0_{min}}}, \tau_{a_{1_{max}}}, \tau_{a_{2_{min}}}, \tau_{a_{3_{max}}}, \dots\}$ .  $\square$

A pergunta natural que surge neste ponto é: assim como existe a seqüência ótima de atrasos e de IAAs, as quais maximizam a fase relativa, será que também existe uma seqüência de atrasos e de IAAs que minimiza a fase relativa? A resposta a esta pergunta é sim! Tais seqüências são exatamente contrárias às seqüências ótimas de atrasos e IAAs. Suas expressões serão deduzidas no teorema seguinte.

**Teorema 4.7 (Seqüências péssimas de atrasos e IAAs)** *Se um sistema de controle é submetido a atrasos variantes no tempo, então, as respectivas seqüências péssimas de atrasos e IAAs que minimizam a fase relativa são:  $\{\tau_{0_{min}}, \tau_{1_{max}}, \tau_{2_{min}}, \tau_{3_{max}}, \dots\}$  e  $\{\tau_{a_{0_{max}}}, \tau_{a_{1_{min}}}, \tau_{a_{2_{max}}}, \tau_{a_{3_{min}}}, \dots\}$ .*  $\diamond$

**Prova:** Análoga à prova do Teorema 4.6 para quando a fase relativa é negativa.  $\square$

**Observação 4.4 (Implementação da seqüência ótima de atrasos)** *O resultado apresentado no Teorema 4.6 suscita alguns questionamentos. Talvez o mais natural deles seja: é possível implementar tal seqüência de atrasos ótima de modo a gerar a seqüência ótima de IAA? Como os atrasos de um NCS, em geral, são aleatórios é improvável que se consiga assegurar e garantir o funcionamento do NCS de modo que a seqüência de atrasos ótima aconteça (a não ser, obviamente, em casos específicos, tal como, um experimento controlado em laboratório). Desse modo, descartada a possibilidade de se implementar tal seqüência de atrasos na entrada da planta, surge a seguinte pergunta. Seria possível gerar uma seqüência de atrasos e intervalos de amostragem tal como aquela estabelecida para entrada da planta, agora para a entrada do controlador? A resposta a este questionamento a priori é não, uma vez que, a aleatoriedade do atraso sensor controlador  $\tau_k^{sc}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  pode facilmente violar tal seqüência (aqui também vale o comentário anterior que se encontra entre parênteses). Entretanto, com a implementação de um observador ou preditor de estados no controlador é possível implementar tal seqüência. Todavia, embora seja possível a implementação de tais estratégias, elas não são o foco dessa tese. E, portanto, não serão realizadas e apresentadas nesta tese.*

**Observação 4.5 (Exemplo do Capítulo 1)** A sequência de atrasos ótima e conseqüentemente de IAAs ótima apresentadas no Teorema 4.6 explicam o resultado obtido no exemplo do Capítulo 1. Naquele exemplo ficou evidenciado que quando o NCS é submetido à seqüência de atrasos  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$  os IRDU do NCS são melhores que os IRDU do nNCSC e do nNCSD. E, no caso da RDU do nNCsav os IRDU foram melhores mesmo com o controlador operando com IAC  $\tau_{c_k} = \tau_c = \tau_s$  invariante no tempo. Evidentemente, quando a seqüência de atrasos passa a ser  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  os IRDU no NCSav são piores que os IRDU dos nNCSC, nNCSD e GET. Entretanto, quando o controlador opera no modo GET os IRDU do NCS são semelhantes aos IRDU do nNCSC. Esta é mais uma razão que justifica discretizar o controlador utilizando o método da invariância ao degrau, como já realizado com sucesso no exemplo do Capítulo 1. Os detalhes destas discretizações já foram apresentados na Seção 4.7. A resposta em frequência dos ZOHs do sistema de controle aqui discutido é apresentada na Figura 4.28. Na parte superior desta figura são apresentadas as magnitudes  $|\mathbf{G}_{hk}(j\omega)|$  da resposta em frequência dos pulsos dos ZOHs e na parte inferior da figura os “rastros” de fase  $\angle \mathbf{R}_{hk}(j\omega)$  de tais ZOHs.

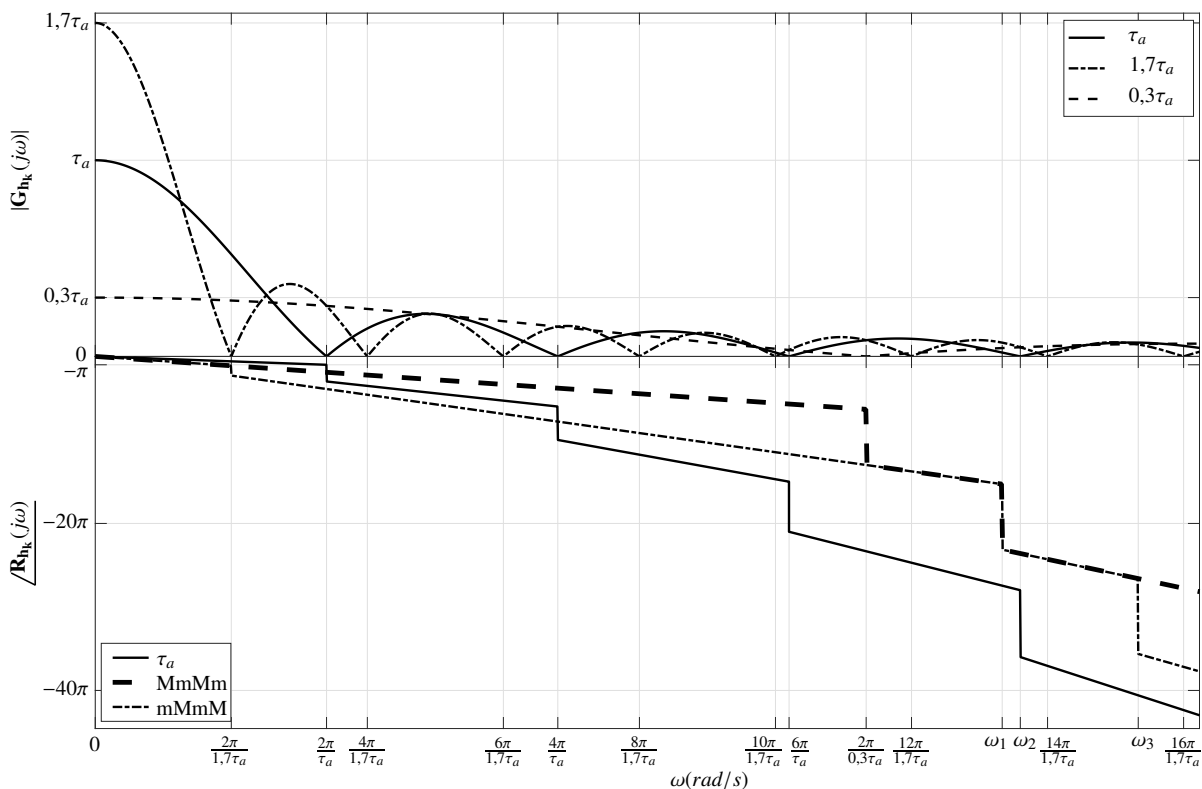


Figura 4.28: Amplitude e fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,3\tau_a, \tau_a$  e  $1,7\tau_a$ , com  $\tau_a = \tau_s = 2,0$  ms.

Na Figura 4.28 as legendas  $MmMm$  e  $mMmM$  representam, respectivamente, os “rastros” de fases de cada um dos pulsos dos ZOHs com seqüências de IAAs  $\{0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, \dots\}$  e

$\{1,7\tau_s, 0,3\tau_s, 1,7\tau_s, 0,3\tau_s, \dots\}$ , ou, equivalentemente, representam respectivamente os “rastros” de fases de cada um dos pulsos dos ZOHs submetidos às sequências de atrasos de controle:  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$  e  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . Além disso, as frequências  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  da referida figura são, respectivamente, dadas por:  $\omega_1 = \frac{2\pi}{0,3\tau_a} + \frac{2\pi}{1,7\tau_a}$ ,  $\omega_2 = \frac{8\pi}{\tau_a}$  e  $\omega_3 = \frac{4\pi}{1,7\tau_a} + \frac{2\pi}{0,3\tau_a}$ , com  $\tau_a = \tau_s = 2,0$  ms.

Por fim, os resultados apresentados na Figura 4.28 já eram esperados e foram antecipadamente previstos na teoria. A partir da análise das curvas dos “rastros” de fases dos ZOHs, pode-se concluir que a dinâmica dos NCSs é extremamente sensível às condições iniciais de operação do sistema. Em outras palavras, o comportamento passa baixa dos ZOHs é determinado pela largura dos primeiros pulsos nele aplicados. Este resultado não foi provado e será apresentado como uma conjectura. Tais formulações, deduções e análises apresentadas também são parte das contribuições genuínas desta tese.

**Conjectura 4.1 (Dependência da Condição Inicial)** *Se  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  é o atraso de controle variante no tempo do  $k$ -ésimo COAC do NCS, então, a resposta dinâmica de tempo discreto do NCS é dependente apenas dos valores de  $\tau_0$  e de  $\tau_1$ , ou, de modo equivalente, da largura  $\tau_{a_0} = \tau_s + \tau_1 - \tau_0$  do primeiro pulso do ZOH presente na entrada da planta.  $\diamond$*

**Observação 4.6 (Avanço relativo de fase máximo versus amostragem de Lebesgue)** *Aplicando a Definição 4.2 à equação (4.201) e (4.202) obtém-se, respectivamente, o avanço relativo de fase  $\delta_{P_0}(\omega)$  e  $\delta_{P_n}(\omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3, \dots\}$ , matematicamente definido na equação (4.199). Desse modo,  $\delta_{P_0}(\omega) = \frac{1}{2}(\tau_s - \tau_0)$  e  $\delta_{P_n}(\omega) = \left[\tau_s - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} + \tau_n)\right]$ . Analogamente, aplicando a mesma definição à equação (4.209), obtém-se  $\delta_{P_n}(\omega) = \left[\frac{3\tau_s}{2} - \left(\frac{\tau_{a_{n-1}}}{2} + \tau_{n-1}\right)\right]$ . Pode-se verificar dessas equações que o avanço relativo de fase máximo  $\delta_{P_{k_{max}}}(\omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  introduzido pelo ZOH variante no tempo é sempre menor que um PAS  $\tau_s$ . Neste caso, quanto maior o valor de  $\tau_s$ , maior também será o valor do avanço relativo de fase máximo  $\delta_{P_{k_{max}}}(\omega)$ . Todavia, o valor de  $\tau_s$  além de relativamente pequeno<sup>11</sup>, é invariante no tempo. Dessa maneira, utilizar a amostragem de Lebesgue, além de possibilitar aumentar ou diminuir, dinamicamente, o IAS  $\tau_{s_k}$  - agora variante no tempo - com desempenho assegurado, possibilita, conseqüentemente, também aumentar ou diminuir, dinamicamente, o avanço relativo de fase máximo  $\delta_{P_{k_{max}}}(\omega)$  introduzido pelo ZOH variante no tempo. Fato este que consiste em mais uma vantagem de se utilizar a amostragem de Lebesgue, além obviamente, das tantas já elencadas nesta tese. Além disso, para que a sequência ótima de atrasos aconteça os IAAs e os atrasos de controle devem alternar com valores máximos e mínimos em COAC consecutivos a partir do 0-ésimo COAC. Fato este cujo significado é - quanto mais variante no tempo são os atrasos do sistema de controle, maior é o avanço relativo de fase que o ZOH variante pode introduzir no sistema de*

<sup>11</sup>Para se garantir desempenho satisfatório o valor de  $\tau_s \leq \frac{\pi}{10\omega_{BW}}$ , onde  $\omega_{BW}$  é a largura de banda do sistema de controle em malha fechada. Isto corresponde a fazer a frequência de amostragem  $\omega_s$  cerca de vinte vezes maior que  $\omega_{BW}$ .

controle.

A última afirmativa da observação precedente é sumarizada no seguinte teorema.

**Teorema 4.8 (Variabilidade dos atrasos em um sistema de controle)** *Se um sistema de controle é submetido a atrasos variantes no tempo e  $\tau_k \leq \tau_s$ , então, quanto mais variante no tempo são os atrasos do sistema de controle, maior é o avanço relativo de fase que o ZOH pode introduzir no mesmo.*  $\diamond$

**Prova:** Satisfeitas as hipóteses enunciadas, o resultado segue diretamente do Teorema 4.6.  $\square$

**Observação 4.7 (Por que o IAC deve ser variante no tempo?)** *Como já provado no Teorema 4.6 da fase relativa  $\phi_k(\omega)$ , a fase relativa máxima  $\phi_{k_{\max}}(\omega)$  introduzida pelo ZOH ocorre quando o IAS é máximo - o que justifica a utilização da amostragem de Lebesgue - e o IAA é mínimo. Ora, mas se a variabilidade dos atrasos e, conseqüentemente, do IAA podem introduzir avanço de fase no sistema de controle é natural se imaginar, pelas mesmas razões, que fazendo-se variar o IAC também se pode introduzir avanço relativo de fase no sistema de controle. Contudo, como o ZOH presente na entrada do controlador é fictício, não é físico, é natural concluir que tal ZOH não gere nem avanço, nem atraso relativo de fase no sistema de controle. Já que a geração de avanço e atraso relativos de fase é uma característica física do ZOH físico e não do ZOH fictício.*

**Observação 4.8 (Invariância ao degrau para discretização do controlador)** *Embora o ZOH presente ficticiamente na entrada do controlador não gere nem avanço, nem atraso relativo de fase, discretizar o controlador utilizando o método da invariância ao degrau, tem todas os benefícios já discutidos na seção precedente. Inclusive, o benefício da redução da variância do sistema, resultante da variação temporal do IAC.*

As observações precedentes, por si só, justificam a discretização do controlador utilizando-se o método da invariância ao degrau e com intervalo de amostragem variante no tempo. Tais desenvolvimentos já foram apresentados neste capítulo. A seguir será apresentado um dos efeitos mais esclarecedores da teoria de sistemas amostrados. Tal efeito é uma consequência direta do conceito de fase relativa, introduzida aqui como uma das contribuições desta tese.

## 4.10 Consequência do conceito de fase relativa

A Figura 4.29 foi adaptada da tese de Jury [JURY, 1953, p.9] para o contextualizar e/ou explicar a amostragem de um sistema de tempo contínuo  $G$ . Tal sistema é dotado de atuadores  $A$  em suas entradas e sensores  $S$  em suas saídas, como ilustrado na referida figura. Além disso, nos

sistemas de dados amostrados clássicos a amostragem é síncrona. Neste caso, os sinais de entrada de tempo contínuo  $\mathbf{u}(t)$  e saídas de tempo contínuo  $\mathbf{y}(t)$  do sistema são amostrados simultaneamente. Tal amostragem ocorre quando as chaves ilustradas na Figura 4.29a fecham. A consequência imediata da simultaneidade do fechamento destas chaves é que os intervalos de amostragem para amostrar os sinais  $\mathbf{u}(t)$   $\tau_a$  e  $\mathbf{y}(t)$   $\tau_s$  são iguais. Isto é,  $\tau_a = \tau_s$ . E mais, essa igualdade  $\tau_a = \tau_s$  ou  $\tau_{a_k} = \tau_{s_k}$  ocorre independentemente de  $\tau_a$  e  $\tau_s$  serem invariantes no tempo ou  $\tau_{a_k}$  e  $\tau_{s_k}$  serem variantes no tempo.

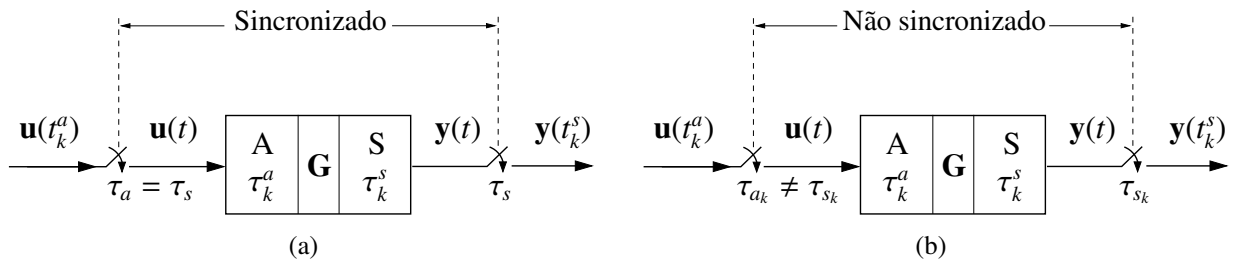


Figura 4.29: Sistema de dados amostrado: (a) Sistema invariante no tempo; (b) Sistema variante no tempo.

Para alguns sistemas variantes no tempo, como é o caso dos NCSs, o sincronismo discutido no parágrafo anterior não é garantido. Neste caso, como ilustrado na Figura 4.29b  $\tau_{a_k} \neq \tau_{s_k}$ . Os métodos de amostragem existentes são válidos apenas para o caso em que os sinais de entrada e os sinais de saída são amostrados simultaneamente. A violação da hipótese de sincronismo, simultaneidade da amostragem dos sinais de entrada e de saída dos sistema amostrado, torna o comportamento do sistema amostrado inesperado. Tal afirmação será ilustrada a seguir com um exemplo.

**Exemplo 4.3 (Efeito da fase relativa)** *Dados as funções de transferência do controlador  $C_a(s)$  e da planta  $G(s)$ , obtenha os MEDs da planta e do controlador operando segundo as abordagens nNCSD, NCSav e GET para  $\tau_k \leq \tau_s$  e simule tais sistemas quando submetido às seqüências de atrasos:  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  e  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .*

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)} \tag{4.211}$$

$$C_a(s) = 1,5 \left( 1 + \frac{0,035s}{1 + 0,0035s} \right) \tag{4.212}$$

**Solução 4.3** *As matrizes da representação em espaço de estados do controlador de tempo contínuo, equações (4.167) e (4.168), são:  $\mathbf{A}_c = -285,7143$ ,  $\mathbf{B}_c = 64$ ,  $\mathbf{C}_c = -66,9643$  e  $\mathbf{D}_c = 16,5$  e as matrizes da representação em espaço de estados da planta, equações (4.31) e (4.32), são:*

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} 0 & 31,25 \end{bmatrix} \tag{4.213}$$



**Planta com  $\tau_k = 0$**  - o MED das equações (4.31) e (4.32) é apresentado nas equações (4.38) e (4.39), com:

$$\Phi_p = e^{A_p \tau_s} = \begin{bmatrix} e^{-\tau_s} & 0 \\ 1 - e^{-\tau_s} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

$$\Gamma_p = \int_0^{\tau_s} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p = 32 \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau_s} \\ -1 + \tau_s + e^{-\tau_s} \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

dadas pelas equações (4.40) e (4.41), com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas por (4.213) e  $\tau_s = 2,0$  ms.

**Planta com  $\tau_k \leq \tau_s$**  - o MED das equações (4.64) e (4.65) é apresentado nas equações (4.66) e (4.67), com:

$$\Phi_p = e^{A_p \tau_s} = \begin{bmatrix} e^{-\tau_s} & 0 \\ 1 - e^{-\tau_s} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

$$\Gamma_{p0}(\tau_k) = \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p = 32 \begin{bmatrix} 1 - e^{-(\tau_s - \tau_k)} \\ -1 + \tau_s - \tau_k + e^{-(\tau_s - \tau_k)} \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

$$\Gamma_{p1}(\tau_k) = e^{A_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{A_p s} ds \mathbf{B}_p = 32 \begin{bmatrix} e^{-\tau_s}(e^{\tau_k} - 1) \\ e^{-\tau_s}(1 - e^{\tau_k}) + \tau_k \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

dadas pelas equações (4.68), (4.69) e (4.70), com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas por (4.213) e  $\tau_s = 2,0$  ms.

**Controlador GT** - o MED das equações (4.167) e (4.168) é apresentado nas equações (4.169) e (4.170), com

$$\Phi_c = e^{A_c \tau_s} = e^{-285,7143 \tau_s} \quad (4.219)$$

$$\Gamma_c = \int_0^{\tau_s} e^{A_c s} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143 \tau_s}) \quad (4.220)$$

dadas pelas equações (6.33) e (6.34), com  $\mathbf{A}_c = -285,7143$ ,  $\mathbf{B}_c = 64$ ,  $\mathbf{C}_c = -66,9643$  e  $\mathbf{D}_c = 16,5$  e  $\tau_s = 2,0$  ms.

**Controlador GET** - o MED das equações (4.167) e (4.168) é apresentado nas equações (6.35) e (6.36), com

$$\Phi_c(\tau_{c_k}) = e^{A_c \tau_{c_k}} = e^{-285,7143 \tau_{c_k}} \quad (4.221)$$

$$\Gamma_c(\tau_{c_k}) = \int_0^{\tau_{c_k}} e^{A_c s} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143 \tau_{c_k}}) \quad (4.222)$$

dadas pelas equações (6.37) e (6.38), com  $\mathbf{A}_c = -285,7143$ ,  $\mathbf{B}_c = 64$ ,  $\mathbf{C}_c = -66,9643$  e  $\mathbf{D}_c = 16,5$ , com  $\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc}$  e  $\tau_s = 2,0$  ms.

As respostas ao degrau unitário foram obtidas para o NCS - topologia S-CA - submetido a uma sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , com lei de formação  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ ,

$\tau_k \leq \tau_s = 2,0 \text{ ms}$ ,  $\tau_k^s = 30 \mu\text{s}$ ,  $\tau_k^c = 20 \mu\text{s}$ ,  $\tau_k^a = 30 \mu\text{s}$ . Nestas condições, uma ampliação da temporização dos dois primeiros COAC do NCS é ilustrada na Figura 4.30.

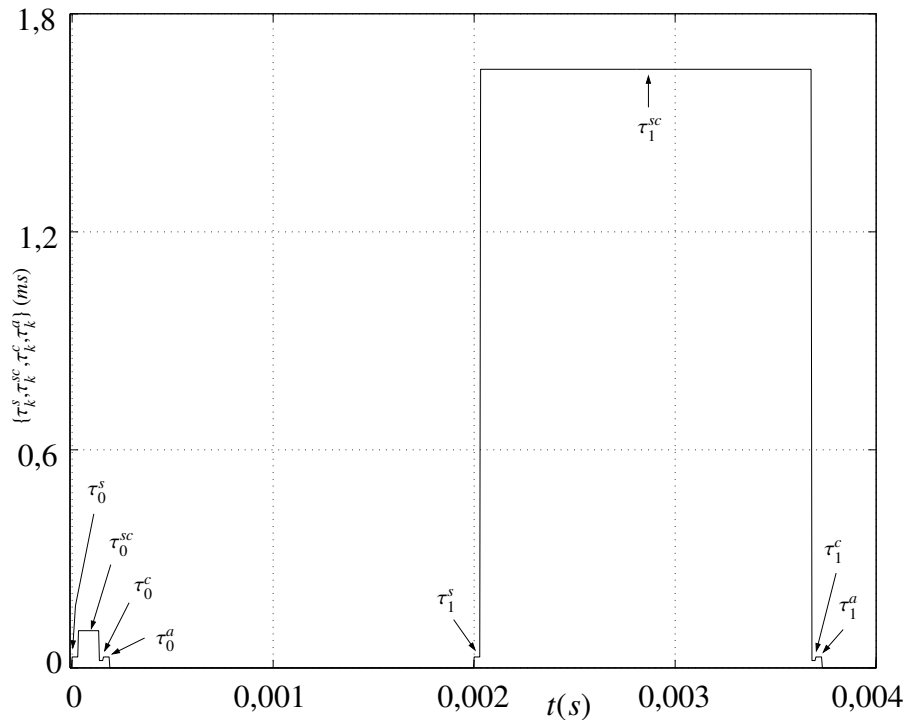


Figura 4.30: Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , tem lei de formação do tipo  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

Pode-se observar nesta figura, de forma explícita, os atrasos do NCS (a saber para a topologia S-CA:  $\tau_k^s$ ,  $\tau_k^{sc}$ ,  $\tau_k^c$  e  $\tau_k^a$ ), os quais compõem o valor de  $\tau_k$  que, por definição, é dado por  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a$ . Sob tais condições, as respostas ao degrau unitário do sistemas de controle de tempo contínuo (nNCSC), equações (4.31) e (4.32); do sistema de controle não conectado em rede com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD), equações (4.169), (4.170), (4.219) e (4.220); e, do NCS submetido ao atraso  $\tau_k$  variante no tempo (NCSav) com o controlador de tempo discreto operando com  $\tau_{c_k} = \tau_s$ , invariante no tempo, são ilustradas na Figura 4.31.

Sob as mesmas condições, repetindo-se a simulação para a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ , cuja ampliação da temporização dos dois primeiros COAC do NCS é ilustrada na Figura 4.32 e as respostas ao degrau unitário são apresentadas na Figura 4.33.

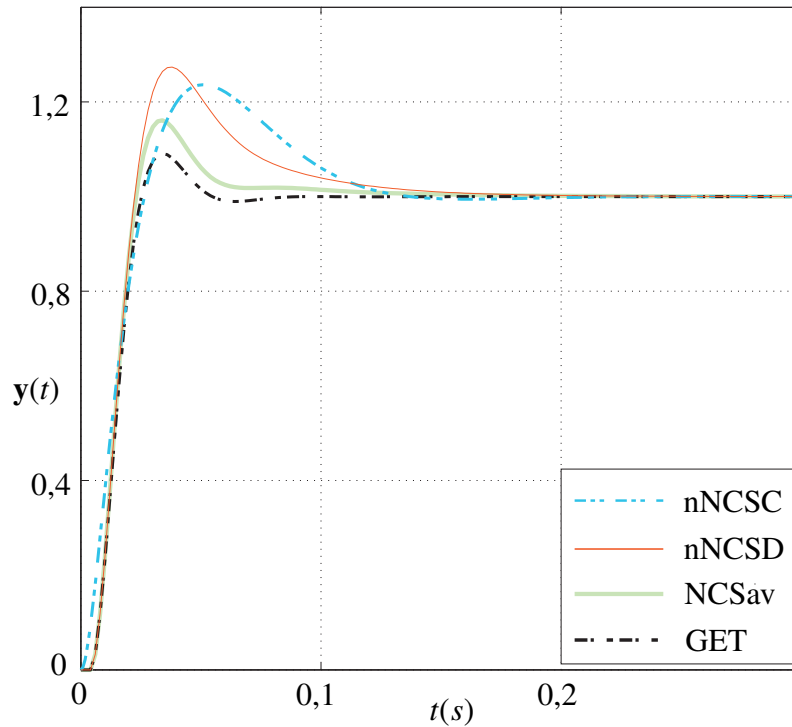


Figura 4.31: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

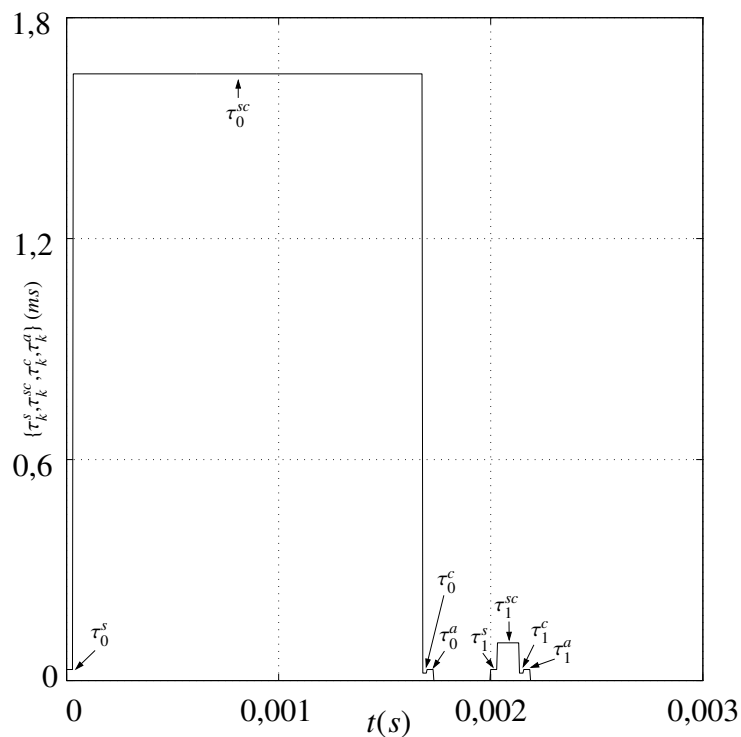


Figura 4.32: Ampliação da temporização dos dois primeiros COAC para o caso em que a sequência de atrasos de controle  $\{\tau_k\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$  tem lei de formação do tipo  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

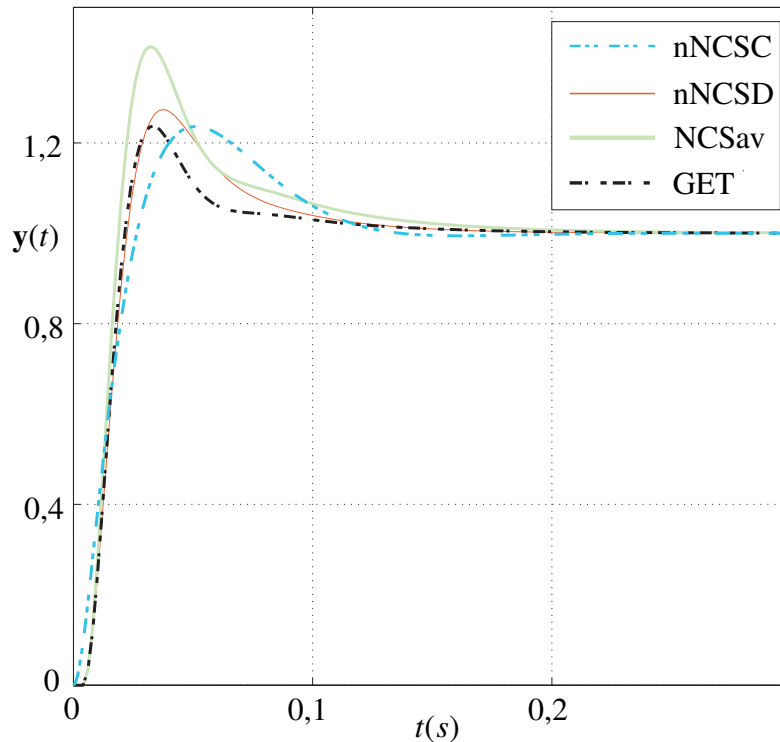


Figura 4.33: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSD), do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ .

*Comparando as respostas ao degrau unitário (RDUs) dos NCSs: NCSav e GET, aqui apresentadas, com as apresentadas no Capítulo 1, Seção 1.1, verifica-se que o comportamento das RDUs de tais sistemas são diferentes. Percebe-se claramente que os overshoots de tais curvas possuem valores diferentes daqueles das curvas apresentadas no exemplo do Capítulo 1. É notório que os efeitos dos atrasos das sequências de atrasos que os NCSs foram submetidos se invertem. Isto é, nos resultados apresentados neste exemplo quando a sequência de atrasos aplicados aos NCSs é  $\{0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  as RDUs dos NCSs NCSav e GET têm overshoots inferiores aos overshoots das RDUs dos sistemas nNCSC e NCSD. Tais resultados são contrários aos apresentados no exemplo do Capítulo 1. Esse efeito contrário também ocorre quando os NCSs: NCSav e GET são submetidos à sequência de atrasos  $\{0,8\tau_s, 0,1\tau_s, 0,8\tau_s, 0,1\tau_s, \dots\}$ . Tais fatos ocorrem devido ao efeito causado pela fase relativa, uma vez que, os MEDs foram obtidos com a violação da hipótese de sincronismo sensores atuadores no processo de amostragem. No caso deste mesmo exemplo apresentado no Capítulo 1 essa violação não ocorre devido o modelo de tempo contínuo da planta do NCS ter sido integrado via método de Runge-Kutta de quarta ordem, o que minimiza os efeitos da fase relativa. Desse modo, quando o modelo de tempo contínuo da planta é integrado com o método de Runge-Kutta de quarta ordem a hipótese de sincronismo (sensores atuadores) da amostragem dos sinais de entrada e de saída da planta não é violada.*

**Observação 4.9 (Comentários adicionais sobre o Exemplo 4.3)** *Os resultados apresentados no Exemplo 4.3, com o erro já discutido no referido exemplo, foram publicados como corretos no CBA2010 [SILVA; LIMA, 2010]. Entretanto, como já enfatizado e provado neste capítulo, os resultados deste exemplo e do artigo supracitado estão errados. Erro este cometido durante o processo de discretização da planta, o qual, violou a hipótese de sincronismo necessária entre os sinais de entrada e de saída da planta.*

Por fim, independentemente do modo de operação do NCS, o fato dos sinais  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{r}(t)$  terem que ser amostrados simultaneamente força a necessidade de sincronismo entre os *clocks* dos nós sensores e controladores do NCS. Tal fato será discutido em detalhes na seção seguinte.

### 4.11 Sincronismo dos relógios dos nós componentes do NCS

O conceito de sincronismo é de fundamental relevância para a operação de muitos sistemas distribuídos. Um exemplo típico, ocorre, naturalmente, em sistemas telefônicos de comunicações, nos quais, os relógios das centrais telefônicas são sincronizados por um relógio global, também chamado relógio universal. Tal relógio possibilita o correto funcionamento do sistema, assim como, viabilizar a medição do tempo de duração das chamadas, para posterior cobrança dos serviços aos clientes.

Tal como nos sistemas telefônicos de comunicações, para os NCSs o sincronismo dos relógios de seus componentes é fundamental para o correto funcionamento do mesmo. Neste caso, a necessidade de sincronismo e relógio universal torna-se evidente quando o sinal de referência de tempo contínuo  $\mathbf{r}(t)$  é variante no tempo, uma vez que, é de suma relevância amostrar simultaneamente os sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  como ilustrado na Figura 4.34.

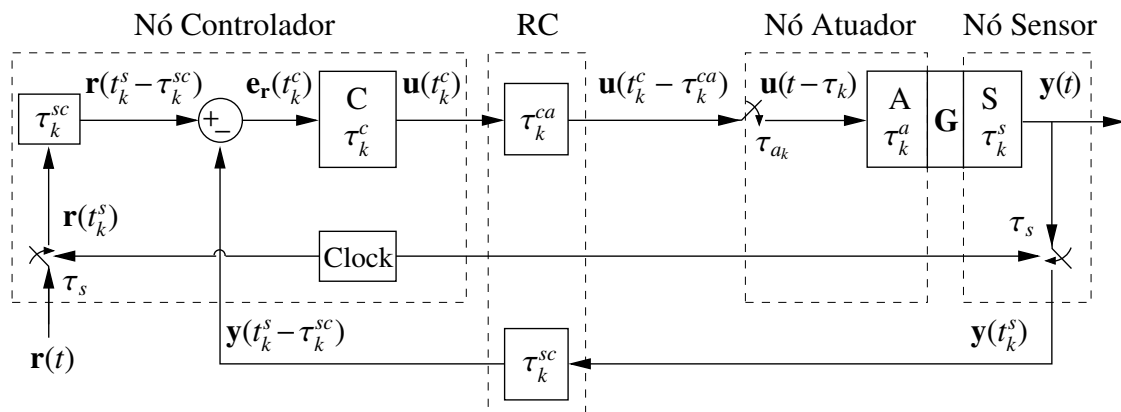


Figura 4.34: Diagrama de blocos de um NCS com amostragem simultânea dos sinais de entrada e saída.

Observe-se na Figura 4.34 que, embora seja considerado o sincronismo entre os nós componentes, a necessidade de operação simultânea ocorre apenas na amostragem do sinal de referên-

cia  $\mathbf{r}(t)$  e de saída  $\mathbf{y}(t)$  da planta. Tal simultaneidade de amostragem do sinal de referência e de saída da planta é explicitada na Figura 4.34 pelas setas que conectam o bloco do *clock* (relógio) às chaves que representam os conversores A/Ds da entrada e da saída do NCS (amostragem de  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ ). O requisito da simultaneidade da amostragem dos sinais  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  seria dispensável caso o atraso  $\tau_k^{sc}$ , introduzido pela rede de comunicação (RC), fosse invariante no tempo e a amostragem de  $\mathbf{y}(t)$  fosse realizada com PAS  $\tau_s$  invariante no tempo.

A análise da Figura 4.35 é esclarecedora e reforça tal afirmação. Desta figura pode-se observar que, para que o erro de referência de tempo discreto  $\mathbf{e}_r(t_k^s)$  seja corretamente calculado, as amostras dos sinais de tempo discreto de saída da planta  $\mathbf{y}(t_k^s)$  e de referência  $\mathbf{r}(t_k^s)$  devem ser comparadas, amostra por amostra, isto é,  $\mathbf{r}(t_k^s - \tau_k^{sc})$  com  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$ . Em outras palavras, a amostra  $\mathbf{r}(t_k^s - \tau_k^{sc})$  deve ser comparada com a amostra  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$ , a amostra  $\mathbf{r}(t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^{sc})$  deve ser comparada com  $\mathbf{y}(t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^{sc})$ , a amostra  $\mathbf{r}(t_{k+2}^s - \tau_{k+2}^{sc})$  deve ser comparada com  $\mathbf{y}(t_{k+2}^s - \tau_{k+2}^{sc})$  e assim sucessivamente, como ilustrado nas Figuras 4.35c e 4.35d.

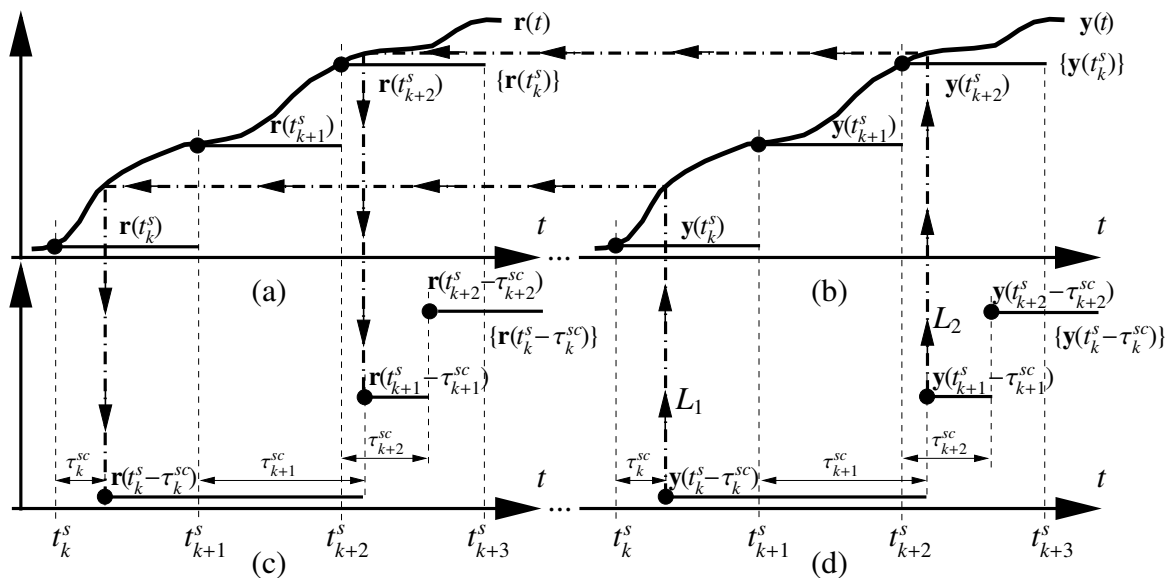


Figura 4.35: Ilustração da necessidade sincronização e relógio universal entre os nós do NCS.

É importante também evidenciar que quando  $\tau_k^{sc} \leq \tau_s$  é possível comparar  $\mathbf{r}(t_k^s)$  com  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$ , uma vez que, neste caso  $\mathbf{e}_r(t_k^s - \tau_k^{sc})$  é obtido de maneira correta (veja linha  $L_1$  que vai da Figura 4.35d para a Figura 4.35c). Percebe-se assim que se pode comparar, sem problemas, as amostras  $\mathbf{r}(t_k^s)$  da Figura 4.35a com  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$  da Figura 4.35d.

Entretanto, quando<sup>12</sup>  $\tau_k^{sc} > \tau_s$  mais evidente fica a necessidade de sincronismo. Observa-se, por exemplo, a linha  $L_2$  da Figura 4.35d para a Figura 4.35c, percebe-se que na ausência de sincronismo a amostra  $\mathbf{y}(t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^{sc})$  da Figura 4.35d seria comparada com a amostra  $\mathbf{r}(t_{k+2}^s)$  da Figura 4.35a, em vez de ser comparada com a amostra  $\mathbf{r}(t_{k+1}^s - \tau_{k+1}^{sc})$  da Figura 4.35c. O resultado

<sup>12</sup>Para NCSs de estrutura direta, os quais são o foco desta tese, como já provado no Capítulo 3, Teorema 3.15, nunca ocorrerá de  $\tau_k^{sc} > \tau_s$ .

de um erro como este tem implicações diretas no funcionamento do NCS, uma vez que levaria a um erro no cálculo do sinal de erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  de tempo discreto. É relevante enfatizar ainda que a sincronização e relógio universal são requeridos para medir os atrasos introduzidos pela rede de comunicação, com os quais são calculados  $\tau_k$  e  $\tau_{c_k}$ . A literatura sobre sincronização é vasta e diversificada [SCHEDL, 1996; SUNDARARAMAN, 2005; RHEE, 2009; SEONG, 2010].

## 4.12 Cálculo da exponencial de matriz

Uma das inovações trazidas por esta tese, está justamente na introdução dos modos de operação GE e GET do controlador. Entretanto, a operação do controlador nesses modos resulta em algumas implicações. Por exemplo, como demonstrado no Capítulo 3 o intervalo de amostragem do controlador é variante no tempo, desde que, algum dos atrasos  $\tau_k^s$  e/ou  $\tau_k^{sc}$  seja(m) variante(s) no tempo. A consequência dessas variabilidades é a rediscritização do controlador, isto é, o recálculo dos coeficientes da equação discreta do controlador [SILVA; LIMA, 2008; ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.328].

Rediscritizar o controlador é uma desvantagem, pois aumenta o tempo de execução da CPU (*Central Processing Unit*) do nó controlador [ÅRZÉN, 1999] e pode ocorrer erros ou de natureza física ou lógica (aritméticas de ponto fixo e/ou ponto flutuante) utilizada [HANSELMANN, 1987]. Outra desvantagem e/ou cuidado a ser tomado está no cálculo de  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}$ , realizado no recálculo dos coeficientes da equação de diferença do controlador, que além de aumentar o tempo de execução da CPU, pode não convergir [MOLER; LOAN, 1978]. Dessa maneira, deve-se utilizar a forma mais conveniente, entre as 19 formas possíveis, de calcular  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}$  [MOLER; LOAN, 1978, 2003].

Para realçar tal problema, considera-se o seguinte exemplo [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.36].

**Exemplo 4.4 (Cálculo de exponencial de matriz)** *Obtenha  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}$  para  $\mathbf{A}_c$  dada por:*

$$a) \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b) \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Solução 4.4** *A solução desejada é obtida por métodos diferentes para cada caso.*

a) *Método da expansão em série de potência:*

$$e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}{1!} + \frac{\mathbf{A}_c^2 \tau_{c_k}^2}{2!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{c_k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{c_k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Método da transformada de Laplace:*

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

como  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}]$  resulta que

$$e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}} = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{-\tau_{c_k}} & 0 \\ 1 - e^{-\tau_{c_k}} & 1 \end{bmatrix}$$

Nos exemplos apresentados no Capítulo 1, o cálculo de  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}$  foram realizados diretamente e de forma exata, uma vez que, a matriz  $\mathbf{A}_c$  é de dimensão unitária. Todavia, quando a matriz  $\mathbf{A}_c$  for de dimensão superior a um, o cálculo exato de  $e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}$  nem sempre é trivial, como ilustrado no exemplo precedente. Neste caso, um dos métodos, computacionalmente, eficiente é o da expansão em série de potências, isto é:

$$e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}}{1!} + \frac{\mathbf{A}_c^2 \tau_{c_k}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}_c^n \tau_{c_k}^n}{n!} + \dots \quad (4.223)$$

com  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de mesma ordem de  $\mathbf{A}_c$ .

Além disso, como  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_s$  são diferentes e  $\tau_{c_k}$  é variante no tempo, cria-se uma dificuldade para realizar a análise matemática da malha fechada. Todavia, a simulação foi realizada de forma a representar fielmente os paradigmas de operação do NCS. Como já visto, no exemplo apresentado no Capítulo 1, os resultados obtidos por simulação são encorajadores.

**Observação 4.10 (MED dos controladores GE e GET)** *Nos modelos discretos dos controladores operando no modo GE e no modo GET  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  é variante no tempo. O fato de no instante de execução da lei de controle  $t_{k+1}^c$  ser desconhecido é um problema. Isso impossibilita determinar de forma exata o valor de  $\tau_{c_k}$ . Para resolver este problema, na prática, pode-se substituir  $\tau_{c_k}$  por  $\tau_{c_{k-1}}$  na expressão do controlador. Ou, de modo mais elegante, pode-se trocar os índices  $k+1$  e  $k$  dos instantes de amostragem, respectivamente, por  $k$  e  $k-1$ , o que resulta  $\tau_{c_k} = t_k^c - t_{k-1}^c$ . Do ponto de vista teórico isso evidentemente é uma incoerência. Todavia, do ponto de vista prático operacional, nenhuma diferença ou quase nenhuma diferença deve ocorrer na resposta do NCS, uma vez que, a melhoria de desempenho obtida é graças à variabilidade dos atrasos, que evidentemente, causa a variabilidade dos intervalos de amostragem do controlador e do atuador, os quais, continuam variantes no tempo, independentemente de se utilizar a forma não causal exata  $\tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  ou a forma causal inexata  $\tau_{c_k} = t_k^c - t_{k-1}^c$  do IAC no modelo do controlador.*

**Observação 4.11 (Recálculo das matrizes do controlador)** *Quando o controlador opera no modo GE ou no modo GET as matrizes do modelo equivalente discreto do controlador devem*



*ser recalculadas a cada COAC. Entretanto, esse recálculo além de consumir tempo da CPU pode gerar problemas indesejáveis de aproximações numéricas. Uma alternativa para evitar tais infortúnios é fazer estes cálculos a priori para diversos valores de IAC. Neste caso, deve-se obter a priori diversas representações de tempo discreto do controlador e durante a execução apenas utilizar uma destas representações do controlador<sup>13</sup>. A escolha da representação a ser utilizada pode ser feita com base no valor do atraso sensor controlador ou com base em algum parâmetro de desempenho da resposta do NCS. Como o tipo do controlador não muda durante o funcionamento do NCS, problemas como windup e bumpless transfer [JR., 2003] não devem ocorrer.*

Outro problema de destaque nos sistemas lineares invariantes no tempo é a questão dos zeros dos sistemas amostrados. Um resumo no qual é explicitado os principais pontos desse assunto é apresentado na seção seguinte.

## **4.13 Zeros de sistemas amostrados**

Um problema definido há mais de quarenta anos e ainda sem solução definitiva, em teoria de controle, diz respeito às relações entre os zeros de um sistema em tempo contínuo e sua versão amostrada. Contrariamente à intuição lógica, a teoria estabelecida revela que para diferentes valores de períodos de amostragem, em muitas aplicações, zeros instáveis surgirão quando o período de amostragem tem seu valor reduzido, mesmo quando todos os zeros do sistema contínuo são estáveis [ÅSTRÖM, 1984]. Além disso, sistemas contínuos no tempo, com zeros localizados no semi-plano esquerdo, nem sempre são transformados em sistemas amostrados, com zeros contidos no disco unitário, e vice-versa. Isto significa que, métodos de projeto para sistemas amostrados baseados no cancelamento de zeros do processo, podem funcionar bem para certos períodos de amostragem e falhar para outros.

Conforme mostrado em Åström [ÅSTRÖM, 1980, 1984], todo sistema contínuo no tempo em que o número de pólos é superior ao número de zeros em dois, resultará em um sistema amostrado com zeros instáveis, desde que o período de amostragem seja suficientemente pequeno. Assim, sistemas discretos com zeros instáveis, são muito comuns. Este tipo de problema é próprio da conversão de uma função de transferência do plano-s para o plano-z. Por fim, como tal abordagem não foi utilizada nas discretizações apresentadas nesta tese, o problema de zeros amostrados instáveis não ocorre aqui.

---

<sup>13</sup>Isto não foi feito nesta tese. É apenas uma possibilidade para resolver o problema.

## 4.14 Considerações finais

Na primeira parte deste capítulo foram deduzidos os modelos equivalentes discretos da planta e do controlador. O método utilizado para a obtenção de tais modelos foi a invariância ao degrau. A justificativa para esta escolha surge naturalmente ao longo das deduções e análises desenvolvidas e apresentadas. Neste contexto, foi desenvolvido e apresentado um amplo estudo sobre o comportamento em frequência dos ZOHs, com largura de pulso invariante no tempo e variante no tempo. Desse estudo ficaram estabelecidas sequências ótimas de atrasos e intervalos de amostragem que determinam as condições para as quais a RDU do sistema de tempo discreto, variante no tempo, pode ter desempenho melhor que o desempenho do mesmo sistema de tempo contínuo sem atraso.

Na segunda parte deste capítulo é apresentada a problemática sobre sincronismo e as razões para a necessidade de sincronismo dos relógios dos nós componentes do NCS. Também foi mostrado o problema de cálculo da exponencial de matrizes e suas dezenove formas de realização. Por fim, foi abordado o problema dos prováveis zeros instáveis que surgirão ao se converter um sistema de tempo contínuo, plano- $s$ , em um sistema de tempo discreto, plano- $z$ , de um sistema amostrado.

No capítulo seguinte será abordado a questão da amostragem por cruzamento de nível. A qual, é uma das formas de amostragem com intervalo de amostragem variante no tempo. Neste sentido, uma nova técnica de amostragem por cruzamento de nível será proposta e apresentada no capítulo seguinte.

# Capítulo 5

## Amostragem por cruzamento de nível

### 5.1 Introdução

Os recursos físicos dos sistemas de controle em rede além de compartilhados são, em geral, limitados. Neste caso, nem sempre os recursos necessários para o correto funcionamento do sistema de controle estarão disponíveis no instante esperado. Além disso, amostrar os sinais do sistema de controle com amostragem periódica pode sobrecarregar o NCS. Isso ocorre devido ao fato de que um número, possivelmente maior, que o necessário de pacotes de dados poderão estar sendo gerados para trafegar pela rede comunicação. O processamento e execução de algoritmos de controle com base em tais dados é outra razão de sobrecarga do NCS.

Uma alternativa para superar os problemas mencionados no parágrafo precedente é amostrar o sinal do sistema com intervalo de amostragem variante no tempo. Para tornar essa ideia viável, uma nova técnica de amostragem será proposta e apresentada neste capítulo. A técnica de amostragem por cruzamento de nível que aqui será apresentada é uma das contribuições desta tese. Esta se diferencia das demais apresentadas na literatura pelo fato dos instantes de amostragem  $t_k$  do sinal amostrado serem determinados a partir de expressões analíticas obtidas a partir do sinal de tempo contínuo a ser amostrado.

O capítulo inicia-se com a Seção 5.2, na qual, é apresentado um estudo sobre teoria de funções e conjuntos. Na Seção 5.3 é apresentada a amostragem por cruzamento de nível. Por fim, na Seção 5.4 são apresentadas as conclusões do capítulo e o que será apresentado no capítulo seguinte.

### 5.2 Preliminares

Nesta seção serão pré-apresentados alguns conceitos de suma relevância para o entendimento deste capítulo. Dessa maneira, serão apresentados alguns resultados sobre teoria de conjuntos e funções. No tocante à teoria de conjuntos será exibido o conceito de corpo real e suas pro-

priedades. E, no que concerne a funções será apresentado o conceito de função inversa, mais especificamente, o teorema da aplicação inversa.

### 5.2.1 Funções e conjuntos

Um dos tópicos relevantes da teoria de funções é o conceito de função inversa. Saber como e em que condições pode-se obter a inversa de uma função é um dos pontos de discussão enfatizado a seguir. O outro ponto dessa discussão está relacionado à teoria de conjuntos, o conceito de corpo.

Para começar, a seguir é apresentado o teorema da aplicação inversa para funções de uma variável real [LIMA, 2008, p.93]<sup>1</sup>.

**Teorema 5.1 (Teorema da aplicação inversa - domínio real)** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção entre os conjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , com inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  e seja  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação<sup>2</sup> de  $X$ . Se  $f$  é derivável no ponto  $c \in X \cap X'$  e  $f^{-1}$  é contínua no ponto  $b = f(c)$ , então  $f^{-1}$  é derivável no ponto  $b$  se, e somente se,  $f'(c) \neq 0$ . No caso afirmativo, tem-se*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)} \tag{5.1}$$

◇

**Prova:** Com efeito, se  $x_n \in X - \{c\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$  então, como  $f$  é injetiva e contínua no ponto  $c$ , tem-se  $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Portanto,  $b \in Y \cap Y'$ . Se a inversa  $f^{-1}$  de  $f$  for derivável no ponto  $b$ , a igualdade  $f^{-1}(f(x)) = x$ , válida para todo  $x \in X$ , juntamente com a regra da cadeia, tem-se  $(f^{-1})'(b) \cdot f'(c) = 1$ . Em particular,  $f'(c) \neq 0$ . Reciprocamente, se  $f'(c) \neq 0$  então, para qualquer sequência de pontos  $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , da continuidade de  $f^{-1}$  no ponto  $b$ , tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , portanto

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{y_n - b}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)} \right]^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(c)} \tag{5.2}$$

o que conclui a prova [LIMA, 2008, p.93]. □

De outro modo, o teorema da aplicação inversa pode ser enunciado assim: *Se  $f$  é uma função derivável em um intervalo aberto  $I$  com derivada  $f'(x) \neq 0$  em  $I$ , então,  $f$  tem inversa  $f^{-1}$  em  $I$  e  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ .*

<sup>1</sup>Uma versão deste teorema para funções de  $n$  variáveis pode ser encontrado na referência [LIMA, 2007, p.115].

<sup>2</sup>Diz-se que  $c \in \mathbb{R}$  é um ponto de acumulação do conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando toda vizinhança  $V$  de  $c$  contém algum ponto de  $X$  diferente do próprio  $c$ , isto é,  $V \cap (X - \{c\}) \neq \emptyset$ . Equivalentemente: para todo  $\varepsilon > 0$  tem-se  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap (X - \{c\}) \neq \emptyset$  [LIMA, 2008, p.52].

Dizer que  $f'(x) \neq 0$  em  $I$  é o mesmo que afirmar que  $f'(x) > 0$  ou,  $f'(x) < 0$  em  $I$ , o que também é equivalente a dizer que  $f(x)$  é crescente quando  $f'(x) > 0$  em  $I$  e que  $f(x)$  é decrescente quando  $f'(x) < 0$  em  $I$ .

**Observação 5.1 (Teorema da aplicação inversa)** *É relevante salientar a interpretação do Teorema da aplicação inversa. Sobretudo, no tocante ao fato de que a definição de função inversa é local, isto é, nas vizinhanças de um ponto. Ponto este contido em um intervalo aberto (para funções de uma variável real) ou, em uma bola aberta (para funções de  $n$  variáveis reais), ou ainda, em uma região do plano complexo em que  $f$  é analítica (para funções complexas<sup>3</sup>).*

**Exemplo 5.1 (Função inversa do seno)** *Obtenha a função inversa  $f^{-1}$  dada  $f$  a seguir:*

$$f(\theta) = A_M + A_0 \text{sen}(\theta) \quad (5.3)$$

**Solução 5.1** *A derivada  $f'(\theta) = \cos(\theta)$  e portanto  $f'(\theta) = 0$  quando  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ . Neste caso,*

$$\arcsen\left(\frac{f(\theta) - A_M}{A_0}\right) = \theta + 2\pi n, \quad \text{com } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{ou} \quad (5.4)$$

$$\arcsen\left(\frac{f(\theta) - A_M}{A_0}\right) = \pi - \theta + 2\pi n, \quad \text{com } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (5.5)$$

e do fato que  $\theta = f^{-1}(f(\theta))$  as equações (5.4) e (5.5) passam a ser:

$$f^{-1}(f(\theta)) = \theta = -2\pi n + \arcsen\left(\frac{f(\theta) - A_M}{A_0}\right), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{ou} \quad (5.6)$$

$$f^{-1}(f(\theta)) = \theta = \pi(2n + 1) - \arcsen\left(\frac{f(\theta) - A_M}{A_0}\right), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (5.7)$$

e, desse modo, conclui-se que a  $f$  tem infinitas inversas, cada uma delas definida em um intervalo aberto onde a  $f$  é crescente  $\left(\frac{\pi(-1+4n)}{2}, \frac{\pi(1+4n)}{2}\right)$  ou decrescente  $\left(\frac{\pi(1+4n)}{2}, \frac{\pi(3+4n)}{2}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

O conjunto dos números reais é um corpo. Isto significa que estão definidas em  $\mathbb{R}$  duas operações: adição e multiplicação [LIMA, 2008, p.11]. Elas serão enunciadas a seguir, como uma propriedade.

**Propriedade 1 (Operações de adição e multiplicação)** *A adição de dois números reais é sempre um número real. A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.*

<sup>3</sup>A versão do Teorema 5.1 para funções no domínio complexo pode ser encontrada na referência [CHURCHILL; BROWN, 1960, p.181].

### 5.3 Amostragem por cruzamento de nível

A amostragem por cruzamento de nível é o dual da amostragem convencional. Enquanto na amostragem convencional os instantes de amostragem  $t_k = kT, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ , onde  $T \triangleq t_{k+1} - t_k$  é o período de amostragem, na amostragem por cruzamento de nível cada amostra  $f(t_k), \forall k \in \mathbb{Z}_+$  é tomada quando o sinal  $f(t)$  ultrapassa um dos níveis  $a_{N_k} = N_k q$ , com  $N_k \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1,\dots\}$  e  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ , onde  $q \triangleq a_{N_{k+1}} - a_{N_k}$  é o quantum<sup>4</sup>, como ilustrado na Figura 5.1. Neste caso, os intervalos de amostragem  $T_k = t_{k+1} - t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  mudam em função dos instantes de amostragem. Todavia, uma vez conhecidos os instantes de amostragem  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , é possível definir e implementar a amostragem por cruzamento de nível.

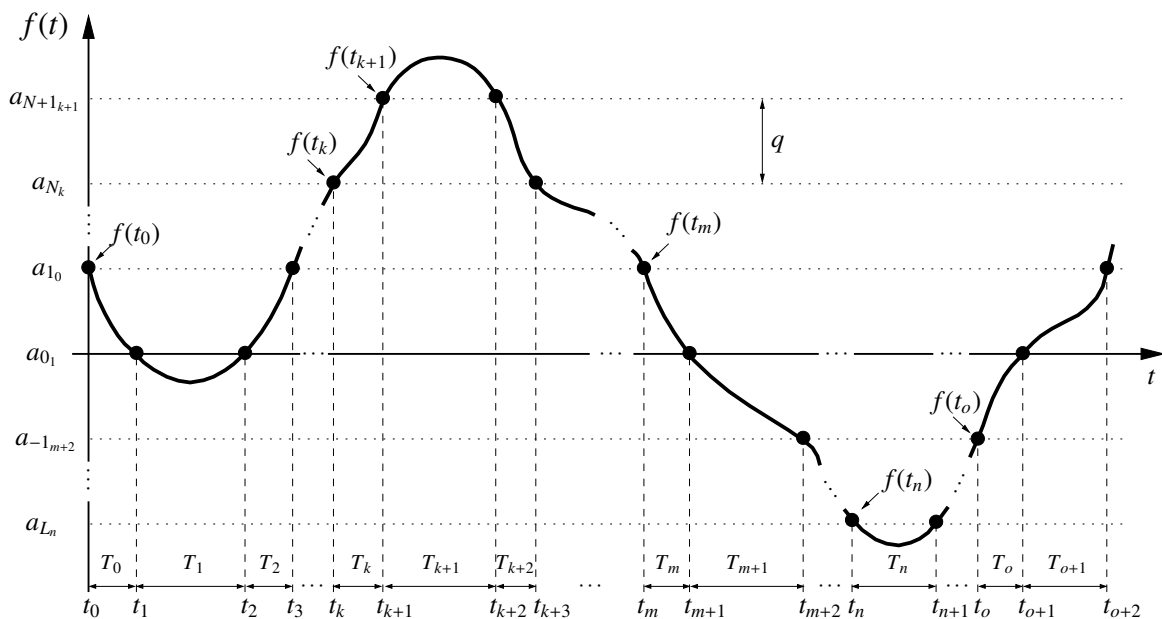


Figura 5.1: Amostragem por cruzamento de nível.

**Observação 5.2 (Níveis de cruzamento do sinal  $f(t)$ )** Os níveis de cruzamento  $a_{N_k} = N_k q$ , com  $N_k \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1,\dots\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $q \triangleq a_{N_{k+1}} - a_{N_k}$  do sinal  $f(t)$  são finitos. Todavia, para um mesmo valor de  $N_k \in \mathbb{Z}$  o subscrito  $k \in \mathbb{Z}_+$  pode assumir mais de um valor. Por exemplo, para o caso da Figura 5.1 pode-se observar que:  $a_{1_0} = a_{1_3} = a_{1_m} = a_{1_{o+2}}$ ,  $a_{0_1} = a_{0_2} = a_{0_{m+1}} = a_{0_{o+1}}$ ,  $a_{N_k} = a_{N_{k+3}}$ ,  $a_{N_{k+1}} = a_{N_{k+2}}$ ,  $a_{-1_{m+2}} = a_{-1_o}$  e  $a_{L_n} = a_{L_{n+1}}$ . Neste caso, os subscritos  $k$  dos  $N_k$  estão associados aos instantes de amostragem  $t_k$  do sinal  $f(t)$ . Naturalmente, como já evidenciado, para um mesmo valor de  $N_k$  pode-se ter vários valores diferentes de  $k$ . O número  $k$  representa o número da amostra do sinal discreto  $f(t_k)$ .

Doravante, serão apresentas as provas e subsídios matemáticos para a determinação dos instantes de amostragem  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e, conseqüentemente, dos intervalos de amostragem  $T_k =$

<sup>4</sup>Como visto no Capítulo 2 equação (2.8) o valor de  $q = \Delta V_{in}/(2^M - 1)$ , onde:  $\Delta V_{in}$  é a faixa de amplitude do conversor A/D utilizado para amostrar o sinal  $f(t)$  e  $M$  é o número de bits do conversor A/D [ALLIER, 2003, 2005].

$t_{k+1} - t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e os atrasos presentes no sistema. Neste sentido, o resultado apresentado no teorema seguinte é relevante.

**Teorema 5.2 (Particionamento do domínio de uma função diferenciável)** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função diferenciável e sejam  $c_0, c_1, \dots, c_i$ , com  $i \in \mathbb{Z}_+$ , os pontos em que  $f' = 0$ , então,  $f$  tem  $i + 1$  funções inversas  $f_i^{-1} : Y \rightarrow X$  e cada  $f_i^{-1}$  está definida em um dos intervalos  $x < c_0, (c_0, c_1), \dots, (c_{i-1}, c_i)$  e  $x > c_i$ .*  $\diamond$

**Prova:** Ora, do teorema da aplicação inversa, Teorema 5.1, sabe-se que o conceito de função inversa é local, assim, da hipótese que  $f' = 0$  apenas nos pontos  $x = c_i, i \in \mathbb{Z}_+$ , tem-se que a  $f$  é crescente ou decrescente entre estes pontos, e desse modo, existem  $i + 1$  funções inversas  $f_i^{-1}$  de  $f$ , sendo que cada  $f_i^{-1}$  está definida em um dos intervalos  $x < c_0, (c_0, c_1), \dots, (c_{i-1}, c_i)$  e  $x > c_i$  em que a  $f$  é crescente ou é decrescente.  $\square$

**Teorema 5.3 (Os instantes de amostragem são números reais)** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é um sinal (função) não constante e diferenciável, amostrado por cruzamento de níveis, então os pontos de amostragem  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , são números reais.*  $\diamond$

**Prova:** Da hipótese que  $f : X \rightarrow Y$  ser um sinal (função) não constante e diferenciável, decorre do Teorema 5.2 que  $f$  tem pontos  $c_0, \dots, c_i$  com  $i \in \mathbb{Z}_+$  de derivada nula  $f'(c_i) = 0$  (pontos de máximos e mínimos ou pontos críticos). Neste caso, é possível particionar o domínio da  $f$  em  $i + 1$  partições, nas quais a  $f$  é crescente ou é decrescente e, portanto, com inversas  $f_i^{-1}$  nos intervalos em que  $f$  é crescente ou é decrescente. Ora, mas se existe inversa  $f_i^{-1}$  em cada região de crescimento ou de decrescimento da  $f$  e do fato que na amostragem por cruzamento de nível  $f(t) = f(t_k) = a_{N_k} = N_k q, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e  $\forall N_k \in \mathbb{Z}$ , é possível explicitar os instantes de amostragem em função dos pontos  $a_{N_k}$  de cruzamento de níveis, isto é,  $t_k = f_i^{-1}(a_{N_k}), \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e  $\forall N_k \in \mathbb{Z}$ . Por fim, como  $a_{N_k} = N_k q$  é o produto de dois número  $N_k$  e  $q$  reais, decorre da Propriedade 1 que  $a_{N_k}$  é um número real e assim  $t_k = f_i^{-1}(a_{N_k})$  também é um número real.  $\square$

**Teorema 5.4 (Atrasos e intervalos de amostragem são números reais)** *Se os instantes de amostragem  $t_k^s, t_k^c$  e  $t_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , são números reais, então os intervalos de amostragem  $\tau_{s_k}, \tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$  e os atrasos  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , também são números reais.*  $\diamond$

**Prova:** O fato que os instantes de amostragem são números reais é garantido pelo Teorema 5.3. Em consequência disso e da Propriedade 1 decorre que  $\tau_{s_k} = t_{k+1}^s - t_k^s, \tau_{c_k} = t_{k+1}^c - t_k^c$  e  $\tau_{a_k} = t_{k+1}^a - t_k^a, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , são números reais. Além disso, sem perda de generalidade, pode-se considerar que os atrasos  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^c, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , podem ser incorporados, respectivamente, aos atrasos  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ . Desse modo, tais atrasos passam a ter os seguintes valores  $\tau_k^{sc} = t_k^c - t_k^s$  e  $\tau_k^{ca} = t_k^a - t_k^c$  e, portanto, da Propriedade 1  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  são números reais, uma vez que, os instantes de amostragem  $t_k^s, t_k^c$  e  $t_k^a$  também o são.  $\square$

**Teorema 5.5 (Não linearidade da amostragem por cruzamento de nível)** *A amostragem por cruzamento de nível é uma operação não linear.*  $\diamond$

**Prova:** Decorre direto do fato que os instantes de amostragem são obtidos a partir de funções inversas  $t_k = f_i^{-1}(a_{N_k})$ ,  $i, k \in \mathbb{Z}_+$ . Em geral, tais funções são não lineares.  $\square$

Os Teoremas 5.2, 5.3 e 5.5 são bem ilustrados pelo seguinte exemplo.

**Exemplo 5.2 (Amostragem por cruzamento de nível)** *Obtenha os instantes de amostragem  $t_k$  e os intervalos de amostragem  $T_k$  do sinal  $f(t)$  através do esquema de amostragem por cruzamento de nível e mostre que eles são lineares em  $T = 1/f_0$  e não lineares em  $a_i$ .*

$$f(t) = A_M + A_0 \text{sen}(2\pi f_0 t) \quad (5.8)$$

**Solução 5.2** *No esquema de amostragem por cruzamento de nível o sinal  $f(t)$  cruza o  $N_k$ -ésimo nível de quantização  $a_{N_k}$ , no instante  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Por conseguinte, a equação (5.8), para  $f(t_k) = a_{N_k}$  e  $\theta_k = 2\pi f_0 t_k$ , resulta em:*

$$a_{N_k} = A_M + A_0 \text{sen}(\theta_k) \quad (5.9)$$

donde, se obtém:

$$\text{arcsen}\left(\frac{a_{N_k} - A_M}{A_0}\right) = \theta_k + 2\pi n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ ou} \quad (5.10)$$

$$\text{arcsen}\left(\frac{a_{N_k} - A_M}{A_0}\right) = \pi - \theta_k + 2\pi n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta_k \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (5.11)$$

e do fato que  $\theta_k = 2\pi f_0 t_k$  e  $f_0 = 1/T$ , as equações (5.10) e (5.11) passam a ser:

$$t_k = T \left[ -n + \frac{1}{2\pi} \text{arcsen}\left(\frac{a_{N_k} - A_M}{A_0}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z} \text{ e } t_k \in \left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right), \text{ ou} \quad (5.12)$$

$$t_k = T \left[ \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2\pi} \text{arcsen}\left(\frac{a_{N_k} - A_M}{A_0}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z} \text{ e } t_k \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right) \quad (5.13)$$

em que os instantes de amostragem  $t_k$  são periódicos e variam de forma linear em relação a  $T$  e de forma não linear em relação a  $a_{N_k}$ . Além disso, os instantes de amostragem  $t_k$  variam em função da variação de  $a_{N_k}$ . Portanto,  $t_k$  nas equações (5.12) e (5.13) pode ser reescrito em função de  $a_{N_k}$ , ou seja,  $t_k(a_{N_k})$ . Desse modo, pré-definidos os  $N$  níveis de quantização, obtém-se os instantes de amostragem.

A obtenção dos intervalos de amostragem se dá diretamente da definição  $T_k = t_{k+1} - t_k$ . Por fim, considerando que  $f(t)$  cruza o nível  $a_{N+1_{k+1}}$  no instante  $t_{k+1}$ , obtém-se da equação (5.12)



que:

$$T_k = \frac{T}{2\pi} \left[ \arcsen \left( \frac{a_{N+1_{k+1}} - A_M}{A_0} \right) - \arcsen \left( \frac{a_{N_k} - A_M}{A_0} \right) \right], \quad t_k \in \left( -\frac{T}{4}, \frac{T_0}{4} \right) \quad (5.14)$$

e, portanto, o intervalo de amostragem  $T_k$  é linear e periódico em  $T$  e não linear em relação aos níveis de cruzamento  $a_{N_k}$  e  $a_{N+1_{k+1}}$  do sinal  $f(t)$ .

Os desenvolvimentos precedentes realizados a partir da equação (5.12) também podem ser realizados a partir da equação (5.13). Neste caso, as conclusões obtidas serão análogas às já apresentadas.

**Observação 5.3 (Instantes de amostragem do controlador)** *Independentemente dos modos de operação dos nós controladores, os instantes de amostragem do controlador  $t_k^c$  sempre podem ser obtidos analiticamente, uma vez que, nestes casos os níveis de cruzamento dos sinais da saída do controlador podem ser tão refinados quanto se queira. Isto é possível, porque o tamanho ou valor do quantum  $q$ , neste caso, não está associado a requisitos técnicos como quantidade de bits ou faixa de amplitude de conversores A/D ou D/A e, portanto, pode assumir valores infinitesimais.*

**Observação 5.4 (Instantes de amostragem do atuador)** *Independentemente dos modos de operação dos nós atuadores, os instantes de amostragem dos atuadores  $t_k^a$  também podem ser obtidos analiticamente. Neste caso, os níveis de cruzamento dos sinais da saída do atuador estão condicionados ao tamanho ou valor do quantum  $q$ , o qual estará sempre associado a requisitos técnicos, como quantidade de bits ou faixa de amplitude dos conversores D/A e, portanto, pode assumir um dos níveis de quantização admissível pelos conversores D/A. Consequentemente, neste caso, o sistema sempre estará sujeito a erros de quantização. Tais erros serão tão maiores quanto menor for o número de bits dos conversores D/A.*

### 5.3.1 Particionando um sinal em polinômios de segundo grau

A ideia de particionar um sinal  $f(t)$ , como o ilustrado na Figura 5.2<sup>5</sup>, em  $n$  polinômios de segundo grau  $f_i(t)$ , surge para possibilitar obter a inversa  $f_i^{-1}(t)$  de cada um desses polinômios. E, consequentemente, os instantes de amostragem  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  do sinal  $f(t)$ . Sinal este definido como sendo

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{se } t \leq p_{d_0} \\ f_1(t) & \text{se } p_{d_0} < t \leq p_{i_0} \\ \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(t) & \text{se } t > p_{d_i} \end{cases} \quad (5.15)$$

<sup>5</sup>Os comentários realizados na Observação 5.2 relativos à Figura 5.1 também são válidos para a Figura 5.2.

onde, cada polinômio  $f_i(t)$  de segundo grau, resultante do particionamento do sinal  $f(t)$ , é da forma

$$f_i(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i \quad (5.16)$$

com  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  constantes para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ .

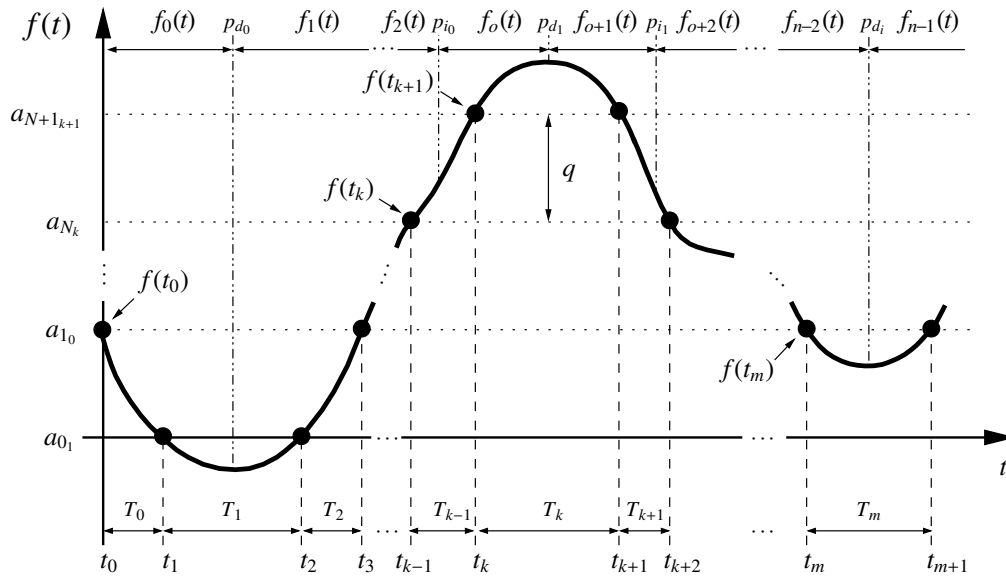


Figura 5.2: Particionando um sinal  $f(t)$ .

O particionamento do sinal  $f(t)$  em polinômios  $f_i(t)$  de segundo grau, equação (5.16), deve ser realizado de modo que cada um destes polinômios  $f_i(t)$  esteja situado entre um ponto crítico ( $f'(t) = 0$ ) e um ponto de inflexão ( $f''(t) = 0$ ) consecutivos, a partir do instante  $t_0$ , como ilustrado na Figura 5.2. Neste caso, cada um desses polinômios  $f_i(t)$  é, ou crescente, ou decrescente e, portanto, é inversível. Desse modo, como  $f^{-1}(f(t)) = t$ , pode-se obter, facilmente, os instantes de amostragem  $t_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$  do sinal  $f(t)$ . Tais instantes, são obtidos quando  $f_i(t) = a_k = N_k q$ , com  $N_k \in \mathbb{Z}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Por conseguinte, a equação (5.16) resulta em:

$$f_i(t) = a_k = N_k q = a_i t^2 + b_i t + c_i \Rightarrow a_i t^2 + b_i t + (c_i - N_k q) = 0 \quad (5.17)$$

donde, obtém-se que:

$$t' = \frac{-b_i + \sqrt{b_i^2 - 4a_i(c_i - N_k q)}}{2a_i} \quad \text{e} \quad t'' = \frac{-b_i - \sqrt{b_i^2 - 4a_i(c_i - N_k q)}}{2a_i} \quad (5.18)$$

obviamente,  $t$  é o tempo, e portanto é positivo. Desse modo, apenas uma das duas raízes  $t'$  ou  $t''$ , da equação anterior é válida, a raiz positiva. Além disso, a lógica de variação de  $N_k$  se dá por incremento ou decremento. O incremento é definido como sendo

$$N_k \triangleq inc(N_{k-1}) \triangleq N_{k-1} + 1 \quad (5.19)$$

e o decremento é definido como sendo

$$N_k \triangleq dec(N_{k+1}) \triangleq N_{k+1} - 1 \quad (5.20)$$

Desse modo, o incremento ou decremento de  $N_k$  na equação (5.18) é feito com base no fato do sinal  $f(t)$  ser crescente ou decrescente em cada uma de suas partições. A  $i$ -ésima partição de  $f(t)$  é representada pelo polinômio de segundo grau  $f_i(t)$ , equação (5.17). Neste caso, a lei de formação da representação dos níveis de cruzamento do sinal  $f(t)$  é dada por uma função  $Q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $Q$  para  $k = 0$  é definida como

$$Q(N_0) \triangleq N_0 q \quad (5.21)$$

onde,  $N_0$  na equação (5.21), é obtido a partir do valor da condição inicial  $f(t_0)$  do sinal  $f(t)$  no instante inicial  $t = t_0$ , e é, por definição, dado por

$$N_0 \triangleq round\left(\frac{f(t_0)}{q}\right) \quad (5.22)$$

onde a função  $round(\cdot)$  na equação (5.22) arredonda o argumento para o inteiro mais próximo. Matematicamente, tem-se para um número qualquer  $a, b$  a seguinte definição:

$$round(a, b) \triangleq \begin{cases} a & \text{se } b \leq 0,5 \\ a + 1 & \text{se } b > 0,5 \end{cases} \quad (5.23)$$

complementarmente, quando  $k \geq 1$ , a função  $Q$  assume a forma

$$Q(N_k) = \begin{cases} q \cdot inc(N_{k-1}) & \text{se } f'(t) > 0 \\ q \cdot dec(N_{k-1}) & \text{se } f'(t) < 0 \\ q \cdot N_{k-1} & \text{se } f'(t) > 0 \Rightarrow f'(t) < 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

onde, na equação (5.24) a expressão  $f'(t) > 0 \Rightarrow f'(t) < 0$  representa a mudança do sinal da derivada de  $f(t)$  de positivo para negativo ou de negativo para positivo. Isto é, a expressão  $f'(t) > 0 \Rightarrow f'(t) < 0$  tem o seguinte significado: se no  $(k - 1)$ -ésimo COAC  $f'(t) > 0$  e no  $k$ -ésimo COAC  $f'(t) < 0$ , então  $N_k = N_{k-1}$ . Do mesmo modo, se no  $(k - 1)$ -ésimo COAC  $f'(t) < 0$  e no  $k$ -ésimo COAC  $f'(t) > 0$ , então  $N_k = N_{k-1}$ .

### 5.3.2 Obtendo os polinômios de segundo grau

Os polinômios de segundo grau serão obtidos por identificação de sistemas. O método de identificação utilizado será o ARX (*Autoregressive Exogenous*) [LJUNG, 1987, p.72], a partir dos dados gerados pela própria função do sinal de tempo contínuo do sistema. O modelo ARX

é obtido a partir da equação de diferença linear

$$y(t_k) + a_1y(t_{k-1}) + \dots + a_ny(t_{k-n}) = b_1u(t_{k-1}) + \dots + b_mu(t_{k-m}) + e(t_k) \quad (5.25)$$

onde  $e(t_k)$  na equação (5.25) é um termo de ruído branco<sup>6</sup> presente no sistema. Reescrevendo a equação (5.25) na forma

$$y(t_k) = -a_1y(t_{k-1}) - \dots - a_ny(t_{k-n}) + b_1u(t_{k-1}) + \dots + b_mu(t_{k-m}) + e(t_k) \quad (5.26)$$

obtém-se a representação matricial

$$y(t_k) = [-y(t_{k-1}) - \dots - y(t_{k-n}) \quad u(t_{k-1}) \dots u(t_{k-m})] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + e(t_k) = \varphi^T(t_k)\theta + e(t_k) \quad (5.27)$$

ou

$$y(t_k) = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_m] \begin{bmatrix} -y(t_{k-1}) \\ \vdots \\ -y(t_{k-n}) \\ u(t_{k-1}) \\ \vdots \\ u(t_{k-m}) \end{bmatrix} + e(t_k) = \theta^T \varphi(t_k) + e(t_k) \quad (5.28)$$

onde

$$\theta^T \triangleq [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_m] \quad (5.29)$$

$$\varphi^T(t_k) \triangleq [-y(t_{k-1}) \quad - \dots \quad -y(t_{k-n}) \quad u(t_{k-1}) \dots u(t_{k-m})] \quad (5.30)$$

O vetor  $\theta$  de  $n + m$  parâmetros, apresentado na forma transposta na equação (5.29), é chamado vetor de parâmetros [LJUNG, 1987, p.70]. E, o vetor de dados  $\varphi(t_k)$ , apresentado na forma transposta na equação (5.30), é conhecido como vetor de regressão [LJUNG, 1987, p.72].

Da equação (5.27) e (5.28), obtém-se facilmente que:

$$e(t_k) = y(t_k) - \theta^T \varphi(t_k) = y(t_k) - \varphi^T(t_k)\theta \quad (5.31)$$

O erro  $e(t_k)$  dado pela equação (5.31) pode ser reescrito em função do vetor de parâmetros  $\theta$ .

---

<sup>6</sup>Quando o valor de  $e(t)$  na equação (5.25) é “insignificante” ou “difícil de encontrar” ou ainda quando se trata de um modelo determinístico, pode-se fazer  $e(t) = 0$  [LJUNG, 1987, p.72].

Neste caso, esse novo erro  $\varepsilon(t_k, \theta)$  é conhecido como erro de predição e é definido como sendo

$$\varepsilon(t_k, \theta) = y(t_k) - \hat{y}(t_k|\theta) \quad (5.32)$$

e representa a diferença entre a saída da planta  $y(t)$  e a saída do modelo  $\hat{y}(t/\theta)$ , a qual é dada por:

$$\hat{y}(t_k|\theta) = \theta^T \varphi(t_k) = \varphi^T(t_k)\theta \quad (5.33)$$

O vetor de parâmetros  $\theta$  é obtido minimizando-se o erro de predição médio quadrático  $\varepsilon(t_k, \theta)^2$ . Para tal, deve-se, inicialmente, assumir que sejam realizadas medições da entrada  $u(t_k)$  e da saída  $y(t_k)$  por  $M$  intervalos de amostragem. Neste caso, a matriz dos dados obtidos nas medições é

$$Z(M) = \begin{bmatrix} y(t_0) & y(t_1) & \cdots & y(t_{M-2}) & y(t_{M-1}) \\ u(t_0) & u(t_1) & \cdots & u(t_{M-2}) & u(t_{M-1}) \end{bmatrix}^T \quad (5.34)$$

A função de custo do erro quadrático é definida como sendo [LJUNG, 1987, p.172].

$$V_M(\theta, Z(M)) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} [y(t_k) - \varphi^T(t_k)\theta]^2 \quad (5.35)$$

A estimativa para os parâmetros mínimos quadrados  $\theta^{LS}(M)$  é obtida fazendo

$$\theta^{LS}(M) = \arg \min_{\theta} V_M(\theta, Z(M)) \quad (5.36)$$

Neste caso, o valor mínimo da função custo pode ser encontrado derivando-se a equação (5.35) em relação a  $\theta$  e igualando o resultado da derivada a zero, obtém-se

$$\sum_{k=0}^{M-1} \varphi(t_k)y(t_k) = \sum_{k=0}^{M-1} \varphi(t_k)\varphi^T(t_k)\theta \quad (5.37)$$

onde, pré-multiplicando-se a equação (5.37) pela inversa da matriz  $\sum_{k=0}^{M-1} \varphi(t_k)\varphi^T(t_k)$ , desde que tal inversa exista, obtém-se o valor de  $\theta^{LS}(M)$ , ou seja:

$$\theta^{LS}(M) = \left[ \sum_{k=0}^{M-1} \varphi(t_k)\varphi^T(t_k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^{M-1} \varphi(t_k)y(t_k) \quad (5.38)$$

que é o vetor de parâmetros que minimiza o erro de predição médio quadrático.

## 5.4 Considerações finais

Sistemas amostrados com intervalos de amostragem variantes no tempo apresentam algumas características particulares interessantes. Uma delas é que, neste caso, o sistema amostrado não é susceptível a *aliasing*. Simplesmente, as próprias condições de operação do sistema eliminam a possibilidade do surgimento de *aliasing* devido a ruídos aleatórios [SHAPIRO; SILVERMAN, 1960]. Outro fato curioso, ocorre na recuperação do sinal amostrado com intervalos de amostragem variantes no tempo. Neste caso, é possível recuperar o sinal mesmo quando a taxa de amostragem média é inferior à taxa de Nyquist [BEUTLER, 1966]. Essa duas razões por si só já justificam o desenvolvimento de uma técnica de amostragem com intervalos de amostragem variantes no tempo, como a aqui apresentada neste capítulo.

Além das razões já citadas no parágrafo anterior, a maior justificativa para o desenvolvimento de uma técnica de amostragem por cruzamento de nível é o fato que os sistemas de controle em rede (NCS) são sistemas de controle com recursos físicos limitados e compartilhados. Tal fato é responsável por fazer surgir nos NCSs atrasos eminentemente variantes no tempo. Por conseguinte, em tais sistemas os intervalos de amostragem do controlador e do atuador são de natureza variante no tempo.

No capítulo seguinte serão apresentados resultados de simulações para os NCSs simulados. Para algumas abordagens simuladas um experimento estatístico foi desenvolvido e implementado. Com os dados gerados em tal experimento foi feito um tratamento estatístico para cada um dos parâmetros indicadores da resposta ao degrau unitário dos NCSs simulados. Por fim, a estabilidade de uma dessas abordagens será provada.

# Capítulo 6

## Metodologias de projeto, resultados e estabilidade dos NCSs

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados: a metodologia de projeto desenvolvida, os resultados de simulações e experimentais obtidos e a prova de estabilidade do NCS. Na metodologia de projeto são delineados todos os passos para incorporar um sistema de controle convencional de forma a transformá-lo em um sistema de controle em rede. Para tal, é assumido que as representações contínuas da planta e do controlador que a estabiliza, do sistema de controle não conectado em rede, sejam dados. De posse do controlador dado, obtém-se sua representação equivalente discreta, para que o mesmo opere no modo de operação desejado, como realizado no Capítulo 4, e em seguida, interliga-se os componentes do sistema de controle por meio de uma rede de comunicação.

A partir do delineamento da metodologia de projeto desenvolvida, as simulações do NCS podem ser realizadas, com o controlador operando nos modos guiado a eventos (GE), guiado no tempo (GT) e simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET). Estes resultados são comparados com o sistema de controle não conectado em rede de tempos discreto e contínuo submetido ou não a atrasos. As curvas das saídas da planta e os diagramas de temporização são obtidos para ambas as estratégias. A partir das respostas aos degraus unitários (RDUs) dos NCSs simulados é verificado como o comportamento dos atrasos influencia o comportamento das RDUs do NCS, com controlador operando nos diferentes modos.

Do ponto de vista da implementação das simulações, a representação da planta pode ser tratada de duas formas. Na primeira delas, a planta é representada de forma contínua e sua dinâmica evolui de acordo com algum método numérico, com um passo de integração suficientemente pequeno. Por outro lado, na segunda representação, a simulação é realizada a partir do modelo dinâmico discreto da planta. Ambos os métodos têm suas vantagens e desvantagens.

Por exemplo, utilizar a primeira abordagem tem como desvantagem o aumento significativo do tempo de simulação. Por outro lado, obtém-se como vantagem a flexibilidade para implementação da amostragem de Lebesgue, bem como, possibilita simular sistemas com atrasos variantes no tempo. Quando à utilização da segunda abordagem, tem-se como vantagem a redução expressiva do tempo de simulação. Todavia, não possibilita simular sistemas com atrasos variantes no tempo. Além disso, para simular a implementação da amostragem de Lebesgue, é necessário estimar o valor dos intervalos de amostragem dos sensores, a cada ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC). O método para tal estimativa foi desenvolvido e apresentado no capítulo anterior e é uma das contribuições desta tese.

Por fim, a prova de estabilidade é apresentada para o NCS com planta não submetida a atrasos, mas amostrada com a técnica de amostragem por cruzamento de nível desenvolvida e apresentada no Capítulo 5.

## 6.2 Metodologias de Projeto do NCS

A seguir é descrita cada etapa da metodologia desenvolvida para o projeto de um NCS, a partir das técnicas de discretização apresentadas no Capítulo 4 desta tese:

- (1) Levantamento das especificações de desempenho desejadas para a malha fechada do sistema de controle nNCS. Um diagrama de blocos do sistema de controle não conectado em rede de tempo contínuo (nNCSC) é mostrado na Figura 6.1.

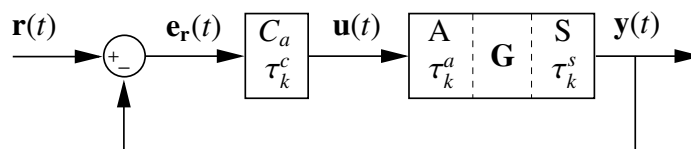


Figura 6.1: Diagrama de blocos da topologia nNCSC com  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^c + \tau_k^a = 0$ .

- (2) Projeto da lei de controle para a topologia nNCSC sem considerar qualquer atraso, isto é  $\tau_k = 0$ , de forma que a resposta da malha fechada do sistema de controle nNCSC cumpra as especificações de projeto. A lei de controle em questão pode ser obtida a partir da utilização de qualquer técnica clássica de projeto de controlador, de forma a satisfazer os requisitos de projeto pré-definidos.
- (3) A partir do modelo dinâmico da planta, seja na forma de função transferência ou não, deve-se obter sua representação em espaço de estados de tempo contínuo, o qual para a planta



com atraso nulo é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (6.2)$$

onde:  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  são as matrizes de estado da planta,  $\mathbf{x}_p(t)$  é o estado de tempo contínuo da planta,  $\mathbf{y}(t)$  é a saída de tempo contínuo da planta e  $\mathbf{u}(t)$  é a saída de tempo contínuo do controlador.

Quando a planta é submetida a atrasos, seu modelo em espaço de estados de tempo contínuo é da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t - \tau_k) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (6.4)$$

onde  $\tau_k$  é o atraso de controle. Além disso,  $\tau_k = \tau$  quando for invariante no tempo. Nesta tese o valor de  $\tau_k$  é qualquer. Isto é, pode ser  $\tau_k \leq \tau_s$  ou  $\tau_k > \tau_s$  com  $\tau_s$  o PAS (invariante no tempo), ou ainda, no caso de  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$  ou  $\tau_k > \tau_{s_k}$  com  $\tau_{s_k}$  o IAS (variante no tempo). Na prática é frequente acontecer de  $\tau_k > \tau_s$ . Em face destas considerações os modelos equivalentes discretos (MED) da planta onde o NCS opera sem perda de pacotes (SPP) serão obtidos a seguir.

### (3.1) MED da planta com $\tau = 0$ com PAS invariante no tempo e o NCS opera SPP

Quando a planta não é submetida a atraso ( $\tau = 0$ ) e o NCS opera SPP, sua dinâmica em espaço de estados é dada segundo as equações (6.1) e (6.2). Neste caso, um dos modelos equivalentes discretos (MEDs) possíveis, para PAS invariante no tempo, é obtido através da invariância ao degrau. Tal modelo é dado por:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_p \mathbf{u}(t_k^s) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t_k^s), \quad (6.6)$$

onde

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} \quad (6.7)$$

$$\Gamma_p = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.8)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas no modelo das equações (6.1) e (6.2).

### (3.2) MED da planta com $\tau = 0$ com IAS variante no tempo e o NCS opera SPP

Quando a planta não é submetida a atraso ( $\tau = 0$ ) e o NCS opera SPP sua dinâmica

em espaço de estados é dada segundo as equações (6.1) e (6.2). Neste caso, um dos MEDs possíveis, para o IAS variante no tempo, é obtido através da invariância ao degrau. Tal modelo é dado por:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_p(\tau_{s_k})\mathbf{u}(t_k^s) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s), \quad (6.10)$$

onde:

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_p\tau_{s_k}} \quad (6.11)$$

$$\Gamma_p(\tau_{s_k}) = \int_0^{\tau_{s_k}} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.12)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas no modelo das equações (6.1) e (6.2).

### (3.3) MED da planta com $\tau_k \leq \tau_s$ com PAS invariante no tempo e o NCS opera SPP

Quando a planta é submetida a um atraso de controle  $\tau_k$  variante no tempo e menor do que um período de amostragem dos sensores (PAS)  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_k \leq \tau_s$  e o NCS opera SPP, sua dinâmica de tempo contínuo em espaço de estados é dada pelas equações (6.3) e (6.4). Neste caso, o MED obtido através da invariância ao degrau é dado por:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p0}(\tau_k)\mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p1}(\tau_k)\mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s), \quad (6.14)$$

onde

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p\tau_s} \quad (6.15)$$

$$\Gamma_{p0}(\tau_k) = \int_0^{\tau_s - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.16)$$

$$\Gamma_{p1}(\tau_k) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_s - \tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.17)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  obtidas do modelo das equações (6.1) e (6.2). Foi mostrado no Capítulo 4 que tal modelo não representa fisicamente o sistema de controle a ele associado. Este modelo é válido apenas quando o atraso é invariante no tempo.

### (3.4) MED da planta com $\tau_k \leq \tau_{s_k}$ variantes no tempo e o NCS opera SPP

Quando a planta é submetida a um atraso de controle  $\tau_k$  variante no tempo e menor do que um intervalo de amostragem dos sensores (IAS)  $\tau_{s_k}$ , isto é,  $\tau_k \leq \tau_{s_k}$  e o NCS opera SPP, sua dinâmica de tempo contínuo em espaço de estados é dada pelas

equações (6.3) e (6.4). Neste caso, o MED obtido através da invariância ao degrau é dado por:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p(\tau_{s_k})\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau_{s_k}, \tau_k)\mathbf{u}(t_k^s) + \Gamma_{p_1}(\tau_{s_k}, \tau_k)\mathbf{u}(t_{k-1}^s) \quad (6.18)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s) \quad (6.19)$$

onde:

$$\Phi_p(\tau_{s_k}) = e^{\mathbf{A}_p\tau_{s_k}} \quad (6.20)$$

$$\Gamma_{p_0}(\tau_{s_k}, \tau_k) = \int_0^{\tau_{s_k} - \tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.21)$$

$$\Gamma_{p_1}(\tau_{s_k}, \tau_k) = e^{\mathbf{A}_p(\tau_{s_k} - \tau_k)} \int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p \quad (6.22)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  obtidas do modelo das equações (6.1) e (6.2). Foi mostrado no Capítulo 4 que tal modelo não representa fisicamente o sistema de controle a ele associado. Este modelo é válido apenas quando o atraso e o IAS são invariantes no tempo.

### (3.5) MED da planta com $\tau_k > \tau_s$ , PAS invariante no tempo e o NCS opera SPP

Quando a planta é submetida a um atraso de controle  $\tau_k$  variante no tempo e maior do que um período de amostragem dos sensores  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_k > \tau_s$ , sua dinâmica de tempo contínuo em espaço de estados é dada pelas equações (6.3) e (6.4). Neste caso, o MED obtido através da invariância ao degrau deve ser modificado. Desse modo, se<sup>1</sup>

$$\tau_k = (b - 1)\tau_s + \tau'_k \Rightarrow b\tau_s - \tau_k = \tau_s - \tau'_k \quad (6.23)$$

com  $0 < \tau'_k = \tau_k - \lfloor \tau_k \rfloor \leq \tau_s$  e  $b = \lceil \tau_k / \tau_s \rceil$  invariante no tempo, já que  $0 < \tau'_k \leq \tau_s$ . Nesta tese, será assumido que  $b$  é invariante no tempo, ou seja, a parte variante no tempo do atraso  $\tau'_k$  é menor que ou igual a  $\tau_s$ . Neste caso,  $\tau_k = \tau_i + \tau'_k$ , com  $\tau_i$  sendo a fração invariante no tempo do atraso de controle  $\tau_k$ . Nestas condições, o MED da planta com atraso invariante no tempo<sup>2</sup> é dado por [ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, p.40]:

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = \Phi_p\mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{p_0}(\tau'_k)\mathbf{u}(t_k^s - (b - 1)\tau_s) + \Gamma_{p_1}(\tau'_k)\mathbf{u}(t_k^s - b\tau_s) \quad (6.24)$$

$$\mathbf{y}(t_k^s) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t_k^s), \quad (6.25)$$

<sup>1</sup>O símbolo  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função menor inteiro e o símbolo  $\lceil \cdot \rceil$  denota a função maior inteiro. Exemplos:  $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$  e  $\lceil 2,6 \rceil = 3$ .

<sup>2</sup>Foi mostrado no Capítulo 4 que tal modelo não representa fisicamente o sistema de controle a ele associado. Este modelo é válido apenas quando o atraso é invariante no tempo.

onde

$$\Phi_{\mathbf{p}} = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}\tau_s} \quad (6.26)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}0}(\tau'_k) = \int_0^{\tau_s - \tau'_k} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (6.27)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}1}(\tau'_k) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\tau_s - \tau'_k)} \int_0^{\tau'_k} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{p}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{p}} \quad (6.28)$$

**Observação 6.1 (MED da Planta)** *Os MEDs da planta podem ser obtidos quando o NCS opera sem perda de pacotes (SPP) ou quando o NCS opera com perda de pacotes (CPP). Os modelos apresentados aqui foram para quando o NCS opera SPP. Os detalhes sobre a dedução de tais modelos e sobre os modelos em si podem ser vistos no Capítulo 4.*

**Observação 6.2 (MED da planta com atrasos variante no tempo)** *Foi mostrado no Capítulo 4 que, embora os MED da planta com atrasos variantes no tempo estejam corretos do ponto de vista matemático, tais modelos não representam fisicamente os sistemas de controle a eles associados. Razão pela qual, quando o sistema de controle for submetido a atrasos variantes no tempo sua simulação deverá ser realizada com algum método numérico como o de Runge-Kutta de quarta ordem. Como mostrado no Capítulo 4, isto deve ser feito para minimizar os efeitos da fase relativa presente no sistema de controle com atrasos variantes no tempo. Tal resultado é mais uma contribuição desta tese.*

- (4) No tocante ao controlador, a seguir a metodologia de projeto é apresentada. Neste sentido, serão apresentados os modelos equivalentes discretos (MEDs) do controlador obtidos no Capítulo 4. Tais modelos, são para quando o controlador opera no modo GT, quando o controlador opera no modo GET, assim como, para quando o controlador opera no modo simultaneamente guiado a eventos e no tempo com condição inicial modificada (GETM). Estes modelos foram obtidos a partir da representação dinâmica em espaço de estados de tempo contínuo do controlador, apresentada nas equações seguintes:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (6.29)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t) \quad (6.30)$$

onde:  $\mathbf{x}_c(t)$  é o estado do controlador,  $\mathbf{e}_r(t)$  é o erro de referência,  $\mathbf{u}(t)$  é a saída do controlador, ambos na representação de tempo contínuo. E,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  são as matrizes da representação em espaço de estados do controlador.

#### (4.1) MED do controlador guiado no tempo

Quando o controlador opera no modo GT seu modelo dinâmico é invariante no tempo. Neste caso, o MED do controlador, apresentado nas equações (6.29) e (6.30) obtido pelo método da invariância ao degrau é:

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c \mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (6.31)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t_k^c), \quad (6.32)$$

onde

$$\Phi_c = e^{\mathbf{A}_c \tau_s} \quad (6.33)$$

$$\Gamma_c = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c \quad (6.34)$$

O sistema de controle com este controlador em operação e não submetido a atraso é aqui denominado de sistema de controle não conectado em rede com o controlador de tempo discreto ou digital (nNCSD). Além disso, quando o NCS opera com este controlador com período de amostragem  $\tau_s$ , invariante no tempo, e é submetido a atrasos variantes no tempo, ele é aqui denominado de NCS com atrasos variantes no tempo (NCSav).

#### (4.2) Modo GET de operação do controlador

Quando o controlador opera no modo GET a temporização do NCS não submetido a perda de pacotes e com  $\tau_k \leq \tau_s$  é como a apresentada na Figura 3.1. Neste caso, se qualquer um dos atrasos de aquisição  $\tau_k^s$  ou  $\tau_{k+1}^s$  ou os atrasos de comunicações sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  ou  $\tau_{k+1}^{sc}$  variar o IAC  $\tau_{c_k}$  será variante no tempo. A consequência da variabilidade temporal dos atrasos e, por conseguinte, do IAC, é um controlador cujas equações dinâmicas de tempo discreto são variantes no tempo. Razão pela qual, os coeficientes das equações do controlador no domínio do tempo discreto mudam a cada COAC.

A representação dinâmica de tempo discreto deste controlador é obtida a partir da representação dinâmica de tempo contínuo definida pelas equações (6.29) e (6.30). Dessa maneira, seu MED com IAC  $\tau_{c_k}$  variante no tempo e determinado pelo Teorema 3.1 é:

$$\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c) = \Phi_c(\tau_{c_k}) \mathbf{x}_c(t_k^c) + \Gamma_c(\tau_{c_k}) \mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (6.35)$$

$$\mathbf{u}(t_k^c) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t_k^c) + \mathbf{D}_c \mathbf{e}_r(t_k^c) \quad (6.36)$$

onde:

$$\Phi_{\mathbf{c}}(\tau_{c_k}) = e^{\mathbf{A}_{\mathbf{c}}\tau_{c_k}} \quad (6.37)$$

$$\Gamma_{\mathbf{c}}(\tau_{c_k}) = \int_0^{\tau_{c_k}} e^{\mathbf{A}_{\mathbf{c}}s} ds \mathbf{B}_{\mathbf{c}} \quad (6.38)$$

são variantes no tempo, desde que,  $\tau_{c_k}$  seja variante no tempo, onde a variabilidade temporal de  $\tau_{c_k}$  é decorrente dos atrasos introduzidos no NCS pelos nós componentes e pela rede de comunicação. Além disso, como a lei de controle é dependente do IAC  $\tau_{c_k}$ , o mesmo deve ser determinado a cada COAC. O IAC pode ser, ou medido a partir do *clock* local do nó controlador, ou obtido a partir dos atrasos determinados<sup>3</sup>. Por fim, o fato dos sinais  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{r}(t)$  terem que ser amostrados simultaneamente força o sincronismo entre os *clocks* dos nós sensores e controladores do NCS.

#### (4.3) Modo GETM do controlador

O modo GETM de operação do controlador é semelhante ao modo GET, com apenas uma modificação na condição inicial do IAC do controlador. Daí o nome GETM, M de modificado. Neste caso, a condição inicial do IAC  $\tau_{c_0}$  pode ser menor, igual ou maior que o PAS  $\tau_s$ , isto é,  $\tau_{c_0} < \tau_s$  ou  $\tau_{c_0} = \tau_s$  ou  $\tau_{c_0} > \tau_s$ . O efeito de fazer  $\tau_{c_0} < \tau_s$  é, evidentemente, o de tornar o primeiro COAC mais rápido, uma vez que, quanto menor for o valor de  $\tau_{c_0}$  mais próximo da borda do disco unitário estarão os pólos do primeiro COAC do controlador. Já o efeito de fazer  $\tau_{c_0} > \tau_s$  é contrário ao de fazer  $\tau_{c_0} < \tau_s$ . Desse modo, quando  $\tau_{c_0} > \tau_s$  o primeiro COAC é mais lento, uma vez que, quanto maior for o valor de  $\tau_{c_0}$  mais no centro do disco unitário estarão os pólos do primeiro COAC do controlador. A consequência disso é a redução do *overshoot* da RDU do NCS.

- (5) Resolvidas as questões inerentes ao projeto do controlador de cada NCS e verificado o comportamento resultante em malha fechada de um deles submetidos a atrasos, deve-se interligar os nós componentes de cada sistema de controle, através da rede de comunicação. Evidentemente, a depender dos modos de operação dos nós componentes de cada NCS, uma atenção especial deve ser dada ao projeto global dos diversos NCSs, de forma a se estabelecer as devidas garantias de cumprimento das restrições temporais impostas por cada um deles. Tal aspecto não é um dos objetivos desta tese.
- (6) Neste sentido, um projeto global cuidadoso deve ser realizado, quando os nós sensores e controladores dos NCSs forem projetos para operar no modo GT. Embora, esta seja uma área de estudo emergente e extremamente fértil, não é objeto desta tese. Exemplos de

<sup>3</sup>Uma das técnicas, comumente, utilizadas para a determinação de atrasos em sistemas distribuídos é a técnica de *timestamping* [JOHANNESSEN, 2004; IEEE, 2009].

abordagens utilizadas para a realização destes projetos são baseadas em tempos de respostas fim a fim, como é o caso da margem de *jitter* [CERVIN, 2004], e das metodologias baseadas em co-projeto [BRANICKY, 1995; CERVIN, 2003].

**Observação 6.3 (MEDs da Planta e do Controlador)** *Os MEDs da planta e do controlador podem ser obtidos diretamente das funções de transferências de tempo contínuo da planta  $G(s)$  e do controlador  $C_a(s)$  do nNCS, tanto para um sistema de controle SISO (Single Input Single Output), quanto para um sistema controle MIMO (Multiple Input Multiple Output).*

**Observação 6.4 (Modos de operação dos nós controladores e atuadores)** *Fazer o intervalo de amostragem do controlador variar de acordo com as variabilidades da sequência de instantes  $\{t_k^c\}$  é uma das inovações trazidas por esta tese. Em geral, na literatura é feito variar o intervalo de amostragem dos sensores, de forma a se obter o que se denomina de amostragem aleatória [KALMAN, 1957; KALMAN; BERTRAM, 1959], também chamada de amostragem de Lebesgue [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002]. Neste caso, entre outras vantagens, obtém-se, a redução da variância do sinal de saída do NCS [ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999], assim como, redução do tráfego de pacotes na rede, uma vez que, quando se utiliza a amostragem de Lebesgue, menos pacotes de dados serão gerados pelos nós sensores [ÅRZÉN, 1999]. Por conseguinte, abordar o problema dos NCSs sobre a ótica variante no tempo, como já enfatizado, tem vantagens, as quais já foram destacadas em várias publicações relativas ao assunto [McCANN, 2004; ÅSTRÖM, 2007; XU; CAO, 2007; HENNINGSSON, 2008; HEEMELS, 2008; QAISAR, 2009]. Vantagens estas que se tornarão ainda maiores quando os NCSs operarem com IAC, IAA e IAS variantes no tempo. Com o desenvolvimento da amostragem por cruzamento de nível, apresentada no Capítulo 5, agora é possível fazer o IAS variante no tempo, o que é outra contribuição desta tese.*

## 6.3 Simulação dos NCSs

A simulação dos NCSs é realizada com a planta representada nos domínios dos tempos contínuo e discreto.

### 6.3.1 NCSs com a planta no domínio do tempo contínuo

A simulação do NCS é realizada para controle de um processo que pode ser SISO (*Single Input Single Output*) ou MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). Além disso, este programa permite simular NCS com o nó controlador operando nos modos GE, GT, GET e GETM. Seu fluxograma é mostrado na Figura 6.2 [SILVA; LIMA, 2008].

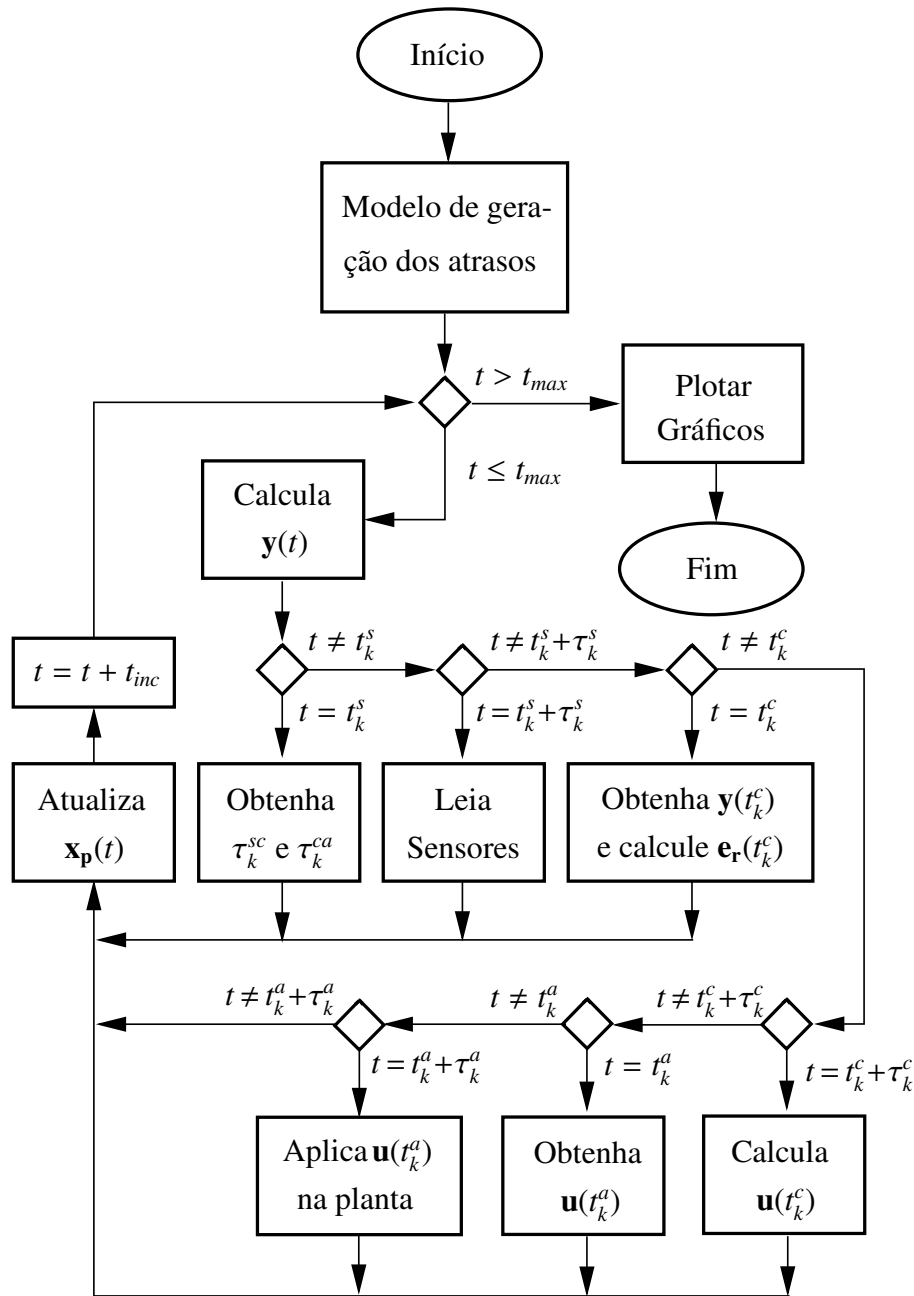


Figura 6.2: Fluxograma do programa para simulação do NCS com a planta no domínio do tempo contínuo.

Seguindo a ordem do fluxograma, ao iniciar a execução do programa (bloco iniciar), deve-se definir o valor de  $\tau_s$ . Em seguida, deve-se definir o modelo de geração de atrasos para os atrasos presentes no NCS, sobretudo, dos atrasos de comunicação  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ , introduzido pela rede de comunicação, durante a transmissão dos pacotes. Seguindo a deixa de Walsh [WALSH., 2002], o modelo de transferência de pacotes, ou equivalentemente dos atrasos dos pacotes que trafegam pela rede de comunicação, é representado por um processo de Poisson [PAPOULIS, 1991, p.57] de média<sup>4</sup>  $\mu = 1/\tau_s$  e de  $\lambda$  amostras esperadas na unidade de tempo (1 segundo).

<sup>4</sup>A depender da quantidade de diferentes valores de atraso que se deseja, o valor dessa média pode ser modifi-



Dessa maneira, a probabilidade de  $k$  eventos de transmissão de pacotes ocorrer na unidade de tempo é dada por  $P(k) = \mu^k e^{-\mu} / k!$ . A função do MatLab  $de = \text{poisspdf}(a_1, \mu)$ , com  $a_1 = 1:L\text{Ipoiss}$  para  $I\text{poiss} = 0:\tau_s:1$  e  $L\text{Ipoiss} = \text{length}(I\text{poiss})$ , retorna um vetor de pontos obtidos segundo um processo de Poisson. O valor de cada coordenada desse vetor deve satisfazer as condições pré-estabelecidas para o atraso, isto é:  $\tau_k \leq \tau_s$  ou  $\tau_k > \tau_s$  e também se adequar às especificações do tempo mínimo de resposta para transmissão de um pacote na rede.

Quando a execução do programa alcança o laço principal, a saída da planta (no fluxograma: Calcule  $y(t)$ ) é calculada pelo método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem [PRESS, 2002, p.716] com um intervalo de tempo incremental  $t_{inc}$  a ser definido. A definição de  $t_{inc}$  deve ser feita com base na menor granularidade de tempo do sistema. Em algumas simulações o valor de  $t_{inc}$  foi feito igual a  $50 \mu\text{s}$ , isto é,  $t_{inc} = 50 \mu\text{s}$ , em outras  $t_{inc} = 5 \mu\text{s}$ . A partir desse instante, é fundamental observar o fluxograma do programa juntamente com a Figura 2.9. A obtenção dos atrasos de comunicação (no fluxograma: Obtenha  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ ) é realizada de forma aleatória<sup>5</sup>, a cada  $\tau_s$  ou  $\tau_{sk}$  segundos. Ao final do tempo de simulação  $t_{max}$  os resultados obtidos são plotados e apresentados em gráficos. As simulações dos NCSs com algum parâmetro variante no tempo (atraso ou intervalos de amostragem) apresentadas nesta tese foram realizadas como descrito nesta subseção. A razão para tal foi apresentada no Exemplo 4.3.

**Observação 6.5 (Modelo de atrasos de comunicação)** *Embora se tenha utilizado um processo de Poisson como modelo de atraso de  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  para a realização das simulações, os modelos de temporizações dos NCSs e dos controladores discretos obtidos são suficientemente gerais e suportam qualquer modelo de atraso. Dessa maneira, na prática, quando os NCSs estiverem em funcionamento os valores dos atrasos na simulação, gerados pelo bloco modelo de geração de atrasos, devem ser substituídos pelos valores reais de  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ , determinados durante a operação do NCS.*

**Observação 6.6 (Medição de atrasos)** *A necessidade de medição de  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$ , via técnicas, por exemplo de timestamping, implica na necessidade de sincronismo global entre os clocks das CPUs dos nós componentes. Entretanto, o sincronismo global exato, sem erros, é impossível de ser realizado [LAMPOR, 1978]. Na prática, o sincronismo pode ser obtido quando se admite uma faixa de tolerância ao erro, dentro de limites aceitáveis, que não venham a comprometer o bom funcionamento do NCS ou do sistema distribuído que se deseja implementar. Atualmente se consegue medir atrasos com a técnica de timestamping com precisão de 1 ns [IEEE, 2009]. Taxa esta que é tão pequena que pode-se dizer exata naquilo que concerne ao universo dos NCSs.*

cado, conforme ficará evidente nos exemplos numéricos da próxima seção.

<sup>5</sup>A obtenção dos atrasos  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  de forma aleatória, para o caso particular da distribuição de Poisson, pode ser realizada no MatLab utilizando-se o comando de `(round(rand(1, 1) * (length(de) - 1) + 1))`.

### 6.3.2 NCSs com a planta no domínio do tempo discreto

A simulação do NCS com a planta no domínio do tempo discreto é realizada segundo o fluxo-grama mostrado na Figura 6.3. Neste caso, enquanto  $t \leq t_{max}$ , a cada  $\tau_s$  ou  $\tau_{s_k}$  segundos  $\mathbf{y}(t_k^s)$ ,  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$  e  $\mathbf{u}(t_k^c)$  são calculados utilizando suas respectivas equações. Das simulações apresentadas nesta tese apenas aquelas em que o NCS não apresenta parâmetros variantes no tempo foram realizadas como descrito nesta subseção.

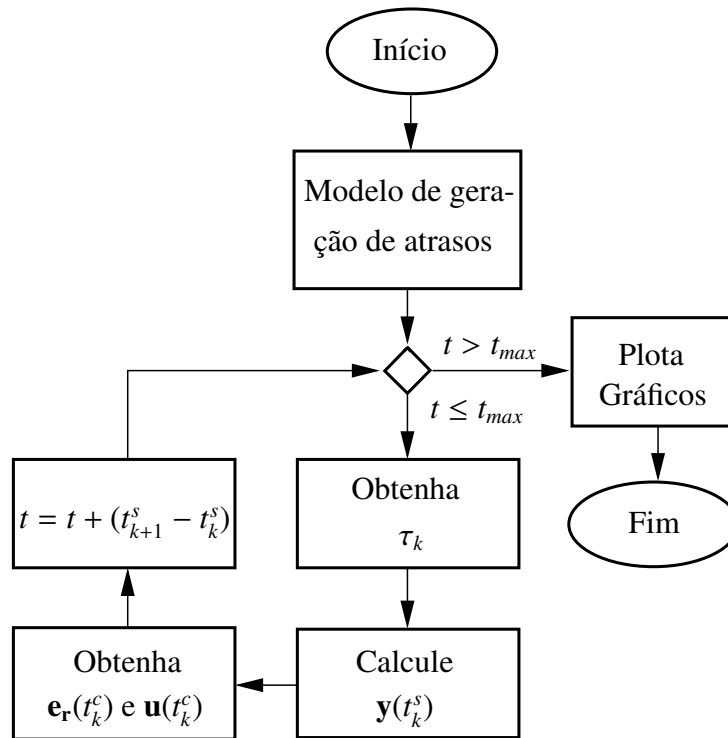


Figura 6.3: Fluxograma do programa para simulação do NCS com planta de tempo discreto.

### 6.3.3 Detalhes do funcionamento do nó controlador

Quando um sistema de controle em rede é colocado em funcionamento uma sequência de tarefas é executada em cada nó componente. De forma global, a repetição da execução de tais sequências de tarefas ao longo do tempo dita o comportamento temporal do NCS. Para o caso de um NCS com nó sensor GT e nós controlador e atuador GEs ou GETs, com  $\tau_k \leq \tau_s$ , em que não ocorra perdas de pacotes, o comportamento temporal global do NCS é apresentado na parte superior da Figura 6.4. Na parte inferior desta figura é ilustrado o comportamento temporal do  $k$ -ésimo COAC do NCS, cuja sequência de tarefas executadas no nó controlador é detalhado e apresentado.

Pode-se observar, na parte inferior da figura, que o  $k$ -ésimo COAC é iniciado no instante  $t = t_k^s$ , quando no nó sensor a tarefa de aquisição de dados é ativada. No instante  $t = t_k^s + \tau_k^s$  é finalizada a execução da tarefa de aquisição de dados com o empacotamento e o armazenamento

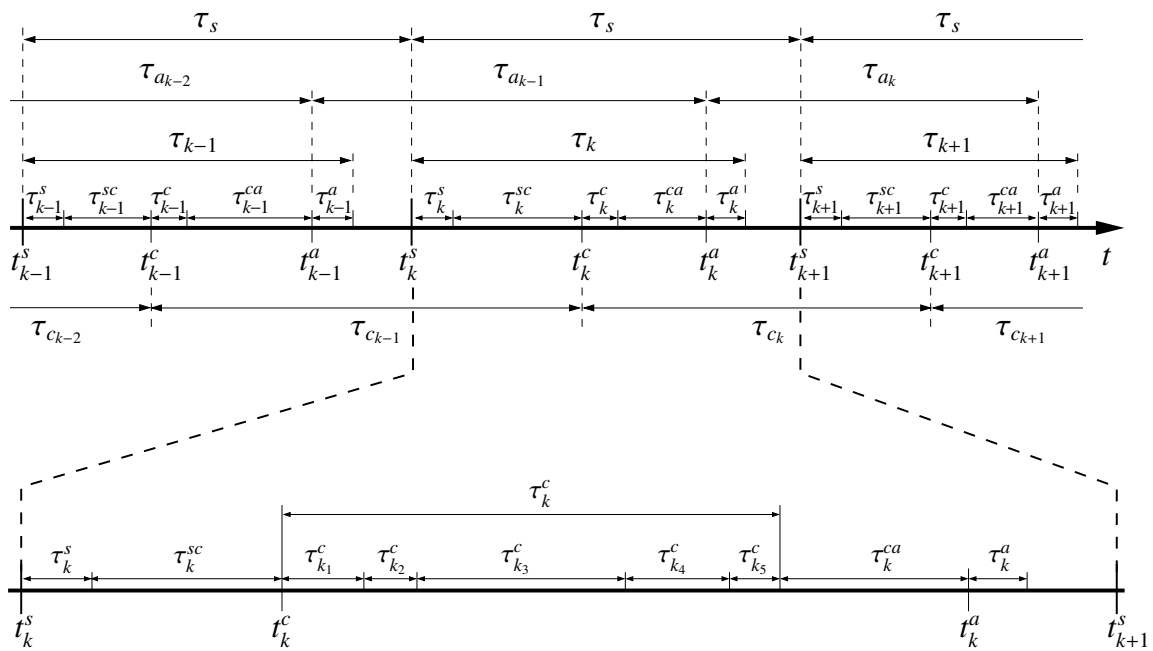


Figura 6.4: Parte superior - diagrama de temporização do NCS, topologia S-C-A, ilustrando os instantes de execução das tarefas de aquisição, execução da lei de controle e atuação; assim como, a transferência dos pacotes de dados do nó sensor para o nó controlador e deste para o nó atuador e suas relações de precedência temporal para três COAC. Parte inferior - detalhamento das tarefas executadas no nó controlador durante o  $k$ -ésimo COAC.

destes dados no *buffer* de transmissão do nó sensor. A partir de então, inicia-se o processo de transmissão dos mesmos, via rede de comunicação, do nó sensor para o nó controlador. No instante  $t = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} = t_k^c$  o pacote de dados proveniente do nó sensor chega ao nó controlador e é armazenado no *buffer* de entrada deste. Como o nó controlador é GE, ou GET, ou GETM, a chegada deste pacote de dados no mesmo gera uma interrupção, a qual ativa uma sequência de tarefas a serem nele executadas.

A primeira destas tarefas é a de calcular o valor do erro de referência  $\mathbf{e}_r(t_k^c)$ . Isto é feito a partir dos dados providos do nó sensor  $\mathbf{y}(t_k^s - \tau_k^{sc})$  e do sinal de referência  $\mathbf{r}(t_k^s - \tau_k^{sc})$ . Como ilustrado na Figura 6.4, seu tempo de execução é  $\tau_{k1}^c$ .

A segunda tarefa é determinar o valor do intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{c_k}$ . Neste caso, seu tempo de execução é  $\tau_{k2}^c$ , como ilustrado na Figura 6.4. Para tal, relativamente ao modo de operação do nó controlador, duas particularidades devem ser consideradas. A primeira delas diz respeito a quando o nó controlador é guiado a eventos (GE) e a segunda, quando o nó controlador é simultaneamente guiado a eventos e no tempo (GET). Quando o nó controlador é guiado a eventos seu *clock* não é sincronizado por um *clock* global. Portanto, não é possível determinar o valor de  $\tau_{c_k}$ . Também não é possível determinar  $\tau_{c_k}$ , uma vez que, para se determinar  $\tau_{c_k}$  é necessário determinar antes  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ , o que não é possível, já que os *clocks* não estão sincronizados e já que  $\tau_{k+1}^{sc}$  ainda está por ocorrer. Desse modo, é possível determinar apenas  $\tau_{c_{k-1}}$  utilizando-se o próprio *clock* local, para medir o tempo transcorrido entre os dois últimos

instantes de amostragem do nó controlador  $t_{k-1}^c$  e  $t_k^c$ , isto é,  $\tau_{c_{k-1}} = t_k^c - t_{k-1}^c$ .

Por outro lado, quando o nó controlador opera no modo GET, seu *clock* é sincronizado por um *clock* global, o que torna possível determinar  $\tau_k^{sc}$ . Entretanto, ainda assim, não é possível determinar  $\tau_{c_k}$ , uma vez que, para determinar  $\tau_{c_k}$  o valor de  $\tau_{k+1}^{sc}$  deve ser previamente conhecido. Neste caso, não é possível utilizar as expressões deduzidas nos teoremas apresentados no Capítulo 3 para se determinar  $\tau_{c_k}$ . A menos que se utilize alguma técnica de predição para estimar o valor de  $\tau_{k+1}^{sc}$  ou, diretamente, o valor de  $\tau_{c_k}$ .

A terceira tarefa é calcular o valor das matrizes de estado do controlador de tempo discreto:  $\Phi(\tau_{c_k})$ ,  $\Gamma_0(\tau_{c_k})$  e  $\Gamma_1(\tau_{c_k})$ . O tempo de execução desta tarefa é  $\tau_{k_3}^c$ . A quarta tarefa é a de calcular o estado do controlador  $\mathbf{x}_c(t_{k+1}^c)$  e a saída do controlador  $\mathbf{u}(t_k^c)$ . O tempo de execução desta tarefa é  $\tau_{k_4}^c$ . Finalmente, a quinta tarefa é a de armazenar  $\mathbf{u}(t_k^c)$  no *buffer* de transmissão do nó controlador. Seu tempo de execução é de  $\tau_{k_5}^c$ .

Obviamente, da discussão precedente, o valor de  $\tau_k^c$  é a soma do tempo de execução das cinco tarefas precedentemente apresentadas. Por conseguinte, seu valor é:

$$\tau_k^c = \tau_{k_1}^c + \tau_{k_2}^c + \tau_{k_3}^c + \tau_{k_4}^c + \tau_{k_5}^c \quad (6.39)$$

Quando  $t = t_k^s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c = t_k^c + \tau_k^c$  o pacote de dados a ser transmitido do nó controlador para o nó atuador está pronto para ser transmitido e encontra-se no *buffer* de transmissão do nó controlador. A partir de então, transcorrido o intervalo de tempo  $\tau_k^{ca}$ , quando  $t = t_k^a$  o pacote de dados proveniente do nó controlador chega ao nó atuador. Neste instante uma interrupção é gerada no nó atuador, a qual é a responsável pela inicialização da tarefa de execução das conversões D/A realizadas no mesmo. Terminada tais conversões o sinal de controle contínuo  $\mathbf{u}(t - \tau_k)$  é aplicado nas entradas da planta. No instante  $t = t_{k+1}^s$  termina o  $k$ -ésimo COAC e tem início o  $(k + 1)$ -ésimo COAC e todo o processo aqui descrito se repete.

**Observação 6.7** Quando o nó controlador é GT o instante de início de execução da lei de controle  $t_k^c$  é previamente definido na fase de projeto do NCS. Tal fato, resulta em algumas implicações. A primeira delas é que quando o pacote de dados proveniente do nó sensor chega no *buffer* de entrada do controlador nada ocorre até o instante  $t = t_k^c$ . Consequentemente, o atraso  $\tau_k^{sc}$  e o IAC  $\tau_{c_k}$  passam a ser invariantes no tempo. Neste caso, as matrizes  $\Phi_c(\tau_{c_k})$  e  $\Gamma_c(\tau_{c_k})$ , antes variantes no tempo, passam a ser invariantes no tempo e, portanto, são reescritas como  $\Phi_c$ ,  $\Gamma_c$ , cuja consequência é uma lei de controle invariante no tempo. Isso elimina a necessidade de determinar  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_k^{sc}$ , bem como, de recalculá-las as matrizes  $\Phi_c$  e  $\Gamma_c$ . Portanto, as cinco tarefas executadas no nó controlador se reduzem a três. A segunda e a terceira tarefas passam a não mais existir.

## 6.4 Exemplos numéricos

Doravante serão apresentados vários exemplos de NCSs. Para cada exemplo, os dados relativos aos indicadores de desempenho da resposta ao degrau unitário (IDRDU) são levantados e analisados. Além disso, os gráficos de todas as respostas ao degraus unitários (RDUs) de cada exemplo são plotados uns sobre os outros.

### 6.4.1 Planta de fase mínima

De posse das funções de transferências de tempo contínuo da planta  $G(s)$  e do controlador  $C_a(s)$  pré-projetado para um sistema de controle não conectado em rede (nNCS - sigla em inglês para *nonnetworked control system*), deve-se obter seus modelos equivalentes de tempo discreto conforme apresentado na Seção 6.2. Para o exemplo em questão tais funções de transferência são [CERVIN, 2003].

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)} \quad (6.40)$$

$$C_a(s) = 1,5 \left( 1 + \frac{0,035s}{1 + 0,0035s} \right) \quad (6.41)$$

cujas matrizes da representação em espaço de estados da planta  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  do modelo apresentado nas equações (6.1) - (6.2) e do controlador  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  do modelo apresentado nas equações (6.29) - (6.30) são:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{C}_p = [0 \quad 31,25] \quad (6.42)$$

$$\mathbf{A}_c = -285,7143, \quad \mathbf{B}_c = 64, \quad \mathbf{C}_c = -66,9643 \quad e \quad \mathbf{D}_c = 16,5. \quad (6.43)$$

### MED da planta

Quando a planta não é submetida a atraso ( $\tau = 0$ ) seu modelo em espaço de estados de tempo contínuo é dado segundo as equações (6.1) e (6.2). Neste caso, o MED é dado nas equações (6.5) - (6.8), com:

$$\Phi_p = e^{\mathbf{A}_p \tau_s} = \begin{bmatrix} e^{-\tau_s} & 0 \\ 1 - e^{-\tau_s} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\Gamma_p = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p = 32 \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau_s} \\ -1 + \tau_s + e^{-\tau_s} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

com  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{C}_p$  dadas na equação (6.42).

### MED do controlador

Quando o controlador opera no modo GT seu modelo dinâmico de tempo contínuo e invariante no tempo é apresentado nas equações (6.29) e (6.30). Neste caso, o MED invariante no tempo é apresentado nas equações (6.31) - (6.34), com:

$$\Phi_c = e^{\mathbf{A}_c \tau_s} = e^{-285,7143 \tau_s} \quad (6.46)$$

$$\Gamma_c = \int_0^{\tau_s} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143 \tau_s}) \quad (6.47)$$

com  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  dadas na equação (6.43).

Quando o controlador opera no modo GET seu modelo de tempo discreto também é obtido da representação dinâmica de tempo contínuo dada nas equações (6.29) e (6.30). Neste caso, seu MED com IAC  $\tau_{c_k}$  variante no tempo e determinado pelo Teorema 3.1 é dado segundo as equações (6.35) - (6.38), com:

$$\Phi_c(\tau_{c_k}) = e^{\mathbf{A}_c \tau_{c_k}} = e^{-285,7143 \tau_{c_k}} \quad (6.48)$$

$$\Gamma_c(\tau_{c_k}) = \int_0^{\tau_{c_k}} e^{\mathbf{A}_c s} ds \mathbf{B}_c = \frac{64}{285,7143} (1 - e^{-285,7143 \tau_{c_k}}) \quad (6.49)$$

variantes no tempo e com  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{D}_c$  dadas na equação (6.43).

Quando o controlador opera no modo GET com condição inicial modificada (GETM) toda a formulação matemática é como a do controlador operando no modo GET. A condição inicial do IAC operando no modo GETM é  $\tau_{c_0} = 2,0\tau_s + \tau_0^{sc}$ .

**Observação 6.8 (Não causalidade do IAC GET)** *É relevante destacar que a expressão do IAC  $\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_{k+1}^s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^s - \tau_k^{sc}$  quando o controlador opera no modo GET, Teorema 3.1, é não causal [SILVA; LIMA, 2018]. Isto é, para determinar  $\tau_{c_k}$  é necessário conhecer o valor dos atrasos  $\tau_{k+1}^s$  e  $\tau_{k+1}^{sc}$ , os quais ainda estão por ocorrer. Do ponto de vista prático este problema pode ser superado trocando o índice  $k$  por  $k - 1$  nos termos do lado direito da igualdade da expressão de  $\tau_{c_k}$ . Com isto, tal expressão passa a ser causal e, portanto, dada por  $\tau_{c_k} = \tau_s + \tau_k^s + \tau_k^{sc} - \tau_{k-1}^s - \tau_{k-1}^{sc}$ .*

### Simulação - topologia S-C-A

Seguindo a deixa de Walsh [WALSH., 2002], o modelo de transferência de pacotes, ou equivalentemente dos atrasos  $\tau_k^{sc}$  e  $\tau_k^{ca}$  dos pacotes de dados que trafegam pela rede de comunicação, é representado por um processo de Poisson [PAPOULIS, 1991, p.57] de média  $\mu = 1/\tau_s$  e de  $\lambda$  amostras esperadas na unidade de tempo (1 segundo). Dessa maneira, a probabilidade de  $k$

eventos de transmissão de pacotes ocorrerem na unidade de tempo é dada por  $P(k) = \mu^k e^{-\mu} / k!$ . A partir desta equação pode-se obter um vetor de pontos. Cada ponto deste vetor<sup>6</sup> representa um atraso de comunicação do NCS. O valor de cada coordenada desse vetor deve satisfazer as condições pré-estabelecidas para o atraso, isto é:  $\tau_k \leq \tau_s$  ou  $\tau_k > \tau_s$  e também deve se adequar às especificações do tempo mínimo de resposta para transmissão de um pacote de dados na rede. Assim, para o exemplo em questão, foi assumido que:  $\tau_k \leq \tau_s$ ,  $\tau_s = 2,0$  ms,  $\tau_k^s = \tau_k^c = \tau_k^a = 50$   $\mu$ s. Além disso, os atrasos máximos e mínimos de comunicação sensor controlador, respectivamente, denotados por  $\tau_{k_{max}}^{sc}$  e  $\tau_{k_{min}}^{sc}$  e controlador atuador, respectivamente, denotados por  $\tau_{k_{max}}^{ca}$  e  $\tau_{k_{min}}^{ca}$  são  $\tau_{k_{max}}^{sc} = \tau_{k_{max}}^{ca} = 0,915$  ms e  $\tau_{k_{min}}^{sc} = \tau_{k_{min}}^{ca} = 51,46$   $\mu$ s. O método numérico utilizado para integrar o modelo contínuo da planta foi o método Runge-Kutta de quarta ordem [PRESS, 2002, p.716]. O passo de integração utilizado para implementar tal método foi de 50  $\mu$ s.

### Tratamento Estatístico

Para o levantamento dos dados estatísticos para verificação do comportamento das RDU do NCS, topologia S-C-A, com controlador operando nos modos apresentados, foi realizado um experimento simulado. Tal experimento foi realizado para o exemplo que vem sendo utilizado nesta tese. O número de simulações (RDU)  $C_p^n$  a que o NCS foi submetido é dado por

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.50)$$

onde:  $n$  é o número de diferentes valores dos possíveis atrasos de controle ao qual o NCS é submetido e  $p$  é o número de parâmetros variantes no tempo do NCS. Para todos os exemplos o PAS é invariante no tempo, conseqüentemente o número de simulações da RDU foi obtido para  $p = 3$ , sendo  $\tau_k$ ,  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$  os parâmetros variantes do tempo do NCS.

### NCS com $p = 3$

Quando  $\tau_k$ ,  $\tau_{c_k}$  e  $\tau_{a_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  são considerados os parâmetros variantes no tempo do NCS tem-se que  $p = 3$ . Como o número de diferentes valores de atrasos é  $n = 22$ , para  $p = 3$  resulta que  $C_3^{22} = 1.540$ . Isto significa que o NCS foi submetido a 1.540 simulações, ou 1.540 transitórios (RDUs). As 1.540 RDUs do NCS são apresentadas sobrepostas umas às outras na Figura 6.5. Nesta figura também são apresentadas sobrepostas às 1.540 RDUs do NCS, as RDUs do nNCS de tempo contínuo (nNCSC) e do nNCS de tempo discreto (nNCSD). A sobreposição das 1.540 RDUs, obtida com o NCS submetido à sequência de atrasos como a ilustrada na Figura 6.5a, são apresentadas nas Figuras 6.5b abordagem NCSav, 6.5c abordagem

<sup>6</sup>A função do MatLab  $de=poisspdf(a_1,\mu)$ , com  $a_1=1:Lipoiss$  para  $lpoiss=0:\tau_s:1$  e  $Lipoiss=length(lpoiss)$ , retorna um vetor de pontos obtidos segundo um processo de Poisson [SILVA; LIMA, 2008].

GET e 6.5d, abordagem GETM. Para este cenário, os IDRDU são apresentados e comparados na Tabela 6.2. Os valores médios e os desvios padrões (DP) dos IDRDU do NCS, assim como, os valores máximos e mínimos de tais indicadores obtidos nesse experimento são apresentados na Tabela 6.1. A condição inicial do IAC utilizado na abordagem GETM foi de  $\tau_{c_0} = 2,0\tau_s + \tau_0^{sc}$ , com  $\tau_s = 2,0$  ms.

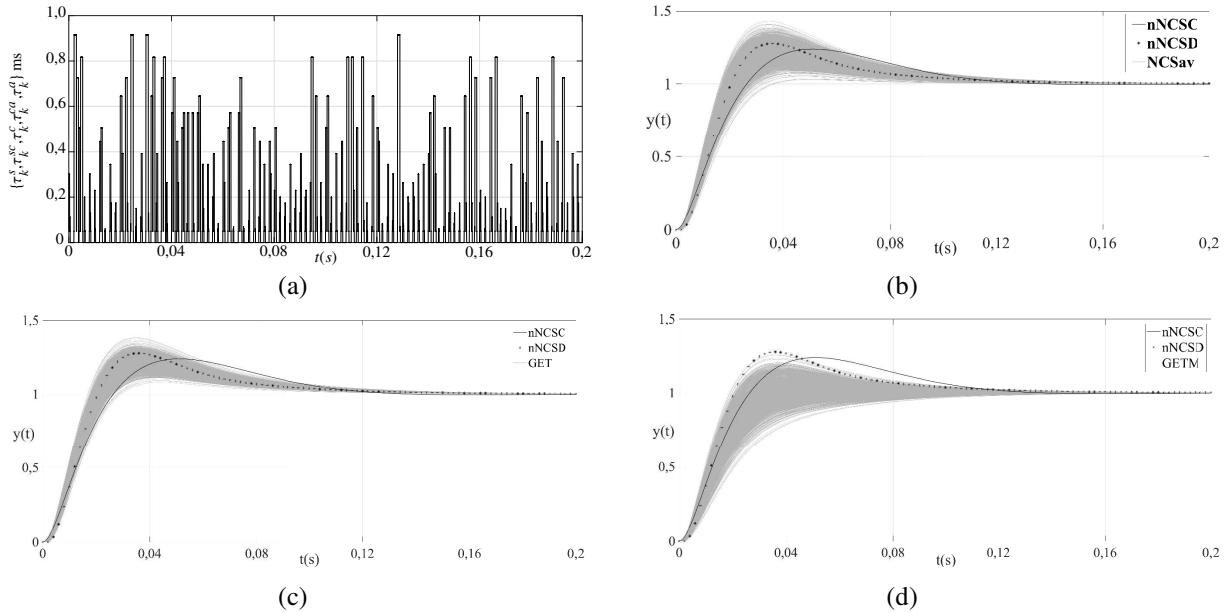


Figura 6.5: (a) Sequência de atrasos  $\{\tau_k^s, \tau_k^{sc}, \tau_k^c, \tau_k^{ca}, \tau_k^a\}$  de uma RDU. (b) 1.540 RDUs da abordagem NCSav com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD; (c) 1.540 RDUs da abordagem GET com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD; (d) 1.540 RDUs da abordagem GETM com a sobreposição das RDUs do nNCSC e do nNCSD.

Tabela 6.1: Valores médios, máximos e mínimos e desvios padrões dos indicadores da resposta ao degrau dos NCSs submetidos a 1.540 transitórios (planta de fase mínima).

I R D			NCSav				GET				GETM			
	nNCSC	nNCSD	Má- ximo	Mí- nimo	Mé- dia	Des. Pad.	Má- ximo	Mí- nimo	Mé- dia	Des. Pad.	Má- ximo	Mí- nimo	Mé- dia	Des. Pad.
$M_p$	0,236	0,274	0,424	0,029	0,224	0,0623	0,378	0,079	0,222	0,0455	0,252	0,000	0,048	0,0489
$t_p$	0,051	0,036	0,051	0,034	0,038	0,0021	0,044	0,034	0,038	0,0015	0,250	0,036	0,100	0,0907
$t_r$	0,022	0,020	0,028	0,015	0,018	0,0019	0,024	0,015	0,018	0,0014	0,063	0,017	0,027	0,0068
$t_s$	0,117	0,120	0,142	0,066	0,123	0,0090	0,140	0,092	0,124	0,0065	0,128	0,032	0,076	0,0237

Pode-se observar que as RDUs das abordagens GET e GETM apresentam *overshoots* menores que as demais. De um modo geral, no experimento estatístico fica evidenciado que na abordagem GETM os IDRDU são melhores que os IDRDU das abordagens NCSav e GET, como ilustrado na Tabela 6.2. Além disso, para a abordagem GETM dois IDRDU merecem destaque: o *overshoot* e o tempo de estabelecimento. Pode-se observar que em 100% das RDUs os *overshoots* das RDUs da abordagem GETM foram inferiores aos *overshoots* das RDUs das abordagens NCSav, NCSav e GET e em 98,87% das vezes os *overshoots* das RDUs da abordagem GETM foram inferiores ao *overshoot* da RDU do sistema de controle de tempo contínuo



não submetido a atraso (nNCSC). E cerca de 98,0% das vezes os tempos de estabelecimentos foram menores nas RDUs da abordagem GETM em relação aos tempos de estabelecimentos das abordagens nNCSC, nNCSD, NCSav e GET. O que evidencia que tal abordagem proporciona melhores resultados que as demais.

Tabela 6.2: Porcentagem (%) e frequência (freq) de ocorrência dos indicadores da resposta ao degrau dos NCSs submetidos a 1.540 transitórios (planta de fase mínima).

Comparação dos IRD	Overshoot $M_p$		Tempo de pico $t_p$		Tempo de subida $t_r$		Tempo de estabelecimento $t_s$	
	freq	%	freq	%	freq	%	freq	%
NCSav $\leq$ nNCSC	857	55,65	1.539	99,94	1.480	96,10	0	0,00
NCSav $\leq$ nNCSD	1.198	77,79	167	10,84	1.247	80,97	482	31,30
GET $\leq$ nNCSC	895	58,12	1.540	100,00	1.532	99,48	267	17,33
GET $\leq$ nNCSD	1.364	88,57	131	8,51	1.346	87,40	384	24,93
GET $\leq$ NCSav	920	59,74	867	56,30	660	42,86	825	53,57
GETM $\leq$ nNCSC	1.538	98,87	964	62,60	405	26,30	1.521	98,77
GETM $\leq$ nNCSD	1.540	100,00	0	0,00	137	8,90	1.533	99,55
GETM $\leq$ NCSav	1.540	100,00	0	0,00	0	0,00	1.510	98,05
GETM $\leq$ GET	1.540	100,00	0	0,00	0	0,00	1.531	99,42

### Aspectos teóricos práticos das abordagens propostas

A abordagem na qual o NCS opera com controlador no modo GET ou GETM é adaptativa, uma vez que, o IAC é atualizado em tempo de execução. Isto é, o IAC de tempo discreto muda de valor a cada COAC.

Do ponto de vista teórico não há dúvidas que existem ganhos com a abordagem proposta, uma vez que, os problemas decorrentes dos atrasos variantes no tempo são, em geral, amenizados/suprimidos.

Por outro lado, do ponto de vista prático, ainda não existem soluções comerciais de *hardware*, como CLPs (Controladores lógicos programáveis), com os quais se possa implementar as abordagens GET ou GETM propostas. Fato este justificado pela inexistência no mercado, de CLPs que operem com intervalos de amostragem variantes no tempo. Neste caso, implementações específicas podem ser desenvolvidas utilizando-se microcontroladores, DSPs (*Digital Signal Processors*) ou computadores.

Outro fator que poderia ser crítico na implementação das abordagens GET e GETM é relativo ao cumprimento da hipótese de sincronismo dos *clocks* presentes nos nós componentes. Todavia, isto não se constitui um problema, uma vez que, a especificação do tempo máximo necessário para o estabelecimento do sincronismo de *clocks* em uma rede de comunicação é ínfimo em relação aos atrasos do NCS. Em termos quantitativos, por exemplo, para a rede CAN (*Controller Area Network*) [BOSCH, 1991], este tempo é igual ao tempo de transferência de um *bit*. Isto significa que para a máxima taxa de transferência da rede CAN, que é de 1 Mbps, este tempo é de 1  $\mu$ s. Já o padrão IEEE 1588 estabelece o sincronismo para redes de área local, in-

clusivo para a rede *Ethernet*, com precisão de 1 ns [IEEE, 2009, p.C1]. Dessa maneira, do ponto de vista tecnológico, a hipótese de sincronismo é facilmente satisfeita, não se constituindo portanto, em um problema ou limitação para a implementação física de um NCS. Complementar a tais fatos, sabe-se que a maioria das aplicações de controle tem requisitos, relativos à taxa de amostragem, satisfeitos para períodos de amostragem da ordem de milissegundos, o que para os casos supracitados representam algo em torno de milhares, ou até milhões, de vezes maior que o tempo de sincronismo da rede de comunicação.

## 6.5 Resultados experimentais

Os resultados experimentais aqui apresentados têm o propósito de confirmar experimentalmente os efeitos do conceito de fase relativa introduzido no Capítulo 4, Seção 4.9, desta tese.

### 6.5.1 A plataforma experimental

O diagrama esquemática da plataforma experimental com simulador *hardware in the loop* utilizada para realização do experimento controlado do NCS, topologia S-CA, é ilustrada na Figura 6.6. Tal plataforma é composta pelos nós sensor, controlador e atuador, um microcomputador (simulador *hardware in the loop*), uma fonte de tensão DC de 12 volts, barramentos de comunicação CAN e RS232 e cabos de alimentação. Fisicamente, os nós controlador e atuador são implementados em uma única placa com microcontrolador PIC16F876A, razão pela qual tais nós aparecem juntos e envolvidos por uma linha tracejada.

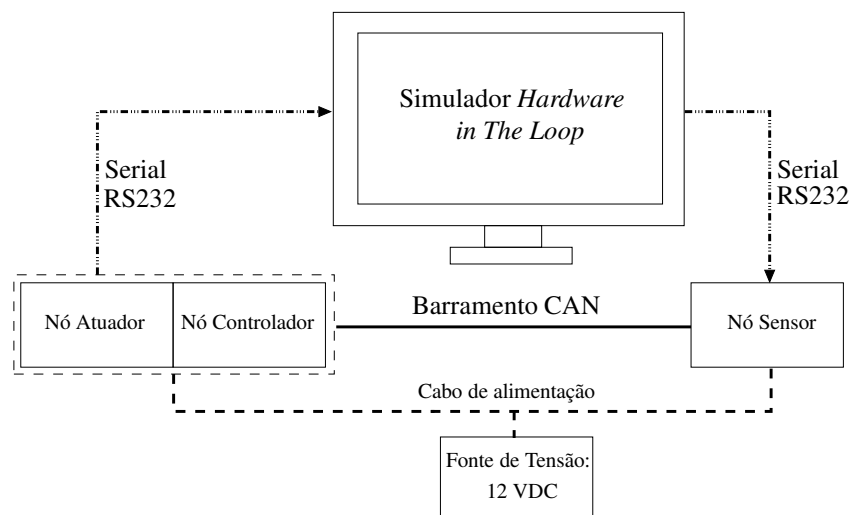


Figura 6.6: Representação da plataforma experimental para simulação e teste em tempo real de NCSs com barramento CAN e topologia S-CA.

As duas placas nas quais são implementados os nós sensor e controlador atuador contém o microcontrolador PIC16F876A, o qual possui interfaces RS232 e CAN. Estas placas são

alimentadas em 12 VDC. As interfaces RS232 são utilizadas para interligar as placas ao microcomputador (Simulador *Hardware in The Loop*), com sistema operacional em tempo real Linux/RTAI (*Real-Time Application Interface*), a uma taxa de 115.200 *bits/s*. Já as setas que aparecem na figura indicam o fluxo de dados. Os nós sensor e controlador são interligados via barramento CAN a uma taxa de 1 Mbits/s como ilustrado no diagrama da Figura 6.6. A planta é executada no microcomputador com método de Runge-Kutta de quarta ordem, cujo passo de cálculo é de 100  $\mu$ s. Os *software* embarcados nos microcontroladores e no microcomputador foram escritos em linguagem C. Por fim, uma foto da plataforma experimental é apresentada na Figura 6.7. Mais detalhes sobre ela podem ser encontrados em [Sá, 2016, p.170].

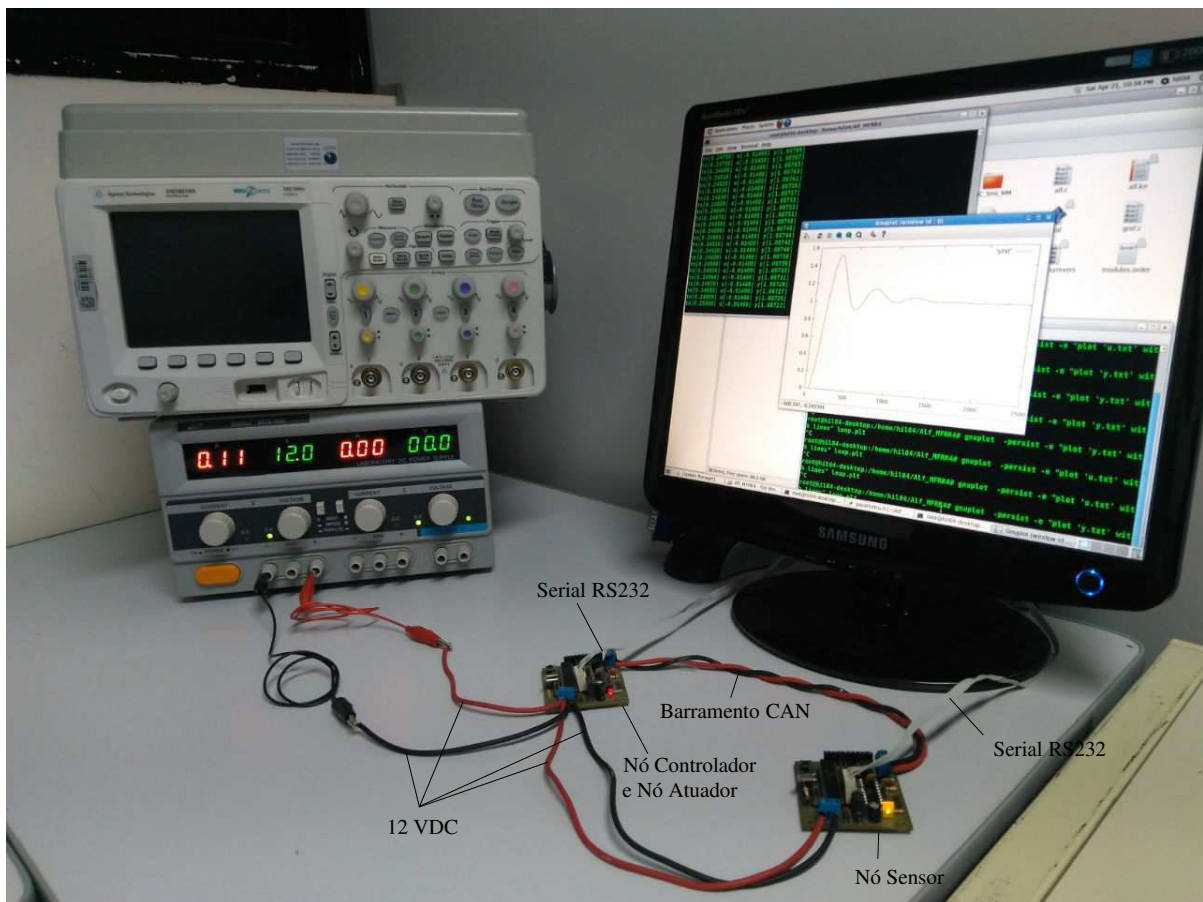


Figura 6.7: Plataforma experimental - NCS topologia S-CA.

### 6.5.2 O experimento realizado

O experimento realizado foi para o exemplo do Servo DC, o qual já foi utilizado nos Capítulos 1, 4 e 6. O exemplo em questão foi reproduzido experimentalmente para a topologia S-CA, com PAS  $\tau_s$  de 5,0 ms. A razão para a utilização de  $\tau_s = 5,0$  ms foi de ordem prática, para tornar viável o experimento com a plataforma experimental disponível. Neste caso, para o sistema de controle não conectado em rede via computador (nNCSvc) o PAC  $\tau_c$  também é de 5,0 ms. O tempo de execução do algoritmo de controle  $\tau_k^c$  foi medido utilizando o osciloscópio, como

ilustrado na Figura 6.8a. Para tal, imediatamente antes de executar a rotina do algoritmo de controle um pino de saída digital da placa onde foi implementado o nó controlador era setado para o estado lógico 0. Assim que a execução da rotina de controle era finalizada, este pino era setado para o estado lógico 1. O valor medido de  $\tau_k^c$  foi de  $578 \mu\text{s}$ , o qual foi aproximado para  $0,58 \text{ ms}$ . Obviamente, o intervalo de tempo entre duas execuções do algoritmo de controle é justamente o PAC. Seu valor de  $5,0 \text{ ms}$  também foi verificado na medição com osciloscópio e é apresentado na Figura 6.8b. Os valores dos atrasos  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^a$  são:  $\tau_k^s = \tau_k^a = 0,36 \text{ ms}$ . Vale salientar aqui que os valores dos atrasos  $\tau_k^s$  e  $\tau_k^a$  são grandes devido à baixa velocidade de transferência de dados da porta RS232 utilizada, que mesmo operando na taxa máxima permitida,  $115.200 \text{ bits/s}$ , ainda é lenta.

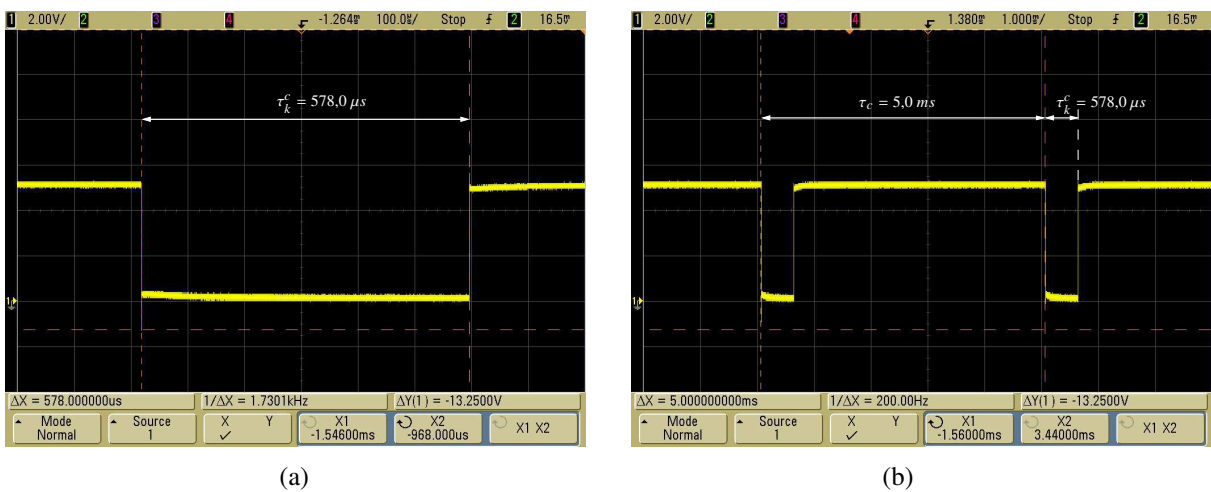


Figura 6.8: Telas do osciloscópio mostrando a medição: (a) execução do algoritmo de controle  $\tau_k^c$ ; (b) período de amostragem do controlador  $\tau_c$  entre duas execuções do algoritmo de controle da implementação do sistema de controle não conectado em rede via computador (nNCSvc).

Por fim, estabeleceu-se o valor do atraso sensor controlador  $\tau_k^{sc}$ . Para tal, verificou-se que o tempo para transmitir uma mensagem pela rede CAN, à taxa de  $1 \text{ Mbits/s}$ , foi de  $92 \mu\text{s}$ <sup>7</sup>. Valor este aproximado para  $100 \mu\text{s}$ . Tal aproximação foi feita devido o passo de integração do método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizado para integrar a planta, ter sido de  $100 \mu\text{s}$ . Desse modo, como  $92 < 100$ , o valor da transferência de um pacote pela rede CAN, que é de  $92 \mu\text{s}$ , foi assumido como sendo de  $100 \mu\text{s}$ . Portanto, o atraso sensor controlador  $\tau_k^{sc}$  mínimo foi de  $100 \mu\text{s}$ .

Além disso, como o experimento realizado foi planejado para ser controlado,  $\tau_k^{sc}$  assumiu apenas dois valores:  $100 \mu\text{s}$  ou  $0,1 \text{ ms}$  e  $2.700 \mu\text{s}$  ou  $2,7 \text{ ms}$ . Quando o valor de  $\tau_k^{sc} = 0,1 \text{ ms}$ , a rotina de controle foi executada imediatamente, assim que o pacote de dados proveniente do nó sensor alcançasse o nó controlador. Já quando o valor de  $\tau_k^{sc} = 2,7 \text{ ms}$ , os dados provenientes

<sup>7</sup>Um dos comprimentos de mensagem de dados da rede CAN é de  $92 \text{ bits}$ . Destes,  $32 \text{ bits}$ , ou  $4 \text{ bytes}$ , são de dados e os demais  $\text{bits}$  são  $\text{bits}$  de sinais e de controle [Sá, 2016, p.219].

do nós sensor eram “segurados” no nó controlador até transcorrer o atraso desejado de 2,7 ms. Só então, a rotina de controle era executada. A partir dos dois valores de  $\tau_k^{sc}$ , estabeleceu-se duas seqüências de atrasos sensor controlador  $\{\tau_k^{sc}\}$  específicas:  $\{0,1, 2,7, 0,1, 2,7, \dots\}$  ms e  $\{2,7, 0,1, 2,7, 0,1, \dots\}$  ms.

A partir das informações apresentadas, duas seqüências de atrasos de controle<sup>8</sup>  $\{\tau_k\}$  foram estabelecidas:  $\{1,4, 4,0, 1,4, 4,0, \dots\}$  ms e  $\{4,0, 1,4, 4,0, 1,4, \dots\}$  ms. Naturalmente tais seqüências de atraso de controle resultaram do fato que  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a$ , que para  $\tau_k^s = \tau_k^a = 0,36$  ms,  $\tau_k^c = 0,58$  ms e  $\tau_k^{sc} = 0,1$  ms, obtém-se,  $\tau_k = 1,4$  ms. Analogamente, para  $\tau_k^s = \tau_k^a = 0,36$  ms,  $\tau_k^c = 0,58$  ms e  $\tau_k^{sc} = 2,7$  ms, obtém-se,  $\tau_k = 4,0$  ms. Equivalentemente, em termos de PAS, as seqüências de atraso de controle  $\{\tau_k\}$  são dadas por:  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  e  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ . Pode-se observar que em ambas as seqüências  $\{\tau_k\}$  o atraso de controle tem valor médio  $\tau_{k_m}$  dado por  $\tau_{k_m} = (0,28\tau_s + 0,8\tau_s)/2 = 0,54\tau_s$ .

As seqüências de atraso de controle  $\{\tau_k\}$  foram escolhidas de modo proposital para demonstrar experimentalmente os efeitos da fase relativa sobre os NCSs<sup>9</sup>. O conceito de fase relativa foi introduzido no Capítulo 4, Seção 4.9, e é uma das contribuições desta tese. Foi provado também no Capítulo 4 a existência das seqüências ótima e péssima. Estas seqüências são como as apresentadas neste experimento. Os resultados experimentais foram obtidos justamente para comprovar/corroborar os resultados teóricos. Sendo assim, a seqüência ótima de atrasos de controle é uma seqüência da forma  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$  e a pior das seqüências de atrasos de controle, ou seqüência péssima, é da forma  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . Tais resultados serão apresentados a seguir.

### 6.5.3 Resultados obtidos

As respostas ao degrau unitário (RDU) foram obtidas a partir do experimento planejado e realizado. As RDU foram obtidas tanto para os NCSs: NCSav e GET, quanto para o sistema de controle não conectado em rede via computador (nNCSvc) tradicional. Na primeira parte do experimento foi obtida a RDU do sistema de controle nNCSvc, com  $\tau_s = 5,0$  ms,  $\tau_c = 5,0$  ms e passo de cálculo do método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizado para integração da planta, de 100  $\mu$ s.

Em seguida, o experimento foi re-executado com o sistema de controle submetido à seguinte seqüência de atrasos de controle  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  em dois cenários. No primeiro deles, o controlador é invariante no tempo e tem PAC  $\tau_c = 5,0$  ms. Além disso, a lei

<sup>8</sup>Por se tratar do NCS com topologia S-CA, o atraso de controle  $\tau_k$  é dado por  $\tau_k = \tau_k^s + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^a$ .

<sup>9</sup>As seqüências  $\{\tau_k\}$  foram obtidas através dos atrasos determinados. O atraso  $\tau_k^{sc}$  foi experimentalmente implementado através do condicionamento da execução da lei controle após decorrido um tempo pré-estabelecido por um *time* do microcontrolador no qual foi implementado o nó controlador. Somente após transcorrido o tempo pré-estabelecido no *time* que a lei de controle era executada e o sinal de controle gerado aplicado na entrada da planta.

de controle é executada assim que os dados provenientes do nó sensor alcance o nó controlador e transcorra o atraso  $\tau_k^s + \tau_k^{sc}$ . Esta estratégia foi definida previamente nesta tese com o nome de NCSav. No segundo cenário, o controlador opera no modo GET. Portanto, o intervalo de amostragem do controlador  $\tau_{ck}$  é variante no tempo e dado por  $\tau_{ck} = \tau_s + \tau_{k+1}^{sc} - \tau_k^{sc}$ , conforme Teorema 3.1, o qual também é uma das contribuições desta tese. Além disso, a lei de controle é executada assim que os dados provenientes do nó sensor alcance o nó controlador e transcorra o atraso  $\tau_k^s + \tau_k^{sc}$ .

Para estes cenários as RDUs obtidas experimentalmente, assim como, a RDU do sistema de controle de tempo contínuo (nNCSC), são apresentadas na Figura 6.9. E, os sinais de controle utilizados, obtidos experimentalmente, das RDUs ilustradas na Figura 6.9, são apresentados na Figura 6.10.

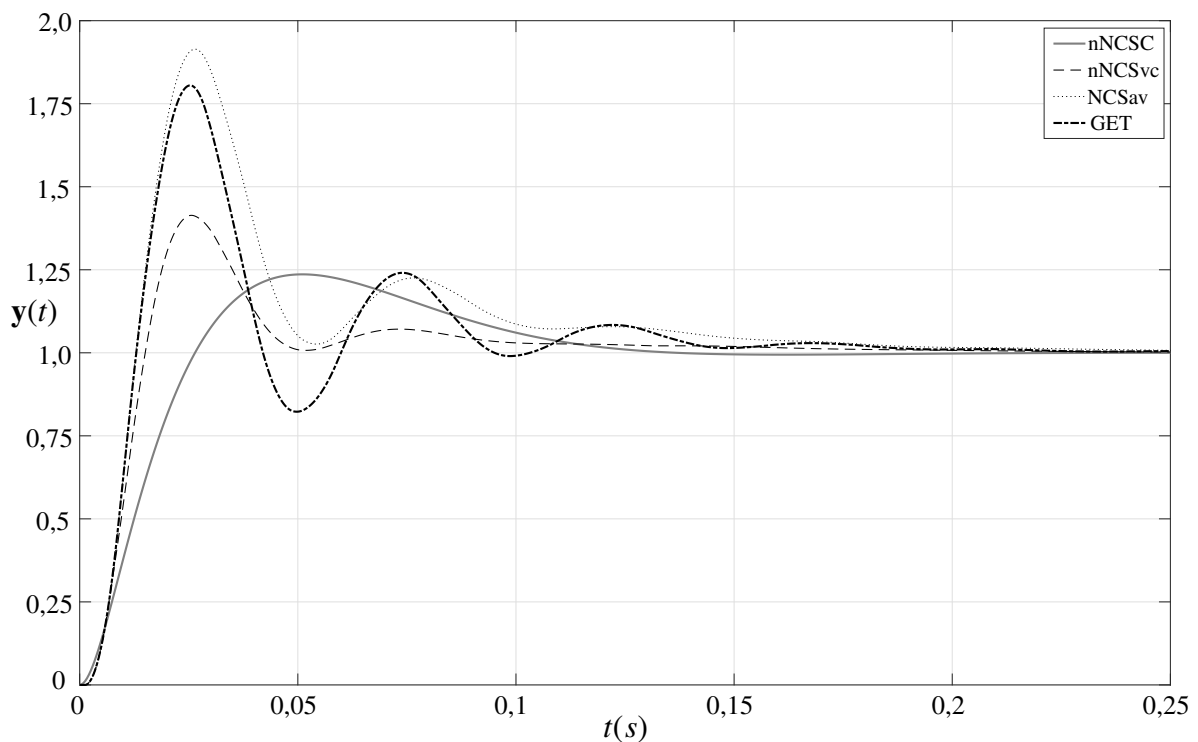


Figura 6.9: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e com controlador de tempo discreto ou via computador (nNCSvc), do NCS submetido a atraso  $\tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

Os *overshoots* das RDUs apresentadas na Figura 6.9 para os sistemas de controle: nNCSC, nNCSvc, NCSav, GET assumem, respectivamente, os seguintes valores: 0,236, 0,414, 0,914 e 0,805. Pode-se observar que o *overshoot* da RDU do NCS com controlador operando no modo GET é inferior ao da RDU do NCS NCSav, cujo controlador opera com PAC invariante no tempo.

Pode-se verificar através dos *overshoots* dos NCSs NCSav e GET que o desempenho desses

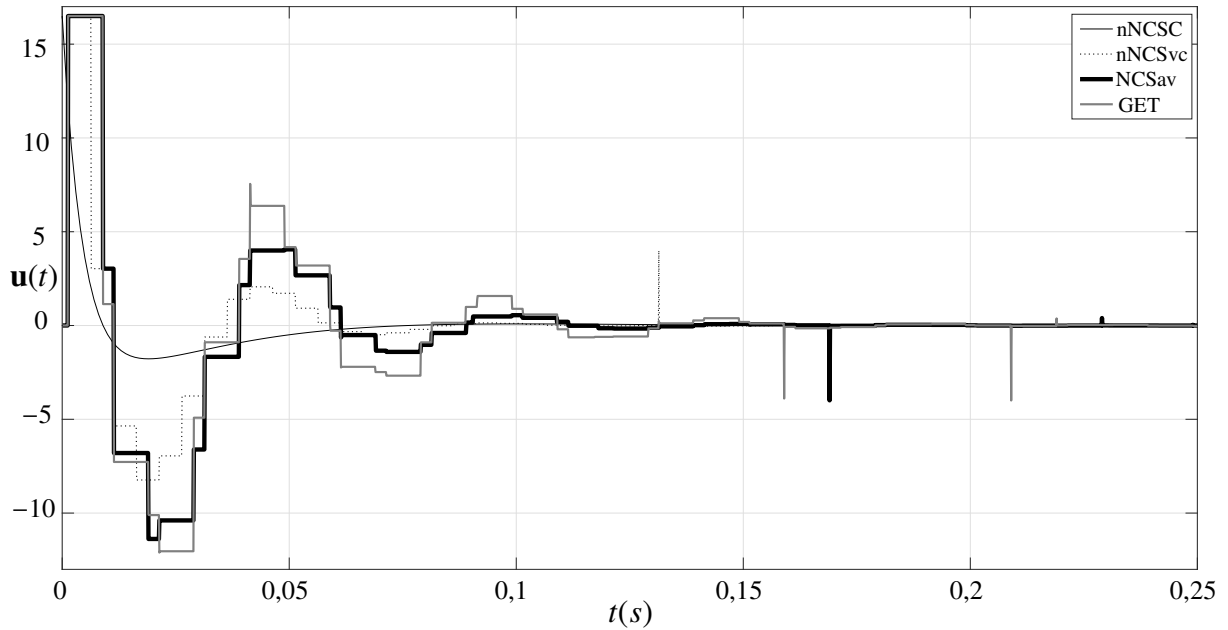


Figura 6.10: Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle: nNCSC, nNCSvc, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ .

sistemas é pior que desempenho dos sistemas nNCSC, nNCSvc. Tal resultado já era esperado, uma vez que, a que sequência de atrasos de controle  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$  não é a sequência ótima de atrasos deduzida no Capítulo 4, Seção 4.9. Tal sequência de atrasos é a sequência péssima, também deduzida no Capítulo 4, Seção 4.9. Como demonstrado no Capítulo 4, Seção 4.9 esta sequência de atrasos minimiza a fase relativa. E, portanto é a pior sequência de atrasos, entre todas as sequências de atrasos possíveis a serem aplicadas ao NCS. Ou dito de outra forma, esta é sequência de atrasos de controle que leva os NCSs a ter o pior desempenho possível.

Quando o experimento é repetido aplicando-se aos NCSs a sequência ótima de atrasos ( $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ ) os resultados obtidos, na forma das RDUs dos NCSs, são como esperado. Tais RDUs e seus respectivos sinais de controle são apresentados, respectivamente, nas Figuras 6.11 e 6.12.

Os *overshoots* das RDUs apresentadas na Figura 6.11 para os sistemas de controle: nNCSC, nNCSvc, NCSav, GET têm, respectivamente, os seguintes valores: 0,236, 0,414, 0,189 e 0,519. Neste caso, é notória a mudança de valores dos *overshoots* das RDUs dos NCSs. Para o caso da abordagem GET, seu valor caiu de 0,805 para 0,519. Certamente, para valores de PAS menores que o utilizado, 5,0 ms, os valores de tais *overshoots* seriam menores que os obtidos com PAS de 5,0 ms. Já para o caso da abordagem NCSav o *overshoot* que era de 0,915 passou a ser de 0,189. Resultados estes já esperados, uma vez que, aos NCSs foi aplicado a sequência ótima de atrasos, comprovadamente deduzida no Capítulo 4, Seção 4.9.

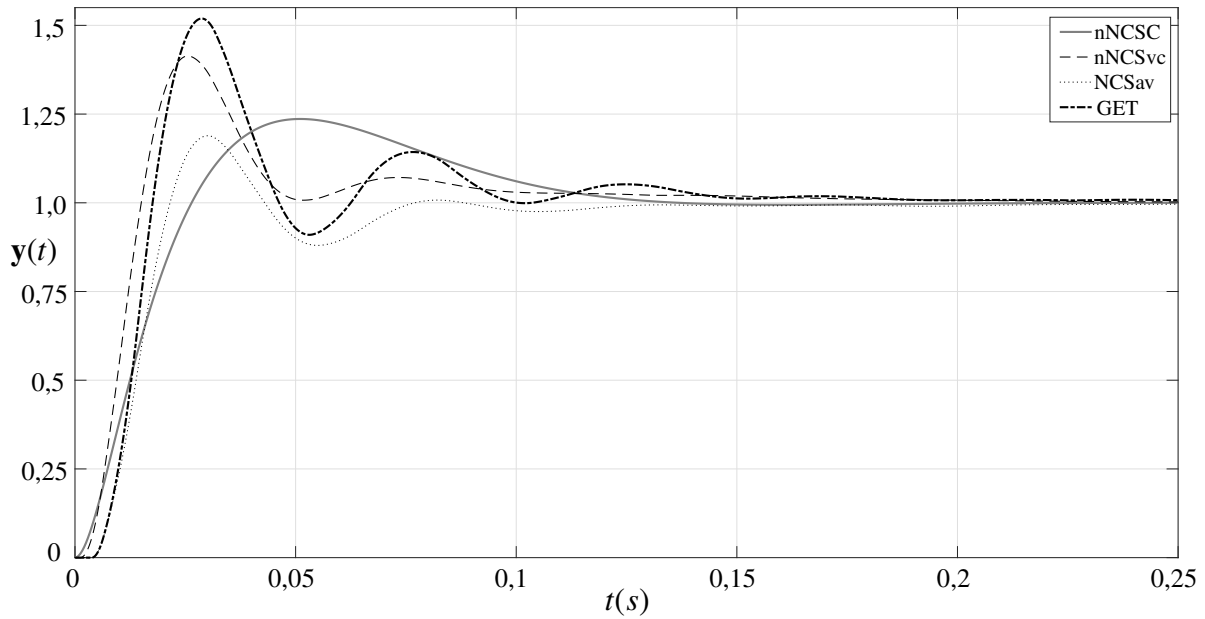


Figura 6.11: Respostas ao degrau unitário dos sistemas de controle não conectados em rede de tempo contínuo (nNCSC) e de tempo discreto ou digital (nNCSd), do NCS submetido a atraso  $\tau_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2, \dots\}$ , variante no tempo (NCSav) com  $\tau_{c_k} = \tau_s$  e do NCS com o controlador operando no modo GET. Os NCSs NCSav e GET são submetidos a sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é da forma  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ .

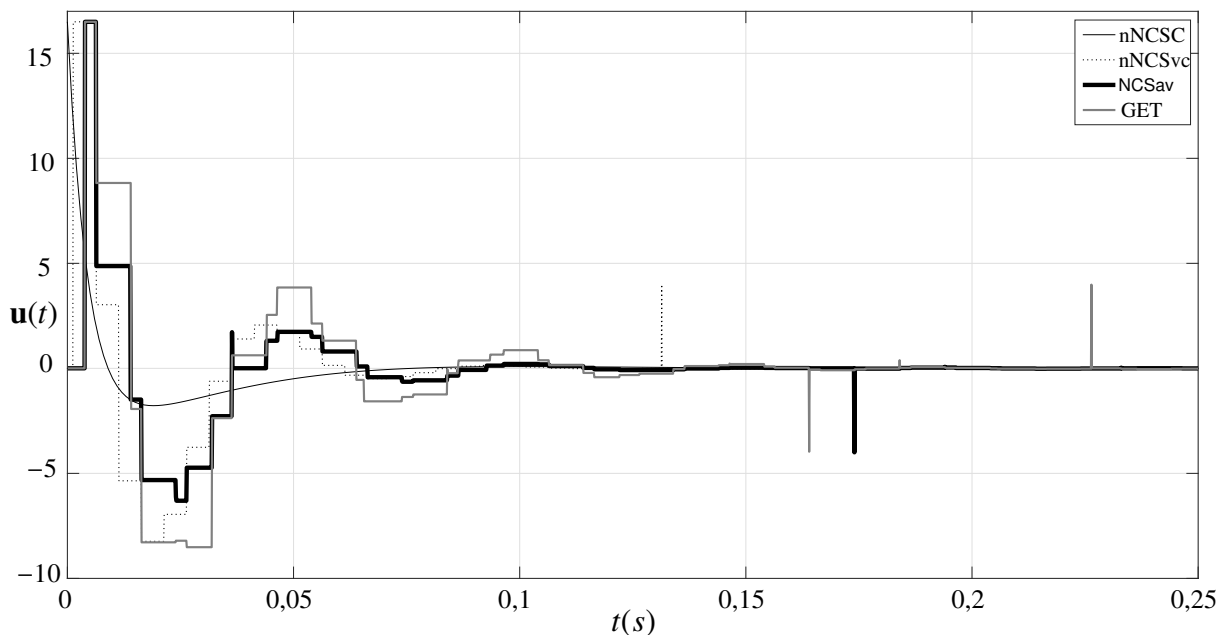


Figura 6.12: Sinais de controle das respostas ao degrau unitário dos NCSs simulados: nNCSC, nNCSd, NCSav e GET. Os NCSs NCSav e GET foram submetidos à sequência de atrasos  $\{\tau_k\}$  cuja lei de formação é  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$ .

### 6.5.4 Resposta em frequência do ZOH - Topologia S-CA

As respostas em frequência do ZOH foram obtidas para as RDUs do experimento realizado e apresentado na subseção precedente. Neste caso, três curvas de amplitude  $|\mathbf{G}_{h_k}(j\omega)|$  e três



curvas do “rastros” de fase  $\angle \mathbf{R}_{hk}(j\omega)$  foram obtidas e apresentadas na Figura 6.13.

A primeira das curvas do “rastros” de fase é a do ZOH do sistema de controle não conectado em rede via computador com PAS igual ao PAA de 5,0 ms e as outras duas curvas do “rastros” de fase são dos ZOHs dos NCSs submetidos às sequências: ótima e péssima de atraso de controle. Tais sequências são, respectivamente:  $\{0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, \dots\}$  e  $\{0,28\tau_s, 0,8\tau_s, 0,28\tau_s, 0,8\tau_s, \dots\}$ . A primeira sequência de atrasos de controle, sequência ótima, gerou a sequência ótima de IAA  $\{\tau_{a_k}\}$ , dada por:  $\{0,48\tau_s, 1,52\tau_s, 0,48\tau_s, 1,52\tau_s, \dots\}$ . E, a segunda sequência de atrasos de controle (sequência péssima) gera a pior sequência de IAA  $\{\tau_{a_k}\}$ , dada por:  $\{1,52\tau_s, 0,48\tau_s, 1,52\tau_s, 0,48\tau_s, \dots\}$ . Para estes cenários as curvas de amplitude e do “rastros” de fase são apresentadas na Figura 6.13.

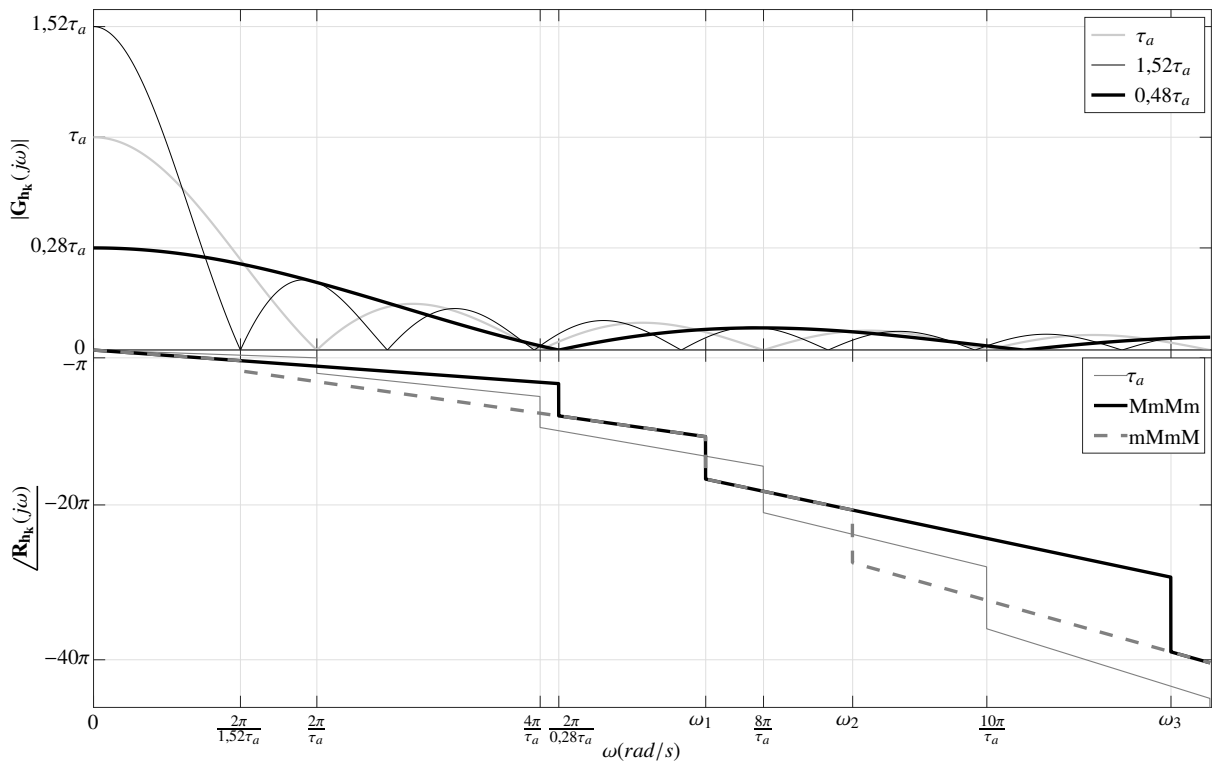


Figura 6.13: Amplitude e “rastros” de fase das respostas em frequência dos ZOHs com pulsos de larguras:  $0,28\tau_a$ ,  $\tau_a$  e  $1,52\tau_a$ , com  $\tau_a = 5,0$  ms.

onde  $\omega_1 = \frac{2\pi}{0,28\tau_a} + \frac{2\pi}{1,52\tau_a}$ ,  $\omega_2 = \frac{2\pi}{1,52\tau_a} + \frac{2\pi}{0,28\tau_a} + \frac{2\pi}{1,52\tau_a}$  e  $\omega_3 = \frac{2\pi}{0,28\tau_a} + \frac{2\pi}{1,52\tau_a} + \frac{2\pi}{0,28\tau_a}$ .

Observa-se que quando o NCS é submetido à sequência ótima de atrasos a curva do “rastros” de fase do ZOH do NCS é a que tem melhor fase, está acima das demais. Já quando a pior sequência de atrasos é aplicada a curva do “rastros” de fase do ZOH é a pior entre as curvas de “rastros” de fases obtidas. Tal curva está abaixo das demais curvas de “rastros” de fases. E, por fim, como era de se esperar a curva do “rastros” de fase do ZOH do sistema de controle não conectado em rede via computador está entre as duas outras curvas geradas a partir do NCS submetido à sequência ótima e péssima de atrasos. Tais resultados corroboram fidedignamente com a teoria desenvolvida e apresentada no Capítulo 4 e constitui-se numa das principais

contribuições desta tese.

## 6.6 Estabilidade

A estabilidade do NCS será realizada para o caso em que o sinal de saída da planta  $y(t)$  é amostrado por cruzamento de níveis. Neste sentido, a estabilidade será provada para o exemplo do Servo DC operando com a planta não submetida a atrasos. A estabilidade será provada quando a planta é controlada por uma lei de controle baseada em realimentação de estados.

### 6.6.1 Planta não submetida a atrasos

Quando a planta não é submetida a atrasos seu modelo em espaço de estados de tempo contínuo é dado segundo as equações (6.1) e (6.2) e seu MED é dado nas equações (6.9) - (6.12). Neste caso, para uma lei de controle do tipo

$$u(t_k^s) = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_p(t_k^s) + r(t_k^s) \quad (6.51)$$

onde,  $\mathbf{L}_k$  é o vetor de ganhos do  $k$ -COAC do controlador. Tal vetor deve ser de dimensão compatível com o vetor de estados  $\mathbf{x}_p(t_k^s)$  da planta. Para o exemplo em questão

$$\mathbf{L}_k = [l_{1k} \quad l_{2k}] \quad (6.52)$$

que substituído na equação (6.5), resulta

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}^s) = (\Phi_{\mathbf{p}k} - \Gamma_{\mathbf{p}k} \mathbf{L}_k) \mathbf{x}_p(t_k^s) + \Gamma_{\mathbf{p}k} r(t_k^s) \quad (6.53)$$

onde na equação (6.53)  $\Phi_{\mathbf{p}k} = \Phi_{\mathbf{p}k}(\tau_{s_k})$  e  $\Gamma_{\mathbf{p}k} = \Gamma_{\mathbf{p}k}(\tau_{s_k})$  com notação equivalente, mais simples, que a utilizada nas equações (6.9) - (6.12) são dadas por

$$\Phi_{\mathbf{p}k} = e^{\mathbf{A}_p \tau_{s_k}} = \begin{bmatrix} e^{-\tau_{s_k}} & 0 \\ 1 - e^{-\tau_{s_k}} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}k} = \int_0^{\tau_{s_k}} e^{\mathbf{A}_p s} ds \mathbf{B}_p = 32 \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau_{s_k}} \\ -1 + \tau_{s_k} + e^{-\tau_{s_k}} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

com  $\mathbf{A}_p$  e  $\mathbf{B}_p$  dadas na equação (6.42). Neste caso, a matriz  $\Phi_{\mathbf{p}k} - \Gamma_{\mathbf{p}k} \mathbf{L}_k$  da equação (6.53) com  $\Phi_{\mathbf{p}k}$  e  $\Gamma_{\mathbf{p}k}$  dadas, respectivamente, pelas equações (6.54) e (6.55) é

$$\Phi_{\mathbf{p}k} - \Gamma_{\mathbf{p}k} \mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} e^{-\tau_{s_k}} - 32(1 - e^{-\tau_{s_k}})l_{1k} & -32(1 - e^{-\tau_{s_k}})l_{2k} \\ 1 - e^{-\tau_{s_k}} - 32(-1 + \tau_{s_k} + e^{-\tau_{s_k}})l_{1k} & 1 - 32(-1 + \tau_{s_k} + e^{-\tau_{s_k}})l_{2k} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , da matriz  $\Phi_{\mathbf{p}_k} - \Gamma_{\mathbf{p}_k} \mathbf{L}_k$  são obtidos da equação característica

$$\det(\Phi_{\mathbf{p}_k} - \Gamma_{\mathbf{p}_k} \mathbf{L}_k - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (6.57)$$

de onde se obtém

$$l_{1k} = \frac{a_1 [1 - (\tau_{s_k} + 1)e^{-\tau_{s_k}}] + a_2 [1 - \tau_{s_k} - e^{-\tau_{s_k}}] + 1 - [\tau_{s_k} + e^{-\tau_{s_k}} + \tau_{s_k} e^{-2\tau_{s_k}}]}{32\tau_{s_k} (1 - e^{-\tau_{s_k}})} \quad (6.58)$$

$$l_{2k} = \frac{1 + a_1 + a_2}{32\tau_{s_k} (1 - e^{-\tau_{s_k}})} \quad (6.59)$$

para  $\tau_{s_k} \neq 0$ ,  $a_1 = -(e^{p_1 \tau_{s_k}} + e^{p_2 \tau_{s_k}})$  e  $a_2 = e^{(p_1 + p_2) \tau_{s_k}}$ , com  $p_1$  e  $p_2$  pólos do sistema de tempo contínuo projetado para satisfazer requisitos de projeto, tais como: coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e frequência natural não amortecida  $\omega_n$ . Neste caso, como o exemplo em questão é o de um sistema de segunda ordem  $p_1 = -\zeta \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $p_2 = -\zeta \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Assim, para  $\zeta = 0,707$  e  $\omega_n = 80$  rad/s, resulta que:  $p_1 = -56,56 + j56,5771$  e  $p_2 = -56,56 - j56,5771$ . Além disso, os parâmetros IDRDU são: tempo  $t_r$ , tempo de pico  $t_p$ , overshoot  $M_p$  e o tempo de estabelecimento  $t_s$  são dados em função de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , pelas seguintes expressões [OGATA, 2003, p.189, p.190 e p.191]:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right) \quad (6.60)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.61)$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)\pi} \quad (6.62)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}, \quad \text{critério de 2\%} \quad (6.63)$$

**Observação 6.9 (Estabilidade: planta com atrasos variantes no tempo)** *Como já mostrado no Capítulo 4, embora os MEDs da planta com atrasos variantes no tempo estejam corretos do ponto de vista matemático, tais modelos não representam fisicamente os sistemas de controle a eles associados. Razão pela qual, a estabilidade não será provada para os NCSs submetidos a atrasos variantes no tempo. Como já provado, neste caso o conceito de fase relativo é violado. A consequência dessa violação é a não representatividade física dos MEDs das plantas submetidas a atrasos variantes no tempo. Fato este que impossibilita a prova de estabilidade dos NCSs submetidos a atrasos variantes no tempo, a partir de tais MEDs.*

## 6.7 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados: o projeto do NCS, a partir de uma metodologia de projeto própria; as idéias dos programas desenvolvidos para simular, via computador, um NCS, no qual, o modelo da planta pode ser representado no domínio dos tempos contínuo e discreto e o controlador pode operar com intervalos de amostragem variante ou invariante no tempo; e, por fim, foram apresentados detalhados resultados de simulação para um exemplo numérico com planta SISO.

O projeto do NCS é realizado a partir da metodologia desenvolvida e apresentada, com a qual, é possível, a partir do projeto de um sistema de controle convencional integrá-lo em rede, transformado-o, ao fim da execução, passo a passo, da metodologia proposta em um NCS. O modelo equivalente discreto do controlador, obtido a partir do seu projeto convencional, pode operar em vários modos e de formas variante e/ou invariante no tempo, assim como, com períodos e/ou intervalos de amostragem e/ou atrasos variantes e/ou invariantes no tempo.

Com os programas desenvolvidos pode-se simular NCSs com o controlador operando nos modos nNCS, NCSav, GET e GETM, isto é, com o controlador variante no tempo (modos NCSav, GET e GETM) e não variante no tempo (modo nNCS). As curvas da resposta ao degrau dos sinais de saída da planta são obtidas para ambas as estratégias e para atrasos de controle menores que o período/intervalo de amostragem dos sensores da malha.

Para atrasos de controle menor que o período/intervalo de amostragem dos sensores da malha, as respostas ao degrau da malha fechada com o controlador operando em ambos os modos são bastante semelhantes. De maneira que, do ponto de vista da resposta da planta pode-se concluir que o modo de discretização do controlador é determinante para o desempenho do NCS. O modo de operação que resultou em melhor desempenho foi o GETM. Além disso, os resultados obtidos, em simulação, com a abordagem GETM desenvolvida são relevantes para o desenvolvimento teórico da área dos NCSs, uma vez que, resolvem e/ou esclarecem os problemas causados pelos atrasos variantes no tempo, e ainda proporciona a redução do valor de parâmetros de desempenho (indicadores da resposta ao degrau unitário), tais como: *overshoot* e tempo de estabelecimento.

Além disso, vale ressaltar ainda que, do ponto de vista do projeto do NCS, que quando se utiliza as abordagens GET ou GETM desenvolvidas é possível, entre outras coisas, não se preocupar com o escalonamento das mensagens na rede de comunicação e com a execução das tarefas nos nós componentes durante o projeto do NCS. É claro que, para tal, tanto a utilização da rede de comunicação e das CPUs dos nós componentes têm que ser menores que um. Outra vantagem é a flexibilização do uso de redes de comunicações como a *Ethernet* e outras redes de comunicações sem controle de acesso ao meio determinístico, mas que possuem taxas de transmissões elevadas [NAVET, 2005]. A desvantagem principal dessas abordagens é a de ter

que rediscretizar o controlador a cada COAC.

Verificou-se também que, dos experimentos simulados em computador realizados, é possível concluir que o efeito do atraso variante no tempo resulta em um comportamento previsível. Isto graças as deduções das sequências ótimas e péssimas de atrasos. Foi verificado que mesmo quando a sequência ótima não é aplicada, deste que o primeiro atraso seja maior que o segundo o *overshoot* da RDU do NCS é menor que o do sistema de controle de tempo contínuo sem atraso. Esse resultado é excepcional, uma vez que, transforma a RDU do NCS, até então com comportamento estocástico, em uma RDU com comportamento determinístico. Foi mostrado também através de simulações e experimentações para um exemplo simples, que sinais de atraso que têm mesmo valor médio, podem provocar comportamento totalmente adversos na RDU de um NCS convencional, com atraso variante no tempo e período de amostragem do sensor invariante no tempo. Todavia, para as abordagens GET e GETM desenvolvidas, este comportamento da RDU praticamente inexistente, mesmo quando os atrasos variam de maneira estocástica.

Por fim, foi mostrado que a condição inicial do intervalo de amostragem do controlador (IAC) é de suma relevância para melhorar os indicadores de desempenho da resposta ao degrau unitário (IDRDU) do NCS. Com as metodologias propostas mostrou-se, através de um experimento estatístico, que os IDRDU do NCS, que é um sistema de controle com atraso, são melhores (menores) que os IDRDU do mesmo NCS simulado como no caso clássico. Além disso, com as metodologias propostas os IDRDU do NCS são, em alguns casos, melhores (menores) até mesmo que os IDRDU do mesmo sistema de controle de tempo contínuo ou discreto, não submetidos a qualquer atraso. O impacto de tal resultado é direto não só no que diz respeito aos aspectos de confiabilidade do uso dos NCSs, como também, no estímulo à crescente utilização dos mesmos.

Tais fatos são animadores e indicam que este é o caminho a ser trilhado na direção da superação dos entraves teóricos e práticos decorrentes da presença intrínseca dos atrasos variantes no tempo presentes nos NCSs.

# Capítulo 7

## Conclusão

Atrasos variantes no tempo realmente degradam o desempenho de um sistema de controle em rede? A resposta a esta pergunta é NÃO, NEM SEMPRE! Como afirmado por Jury [1958, p.2] e também por Kalman e Bertram [1959, p.408] em certas condições o desempenho da resposta de um sistema de tempo discreto pode ser melhor que o desempenho da resposta do sistema equivalente de tempo contínuo. Isto ocorre quando acontece ao menos uma das duas seguintes situações [JURY, 1958, p.2]:

- a. Quando a largura dos pulsos aplicados na entrada da planta varia ao longo do tempo;
- b. Quando o intervalo de amostragem dos sensores é variante no tempo.

Tais cenários é o que ocorre frequentemente nos sistemas de controle em rede (do inglês *networked control systems - NCSs*). As condições a. e b. apresentadas são apenas necessárias. Isto quer dizer que a ocorrência de tais cenários não garante que o sistema de tempo discreto tenha desempenho melhor que o desempenho do sistema de tempo contínuo equivalente. A condição suficiente para ocorrência de tal melhoria foi prevista teoricamente, formulada e provada matematicamente, bem como, confirmada experimentalmente e por simulação constituindo uma das contribuições desta tese.

A condição suficiente pré anunciada, é que:  $\tau_{a_0} < \tau_s$  ou  $\tau_{a_0} < \tau_{s_0}$ , onde  $\tau_{a_0}$  é o intervalo de amostragem do atuador (IAA) do primeiro ciclo de operação do algoritmo de controle (COAC), ou seja,  $\tau_{a_0}$  é a largura do primeiro pulso do ZOH presente na entrada da planta;  $\tau_s$  é o período de amostragem do sensor (PAS) e  $\tau_{s_0}$  é o intervalo de amostragem do sensor (IAS) do primeiro COAC. Como  $\tau_{a_0} = \tau_s + \tau_1 - \tau_0$  ou  $\tau_{a_0} = \tau_{s_0} + \tau_1 - \tau_0$ , estabelece-se equivalentemente que a condição suficiente é que  $\tau_0 > \tau_1$ , onde  $\tau_0 < \tau_s$  e  $\tau_1 < \tau_s$  ou  $\tau_0 < \tau_{s_0}$  e  $\tau_1 < \tau_{s_1}$  são, respectivamente, os atrasos de controle do primeiro e do segundo COAC. Dito de outro modo, a condição suficiente para que o sistema de controle de tempo discreto tenha desempenho melhor que o desempenho do sistema de controle de tempo contínuo equivalente é  $\tau_0 > \tau_1$ , com:  $\tau_0 < \tau_s$  e  $\tau_1 < \tau_s$  ou  $\tau_0 < \tau_{s_0}$  e  $\tau_1 < \tau_{s_1}$ . Tal resultado decorre diretamente da definição de fase relativa,

introduzida no Capítulo 4, além de ser a materialização do objetivo geral desta tese constituindo também como dito, uma das mais relevantes contribuições da mesma.

Daquela definição pode-se obter diversos resultados esclarecedores sobre os NCSs, os quais são contribuições genuínas desta tese, a saber:

1. Todo sistema de dados amostrado tem dois seguradores, um visível na entrada da planta e um invisível na saída da planta;
2. A interação física dos seguradores pode introduzir atraso ou avanço de fase na resposta do sistema amostrado (tempo discreto);
3. Das expressões matemáticas obtidas a partir do conceito de fase relativa determinam-se as sequências ótima e péssima de atrasos como também as dos intervalos de amostragem dos atuadores. Tais sequências levarão o sistema de dados amostrado ao melhor e ao pior desempenho correspondentemente. Isto foi provado algebricamente (Capítulo 4), bem como, verificado experimentalmente e por simulação (Capítulo 6);
4. A determinação da sequência ótima de atrasos possibilita tratar os NCSs, os quais têm comportamento eminentemente estocástico, como determinísticos;
5. A degradação de desempenho da malha fechada do sistema de dados amostrado não é proporcional ao tamanho do atraso, mas sim, à ordem temporal (comportamento ao longo do tempo) na qual estes atrasos acontecem no sistema. Este é outro ponto de extrema relevância, uma vez que, a partir de seu entendimento é possível compreender o efeito que o atraso variante no tempo causa no sistema (objetivo específico (v));
6. Um desdobramento da afirmação anterior é que sequências de atrasos que possuam valores médios iguais, podem provocar degradação de desempenho completamente diferentes no sistema. Um exemplo claro disto ocorre para as sequências ótima e péssima de atrasos, as quais possuem mesmo valor médio e causam, respectivamente, o melhor e o pior desempenho da resposta (resposta ao degrau unitário) do sistema;
7. A partir da definição de fase relativa foi mostrado que a discretização de qualquer planta física só é válida se os componentes (sensores e atuadores) operarem de modo síncrono. Neste sentido, o intervalo de amostragem dos atuadores (IAA)  $\tau_{a_k}$  ou, a largura dos pulsos do sinal de entrada da planta deve ser igual ao intervalo de amostragem dos sensores (IAS)  $\tau_{s_k}$  do sinal de saída da planta, isto é,  $\tau_{a_k} = \tau_{s_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ . Caso contrário, a sistema amostrado (de tempo discreto) não representará o mesmo sistema de tempo contínuo. Tal cenário é muito frequente nos NCSs devido a presença dos atrasos variantes no tempo.

8. Ainda a partir do conceito de fase relativa verificou-se que modelos equivalentes discretos de sistemas submetidos a atrasos variantes no tempo, amplamente utilizados na literatura, embora estejam corretos do ponto de vista matemático, não representam fisicamente o sistema de tempo contínuo do qual tais modelos foram originados. Desse modo e como apresentado no Capítulo 4, os modelos de tempo discreto da planta submetida a atrasos variantes no tempo estão matematicamente corretos, mas não representam o sistema físico que o originou, razão pela qual não devem ser utilizados nem no projeto do NCS, nem tão pouco para simulá-los. Tais simulações devem ser realizadas utilizando algum método numérico, como por exemplo o método de Runge-Kutta de quarta ordem, onde se admite que o sistema se dá como se o sistema fosse de tempo contínuo, com passo de cálculo dezenas, ou centenas, de vezes menor que o período/ intervalo de amostragem, o que minimiza os efeitos da fase relativa sobre o sistema. A propósito, todas as simulações de resposta ao degrau dos sistemas apresentadas nesta tese, foram realizadas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem;
9. A resposta ao degrau do NCS submetido a atrasos variantes é, provavelmente, dependente apenas dos valores de atrasos  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , ou equivalentemente da largura  $\tau_{a_0}$  do primeiro pulso aplicado na entrada da planta. Tal resultado é apresentado no Capítulo 4, Conjectura 4.1, e carece ser analiticamente provado;
10. Utilizando o conceito de fase relativa, foi provado que quanto mais variante são os atrasos de um NCS maior é o avanço relativo de fase que o ZOH (*Zero Order Hold*) pode introduzir no mesmo. Este resultado é corroborado com os publicados na literatura no sentido de que a variância do sinal de saída do sistema submetidos a atrasos variante no tempo é menor quando o amostragem se dá com intervalos de amostragem dos sensores variantes no tempo [ÅSTRÖM, 2007; MENG; CHEN, 2012; MISKOWICZ, 2014].
11. Por outro lado, foi elaborada uma abordagem que possibilitou desenvolver o conceito de “rastros de fase”, apresentado no Capítulo 4, como uma das contribuições desta tese. A partir da qual foi possível plotar os gráficos de “rastros de fase” dos ZOHs e compará-los, tanto para ZOHs com largura de pulsos invariante no tempo, bem como, com largura de pulsos variante no tempo. Tais gráficos são relevantes para o entendimento global da fase de todos os pulsos introduzidos no sistema de controle, tanto pelo ZOH, presente na entrada da planta, quanto pelo ZOH “fantasma”, presente na saída da planta.

Como dito anteriormente ao longo desta tese, atrasos variantes podem melhorar o desempenho dos NCSs quando os componentes (sensores, controladores e atuadores) operam sob a regência dos paradigmas guiados a eventos (GE), ou simultaneamente guiados a eventos e no tempo (GET), ou até mesmo para um sistema de controle guiado no tempo (GT), como demonstrado no Capítulo 4.



A motivação para se utilizar a amostragem variante no tempo existe desde os anos cinquenta (século XX), todavia, sua teoria é relativamente complexa, o que acarreta um desenvolvimento tardio. No entanto, tal cenário suscita paulatinamente desenvolvimentos na medida em que, um dos problemas críticos da teoria de NCSs é a questão da variabilidade temporal dos atrasos, característica esta que torna praticamente impossível projetar um controlador que neutralize completamente o efeito dos atrasos variantes no tempo.

Desse modo, a partir da modelagem da transferência de mensagens e processamento das informações nos nós componentes do NCS, como apresentado no Capítulo 2 (objetivos específicos (i) e (ii) desta tese), foram determinados os intervalos de amostragem dos componentes, conforme deduções realizadas e apresentadas no Capítulo 3, como contribuições desta tese. Tais formulações possibilitaram a discretização dos controladores variantes e não variantes no tempo, as quais são apresentadas no Capítulo 4.

Evidentemente, modelos de tempo discreto de controladores são variantes no tempo, apenas quando o nó controlador opera nos modos: guiado a eventos (GE), simultaneamente guiados a eventos e no tempo (GET), ou ainda no modo simultaneamente guiados a eventos e no tempo com condição inicial modificada (GETM). Os modelos equivalentes discretos de tais controladores se constituem no objetivo específico (iii) e foram obtidos no Capítulo 4. Por outro lado, no Capítulo 3 foi realizado um amplo estudo sobre a temporização dos NCSs com nós sensores, controladores e atuadores guiados a tempo e a eventos ou sob a combinação de ambos os paradigmas. Neste contexto, foi determinado o intervalo de amostragem do controlador (IAC) de tempo discreto, para os controladores operando nos modos GE, GET e GETM, bem como, foram determinados os intervalos de amostragem dos atuadores GE. Foi verificado ainda que tais controladores são variantes no tempo sempre que os atrasos dos dados recebidos por eles forem variantes no tempo. Tais fatos ensejam a busca de soluções que possibilitem a utilização de controladores que operem nos modos GE, GET e GETM no âmbito dos NCSs.

No caso da solução proposta, baseada na discretização do controlador com intervalos de amostragem e atrasos variantes no tempo, aplicada aos exemplos explorados foi verificado que o comportamento do atraso é, em geral, mais relevante que seus valores propriamente ditos. Ou seja, em geral, não é o valor do atraso que determina a degradação de desempenho da resposta ao degrau unitário do sistema de controle em rede, mas sim, o seu comportamento ao longo do tempo, sobretudo nos primeiros ciclos de operação do algoritmo de controle (COAC). Neste sentido, a definição do modo de operação GETM foi fundamental para minimizar/resolver tal problema. A concepção de tal modo de operação do controlador também é uma das contribuições desta tese.

Além disso, como a abordagem desenvolvida suporta todo e qualquer tipo de atraso, desde que com valor limitado tal como deduzido neste trabalho, de natureza variante ou invariante no tempo e de comportamento estocástico ou não. Tal solução se aplica a qualquer tipo de rede

de comunicação atualmente existente ou ainda por ser projetada. Isto, por si só, se caracteriza em uma interessante vantagem e uma significativa contribuição. Sobretudo, porque a maioria das soluções de controle, existentes para controle em rede, são próprias para tipos específicos de redes de comunicação. Isto é, funcionam relativamente bem, para um determinado tipo de rede e não para outros. Obviamente, a desvantagem da abordagem desenvolvida está no recálculo dos coeficientes da equação de tempo discreto do controlador. Além disso, a partir dos resultados das simulações e para os exemplos investigados, torna-se possível ainda concluir que:

- (a) Os resultados obtidos em simulação com as abordagens GET e GETM desenvolvidas são relevantes para o desenvolvimento teórico da área de NCSs, uma vez que, a partir destes os problemas causados pelos atrasos variantes no tempo são esclarecidos e/ou resolvidos. A partir das simulações verificou-se a redução no valor de parâmetros de desempenho como *overshoot*, tempo de subida e tempo de estabelecimento. Com isso, quando o atraso de controle é menor que o período de amostragem dos sensores, os problemas decorrentes do atraso são significativamente amenizados.
- (b) O efeito do atraso variante no tempo é mais acentuado quando o intervalo de amostragem do controlador é invariante no tempo e igual ao período de amostragem dos sensores e o atraso de controle é variante no tempo. Neste caso, sequências de atrasos cujos valores médios são idênticos, podem provocar comportamentos totalmente adversos na resposta ao degrau unitário (RDU) do NCS. Todavia, aplicando-se as mesmas sequências de atrasos no sistema de controle e fazendo o intervalo de amostragem do controlador variante no tempo, abordagens GET e GETM, os efeitos degradativos do desempenho são praticamente eliminados. Isto, obviamente é um indicativo de que abordar os problemas decorrentes dos atrasos variantes no tempo, sob a ótica variante no tempo é a mais adequada.
- (c) Para NCSs com controlador operando nos modos GET, GETM e NCSav (NCS operando com controlador invariante no tempo e com a execução da lei de controle no instante em que o pacote chega no nó controlador) verificou-se que a variância da resposta (sinal de saída da malha fechada) é menor quanto mais variante no tempo é o NCS. Neste caso, o menores valores de variância dos indicadores da resposta ao degrau unitário (IRDU) do NCS, verificado em simulação, ocorre quando o controlador do NCS opera no modo GETM. É justamente quando o controlador opera no modo GETM que o NCS é mais variante no tempo. Os segundos menores valores da variância dos IRDU do NCS ocorre quando o NCS opera com controlador no GET. E, por fim, os maiores valores da variância dos IRDU do NCS observado ocorreram quando o controlador do NCS operou no modo NCSav. Os resultados obtidos em todas as abordagens se deu com todos os NCSs

submetidos às mesmas condições operacionais, isto é, aos mesmos atrasos. Tais resultados são a síntese de um experimento estatístico desenvolvido e apresentado no Capítulo 6. Tal experimento estatístico contempla os objetivos específicos (vii) e (viii) desta tese.

- (d) Utilizando-se as abordagens GET ou GETM desenvolvidas tem-se uma flexibilização na utilização de redes de comunicações como a *Ethernet* e outras redes de comunicações sem controle de acesso ao meio determinístico, mas que possuem taxas de transmissões elevadas.

Outra contribuição significativa desta tese foi o desenvolvimento de um esquema de amostragem por cruzamento de nível introduzido no Capítulo 5, onde é possível definir a priori os tempos de amostragem de um determinado sinal. Baseado na inversão por partes da representação de tempo contínuo do sinal a ser amostrado, obtém-se funções inversas nas quais a variável independente é a amplitude e a variável dependente é o tempo. A estabilidade da malha fechada, objetivos específicos (iv) e (vi), foi determinada para a planta sem atraso e amostrada, utilizando-se o esquema de amostragem por cruzamento de nível, desenvolvido e apresentado no Capítulo 5.

Desse modo, em um sentido mais amplo, a contribuição principal desta tese é todo o arcabouço filosófico e teórico que a norteia, desde o entendimento da problematização na área de sistemas de controle em rede, início da concepção e constatação de que os intervalos de amostragem dos controladores e atuadores são, naturalmente, variantes no tempo. Ressaltam-se também, os resultados teóricos, por simulação e experimentais obtidos, a partir da metodologia desenvolvida para as abordagens propostas, as quais, são relevantes, motivadoras e, consequentemente, abrem um horizonte de estudo teórico importante para o desenvolvimento da teoria de sistemas de controle guiados a eventos. Ainda neste sentido vale destacar como uma das consequências desse estudo o carácter explicativo e de resolução de um dos problemas formulados e apresentados por Jury e Kalman, respectivamente, em 1958 e 1959 [JURY, 1958; KALMAN; BERTRAM, 1959, p.2; p.408] aberto na teoria de controle até o ano de 2017, o qual foi finalmente explicado e resolvido (Capítulo 4) pelo autor desta tese. A partir de tal entendimento mostrou-se ser possível projetar sistemas de controle em rede e assegurar o desempenho de sua resposta ao degrau unitário. Feito este consignado pela primeira vez neste trabalho de tese.

## 7.1 Trabalhos futuros

Uma ampla gama de possíveis estudos podem resultar como uma continuidade deste trabalho, dentre os quais pode-se citar:

1. Desenvolvimento de ferramental matemático para tratar sistemas lineares variantes no

tempo, semelhante às transformadas de Fourier, Laplace e Z, amplamente utilizadas para análise e síntese dos sistemas lineares invariantes no tempo;

2. Estudo probabilístico do sistema de controle em rede com atrasos e intervalos de amostragem dos componentes variantes no tempo, cujo ponto de partida pode-se seguir a tese de Kalman [KALMAN, 1957], onde tal estudo é apresentado, solicitando que os sensores têm intervalos de amostragem variantes no tempo, muito embora variem de modo estocástico. A idéia aqui é estender o estudo de Kalman para que todos os componentes possam operar com intervalo de amostragem variantes no tempo. Tal direcionamento possibilitará desenvolver avanços teóricos significativos no âmbito do controle baseado em eventos. A importância deste tópico é reforçado pela prova realizada e apresentada como uma das contribuições desta tese, que quanto mais variante no tempo é o NCS, menor é a variância do sinal de saída da planta;
3. Estudo de sistemas MIMOs, quando os sensores de cada saída do sistema opera com períodos de amostragem diferentes. Neste sentido, é de interesse particular o comportamento do nó controlador, diante da aleatoriedade das chegadas de pacotes no mesmo.
4. Desenvolvimento da teoria de observadores e preditores de estados com intervalos de amostragem variantes no tempo. Tais abordagens são indispensáveis para sistemas de controle que operem sob restrições [GOODWIN, 2004; TATIKONDA; MITTER, 2004]. Sistemas que, por exemplo, estejam submetidos a perdas de pacotes de dados, assim como, a atrasos variantes que podem ultrapassar um determinado valor limite máximo admitido. Evidentemente, o desenvolvimento de tais teorias só será possível quando se encontrar modelos matemáticos equivalentes discretos dos sistemas de tempo contínuo que não violem o conceito de fase relativa introduzido nesta tese.
5. Levar em consideração a presença de ruídos e seus efeitos sobre nos modelos desenvolvidos. Neste sentido, filtros anti-*aliasing* devem ser introduzidos na saída da planta dos NCSs, quando o sinal de saída da planta for amostrado com taxa de amostragem fixa. Tal é necessária visto que *aliasing* é um problema característico da amostragem com taxa amostragem fixa. No caso da amostragem com taxa de amostragem variante no tempo, tal problema não ocorre [SHAPIRO; SILVERMAN, 1960].
6. Implementar, em plataforma física, as diversas abordagens desenvolvidas.

# Referências bibliográficas

- ABDALLAH, C.; DORATO, P.; BENITES-READ, J.; BYRNE, R. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In: **American Control Conference**. San Francisco, CA, USA: IEEE, 1993. p. 3106 – 3107.
- ALLIER, E.; SICARD, G.; FESQUET, L.; RENAUDIN, M. A new class of asynchronous a/d converters based on time quantization. In: **Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on the Design of Asynchronous Circuits and Systems (ASYNC'03)**. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2003. p. 196 – 205.
- ALLIER, E.; SICARD, G.; FESQUET, L.; RENAUDIN, M. Asynchronous level crossing analog to digital converters. **Measurement**, v. 37, n. 4, p. 296 – 309, 2005.
- ANTSAKLIS, P.; BAILLIEUL, J. Special issue on technology of networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 5 –8, jan. 2007.
- ÅRZÉN, Karl-Erik. A simple event-based PID controller. In: **Proceedings of the 14th World Congress**. Beijing, P.R. China: IFAC, 1999.
- ÅRZÉN, Karl-Erik; CERVIN, Anton. Control and embedded computing: Survey of research directions. In: **Proceedings of the 16th World Congress**. Prague, Czech Republic: IFAC, 2005.
- ÅSTRÖM, K.J.; BERNHARDSSON, B.M. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems. In: **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control**. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2002. v. 2, p. 2011–2016.
- ÅSTRÖM, K.J.; WITTENMARK, Björn. **Computer-Controlled Systems: Theory and Design**. third. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- ÅSTRÖM, Karl Johan. Event based control. In: **Analysis and Design of Nonlinear Control Systems: In Honor of Alberto Isidori**. London - UK: Springer Verlag, 2007.
- ÅSTRÖM, K. J.; BERNHARDSSON, B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. In: **Proceedings of the 14th World Congress**. Beijing, P.R. China: IFAC, 1999. p. 301–306.
- ÅSTRÖM, K. J.; HAGANDER, P.; STERNBY, J. Zeros of sampled systems. In: **Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1980 19th IEEE Conference on**. Albuquerque, NM, USA: IEEE, 1980. v. 19, p. 1077–1081.
- ÅSTRÖM, K. J.; HAGANDER, P.; STERNBY, J. Zeros of sampled systems. **Automatica**, v. 20, n. 1, p. 31 – 38, 1984.

AVILA, Gerado. **Variáveis Complexas e Aplicações**. terceira. Rio de Janeiro-RJ 2000: LTC, 2000.

BAILLIEUL, J.; ANTSAKLIS, P.J. Control and communication challenges in networked real-time systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 9–28, jan. 2007.

BAKULE, Lubomír. Decentralized control: An overview. **Annual Reviews in Control**, v. 32, n. 1, p. 87–98, 2008.

BEUTLER, F. J. Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples. **SIAM Review**, v. 8, n. 3, p. 328–335, 1966.

BOSCH, R. **CAN specification version 2.0**. 1991.

BOSCH, Robert. **Automotive Handbook**. 6th. ed. Postfach 1129 - Automotive Equipament Business Sector, Department Product Marketing Diagnostics & Test Equipment.: Robert Bosch GmbH, 2004. ISBN 0-7680-1513-8.

BOUSTANY, N.; FOLKERTS, M.; RAO, K.; RAY, A.; TROXEL, L.; ZHANG, Z. A simulation based methodology for analyzing network-based intelligent vehicle control systems. **Intelligent Vehicles '92 Symposium., Proceedings**, vol. 29, June-1 July 1992, p. 138–143, 1992.

BRANICKY, Michael Stephen. **Studies in hybrid systems: modeling, analysis, and control**. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1995.

CANTONI, M.; WEYER, E.; LI, Yuping; OOI, Su Ki; MAREELS, I.; RYAN, M. Control of large-scale irrigation networks. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 75–91, jan. 2007.

CARNEVALE, D.; TEEL, A. R.; NEŠIĆ, D. Further results on stability of networked control systems: a lyapunov approach. **American Control Conference, 2007**, ACC '07-13 July, p. 1741–1746, 2007.

CARNEVALE, D.; TEEL, A. R.; NEŠIĆ, D. A lyapunov proof of an improved maximum allowable transfer interval for networked control systems. **Automatic Control, IEEE Transactions**, vol. 52, Issue 5, May, p. 892–897, 2007.

CERVIN, Anton. **Integrated Control and Real-Time Scheduling**. Tese (Doutorado) — Department of Automatic Control, Lund University, Sweden, abr. 2003.

CERVIN, A.; HENRIKSSON, D.; LINCOLN, B.; EKER, J.; ARZEN, K.-E. How does control timing affect performance? analysis and simulation of timing using jitterbug and truetime. **Control Systems Magazine**, v. 23, n. 3, p. 16–30, June 2003.

CERVIN, A.; LINCOLN, B.; EKER, J.; ÅRZÉN, K.-E.; BUTTAZZO, G. The jitter margin and its application in the design of real-time control systems. In: **Conf. Rec. RTCSA'04**. Göteborg, Sweden: Proc. of the 10th IEEE Int'l Conf. ERTCSA, 2004.

CHAN, H.; ÖZGÜNER, U. Closed-loop control of systems over a communication network with queues. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Baltimore, MD, USA: IEEE, 1994. v. 1, p. 811–815.

- CHAN, H; OZGUNER, U. Closed-loop control of systems over a communications network with queues. **INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL**, v. 62, n. 3, p. 493–510, SEP 1995.
- CHOW, Mo-Yuen; TIPSUWAN, Yodyium. Network-based control systems: A tutorial. In: **IECON 01**. Denver, CO, USA: Proceedings of the 27th IEEE Conference Industrial Electronics Society, 2001. v. 3, p. 1593–1602.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W. **Complex Variables and Applications**. 2th. ed. New York, USA: McGraw-Hill, 1960. 1-296 p.
- CONSORTIUM, FlexRay. **FlexRay Communications System, Protocol Specification, Version 2.1, Revision A**. 2005.
- DATKO, R. A paradigm of ill-posedness with respect to time delays. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 43, n. 7, p. 964 –967, jul 1998.
- DAVIS, Robert; BURNS, Alan; BRIL, Reinder; LUKKIEN, Johan. Controller area network (can) schedulability analysis: Refuted, revisited and revised. **Real-Time Systems**, v. 35, p. 239–272, 2007.
- Dominik Rzepka, Marek Miskowicz, Anna Grybos, Dariusz Kościelnik. Recovery of Bandlimited Signal Based on Nonuniform Derivative Sampling. In: **10th International Conference on Sampling Theory and Applications - SampTA**. Bremen, Germany: Jacobs University Bremen, 2013. p. 536–539.
- DOYLE, J.; STEIN, G. Robustness with observers. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 24, n. 4, p. 607–611, Aug 1979.
- ELLIS, P. Extension of phase plane analysis to quantized systems. **Automatic Control, IRE Transactions on**, v. 4, n. 2, p. 43–54, Nov 1959.
- ERIKSSON, L.; OKSANEN, T.; MIKKOLA, K. PID controller tuning rules for integrating processes with varying time-delays. **Journal of the Franklin Institute**, v. 346, n. 5, p. 470 – 487, 2009.
- FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Feedback Control of Dynamic Systems**. Fifth. Republic of China, ISBN 978-8-115-15853-6: Pearson Education, 2006.
- FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; WORKMAN, Michael. **Digital Control of Dynamic Systems**. Third. California, ISBN 0-201-33153-5: Addison-Wesley, 1998.
- GOODWIN, Graham C.; SERON, M.; DONA, Jose. De. **Constrained control and estimation : an optimisation approach**. 1. ed. [S.l.]: Springer, London, 2004. ix, 411 p. : p. ISBN 1852335483.
- GOUBET M. DAMBRINE, J.-P. RICHARD A. An extension of stability criteria for linear and nonlinear time-delay systems. In: **System, Structure and Control**. Nantes, France: IFAC, 1995. p. 278–283.
- GUPTA, V.; DANA, A.F.; HESPANHA, J.P.; MURRAY, R.M.; HASSIBI, B. Data transmission over networks for estimation and control. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 54, n. 8, p. 1807 –1819, aug. 2009.

HAGGLUND, T. A predictive pi controller for processes with long dead times. **Control Systems Magazine, IEEE**, v. 12, n. 1, p. 57–60, Feb 1992.

HALEVI, Yiram; RAY, Asok. Integrated communication and control systems: Part I - analysis. **Jornal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 110, p. 367–373, 1988.

HANSELMANN, H. Implementation of digital controllers—a survey. **Automatica**, v. 23, n. 1, p. 7–32, 1987.

HEEMELS, W. P. Maurice H.; TEEL, Andrew R; Van De Wouw, Nathan; NEŠIĆ, Dragan. Networked control systems with communication constraints: Tradeoffs between transmission intervals, delays and performance. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 55, n. 8, p. 1781–1796, aug 2010.

HEEMELS, W. P. M. H.; SANDEE, J. H.; BOSCHI, P. P. J. Van den. Analysis of event-driven controllers for linear systems. **International Journal of Control**, v. 81, n. 4, p. 571–590, Apr 2008.

HENNINGSSON, Toivo; JOHANNESSON, Erik; CERVIN, Anton. Sporadic event-based control of first-order linear stochastic systems. **Automatica**, v. 44, n. 11, p. 2890–2895, 2008.

HESPANHA, J.P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Yonggang. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 138–162, Jan. 2007.

HOBBIE, R. K.; ROTH, Bradley J. **Intermediate Physics for Medicine and Biology**. 4th. ed. New York, USA: Springer, 2007. ISBN 978-0-387-30942-2.

HRISTU-VARSAKELIS, Dimitrios; LEVINE, William S. **Handbook of networked and embedded control systems**. First. Boston: Birkhäuser, 2005.

HU, Li-Sheng; BAI, Tao; SHI, Peng; WU, Ziming. Sampled-data control of networked linear control systems. **Automatica**, v. 43, n. 5, p. 903–911, 2007.

HÖNIG, Chaim Samuel. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. quarta. Rio de Janeiro-RJ 1981: Guanabara Dois, 1981.

IEEE. Ieee standard for a precision clock synchronization protocol for networked measurement and control systems. **IEC 61588:2009(E)**, p. C1–274, 2 2009.

JIANG, Z. P.; TEEL, A. R.; PRALY, L. Small-gain theorem for iss systems and applications\*. **Mathematics of Control, Signals, and Systems**, vol. 7, p. 95–120, 1994.

JOHANNESSON, S. Time synchronization in a local area network. **Control Systems Magazine, IEEE**, v. 24, n. 2, p. 61–69, Apr 2004.

JOHNSON, Robert N. Building plug-and-play networked smart transducers. **Electronics Development Corporation**, October, p. 1–18, 1997.

JR., João Manoel Gomes da Silva; REGINATTO, Romeu; TARBOURIECH, Sophie. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems with saturating controls. **Revista Controle & Automação**, Vol.14 no.1/Jan., Fev. e Março 2004 3, p. 3–9, 2003.



JURY, Eliahu Ibrahim. **Analysis and synthesis of sampled-data control systems**. 1 - 153 p. Tese (Doutorado) — Faculty of Engineering, Columbia University, New York, NY, USA, April 1953.

JURY, Eliahu I. **Sampled-Data Control Systems**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1958.

KALMAN, Rudolf Emil. **Analysis and synthesis of linear systems operating on randomly sampled data**. 1 - 149 p. Tese (Doutorado) — Columbia University Engineering Center, New York, NY, USA, Aug 1957.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Transactions of the ASME - Journal Of Basic Engineering**, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960.

KALMAN, R. E.; BERTRAM, J. E. A unified approach to the theory of sampling systems. **Journal of the Franklin Institute**, v. 267, n. 5, p. 405 – 436, 1959.

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. **Transactions of the ASME - Journal Of Basic Engineering**, v. 83, n. Series D, p. 95–108, 1961.

KAO, Chung-Yao; LINCOLN, Bo. Simple stability criteria for systems with time-varying delays. **Automatica**, v. 40, n. 8, p. 1429 – 1434, 2004.

KHALIL, Hassan K. **Nonlinear Systems**. Second. Upper Saddle River, NJ 07458: Prentice Hall, 1996.

KIM, Yong Ho; PARK, Hong Seong; KWON, Wook Hyun. A scheduling method for network-based control systems. **American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998**, vol. 2, 24-26 June 1998, p. 718 – 722, 1998.

KOLMANOVSKII, V.B.; NICULESCU, S.-I.; GU, K. Delay effects on stability: a survey. In: **Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control**. Phoenix, AZ, USA: IEEE, 1999. v. 2, p. 1993 –1998.

KOPETZ, H. Should responsive systems be event-triggered or time-triggered. **IEICE TRANSACTIONS ON INFORMATION AND SYSTEMS**, E76D, n. 11, p. 1325–1332, NOV 1993.

KUO, Benjamim C. **Digital Control Systems**. first. New York, ISBN 0-19-5688620-9: Oxford University Press, 1992.

LAI, Chien-Liang; HSU, Pau-Lo. Design the remote control system with the time-delay estimator and the adaptive smith predictor. **Industrial Informatics, IEEE Transactions on**, v. 6, n. 1, p. 73 –80, feb. 2010.

LAMPORT, Leslie. Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system. **Commun. ACM**, ACM, New York, NY, USA, v. 21, n. 7, p. 558 – 565, 1978.

LI, Yuqing; FANG, Huajing. Control methodologies of large delays in networked control systems. In: **International Conference on Control and Automation**. Budapest, Hungary: ICCA, 2005. v. 2, p. 1225 – 1230.

- LIAN, James R Moyne Feng-Li; TILBURY, Dawn M. Performance evaluation of control networks: Ethernet, controlnet, and devicenet. **IEEE Control Systems Magazine**, February 2001, p. 66–83, 2001.
- LIMA, E. L. **Análise real volume 2. Funções de n variáveis**. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2007. 1-202 p. ISBN 978-85-244-0221-0.
- LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2008. 1-189 p. ISBN 978-85-244-0048-3.
- LINCOLN, B. Jitter compensation in digital control systems. In: **Proceedings of the 2002 American Control Conference**. Anchorage, AK, USA: IEEE, 2002. v. 4, p. 2985 – 2990.
- LIU, Luen-Woei; RAY, A. Integrated communication and control systems: Part III - nonidentical sensor and controller sampling. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 112, p. 357 – 364, Sept. 1990.
- LIU, Qinyuan; WANG, Zidong; HE, Xiao; ZHOU, D. H. A survey of event-based strategies on control and estimation. **Systems Science and Control Engineering**, v. 2, n. 1, p. 90–97, 2014.
- LJUNG, Lennart. **System Identification: Theory for the User**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987. xxi + 519 p. ISBN 0-13-881640-9.
- LUCK, Rogelio; RAY, Asok. An observer-based compensator for distributed delays. **Automatica**, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 26, n. 5, p. 903–908, 1990.
- LUCK, Rogelio; RAY, Asok. Experimental verification of a delay compensation algorithm for integrated communication and control systems. **International Journal of Control**, v. 59, n. 6, p. 1357–1372, 1994.
- MARK, J.; TODD, T. A nonuniform sampling approach to data compression. **Communications, IEEE Transactions on**, v. 29, n. 1, p. 24 – 32, jan 1981.
- MARTI, P.; FUERTES, J.M.; FOHLER, G.; RAMAMRITHAM, K. Jitter compensation for real-time control systems. In: **Conf. Rec. RTSS**. London, England: Proc. of the 22th IEEE Conf. Real-Time Systems Symposium, 2001. p. 39–48.
- MAZUMDER, S.K.; TAHIR, M.; KAMISSETTY, S.L. Wireless pwm control of a parallel dc-dc buck converter. **Power Electronics, IEEE Transactions on**, v. 20, n. 6, p. 1280 – 1286, nov. 2005.
- MCCANN, R.; GUNDA, A. K.; DAMUGATLA, S. D. Improved operation of networked control systems using Lebesgue sampling. In: **Proceedings of IEEE Industry Applications Society Annual Meeting**. Seattle, WA, USA: IEEE, 2004. v. 2, p. 1211–1216.
- MENG, Xiangyu; CHEN, Tongwen. Optimal Sampling and Performance Comparison of Periodic and Event Based Impulse Control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 57, n. 12, p. 3252–3259, dec 2012. ISSN 0018-9286.
- MIDDLETON, Richard H.; GOODWIN, Graham C. **Digital control and estimation**. Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall International, 1990. ISBN 0-13-211798-3.
- MIRKIN, L. Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 6, p. 1109–1112, June 2007.

- MISKOWICZ, Marek. Event-based sampling strategies in networked control systems. **2014 10th IEEE Workshop on Factory Communication Systems (WFCS 2014)**, p. 1–10, 2014.
- MOLER, Cleve; LOAN, Charles Van. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. **SIAM Review**, v. 20, n. 4, p. 801–836, 1978.
- MOLER, Cleve; LOAN, Charles Van. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. **SIAM Review**, SIAM, v. 45, n. 1, p. 3–49, 2003.
- MOYNE, J.R.; TILBURY, D.M. The emergence of industrial control networks for manufacturing control, diagnostics, and safety data. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 29–47, jan. 2007.
- NASCIMENTO, Edmar José do. **Análise da Estabilidade e do Desempenho de Sistemas de Controle via Redes de Comunicações com Atraso Aleatório**. Dissertação (Dissertação) — Departamento de Engenharia Elétrica - UFCG, Campina Grande, Paraíba, Brasil, Novembro 2004.
- NAVET, N.; SONG, Y.; SIMONOT-LION, F.; WILWERT, C. Trends in automotive communication systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 93, n. 6, p. 1204–1223, june 2005.
- NEŠIĆ, D.; TEEL, A.R. Lp stability of networked control systems. **Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on**, v. 2, p. 1188–1193, Dec. 2003.
- NEŠIĆ, D.; TEEL, A.R. Input-output stability properties of networked control systems. **Automatic Control, IEEE Transactions**, vol. 49, Issue 10, Oct., p. 1650 – 1667, 2004.
- NEŠIĆ, D.; TEEL, A.R. Input-to-state stability of networked control systems. **Automatica**, vol. 40, Issue 12, December, p. 2121–2128, 2004.
- NILSSON, Johan. **Real-Time Control Systems with Delays**. Tese (Doutorado) — Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998.
- NILSSON, Johan; BERNHARDSSON, Bo; WITTENMARK, Björn. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. **Automatica**, vol. 34, No. 1, June 1998, p. 57 – 64, 1998.
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno. Tradução: Paulo Alvaro Maya; revisão técnica: Fabrizio Leonardi**. quarta. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- OLBROT, A. A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 29, n. 4, p. 367 – 368, apr 1984.
- OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY, Alan S. **Sinais e Sistemas**. 2. ed. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-85-7605-504-4.
- ÖZGÜNER, Ü.; GÖKTAS, H.; CHAN, H.; WINKELMAN, J.; LIUBAKKA, M.; KRTOLICA, R. Automotive suspension control through a computer communication network. **Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Applications**, IEEE, vol. 2, 13-16 Sept., p. 895 – 900, 1992.
- PAPOULIS, Athanasios. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. Third. New York: McGraw-Hill, 1991.

- PARK, Hong Seong; KIM, Yong Ho; KIM, Dong-Sung; KWON, Wook Hyun. A scheduling method for network-based control systems. **Control Systems Technology, IEEE Transactions**, vol. 10, Issue 3, May 2002, p. 318 – 330, 2002.
- PEREZ, Daniel Alcoforado. **Propostas de co-projeto para sistemas de controle via rede**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Controle, Automação e Informática Industrial, Santa Catarina, Brasil, Junho 2006.
- PEREZ, Daniel A.; MORENO, Ubirajara F.; MONTEZ, Carlos B. Codesign of can networked control systems with remote controllers using jitter margin. **IEEE Industrial Electronics, IECON 2006**, v. 32nd Annual Conference on Nov. 2006, p. 252–257, 2006.
- PRESS, William H.; TEUKOLSKY, Saul A.; VETTERLING, William T.; FLANNERY, Brian P. **Numerical Recipes in C++: the art of scientific computing**. Second. Cambridge, Englad: Cambridge University Press, 2002.
- QAISAR, Saeed Mian; FESQUET, Laurent; RENAUDIN, Marc. Adaptive rate sampling and filtering based on level crossing sampling. **EURASIP J. Adv. Signal Process**, v. 2009, p. 1–12, 2009.
- RAGAZZINI, Jonh R.; FRANKLIN, Gene F. **Sampled-Data Control Systems**. New York, USA: Mcgraw-Hill Book Companhia, 1958.
- RAVI, R.; KHARGONEKAR, P.P.; MINTO, K.D.; NETT, C.N. Controller parametrization for time-varying multirate plants. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 35, n. 11, p. 1259–1262, Nov 1990.
- RAY, Asok. Distributed data communication networks for real-time process control. **Chemical Engineering Communications**, v. 65, n. 1, p. 139 – 154, March 1988.
- RAY, Asok; HALEVI, Yiram. Integrated communication and control systems: Part II - design considerations. **Jornal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 110, p. 374 – 381, 1988.
- RHEE, Ill-Keun; LEE, Jaehan; KIM, Jangsub; SERPEDIN, Erchin; WU, Yik-Chung. Clock synchronization in wireless sensor networks: An overview. **Sensors**, v. 9, n. 1, p. 56–85, 2009.
- RICHARD, Jean-Pierre. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, v. 39, n. 10, p. 1667 – 1694, 2003.
- SALA, Antonio; CUENCA Ángel; SALT, Julián. A retunable PID multi-rate controller for a networked control system. **Information Sciences**, v. 179, n. 14, p. 2390 – 2402, 2009. Including Special Section - Linguistic Decision Making - Tools and Applications.
- SAMAD, T.; BAY, J.S.; GODBOLE, D. Network-centric systems for military operations in urban terrain: The role of uavs. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 92 –107, jan. 2007.
- SANTOS, Tito Luís Maia. **Uma contribuição ao desenvolvimento de sistemas de controle via redes usando margem de jitter**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Controle, Automação e Informática Industrial, Florianópolis-SC, Brasil, Fevereiro 2008.

- SCHEDL, Anton V. **Design and Simulation of Clock Synchronization in Distributed Systems**. Tese (Doutorado) — Technische Universität Wien, Institut für Technische Informatik, April 1996.
- SEONG, Chang-Kyung; LEE, Seung-Woo; CHOI, Woo-Young. A new network synchronizer using phase adjustment and feedforward filtering based on low-cost crystal oscillators. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 59, n. 7, p. 1764–1774, jul. 2010.
- SHAPIRO, Harold S.; SILVERMAN, Richard A. Alias-free sampling of random noise. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 8, n. 2, p. pp. 225–248, 1960. ISSN 03684245.
- SHEN, Bo; WANG, Zidong; LIU, Xiaohui. Sampled-data synchronization control of dynamical networks with stochastic sampling. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 57, n. 10, p. 2644–2650, oct 2012.
- SILVA, A. A.; LIMA, A. M. N. Projeto de um sistema de controle em rede. In: **XVII CBA**. Juiz de Fora, MG, Brasil: CBA, 2008. p. 1–6.
- SILVA, A. A.; LIMA, A. M. N. Paradigmas da amostragem em sistemas de controle em rede. In: **XVIII CBA**. Bonito, MS, Brasil: CBA, 2010. p. 1–6.
- SILVA, A. A.; LIMA, A. M. N. Sampling intervals for controllers and actuators: control delay less than or equal to the sensor sampling time. **Submit manuscript: The IEEE Transactions on Control of Network Systems**, July 2018.
- SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, v. 53, n. 5, p. 217 – 219, May 1957.
- STANKOVIC, John A. Misconceptions about real-time computing - a serious problem for next-generation systems. **Computer**, October 1988, p. 10–19, 1988.
- SUNDARARAMAN, B.; BUY, U.; D.KSHEMKALYANI, A. Clock synchronization for wireless sensor networks: a survey. **Ad Hoc Networks**, v. 3, n. 3, p. 281 – 323, 2005.
- Sá, Jadsonlee da Silva. **Contribuição à Modelagem de Sistemas de Controle via Rede**. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Elétrica - UFCG, Campina Grande, Paraíba, Brasil, Abril 2016.
- TABBARA, M.; RANTZER, A.; NEŠIĆ, D. Optimal controller & capacity allocation co-design for networked control systems. In: **Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control**. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. p. 3090–3095.
- TATIKONDA, S.; MITTER, S. Control under communication constraints. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 49, n. 7, p. 1056–1068, July 2004.
- TIPSUWAN, Yodyium; CHOW, Mo-Yuen. Control methodologies in networked control systems. **Control Engineering Practice**, v. 11, n. 10, p. 1099 – 1111, 2003.
- TOLIC, Domagoj; HIRCHE, Sandra. Stabilizing Transmission Intervals for Nonlinear Delayed Networked Control Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 1, p. 488–494, jan 2017.

TÖRNGREN, Martin. Fundamentals of implementing real-time control applications in distributed computer systems. **J. of Real-Time Systems**, v. 14, p. 219–250, 1998.

VELASCO, Manel; MARTÍ, Pau; BINI, Enrico. On Lyapunov Sampling for Event-driven Controllers. In: **IEEE Conf. Decision Control**. Shanghai, China: IEEE, 2009. p. 6238–6243.

WALSH, G.C.; BELDIMAN, O.; BUSHNELL, L.G. Asymptotic behavior of nonlinear networked control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 7, p. 1093–1097, Jul 2001.

WALSH, G. C.; BELDIMAN, O.; BUSHNELL, L. Asymptotic behavior of networked control systems. **Proceedings of the IEEE International Conference Control Applications**, v. 2, p. 1448 – 1453, Aug. 1999.

WALSH., G. C; HONG, Ye; BUSHNELL, L. G. Stability analysis of networked control systems. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 10, n. 3, p. 438–446, May 2002.

WALSH, Gregory C.; YE, Hong. Scheduling of networked control systems. **IEEE Control Systems Magazine**, February 2001, p. 57–65, 2001.

WALSH, Gregory C; YE, Hong; BUSHNELL, Linda. Stability analysis of networked control systems. **American Control Conference**, Proceedings of the 1999 vol. 4, 2-4 June 1999, p. 2876 – 2880, 1999.

WITTENMARK, B.; NILSSON, J.; TORNGREN, M. Timing problems in real-time control systems. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Seattle, WA, USA: IEEE, 1995. v. 3, p. 2000–2004.

XIA, F.; TIAN, Y.-C.; SUN, Y.; DONG, J. Control-theoretic dynamic voltage scaling for embedded controllers. **Computers & Digital Techniques, IET**, v. 2, n. 5, p. 377–385, September 2008.

XU, Yan-Kai; CAO, Xi-Ren. Time aggregation based optimal control and Lebesgue sampling. In: **Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control**. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. p. 5904–5909.

YAMAMOTO, Yutaka. A retrospective view on sampled-data - control systems. **CWI Quarterly**, v. 9, n. 3, p. 261–276, 1996.

YANG, T.C. Networked control system: a brief survey. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings -**, v. 153, n. 4, p. 403–412, July 2006.

YÉPEZ, J.; MARTÍ, P.; FUERTES, J. M. Control loop performance analysis over networked control systems. In: **Proceedings of the 28th IEEE Conference on Industrial Electronics Society (IECON 02)**. Sevilla, Spain: IEEE, 2002. v. 4, p. 2880–2885.

YEPEZ, Jose; VELASCO, Manel; MARTI, Pau; MARTIN, Enric X.; FUERTES, Josep M. One-step finite horizon boundary with varying control gain for event-driven Networked Control Systems. In: **IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society**. Melbourne, VIC, Australia: IEEE, 2011. p. 2606–2611. ISBN 978-1-61284-972-0.

YOOK, J.; TILBURY, D.; CHERVELA, K.; SOPARKAR, N. Decentralized, modular real-time control for machining applications. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Philadelphia, PA, USA: IEEE, 1998. v. 2, p. 844 –849.

ZEIGLER, B. P.; KIM, J. Extending the devs-scheme knowledge-based simulation environment for real-time event-based control. **Robotics and Automation, IEEE Transactions**, vol. 9, Issue 3, June 1993, p. 351 – 356, 1993.

ZHANG, Jin; PENG, Chen. Event-triggered output-feedback  $\mathcal{H}^\infty$  control for networked control systems with time-varying sampling. **IET Control Theory & Applications**, v. 9, n. 9, p. 1384–1391, jun 2015. ISSN 1751-8644.

ZHANG, Michael S. Branicky Wei; PHILLIPS, Stephen M. Stability of networked control systems. **IEEE Control Systems Magazine**, February 2001, p. 84–99, 2001.

ZOU, Lei; WANG, Zidong; DONG, Hongli; LIU, Yurong; GAO, Huijun. Time- and Event-Driven Communication Process for Networked Control Systems: A Survey. **Abstract and Applied Analysis**, Hindawi, v. 2014, p. 1–10, jul 2014.