

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Descrição Holográfica do Potencial Entre Quarks em Cenários Cosmológicos**  
**Danilo César Moreira**

CAMPINA GRANDE

- 2014 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Descrição Holográfica do Potencial Entre Quarks em Cenários Cosmológicos**

**Danilo César Moreira**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2014 -

M838d Moreira, Danilo César.

Descrição holográfica do potencial entre quarks em cenários cosmológicos / Danilo César Moreira. – Campina Grande, 2014.  
58 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito".

Referências.

1. Física. 2. Cosmologia. 3. Correspondência AdS/CFT. 4. Potencial Quark-Antiquark. 5. Holografia. I. Brito, Francisco de Assis. II. Título.

CDU 53:524.8(043)

**DANILO CÉSAR MOREIRA**

**DESCRIÇÃO HOLOGRÁFICA DO POTENCIAL ENTRE QUARKS EM CENÁRIOS  
COSMOLÓGICOS**

Dissertação aprovada em 29/03/2014

**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

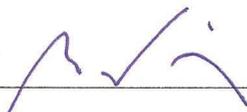
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro Interno)

Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro Externo)

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho  
Departamento de Física – UFPB

*Aos meus pais (Evangelista  
e Valdete), irmãos (Dário e  
Dácio), familiares e amigos.*

## **AGRADECIMENTOS**

-Ao Professor Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.

-A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.

-Aos amigos que fiz durante minha permanência nesta Unidade.

-Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.

-Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

-À CAPES pelo suporte financeiro.

-A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*”A partir de um certo ponto,  
o dinheiro deixa de ser o  
objetivo. O interessante é o  
jogo”.*

*Aristóteles Onassis*

## RESUMO

Nessa dissertação estuda-se o comportamento de potencial entre quarks em um cenário de D3-branas com constante cosmológica. Via correspondência *AdS/CFT*, encontram-se as expressões para a distância e energia entre os quarks em tal cenário. Mostramos que a presença da constante cosmológica deforma a geometria do espaço em questão, eliminando seu caráter conforme. Tal deformação é a chave para encontramos, de forma analítica, o platô presente no potencial entre quarks, que indica a presença de sabores na teoria.

Palavras-chave: Correspondência AdS/CFT, potencial quark-antiquark, holografia.

## ABSTRACT

In this text we study the interquark potential behavior in braneworld scenarios with a cosmological constant. Using *AdS/CFT* correspondence, we find the expressions for the distance and energy of a quark-antiquark potential in such configuration. We show that the presence of a cosmological constant in the brane deforms the geometry around, breacking the conformal symmetry. Such deformation is the key to find the saturation limit, where the hadronization process starts, and it indicates the presence of flavours in the theory.

Keywords: AdS/CFT Correspondence, interquark potential, holography.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Teórica</b>	<b>5</b>
2.1	Aspectos elementares da Teoria de Campos Conformes . . . . .	5
2.2	Espaços Anti-de-Sitter . . . . .	10
2.3	Grupo $SU(N)$ e o limite de t'Hooft (large N limit) . . . . .	18
2.4	Loop de Wilson . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Elementos da Correspondência <math>AdS/CFT</math></b>	<b>25</b>
3.1	Cordas e D-branas . . . . .	25
3.2	Correspondência $AdS/CFT$ . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Descrição Holográfica do Potencial Entre Quarks</b>	<b>34</b>
4.1	Cenários com branas-mundo . . . . .	34
4.2	Potenciais entre quarks . . . . .	38
4.3	Potenciais entre quarks em cenários de brana-mundo inflacionária . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As forças da Natureza hoje em dia são reconhecidas como o conjunto das interações eletromagnética, gravitacional e das nucleares, forte e fraca. A força nuclear fraca é responsável pelos processos que envolvem neutrinos, enquanto a força nuclear forte é responsável por manter juntos os constituintes da matéria, como o neutron, o próton e os quarks.

Inicialmente, as interações elétricas e magnéticas pareciam representar fenômenos totalmente desconectados. Após os estudos de Cavendish e Coulomb, nos anos 1700, Oersted, e os estudos de Biot, Savart, Ampère e Faraday nos anos 1800, ficou evidente que existia uma relação mais profunda entre essas duas, aparentemente, teorias não relacionadas. Ainda nos anos 1800, James Clerk Maxwell ( pra ser mais exato, em 1865) construiu um conjunto de equações (que ficaram conhecidas como as equações de Maxwell) que mostravam como se dava a relação entre a eletricidade e o magnetismo, formulando assim uma nova teoria que veio a ser chamada de Eletromagnetismo. O Eletromagnetismo foi o primeiro exemplo de *unificação* de duas teorias.

No decorrer do tempo, outras unificações aconteceram. O Eletromagnetismo e a força nuclear fraca foram unificados na década de 1960, no que ficou conhecido como modelos das interações eletrofracas que, junto com a QCD<sup>1</sup>, usada para descrever as interações fortes, formam o Modelo Padrão, apesar de não haver unificação entre elas.

---

<sup>1</sup>QCD é a sigla, em inglês, para Cromodinâmica Quântica

Enquanto isso, no que dizia respeito à interação gravitacional, a Relatividade Geral ganhava espaço, onde descrevia a Gravidade não como uma força, mas um efeito da curvatura do espaço-tempo devido à presença de objetos massivos[1].

As teorias da Gravitação e do Eletromagnetismo, de Maxwell, são clássicas. Ou seja, não são definidas no contexto da Mecânica Quântica (outra revolução da Física no século 1900). Enquanto as interações nucleares fortes e fracas são quânticas. Entretanto, é possível quantizar o Eletromagnetismo, dando origem a teoria que ficou conhecida como QED<sup>2</sup>, que é justamente a versão da teoria eletromagnética usada no modelo das interações eletrofracas. Mas, ainda é um desafio quantizar a Gravitação. Tal feito é importante para compreendermos o que aconteceu no início do Universo quando, acredita-se, todas as interações seriam igualmente importantes em sua dinâmica. Existem algumas teorias que hoje buscam uma teoria de *gravidade quântica*. Em especial, a Teoria de Cordas é uma delas.

A teoria de cordas se originou, nos anos 1960, como uma alternativa para descrever as interações fortes. Verificou-se que cordas girantes clássicas reproduziam as trajetórias de Regge que aparecem no espectro dos hádrons (partículas formadas por quarks, como o próton, por exemplo) e a proposta de uma corda fundamental que possui infinitos modos de vibrações poderia explicar a origem da grande quantidade de hádrons novos que apareciam nos experimentos à época. Mas algumas inconsistências na teoria inicial, como Táchions (estados não físicos com massa negativa), levaram a teoria ao descrédito no que dizia respeito ao problema que ela propunha resolver. Entretanto, devido ao aparecimento natural dos bósons de calibre, em particular, o gráviton (bóson associado às interações gravitacionais), especulou-se que, ao invés de descrever interações fortes, a Teoria de Cordas poderia ser usada como uma teoria de gravidade quântica[2, 3, 4]. A partir das condições de contorno sobre as cordas abertas, aparecem as D-branas, onde os cenários de *mundo-brana* se torna objeto de interesse. Que aparecem quando consideramos teorias com dimensões extras, sendo

---

<sup>2</sup>Sigla, em inglês, para Eletrodinâmica Quântica.

nosso Universo uma brana (a brana-mundo) imersa nessas dimensões[5]

A Teoria de Cordas, apesar de não ter sido comprovada, tem dado diversas contribuições em vários ramos da Física. Em particular, uma de suas consequências, a *correspondência AdS/CFT*, tem ganhado destaque nos últimos anos. A correspondência, desde seu surgimento nos trabalhos de Maldacena[6, 7], vem contribuindo de forma significativa para a consolidação das teorias duais, que são teorias diferentes, mas ligadas por sua estrutura. A *Correspondência* propõe a existência de uma dualidade entre teorias de calibre que, em nosso caso, são *teorias de campos conformes*<sup>3</sup> e teorias de gravidade ou teorias de cordas compactificadas em um espaço *AdS*. A vantagem dessa correspondência é que estão em limites de energias ou acoplamentos diferentes. Ou seja, enquanto uma age em altas energias, a outra age em baixas energias.

Devido ao seu caráter dual, a correspondência AdS/CFT pode relacionar teorias de calibre, como a QCD, com teorias de gravitação. Em particular, o fato de podermos tratar o par quark-antiquark como uma corda[8, 9] torna possível analisar seu comportamento no regime de baixas energias, onde a QCD se torna fortemente acoplada e fazer cálculos de forma direta se torna muito difícil.

A estrutura da dissertação segue a ordem:

**No Capítulo 2** fazemos uma revisão de alguns ingredientes que serão necessários no decorrer da dissertação. Definimos Campos Conformes e estabelecemos algumas de suas propriedades básicas, falamos dos espaços Anti-de Sitter e discutimos sua natureza, realizamos um estudo do grupo  $SU(N)$ , também estabelecendo o limite de t'Hooft. Terminamos o capítulo apresentando algumas propriedades do loop de Wilson.

**No Capítulo 3** discutimos alguns aspectos elementares de Teoria de Cordas. Apresentamos as cordas e discutimos o surgimento das Dp-branas e a importância das dimensões extras. Terminamos o capítulo estabelecendo a correspondência AdS/CFT.

**No capítulo 4** tratamos dos cenários de brana- mundo inflacionária e do comportamento do potencial entre quarks, sua estrutura, relação com o loop de Wilson

---

<sup>3</sup>cuja sigla, em inglês, é CFT

e cálculo em um espaço de Minkowski. No último tópico, estudamos como o potencial estático entre quarks se comporta em um cenário onde existe uma constante cosmológica. Esse caso foi estudado, inicialmente, na referência [10].

# Capítulo 2

## Revisão Teórica

### 2.1 Aspectos elementares da Teoria de Campos Conformes

Transformações conformes são transformações gerais de coordenadas que preservam a forma da métrica a menos de um fator de escala global. Tais transformações mantêm ângulos invariantes. De forma geral, temos [11, 12, 13, 14]

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (2.1)$$

onde  $x$  e  $x'$  são, respectivamente, as coordenadas antes e depois de aplicarmos a transformação,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica que descreve o espaço em questão,  $\Lambda(x)$  é o que vamos chamar de *fator de escala* e as letras gregas minúsculas varrem todas as dimensões (tipo espaço ou tipo tempo) do espaço. Para um espaço de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ , a equação (2.1) toma a forma

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Note que, se  $\Lambda(x) = 1$ , encontramos transformações associadas ao grupo de Poincaré de translações e rotações no espaço-tempo, peça fundamental na formulação da Teoria da Relatividade.

Para nossa análise, vamos usar transformações infinitesimais da forma

$$x^{\rho} \rightarrow x'^{\rho} = x^{\rho} + \varepsilon^{\rho}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.3)$$

onde  $\varepsilon \ll 1$  é um parâmetro pequeno que se torna desprezível para ordens maiores do que a primeira. Sendo assim, pela equação (2.2), encontramos

$$\begin{aligned}
\Lambda(x)\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (x^\rho + \varepsilon^\rho(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \frac{\partial}{\partial x^\nu} (x^\sigma + \varepsilon^\sigma(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\
&= \eta_{\rho\sigma} \left( \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma + \delta_\mu^\rho \frac{\partial \varepsilon^\sigma}{\partial x^\nu} + \delta_\nu^\sigma \frac{\partial \varepsilon^\rho}{\partial x^\mu} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Agora observe que, para mantermos a forma da equação (2.2), devemos ter

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu = K(x)\eta_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Onde, por simplicidade, escrevemos  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . É simples encontrar a expressão para  $K(x)$ .

$$\begin{aligned}
K(x)\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) \\
D \cdot K(x) &= \partial^\nu \varepsilon_\nu + \partial^\mu \varepsilon_\mu \\
K(x) &= \frac{2}{D} \partial \cdot \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Aqui,  $D$  é a dimensão do espaço e  $\partial \cdot \varepsilon$  é o gradiente de  $\varepsilon^\mu$ . Logo, encontramos a identidade

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu = \frac{2}{D} (\partial \cdot \varepsilon) \eta_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

e, nessa aproximação, o fator de escala (2.4) é dado por

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d} \partial \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{2.8}$$

Com mais algumas manipulações algébricas é possível mostrar que

$$(d-1)\square(\partial \cdot \varepsilon) = 0. \tag{2.9}$$

Sendo assim, é normal esperarmos que  $\partial \cdot \varepsilon$  seja, no máximo, linear em  $x$ . Ou seja,  $(\partial \cdot \varepsilon) = A + B_\mu x^\mu$ . Escolhemos, então, o seguinte *ansatz* para  $\varepsilon^\mu$ :

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho. \tag{2.10}$$

Onde  $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$ , com  $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$  (simétrico nos dois últimos índices). Observamos claramente que as constantes associadas às variáveis possuem caráter físico bem definidos[12, 13]. Para uma transformação constante,  $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ , encontramos justamente o termo de translação ordinária no espaço-tempo, cujo gerador é  $P_\mu = -i\partial_\mu$ . A interpretação das outras constantes não é tão simples e vamos tratá-las de forma mais cuidadosa. Primeiro, note que

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \varepsilon_\mu &= \partial_\nu (a_\mu + b_{\mu\sigma} x^\sigma + c_{\mu\sigma\rho} x^\sigma x^\rho) \\
&= b_{\mu\nu} + c_{\mu\sigma\rho} [\delta_\nu^\sigma x^\rho + x^\sigma \delta_\nu^\rho] \\
&= b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu\rho} x^\rho + c_{\mu\sigma\nu} x^\sigma \\
&= b_{\mu\nu} + 2c_{\mu\nu\rho} x^\rho
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Onde usamos a propriedade simétrica de  $c_{\mu\nu\rho}$ . Assim, a equação (2.7) se torna

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} (\eta^{\rho\sigma} b_{\sigma\rho}) \eta_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

Pela expressão acima, vemos que  $b_{\mu\nu}$  pode ser separada em duas partes, uma simétrica e outra antissimétrica.

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \tag{2.13}$$

O termo  $\alpha \eta_{\mu\nu}$  representa transformações de escala da forma  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (1 + \alpha) x^\mu$ , que são dilatações do espaço-tempo, cujo gerador é  $D = -ix^\mu \partial_\mu$ <sup>1</sup> e o termo  $m_{\mu\nu}$ , antissimétrico, representa as rotações infinitesimais,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (\delta_\nu^\mu + m_\nu^\mu) x^\nu$ , cujo gerador é dado por  $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ . Com mais algumas manipulações algébricas sobre a equação (2.7), encontramos

$$2\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_\rho = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) \partial \cdot \varepsilon. \tag{2.14}$$

Note que  $\partial \cdot \varepsilon = b_\mu^\mu + 2c^\mu_{\mu\rho} x^\rho$  e  $\partial_\nu (\partial \cdot \varepsilon) = 2c^\mu_{\mu\nu}$ . O que nos leva ao valor de  $c_{\mu\nu\rho}$

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\mu\nu} b_\rho + \eta_{\nu\rho} b_\mu, \tag{2.15}$$

---

<sup>1</sup>deve-se ter cuidado para não confundir o  $D$  relacionado à operação de dilatação com o  $D$  que define a dimensão do espaço-tempo em uso.

com  $b_\mu = \frac{1}{d}c^\sigma_{\sigma\mu}$ . As transformações que resultam desse termo são conhecidas como *transformações conformes especiais* e são dadas por

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - (x \cdot x)b^\mu. \quad (2.16)$$

Note que a equação acima tem a forma de uma expansão de  $x'^\mu$  para  $b^\mu$  pequeno. O gerador associado às transformações conformes especiais é dado por

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - (x \cdot x)\partial_\mu), \quad (2.17)$$

e o fator de escala resultante é

$$\Lambda(x) = (1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x))^2 \quad (2.18)$$

Como foi dito antes, todos os termos do ansatz (2.3) possuem uma interpretação física bem definida. No caso dos efeitos associados aos termos quadráticos, que se relacionam com as transformações especiais conformes, sua interpretação não é trivial. Primeiro, observemos que a forma dos produtos internos entre os vetores envolvidos na transformação em questão, que são

$$\begin{aligned} x' \cdot x &= \frac{x \cdot x - (x \cdot x)(b \cdot x)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}, \\ b \cdot x' &= \frac{b \cdot x - (x \cdot x)(b \cdot b)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Onde redefinimos  $x'^\mu \rightarrow \frac{x'^\mu}{\sqrt{\Lambda(x)}}$ . Sendo assim, o produto escalar  $x' \cdot x'$  é calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} x' \cdot x' &= \frac{x \cdot x' - (x \cdot x)(b \cdot x')}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \\ &= \frac{\left( \frac{x \cdot x - (x \cdot x)(b \cdot x)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \right) - (x \cdot x) \left[ \frac{b \cdot x' - (x \cdot x)(b \cdot b)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \right]}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \\ &= \frac{(x \cdot x)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

e, dividindo a nova coordenada associada a uma transformação especial conforme por  $x' \cdot x'$ , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{x'^\mu}{x' \cdot x'} &= \frac{x^\mu - (x \cdot x)b^\mu}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)} \frac{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}{x \cdot x} \\ &= \frac{x^\mu}{x \cdot x} - b^\mu. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Que nada mais é do que uma inversão seguida de uma translação no espaço-tempo.

Um grupo conforme consiste de transformações conformes definidas de forma global, inversíveis e finitas (difeomorfismos conformes). A álgebra de Lie associada a um dado grupo conforme é chamada de *álgebra conforme*. Esses conceitos são úteis para que possamos dar nosso próximo passo, que é encontrar o grupo conforme de espaços do tipo  $\mathbb{R}^{p,q}$ , onde  $D = p + q \geq 3$ . As coordenadas associadas a  $p$  são coordenadas tipo-tempo, enquanto as coordenadas associadas a  $q$  são coordenadas tipo-espaço.

Primeiro, definindo os operadores

$$\begin{aligned} J_{\mu,\nu} &= L_{\mu\nu}, & J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\ J_{-1,0} &= D, & J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \end{aligned} \tag{2.22}$$

encontramos a relação de comutação

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}). \tag{2.23}$$

Se estivermos em um espaço  $\mathbb{R}^{d,0}$ , essas são as relações de comutação da álgebra de Lie  $so(d+1, 1)$ . Se o nosso espaço for  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , então, essas são as relações de comutação de  $so(d, 2)$ . Então, de forma geral, *o grupo conforme de  $\mathbb{R}^{p,q}$ , ( $p + q \geq 3$ ) é o grupo  $SO(p+1, q+1)$ .*

Para uma análise mais detalhada, deveríamos analisar de perto o caso de teorias conformes com  $D = 2$ , que são importantes em diversos aspectos. Por exemplo, permitem a existência de infinitas transformações especiais conformes e suas propriedades, por exemplo, abrem o caminho para a análise dos modos de vibrações das cordas, em Teoria de Cordas[12, 13, 14, 4]. Tais ferramentas incluem a álgebra de de Witt e sua extensão central, a álgebra de Virasoro.

Para terminar, no que se refere ao assunto de teorias de campos conformes, vamos ver como se comporta o tensor energia-momento nesses *backgrounds*<sup>2</sup>.

Estamos interessados em teorias que, dadas as transformações

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \tag{2.24}$$

---

<sup>2</sup>Para esse review foram usadas as referências [13, 12], mas uma outra abordagem muito interessante é mostrada na referência [14]

exibam simetria conforme. Pelo Teorema de Noether, simetrias contínuas implicam na existência de cargas e correntes conservadas. As correntes podem ser escritas como

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\varepsilon^\nu \quad (2.25)$$

Para  $\varepsilon^\nu$  constante, segue

$$0 = \partial^\mu j_\mu = \partial^\mu (T_{\mu\nu}\varepsilon^\nu) = (\partial^\mu T_{\mu\nu})\varepsilon^\nu \rightarrow \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.26)$$

Para casos mais gerais, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu j_\mu = \partial^\mu (T_{\mu\nu}\varepsilon^\nu) = (\partial^\mu T_{\mu\nu})\varepsilon^\nu + T_{\mu\nu}\partial^\mu\varepsilon^\nu \\ &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial^\mu\varepsilon^\nu + \partial^\nu\varepsilon^\mu) = \frac{1}{d}T_{\mu\nu}(\partial \cdot \varepsilon)\eta^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{d}(\partial \cdot \varepsilon)T^\mu{}_\mu \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como consideramos casos gerais, concluímos que *em teorias de campos conformes, o traço do tensor energia momento é nulo.*

$$T^\mu{}_\mu = 0 \quad (2.28)$$

Em outras palavras, teorias que possuem invariância conforme possuem o traço do tensor energia-momento associado nulo.

## 2.2 Espaços Anti-de-Sitter

Nessa seção, vamos considerar um espaço com  $D = d + 1$  dimensões que obedeça a equação de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda$ [15].

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} = 0 \quad (2.29)$$

Onde  $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB}$  é o tensor de Einstein,  $R_{AB}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de curvatura (ou de Ricci) e  $g_{AB}$  é a métrica do espaço em análise. Vamos usar letras maiúsculas para índices que varrem todas as dimensões. Quando  $\Lambda = 0$ , temos um espaço plano, quando  $\Lambda > 0$  temos um espaço de Sitter e, quando  $\Lambda < 0$ ,

temos um espaço anti-de Sitter. As soluções mais simples da equação (2.29) podem ser caracterizadas pela condição geométrica

$$R_{ABCD} = \frac{R}{d(d+1)} (g_{AC}g_{BD} - g_{AD}g_{BC}) \quad (2.30)$$

Onde  $R_{ABCD}$  é o tensor de curvatura de Riemann em  $d+1$  dimensões e  $R$  é o escalar de Ricci associado.

Vale ressaltar aqui que, no início, a constante cosmológica não fazia parte da Relatividade Geral proposta por Einstein[16]. Ou seja, inicialmente tinha-se  $G_{\mu\nu} = 0$  ( $\mu, \nu = 0, \dots, 4$ ). Entretanto, o fato de o Universo parecer, em grandes escalas, ser homogêneo e isotrópico, leva a ideia de que o formato do tensor energia-momento em tal configuração deve ser o de um fluido perfeito caracterizado, em particular, por uma densidade de energia  $\rho$  e uma pressão  $p$  isotrópica em seu referencial de repouso. Em tal configuração, encontramos o que é conhecido como Universo de Friedmann-Robertson-Walker (*FRW*), cuja métrica é dada por [17]

$$ds_{FRW}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.31)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  é a métrica de uma esfera de raio unitário.  $\kappa$  pode valer 1, 0 ou  $-1$  e define quando um universo possui curvatura positiva, nula ou negativa, respectivamente. Einstein estava procurando por configurações onde o fator de escala presente na métrica do espaço *FRW* não variasse com o tempo ( $\dot{a} = 0$ ). Entretanto, as equações de Friedmann<sup>3</sup> relacionadas ao universo em questão levam à expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (2.32)$$

Ou seja, se a pressão e a densidade de energia possuísem o mesmo sinal, não se poderia encontrar soluções estáticas na configuração estabelecida. Einstein, então, adicionou a sua teoria uma constante cosmológica de tal forma que a solução acima tomasse a forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.33)$$

---

<sup>3</sup>Não vamos entrar em detalhes sobre essas equações nessa dissertação.

e admitisse soluções estáticas. A constante cosmológica, nesse sentido, é interpretada como a densidade de energia do vácuo e serve para "calibrar" o que ficou conhecido como *universo estático de Einstein*. Hoje sabemos que nosso Universo, pelo menos nas quatro dimensões a que temos acesso, está se expandindo de forma acelerada, o que implica a existência de uma constante cosmológica positiva[16].

Para definirmos o que é um espaço AdS, primeiro vamos trabalhar a noção de espaços curvos imersos no espaço-tempo[18]. Em um espaço de Minkowski com assinatura euclideana, que nada mais é do que o  $\mathbb{R}^4$ , note que o exemplo mais simples de espaço curvo que podemos pensar, *a priori*, é a imersão da hiperesfera  $\mathbb{S}^3 = \{X^A \in \mathbb{R}^4 | X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = a^2\}$ , que é invariante sob as transformações do grupo de rotação  $SO(4)$  e cuja curvatura é  $6/a^2$ . Podemos visualizar essa afirmação de forma simples se diminuirmos uma dimensão e olharmos para a imersão de uma esfera ( $\mathbb{S}^2$ ) em  $\mathbb{R}^3$ [18].

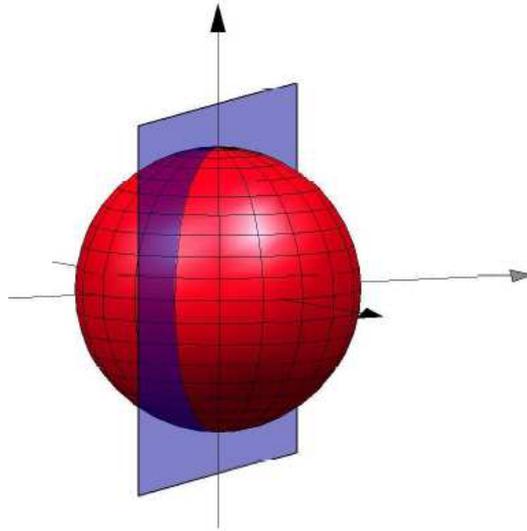


Figura 2.1: Imersão de uma esfera no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ [18]

Também podemos visualizar um exemplo de hipersuperfície com curvatura negativa. Para isso, vamos usar a imersão de uma hipérbole  $\mathbb{H}^3$  dentro do espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ , que nada mais é do que o espaço em que adicionamos uma coordenada

tipo-tempo ao espaço  $\mathbb{R}^3$ . Temos que  $\mathbb{H}^3 = \{X^A \in \mathbb{R}^{1,3} | -X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -a^2\}$ .

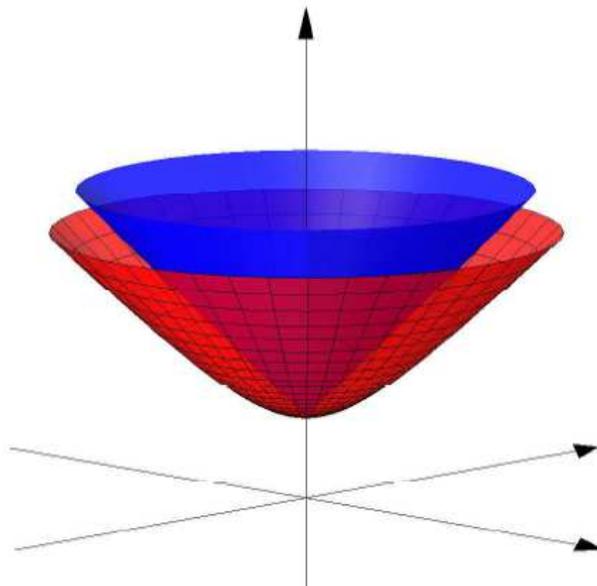


Figura 2.2: Imersão de uma hipérbole no  $\mathbb{R}^{1,3}$ [18]

Apesar dessa tentativa de apresentar uma noção intuitiva sobre a imersão de espaços curvos, tanto com curvatura positiva quanto com curvatura negativa, nesse trabalho não vamos nos prender às propriedades de espaços planos ou espaços de Sitter. Vamos manter o foco nas propriedades dos espaços Anti-de Sitter.

*Espaços Anti-de Sitter são soluções maximamente simétricas das equações de Einstein com constante cosmológica negativa. É o análogo lorentziano dos espaços hiperbólicos em qualquer dimensão*[18, 19, 20, 21, 22].

Pode-se perguntar aqui sobre a causa de se focar no estudo do espaço AdS, com constante cosmológica negativa, se o que se observa é um Universo que se expande de forma acelerada, o que implica a existência de uma constante cosmológica positiva. Acontece, que isso se aplica ao espaço a que temos acesso, mas não é necessariamente verdade quando consideramos espaços com dimensões maiores. Deve-se observar que, pela consistência da teoria que aqui trabalhamos, dimensões extras possuem fundamental importância. A importância sobre a existência de dimensões extras e o papel

do espaço AdS nesse sistema ficará clara no decorrer dessa dissertação[11].

Para encontrarmos o espaço Anti de Sitter em 4 dimensões, basta que adicionemos duas coordenadas tipo tempo ao conjunto  $\mathbb{R}^3$ [18]. Ou seja, trabalhamos com o espaço (note que aqui usamos a palavra "espaço" e não "espaço-tempo")  $\mathbb{R}^{2,3}$  como o grupo que possui duas coordenadas temporais e três coordenadas espaciais para, finalmente, definirmos

$$AdS_4 = \{X^\mu \in \mathbb{E}^{(2,3)} \mid -X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = -a^2\}, \quad (2.34)$$

cuja curvatura é  $-12/a^2$ . Note que  $AdS_4$ , por estar inserido em  $\mathbb{R}^{2,3}$ , acaba por absorver as simetrias de seu espaço, ou seja,  $SO(2,3)$ . Além disso, se aproxima do espaço de Minkowski no limite em que a curvatura se aproxima de zero.  $\mathbb{R}^{2,3}$  não é um espaço-tempo, não satisfaz as equações de Einstein, mas  $AdS_4$  o faz. Além disso, devido ao grupo de simetrias associado, vemos que  $AdS_4$  é invariante sob transformações conformes (nesse caso,  $p = 1$  e  $q = 2$ ).

De forma geral, um espaço anti-de Sitter  $AdS_{d+2}$  é definido como a quártica[19]

$$-X_0^2 - X_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^d X_i^2 = -a^2 \quad (2.35)$$

inserida no interior de um espaço com  $d+2$  dimensões e a métrica associada ao  $AdS_{d+2}$  é

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^d dX_i^2 \quad (2.36)$$

Suas isometrias são dadas pelo grupo  $SO(2, d)$  que, por sua vez, são gerados pelos  $d(d-1)/2$  vetores de Killing associados<sup>4</sup>. Note que o grupo de isometrias é um grupo de transformações conformes, como mostrado no topico anterior. Assim, espaços anti-de Sitter possuem invariância conforme.

Agora, vamos em busca de melhores formas de trabalhar nesse espaço[11, 18, 19,

---

<sup>4</sup>Um tratamento dos vetores de Killing do Espaço ADS é mostrado na referências [11, 20]

20, 22]. Fazemos a parametrização

$$\begin{aligned}
X_0 &= a \sec \rho \cos \tau, \\
X_{d+1} &= a \sec \rho \sin \tau, \\
X_i &= a \tan \rho \Omega_i, \quad i = 1, \dots, d
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Com isso, a métrica do espaço  $AdS_{d+2}$  se torna

$$ds^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \rho} \left( -d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho \sum_{i=1}^d (d\Omega_i)^2 \right). \tag{2.38}$$

Onde  $d\Omega_i$  é o elemento infinitesimal da hipersfera em  $d$  dimensões.

Outra parametrização interessante é dada por

$$\begin{aligned}
u &= \frac{X_0 - X_d}{a^2} \\
v &= \frac{X_0 + X_d}{a^2} \\
x_i &= \frac{X_i}{au} \\
t &= \frac{X_{d+1}}{au}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Onde fazemos a identificação

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (a^2 + \bar{x}^2 - t^2)) \\
X_d &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (-a^2 + \bar{x}^2 - t^2)) \\
X_i &= au x_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\
X_{d+1} &= Rut
\end{aligned} \tag{2.40}$$

com  $\bar{x}^2 = x_i x^i$ . Redefinindo  $u = 1/z$ , encontramos

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{2z} (z^2 + a^2 + \bar{x}^2 - t^2) \\
X_d &= \frac{1}{2z} (z^2 - a^2 + \bar{x}^2 - t^2) \\
X_i &= \frac{ax_i}{z}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\
X_{d+1} &= \frac{Rt}{z}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Essas são as coordenadas de Poincaré e a métrica, nesse sistema, toma a forma

$$ds^2 = \frac{a^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (2.42)$$

Poderíamos também obter a métrica em função das coordenadas de Poincaré de forma mais direta, baseados apenas no caráter conforme da teoria. Vejamos como isso pode ser feito[23].

A métrica para um espaço  $AdS_{d+2}$  em coordenadas de Poincaré tem a forma.

$$ds^2 = \Omega^2(z)(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (2.43)$$

O elemento de linha deve possuir invariância conforme, ou seja, dadas as transformações

$$(t, \vec{x}) \rightarrow \lambda(t, \vec{x}), \quad z \rightarrow \lambda z \quad (2.44)$$

O elemento de linha deve se manter. Logo, tal reescalamto nos leva a

$$\begin{aligned} ds^2 \rightarrow ds'^2 &= \Omega'^2(z)(-\lambda^2 dt^2 + \lambda^2 d\vec{x}^2 + \lambda^2 dz^2) \\ &= \lambda^2 \Omega^2(z)(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ou seja, para que a invariância conforme se mantenha,  $\Omega$  tem que se transformar como

$$\Omega(z) \rightarrow \frac{1}{\lambda} \Omega(z) \quad (2.46)$$

Tal propriedade se manifesta quando  $\Omega$  possui a forma

$$\Omega(z) = \frac{a}{z}, \quad a = \text{constante} \quad (2.47)$$

Assim, a métrica é

$$ds^2 = \frac{a^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (2.48)$$

O elemento de linha (2.48) é solução de uma ação do tipo

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (-2\Lambda + R) \quad (2.49)$$

Cuja solução é dada pela equação de Einstein (2.29). Podemos encontrar facilmente a relação entre o escalar de curvatura e a constante cosmológica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= -\Lambda g_{\mu\nu} \\
g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= -\Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \\
\left(1 - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\right)R &= -\Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \\
\left[1 - \frac{1}{2}(d+1)\right]R &= -\Lambda(d+1).
\end{aligned}$$

Sendo assim, o escalar de curvatura é

$$R = 2\Lambda \frac{d+1}{d-1}. \quad (2.50)$$

Além disso, podemos encontrar  $R_{\mu\nu}$  a partir da equação de Einstein

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(2\Lambda \frac{d+1}{d-1}\right) &= -\Lambda g_{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} &= \frac{2}{d-1}\Lambda g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Por outro lado, podemos calcular o tensor de Ricci diretamente. Os símbolos de Christoffel não nulos são  $\Gamma_{04}^0 = \Gamma_{i4}^i = \Gamma_{00}^4 = \Gamma_{44}^4 = \Gamma_{04}^4 = -\frac{1}{z}$  e  $\Gamma_{ii}^4 = \frac{1}{z}$ , onde  $i = 1, \dots, d$ . Depois de algumas manipulações, o tensor de Ricci assume a forma

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_4\Gamma_{\mu\nu}^4 - \partial_\nu\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma\Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \quad (2.52)$$

A título de ilustração, vamos calcular a componente  $R_{00}$  do tensor de Ricci de forma explícita.

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_4\Gamma_{00}^4 - \partial_0\Gamma_{\sigma 0}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma\Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\sigma\Gamma_{\sigma 0}^\lambda \\
&= \frac{1}{z^2} + [\Gamma_{04}^0 + d\Gamma_{i4}^i + \Gamma_{00}^4]\Gamma_{00}^4 - \Gamma_{04}^0\Gamma_{00}^4 - \Gamma_{04}^0\Gamma_{00}^4 - \Gamma_{04}^4\Gamma_{04}^4 \\
&= \frac{1}{z^2} + d\Gamma_{i4}^i\Gamma_{00}^4 - \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{d}{z^2}
\end{aligned} \quad (2.53)$$

Observe que  $R_{00} = \frac{d}{a^2} \frac{a^2}{z^2} = -\frac{d}{a^2}g_{00}$ . Seguindo o mesmo procedimento para as outras componentes do tensor de Ricci, encontramos a expressão

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{a^2}g_{\mu\nu} \quad (2.54)$$

Para terminar esse topico, note que, comparando as equações (2.51) e (2.54), encontramos que, para um espaço  $AdS_{d+2}$ , a constante cosmoógica e o escalar de Ricci são dados por, respectivamente,

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2a^2}, \quad R = -\frac{d(d+1)}{a^2}. \quad (2.55)$$

Ou seja, tanto o escalar de curvatura quanto a constante cosmológica estão diretamente ligados à dimensão e ao raio de curvatura do espaço  $AdS$ .

## 2.3 Grupo $SU(N)$ e o limite de t'Hooft (large N limit)

Um outro grupo de fundamental importância e que trataremos aqui com mais atenção, além do grupo de rotações  $SO(p+1, q+1)$ , associado às transformações conformes de  $\mathbb{R}^{p,q}$ , é o grupo  $SU(N)$ , que denota o grupo de matrizes unitárias de ordem  $N$  com determinante unitário[24], está associado a diversos contextos na Física e, em particular, possui especial importância na formulação da QCD[25], como será comentado mais adiante. Qualquer matriz  $U$  desse grupo pode ser representada através de geradores  $T^a$  ( $a = 1, \dots, N^2 - 1$ ) como

$$U(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{N^2-1}) = \exp[i\Lambda_a T^a]. \quad (2.56)$$

As matrizes de  $SU(N)$  são unitárias, seus geradores são hermiteanos e possuem traço nulo. Como exemplo,  $SU(2)$  (de fundamental importância no estudo de spin, por exemplo) possui  $2^2 - 1 = 3$  geradores, que são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

e os geradores de  $SU(3)$  são as matrizes de Gell-Mann<sup>5</sup>[25]. Além disso, os geradores de  $SU(N)$  obedecem à Álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.58)$$

---

<sup>5</sup>Um estudo mais detalhado sobre os grupos  $SU(2)$  e  $SU(3)$  é encontrado no livro clássico de Mecânica Quântica do J.J. Sakurai.

e tem como anticomutador

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N}\delta^{ab} + d^{abc}T^c. \quad (2.59)$$

Com a condição de normalização  $\text{tr}T^aT^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ . Aqui,  $f^{abc}$  são constantes de estrutura antissimétricas, enquanto  $d^{abc}$  são constantes de estrutura simétricas. A relação de completudeza é dada por

$$T_{pq}^a T_{rs}^a = \frac{1}{2}\delta_{ps}\delta_{qr} - \frac{1}{2N}\delta_{pq}\delta_{rs}. \quad (2.60)$$

Temos também a identidade de Fierz

$$T_{pq}^a T_{rs}^a = \frac{N^2 - 1}{2N^2}\delta_{ps}\delta_{qr} - \frac{1}{N}T_{ps}^a T_{qr}^a \quad (2.61)$$

e outras identidades interessantes podem ser encontradas na referência [25].

A teoria que descreve as interações fortes é a QCD cujo grupo de calibre é o SU(3), formado por matrizes de ordem 3, unitárias e com determinante um. Isso é equivalente a dizer que a QCD possui três cores. Para ultrapassar as dificuldades existentes devido ao forte acoplamento da teoria (que é assintoticamente livre) em baixas energias, Gerard t'Hooft, em 1974, sugeriu que, ao invés de usar o grupo SU(3) como grupo de calibre, fosse usado o grupo SU(N). Era esperado que, no limite  $N \rightarrow \infty$ , mantendo-se  $\lambda = g_{YM}^2 N$  constante, fosse possível obter uma solução exata e, a partir de tal solução, fosse possível realizar uma perturbação para  $N=3$  [11].

Isso advém do fato de que, em teorias the Yang-Mills, o acoplamento do calibre muda sua dimensão próximo a escala  $\Lambda_{QCD}$ , o que impossibilita a realização de expansões perturbativas próximas dessa escala. O uso do grupo SU(N) traz um novo parâmetro na teoria: o número natural N. Devido a liberdade assintótica da teoria, pode-se escolher  $g_{YM}$  de forma tal que  $\Lambda_{QCD}$  permaneça constante quando N é muito grande[26].

Quando se trata de campos que se transformam sob o calibre de SU(N),  $N \geq 2$ , podemos distinguir duas propriedades[27]:

i) Campos que se transformam na representação fundamental do grupo de calibre são elementos de um espaço vetorial com dimensão  $N$ .

$$q_i(x) \longrightarrow (e^{i\theta^a(x)T^a})_i^j q_j(x), \quad i, j, = 1, \dots, N. \quad (2.62)$$

Os geradores  $T^a$  são matrizes  $N \times N$  de traço nulo e hermitianas, para garantir a unitariedade de  $e^{i\theta^a(x)T^a}$ . Se  $\theta^a(x)$  é infinitesimal, temos:

$$q_i(x) \longrightarrow q_i(x) + i\theta^a(x) (T^a)_i^j q_j(x); \quad (2.63)$$

ii) Campos que se transformam na representação adjunta estão associados a uma álgebra de  $N^2-1$  dimensões.

$$\phi_i^j \equiv \phi^a (T^a)_i^j \longrightarrow (e^{i\theta^b T^b})_i^k \phi^a (T^a)_k^l (e^{i\theta^c T^c})_l^j. \quad (2.64)$$

De forma infinitesimal

$$\begin{aligned} \phi^a T^a &\longrightarrow \phi^a T^a + i(\theta^b T^b \phi^a T^a - \phi^a T^a \theta^b T^b) \\ &= \phi^a T^a - i\theta^b \phi^a [T^a, T^b] \\ &= \phi^a T^a + f^{abc} \theta^b \phi^a T^c. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ao contrário do que acontece com a  $QED$ , os campos de calibre da  $QCD$  não são abelianos. Campos de calibre não abelianos  $A_\mu = A_\mu^a T^a$  dão origem ao Tensor de Maxwell não-abeliano

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Também podemos escrever  $F_{\mu\nu}$  de forma simplificada se definirmos a derivada covariante como

$$(D_\mu)_i^j = \delta_i^j + ig A_\mu^a (T^a)_i^j. \quad (2.67)$$

De onde encontramos a relação

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]. \quad (2.68)$$

Para encerrar esse t3pico, vamos calcular o formato do propagador de uma teoria da calibre em  $SU(N)$ . Os campos de calibre na forma matricial s3o escritos como[26]

$$A_\mu^{ij} = g \sum_a A_\mu^a [T^a]^{ij} \quad (2.69)$$

e a rela33o de completeza fica

$$\sum_a^{N^2-1} [T^a]^{ij} [T^a]^{kl} = \frac{1}{2} \left( \delta^{il} \delta^{kj} - \frac{1}{N} \delta^{ij} \delta^{kl} \right). \quad (2.70)$$

O propagador 3 dado por

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \delta^{ab} D_{\mu\nu}(x-y). \quad (2.71)$$

Aplicando um duplo somat3rio em ambos os lados, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_a^{N^2-1} A_\mu^a(x) [T^a]^{ij} \sum_b^{N^2-1} A_\nu^b(y) [T^b]^{kl} \right\rangle &= \sum_a^{N^2-1} \sum_b^{N^2-1} [T^a]^{ij} [T^b]^{kl} \delta^{ab} D_{\mu\nu}(x-y) \\ &= \sum_a^{N^2-1} [T^a]^{ij} [T^a]^{kl} D_{\mu\nu}(x-y). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora, usando as equa33es (2.69) e (2.70), encontramos

$$\langle A_\mu^{ij}(x) A_\nu^{kl}(y) \rangle = \frac{1}{2} \left( \delta^{il} \delta^{kj} - \frac{1}{N} \delta^{ij} \delta^{kl} \right) D_{\mu\nu}(x-y). \quad (2.73)$$

Sabemos que, no calibre de Feynmann,  $D_{\mu\nu}$  3 dado por

$$\frac{g^2}{4\pi^2} \frac{\delta_{\mu\nu}}{(x-y)^2} \quad (2.74)$$

Conhecer o comportamento do propagador, especialmente nesse caso, 3 importante porque no limite onde  $N \rightarrow \infty$  temos

$$\langle A_\mu^{ij}(x) A_\nu^{kl}(y) \rangle \propto g^2 \delta^{il} \delta^{kj} = i \longrightarrow l. \quad (2.75)$$

$$k \longleftarrow j$$

Cada linha representa uma delta e possui a orienta33o da seta associada<sup>6</sup>. Tal notaa3o est3 de acordo com descri33o de uma propaga33o de uma part3cula do ponto  $x$  at3 o

<sup>6</sup>Aqui, n3o apresentaremos detalhes sobre o comportamento dos propagadores na notaa3o de linhas. Uma refer3ncia interessante sobre o assunto 3 [26].

ponto  $y$ . O propagador, da forma como foi explicitado, está relacionado com os glúons, que são os bósons de calibre das interações fortes. Em particular, encontraremos a importância desse propagador quando comentarmos o comportamento do potencial quark-antiquark nas seções subsequentes.

## 2.4 Loop de Wilson

Um importante operador que aparece em uma teoria de calibre é o Loop de Wilson, que, devido a correspondência AdS/CFT, está intimamente ligada ao comportamento dos quarks. O loop de Wilson é definido como[6, 11, 15, 25]

$$W(C) \equiv \frac{1}{N} \text{Tr} e^{ig \oint_C dx^\mu A_\mu} \quad (2.76)$$

Para notarmos a importância de tal operador, observemos que na Eletrodinâmica Quântica, cujo grupo é o U(1), quando se impõe que a lagrangeana deve ser invariante de calibre, nasce um observável associado à propagação dos elétrons no espaço-tempo, o fóton. Sendo assim, é natural a busca de observáveis associados aos grupos de calibre mais gerais. A saber, SU(N). Na busca por essas quantidades invariantes de calibre, vamos definir[15]

$$U[C_{xy}] = P e^{i \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu} \quad (2.77)$$

onde  $A_\mu = A_\mu^a T_a$ ,  $T_a$  são matrizes geradoras de SU(N) e  $C_{yx}$  é um contorno qualquer no espaço tempo que começa no ponto  $x$  e termina no ponto  $y$ .

Vamos considerar, primeiramente, o caso em que  $T_a$  pertence ao grupo de calibre U(1). Sob uma transformação infinitesimal

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.78)$$

temos

$$\begin{aligned}
e^{i \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu} &\longrightarrow e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu (A_\mu + \partial_\mu \alpha(x))} \\
&= e^{i \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu} e^{i \int_{C_{xy}} \partial_\mu \alpha(x) dx^\mu} \\
&= e^{i \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu} e^{i[\alpha(y) - \alpha(x)]} \\
&= e^{i\alpha(y)} \left( e^{i \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu} \right) e^{-i\alpha(x)}
\end{aligned}$$

Assim, quando campo carregado se transforma sob esse calibre, i.e.,

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad (2.79)$$

a multiplicação por  $U[C_{xy}]$  fornece

$$U[C_{yx}] \phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(y)} U[C_{yx}] e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)} \phi(x) = e^{i\alpha(y)} (U[C_{yx}] \phi(x)). \quad (2.80)$$

Ou seja, a transformação infinitesimal (2.78) nos dá o transporte paralelo de  $\phi$  desde o ponto  $x$  até o ponto  $y$ . Logo,  $U[C_{yx}]$  representa um fator de fase na Eletrodinâmica Quântica[28]. Note que, se  $y = x$ , temos:

$$U[C_{xx}] \longrightarrow e^{i\alpha(x)} U[C_{xx}] e^{-i\alpha(x)} = U[C_{xx}] \quad (2.81)$$

Isto é, quando medimos  $U$  em um contorno fechado, encontramos um invariante de calibre. Esse fato deve dar algum indício sobre a natureza dos observáveis em teorias sob grupos mais gerais, como o  $SU(N)$  que, para  $N \geq 2$ , é não-abeliano. Tomando  $\alpha(x)$  infinitesimal e a transformação

$$A_\mu \longrightarrow \Omega(x) A_\mu \Omega^{-1}(x) - i (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}, \quad (2.82)$$

onde  $\Omega(x) = e^{i\alpha(x)}$ , encontramos

$$\begin{aligned}
A_\mu &\longrightarrow (1 + i\alpha) A_\mu (1 - i\alpha) - i (\partial_\mu (1 + i\alpha)) (1 + i\alpha) \\
&\simeq A_\mu + \partial_\mu \alpha - i [A_\mu, \alpha]
\end{aligned}$$

Ou seja, a variação do calibre deve ser

$$\delta A_\mu = D_\mu \alpha = \partial_\mu \alpha - i [A_\mu, \alpha]. \quad (2.83)$$

Apartir da transformação (2.83), segue que

$$\begin{aligned}
e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu A_\mu} &\longrightarrow e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu [\Omega(x) A_\mu \Omega^{-1}(x) - i(\partial_\mu \Omega(x)) \Omega^{-1}(x)]} \\
&= e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu e^{i\alpha} [A_\mu + \partial_\mu \alpha] e^{-i\alpha}} \\
&\simeq e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu (1+i\alpha) [A_\mu + \partial_\mu \alpha] (1-i\alpha)} \\
&\simeq e^{i \int_{C_{xy}} dx^\mu (A_\mu + \partial_\mu \alpha)} \\
&= e^{i\alpha(y)} \left( e^{i \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu} \right) e^{-i\alpha(x)}
\end{aligned}$$

Novamente encontramos que  $U[C_{yx}]$  define transporte paralelo entre os pontos  $x$  e  $y$ . Entretanto, diferente do que acontece com o grupo  $U(1)$ , agora a ordem dos termos importam e, para  $y = x$  (contorno fechado), obtemos

$$U[C_{xx}] \longrightarrow e^{i\alpha(x)} U[C_{xx}] e^{-i\alpha(x)} \neq U[C_{xx}] \quad (2.84)$$

Ainda assim podemos encontrar uma grandeza que não depende do calibre. Note que

$$Tr \{ e^{i\alpha(x)} U[C_{xx}] e^{-i\alpha(x)} \} = Tr \{ U[C_{xx}] \} \quad (2.85)$$

Sendo assim, definimos então o loop de Wilson como

$$W(C) = \frac{1}{N} Tr e^{i \oint_C A_\mu dx^\mu} \quad (2.86)$$

O fator  $1/N$  aparece por conveniência, porque o traço do grupo  $SU(N)$  possui  $N$  termos[15]. Note que o loop de Wilson obedece a propriedade

$$W(C_1)W(C_2) = W(C_1 \cap C_2) \quad (2.87)$$

Esse comportamento é conhecido como *lei das áreas* e tem fundamental papel na descrição de teorias confinantes, como a QCD. De forma particular, veremos adiante que o loop de Wilson auxilia na "captura" do potencial quark-antiquark via *correspondência AdS/CFT* e a lei das áreas vai indicar o caráter confinante da teoria[28, 29, 15].

# Capítulo 3

## Elementos da Correspondência *AdS/CFT*

### 3.1 Cordas e D-branas

Vamos imaginar uma corda extremamente fina e pequena, de modo que seja impossível dividi-la. Ou seja, a corda é, simples e fundamentalmente, feita de... corda! Vamos, aqui, descrever as cordas em função do parâmetro  $\sigma \in [0, \pi]$  e as coordenadas da corda serão denotadas por  $X^\mu$ . A ação que descreve a dinâmica de uma corda aberta é dada pela ação de Polyakov[14]

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X. \quad (3.1)$$

Apenas essa ação, em si, não é suficiente para que possamos descrever a dinâmica da corda aberta. Precisamos também usar condições de contorno. Variando a ação 3.1, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \delta (\partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma [(\partial_\alpha \delta X) \cdot \partial^\alpha X + \partial_\alpha X \cdot (\partial^\alpha \delta X)] \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha \delta X \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha (\delta X \cdot \partial^\alpha X) - (\partial_\alpha \partial^\alpha X) \cdot \delta X. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vamos dar um pouco de atenção ao segundo termo da integral. Temos que

$$\begin{aligned} \int d^2\sigma \partial_\alpha (\delta X \cdot \partial^\alpha X) &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma [\partial_\tau (\delta X \cdot \partial^\tau X) - \partial_\sigma (\delta X \cdot \partial^\sigma X)] \\ &= \left[ \int_0^\pi d\sigma \delta X \cdot \dot{X} \right]_{\tau_i}^{\tau_f} - \left[ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \delta X \cdot X' \right]_0^\pi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De acordo com as regras do *princípio variacional*, devemos estabelecer  $\delta X^\mu(\tau_i) = X^\mu(\tau_f) = 0$ . Assim, o primeiro termo se anula. Entretanto, para conseguirmos

$$(\partial_\sigma X^\mu) \delta X_\mu = 0 \quad (3.4)$$

em  $\sigma = 0, \pi$ , devemos ter  $\delta X^\mu = 0$ , o que implicaria em condições de contorno de Dirichlet, ou  $\partial_\sigma X^\mu = 0$ , que são exatamente as condições de contorno de Neumann.

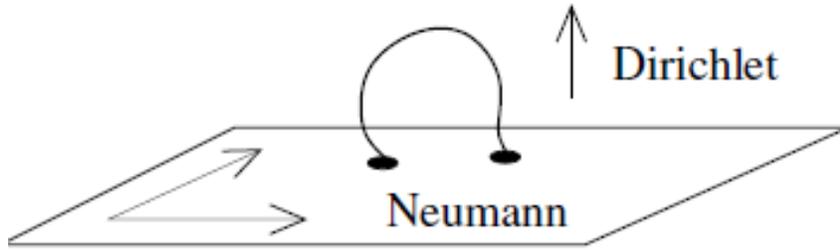


Figura 3.1: "Visualização" das condições de Neumann e Dirichlet

Não é possível obter uma Teoria de Cordas com o número de dimensões com as quais estamos acostumados. Precisamos de mais dimensões. A idéia de dimensões extras é bem mais antiga do que a idéia de cordas, ela surgiu nos anos 1920 nos trabalhos de Kaluza-Klein. Segundo a Teoria de Supercordas, para obtermos um espaço-tempo estável e com matéria, nosso Universo deve possuir 10 dimensões (Numa teoria de Cordas Bosônicas, sem matéria, nosso Universo deveria possuir "apenas" 26 dimensões)[14, 4]. Apesar de fugir do nosso senso comum, a ideia da existência de dimensões extras se mostra importante porque explica de forma bastante econômica diversos problemas que hoje existem em aberto na Física, como por exemplo, o *problema da hierarquia*, que está relacionado à diferença existente entre as intensidades da

interação gravitacional e das interações eletromagnéticas, nuclear fraca e nuclear forte. Enquanto a interação gravitacional, por ser fonte do espaço-tempo, estaria espalhada por todas as dimensões, as outras interações estariam presas no espaço usual<sup>1</sup>.

Com as idéias de cordas e dimensões extras, aparece o alvo de nosso interesse nesse tópico: as Dp-branas. *Dp-branas são entes físicos com p dimensões espaciais onde as cordas abertas podem terminar*[4]. Elas aparecem das condições de Dirichlet (de onde aparece o "D", de Dp) impostas sobre as cordas abertas para que possamos descrever sua dinâmica. Falando de outra maneira, a condição de contorno de Dirichlet define uma hipersuperfície onde as pontas das cordas devem se manter e denomina-se essa hipersuperfície de Dp-brana.

A existência de mais dimensões, além de nos dar novos *insights*, como por exemplo, na interação forte (veremos adiante), resolve diversos problemas. Por exemplo, o *problema da hierarquia*, Uma possível explicação vem da Teoria de Cordas. Os responsáveis pelas interações de calibre são dados por cordas abertas, enquanto o gráviton, responsável pela interação gravitacional, é obtido a partir dos modos de vibração das cordas fechadas. Então, nosso universo pode ser uma *D3-brana* onde estão as interações de calibre e, enquanto isso, o gráviton fica livre para se mover entre todas as dimensões. Sendo, o gráviton, descrito por cordas fechadas, não está preso em Dp-brana alguma e, daí, pode-se concluir que a interação gravitacional é distribuída em todo o bulk, enquanto as outras interações estão confinadas em nosso Universo, sendo assim, mais intensas nele [4]. Uma outra consequência direta está na escala de energia da Gravidade Quântica. Nesse caso, a massa de Planck que conhecemos, da ordem de  $10^{19}$ gev, seria efetiva, sendo maior do que a massa de Planck fundamental. As massas para teorias com  $N$  dimensões extras se relacionam por [34, 4]

$$M_P^2 = M_{Pf}^{N+2} l_c, \quad (3.5)$$

onde  $l_c \propto R^N$  e  $R$  é o raio dado as dimensões extras.

---

<sup>1</sup>Um modelo que funciona muito bem para esses cenários é o modelo de Randall-Sundrum

Agora, vamos separar as coordenadas que obedecem as condições de Dirichlet das que obedecem as condições de Neumann.

$$\partial_a X^a = 0, \quad a = 0, \dots, p \quad (3.6)$$

$$X^I = c^I, \quad I = p + 1, \dots, d \quad (3.7)$$

Com isso, o grupo de Lorentz associado,  $SO(1, d)$ , é separado em duas partes

$$SO(1, d) \longrightarrow SO(1, p) \times SO(d - p) \quad (3.8)$$

A hipersuperfície definida pelo grupo  $SO(1, p)$  é chamada de  $Dp$ -brana. As coordenadas  $c^I$  mostram a localização da  $Dp$ -brana no espaço onde está inserida. Nesse trabalho não serão discutidas de forma detalhada as características das  $Dp$ -branas. Para um estudo mais aprofundado, as referências [4, 5, 11, 14, 27] são excelentes materiais nesse assunto.

Assim como as cordas vibram, as  $Dp$ -branas possuem dois tipos de excitações. A primeira é relacionada ao movimento rígido na superfície da brana. Os graus de liberdade são dados pelos  $9-p$  coordenadas transversais, denotadas por  $\phi^i$ , às  $p+1$  dimensões do volume-mundo ocupado pela  $Dp$ -brana. O segundo tipo de excitação são devidos às vibrações das cordas abertas. As pontas das cordas são cargas. Cargas funcionam como fontes de um campo de calibre. Assim,  $Dp$ -branas carregam em si um campo de calibre  $A_\mu$  [9]. Uma única  $Dp$  brana carrega um campo  $U(1)$ . Se colocarmos duas  $Dp$ -branas paralelas, chamando-as de brana 1 e brana 2, teremos os campos de calibre gerados pelas cordas que estão presas na mesma brana,  $(A_\mu)_1^1$  e  $(A_\mu)_2^2$ , e os campos gerados por cordas que iniciam e terminam em branas diferentes,  $(A_\mu)_2^1$  e  $(A_\mu)_1^2$ . A matriz  $(A_\mu)_b^a$ ,  $a, b = 1, 2$ , é a matriz formada pelos campos de calibre gerados por cordas que iniciam na  $Dp$ -brana  $a$  e terminam na  $Dp$ -brana  $b$  e pertence ao grupo  $U(2)$ . De forma similar, as  $9-p$  coordenadas transversais formam uma matriz  $(\phi^i)_b^a$  que pertence ao grupo  $U(2)$ . De forma geral,  $N$   $Dp$ -branas carregam um campo  $U(N)$ [4] em si.  $A_\mu$  e  $\phi$  são matrizes que se transformam na representação adjunta de

$U(N)$ . Os elementos não-diagonais desses campos correspondem às excitações geradas por branas diferentes, enquanto os elementos da diagonal são excitações na mesma brana. Pode-se provar que[27], para o grupo  $U(N)$ ,

$$U(N) \iff U(1) \times SU(N) \times (\text{termos que, aqui, não são importantes}). \quad (3.9)$$

Ou seja,  $U(N)$  é equivalente ao grupo  $U(1)$  vezes o grupo  $SU(N)$  e outros termos que não afetam no que segue. Assim, podemos desacoplar o  $U(1)$  e vemos que o conjunto de  $N$  Dp-branas possuem um grupo de calibre  $SU(N)$  em  $p + 1$  dimensões.

A energia potencial, clássica, de uma corda esticada é igual a  $T_0 l_s$ , onde  $l_s$  é o tamanho da corda. Após a quantização, entretanto, novos termos devem aparecer no potencial devido às correções quânticas da teoria. Para D-branas separadas por uma distância  $L$ , a massa das cordas esticadas sobre elas vai ter a forma[4]

$$M^2 = (T_0 L)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left( N^\perp - \frac{1}{24}(D - 2) \right), \quad (3.10)$$

onde  $N^\perp$  está relacionado às vibrações das cordas entre as D-branas e, para uma corda esticada (que não se excita), é nulo ( $N^\perp = 0$ ). Além disso, a  $M^2$  pode ser identificada com o quadrado da energia potencial da corda,  $M^2 = E(L)^2$ .

$$E(L) = \sqrt{(T_0 L)^2 + 2T_0 \gamma_D} \quad (3.11)$$

onde  $T_0$  é a tensão da corda e  $\gamma_D = -\frac{\pi}{24}(D - 2)$  é o coeficiente de Luscher. Podemos expandir a equação (3.11) para  $L$  muito grande, obtendo

$$E(L) = T_0 L + \gamma_D \frac{1}{L} + \mathcal{O}(1/L^3). \quad (3.12)$$

Veremos que um potencial com o mesmo formato aparece quando estudamos os mésons. Esse fato advém da analogia entre cordas e pares quark-antiquarks.

A Dp-brana em 10 dimensões[11, 27] possui simetrias  $SO(1, p) \times SO(9 - p)$  e a métrica desse espaço tem a forma<sup>2</sup>

$$ds^2 = H(y)^{-1/2} ds^\mu dx_\mu + H(y)^{1/2} dy \cdot dy \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>A forma mais geral, em supergravidade, dessa configuração, em 10 dimensões, é  $ds^2 = H^{-1/2}(r) [-f(r)dt^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2] + H^{1/2}(r) [f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2]$ , onde  $H(r) = 1 + \frac{L^{7-p}}{r^{7-p}}$ ,  $f(r) = 1 - \frac{r_0^{7-p}}{r^{7-p}}$  e  $r_0$  é a localização do amontoado de Dp-branas. Para nossa análise, usamos  $r_0 = 0$ .

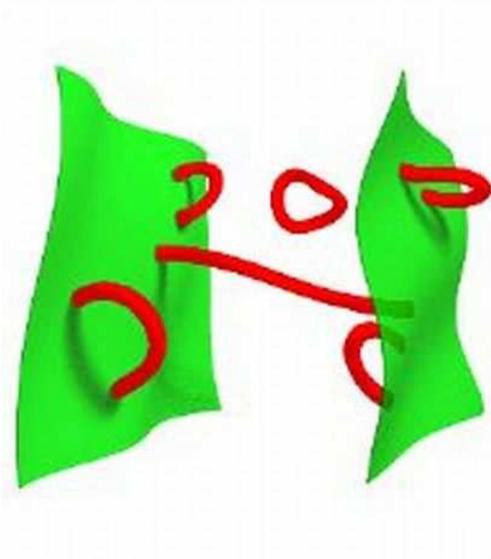


Figura 3.2: Cordas entre duas  $Dp$ -branas

Onde, aqui, usamos as coordenadas  $x^\mu$  como sendo as coordenadas sobre a Dp-brana e  $\vec{y}$  as coordenadas perpendiculares à brana.  $H$  tem a forma

$$H(y) = 1 + \left(\frac{L}{y}\right)^{D-p-3}, \quad (3.14)$$

onde, para um amontoado de  $N$  Dp-branas,

$$L^{D-p-3} = N g_s (4\pi)^{(5-p)/2} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) \alpha'^{(D-p-3)/2} \quad (3.15)$$

Assim,  $L$  é um fator com dimensão de comprimento que depende somente de  $\alpha'$ [30]. Merece atenção o fato de que, para D3-branas em teoria de cordas (onde  $g_s = g_{YM}^2$ ), obtemos  $L^4 = 4\pi\lambda\alpha'^2$ , onde  $\lambda = g_s N$  é a constante de acoplamento de t'Hooft.

## 3.2 Correspondência AdS/CFT

A *correspondência AdS/CFT* é uma teoria que relaciona uma Teoria Quântica de Campos em  $d$  dimensões com uma teoria de gravidade, ou de cordas, em  $d + 1$  dimensões. Em sua formulação mais simples, que será o caso abordado nessa seção, ela trata da dualidade entre Teorias da Campos Conformes e espaços *AdS*.

Vamos considerar o sistema onde temos  $N$  D3-branas paralelas colocadas a uma distância  $r$  entre si dentro de um espaço de Minkowski em 10 dimensões[6, 8]. As cordas

fechadas representam excitações do espaço no vácuo, enquanto as cordas abertas são excitações nas  $N$  D3-branas. Vamos aqui escolher o limite onde

$$\alpha' \rightarrow 0, \quad U = \frac{r}{\alpha'} = \text{fixo} \quad (3.16)$$

Escolher  $\alpha' \rightarrow 0$  é equivalente a escolher o limite de baixas energias,  $E \ll 1/\sqrt{\alpha'}$ , onde somente os modos de vibração não-massivos das cordas sobrevivem. O tamanho de uma corda é  $l_s = \sqrt{\alpha'}$ [4]. A condição de  $U$  fixo acrescenta mais duas condições ao nosso sistema. A primeira, é colocar as branas muito próximas entre si (de fato, um amontoado de D3-branas). A segunda, é manter as massas das cordas esticadas entre as branas fixas<sup>3</sup>. A teoria resultante sobre as D3-branas é  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  SYM,

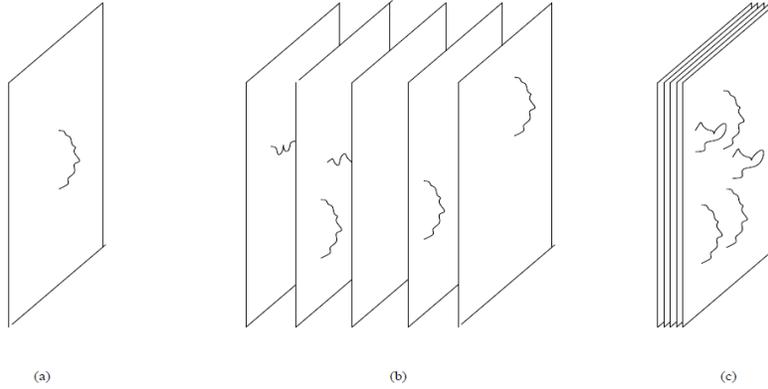


Figura 3.3: Sistema de branas próximas

que é a máxima supersimetria de uma teoria de calibre sem gravidade[30]. Essa teoria possui uma simetria  $SO(4, 2)$ , além da simetria  $SU(4) \cong SO(6)$ , que rotacionam os 6 escalares sobre as branas entre si. Nesse mesmo regime, a gravidade no bulk se torna livre. *Assim, em baixas energias, encontramos dois sistemas diferentes: a gravidade livre no bulk e uma teoria de calibre nas D3-branas.*

Se  $N$  é muito grande, essa aproximação é equivalente a colocar um objeto muito massivo dentro de uma teoria de cordas fechadas, que contém gravidade[31]. Em uma teoria de supergravidade tipo IIB, a métrica que descreve um amontoado de D3-branas

<sup>3</sup>A massa de tais cordas, do ponto de vista clássico, é dada pela tensão da corda ( $1/2\pi\alpha'$ ) vezes o comprimento da mesma, que é justamente a distância entre as branas nas quais a corda está presa,  $r$  ( $m = \frac{1}{2\pi\alpha'}r = \frac{U}{2\pi}$ ).[4]

é dada por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (3.17)$$

Onde  $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$ . Note que existe um fator de redshift para a energia, pois  $g_{tt}$  não é constante.

$$E = H^{-1/4} E_p. \quad (3.18)$$

Aqui[27, 15],  $E$  é a energia de um objeto visto por um observador no infinito, enquanto  $E_p$  é a energia do mesmo objeto medida por um observador que está numa posição fixa  $r$ . Essa expressão nos diz que cada vez que aproximamos um objeto de  $r = 0$ , este parece ter menor e menor energia para um observador no infinito. Tal observador irá perceber dois tipos de excitações de baixas energias. O primeiro tipo é formado por qualquer excitação nas proximidades de  $r = 0$  e o segundo é formado pelas vibrações de modos não massivos no bulk. Partículas sem massa se desacoplam no bulk, enquanto os outros tipos de interações ficam presas na região  $r = 0$  pelo potencial gravitacional gerado pelas D3-branas. *Encontramos, novamente, dois sistemas desacoplados. Assim, no limite de baixas energias, encontramos a gravidade no bulk e a região no limite  $r = 0$ .* Nessa região, encontramos

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (3.19)$$

onde,  $d\vec{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ ,  $z = \frac{L^2}{r}$  e  $d\Omega_5^2$  é o elemento de arco de uma esfera unitária em 5 dimensões. Esse é, justamente, um espaço  $AdS_5 \times S^5$ .

Aqui, obtemos, de formas distintas, o limite de baixas energias a partir de dois pontos de vista diferentes. Em ambos encontramos uma teoria de gravidade somada de outra teoria. É natural perguntar se se essas teorias seriam equivalentes. E é justamente o que a correspondência *AdS/CFT* faz. Ela conjectura (em sua forma fraca) que *uma teoria de Yang-Mills supersimétrica com  $\mathcal{N} = 4$  em (3+1) dimensões é equivalente (ou dual) à teoria de cordas tipo IIB sobre  $AdS_5 \times S^5$* [6].

Note que o grupo de isometrias associado ao espaço  $AdS_5 \times S^5$  é o  $SO(4, 2) \times SO(6)$ , que é justamente o grupo de calibre associado ao amontoado de D3-branas, definidos anteriormente. Assim, o fato de a teoria sobre as D3-branas em baixas energias ser conforme reflete o fato de a geometria gerada nas vizinhanças das D3-branas ser a geometria de um espaço  $AdS_5$ [11].

Tanto a parte  $AdS$  quanto a esfera  $S^5$ , devido ao fato de serem maximalmente simétricas, possuem curvaturas proporcionais a  $1/L^2$  e, para altos valores de  $L$ , se tornam muito pequenas. Nesse regime, as D3-branas são melhor descritas na aproximação da teoria de cordas tipo IIB. Assim, a geometria em  $r \rightarrow 0$  pode ser vista como um

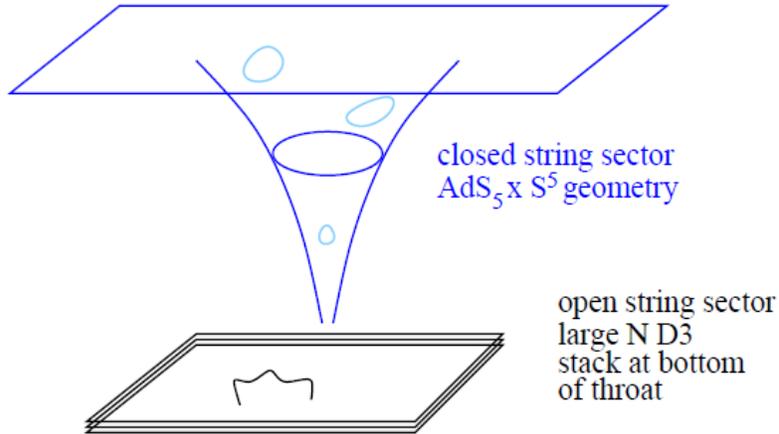


Figura 3.4: Esquema geométrico da Correspondência AdS/CFT[30]

”gargalo” de raio  $L$ , onde  $r \rightarrow \infty$  leva a um espaço plano de  $(9+1)$  dimensões[31]. Esse é justamente o caso onde o limite de supergravidade é válido, pois, para  $L \gg \sqrt{\alpha'}$ , temos

$$\frac{L}{\sqrt{\alpha'}} \sim (g_s N)^{1/4} \gg 1. \quad (3.20)$$

Ou seja, o acoplamento de  $t'$  Hooft deve possuir um alto valor. Essa é justamente a condição estabelecida por Maldacena[8] geometria nas proximidades das D3-branas possui curvatura pequena e pode ser descrita em termos de uma teoria de cordas tipo IIB.

# Capítulo 4

## Descrição Holográfica do Potencial Entre Quarks

### 4.1 Cenários com branas-mundo

Como consequência dos calibres necessários para descrever os modos de vibrações das cordas abertas, nasceram as  $Dp$ -branas. Com o aparecimento de branas na teoria, ressurgiu a ideia de dimensões extras (idealizadas, primeiramente, por Kaluza-Klein): o nosso Universo pode ser uma  $D3$ -brana imersa num espaço de dimensão maior (o "bulk"). Essas dimensões podem estar compactadas, como na formulação dada por teorias do tipo Kaluza-Klein ou, no caso de a matéria estar compactada nas três dimensões em que vivemos, poderiam existir bulks com dimensões extras, ou mesmo infinitas, como mostrado nos trabalhos de Randall-Sundrum[32, 33].

Um modelo muito usado, devido à compatibilidade com as observações feitas em nosso Universo, é o modelo de Randall-Sundrum. Esse modelo consiste na ideia de que vivemos num bulk com cinco dimensões e constante cosmológica negativa dividido em dois setores, um não-gravitacional, onde está a matéria, e outro gravitacional, onde existe uma concentração significativa de grávitons.

Seguindo tal modelo vamos, inicialmente, considerar uma teoria de cinco dimensões em que a ação possui a forma [36]

$$S_{(5)} = \frac{1}{2\kappa_{(5)}^2} \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m. \quad (4.1)$$

O primeiro termo da equação 4.1 é a ação da Einstein-Hilbert em cinco dimensões,

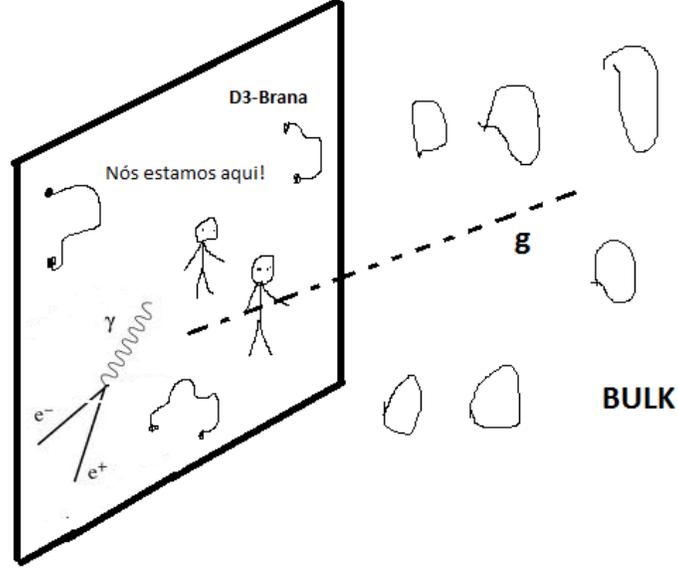


Figura 4.1: Modelo de Randall-Sundrum

onde  $\tilde{g}_{AB}$  é a métrica no bulk e  $\tilde{R}$  é o escalar de curvatura em cinco dimensões. O segundo termo é relacionado à lagrangeana de matéria ( $\mathcal{L}_m$ ) no bulk. Além disso,  $\kappa_{(5)}^2 = 8\pi G_{(5)} = M_{p(5)}^{-3}$ . Onde  $G_{(5)}$  é a constante de Newton e  $M_{p(5)}$  é a massa de planck, ambos em cinco dimensões. A métrica nesse bulk, onde a D3-brana é um universo homogêneo e isotrópico (FRW), pode ser escrita como [35, 36, 37]

$$ds^2 = -n^2(\tau, r)d\tau^2 + a^2(\tau, r)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(\tau, r)dr^2, \quad (4.2)$$

onde  $n(\tau, r)$ ,  $a(\tau, r)$  e  $b(\tau, r)$  são funções que dependem das coordenadas da dimensão extra, denotada por  $r$  e pelo tempo próprio  $\tau$ . Note que não podemos fatorar essa métrica, o que nos abre a possibilidade de termos tanto dimensões extras muito largas quanto dimensões compactificadas, como em casos mais gerais [33]. Para obtermos soluções cosmológicas nesse cenário deve-se resolver as equações de Einstein em cinco dimensões

$$\tilde{G}_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{AB} = \kappa^2\tilde{T}_{AB}, \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{G}_{AB}$  é o tensor de Einstein,  $\tilde{R}_{AB}$  é o tensor de Ricci e  $\tilde{T}_{AB}$  é o tensor energia momento, todos em cinco dimensões.

Precisamos agora distinguir o que acontece no bulk do que acontece na D3-brana. Primeiramente, vamos separar as partes da brana e do bulk no tensor energia momento.

$$\tilde{T}_B^A = \check{T}_B^A|_{bulk} + T_B^A|_{brana} . \quad (4.4)$$

Vamos assumir que a D3-brana é "extremamente fina" e posicionada em  $r = 0$ . Sendo assim, devemos encontrar

$$T_B^A|_{brana} = \frac{\delta(r)}{b} \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0), \quad (4.5)$$

onde  $\rho_b$  e  $p_b$  são a densidade de energia e a pressão na D3-brana, respectivamente. Para obtermos soluções FRW na D3-brana, esses termos são considerados como sendo constantes [17, 35]. A delta aparece porque a brana é definida somente em  $r = 0$ . Para a parte de tensor energia momento associada ao bulk, vamos assumir que ela possui a forma genérica [36]

$$\check{T}_B^A|_{bulk} = \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T), \quad (4.6)$$

onde  $\rho_B$  e  $P_B$  são a densidade de energia e a pressão no bulk, respectivamente.  $P_T$  é a pressão na coordenada  $r$ . Sendo assim, encontramos

$$\tilde{T}_B^A = \text{diag} \left[ (-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T) + \frac{\delta(r)}{b} (-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \right]. \quad (4.7)$$

As componentes do tensor de Einstein são

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left[ \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right] + \kappa \frac{n^2}{a^2} \right\}, \\ \tilde{G}_{04} &= 3 \left( \frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \\ \tilde{G}_{44} &= 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left[ \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right] - \kappa \frac{b^2}{a^2} \right\}, \\ \tilde{G}_{ij} &= \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left( 2 \frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} + \\ &\quad + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left( -\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\dot{b}}{b} \left( -2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - \kappa \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui, a título de ilustração, vamos calcular  $\tilde{G}_{04}$ . A métrica, em sua forma matricial, é dada por  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-n^2, a^2\gamma, a^2\gamma, a^2\gamma, b^2)$ . Note que  $\tilde{g}_{04} = 0$ . Assim, pela equação 4.3 temos

$$\tilde{G}_{04} = \tilde{R}_{04}. \quad (4.9)$$

Nessa notação, a conexão afim tem a forma

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2}\tilde{g}^{CD}(\partial_A\tilde{g}_{BD} + \partial_B\tilde{g}_{DA} - \partial_D\tilde{g}_{AB}), \quad (4.10)$$

onde as letras maiúsculas se restringem a valores de 0 a 4. Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{00}\partial_0\tilde{g}_{00} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\partial_\tau(-n^2) \\ &= \frac{\dot{n}}{n}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

e as outras conexões afins são

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{0i}^0 = 0 & \Gamma_{00}^4 = \frac{nn'}{b^2} & \Gamma_{00}^i = 0 \\ \Gamma_{04}^0 = \frac{n'}{n} & \Gamma_{0i}^4 = 0 & \Gamma_{0i}^i = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{44}^0 = \frac{bb}{n^2} & \Gamma_{04}^4 = \frac{\dot{b}}{b} & \Gamma_{04}^i = 0 \\ \Gamma_{i4}^0 = 0 & \Gamma_{44}^4 = \frac{b'}{b} & \Gamma_{44}^i = 0 \\ \Gamma_{ii}^0 = \frac{a\dot{a}}{n^2}\gamma_{ii} & \Gamma_{i4}^4 = 0 & \Gamma_{i4}^i = \frac{a'}{a} \\ \Gamma_{jk}^0 = 0 & \Gamma_{ii}^4 = -\frac{a}{n^2}\gamma_{ii} & \Gamma_{ii}^i = 0 \\ & \Gamma_{jk}^4 = 0 & \Gamma_{jk}^i = 0. \end{array}$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $i \neq j, k$ . O tensor de Riemann é dado por

$$\tilde{R}_{ACB}^D = \partial_C\Gamma_{BA}^D - \partial_B\Gamma_{CA}^D + \Gamma_{CE}^D\Gamma_{BA}^E - \Gamma_{BE}^D\Gamma_{CA}^E. \quad (4.12)$$

Sendo assim, o tensor de Ricci toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{AB} &= \tilde{R}_{ACB}^C \\ &= \tilde{R}_{A0B}^0 + \tilde{R}_{AiB}^i + \tilde{R}_{A4B}^4 \\ &= \partial_C\Gamma_{BA}^C - \partial_B\Gamma_{CA}^C + \Gamma_{CE}^C\Gamma_{BA}^E - \Gamma_{BE}^C\Gamma_{CA}^E. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Logo, a componente  $\tilde{R}_{04}$  é

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{04} &= \partial_C \Gamma_{04}^C - \partial_4 \Gamma_{C0}^C + \Gamma_{CE}^C \Gamma_{04}^E - \Gamma_{4E}^C \Gamma_{C0}^E \\
&= \tilde{R}_{004}^0 + 3\tilde{R}_{0i4}^i + \tilde{R}_{044}^4 \\
&= 0 + 3 \left( \frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) + 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, encontramos

$$\tilde{G}_{04} = 3 \left( \frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) \tag{4.15}$$

Fazendo uso das condições de junção sobre a branas, encontramos a equação de Friedmann associada

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = \frac{\kappa^2}{6} \rho_B + \frac{\kappa^4}{36} \rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{\kappa}{a_0^2}. \tag{4.16}$$

Impondo que a quinta dimensão seja estática, com calibre  $b(\tau, y) = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
a^2(t, r) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B} \right) a_0^2 + \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B^2 a_0^2} + \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\kappa^2 \rho_B^2}{6\rho_B} \right) a_0^2 - \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B^2 a_0^2} \right] \cosh(\mu|r|) - \\
&\quad - \frac{\kappa \rho_b}{\sqrt{-6\rho_B}} a_0^2 \sinh(\mu|r|) \\
n(t, r) &= \frac{\dot{a}(t, r)}{\dot{a}_0(t)}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

## 4.2 Potenciais entre quarks

Os quarks são, do ponto de vista fenomenológico, constituintes fundamentais da Natureza. Não podemos encontrá-los livres, pois quando se tenta separar um quark de seu parceiro antiquark, um tubo de fluxo cromoeletrico se forma e, quando possui energia suficiente, forma novos pares quark-antiquark. Nesse sentido, a QCD não é uma teoria estritamente confinante, tendo em vista que nesse processo de produção de pares os quarks usados inicialmente podem muito bem se separar e formar novos pares com outros quarks e antiquarks gerados pelo tudo de fluxo cromoeletrico. Isso afeta a curva do potencial entre eles, que em certo ponto abandona seu comportamento linear e se torna um platô. Essa mudança se dá no processo de hadronização e pode ser descrita em termos de quebra da *corda QCD*. A energia de interação necessária para

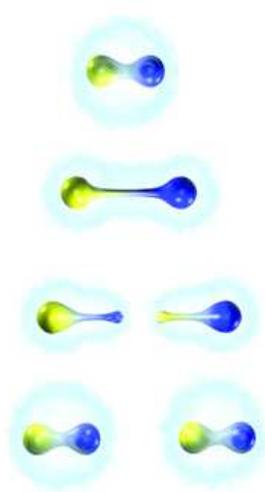


Figura 4.2: produção de mésons[?]

o início desse processo é de duas vezes a massa do quarks mais leve da teoria[8, 9, 4] e o potencial entre os quarks pode ser fitado pelo *potencial de Cornell*, que possui a forma

$$E(L) = -\frac{A}{L} + BL + F, \quad (4.18)$$

onde A é a força de Coulomb, B é a tensão da corda QCD e F fixa o potencial. Note que o formato dessa expressão é similar ao formato da equação (3.11).

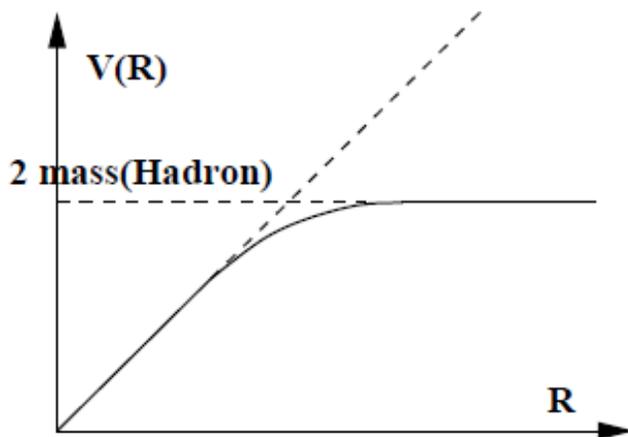


Figura 4.3: Desenho do comportamento do potencial entre quarks[41]

Devemos notar que, devido a esse comportamento análogo ao de uma corda, podemos associar o intervalo de energia onde temos uma teoria confinante à energia de

uma corda girante clássica, cuja energia potencial é dada por  $E(L) = \tau L$ , onde  $\tau$  é a tensão da corda.

A interação que mantém os quarks presos uns nos outros é a interação forte e seus mediadores são conhecidos como glúons. Os gluons são, assim como o fóton na QED, representados por um potencial quadrimensional  $A_\mu$ . No entanto, diferente do que acontece com o fóton, que é único, existem 8 glúons. Isso está relacionado com o grupo de calibre da QCD, que é o  $SU(3)$ [25].

Aqui, iremos tratar do caso em que a massa dos quarks envolvidos é muito grande ( $\rightarrow \infty$ ). Nessa aproximação, podemos abordar o problema sem necessidade de analisar sua dinâmica e de forma não-relativística, pois nesse sistema a massa dos quarks é muito maior do que seus quadrimomentos. Assim, o termo cinético pode ser descartado e consideramos a distância entre os quarks fixa. A ação toma, então, a forma[25]

$$S = \int d\tau E(L) = TE(L), \quad (4.19)$$

onde  $E(L)$  é a energia potencial presente no par quark-antiquark. Vamos impor que a interação quark-glúon tenha a forma

$$j_\mu A_\mu = \varrho A_4, \quad (4.20)$$

onde  $\varrho = \delta^{(3)}(x) - \delta^{(3)}(x - L)$ , esse termo determina a posição relativa entre o quark e o anti-quark. Dessa forma, a ação euclideana se torna

$$\begin{aligned} S &= -i \int d^4x \varrho(x) A_4(x) \\ &= -i \int_0^T d\tau (A_4(0, \tau) - A_4(L, \tau)) \\ &\stackrel{T \gg L}{=} -i \left[ \int_0^T d\tau A_4(0, \tau) + \int_0^L ds A_4(s, T) + \int_T^0 d\tau A_4(L, \tau) + \int_L^0 ds A_4(s, 0) \right] \\ &= -i \oint dx_\mu A^\mu = TE(L). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Onde tomamos um contorno fechado no espaço-tempo e consideramos  $T \gg L$  ( $T \rightarrow \infty$ ) para estabelecer a posição fixa dos quarks. Assim, pela equação (2.86), fica fácil

mostrar que

$$\langle W(C) \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} e^{i \oint_C A_\mu dx^\mu} \right\rangle = e^{-TE(L)}. \quad (4.22)$$

e o contorno descrito pelo loop de Wilson assume a forma retangular no espaço tempo.

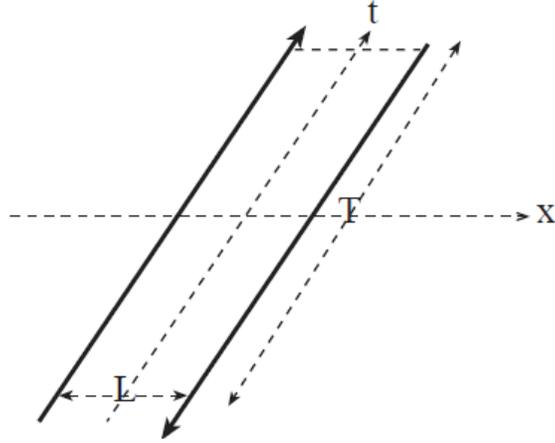


Figura 4.4: Esquema do Wilson loop[28]

A inserção de quarks em uma teoria de calibre é feita em sua representação fundamental. Apesar de  $\mathcal{N} = 4SYM$  não possuir quarks, podemos inseri-los em sua teoria dual gravitacional através das cordas abertas presas na D3-brana[8]. As pontas das cordas abertas são duais ao par quark-anti-quark e a fronteira da folha-mundo da corda aberta deve então ser cercada pelo contorno  $C$ . Assim, o contorno  $C$  descreve a

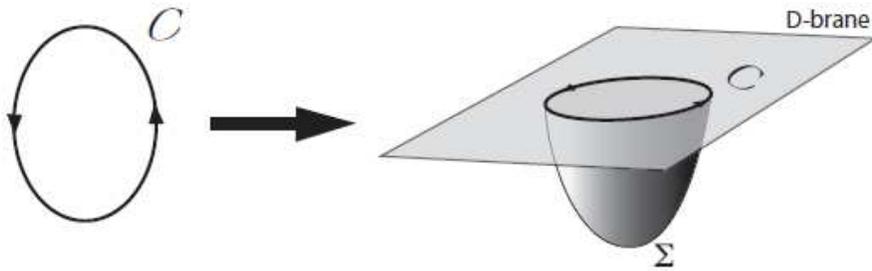


Figura 4.5: O loop de Wilson pode ser interpretado como a fronteira de uma superfície  $\Sigma$  [54]

propagação do par quark-anti-quark desde sua criação até sua aniquilação. Isso sugere que podemos identificar o valor esperado do loop de Wilson, que nos dá a função de

partição do quark sobre  $C$ , com a função de partição da folha mundo de sua corda dual. Ou seja[6],

$$\langle W(C) \rangle = Z_{corda} [\partial\Sigma = C]. \quad (4.23)$$

No limite  $N \rightarrow \infty$ , encontramos

$$Z_{corda} [\partial\Sigma = C] = e^{iS(C)} \rightarrow \langle W(C) \rangle = e^{iS(C)}, \quad (4.24)$$

onde  $S(C)$  é a ação de Nambu-Goto que satisfaz a condição de que as pontas da corda que representa o par quark-antiquark terminem sobre a curva  $C$ . Se tomarmos uma linha reta (de Wilson) na direção do tempo  $T$ , que descreve um quark isolado e estático, devemos obter

$$\langle W(C) \rangle = e^{-i\mathcal{M}T} \quad (4.25)$$

Onde  $\mathcal{M}$  é a massa do quark.

Estando associado à representação fundamental e se comportando como um fator de fase, podemos então ver o loop de Wilson como um fator de fase associado com a propagação de um quark muito massivo na representação fundamental do grupo de calibre [8]. No limite de supergravidade (limite de t'Hooft) e "Euclideanizando" a ação ( $iS \rightarrow -S$ ), para uma ação que não dependa do tempo), devemos obter uma expressão do tipo [8]

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-S} \quad (4.26)$$

Onde  $S$  é a área própria da folha mundo da corda fundamental imersa no bulk  $AdS_5 \times S^5$ . Podemos descrever o bulk como um grande número  $N$  de D3-branas em um espaço de 10 dimensões [6, 9, 10]. A ação da corda, nesse caso, é infinita porque a distância própria da fronteira ao centro do espaço  $AdS$  é infinita e isso é consistente com o fato de que quarks externos possuem massa infinita. Assim, ela deve ser regularizada e, para isso, subtraímos da ação as massas dos quarks inseridos. O loop de Wilson se torna

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-(S-2\mathcal{M}T)}. \quad (4.27)$$

Aqui,  $S$  é a ação de Nambu-Goto, e a métrica em questão é a do espaço  $AdS_5 \times S^5$ , que é dada por[6]

$$ds^2 = \alpha' \left[ \frac{U^2}{R^2} (dt^2 + dx_i dx^i) + R^2 \frac{dU^2}{U^2} + R^2 d\Omega_5^2 \right]. \quad (4.28)$$

Como a dinâmica da corda está sobre a parte  $AdS$  do espaço em questão, vamos apenas lidar com suas coordenadas  $X^\mu = (t, x_1, x_2, x_3, U)$  e abandonemos a parte  $S^5$ . Aqui, escolhemos o calibre  $t = \tau$ ,  $\sigma = x_1$  para identificarmos as coordenadas da folha-mundo com duas coordenadas e  $x_2$  e  $x_3$  são constantes. Essa é a escolha do calibre estático[15, 4], que concorda com o problema que desejamos resolver. Além disso, devemos ter  $U = U(\sigma = x)$ , pois uma só coordenada é necessária para descrever a folha mundo nessa configuração. Sendo assim, a ação de Nambu-Goto se torna

$$S = \frac{T}{2\pi} \int dx \sqrt{U'^2 + \frac{U^4}{R^4}}. \quad (4.29)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange, encontramos a equação de movimento, dada por

$$\frac{U^4}{\sqrt{(\partial_x U)^2 + \frac{U^4}{R^4}}} = \text{constante}. \quad (4.30)$$

Logo, podemos encontrar a distância entre os quarks pela integral

$$x = \frac{R^2}{U_0} \int_1^{U/U_0} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}}, \quad (4.31)$$

onde  $y = U/U_0$  e  $U_0$  é justamente onde  $U(x)$  é mínimo. Note que devemos ter  $U(\pm \frac{L}{2}) \rightarrow \infty$ , logo, encontramos

$$\frac{L}{2} = \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} = \frac{R^2}{U_0} \frac{2^{1/2} \pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)}. \quad (4.32)$$

Comparando com as equações (4.27) e (4.22), encontramos

$$E = \frac{2U_0}{2\pi} \left[ \int_1^\infty dy \left( \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - 1}} - 1 \right) - 1 \right] = -\frac{4\pi^2 (2g_{YM}^2 N)^{1/2}}{\Gamma(1/4)^4 L} \quad (4.33)$$

Note que a energia varia com o inverso da distância, isso advém do aspecto conforme da teoria.

### 4.3 Potenciais entre quarks em cenários de brana-mundo inflacionária

Desprezando os termos de radiação, podemos reescrever o fator de escala (4.17) da seguinte maneira [10]

$$a(r, t) = \tilde{U}(r)a_0(t), \quad (4.34)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r) &= \sqrt{e\gamma + \xi^2 e^{\mu r} + \chi^2 e^{-\mu r}} \\ \xi^2 &= \frac{1}{2}(1 - e\gamma - \sqrt{1 - 2e\gamma}) \\ \chi^2 &= \frac{1}{2}(1 - e\gamma + \sqrt{1 - 2e\gamma}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

com  $\gamma = 3H^2/2\sigma$  para  $e = -1$ ,  $\gamma = 3H_E^2/2\sigma$  para  $e = +1$  e

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right), \quad (4.36)$$

é a equação de Friedmann que descreve a dinâmica sobre a D3-brana.  $H_E$  é o parâmetro de Hubble euclideano. Derivando  $\tilde{U}(r)$ , encontramos

$$\tilde{U}' = \frac{1}{R_0 \tilde{U}} \sqrt{(\tilde{U}^2 - e\gamma)^2 - 4\xi^2 \chi^2}. \quad (4.37)$$

Logo, encontramos o infinitésimo de  $r$  dado por

$$dr = \frac{1}{\tilde{U}'} d\tilde{U} = \frac{R_0 \tilde{U}}{\sqrt{(\tilde{U}^2 - e\gamma)^2 - 4\xi^2 \chi^2}} d\tilde{U}, \quad (4.38)$$

onde  $R_0^2 = \alpha' R^2$ . Aqui, por conveniência, vamos reescrever  $\tilde{U} = \frac{\alpha}{R_0} U$ . Assim, as dimensões das grandezas relacionadas se tornam:  $[\alpha'] = (\text{comprimento})^2$ ,  $[U] = (\text{comprimento})^{-1}$ ,  $[R] = 1$ ,  $[\vec{x}] = [\tau] = (\text{comprimento})$ . Tais transformações vão se mostrar fundamentais quando encontramos os objetos relevantes nesse estudo devido à forma "simples" em que serão reescritos. Realizando as mesmas transformações para

reescrever o termo  $dr$ , obtemos

$$\begin{aligned}
dr &\rightarrow \frac{R_0 \left(\frac{\alpha'}{R_0}\right) U}{\sqrt{\left(\frac{\alpha'^2}{R_0^2} U^2 - e\gamma\right)^2 - 4\xi^2 \chi^2}} \left(\frac{\alpha'}{R_0}\right) dU \\
&= R_0 \frac{U}{\sqrt{\left(U^2 - e\gamma \frac{R_0^2}{\alpha^2} - 2|\xi\chi| \frac{R_0^2}{\alpha^2}\right) \left(U^2 - e\gamma \frac{R_0^2}{\alpha^2} + 2|\xi\chi| \frac{R_0^2}{\alpha^2}\right)}} dU \\
&= R_0 \frac{U}{\sqrt{(U^2 - C'_+) (U^2 - C'_-)}} dU \tag{4.39}
\end{aligned}$$

com  $C'_\pm = (e\gamma \pm 2|\xi\chi|) \frac{R_0^2}{\alpha^2}$ . Agora, redefinindo  $U = |U_0|y^1$ , temos

$$dr = R_0 \frac{y}{\sqrt{(y^2 - C_+) (y^2 - C_-)}} dy \tag{4.40}$$

com  $C_\pm = \frac{C'_\pm}{U_0^2} = (e\gamma \pm 2|\xi\chi|) \frac{R^2}{\alpha' U_0^2}$ . Seguindo o processo de forma similar, o elemento de arco toma a forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= U^2 edt^2 + U^2 a_0^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j + dr^2 \\
&= \frac{\alpha'}{R^2} U_0^2 y^2 (edt^2 + a_0^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j) + \frac{\alpha' R^2 y^2}{(y^2 - C_+) (y^2 - C_-)} dy^2 \\
&= \alpha' \left[ \frac{U_0^2}{R^2} y^2 (edt^2 + a_0^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j) + \frac{R^2 y^2}{(y^2 - C_+) (y^2 - C_-)} dy^2 \right] \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\xi^2 \chi^2 &= \frac{1}{4} \left(1 - e\gamma - \sqrt{1 - 2e\gamma}\right) \left(1 - e\gamma + \sqrt{1 - 2e\gamma}\right) \\
&= \frac{1}{4} [(1 - e\gamma)^2 - |1 - 2e\gamma|] \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\xi\chi| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2e\gamma + \gamma^2 - |1 - 2e\gamma|}. \tag{4.43}$$

Para evitarmos dificuldades com singularidades na métrica, devemos ter  $C_\pm \leq 0$ .

Assim, por simplicidade, vamos escolher  $e = -1$ . Então,  $|\xi\chi| = \frac{\gamma}{2}$  e  $C_\pm = (\pm 1 - 1) \frac{\gamma R^2}{\alpha' U_0^2}$

e a métrica se torna

$$ds^2 = \alpha' \left[ \frac{U_0^2}{R^2} y^2 (-dt^2 + a_0^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j) + \frac{R^2}{y^2 + C} dy^2 \right] \tag{4.44}$$

---

<sup>1</sup>Nesse trabalho não usamos  $U_0$  em si, mas comente o módulo dele. Então, de agora em diante usaremos somente  $U_0$  como sendo seu módulo. isso deve ficar subentendido

com  $C = \frac{2\gamma R^2}{\alpha' U_0^2}$ . Essa métrica difere da métrica de um espaço  $AdS_5$  pela presença do parâmetro de inflação  $C$  e é evidente que esse termo quebra a simetria  $SO(2, 4)$  da teoria. Assim, o fato de trabalharmos com uma teoria inflacionária implica na quebra do caráter conforme da mesma. Entretanto, consideramos o caso em que o termo  $C$  deforma o espaço  $AdS$  mas a maioria dos ingredientes da correspondência  $AdS/CFT$  se mantém. Em particular, a relação entre o loop de Wilson e a área da folha-mundo se mantém.

Nessa configuração, a distância entre os quarks é dada por [28]

$$L = 2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{g(\tau, r)}{f(\tau, r)} \frac{f(\tau, r)}{\sqrt{f^2(\tau, r) - f^2(\tau, r_0)}}, \quad (4.45)$$

onde  $g^2(\tau, r) = g_{00}g_{rr} = eU^2$  e  $f^2(\tau, r) = g_{00}g_{xx} = eU^4 a_0^2$ . Daí,

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \sqrt{\frac{eU^2}{eU^4 a_0^2}} \frac{\sqrt{eU_0^4 a_0^2}}{\sqrt{eU^4 a_0^2 - eU_0^4 a_0^2}} \\ &= \frac{L_0}{a_0(t)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde

$$L_0 = 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{1}{U} \frac{U_0^2}{\sqrt{U^4 - U_0^4}} \quad (4.47)$$

Mais uma vez, trabalhando pra encontramos uma melhor forma para  $L_0$ , encontramos

$$\begin{aligned} L_0 &\rightarrow 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{1}{\frac{\alpha'}{R_0} U} \frac{\frac{\alpha'^2}{R_0^2} U_0^2}{\sqrt{\frac{\alpha'^4}{R_0^4} U^4 - \frac{\alpha'^4}{R_0^4} U_0^4}} \\ &= 2 \frac{R_0}{\alpha'} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{1}{U} \frac{U_0^2}{\sqrt{U^4 - U_0^4}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

e redefinindo  $U = U_0 y$ , finalmente, obtemos

$$L_0 = 2 \frac{R_0^2}{\alpha' U_0} \int_1^{U_1/U_0} \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{y^4 - 1}} \frac{y}{\sqrt{(y^2 - C_+)(y^2 - C_-)}} dy \quad (4.49)$$

Note que, quando  $\gamma = 0$ , nos deparamos com o mesmo caso estudado na referência [8].

Escolhendo a assinatura lorentziana e  $\gamma \leq 1/2$ , obtemos

$$L_0 = 2 \frac{R_0^2}{\alpha' U_0} \int_1^{U_1/U_0} \frac{1}{y\sqrt{y^4 - 1}} \frac{1}{\sqrt{y^2 + C}} dy \quad (4.50)$$

Podemos expandir o fator dependente de  $C$  presente na integral (4.50) em termos de  $C/y^2$ .

$$\frac{1}{\sqrt{y^2 + C}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - (-C)}} = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{C^n}{y^{2n}}, \quad (4.51)$$

Logo, reescrevendo  $L_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} L_0 &= 2 \frac{R_0^2}{\alpha' U_0} \int_1^{U_1/U_0} \frac{1}{y \sqrt{y^4 - 1}} \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{C^n}{y^{2n}} dy \\ &= 2 \frac{R_0^2}{\alpha' U_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n C^n \int_1^{U_1/U_0} \frac{y^{-(2n+4)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^4}}} dy \\ &= 2 \frac{R_0^2}{\alpha' U_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n C^n I_n, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$  (coeficientes da expansão em Série de Taylor da função  $1/\sqrt{1-x}$ ), para  $n \geq 1$  e definimos

$$I_n \equiv \int_1^{\frac{U_1}{U_0}} dy \frac{y^{-(2n+4)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^4}}} \quad (4.53)$$

Aqui, vamos tomar o limite  $U_1 \rightarrow \infty$ , esse limite é equivalente a tomar as massas dos quarks infinitas. Nesse limite, obtemos

$$I_n \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{3n} n!}{(2n+1)!} \Gamma\left(\frac{2n+3}{4}\right)^2 \quad (4.54)$$

Logo, inserindo a equação acima na (4.50), encontramos a seguinte forma para a expressão que descreve a distância entre-quarks

$$L_0 \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} \frac{2R_0^2}{\alpha' U_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{2n+3}{4}\right)^2}{(2n+1)n!} (2C)^n \quad (4.55)$$

Essa expressão indica que a distância entre os quarks depende também do parâmetro de inflação.

Encontramos a energia que mantém os quarks juntos a partir do loop de Wilson. Precisamos, então, calcular a ação associada ao nosso sistema. Podemos seguir o mesmo procedimento usado para simplificação de  $L_0$  para descrever a ação associada aos quarks pesados [10, 28]. A ação, devido a presença de quarks com massa infinita,

deve ser divergente. De fato, temos

$$\begin{aligned}
S &= 2 \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_0}^{r_1} \int_0^T dr d\tau \frac{g(\tau, r) f(\tau, r)}{\sqrt{f^2(\tau, r) - f^2(\tau, r_0)}} \\
&= 2 \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_0}^{r_1} \int_0^T dr d\tau \frac{U^3}{\sqrt{eU^4 - eU_0^4}} \\
&= 2 \frac{T}{2\pi\alpha'\sqrt{e}} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{U^3}{\sqrt{U^4 - U_0^4}}, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

onde aplicamos uma integração em um certo intervalo de tempo que denotamos por

$T$ . Aplicando a transformação  $U \rightarrow \frac{\alpha'}{R_0} U$ , obtemos

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow 2 \frac{T}{2\pi\alpha'\sqrt{e}} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{\left(\frac{\alpha'}{R_0} U\right)^3}{\sqrt{\frac{\alpha'^4}{R_0^4} U^4 - \frac{\alpha'^4}{R_0^4} U_0^4}} \\
&= 2 \frac{T}{2\pi R_0 \sqrt{e}} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{U^3}{\sqrt{U^4 - U_0^4}} \tag{4.57}
\end{aligned}$$

e redefinindo  $U = U_0 y$ , encontramos

$$S = 2 \frac{TU_0}{2\pi\sqrt{e}} \int_1^{U_1/U_0} \frac{y^4}{\sqrt{y^4 - 1}} \frac{1}{\sqrt{(y^2 - C_+)(y^2 - C_-)}} dy \tag{4.58}$$

Escolhendo  $e = -1$  e  $\gamma \leq 1/2$  a ação toma a forma

$$\begin{aligned}
S &= 2 \frac{TU_0}{2\pi i} \int_1^{U_1/U_0} \frac{y^3}{\sqrt{y^4 - 1}} \frac{1}{\sqrt{y^2 + C}} dy \\
&= 2 \frac{TU_0}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n C^n A_n \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Onde

$$A_n = \int_1^{\frac{U_1}{U_0}} dy \frac{y^{-2n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^4}}} \tag{4.60}$$

Para  $n \geq 1$  e no limite de massa infinita ( $U_1 \rightarrow \infty$ ) obtemos

$$A_n \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} \frac{2^{3n}}{16\sqrt{2\pi}} \frac{(2n-1)n!}{(2n)!} \Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)^2 \tag{4.61}$$

Logo

$$S \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} 2 \frac{TU_0}{2\pi i} \left[ \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^4}}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \Gamma\left(\frac{2n+3}{4}\right)^2}{(2n-1)n!} C^n \right] \tag{4.62}$$

Vamos definir

$$f_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{2n+3}{4}\right)^2}{(2n \pm 1)n!} (2C)^n \quad (4.63)$$

A massa (infinita) de cada quark é dada por

$$\begin{aligned} M_q &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{r_1} g(r) dr \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{r_1} \sqrt{eU^2} dr \end{aligned} \quad (4.64)$$

Repetindo o processo feito anteriormente para obter as expressões da distância entre quarks e da ação, obtemos

$$M_q \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} i \frac{U_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 + C}} dy \quad (4.65)$$

Note que essa integral é sempre divergente. Esse fato será útil quando regularizarmos a ação que, por sinal, também é divergente. Nessa configuração, a massa dos quarks presentes na teoria dependem do parâmetro de expansão. Assim,

$$\begin{aligned} M_q \stackrel{U_1 \rightarrow \infty}{=} & i \frac{U_0}{2\pi} \left[ \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{y^2 + C}} dy + \int_1^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 + C}} dy \right] \\ &= i \frac{U_0}{2\pi} \left[ -\sqrt{C} + \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y^2 + C} \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$= i \frac{U_0}{2\pi} \left[ -\sqrt{C} + \int_0^{\infty} dy \right] \quad (4.67)$$

onde usamos o fato de  $C$  ser uma constante no termo divergente. Vamos também definir

$$m_q \equiv \frac{U_0}{2\pi} \sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \sqrt{\gamma} \quad (4.68)$$

O loop de Wilson com assinatura Lorentziana, nesse caso, é

$$\langle W(C) \rangle = e^{-i(2M_q + E(L_0))T} = e^{iS(C)} \quad (4.69)$$

Logo podemos calcular diretamente a energia entre os quarks separados por uma

distância  $L_0$ , sendo  $f_-^{(n=1)}$  a função (4.63) tomada a partir do termo em que  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned}
-E(L_0)T &= S + 2M_q T \\
-E(L_0) &= -i\frac{U_0}{\pi}\sqrt{C} + i\frac{U_0}{\pi} \left[ \underbrace{-\left[ \int_1^{\frac{U_1}{U}} dy \left( \frac{y^2}{\sqrt{y^4-1}} - 1 \right) - 1 \right]}_{\Gamma(3/4)^2/\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_-^{(n=1)} \right] \\
E(L_0) &= i\frac{U_0}{\pi}\sqrt{C} - i\frac{U_0}{\pi} \left[ \Gamma(3/4)^2/\sqrt{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_-^{(n=1)} \right] \\
&= 2im_q - i\frac{U_0}{\pi} \left[ \Gamma(3/4)^2/\sqrt{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_-^{(n=1)} \right] \tag{4.70}
\end{aligned}$$

A energia euclideana é dada pela transformação  $E \rightarrow -iE(iT)$ . Como a energia potencial aqui estudada é constante no tempo, encontramos, finalmente,

$$E(L_0) = 2m_q - \frac{U_0}{\pi\sqrt{2\pi}} \left[ \Gamma(3/4)^2 + f_-^{(n=1)} \right] \tag{4.71}$$

Podemos colocar essa expressão em uma forma mais compacta, mas, da forma como está escrita, é melhor a visualização dos termos que dependem e dos termos que não dependem do cenário cosmológico. Para encontrarmos  $E$  como função explícita de  $L_0$ , basta escrevermos  $U_0(L_0)$ , mas isso pode ser trabalhoso.

Aqui, devido a simplicidade, vamos analisar o limite onde, de fato, podemos desprezar a forma como a distância entre os quarks depende do parâmetro de inflação. Note que a expressão (4.55) difere muito pouco da expressão que encontraríamos em um espaço de Minkowski ( $\gamma = 0$ ) para  $\gamma \ll 1$ . Podemos tentar visualizar essa aproximação da seguinte forma: imagine uma malha com alta tensão esticada, mas não de forma homogênea, na qual jogamos um haltere em cima. A malha pode ser vista como o espaço-tempo, enquanto o haltere representa o par quark-antiquark pesado que inserimos na teoria. Ou seja, o haltere sente a deformação da malha, mas a influência dessa não é suficiente para deforma-lo. A tensão da malha é grande o suficiente para que possamos desprezar a deformação exercida pelo halter na malha, mas sentimos o aumento da massa, num todo.

Traduzindo: estamos colocando um par quark-antiquark pesado em um espaço-tempo deformado, de forma que a configuração energética do sistema é alterada. Estamos desprezando os efeitos da deformação provocada pela constante cosmológica sobre a distância entre os quarks, mas não desprezamos a influência de tal deformação na energia que mantém os quarks juntos.

A distância entre os quarks, na aproximação feita, é dada por

$$L_0 = \frac{2R^2}{U_0\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (4.72)$$

Tomando  $C \ll 1$  e abandonando os termos de ordem  $\mathcal{O}(C^2)$  (ou  $\mathcal{O}(\gamma^2)$ ), o potencial entre quarks toma a forma

$$E(L_0) = 2m_q - \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \left[ \Gamma(3/4)^2 U_0 - 4\Gamma(5/4)^2 \frac{R^2}{\alpha'} \frac{1}{U_0} \right], \quad (4.73)$$

onde usamos  $C = \frac{2\gamma R^2}{\alpha'} \frac{1}{U_0^2}$ . Retirando o termo  $U_0$  da expressão usando a expressão 4.72, obtemos

$$E(L_0) = 2m_q - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4 R^2}{\pi^2 L_0} + \frac{2\Gamma(5/4)^2 L_0}{\pi \Gamma(3/4)^2 \alpha'} \gamma, \quad (4.74)$$

onde  $m_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \sqrt{\gamma}$ . Sabemos que o potencial entre-quarks satura em uma escala de energia da ordem de duas vezes a massa do quarks mais leve da teoria depois de um período de confinamento. Assim, a deformação induzida no espaço  $AdS_5$  pela constante cosmológica força o aparecimento de uma grandeza que se comporta como um novo quark, de massa finita, que serve de limite de saturação para o potencial e induz o intervalo onde a teoria é confinante, já encontrado anteriormente na referência [10].

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho computamos o potencial entre quarks no contexto holográfico em cenários cosmológicos. Nossos resultados mostram que produzimos fases de confinamento e deconfinamento na formação de pares de mésons (hadronização)[30, 40, 41, 42]. A presença de sabores se dá justamente devido ao regime de quarks de massas leves cujas massas são controladas por uma constante cosmológica muito pequena. A presença da constante cosmológica na brana deforma o espaço AdS em 5d. Essa deformação desenvolve o papel de uma ‘brana de sabor’ como acontece em teorias fora de cenários cosmológicos.

Nossa perspectiva é obter estudos mais detalhados sobre a espectroscopia de mésons via cordas girantes em cenários cosmológicos. Estes estudos levarão em conta o cálculo das trajetórias de Regge (a qual considera as massas como uma função da raiz quadrada do spin da corda girante)[30, 40]. Resultados preliminares têm demonstrado uma relação entre o ângulo de Regge e a constante cosmológica, bem como a existência de hadronização para constante cosmológica suficientemente pequena. Este é um assunto pretendemos concluir num futuro próximo[43].

# Bibliografia

- [1] CAPRIA, M.M. *Physics before and after Einstein*. IOS press, 2005.
- [2] SCHWARZ, Jonh H. *The Early History of String Theory and Supersymmetry*. CALT **68** (2012) E-print: physics.hist-ph/1201.0981
- [3] POLCHINSKI, Joseph *String Theory Volume I. Superstrings and beyond*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] ZWIEBACH, Barton. *A First Course in STRING THEORY*, 2ed. Cambridge University Press, 2009.
- [5] POLCHINSKI, Joseph *String Theory Volume II. Superstrings and beyond*. Cambridge University Press, 1998.
- [6] MALDACENA, Juan. *The Large N limit of Superconformal field theories and supergravity*. Int. J. Theor. Phys., **38** 1113 (1999). E-print: hep-th/9802042
- [7] ITZHAKI, Nissan; MALDACENA, Juan; SONNENSCHNEIN, Jacob; YANKIELLOWICZ, Shinon. *Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges*. Phys. Rev. D, **58** 046004 (1998). E-print: hep-th/9802042v3
- [8] MALDACENA, Juan. *Wilson loops in large N field theories*. Phys. Rev. Lett, **80** 4859 (1998). E-print: hep-th/9803002
- [9] REY, S.J., YEE, J.T. *Macroscopic Strings as heavy quarks: Large N gauge theory and anti-de Sitter Supergravity*. Eur. Phys. J.C **22** 379 (2001) E-print: hep-th/9803001

- [10] BAROSI, Luciano.; BRITO, Francisco A.; QUEIROZ, Amilcar R. *Holographic description of heavy-quark potentials in an inflationary braneworld scenario*. JHEP, 4 030 (2009). E-print: hep-th/0812.4841
- [11] AHARONY, Ofer; GUBSER, Steven S.; MALDACENA, Juan.; et. al. *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*. Phys.Rept. **323** 183 (2000). E-print: hep-th/9905111v3
- [12] BLUMENHAGEN, Ralph.; PLAUSCHINN, Erick. *Lectures notes in Physics 779: Introduction to Conformal Field Theory with applications to String Theory*. Springer, 2009.
- [13] GINSPARG, Paul. *Applied Conformal Field Theory*. E-print:hep-th/91088028v1.
- [14] TONG, David. *String Theory: University of Cambridge Part III Mathematical Tripos*. E-print:<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>.
- [15] NASTASE, Horatiu. *Lectures: Introduction to AdS/CFT*. Global Edge Institute, Tokyo Institute of Technology. 2007.
- [16] CARROLL, Sean. *The Cosmological Constant*. Living Review Relativity,3 (2001),1. E-print: [www.livingreviews.org/lrr-2001-1](http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1).
- [17] FRIEDMANN, Aleksandr. *On the Curvature of Space*. E-print (versão traduzida para o inglês): [www.phy.princeton.edu/~steinh/ph563/friedmann](http://www.phy.princeton.edu/~steinh/ph563/friedmann).
- [18] MOSCHELLA. *The de Sitter ans anti-de Sitter Sightseeing Tour*. E-print: <http://www.bourbaphy.fr/moschella.pdf>.
- [19] BENGTTSSON, Ingemar. *ANTI-DE SITTER SPACE..* E-print: [www.fysik.su.se/~ingemar/Kurs](http://www.fysik.su.se/~ingemar/Kurs).
- [20] BENGTTSSON, Ingemar; SANDIN, Patrik. *ANTI-DE SITTER SPACE, SQUASHED AND STRETCHED..* E-print: gr-qc/0509076v2.

- [21] GIBBONS, G.W. *Anti-de Sitter spacetime and it uses* (2011) E-print: hep-th/1110.1206v1.
- [22] BAYONA, C.A., Nelson R.F.Braga *Anti-de Sitter boundary in Poincarè coordinates*. E-print: hep-th/0512182.
- [23] CASALDERREY-SOLANA, Jorge, et. al. *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*. CERN-PH-TH-2010-316, MIT-CTP-4198, ICCUB-10-202 (2011) E-print:hep-th/1101.0618
- [24] LUCINI, B. PANERO, M. *SU(N) gauge theories at large N*. Phys. Rep. **26** 093 (2013) E-print: hep-th/1210.4997
- [25] GREINER, W. SCHRAMM, S. STEIN, E. *QUANTUM CHROMODYNAMICS*, second edition. Springer, 2002.
- [26] MAKEENKO, Y. *Large N Gauge Theories*. M-Th. and Quant. Geo. (2000) - Springer. E-print: hep-th/0001047
- [27] ERDMENGER, Johanna. *Introduction to gauge gravity duality*. Lecture Notes in Physics **851** 099 (2012) E-print: <http://wwwth.mpp.mpg.de/members/olivers/AdSCFT-2010-01-22>
- [28] SONNENSCHNEIN, Jacob. *Stringy Confining Wilson Loops*. JHEP Proceedings, 2000. E-print: hep-th/0009146v1
- [29] BRANDHUBER, A. ITZHAKI, N. SONNENSCHNEIN, J. YANKIELOWICZ, S. *Wilson loops in large N Limit at Finite Temperature*. Phys. Lett. B **434** 036 (1998) E-print: hep-th/9803137
- [30] ERDMENGER, Johanna; Nick Evans; Ingo Kirsh; Ed Threfall. *Mesons in Gauge/Gravity Duals: A review*. Eur. Phys. J. A **35** 081 (2008) E-print: hep-th/0711.4467v2

- [31] KLEBANOV, Igor R. *TASI Lectures: Introduction to the AdS/CFT Correspondence* E-print: hep-th/0009139
- [32] RANDALL, L. SUNDRUM, R. *A large mass hierarchy from a small extra dimension* Phys. Rev. Lett. **83** 3370 (1999)
- [33] RANDALL, L. SUNDRUM, R. *An Alternative to compactification* Phys. Rev. Lett. **83** 4690 (1999)
- [34] DVALI, Gia; HENRY TYE, S.-H. *Brane inflation*. Phys. Lett. B **450** 072 (1999) E-print: hep-th/9812483
- [35] BINÉTRUY, Pierre; DEFFAYET, Cédric; ELLWANGER, Ulrich; LANGLOIS, David. *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*. Phys. Lett. B **477** 285 (2000) E-print: hep-th/9910219
- [36] BINÉTRUY, Pierre; DEFFAYET, Cédric; LANGLOIS, David. *Non-conventional cosmology from a brane universe*. Phys. Lett. B **565** 269 (2000) E-print: hep-th/9905012
- [37] DEFFAYET, Cédric. *Cosmology on a brane in Minkowski bulk*. Phys. Lett. B **502** 199 (2001) E-print: hep-th/0010186
- [38] LANGLOIS, David. *Brane Cosmology: an introduction*. (2002) E-print: hep-th/0209261
- [39] KRAUS, Per. *Dynamics of anti-de Sitter domain walls*. JHEP **011** 011 (1999) E-print: hep-th/9910149
- [40] KRUCZENSKI, Martin; MATEOS, David; Myers, Robert C.; WINTERS, David J.. *Meson spectroscopy in AdS/CFT with flavour*. JHEP, **3** (2003) E-print: hep-th/0304032

- [41] KARCH, Andreas; KATZ, Emanuel; WEINER, Neal. *Hadron Masses and Screening from AdS Wilson Loops*. Phys.Rev.Lett. **90** 091601 (2003) E-print:hep-th/0211107
- [42] MARKUM, H. *Confinement and Hadronization*. Phys. Let. B **173** 337 (1986)
- [43] L. Barosi, F.A. Brito, A.R. Queiroz, D.C. Moreira. *Trabalho em andamento*.
- [44] ZAFFARONI, Alberto. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence* Class. Quantum Grav. **17** 3571 (2000) E-print: <http://laces.web.cern.ch/Laces/LACES09/notes/dbranes/lezioniLosanna.pdf>
- [45] GUBSER, Steven S.; KARCH, Andreas. *From gauge-string duality to strong interactions: A Pedestrian's Guide*. Annual Review of Nuclear and Particle Science **59** 145 (2009) E-print: hep-th/0901.0935
- [46] GONZÁLEZ, P.; MATHIEU, V. *Heavy meson interquark potential*. Phys. Rev. D **84** 114008 (2011) E-print: hep-th/1108.2347
- [47] ALBACETE, Javier L.; KOVCHegov, Yuri.; TALIoTIS, Anastasios. *Heavy-quark potential at finite temperature using the holographic correspondence*. Phys. Rev. D **78** 115007 (2008) E-print: hep-th/0807.4747
- [48] Mark B. Wise. COURSE: *Heavy Quark Physics*. E-print: hep-th/9805468v1
- [49] GUTH Alan H. *Dynamics of False-Vacuum Bubble*. Phys. Rev. D **35** 1747 (1987).
- [50] DOSCH, H.G. SIMONOV, Y.A. *The are law of the Wilson Loop and Vacuum Field Correlators*. Phys. let. B **205** 339 (1988).
- [51] SUSSKIND, Leonard; LINDESAY, JAMES. *An Introduction To BLACK HOLES INFORMATION and the STRING THEORY REVOLUTION, The Holographic Universe*. Word Scientific, 2005.

- [52] JUGEAU, Frédéric. *Hadron potentials within the gauge/string correspondence* (2010) E-print: hep-th/0812.4903.
- [53] KOVCHEGOV, Y.V. *AdS/CFT applications to relativistic heavy ions collisions: a brief review* (2012) E-print: hep-th/1112.5403.
- [54] RAMALHO, A.V. *Introduction to AdS/CFT correspondence* (2013) E-print: hep-th/13104319.