



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Mapeamento de Sistemas Quânticos Invariantes de  
Forma Via Deformação de Campos Clássicos**

por

**Érico Vinicius**

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Dezembro, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Érico Vinicius

Mapeamento de Sistemas Quânticos Invariantes de Forma Via  
Deformação de Campos Clássicos

Dissertação de mestrado apresentada  
à Coordenação do Programa de Pós-  
graduação em Física da Universidade  
Federal de Campina Grande como parte  
dos requisitos para a obtenção do grau  
de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Victor Afonso

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Dezembro, 2014

L533m Leite, Érico Vinicius Bezerra.  
Mapeamento de sistemas quânticos invariantes de forma via  
deformação de campos clássicos / Érico Vinicius Bezerra Leite. –  
Campina Grande, 2014.  
71 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso".  
Referências.

1. Física Quântica. 2. Sistemas Quânticos. 3. Invariância de Forma –  
Método de Deformação. I. Afonso, Victor Ignacio. II. Título.

CDU 530.145(043)

**ÉRICO VINICIUS BEZERRA LEITE**

**MAPEAMENTOS DE SISTEMAS QUÂNTICOS INVARIANTES DE FORMA  
VIA DEFORMAÇÃO DE MODELOS CLÁSSICOS DE CAMPOS**

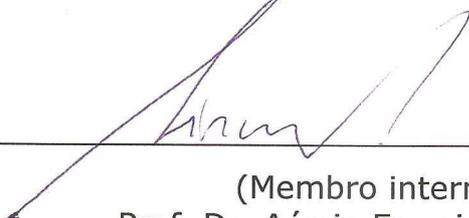
Dissertação aprovada em 18/12/2014

**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)  
Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro interno)  
Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro externo)  
Prof. Dr. Laércio Losano  
Departamento de Física - UFPB

*“Na hora certa a luz sempre brilha”.*

# Dedicatória

*À minha mãe querida.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, que me deu apoio e incentivo em todo meu percurso, além de proporcionar momentos de extrema alegria, sempre que nos reunimos. Em especial a minha mãe, a qual hoje habita em um plano mais sutil, mas me olha com grande alegria. Aos amigos da resistência, os quais tenho orgulho de fazer parte, por dividir ideias, histórias e, sem dúvida, tem um papel importante na minha formação pessoal. A minha companheira Elba. Ao meu amigo Carlos Veras, por sua instrução moral, filosófica e espiritual. Por toda sua ajuda e conhecimento, o qual me fez melhorar como pessoa (mas ainda há muito trabalho a ser feito). Aos amigos Paulinho, Pablo, Téssio, Messias, Rafael, Mayara (minha irmãzinha), Renato e Jairo, por toda a nossa convivência, nesse tempo que residi em Campina Grande.

Devo agradecer também aos amigos da unidade acadêmica de física, onde passei um parte importante da minha vida e me proporcionaram boas histórias. Em especial ao professor Victor, pela paciência, por contribuir diretamente para minha formação acadêmica, pelo apoio e conselhos dados. Ao professor Aécio, o qual tenho grande admiração. Aos professores Precker e Suassuna. Ao professor Wilson Hugo, pela iniciação nas pesquisas.

Agradeço ao pessoal das antigas Reação Core e Metal Milícia, ao Velho Rabugento (Edilson Ramos) e à todos os meus amigos de São José do Egito.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Em nosso trabalho, estudamos sistemas de campos escalares reais ordinários. Analisamos as configurações estáticas, o que nos levam a equações diferenciais de segunda ordem não lineares. As soluções dessas equações, chamadas de defeitos, podem possuir um caráter topológico, nos levando a dois tipos de defeito: topológicos e não topológicos. Em seguida, falamos sobre o método de Bogomol'nyi, que, para potenciais não-negativos, nos possibilita solucionar as equações de movimento por meio de uma equação diferencial de primeira ordem.

Estudamos a estabilidade da solução através de perturbações a ordem linear em torno dela, o que possibilita separar a equação de movimento do campo perturbação, em parte temporal e parte espacial. Dessa segunda parte chegamos ao que chamamos operador flutuação, que governa as oscilações quânticas em torno da solução clássica.

Esse procedimento pode ser invertido, isto é, é possível construir modelos clássicos de campos, partindo da equação de estabilidade, o que é de suma importância para o objetivo da nossa pesquisa. No nosso trabalho fizemos a reconstrução dos modelos clássicos para vários sistemas quânticos, identificando suas hamiltonianas como operadores flutuação.

Um outro ponto abordado, foi o método de deformação. Através dele é possível realizar o mapeamento entre potenciais de campos escalares, via uma função deformação. Esse novo

---

potencial, o potencial deformado, é descrito em termos do potencial inicial e de suas soluções. O método permite gerar uma infinidade de modelos novos com características distintas dos originais, mas permite, até certo ponto, controlar características como a energia e a largura dos defeitos.

Em seguida, revisamos a mecânica quântica super-simétrica e os seus potenciais parceiros supersimétricos. Esses potenciais são obtidos por meio da fatorização das hamiltonianas, sendo possível criar toda uma hierarquia de hamiltonianas, que apresenta uma degenerescência do espectro de energia. Certos potenciais parceiros apresentam uma característica especial, chamada de invariância de forma.

A invariância de forma é obtida fazendo uma mudança nos parâmetros do potencial, o que leva a um potencial de mesmo formato mas com um acréscimo de energia.

Essa propriedade é uma condição de integrabilidade, o que garante que sistemas quânticos baseados em potenciais invariantes de forma são solucionáveis.

No presente trabalho buscamos estabelecer um novo tipo de mapeamento, entre potenciais quânticos com invariância de forma, utilizando a deformação de campos clássicos.

Uma outra característica muito interessante dos potenciais invariantes de forma, e que foi ponto de partida para o presente trabalho, é que todos os potenciais invariantes de forma conhecidos, podem ser mapeados entre eles por meio de transformações canônicas, dos parâmetros e coordenadas pontuais

Para isso, fizemos o mapeamento entre os potenciais supersimétricos, reconstruímos um modelo de campo para cada potencial e fizemos o mapeamento do modelos de campos, por meio do método de deformação. Desta maneira, conseguimos uma relação fechada envolvendo uma parte clássica e uma quântica.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas de um Campo Escalar Real</b>	<b>8</b>
2.1	Modelos de um campo . . . . .	8
2.1.1	Energia . . . . .	9
2.2	Soluções Tipo Defeito . . . . .	9
2.2.1	Defeitos Topológicos e Não-Topológicos . . . . .	10
2.2.2	Defeito Topológico tipo “kink” do Modelo $\phi^4$ . . . . .	11
2.2.3	Defeito Não Topológico tipo “lump” do Modelo $\phi^4$ invertido . . . . .	12
2.3	Método de Bogomol’nyi s Soluções BPS . . . . .	13
2.3.1	Super-potencial . . . . .	14
2.4	Estabilidade linear . . . . .	14
2.4.1	Estabilidade das soluções BPS . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Reconstrução de Modelos de Campos Escalares à Partir da Equação de Estabilidade</b>	<b>17</b>
3.1	Modo Zero do Operador Flutuação . . . . .	17
3.2	Reconstruindo os Modelos de Campos . . . . .	18
3.3	Reconstrução de Novos Modelos . . . . .	20
3.3.1	Oscilador 3D . . . . .	20
3.3.2	Rosen-Morse I . . . . .	21
3.3.3	Scarf I (Trigonométrico) . . . . .	22
3.3.4	Pöschl-Teller . . . . .	23

3.3.5	Morse . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Método de Deformação</b>	<b>27</b>
4.1	O Procedimento . . . . .	28
4.2	O que é o Modelo Deformado? . . . . .	28
4.3	Exemplo de Aplicação . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Mecânica Quântica Supersimétrica</b>	<b>32</b>
5.1	Fatorização de Hamiltonianas e degenerescência espectral . . . . .	33
5.2	Formulação supersimétrica da mecânica quântica . . . . .	35
5.3	Hierarquia de Hamiltonianos . . . . .	37
5.4	Invariância de Forma e Potenciais Solucionáveis . . . . .	39
5.4.1	Categorização de SIP's . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Mapeamento de Potenciais SUSY via Deformação de Campos</b>	<b>45</b>
6.1	Mapeamento de Potenciais Parceiros via Transformações Canônicas Pontuais . . . . .	45
6.2	Deformação de Potenciais Parceiros . . . . .	46
6.2.1	Scarf II (hiperbólico) $\rightarrow$ Morse . . . . .	47
6.2.2	Pöschl-Teller $\rightarrow$ Morse . . . . .	48
6.2.3	Scarf II (hiperbólico) $\rightarrow$ Morse Modificado . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Interpretação BPS da Invariância de Forma</b>	<b>52</b>
7.1	Supersimetria com Cargas Centrais . . . . .	53
7.1.1	A Origem Algébrica da Invariância de Forma . . . . .	54
7.2	Caráter BPS da Invariância de Forma . . . . .	57
<b>8</b>	<b>Comentários e Perspectivas</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

2.1	À esquerda temos o gráfico do potencial $\phi^4$ e à direita o gráfico da solução $\phi(x)$ ( $b = 0$ ), ambos com $a = 1$ e $\lambda = 2$ . . . . .	12
2.2	À esquerda temos o gráfico do potencial $\phi^4$ invertido, com $c = 1$ e $\lambda = 2$ . À direita o gráfico da solução $\phi(x)$ , com $a = 1$ . . . . .	13
3.1	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao oscilador e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	21
3.2	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Rosen-Morse I e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	22
3.3	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Rosen-Morse I, dado em [1], e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	23
3.4	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Scarf I e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	24
3.5	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Poschl-Teller e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	24
3.6	À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Morse e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial. . . . .	25
4.1	À esquerda temos o gráfico de $\phi^6$ , onde a linha contínua é referente ao modelo original e linha tracejada ao modelo deformado. À direita o gráfico da solução $\phi(x)$ . . . . .	31

5.1	A figura acima mostra as relações entre os potenciais supersimétricos. As relações dadas pelas linhas pontilhadas são as transformações canônicas pontuais. Figura extractada de [2] . . . . .	42
6.1	À esquerda temos o gráfico do potencial de Scarf II, ao centro o do potencial de Morse e na direita, o da função deformação que os conecta. . . . .	48
6.2	À esquerda temos o gráfico do potencial Pöschl-Teller, ao centro o Morse e à direita o gráfico da função deformação que os relacionam. . . . .	50
6.3	À esquerda temos o gráfico do potencial de Morse e na direita, o da função deformação . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introdução

No final do século XIX e início do século XX, a física passou por mudanças devido ao surgimento de ideias que levaram à mecânica quântica e à relatividade especial e, mais tarde, à mecânica quântica relativística e teoria quântica de campos. Devido a esses novos modelos teóricos, hoje fazemos uma distinção entre uma parte da física chamada de clássica e outra de moderna. A proposta do nosso trabalho envolve uma relação entre ambas as descrições.

A motivação para o nosso trabalho surge da necessidade de se compreender melhor sistemas quânticos exatamente solúveis. No contexto da mecânica quântica supersimétrica, essa característica encontra-se atrelada a uma propriedade dos potenciais chamada de “invariância de forma”, apresentada por praticamente todos os sistemas exatamente solúveis conhecidos <sup>1</sup>.

Correspondências importantes são conhecidas entre a Mecânica Quântica Supersimétrica e a dinâmica de fluidos [3]. Também é conhecida de longa data uma profunda relação entre a SUSYQM e a equação KdV [4,5], equação diferencial não linear que descreve ondas solitônicas em águas rasas. Foram encontradas [6] relações diretas (transformações de Crum) entre a invariância de forma e o problema de Sturm-Liouville (aplicando transformações de Darboux iteradamente).

Estudos recentes [7] mostraram que nos sistemas com invariância de forma a energia apresenta uma estrutura que se encaixa na proposta de Bogomoln’yi [7]. Isto leva a equações

---

<sup>1</sup>Sistemas mecânico-quânticos unidimensionais ou com simetria esférica.

---

de primeira ordem ou tipo "BPS". Equações BPS são bem conhecidas no contexto de teorias clássicas de campos, onde as suas soluções são bastante estudadas por sua aplicabilidade em várias áreas da física. É esse ponto de vista o que iremos assumir no presente trabalho. Isto é, buscaremos estabelecer uma análise da propriedade de invariância de forma de sistemas solúveis de mecânica quântica supersimétrica, através de um estudo envolvendo campos clássicos e soluções BPS desses modelos de campos.

Assim, o nosso estudo é centrado em um tipo de objeto chamado de defeito topológico. Mas é adequado falar primeiramente em ondas solitárias.

As ondas solitárias possuem uma concentração localizada de energia finita, além de manter sua forma e velocidade durante a propagação. O primeiro registro desse fenômeno, foi feito por Scott Russell, um engenheiro escocês que observou um montante de água formado na proa de um barco, com formato arredondado, suave e bem definido. Tal quantidade propagou-se por mais de duas milhas, mantendo-se praticamente sem nenhuma mudança na sua largura e altura, por todo o percurso. Apenas cerca de 60 anos depois tal fenômeno foi descrito matematicamente no trabalho de Korteweg e de Vries [8]. Na atualidade, esse tipo de onda é observado em várias áreas da ciência, como óptica, matéria condensada, hidrodinâmica e também em biologia, durante a transmissão de energia no DNA. Matematicamente, as ondas solitárias correspondem a soluções de equações em derivadas parciais não lineares.

Quando for possível a condição de integrabilidade nas equações, as soluções levam o nome de *sólitons*. Por serem pacotes de energia localizados, não-dispersivos, movendo-se uniformemente, os sólitons se assemelham a partículas, apesar de serem soluções estendidas de equações de onda não lineares.

Atualmente existem aplicações de sólitons de luz em transmissão de dados, propagando-se nas fibras óticas sem distorção, possibilitando a transmissão na ordem de *tera-bits*.

Semelhantes aos sólitons, na física de partículas temos os chamados *defeitos*, possuindo características similares, que permitem tratá-los como partículas elementares devido as suas propriedades quânticas.

Os defeitos são soluções clássicas de campos. Possuem densidade de energia localizada e energia total finita. Além disso, são caracterizados por um índice topológico, ligado ao seu comportamento assintótico, que os distingue em defeitos *topológico* e *não-topológico*.

---

Os tipos mais simples de defeitos são os *kinks*, aparecendo como soluções em certos modelos de campos escalares em dimensão  $(1 + 1)$ , possuindo um caráter topológico e podendo ter sua energia dissipada ao colidir com outro kink (por esse motivo não são estritamente sólitons).

As soluções tipo defeito, manifestam-se também em dimensões mais altas, como os vórtices em duas dimensões, os mono-polos em três dimensões, os p-branas em dimensões superiores na física tem um papel importante, devido a sua aplicabilidade. Podemos citar trabalhos em teoria de cordas [9], cosmologia [10] e matéria condensada, entre outras áreas [11–14], o que nos mostra a utilidade e importância deste tipo de objetos.

Por se tratar de equações não lineares de segunda ordem, em geral não é fácil encontrar suas soluções. Mas, por meio de um método conhecido como método de Bogomoln'nyi, proposto nos anos 70 [15], podemos realizar uma primeira integração que nos leva à equações de primeira ordem. Como será mostrado no capítulo 2, ao reescrevermos adequadamente o funcional energia, obtemos um termo dependente do potencial, mais um termo positivo definido. O primeiro termo, resulta em duas equações de primeira ordem, sendo as soluções das equações de primeira ordem, também soluções da equação de segunda ordem. Já o segundo termo é conhecido como energia de Bogomol'nyi. Quando a energia alcança o mínimo, essa é a solução das equações de primeira ordem.

As soluções das equações de primeira ordem de Bogomol'nyi não nulas, são chamados de estados BPS.

No caso onde temos potenciais não negativos<sup>2</sup>, estes podem ser reescritos em termos uma função chamada *super-potencial* devido à sua relação com as teorias de campo supersimétricas. No caso de defeitos topológicos é possível determinar a sua energia em termos desse super-potencial. Isto permite caracterizar soluções das equações, sem conhecê-las de maneira explícita.

Um outro ponto importante, é acerca da estabilidade das soluções. O estudo de estabilidade linear é o mais comumente utilizado e consistente. Fazendo uma pequena perturbação (dependente da posição e tempo), em torno da solução, seguida de uma expansão. Ao calcularmos a equação de movimento, a ordem linear na perturbação, chegamos a uma equação

---

<sup>2</sup>No caso de 1 campo escalar isso é sempre válido para potenciais limitados inferiormente

---

com parte temporal e espacial separáveis. A parte temporal corresponde a uma equação com soluções exponenciais. Na análise da parte espacial, nos deparamos com uma equação tipo Schrödinger, constituída pela ação do chamado operador flutuação. Soluções estáveis devem ter um limite inferior com auto-valores positivos perante este operador.

No operador flutuação, o termo correspondente ao potencial é uma derivada de segunda ordem do potencial da teoria de campo (clássico).

Para os estados BPS, o operador flutuação pode ser reescrito em termos do super-potencial, resultando em uma estrutura típica das hamiltonianas da mecânica quântica supersimétrica, as quais são fatorizáveis em termos de operadores mutuamente adjuntos, garantindo assim a positividade dos seus auto-valores correspondentes.

Por outro lado, é possível a reconstrução dos modelos de campos em dimensão (1+1) a partir do auto-estado fundamental de um operador flutuação. Em [16, 17] se apresentou exemplos da construção dos modelos de campo para uma certa classe de potenciais da mecânica quântica supersimétrica, bastante conhecidos na literatura. Mas, utilizando-se de métodos semelhantes à mecânica quântica super-simétrica (SUSY QM), da qual falaremos mais adiante, Kumar [18] usou a equação de estabilidade referente ao kink  $\phi^4$  e construiu modelos clássicos de campo. Boya e Casahorran [19] também construíram modelos, para potenciais com interações polinomiais. O método se mostrou capaz de gerar modelos de campo, tanto estáveis quanto instáveis, sendo necessário para sua realização, o conhecimento dos superpotenciais referentes a cada potencial SUSY considerado. Formalmente isto é sempre possível, porém muitas vezes torna-se inviável a obtenção dos modelos, devido a complicações que surgem na integração.

A construção de modelos clássicos de teoria de campos desempenha um papel importante nesta dissertação e dedicaremos o capítulo 3 a tratar detalhadamente do assunto.

Um outro método importante acerca dos defeitos, foi apresentado por Bazeia, Losano e Malbouisson em 2002 [20]. Nesse trabalho se mostrou que é possível, a partir de um modelo com solução conhecida, se obter novos modelos com suas soluções, denominado pelos autores de *defeitos deformados*. O mapeamento entre o modelo de campo original e o deformado é feito através da função de deformação, com a possibilidade de ser aplicado repetidamente. Além da aplicação para modelos de apenas um campo escalar real, é possível a extensão para cenários com dois campos reais [21], campos complexos e, mais recentemente, modelos quaterniônicos,

---

envolvendo quatro componentes reais. A validade, força e aplicabilidade deste método, podem ser avaliados com base na diversidade de publicações envolvendo a sua aplicação [22–25]. O mapeamento entre defeitos é outra das ferramentas de que faremos uso extensivo nesta dissertação.

Nos anos 80's, Witten [26] e Cooper e Freedman [27] propuseram um modelo de campo simplificado para estudar a supersimetria (SUSY). Essa teoria de campos de dimensão 0 (espacial), foi chamada de Mecânica Quântica Supersimétrica (SUSY QM).

A SUSY traz uma relação entre setores bosônicos e fermiônicos, estando embasada sobre uma álgebra de Lie graduada e é um elemento fundamental para a unificação das interações básicas da natureza, ganhando conhecimento no meio científico através dos trabalhos de Wess e Zumino [28]. A teoria propõe o surgimento de partículas parceiras supersimétricas. Essas estariam em correspondência com partículas já conhecidas (fótons, elétrons, etc), tendo ambas a mesma massa, mas diferindo o spin em  $1/2$ . Por exemplo, para o fóton, o qual tem massa nula de repouso e spin 1, o parceiro supersimétrico é o fotino, também de massa nula e spin  $1/2$ . Porém, tais partículas ainda não foram detectadas e, por isso, especula-se com uma quebra na SUSY nos primórdios do universo.

A SUSY QM surgiu inicialmente como modelo de brinquedo, com intuito de testar certos modelos supersimétricos. À medida que mais pesquisadores se interessavam pelo assunto, notou-se a aplicação da SUSY QM na resolução de problemas, evidenciou-se, por exemplo, ter sido encontrada uma dinâmica SUSY relacionando núcleos par-par e par-ímpar.

Uma característica importante presente nas hamiltonianas da SUSY QM é a fatorização. Assim como visto na mecânica quântica usual, com o caso do oscilador harmônico, as hamiltonianas supersimétricas sempre podem ser fatorizadas e seu espectro determinado algebricamente. Porém, a SUSY QM apresenta uma característica extra: a permuta dos operadores nós dá a possibilidade de reestruturar a hamiltoniana, havendo uma mudança em certos termos do potencial. Ambas as hamiltonianas tem suas auto-funções, auto-valores e níveis de energia relacionadas. Assim, potenciais dessas hamiltonianas são chamados de *potenciais parceiros*.

A produção de potenciais parceiros pode ser repetida de maneira à criar uma infinidade de novos potenciais e, conseqüentemente, novas hamiltonianas. Basta termos conhecimento de um potencial, encontrarmos o super-potencial ligado a ele por meio da equação de Riccati

---

e, em seguida, realizar permutações entre os operadores. Então, partindo de um potencial conseguimos toda uma hierarquia de hamiltonianas.

Em meados dos anos 90, Cooper, Khare e Sukhatme [2], mostraram que realizando transformações canônicas nos parâmetros de um potencial SUSY QM, é possível mapeá-lo em outro potencial SUSY QM. Esse mapeamento entre potenciais supersimétricos, é de grande importância para o trabalho desenvolvido aqui, pois nos dá uma relação importante em nível quântico, e será discutido no capítulo 5.

Além das características já citadas, os potenciais parceiros supersimétricos podem ser *invariantes de forma*. A invariância de forma consiste na possibilidade de aplicarmos certas transformações nos parâmetros dos potenciais, obtendo um novo potencial com perfil idêntico, porém deslocado em uma constante. A invariância de forma é categorizada dependendo do tipo de transformação aplicada nos parâmetros, sendo a invariância por translação a de maior atenção para nós. Através de um deslocamento em um dos parâmetros do potencial, chegamos a outro de mesmo formato, sendo que, o potencial original tem um nível de energia a mais. Assim, podemos realizar, também nesse caso, uma hierarquia de hamiltonianas, partindo de um potencial limitado inferiormente.

Dos estudos da SUSY QM feitos no desenvolvimento deste trabalho, o mapeamento entre potenciais desempenha um papel importante, pois é parte de uma relação envolvendo o método de deformação, a construção de modelos de campos e mapeamento entre potenciais parceiros, que buscamos entender.

Como dito, há na literatura uma classe de potenciais SUSY, os quais se relacionam pelas chamadas transformações canônicas. Assim, temos um mapeamento no nível quântico. Em seguida, podemos construir modelos de campo partindo dos potenciais SUSY mapeados. Após a obtenção dos modelos de campos, é possível mapear os potenciais, agora no nível clássico, através do método de deformação. Encontra-se assim, uma relação entre os mapas nos níveis quântico e clássico, que exploramos no presente trabalho. Para um melhor entendimento da

---

nossa proposta, a esquema abaixo relaciona os mapeamentos entre os potenciais e modelos:

$$\begin{array}{ccccc} U(\phi) & & \rightarrow \text{Método de Deformação} & \rightarrow & \tilde{U}(\tilde{\phi}) \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ V(\phi) & \rightarrow & \text{Transformação Canônica Pontual} & \rightarrow & \tilde{V}(\tilde{\phi}) \end{array}$$

A divisão do trabalho é feita da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos uma revisão acerca dos modelos de campos escalares, discutindo os tipos de defeitos, sua energia e estabilidade; no capítulo 3 mostramos como construir modelos de campos escalares partindo do operador flutuação; o capítulo 4 é dedicado ao método de deformação, onde mapeamos potenciais através da função deformação, e apresentamos um exemplo, ilustrando a utilização do método; no capítulo 5 fazemos uma revisão sobre pontos da mecânica quântica supersimétrica, importante no desenvolvimento da nossa pesquisa, tais como potenciais parceiros, hierarquização de hamiltonianas, mapeamento via transformações canônicas e invariância de forma. O capítulo 6 é reservado para a discussão dos resultados e perspectivas sobre a continuidade da pesquisa; por último, no capítulo 7, revisamos uma maneira de realizar a invariância de forma por meio de um operador, introduzido em [7], e aplicamos a alguns potenciais específicos.

# Capítulo 2

## Sistemas de um Campo Escalar Real

O estudo da dinâmica de sistemas clássicos (discretos) é feito através da formulação lagrangeana e hamiltoniana. Quando tais formulações são estabelecidas em termos de um princípio variacional, podemos estender a descrição para sistemas mecânicos contínuos como cordas vibrantes, fluidos, etc [29–31]. A descrição física de sistemas, não é restrita apenas a sistemas mecânicos e vai além de campos escalares, como campos vetoriais, tensoriais e espinoriais. Mas nos atemos aqui, apenas a campos escalares reais, que são, do ponto de vista da lei de transformação os mais simples, por serem invariantes. Porém, apesar da sua simplicidade, eles podem ter uma vasta aplicabilidade, como, por exemplo, sistemas físicos estudados em dinâmica não linear [29] e, tem ainda um caráter fundamental, como no modelo padrão de partículas elementares.

### 2.1 Modelos de um campo

A dinâmica de um sistema de um campo escalar real em um espaço-tempo de (1,1) dimensões,  $\{\phi(x^\mu): \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}\}$  com  $\mu = 0, 1$ , é descrita por uma densidade lagrangeana, dada por [31]

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

sendo que o potencial  $V(\phi)$  especifica o modelo. Ao realizarmos a variação da ação

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.2)$$

obtemos a equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (2.3)$$

Podemos notar que (2.3) é uma equação de ondas unidimensionais com um termo não-linear dado pela derivada do potencial. No caso de campos estáticos ela se reduz a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (2.4)$$

e por integração da equação (2.4) obtemos a equação diferencial de 1ª ordem,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi). \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Energia

Em termos de campos, as propriedades energéticas e inerciais, são descritas pelo tensor energia momento dado por  $T_{\mu\nu}$ . A energia do sistema, corresponde à integral da componente 00 do tensor energia-momento

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_{00} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi(x)) \right]. \quad (2.6)$$

Usando (2.5), observamos uma contribuição igual entre os termos gradiente e potencial da integral no caso estático, logo

$$E[\phi] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} V(\phi(x)) dx. \quad (2.7)$$

O espaço de configuração (soluções físicas) do modelo associado ao potencial  $V(\phi)$  consiste no conjunto de soluções de (2.4) tais que a energia (2.6) resulta finita, o que formalmente escrevemos como  $\mathcal{C} = \{\phi \in Maps(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / E < \infty\}$ .

## 2.2 Soluções Tipo Defeito

Dentre as soluções para as equações não lineares, vamos considerar as soluções chamadas de *sólitons* [31]. Os sólitons possuem energia finita e densidade de energia localizada, além

de manterem sua forma após “colidirem” com outra solução do mesmo tipo. De forma mais particular, estudaremos sistemas cujos potenciais apresentam quebra espontânea de simetria (mínimos degenerados). Esses potenciais suportam a existência de soluções estáticas que chamaremos de defeito (para os quais a condição de colisão elástica não é necessariamente satisfeita). Isso determina as condições assintóticas que deveremos impor às soluções  $\phi(x)$  para serem do nosso interesse:

$$\phi \in \mathcal{C} \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(\phi(x)) = 0 \quad (2.8)$$

A segunda das condições dadas em (2.8) diz que os valores assintóticos devem ir para o zero do potencial, ou seja, no limite em que  $x \rightarrow \pm\infty$  temos que  $\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_{\pm}$ , com  $V(\bar{\phi}_{\pm}) = 0$ . Visto em (2.5) que esses pontos são mínimos do potencial  $V$ , então as soluções estáticas ligam de forma assintótica os mínimos de  $V$ .

### 2.2.1 Defeitos Topológicos e Não-Topológicos

A classificação de um defeito como topológico ou não topológico pode ser realizado introduzindo uma *carga topológica*, definida para um campo escalar, da seguinte forma

$$j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.9)$$

Esta é uma corrente conservada ( $\partial_\mu j_T^\mu = 0$ ) devido a anti-simetria do símbolo de Levi-Civita, mas não é uma corrente de Nöether, por não advir de uma simetria contínua do sistema. A densidade de carga correspondente é  $\rho \equiv j_o = d\phi/dx$  e a carga conservada associada é dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty). \quad (2.10)$$

No caso onde  $\phi(x \rightarrow +\infty) = \phi(x \rightarrow -\infty)$ , temos uma solução chamada *não-topológica*, a qual liga um mínimo a ele mesmo. Mas para o caso em que  $Q = \bar{\phi}_+ - \bar{\phi}_- \neq 0$  a solução é dita *topológica*, ligando mínimos distintos do potencial e tendo a estabilidade assegurada pela conservação dessa carga. A existência de soluções topológicas é consequência da presença de mínimos degenerados no potencial, o que induz uma quebra espontânea de simetria, o que

indica a existência de soluções topológicas ( $Q \neq 0$ ), neste contexto, chamadas de defeitos topológicos.

De forma resumida podemos dizer que existem dois tipos de defeitos, os topológicos e os não-topológicos. Soluções típicas com essas características são os chamados “*kinks*” e “*lumps*”, respectivamente.

### 2.2.2 Defeito Topológico tipo “kink” do Modelo $\phi^4$

O modelo  $\phi^4$  é descrito na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(a^2 - \phi^2)^2, \quad (2.11)$$

onde  $a$  e  $\lambda$  são parâmetros reais.

Ao calcularmos a equação de movimento de  $\phi^4$ , para um caso estático, obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda\phi(\phi^2 - a^2). \quad (2.12)$$

A equação de primeira ordem toma a forma

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{\lambda}{2}(a^2 - \phi^2)^2 \quad (2.13)$$

Podemos facilmente ver que os mínimos do potencial são dados por  $\phi = \pm a$ . Sendo assim, os vácuos da teoria são degenerados pois,  $V(a) = V(-a) = 0$ . O interessante é que soluções não triviais (2.13) podem ser encontradas, em particular,

$$\phi_\pm(x) = \pm a \tanh(\sqrt{\lambda/2}ax + b), \quad (2.14)$$

onde  $b$  é uma constante arbitrária que pode ser considerada zero, devido a invariância da energia na translação espacial da solução. Sabemos que a tangente hiperbólica varia assintoticamente de  $-1$  à  $1$ , logo, a solução varia de  $\phi(-\infty) = -a$  à  $\phi(\infty) = a$ .

A figura 2.1 mostra o comportamento da solução. Basicamente, o kink corresponde a uma interface situada numa certa região (no caso da figura 2.1, essa região seria entre  $2$  e  $-2$ , por exemplo). Fora dessa região, a solução vai tender aos valores de vácuo  $\pm a$ .

Isto é, a energia está principalmente concentrada nessa região ( $-2 < x < 2$ ) próxima da origem.

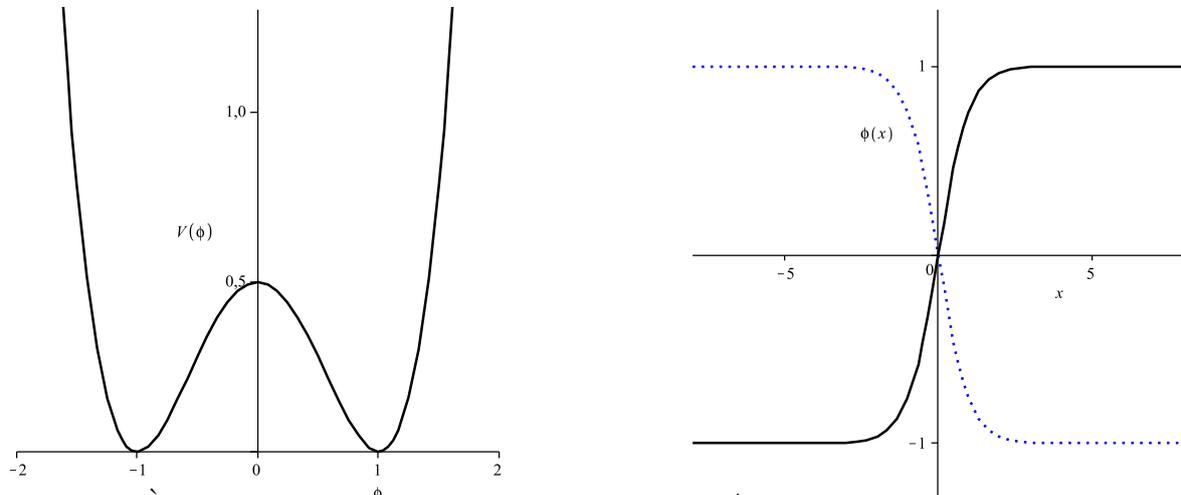


Figura 2.1: À esquerda temos o gráfico do potencial  $\phi^4$  e à direita o gráfico da solução  $\phi(x)$  ( $b = 0$ ), ambos com  $a = 1$  e  $\lambda = 2$

### 2.2.3 Defeito Não Topológico tipo “lump” do Modelo $\phi^4$ invertido

Esse modelo também possui o potencial  $\phi^4$ , mas como podemos ver na figura 2.2, com uma diferença no comportamento do potencial. O modelo  $\phi^4$  invertido é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(c^2\phi^2 - \phi^4), \quad (2.15)$$

sendo  $c$  uma constante real. Esse potencial possui zeros em  $\phi = \pm c$  e em  $\phi = 0$ , porém não é limitado inferiormente, o qual inviabiliza a existência de soluções estáveis com energia finita.

A equação de movimento nesse caso é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3. \quad (2.16)$$

Podemos ver que  $V(\phi)$  possui um mínimo em  $\phi = 0$ . A equação (2.16) tem soluções:

$$\phi_{\pm}(x) = \pm a \operatorname{sech}(x). \quad (2.17)$$

Como já foi dito anteriormente, esse tipo de defeito conecta o mínimo a ele próprio. Em consequência, sendo nulo o valor da carga ( $Q = 0$ ) não o protege contra a dissipação da energia, tornando-o assim *instável*.

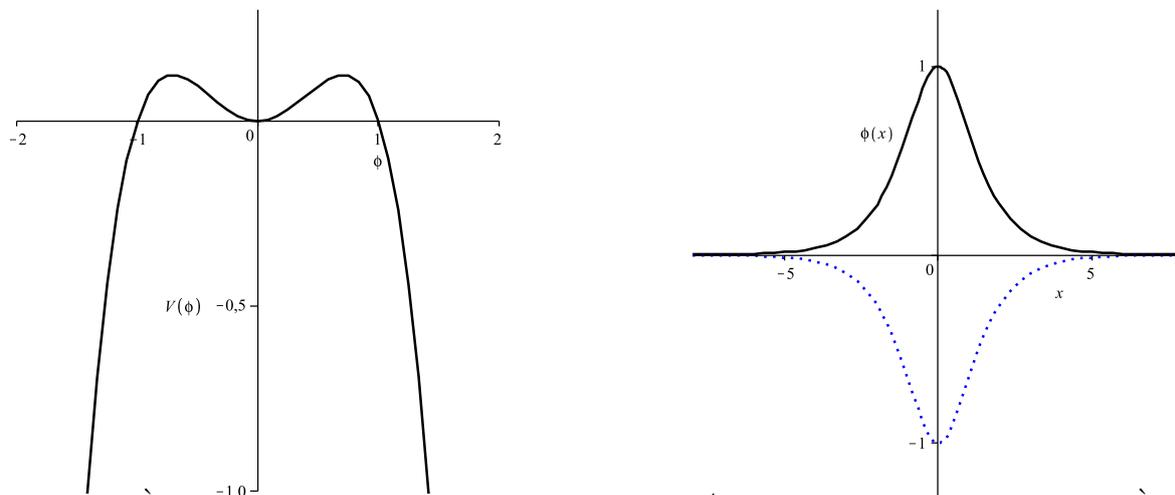


Figura 2.2: À esquerda temos o gráfico do potencial  $\phi^4$  invertido, com  $c = 1$  e  $\lambda = 2$ . À direita o gráfico da solução  $\phi(x)$ , com  $a = 1$

## 2.3 Método de Bogomol'nyi s Soluções BPS

Este método foi criado pelo Russo E. Bogomol'nyi nos anos 70 [15], para facilitar a solução de equações de segunda ordem não lineares, como a equação de movimento (2.3). O método se baseia em obter uma equação de primeira ordem como resultado de completar quadrados no funcional energia. Ou seja,

$$E[\phi] = \int dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right]$$

$$\Rightarrow E[\phi] = \int dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.18)$$

Para o caso estático é claro ver que a primeira integral é nula, se

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.19)$$

O termo restante na segunda integral é conhecido como energia de Bogomol'nyi

$$E_B = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.20)$$

Assim, a energia será minimizada quando a equação (2.19) tiver as condições de contorno (2.8), logo o sinal de (2.20) deve ser escolhido de tal forma que  $E_B > 0$ .

Resulta das equações acima que ao encontrarmos a solução, fica resolvida a outra equação. Isto é, sob as condições de contorno necessárias, a solução da equação de 1ª ordem resolve a equação de 2ª ordem.

### 2.3.1 Super-potencial

No caso de potenciais não-negativos, a energia (2.20) pode ser encontrada de forma simplificada. Sendo  $V(\phi) > 0$  é possível reescrevê-lo em termo de uma função suave  $W(\phi)$ , a qual chamamos de *super-potencial* e está relacionada com o potencial da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) na equação (2.4), obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.22)$$

Assim como ao substituirmos em (2.5), ficamos com

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.23)$$

É muito importante notar que, com a utilização do super-potencial a energia de Bogomol'nyi, como citamos antes, pode ser encontrada de forma direta bastando apenas expressá-la em termos de  $W(\phi)$ ,

$$E_{Bw} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} dx \left( \frac{d\phi}{dx} \right) W_\phi = \pm [W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))]. \quad (2.24)$$

O motivo de se utilizar o super-potencial, é que basta calculá-lo nos limites para determinarmos o valor da energia, sem necessidade de conhecer a solução. Isto é uma propriedade que evidencia o caráter topológico das soluções.

## 2.4 Estabilidade linear

Uma questão extremamente importante acerca das soluções estáticas da equação de movimento (2.3) é a sua estabilidade. Para estudarmos essa questão consideramos uma pequena

perturbação em torno de uma solução estática  $\phi_0$ , ou seja,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \eta(x, t). \quad (2.25)$$

e substituimos (2.25) em (2.3). Após isso, fazemos uma expansão do potencial  $V(\phi_0 + \eta)$  em série de Taylor em torno de  $\phi_0$  e, desprezando termos de ordem  $\geq 2$  (estabilidade linear), obtemos

$$-\partial_x^2 \eta + \mathcal{U}(x) = -\partial_t^2 \eta, \quad (2.26)$$

onde

$$\mathcal{U}(x) \equiv \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_0(x)}. \quad (2.27)$$

A equação diferencial (2.26) é linear em  $\eta$ , logo podemos solucioná-la por separação de variáveis. Fazendo  $\eta(x, t) = \psi(x)T(t)$ . Obtemos duas equações, sendo a primeira

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega_n T(t), \quad (2.28)$$

sendo  $\omega$  uma constante. Essa primeira equação tem soluções harmônicas  $T_n(t) = T_0 e^{\pm i\sqrt{\omega_n} t}$ .

A segunda equação tem a forma de um operador Hamiltoniano

$$\mathcal{H}\rho_n(x) \equiv \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \right] \psi(x) = \omega_n \psi_n(x). \quad (2.29)$$

Este pode ter auto-valores negativos ( $\omega_n < 0$ ), mas isso implicaria numa situação de instabilidade para a solução temporal, pois, para tempos grandes  $T_n$  será divergente. Logo, isso implica em uma condição extra  $\omega > 0$ , a ser imposta para obtermos soluções estáveis. Isto reduz o problema à análise de  $\mathcal{H}$ .

### 2.4.1 Estabilidade das soluções BPS

Nesta última seção vamos tratar da estabilidade das soluções que minimizam a energia do sistema [32], ou seja, que saturam o limite de Bogomol'nyi.

Em modelos com potenciais limitados inferiormente, os quais admitem a forma  $V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2$ , o operador hamiltoniano (2.29) toma a seguinte forma

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + (W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}) \Big|_{\phi_0(x)}. \quad (2.30)$$

Este operador apresenta a estrutura dos hamiltonianos fatorizáveis da MQ SUSY (que serão abordadas no capítulo 5) [2, 33], os quais podem ser escritos como produto de operadores, na forma  $\mathcal{H} = a^\dagger a$ , definidos por

$$a = \frac{d}{dx} \mp (W_{\phi\phi})|_{\phi_0(x)} \quad , \quad a^\dagger = -\frac{d}{dx} \mp (W_{\phi\phi})|_{\phi_0(x)}$$

sendo  $a^\dagger$  o adjunto de  $a$  e os sinais  $+$  e  $-$  se correspondem com os sinais opostos ( $-$  e  $+$  respectivamente) na equação de primeira ordem (2.23).

O fato de  $\mathcal{H}$  ser fatorizável em operadores mutuamente adjuntos assegura, automaticamente, sua positividade. Isto é, seus autovalores resultam todos não negativos pois, para qualquer autoestado  $|n\rangle$  do operador  $\mathcal{H}$ , o auto-valor correspondente cumpre

$$\omega_n = \langle n|\mathcal{H}|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \|a|n\rangle\|^2 \geq 0. \quad (2.31)$$

Logo, sistemas de um campo escalar real descritos por potenciais limitados inferiormente, admitem soluções estáticas que minimizam a energia e são linearmente estáveis (*estados BPS*). Além disso, o autoestado correspondente ao auto-valor  $\omega_0 = 0$  (designado como zero), vem dado por  $\psi_0 \propto d\phi/dx$ .

# Capítulo 3

## Reconstrução de Modelos de Campos Escalares à Partir da Equação de Estabilidade

Aqui, fazemos o estudo acerca da estabilidade de soluções, vindas do estudo de sistemas de campos escalares, buscando descobrir sobre o seu comportamento após efetuarmos pequenas perturbações em torno das soluções. Além de descobriremos se são estáveis ou instáveis, chegamos a um ponto importante para o desenvolvimento do nosso trabalho, que é o operador flutuação. a partir dele, podemos realizar a reconstrução de modelos de campos.

### 3.1 Modo Zero do Operador Flutuação

O estudo de estabilidade linear no capítulo 2 foi feito considerando perturbações em torno da solução clássica (2.25), e expandindo o potencial  $V(\phi)$  (descartando os termos de ordem  $\geq 2$ ) em torno da solução estática  $\phi_{cl}$ . Propondo um ansatz tipo produto, separando a parte temporal e espacial, chegamos em que a parte espacial responde ao operador flutuação

$$\mathcal{H}\psi_n(x) \equiv \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \right] \psi_n = \omega_n \psi_n(x), \quad (3.1)$$

com

$$\mathcal{U}(x) = V''(\phi(x)) = \left. \left( \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right) \right|_{\phi=\phi_c(x)}. \quad (3.2)$$

Seja então  $\psi_n$  um conjunto completo de auto-funções de  $\mathcal{H}$  com auto-valores  $\omega_n$ . A condição  $\omega_n \geq 0$  ( $\mathcal{H}$  é um operador positivo definido), garante a estabilidade da solução  $\phi_0$ .

Devemos lembrar aqui que o problema mecânico-quântico associado à perturbações das soluções estáticas, possui um modo zero (auto-valor nulo). Derivamos a equação (2.4) com relação a  $x$ , reescrevendo-a como

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d^2\phi} \right] \left( \frac{d\phi}{dx} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Ou seja, esta expressão calculada na solução clássica nos dá (3.1) com o auto-valor nulo para  $\psi_0(x) \propto d\phi_{cl}/dx$ . Assim, a derivada da solução clássica corresponde sempre ao modo zero do problema mecânico-quântico associado, o qual é de extrema importância no procedimento na seção seguinte.

## 3.2 Reconstruindo os Modelos de Campos

A construção dos modelos de campos é explorada em [16,17]. Dada uma hamiltoniana  $1d$  fatorizável<sup>1</sup>, e o auto-estado  $\psi_0(x)$ , com auto-valor nulo  $\omega_0 = 0$ , é possível (ao menos formalmente) construir modelos de campo escalar em  $(1+1)$  dimensões.

Da relação

$$A\psi_0(x) = \left[ \frac{d}{dx} + W(x) \right] \psi_0(x) = 0, \quad (3.4)$$

podemos obter a relação

$$\psi_0(x) = N \exp \left[ - \int^x W(x) dx \right]. \quad (3.5)$$

Em seguida utilizamos a expressão  $\psi_0(x) \propto d\phi_{cl}/dx$ , da qual obtemos o campo por integração

$$\phi_{cl}(x) = \alpha \int \psi_0(y) dy + \beta. \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>A fatorização é permitida quando ajustamos o estado fundamental, de tal forma que, para a função de onda do estado fundamental tenhamos:  $\mathcal{H}\psi_0 = 0$ .

Agora, com o campo determinado, fazemos a inversão  $x = x(\phi_{cl})$ , onde assumimos que  $\phi(x)$  é um estado BPS (solução da equação de primeira ordem) e determinamos, assim, o potencial

$$V(\phi_{cl}) = V[\phi_{cl}(x)] = V(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_{cl}}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \psi_0^2(x) \quad (3.7)$$

Nos trabalhos [16, 17], o procedimento é aplicado aos potenciais de Morse, Scarff II e Rosen-Morse II. A modo de ilustração revisaremos esse último caso.

O potencial de Rosen-Morse II é caracterizado pelo superpotencial

$$W(x) = A \tanh(x) + \frac{B}{A} \quad A > 0, B \geq 0. \quad (3.8)$$

Considere o caso  $B = 0$ ,  $N = 2$  e  $A = 1$  na expressão acima. Substituímos o super-potencial em (3.5) para obtermos:

$$\psi_{cl} = 2 \operatorname{sech}(x). \quad (3.9)$$

Agora que temos a função de onda do estado fundamental, temos como determinar o campo, via à integração (3.6). Obtemos:

$$\phi_0 = 2 \arcsin(\tanh(x)). \quad (3.10)$$

Podemos inverter a expressão acima, resultando em

$$x = \operatorname{arctanh}\left(\sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right)\right). \quad (3.11)$$

Logo, chegamos ao potencial escrito em termos da coordenada espacial:

$$V(x) = 2 \operatorname{sech}^2(x) = 2(1 - \tanh(x)^2). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.11) obtemos finalmente

$$V(\phi) = 2(1 - \cos(\phi)). \quad (3.13)$$

que é o potencial para um modelo  $1d$  de campo cujo operador hamiltoniano de estabilidade é associado ao super-potencial (3.8).

É possível encontrar em [16, 17], a construção de alguns outros modelos, os quais estão resumidos na Tabela (3.1).

### 3.3 Reconstrução de Novos Modelos

Após apresentarmos o procedimento para a construção de modelos de campos escalares e expormos alguns resultados encontrados na literatura, mostraremos agora os modelos obtidos neste trabalho, associados aos potenciais do oscilador 3d, Rosen-Morse I, Scarf I e Pöschl-Teller.

#### 3.3.1 Oscilador 3D

Começaremos a construção dos campos a partir deste potencial, cujo super-potencial é descrito por

$$W(r) = \frac{1}{2}\omega r - \frac{l+1}{r}. \quad (3.14)$$

Os parâmetros serão ajustados aqui de duas maneiras, sendo a primeira:  $\omega = 2$  e  $l = 0$ . Calculamos a função de onda do estado fundamental através de (3.5), gerando

$$\psi_0 = r e^{-\frac{r^2}{2}} \Rightarrow \phi = -e^{-\frac{r^2}{2}}$$

ao invertermos, temos

$$-r^2 = \ln(\phi^2).$$

Obtemos com esses valores os seguintes potenciais

$$V_{OSC}(r) = \frac{1}{2}r^2 e^{-r^2} \Rightarrow V_{OSC}(\phi) = -\frac{\phi^2}{2} \ln(\phi^2). \quad (3.15)$$

Um segundo ajuste é  $\omega = 2$  e  $l = 2$ . Dessa forma

$$\psi_0 = r^3 e^{-\frac{r^2}{2}} \Rightarrow \phi = -(2 + r^2)e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Os resultados encontrados acima, nos levam ao modelo de campo

$$V(r) = \frac{r^6}{2} e^{-r^2}. \quad (3.16)$$

Neste caso não foi possível fazer a inversão da qual obteríamos o potencial em função de  $\phi$ .

Como pode ser visto pelo gráfico acima, o potencial (3.15) mostra-se instável, apresentando o mesmo formato do lump  $\phi^4$  invertido.

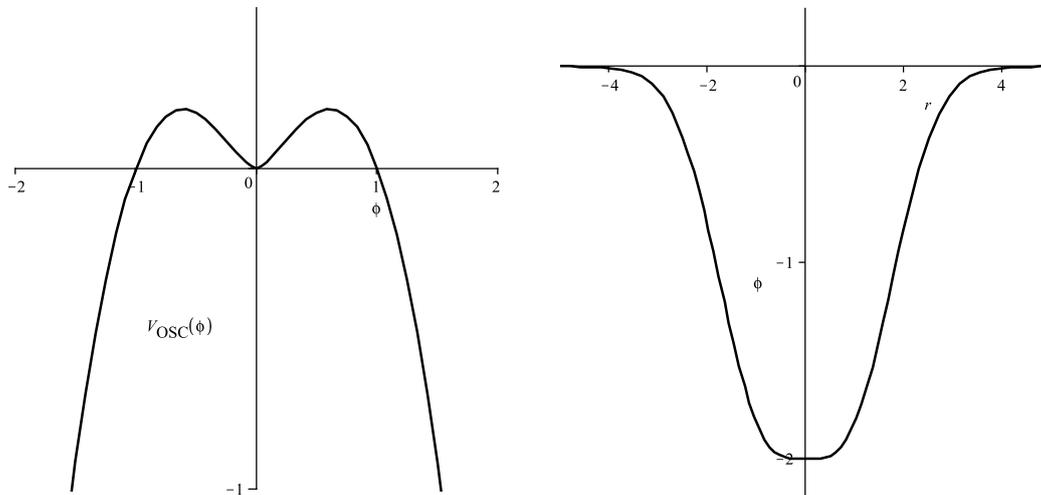


Figura 3.1: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao oscilador e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

### 3.3.2 Rosen-Morse I

O campo para o potencial de Rosen-Morse I (trigonométrico) foi obtido de duas formas: partindo do super-potencial dado na tabela [?] e com o super-potencial dado em [1]. Trabalharemos primeiramente com o que foi dado na tabela. Então,

$$W(x) = -A \cot(x) - \frac{B}{A}, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.17)$$

onde ajustamos os parâmetros em  $A = 1$  e  $B = 0$ . Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sin(x) \\ \phi &= -\cos(x) \quad \Rightarrow \quad x = \arccos(-\phi). \end{aligned}$$

Após realizarmos os cálculos chegamos a

$$V_{RM1}(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x) \quad \Rightarrow \quad V_{RM1}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2). \quad (3.18)$$

Esse modelo também é instável, o que não é interessante para nossa proposta de estudar soluções BPS, mas, dá um melhor entendimento do propósito desse capítulo.

Agora usaremos o potencial dado em [1]

$$W(x) = -A \tan(x) - \frac{B}{A}. \quad (3.19)$$

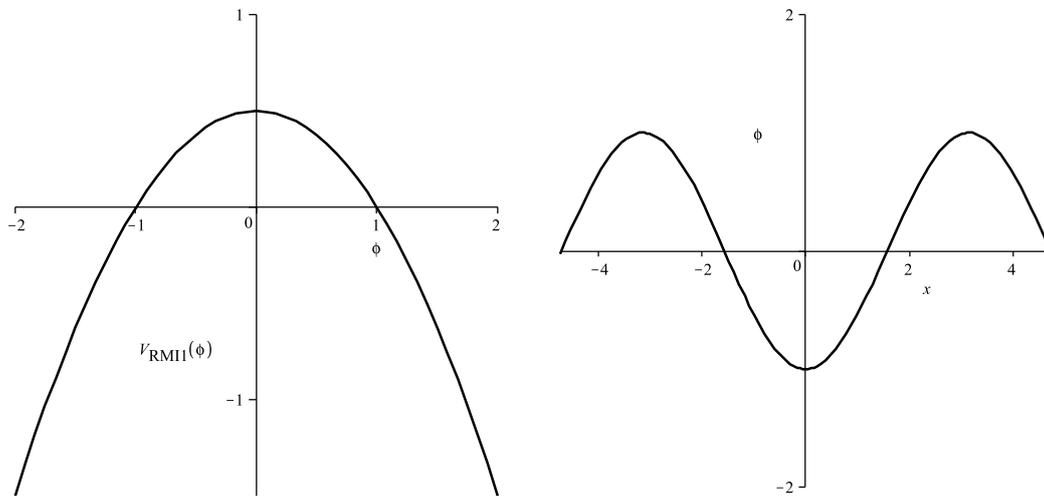


Figura 3.2: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Rosen-Morse I e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

Neste caso usamos  $A = 2$  e  $B = 0$ , obtendo:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \sec^2(x) \\ \phi &= \tan(x) \quad \Rightarrow \quad x = \arctan(\phi).\end{aligned}$$

Para tais valores:

$$V_{RMI_2}(x) = \frac{1}{2} \sec^4(x) \quad \Rightarrow \quad V_{RMI_2}(\phi) = (1 + \phi^2)^2. \quad (3.20)$$

### 3.3.3 Scarf I (Trigonométrico)

O super-potencial de Scarf I é dado por:

$$W(x) = A \tan(x) - B \sec(x). \quad (3.21)$$

Para esse super-potencial ajustamos os parâmetros de duas maneiras. Na primeira usaremos  $A = 1$  e  $B = 0$ , que nos dá

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \cos(x) \\ \phi &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \arcsin(\phi)\end{aligned}$$

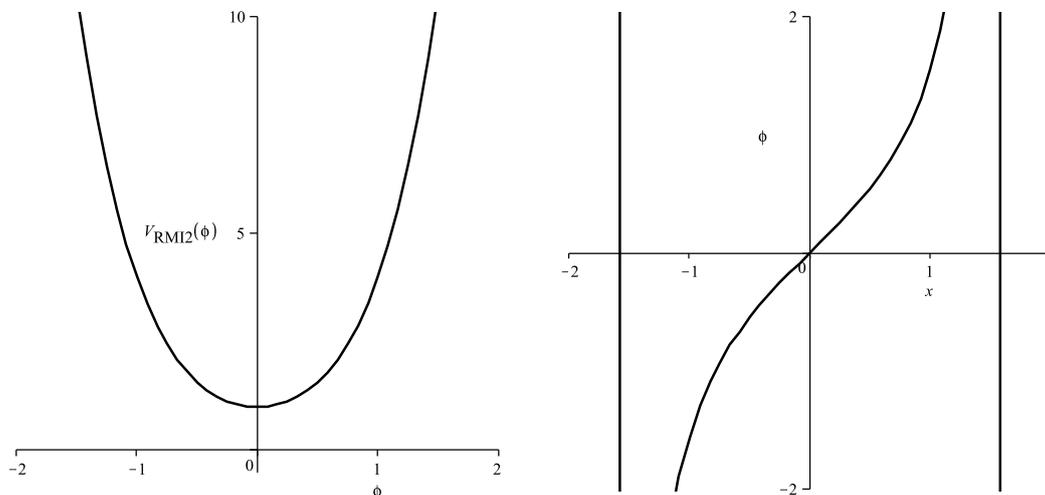


Figura 3.3: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Rosen-Morse I, dado em [1], e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

Obtemos com esses valor os seguinte potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} \cos^2(x) \Rightarrow V_{SCI}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2). \quad (3.22)$$

Aqui, nos deparamos com o caso visto em (3.18), que é um modelo instável.

### 3.3.4 Pöschl-Teller

Por fim, trataremos do potencial de Pöschl-Teller. O super-potencial referente a ele é

$$W(x) = A \coth(x) - B \operatorname{csch}(x). \quad A < B \quad (3.23)$$

Utilizamos aqui  $A = 1$  e  $B = 2$ . Então:

$$\psi_0(x) = \frac{(\cosh(x) - 1)^{\frac{1}{2}}}{(\cosh(x) + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad e \quad \phi = -\frac{1}{\cosh(x) + 1}. \quad (3.24)$$

Assim, chegamos ao potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{(\cosh(x) - 1)}{(\cosh(x) + 1)^3} \Rightarrow V_P(\phi) = \phi^3 + \frac{\phi^2}{2} \quad (3.25)$$

O modelo para o potencial Poschl-Teller, também mostra-se ser instável e, com sua solução tendo o mesmo comportamento de (2.17). Mas esse potencial tem uma possibilidade de aplicação interessante no contexto de Braneworlds em cosmologia.

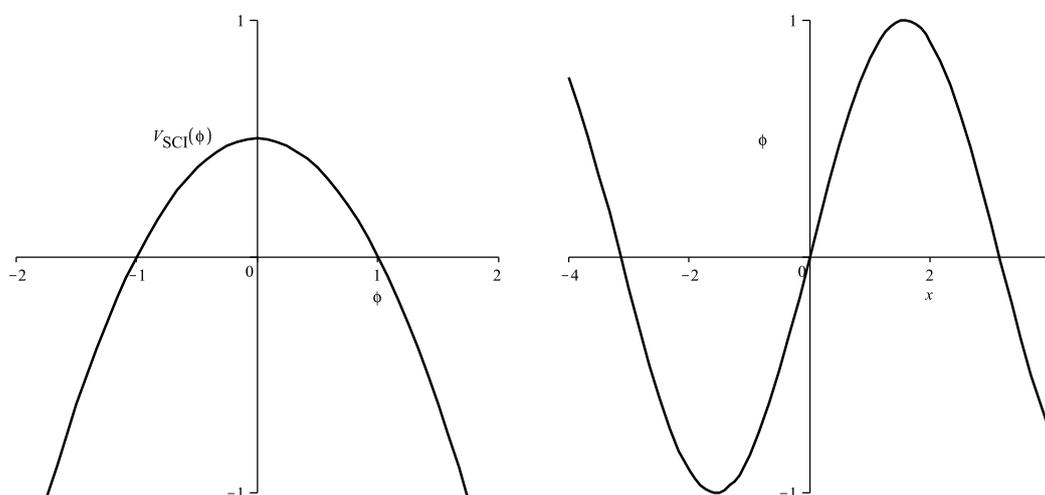


Figura 3.4: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Scarf I e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

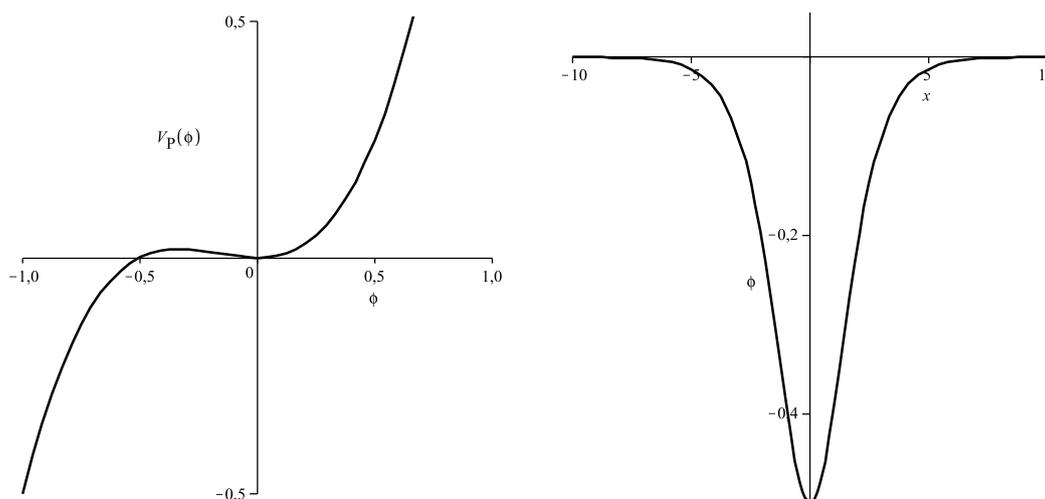


Figura 3.5: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Poschl-Teller e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

### 3.3.5 Morse

O super-potencial Morse é dado por:

$$W(x) = A - Be^{-x}. \quad (3.26)$$

Usaremos os parâmetros  $A = 1$  e  $B = 1$ . Com isso obtemos:

$$\psi_0(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} \quad e \quad \phi = e^{-e^{-x}}. \quad (3.27)$$

Nos dando os campos

$$V(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}e^{-2e^{-x}}(x)^4 \quad e \quad V_M(\phi) = \frac{\phi^2}{8} \ln^2(\phi^2). \quad (3.28)$$

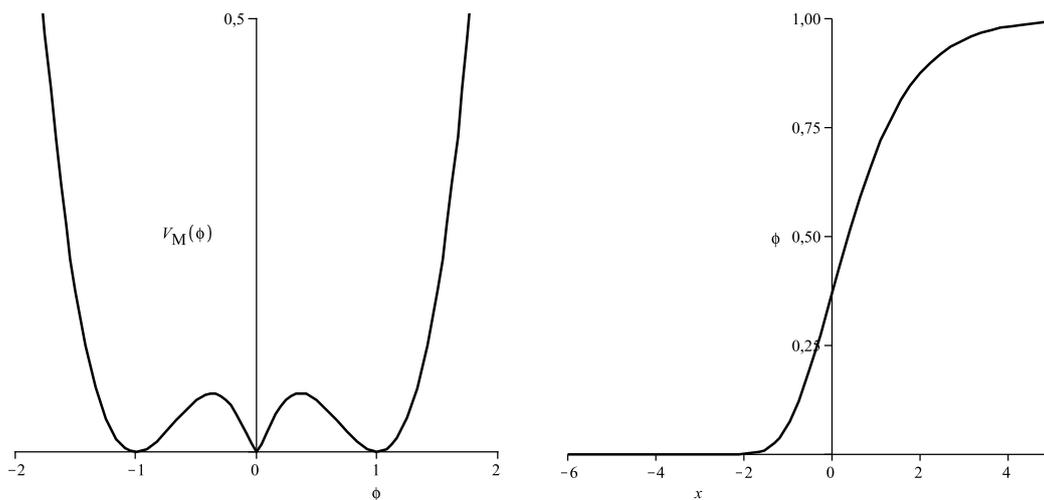


Figura 3.6: À esquerda temos o gráfico do potencial referente ao Morse e à direita o gráfico da solução não trivial para esse potencial.

Dentre todos os modelos apresentados por nós, esse é o único caso estável, com mínimos os mínimos do potencial em  $\phi = -1, 0, 1$ . A sua solução não-trivial apresenta um caráter assintótico. Assim, para o estudo de soluções BPS, apenas este será útil por ser um defeito topológico.

Abaixo mostramos duas tabelas que resumem os potenciais analisados. A tabela 3.1 contém os modelos encontrados na literatura e na 3.2 os modelos construídos no presente trabalho.

Tabela 3.1: Modelos de potenciais encontrados em [16, 17].

Potencial	Super-Potencial	Campo $\phi$	Potencial $V(\phi)$
Rosen-Morse II	$W(x) = A \tanh(x) + \frac{B}{A}$	$\phi = 2 \arcsin(\tanh(x))$ $\phi = \operatorname{arctanh}(x)$	$V_{RMII_1}(\phi) = 1 + \cos(\phi)$ $V_{RMII_2}(\phi) = (\phi^2 - 1)^2$
Morse	$W(x) = A - Be^{-x}$	$\phi = e^{-Be^{-x}}$ $\phi = e^{-Be^x}$	$V_{M_j}(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 \ln^2(B\phi)$ $V_{M_f}(\phi) = \phi^2 \ln^2(\phi^2)$
Scarf II	$W(x) = A \tanh(x) + B \operatorname{sech}(x)$	$\phi = \tanh(x)$	$V_{SCII}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2$

Em um capítulo posterior serão usados alguns dos modelos mostrados nas tabelas acima, na aplicação do método de deformação. Mais adiante falaremos detalhadamente no contexto da mecânica quântica super-simétrica.

Note que dos potenciais encontrados, nem todos suportam soluções BPS. Logo, não é possível chegarmos a um operador flutuação partindo de tais potenciais. Mas, eles foram incluídos neste trabalho, à título de apresentar os resultados obtidos por nós no processo de construção dos modelos de campos.

Tabela 3.2: Novos modelos de potenciais obtidos.

Potencial	Super-Potencial	Campo $\phi$	Potencial $V(\phi)$
Oscilador	$W(r) = \frac{1}{2}\omega r - \frac{l+1}{r}$	$\phi = -e^{-\frac{r^2}{2}}$	$V_{OSC}(\phi) = -\frac{\phi^2}{2} \ln(\phi^2)$
Rosen-Morse I	$W(x) = -A \cot(x) - \frac{B}{A}$	$\phi = -\cos(x)$ $\phi = \tan(x)$	$V_{RMI_1}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)$ $V_{RMI_2}(\phi) = (1 + \phi^2)^2$
Scarf I	$W(x) = A \tan(x)(x) - B \sec(x)$	$\phi = \sin(x)$	$V_{SCI}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)$
Pöschl-Teller	$W(x) = -A \tan(x) - \frac{B}{A}$	$\phi = \tan(x)$	$V_{PTR}(\phi) = \phi^3 + \frac{\phi^2}{2}$
Morse	$W(x) = A - Be^{-x}$	$\phi = e^{-e^{-x}}$	$V_M(\phi) = \frac{\phi^2}{8} \ln^2(\phi^2)$

# Capítulo 4

## Método de Deformação

No capítulo 2 consideramos soluções tipo defeito partindo de uma densidade lagrangiana para campos escalares reais bidimensionais  $(1 + 1)$ . Analisamos a energia e a estabilidade das soluções BPS relacionadas a esse tipo de modelos.

Nesta seção trataremos do *método de deformação*, apresentado primeiramente em [20], e que tem se mostrado uma ferramenta bastante útil, visto que pode ser aplicada em várias áreas da física teórica (ver alguns exemplos [23, 34, 35]). O método permite obter potenciais que suportam soluções tipo defeito, partindo de soluções já conhecidas. As novas soluções serão semelhantes as soluções conhecidas, tendo modificações nos seus parâmetros, como, por exemplo, largura e amplitude.

A ideia da deformação dos potenciais é uma ferramenta poderosa, ajuda na resolução de alguns problemas e, apesar de utilizarmos o procedimento apenas para o caso de modelos com um único campo escalar real, é possível também a aplicação em modelos de dois campos, como pode ser visto em [21].

Extensões [36] do modelo possibilitam gerar modelos que suportam soluções tipo “kink” à partir de modelos com solução tipo “lump”, além da criação de modelos de semi-vácuo e paredes de domínios, os quais são de fundamental importância em certos modelos cosmológicos com dimensões extras.

## 4.1 O Procedimento

Na descrição do procedimento partimos de uma densidade lagrangeana onde o campo  $\phi$  é definido sobre um espaço de Minkowski  $(1 + 1)$  dimensional, sendo esse o modelo “original”, e consideraremos apenas as soluções tipo *defeitos*.

A equação de movimento, para o caso estático, tem a forma (2.4)

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (4.1)$$

Considere uma transformação do campo que chamaremos de deformação, denotado aqui por  $\tilde{\phi}(x^\mu)$ , implementado por uma função  $f$ , a qual é chamada de *função deformação*, tal que

$$\phi(x^\mu) = f[\tilde{\phi}(x^\mu)]. \quad (4.2)$$

Assumindo que a função  $f$  possui inversa, a solução deformada  $\tilde{\phi}$  em termos da solução original pode ser obtida invertendo a função  $f$

$$\tilde{\phi}(x^\mu) = f^{-1}[\phi(x^\mu)]. \quad (4.3)$$

Reescrevendo as equações (2.5) e (2.23) em termos do campo deformado, obtemos

$$\frac{d[f(\tilde{\phi})]}{dx} = \sqrt{2V(f(\tilde{\phi}))}, \quad , \quad (4.4)$$

ou

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = \frac{W'(f(\tilde{\phi}))}{f'(\phi)}. \quad (4.5)$$

As soluções da equação (4.5) acima serão os “defeitos deformados”.

## 4.2 O que é o Modelo Deformado?

Partimos de um campo  $\phi$ , o qual chamamos de campo original, e substituímos ele por uma *função deformação* dependente de outro campo, o campo deformado. Ao substituímos em (2.1) obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2}[f'(\tilde{\phi})]^2\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} - V[f(\tilde{\phi}(x^\mu))]. \quad (4.6)$$

a qual pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[f'(\tilde{\phi})]^2 \eta_{\mu\nu}[\tilde{\phi}] \partial^\mu \tilde{\phi} \partial^\nu \tilde{\phi} - V[f(\tilde{\phi}(x^\mu))]. \quad (4.7)$$

Aparentemente temos apenas uma mudança nas variáveis, mas ao reescrevermos a lagrangeana obtemos

$$\mathcal{L} = [f'(\tilde{\phi})]^2 \tilde{\mathcal{L}}, \quad (4.8)$$

onde,  $\tilde{\mathcal{L}}$  é a lagrangeana do modelo deformado. Sendo

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \tilde{V}(\tilde{\phi}). \quad (4.9)$$

O potencial para esse modelo é dado por

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{V(f(\tilde{\phi}))}{[f'(\tilde{\phi})]^2}. \quad (4.10)$$

Analogamente ao modelo original, podemos ter aqui também um super-potencial definido da seguinte maneira

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = \frac{W'(f(\tilde{\phi}))}{f'(\tilde{\phi})} = \tilde{W}'(\tilde{\phi}) \quad (4.11)$$

desde que seja solução da equação ordinária.

Assim, a equação (4.11) é correspondente a equação de primeira ordem do modelo deformado. Formalmente, a solução de (4.11) pode ser escrita como

$$\tilde{W}(\tilde{\phi}) = \int d\tilde{\phi} \frac{1}{f'(\tilde{\phi})} \frac{dW}{d\tilde{\phi}} [f(\tilde{\phi})]. \quad (4.12)$$

Como foi citado nessa seção,  $f$  deve possuir inversa e ser diferenciável. Desse modo é possível determinar o super-potencial. O potencial resulta então dado por

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} [\tilde{W}'(\tilde{\phi})]^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{W'(f(\tilde{\phi}))}{f'(\tilde{\phi})} \right]^2 \quad (4.13)$$

e a equação de movimento do campo deformado é

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} = \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{\phi}} [\tilde{\phi}(x)]. \quad (4.14)$$

## Energia

Para o funcional energia do novo modelo, temos

$$\tilde{E} = \int d\tilde{\phi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right)^2 + \tilde{V}(\tilde{\phi}) \right] \quad (4.15)$$

### 4.3 Exemplo de Aplicação

Apresentamos aqui um exemplo simples desenvolvido em [36] que mostra como deformar o modelo  $\phi^6$ .

Tal modelo é dado por  $V_6(\phi) = \phi^2(1-\phi^2)^2/2$ , possuindo três mínimos degenerados e soluções do tipo  $\phi(x) = \pm\sqrt{[1 \pm \tanh(x)]/2}$ , conectando o vácuo central com os vácuos laterais. Tomando a função de deformação  $f(\phi) = \sinh(\phi)$  e substituindo-a na equação (4.10), obtemos

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \tanh^2(\tilde{\phi}) \left[ 1 - \sinh^2(\tilde{\phi}) \right]^2, \quad (4.16)$$

com as soluções

$$\tilde{\phi}(x) = \pm \arcsinh \left( \sqrt{[1 \pm \tanh(x)]/2} \right). \quad (4.17)$$

Vale notar o seguinte: uma vez que  $f'(\phi) > 1$ , a energia da solução deformada diminui com respeito ao *kink* não deformado. Para sermos mais claros, devemos lembrar a forma como é descrito o potencial deformado

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{V(f(\tilde{\phi}))}{[f'(\tilde{\phi})]^2}. \quad (4.18)$$

Então, para  $f'(\phi) > 1$  temos uma redução no valor do potencial e, conseqüentemente uma redução no valor da energia, vista em (4.15).

Abaixo, temos os gráficos para o modelo  $\phi^6$  original, o modelo  $\phi^6$  e a solução  $\tilde{\phi}(x)$ :

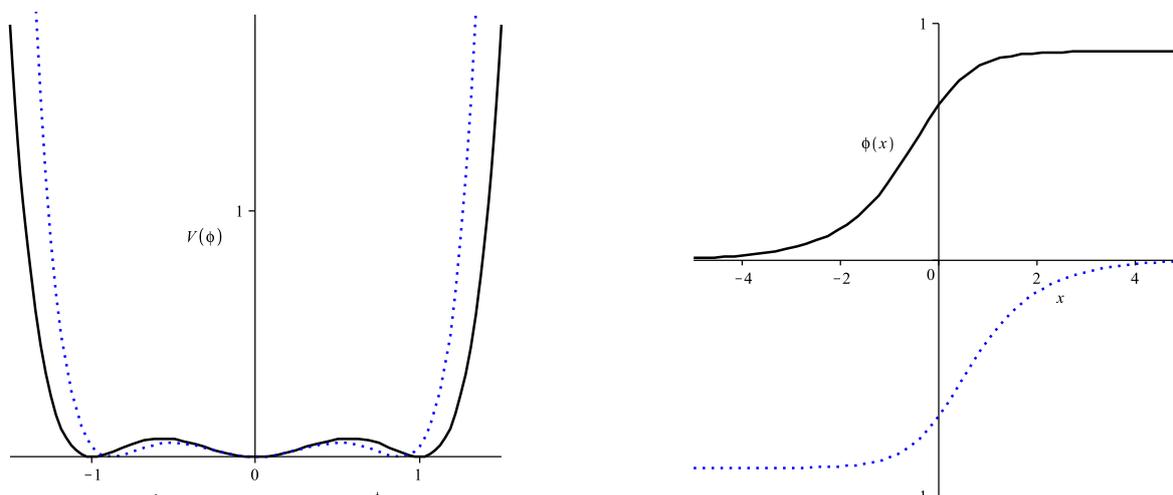


Figura 4.1: À esquerda temos o gráfico de  $\phi^6$ , onde a linha contínua é referente ao modelo original e linha tracejada ao modelo deformado. À direita o gráfico da solução  $\phi(x)$ .

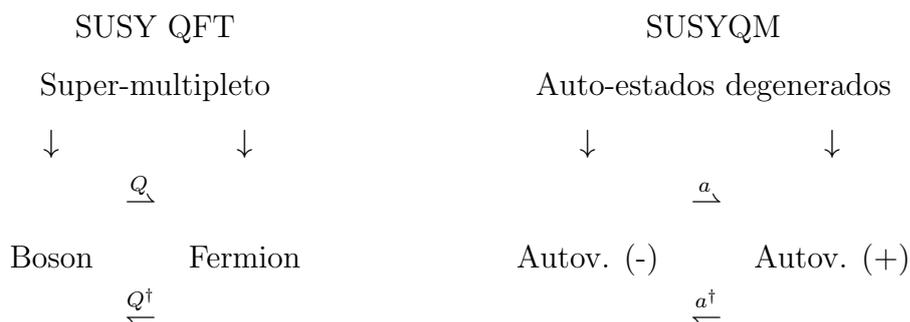
Vimos nesse capítulo o método de deformação que consiste em partir de um modelo original obtermos uma infinidade de modelos deformados devido à escolha da função deformação e mostramos um exemplo da sua utilidade aplicando-o ao modelo de campo escalar real,  $\phi^6$ . Mostraremos posteriormente a utilização desse método para alguns modelos de interesse e construiremos uma nova extensão do método no contexto da mecânica quântica supersimétrica.

# Capítulo 5

## Mecânica Quântica Supersimétrica

Incorporada à mecânica quântica, a supersimetria é sem dúvida uma ferramenta bastante útil e possibilita o desenvolvimento de novas ideias. Partículas parceiras, potenciais parceiros são consequências da utilização da supersimetria.

A SUSY QM foi originalmente formulada por Witten [26] para estudar a quebra da supersimetria em teoria de campos. Apesar de corresponder ao limite em (1+0) dimensões da SUSY, a SUSYQM não relaciona férmions e bósons, já que é aplicada à mecânica quântica de uma partícula. Na verdade, a SUSY QM mapeia auto-estados ortogonais correspondentes a um mesmo autovalor de energia, diferenciando-se no seu autovalor (positivo ou negativo) com relação ao chamado operador de paridade de Witten  $\Delta_F$ .



Nesse capítulo, revisamos as propriedades, básicas da SUSY QM e definiremos as propriedades da invariância de forma.

Através dos métodos de fatorização mostrados na seção anterior e uma condição de integrabilidade, chamada de condição de invariância de forma [37], mostraremos que o método do

operador do oscilador harmônico pode ser generalizado para uma classe inteira de potenciais invariantes de forma (SIP). De fato, nós mostramos que para tais potenciais, o método do operador generalizado, rapidamente produz todos os auto-valores dos estado de energia, auto-funções e matriz de espalhamento. Uma vez que essa aproximação é essencialmente equivalente ao método de fatorização [38, 39] parece ser uma linguagem mais atraente.

## 5.1 Fatorização de Hamiltonianas e degenerescência espectral

Para encontrarmos a solução do espectro de potenciais unidimensionais, relacionamos a função de onda do estado fundamental com o potencial. Uma vez que conhecemos a função de onda do estado fundamental, conhecemos o potencial. Consideremos então o estado de energia fundamental, tal que, para o estado fundamental  $\psi_0(x)$  a equação de Schrödinger (ES) seja

$$H_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + v_1(x)\psi_0(x) = 0 \quad (5.1)$$

tal que

$$v_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (5.2)$$

Dessa maneira, é possível obter o  $v_1$  a partir da função de onda do seu estado fundamental. Sabendo disso, é possível fatorizar  $H_1$  com o seguinte ansatz

$$H_1 = a^\dagger a, \quad (5.3)$$

onde

$$a = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + w(x) \quad , \quad a^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + w(x), \quad (5.4)$$

sendo então o potencial  $v_1$ , dado por

$$v_1 = w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w'(x). \quad (5.5)$$

Esta é a conhecida equação de Riccati. O termo  $w(x)$  se refere ao super-potencial desse modelo na mecânica quântica super-simétrica (SUSY QM). A solução para  $w(x)$  é

$$w(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'}{\psi_0}. \quad (5.6)$$

A solução é obtida ao reconhecermos que a condição  $a\psi_0 = 0$  é satisfeita, onde  $H_1 = a^\dagger a\psi_0 = 0$ .

Agora, vamos construir uma teoria SUSY relacionada a  $H_1$ . Assim como foi feita para esse Hamiltoniano, definimos um novo hamiltoniano apenas invertendo os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  e teremos também um novo potencial  $v_2$ . Logo,  $H_2 = aa^\dagger$ , onde

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_2(x) \quad , \quad v_2(x) = w^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w'(x). \quad (5.7)$$

Como temos uma relação entre os hamiltonianos, os potenciais  $v_1$  e  $v_2$  também estão relacionados e são conhecidos como *potenciais parceiros supersimétricos*.

Veremos que os auto-valores de energia, as funções de onda e a matriz S de  $H_1$  e  $H_2$  estão relacionados. Os autovalores de energia de  $H_1$  e  $H_2$ ,  $E_n^{(1)}$  e  $E_n^{(2)}$  respectivamente, são não-negativos ( $E_n^{(1,2)} \geq 0$ ). Para  $n > 0$ , a ES para  $H_1$  é

$$H_1\psi_n^{(1)} = a^\dagger a\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow H_2(a\psi_n^{(1)}) = aa^\dagger a\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(a\psi_n^{(1)}) . \quad (5.9)$$

Portanto,  $a\psi_n^{(1)}$  é auto-estado de energia  $E_n^{(1)}$  da hamiltoniana  $H_2$ .

Analogamente

$$H_2\psi_n^{(2)} = aa^\dagger\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow H_1(a^\dagger\psi_n^{(2)}) = a^\dagger aa^\dagger\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(a^\dagger\psi_n^{(2)}) \quad (5.11)$$

Assim,  $a^\dagger\psi_n^{(2)}$  é auto-estado de  $E_n^{(2)}$  da hamiltoniana  $H_1$ .

Das equações (5.8), (5.11) e pelo fato de que  $E_0^{(1)} = 0$ , fica claro que os auto-valores e as auto-funções dos dois Hamiltonianos, estão relacionados por

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0 \quad (5.12)$$

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} a \psi_{n+1}^{(1)}, \quad (5.13)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} a^\dagger \psi_n^{(2)}, \quad (5.14)$$

Para  $\psi_{n+1}^{(1)}$  de  $H_1$  normalizado, temos que a função de onda  $\psi_n^{(2)}$ , em (5.13) e (5.14), também é normalizada. Portanto, o operador  $a$  converte uma auto-função de  $H_1$  numa auto-função de  $H_2$ , e destrói um nodo da auto-função. De maneira análoga, para  $\psi_n^{(2)}$  normalizado de  $H_2$ ,  $a^\dagger$  atua de forma semelhante em  $H_1$ , mas criando um nodo extra. Uma vez que o estado fundamental de  $H_1$  é aniquilado pelo operador  $a$ , então ele não possui um parceiro supersimétrico. Desta forma, conhecendo as auto-funções de  $H_1$  podemos construir as auto-funções de  $H_2$ , usando os operadores  $a$  e igualmente para o operador  $a^\dagger$  em  $H_2$ , exceto para o estado fundamental de  $H_1$ .

## 5.2 Formulação supersimétrica da mecânica quântica

A razão por baixo da degenerescência do espectro de  $H_{1,2}$  pode ser compreendida pelas propriedades da álgebra super-simétrica (SUSY). Para isto vamos considerar a matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Esta matriz é parte da álgebra fechada que contém operadores tipo bosônico e tipo fermiônico com relações de comutação e anti-comutação. Nós consideramos os operadores

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

em conjunção com  $H$ . As seguintes relações de comutação e anti-comutação descrevem então a super álgebra fechada  $sl(1/1)$ :

$$\begin{aligned} [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0 \\ \{Q, Q^\dagger\} &= H, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

O fato de que as supercargas  $Q$  e  $Q^\dagger$  comutam com  $H$  é o responsável pela degenerescência do espectro. Podemos interpretar  $Q$  e  $Q^\dagger$  como os operadores que mudam os graus de liberdade do setor bosônico para o fermiônico e sendo válido também o contrário.

A modo de ilustração, veremos agora o caso bem conhecido do potencial poço quadrado infinito e determinaremos seu potencial parceiro SUSY. Considere uma partícula de massa  $m$  em um potencial com comprimento  $L$  e paredes infinitas

$$\begin{aligned} v(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ &= \infty, \quad -\infty < x < 0, > L. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A função de onda do estado fundamental e energia deste problema já são bem conhecidos;

$$\psi_0^{(1)} = (2/L)^{1/2} \sin(\pi x/L), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.19)$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (5.20)$$

O super-potencial correspondente é dado pela equação (5.6),

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot(\pi x/L) \quad (5.21)$$

e, portanto, o potencial parceiro SUSY  $v_2$  é

$$v_2 = w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [2 \csc^2(\pi x/L) - 1]. \quad (5.22)$$

As funções de onda de  $H_2$  são encontradas aplicando o operador  $A$  em  $H_1$ . Em particular encontramos

$$\psi_0^{(2)} \propto \sin^2(\pi x/L), \quad \psi_1^{(2)} \propto \sin(\pi x/L) \sin(2\pi x/L). \quad (5.23)$$

Deste modo nós mostramos que com o uso da SUSY dois potenciais distintos correspondentes a  $H_1$  e  $H_2$  tem exatamente o mesmo espectro, exceto pelo fato de  $H_2$  tem um estado ligado à menos.

## 5.3 Hierarquia de Hamiltonianos

Vimos nas seções precedentes que, se conhecemos a função de onda do estado fundamental de  $H_1$ , podemos determinar o super-potencial  $w_1(x)$  dessa Hamiltoniana e, com os operadores  $a_1$  e  $a_1^\dagger$ , podemos fatorizar  $H_1$ . Vimos também como encontrar  $H_2$  através da fatorização semelhante à feita em  $H_1$ . Para obtermos a função de onda do estado fundamental de  $H_2$  basta apenas aplicarmos  $a_1$  sobre  $\psi_1^{(1)}$ . De forma análoga, podemos ligar  $H_2$  a  $H_3$ , esse possuindo um estado ligado a menos que  $H_2$ . De forma direta, podemos dizer que podemos criar uma família de Hamiltonianos, partindo de um Hamiltoniano onde se tenha a função de onda do estado fundamental. Ou seja, sabendo a solução para o problema descrito por  $H_1$ , podemos solucionar os auto-valores de energia e as auto-funções de onda para uma hierarquia de Hamiltonianos criadas através de refatorizações. Vamos exemplificar o que foi dito acima.

Na última seção vimos que se o estado fundamental de energia de  $H_1$  é zero, este pode ser escrito de forma fatorizável como um produto de dois operadores diferenciais lineares. Sendo  $E_{(0)}^1$  a energia do estado fundamental de  $H_1$  com auto-função  $\psi_{(0)}^1$ , então usando (5.3), temos a seguinte forma para  $H_1$

$$H_1 = a_1^\dagger a_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + v_1(x), \quad (5.24)$$

onde

$$a_1 = \frac{d}{dx} + w_1(x) \quad , \quad a_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + w_1(x) \quad \text{com} \quad w_1(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(1)}}{dx}, \quad (5.25)$$

e, por simplicidade, fizemos  $\hbar = 2m = 1$ .

O potencial parceiro SUSY é

$$H_2 = a_1 a_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + v_2(x), \quad (5.26)$$

de onde

$$v_2(x) = w_1^2 + w_1' + E_0^{(1)} = v_1(x) + 2w_1' = v_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)} \quad (5.27)$$

Através de (5.12), (5.13) e (5.14), podemos, analogamente, relacionar  $H_2$  a um terceiro Hamiltoniano reescrevendo  $H_2$  na forma

$$H_2 = a_1 a_1^\dagger + E_0^{(1)} = a_2^\dagger a_2 + E_1^{(1)}, \quad (5.28)$$

onde

$$a_2 = \frac{d}{dx} + w_2(x), \quad a_2^\dagger = -\frac{d}{dx} + w_2(x) \quad \text{com} \quad w_2(x) = -\frac{d \ln(\psi_0^{(2)})}{dx}. \quad (5.29)$$

Seguindo o que foi feito para  $H_2$ , obtemos para  $H_3$

$$H_3 = a_2 a_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + v_3(x). \quad (5.30)$$

Podemos ligar o potencial  $v_3(x)$  ao potencial  $v_1(x)$ , por

$$\begin{aligned} v_3(x) &= w_2^2 + w_2' + E_1^{(1)} = v_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(2)} \\ &= v_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln(\psi_0^{(1)}(\psi_0^{(2)})) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Portanto

$$\begin{aligned} E_n^{(3)} &= E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}, \\ \psi_n^{(3)} &= [E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} a_2 \psi_{n+1}^{(2)}, \\ &= [E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} [E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} a_2 a_1 \psi_{n+2}^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dessa maneira, é claro que se a Hamiltoniana original  $H_1$  tem ( $p \geq 1$ ) estados ligados com auto-valores de energia  $E_n^{(1)}$ , e auto-funções  $\psi_n^{(1)}$  com  $0 \leq n \leq (p-1)$ , então, podemos gerar uma hierarquia de  $(p-1)$  hamiltonianas ( $H_2, \dots, H_p$ ), tal que o  $m$ -ésimo termo tenha o mesmo auto-valor do espectro que  $H_1$ , exceto que os primeiros  $(m-1)$  auto-valores de  $H_1$  não estão presentes no espectro de  $H_m$ . Então, para o caso geral, podemos escrever

$$H_m = a_m^\dagger a_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + v_m(x), \quad (5.33)$$

onde

$$a_m = \frac{d}{dx} + w_m(x), \quad w_m(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(m)}}{dx}. \quad (5.34)$$

Temos também

$$\begin{aligned} E_n^{(m)} &= E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \\ \psi_n^{(m)} &= [E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} \dots [E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots a_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \\ V_m(x) &= -2\frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln(\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(m-1)}) \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

Desta maneira, conhecendo os auto-valores e auto-funções de  $H_1$  sabemos todas as auto-funções e auto-valores de energia da hierarquia de  $(p-1)$  Hamiltonianos.

## 5.4 Invariância de Forma e Potenciais Solucionáveis

Existe uma condição extra na relação entre hamiltonianas parceiras que, quando satisfeita, permite solucionar completamente a hierarquia de hamiltonianos, incluso a solução da  $H_1$ , “semente” da família de hamiltonianas. Essa propriedade é chamada de invariância de forma e é explicada a seguir.

Considere dois potenciais parceiros. Se eles são similares em suas formas, mas diferem apenas por uma constante, dependendo somente dos parâmetros do potencial, eles são dito invariantes de forma. De maneira mais clara, eles são invariantes de forma se obedecem a condição

$$v_2(x; a_1) = v_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (5.36)$$

onde  $a_1$  é um conjunto de parâmetros,  $a_2$  é uma função de  $a_1$  e o termo restante  $R(a_1)$  é independente da coordenada  $x$ . A condição (5.36) é uma condição de integrabilidade, no sentido que, usando a condição de hierarquia dos Hamiltonianos, podemos facilmente obter os auto-valores de energia e as auto-funções de um SIP, resolvendo o problema em forma completa.

### 5.4.1 Categorização de SIP's

Discutiremos agora uma questão importante sobre a classificação dos potenciais/famílias de hamiltonianas que cumprem com a condição de invariância de forma (5.36).

O problema referente a classificação de forma geral ainda está por resolver, mas duas classes foram encontradas e estudadas.

Todos os potenciais exatamente solúveis descobertos até o momento são invariantes de forma por translação, e, como mostrado recentemente em [40], todos aqueles sistemas cujo superpotencial não depende de  $\hbar$  explicitamente, podem ser obtidos como solução de casos particulares da equação de Euler, que expressa a conservação do impulso linear de um fluido viscoso em uma dimensão espacial. Portanto, para o trabalho desenvolvido aqui, vamos nos ater a classe onde os parâmetros se relacionam por translação ( $a_2 = a_1 + \alpha$ ). Sobre a outra classe, que relaciona os parâmetros por escalamento, ( $a_2 = qa_1$ ), comentaremos de forma breve

no final do capítulo.

### Invariância de Forma por Translação

Vamos apontar um passo fundamental em classificar os SIP's nos caso de  $a_2 = a_1 + \alpha$  [41]. Primeiramente devemos notar o fato de que o espectro de auto-valores da ES é sempre de modo que o  $n$ -ésimo auto-valor  $E_n$  para  $n$  grande, obedeça a restrição [42]:

$$1/n^2 \leq E_n \leq n^2 \quad (5.37)$$

onde o estado mais ligado é limitado pelo potencial de poço quadrado e o menos ligado é saturado pelo potencial coulombiano. Deste modo, para um SIP, a estrutura de  $E_n$  para  $n$  muito grande é esperada que seja da forma

$$E_n \sim \sum_{\alpha} C_{\alpha} n^{\alpha}, \quad -2 \leq \alpha \leq 2. \quad (5.38)$$

sendo  $E_n$  dado por

$$E_n(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k); \quad E_0(a_1) = 0 \quad (5.39)$$

então

$$R(a_k) \sim \sum_{\gamma} k^{\gamma}, \quad -3 \leq \gamma \leq 1 \quad (5.40)$$

Como implementar essa restrição em  $R(a_k)$ ? Para isso não há uma resposta completa, mas de forma razoável, uma forma geral de fatorização de  $W(x; a_1)$ , a qual produz um  $R(a_k)$ , é dado por [2].

$$W(x; a_1) = \sum_{i=1}^m (k_i + c_i) g_i(x) + h_i(x)/(k_i + c_i) + f_i(x) \quad (5.41)$$

onde

$$a_1 = (k_1, k_2 \dots), \quad a_2 = (k_1 + \alpha, k_2 + \beta) \quad (5.42)$$

com  $c_i, \alpha, \beta$  sendo constantes. Podemos notar que o ansatz exclui todos os potenciais levando a  $E_n$  com potencias fracionárias de  $n$ . Usando o ansatz acima em (5.36) podemos obter as

condições para satisfazer as funções  $g_i(x)$ ,  $h_i(x)$ ,  $f_i(x)$ . Uma importante condição é certamente a que apenas os potenciais  $W$  são admissíveis, os quais dão uma função de onda do estado fundamental de quadrado integrável. Uma vez que estas não são soluções no caso de  $m \geq 3$  na equação (5.41), enquanto há apenas duas soluções no caso de  $m = 2$ , ou seja,

$$W(x; a_1) = (k_1 + c_1)g_1(x) + (k_2 + c_2)g_2(x) + f_1(x) \quad (5.43)$$

o qual é dado por

$$W(r; A, B) = A \tanh \alpha r - B \coth \alpha r, \quad A > B > 0, \quad (5.44)$$

e

$$W(r; A, B) = A \tan \alpha x - B \cot \alpha x, \quad A, B > 0, \quad (5.45)$$

onde  $0 \leq x \leq \pi/2\alpha$  e  $\psi(x = 0) = \psi(x = \pi/2\alpha) = 0$ . Para a simples possibilidade de  $m = 1$ , temos um número de soluções para (5.36). Em [43], temos as expressões para vários SIPs  $V_1(x)$ , super-potenciais  $W(x)$ , parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ , e os correspondentes auto-valores de energia  $E_n^{(1)}$  [43, 44].

### Exemplo de invariância por Translação

Para ilustrar o que foi dito até aqui, vamos considerar o super-potencial dado em (5.45). Os potenciais parceiros correspondentes são

$$\begin{aligned} v_1(x; A + \alpha, B + \alpha) &= -(A + B)^2 + A(A - \alpha) \sec^2 \alpha x + B(B - \alpha) \csc^2 \alpha x \\ v_2(x; A, B) &= -(A + B)^2 + A(A - \alpha) \sec^2 \alpha x + B(B + \alpha) \csc^2 \alpha x \end{aligned} \quad (5.46)$$

os quais são chamados de potenciais de Pöschl-Teller. Eles são potenciais parceiros invariantes de forma, desde que

$$v_2(x; A, B) = -v_1(x; A + \alpha, B + \alpha) + (A + B + 2\alpha)^2 - (A + B)^2 \quad (5.47)$$

e neste caso

$$\{a_1\} = (A, B); \quad \{a_2\} = (A + \alpha, B + \alpha) \quad \text{e} \quad R(a_1) = (A + B + 2\alpha)^2 - (A + B)^2. \quad (5.48)$$

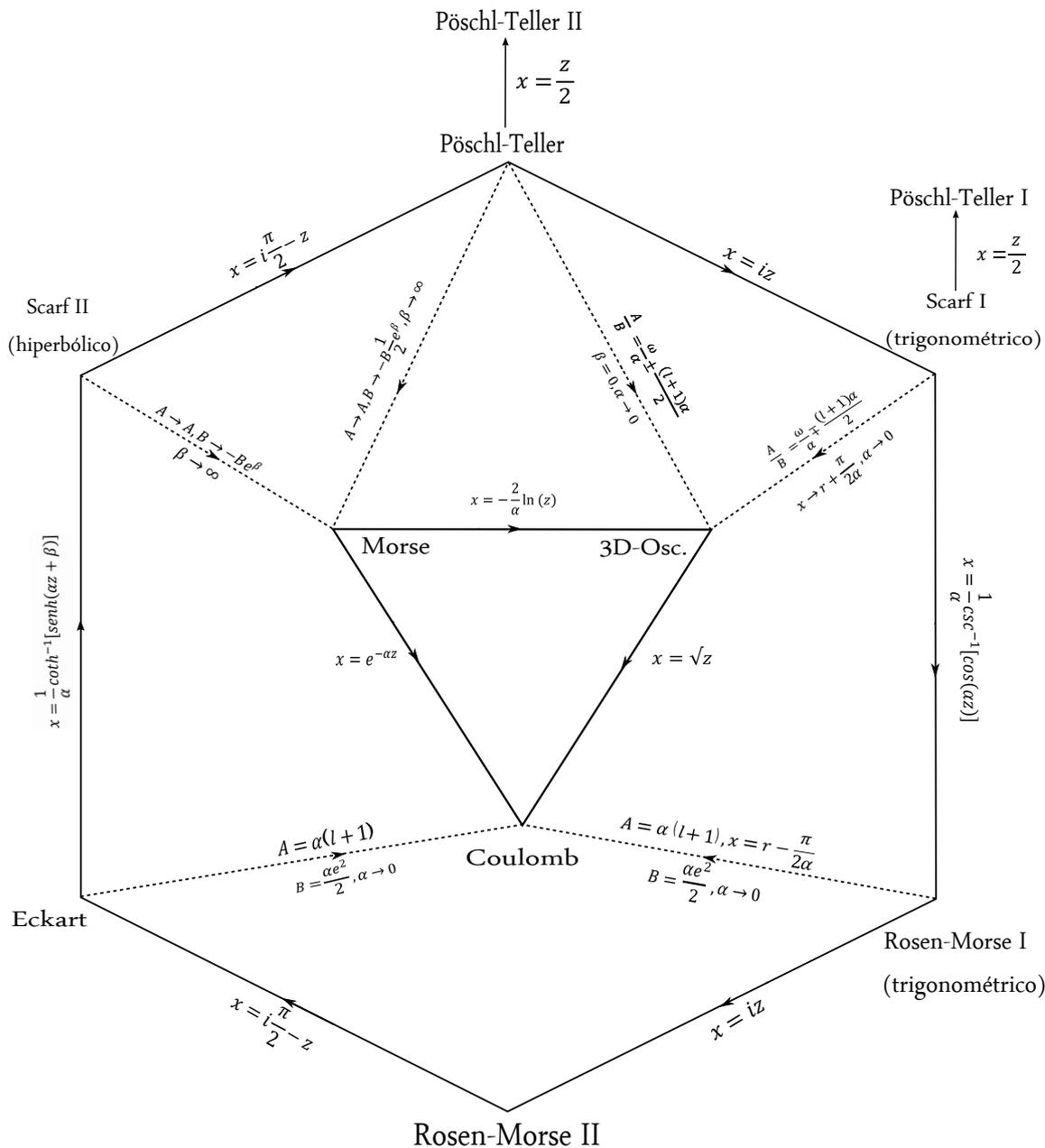


Figura 5.1: A figura acima mostra as relações entre os potenciais supersimétricos. As relações dadas pelas linhas pontilhadas são as transformações canônicas pontuais. Figura extractada de [2]

Vimos em (5.39), que os auto-valores de energia do potencial  $v_1(x; A, B)$  são dados por

$$E_n^1 = \sum_{k=1}^n R(a_k) = (A + B + 2n\alpha)^2 - (A + B)^2. \quad (5.49)$$

A função de onda do estado fundamental de  $v_1(x; A, B)$  é calculada do super-potencial  $w$  mostrado em (5.45). Encontramos

$$\psi_0^{(1)}(x; A, B) \propto (\cos \alpha x)^s (\sin \alpha x)^\lambda \quad (5.50)$$

onde  $s = A/\alpha$  e  $\lambda = B/\alpha$ .

O fato de que  $A, B > 0$ , assumido em (5.45), é uma condição necessária para garantir que  $\psi_0^{(1)}(x; A, B)$  seja bem comportado e, portanto, aceitável para  $x \rightarrow 0, \pi/2\alpha$ .

### Invariância de Forma por Escalamento

Outra classe SIP's é obtido por escalamento dos potenciais onde a relação dos parâmetros se dá por ( $a_2 = qa_1, 0 < q < 1$ ), uma escolha motivada pelo recente interesse na álgebra de Lie q-deformada [45]. Muitos desses potenciais tem um número infinito de estados, mas nenhum é obtido de forma fechada, sendo obtidos apenas na forma de série. É feita uma expansão do super-potencial na forma

$$w(x; a_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) a_1^j. \quad (5.51)$$

O super-potencial com dependência em  $a_2$ , obedece a seguinte igualdade

$$w(x; a_2) = \sqrt{q} w(\sqrt{q} x a_1). \quad (5.52)$$

correspondendo ao super-potencial auto-similar  $W$  de Shabat and Spiridnov [46, 47].

### Invariância de Forma Multi-Passo

Além das formas de classificação mostradas até aqui, como translação e escalamento, existem outras. Como exemplo, podemos citar:  $a_2 = qa_1^p$  com  $p = 2, 3, \dots$  e  $a_2 = qa_1/(1 + pa_1)$ .

Além do mais, as soluções invariantes de forma podem ser realizadas em vários passos. Para isso, usamos o ansatz  $a_2 = qa_1$  e expandimos os super-potenciais  $w$  e  $\tilde{w}$ :

$$w(x; a_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) a_1^j; \quad \tilde{w}(x; a_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) a_1^j. \quad (5.53)$$

---

Abordamos nesse capítulo a mecânica quântica super-simétrica, e as características presentes nos potenciais super-simétricos. Dentre elas, a possibilidade de mapeamento entre potenciais, terá relevância maior de nossa parte, já que faz parte de um ciclo envolvendo, potenciais a nível clássico e quântico.

# Capítulo 6

## Mapeamento de Potenciais SUSY via Deformação de Campos

Como vimos no capítulo 3, o método de deformação permite mapear modelos de campos escalares com soluções tipo defeito. Vimos também, no capítulo 4, como construir modelos de campos escalares a partir de um operador hamiltoniano, interpretado como o operador que conserva a dinâmica da perturbação em torno da solução clássica. E por fim, no capítulo anterior, estudamos os potenciais parceiros invariantes de forma da mecânica quântica supersimétrica

No presente capítulo, construiremos um caminho alternativo para mapear os potenciais invariantes de forma, fazendo uso do método de deformação aplicado aos modelos de campos clássicos, reconstruídos a partir das hamiltonianas invariantes de forma.

### 6.1 Mapeamento de Potenciais Parceiros via Transformações Canônicas Pontuais

Existem na literatura vários trabalhos discutindo a conexão entre potenciais solúveis em mecânica quântica. Veja por exemplo [1, 6, 48]. Os potenciais invariantes de forma apresentados em [2] podem ser mapeados entre eles através de transformações em seus parâmetros. A modo de ilustração vamos nos concentrar nas chamadas transformações canônicas pontuais,

exploradas em [1] e revisadas em [2].

Apresentaremos abaixo um exemplo de como é feito o mapeamento entre os SIP's. Considere o potencial de Rosen-Morse I (trigonométrico) dado por:

$$V(x) = -A^2 + \frac{B^2}{A^2} + 2B \tan(\alpha x) + A(A - \alpha) \sec^2(\alpha x). \quad (6.1)$$

Fazemos então as seguintes mudanças nos parâmetros  $A$  e  $B$ , e na variável  $x$ :

$$A \rightarrow \alpha(l+1), \quad B \rightarrow \frac{\alpha e^2}{2}; \quad x \rightarrow r - \pi/2\alpha$$

Dessa maneira, o potencial (6.1) toma a forma,

$$V(r) = -\alpha^2(l+1)^2 + \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \alpha e^2 \tan\left(\alpha r - \frac{\pi}{2}\right) + \alpha^2(l^2 + l) \sec^2\left(\alpha r - \frac{\pi}{2}\right).$$

Agora tomamos o limite quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , o que nos leva à

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (6.2)$$

O resultado obtido acima é o potencial de Coulomb associado a uma partícula de carga  $e$ . A tabela 6.1 resume todos os mapeamentos deste tipo conhecidos, mostrando o potencial invariante de forma, a mudança nos seus parâmetros e, por fim, o potencial no qual se chega com as substituições.

## 6.2 Deformação de Potenciais Parceiros

Até aqui, falamos, entre outros assuntos, na construção de modelos de campos escalares e o método de deformação. Tais tópicos terão um papel importante para o nosso trabalho, já que aplicaremos o procedimento para deformar os modelos de potenciais mostrados anteriormente. Ao fazermos isso, encontramos uma forma de mapeá-los através da função deformação. Aplicaremos o método aos modelos de Scarf, Morse e Pöschl-Teller, utilizando os modelos construídos por nós e os que se encontram em [16,17]. Devemos lembrar que os potenciais citados acima, podem ser mapeados através de mudanças em seus parâmetros (como pode ser visto no exemplo do capítulo 5). Então, é conhecido como eles estão relacionados no nível quântico. Ao determinarmos a função deformação que nos leva de um modelo a outro, podemos dizer que temos uma nova relação, no nível clássico. Vamos ao procedimento.

Potencial	Parâmetros	Potencial Mapeado
Rosen-Morse (trigonométrico) $V(x) = -A^2 + \frac{B^2}{A^2} + 2B \tan(\alpha x) + \frac{A(A-\alpha)}{\cos^2(\alpha x)}$	$A \rightarrow \alpha(l+1), B \rightarrow \frac{\alpha e^2}{2}$ $x \rightarrow r - \pi/2\alpha, \alpha \rightarrow \infty$	Coulomb $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}$
Pöschl-Teller $V(x) = A^2 + \frac{(B^2+A^2+A\alpha)}{\sinh^2(\alpha r)} - \frac{B(2A+\alpha) \cosh(\alpha r)}{\sinh^2(\alpha r)}$	$A \rightarrow \frac{\omega}{\alpha} - \frac{\alpha(l+1)}{2}, \alpha \rightarrow \infty$ $B \rightarrow \frac{\omega}{\alpha} + \frac{\alpha(l+1)}{2}$	Oscilador $V(r) = -\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2 r^2}{4} + [l + \frac{3}{2}] \omega$
Scarf (hiperbólico) $V(x) = A^2 + \frac{(B^2+A^2+A\alpha)}{\cosh^2(\alpha x + \beta)} + \frac{B(2A+\alpha) \sinh(\alpha x + \beta)}{\cosh^2(\alpha x + \beta)}$	$B \rightarrow \frac{B}{2} e^\beta$ $\beta \rightarrow \infty$	Morse $V(x) = A^2 + \frac{4B^2}{e^{2\alpha x}} - \frac{2B(2A+\alpha)}{e^{\alpha x}}$
Eckart $V(r) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} + \frac{A(A-\alpha)}{\sinh^2(\alpha r)} + 2B \coth(\alpha r)$	$A \rightarrow \alpha(l+1), \alpha \rightarrow \infty$ $B \rightarrow \frac{\alpha e^2}{2}$	Coulomb $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}$
Scarf (trigonométrico) $V(r) = -A^2 + \frac{(B^2+A^2-A\alpha)}{\cos(\alpha x)^2} - \frac{B(2A+\alpha) \tan(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}$	$A, B \rightarrow \frac{\omega}{\alpha} \mp \frac{\alpha(l+1)}{2}$ $x \rightarrow r + \frac{\pi}{2\alpha}, \alpha \rightarrow 0$	Oscilador $V(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4} + \frac{l(l+1)}{r^2} - (l + \frac{3}{2}) \omega$

Tabela 6.1: Resumo do mapeamento entre os SIP's mostrados em [2]

via transformações canônicas pontuais.

### 6.2.1 Scarf II (hiperbólico) $\rightarrow$ Morse

Iniciaremos considerando o modelo construído a partir do potencial de Scarff, presente na tabela (3.1)

Este modelo possui soluções BPS é caracterizado por

$$V_{SII}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 \quad , \quad \phi = \tanh(x) \quad (6.3)$$

No campo deformado ( $\tilde{\phi}$ ), utilizamos o do modelo de Morse, o qual possui soluções tipo defeito, sendo dado por

$$\tilde{V}_M(\tilde{\phi}) = \frac{\tilde{\phi}^2}{8} \ln^2(\tilde{\phi}^2) \quad , \quad \phi = e^{-e^{-x}}. \quad (6.4)$$

Substituímos os potenciais apresentados acima, em (4.10), a qual será rearranjada, e lembrando que, seguindo a prescrição de deformação dada em (??), o campo original  $\phi$  será substituído por  $f(\tilde{\phi})$ . Dessa forma, chegamos a:

$$f'(\tilde{\phi}) = \sqrt{\frac{V(f(\tilde{\phi}))}{\tilde{V}(\tilde{\phi})}}$$

$$\Rightarrow f'(\tilde{\phi}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-f(\tilde{\phi})^2)^2}}{\sqrt{\frac{1}{8}\tilde{\phi}^2 \ln^2(\tilde{\phi}^2)}} \Leftrightarrow \frac{df(\tilde{\phi})}{2(1-f(\tilde{\phi})^2)} = \frac{d\tilde{\phi}}{\tilde{\phi} \ln \tilde{\phi}^2}.$$

Ao integrarmos ambos os lados,

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} [f(\tilde{\phi})] = \frac{1}{2} \ln [\ln(\tilde{\phi}^2)]. \quad (6.5)$$

Finalmente, isolamos a função  $f$  para determinarmos a função deformação

$$f(\tilde{\phi}) = \tanh \left\{ \ln \left[ \ln \left( \tilde{\phi}^2 \right) \right] \right\}. \quad (6.6)$$

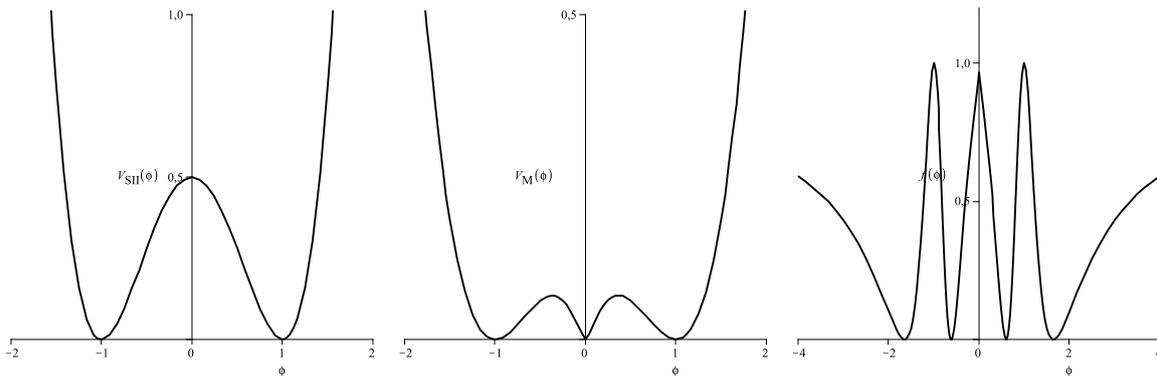


Figura 6.1: À esquerda temos o gráfico do potencial de Scarf II, ao centro o do potencial de Morse e na direita, o da função deformação que os conecta.

Aqui, foi obtido um resultado favorável, já que foi possível a realização do mapeamento entre potenciais apresentando soluções BPS. Assim, o resultado mostrado em (6.6) tem importância fundamental para a motivação da nossa pesquisa.

### 6.2.2 Pöschl-Teller $\rightarrow$ Morse

Em uma segunda aplicação, adotaremos como original ( $\phi$ ), o modelo de campos correspondente ao potencial Pöschl-Teller (ver tabela (3.2)).

Apesar de não apresentar um caráter topológico, usaremos esse modelo para realizar o mapeamento, a fim de apresentar uma relação fechada envolvendo as transformações canônicas, a construção dos modelos e o método de deformação, que é motivação para nosso trabalho.

Como vimos, o método de deformação parte de um modelo de “campo original” ( $\phi$ ) e um campo deformado ( $\tilde{\phi}$ ). Para o campo original usamos o modelo Pöschl-Teller dado por

$$V_P(\phi) = \phi^3 + \frac{\phi^2}{2} \quad , \quad \phi(x) = -\frac{1}{\cosh(x) + 1} \quad (6.7)$$

Para o modelo deformado, iremos reutilizar o modelo de Morse (6.4) da subseção anterior. Dessa forma, temos:

Substituímos os potenciais apresentados acima, em (4.10), a qual será rearranjada, e lembrando que, seguindo a prescrição de deformação dada em (??), o campo original  $\phi$  será substituído por  $f(\tilde{\phi})$ . Dessa forma, chegamos a:

$$\begin{aligned} f'(\tilde{\phi}) &= \sqrt{\frac{V(f(\tilde{\phi}))}{\tilde{V}(\tilde{\phi})}} = \sqrt{\frac{f^3(\tilde{\phi}) + f^2(\tilde{\phi})/2}{\frac{1}{8}\tilde{\phi}^2 \ln^2(\tilde{\phi}^2)}} \\ \Rightarrow \frac{df(\tilde{\phi})}{f(\tilde{\phi})\sqrt{f(\tilde{\phi}) + 1/2}} &= \frac{d\tilde{\phi}}{\sqrt{\frac{1}{8}\tilde{\phi} \left| \ln(\tilde{\phi}^2) \right|}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Realizamos uma integração em ambos os lados da igualdade, resultando em:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{2\tilde{\phi} + 1} \right) &= \sqrt{2} \ln (\ln(\phi^2)) \\ \Rightarrow \sqrt{2\tilde{\phi} + 1} &= -\tanh \left\{ \frac{1}{2} \ln [\ln(\phi^2)] \right\} \\ \Rightarrow 2f(\tilde{\phi}) + 1 &= \tanh^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln [\ln(\phi^2)] \right\}, \end{aligned}$$

Do resultado acima, obtemos:

$$f(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \tanh^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln [\ln(\phi^2)] \right\} - \frac{1}{2}. \quad (6.9)$$

O módulo na equação (6.8) indica e restringe a positividade função. Em seguida, o módulo foi retirado nas realizações dos cálculos. A função (6.9) apresenta uma descontinuidade devido a presença do  $\ln$  no argumento.

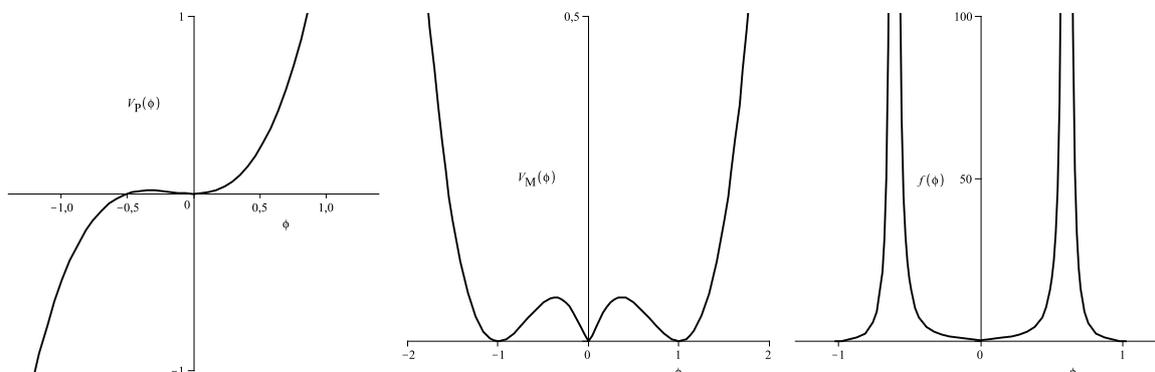


Figura 6.2: À esquerda temos o gráfico do potencial Pöschl-Teller, ao centro o Morse e à direita o gráfico da função deformação que os relacionam.

Apesar do modelo relacionado ao potencial Pöschl-Teller não ser uma solução tipo defeito, no intervalo  $[-1/2, 0]$  ela possui validade. Temos então que a região  $[0, 1/2]$  não seria parte do mapeamento. Logo, esse intervalo assemelha-se a uma extensão analítica, de forma seria uma forma de mapear a parte não negativa no modelo do potencial de Morse.

### 6.2.3 Scarf II (hiperbólico) $\rightarrow$ Morse Modificado

Faremos ainda, uma outra aplicação usando os modelos dos potenciais de Scarf II, da equação (6.3), e o Morse, porém consideramos um modelo de Morse modificado, na forma

$$V_m(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 \ln^2(B\tilde{\phi}) \quad , \quad \phi = e^{-Be^{-x}}. \quad (6.10)$$

Continuaremos usando o Scarf II como campo original ( $\phi$ ) e o Morse como campo deformado ( $\tilde{\phi}$ ). Então,

$$\begin{aligned} f'(\tilde{\phi}) &= \sqrt{\frac{V(f(\tilde{\phi}))}{\tilde{V}(\tilde{\phi})}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-f(\tilde{\phi}))^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 \ln B\tilde{\phi}}} \\ \Rightarrow \frac{df(\tilde{\phi})}{(1-f(\tilde{\phi}))} &= \frac{d\tilde{\phi}}{\tilde{\phi} \ln(B\tilde{\phi})}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Realizamos uma integração em ambos os lados da igualdade mostrada acima, resultando em

$$\operatorname{arctanh}(f(\tilde{\phi})) = \ln(\ln(B\tilde{\phi})). \quad (6.12)$$

Finalmente, chegamos à

$$f(\tilde{\phi}) = \tanh \left\{ \ln \left[ \ln(B\tilde{\phi}) \right] \right\}. \quad (6.13)$$

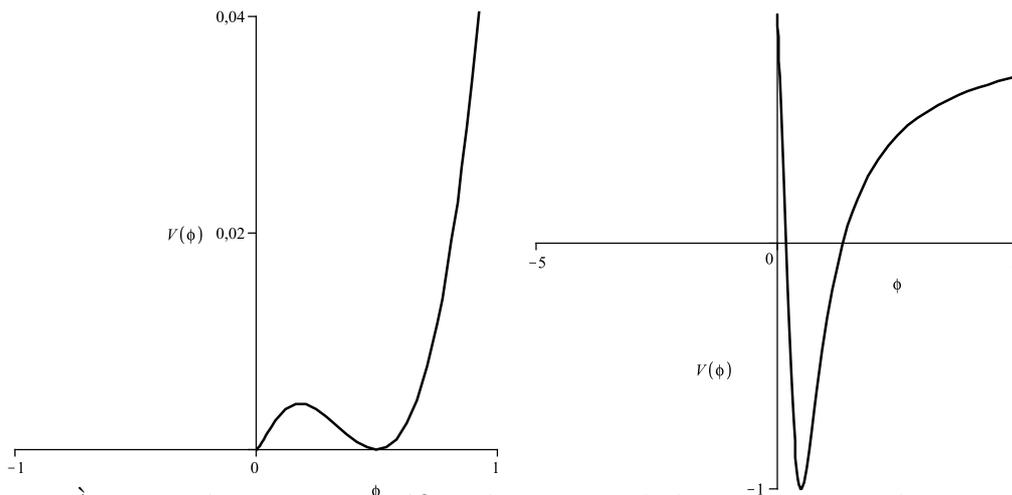


Figura 6.3: À esquerda temos o gráfico do potencial de Morse e na direita, o da função deformação

Apesar de termos encontrado a função deformação que mapeia os modelos, este resultado foi introduzido aqui, apenas por apresentar uma relação completa entre todos os procedimentos utilizados. Mas por usarmos dois modelos que não apresentam soluções BPS, o método de deformação não é válido.

Com a determinação da função deformação, podemos notar que conseguimos determinar um ciclo fechado entre os potenciais utilizados em cada caso. Por exemplo, o potencial de Scarf pode ser mapeado no potencial de Morse através de transformações de suas variáveis e parâmetros, propostas em [2]. Nos dando uma relação no nível quântico. Ao construirmos modelos teóricos de campos e relacioná-los, como foi mostrado mais acima, pela função deformação, isso nos dá um entendimento no nível dos campos clássicos. Assim, o mapeamento nesses dois âmbitos, nos dá uma visão geral entre os potenciais que foram tratados.

# Capítulo 7

## Interpretação BPS da Invariância de Forma

Um primeiro passo na compreensão do fenômeno de invariância de forma do ponto de vista algébrico foi dado no trabalho [49]. Mais recentemente, em [7], foi desvendada uma relação existente entre equações-energia BPS e a invariância de forma. Isto foi conseguido considerando um operador extra, acrescentado a álgebras supersimétricas estendidas com cargas centrais. Por outro lado, essa mesma descoberta, levou à implementação na SUSYQM, de uma dualidade do espaço *target*, semelhante às observadas em teoria de cordas e “modelos-Sigma” [50].

Nesse contexto, resulta lógica a pergunta da existência de uma relação entre os sistemas de SUSYQM invariantes de forma e os modelos de teoria clássica de campos, que suportam estruturas BPS. O primeiro passo nessa direção consiste em construir as versões estendidas com carga central das álgebras de SUSYQM para os sistemas conhecidos com invariância de forma. Isto foi realizado no trabalho [7].

Neste capítulo revisaremos essa proposta. Então, em seguida construiremos as álgebras estendidas para os modelos estudados nos capítulos precedentes. Numa segunda etapa deverão ser construídas as teorias clássicas de campos correspondentes para, então, analisar a possível relação entre as dualidades no espaço *target* e os mapas entre modelos de campos.

## 7.1 Supersimetria com Cargas Centrais

Considere os operadores  $Q$  e  $Q^\dagger$ , agora com a seguinte forma

$$Q = \begin{pmatrix} -\eta & 0 \\ a & \eta \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} -\eta & a^\dagger \\ 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

sendo  $\eta$  um  $c$ -número real.

Tal mudança, afeta diretamente a super-álgebra (5.17), transformando-a para

$$\{Q, Q^\dagger\} = H \quad (7.2)$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0 \quad (7.3)$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = Z, \quad (7.4)$$

visto que agora aparece a carga central  $Z$ . A álgebra acima implica em  $[Q, Z] = [Q^\dagger, Z] = 0$ , bem como  $H \geq |Z|$ , sendo

$$H = \begin{pmatrix} a^\dagger a + 2\eta^2 & 0 \\ 0 & a a^\dagger + 2\eta^2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 2\eta^2 & 0 \\ 0 & 2\eta^2 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Note que, quando  $Z = 0$ , voltamos ao caso onde os operadores não possuem cargas centrais, os quais designamos agora por

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Podemos notar que  $Q = \tilde{Q} - \eta\Gamma$  ( $\Gamma = \sigma_3$ ), o que nos dá a possibilidade de escrever a hamiltoniana como

$$H = \{\tilde{Q}, \tilde{Q}^\dagger\} + |Z|, \quad (7.7)$$

desde que  $Z = \{\eta\Gamma, \eta\Gamma\}$ . Devemos notar também que  $H \geq |Z|$ .

É importante citar que, para o caso de cargas centrais não-nulas, temos  $\{Q, \Gamma\} \neq 0$ . Dessa forma, na presença de cargas centrais, não há mapeamento de um setor  $\Gamma$  em outro setor  $\Gamma$ .

Até aqui, aplicamos a álgebra (7.4) em um sistema quântico de dois setores<sup>1</sup>. Podemos estender esse método para um caso com  $2N$  setores. Para isso, colocamos blocos  $2 \times 2$  ao

<sup>1</sup>Sistema de dois setores referente ao descrito no capítulo 5.

longo da diagonal principal de uma matriz  $2N \times 2N$ . Vejamos então, um exemplo para o caso de um modelo com quatro setores. As supercargas são dadas por:

$$Q = \left( \begin{array}{cc|cc} -\eta_1 & 0 & & \\ a_1 & \eta_1 & & \\ \hline & & -\eta_3 & 0 \\ & & a_3 & \eta_3 \end{array} \right), \quad Q^\dagger = \left( \begin{array}{cc|cc} -\eta_1 & a_1^\dagger & & \\ 0 & \eta_1 & & \\ \hline & & -\eta_3 & a_3^\dagger \\ & & 0 & \eta_3 \end{array} \right). \quad (7.8)$$

A hamiltoniana e a carga central são diagonais, sendo os espectros divididos em quatro setores nomeados diagonalmente. O setores 1 e 2 possuem degenerescência, sendo a energia limitada inferiormente por  $2\eta_1^2$ , assim como os setores 3 e 4 possuem degenerescência, tendo a energia limitada inferiormente por  $2\eta_3^2$ . Os setores 1 e 3, possuem estados que saturam seus respectivos limites de energia. Para cada par de setor degenerado nós temos uma *parceria*. Generalizando do caso anterior, vemos que os operadores que comutam com estados degenerados em parceiras são junções dos operadores correspondentes do caso de dois setores. No modelo de quatro setores esses operadores são

$$\tilde{Q} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ a_1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & a_3 & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{Q}^\dagger = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & a_1^\dagger & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & a_3^\dagger \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (7.9)$$

O espectro dividido em parcerias, consiste de um setor ímpar seguido por um par (1-2, 3-4, etc.). Sendo  $j$  um setor ímpar, então  $j$  e  $j + 1$  estão ligados por uma constante  $\eta_j^2$ . Apénas os setores ímpares tem estados com energia  $\eta_j^2$ , de outra forma haveria degenerescência entre os setores ímpares e pares.

### 7.1.1 A Origem Algébrica da Invariância de Forma

O espectro dos níveis de energia na SUSY com uma carga central, tem, de certo modo, uma semelhança com os espectros dos níveis de energia que surgem na SI. No entanto, a SI possui duas

características adicionais. A primeira, se refere ao fato da degenerescência ocorrer também entre setores adjacentes pares e ímpares de parcerias distintas. A segunda característica é que o estado de energia mais baixo em cada setor (incluindo os setores pares) satisfaz um equação de primeira ordem tipo Bogomol'nyi.

Para incorporar a primeira característica na descrição algébrica é necessário introduzir um operador que não apenas mapeia os níveis degenerados nas parcerias, mas também mapeia níveis de setores adjacentes, os quais se encontram em parcerias distintas. Logo, para encontrar este operador iniciamos com uma hamiltoniana de quatro setores, construída com os operadores dados em (7.8):

$$H = \begin{pmatrix} a_1^\dagger a_1 + 2\eta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 a_1^\dagger + 2\eta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^\dagger a_3 + 2\eta_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 a_3^\dagger + 2\eta_3^2 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

O operador  $\tilde{Q}$  de (7.9) esclarece a degenerescência entre as parcerias que surgem da superálgebra; vamos então modificá-lo, incluindo uma entrada onde haja um mapeamento do setor 2 no setor 3 requerendo que este novo operador seja conservando <sup>1</sup>. Portanto, definimos o operador deslocamento S por

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

e buscamos determinar se podemos escolher  $C$  tal que  $[H, S] = 0$ . Como veremos em seguida, o modelo SI corresponde ao caso onde isso é possível. Para ver isso, primeiro impomos a condição que  $[H, S] = 0$ , e encontramos que isso é válido quando  $a_1^\dagger$  é SI, com duas condições auxiliares:

---

<sup>1</sup>A ideia é que S é um operador de simetria, que introduzirá uma degenerescência extra

$a_3$  e  $a_1$  estão relacionados por uma transformação unitária [7];  $\eta_3$  e  $\eta_1$  são relacionados de tal forma que as linhas dos níveis de energia estejam ajustadas (degeneradas).

Usando a matriz  $S$  (7.11), a condição que  $H$  e  $S$  comutam, nos leva a

$$a_3^\dagger a_3 C - a_1 a_1^\dagger + 2(\eta_3^2 - \eta_1^2)C = 0. \quad (7.12)$$

A equação acima sugere uma relação entre  $a_1$  e  $a_3$ . Supomos então uma transformação unitária:

$$a_3 = \Omega a_1 \Omega^\dagger. \quad (7.13)$$

A condição que  $a_1$  e  $a_3$  sejam unitariamente relacionadas pode ser imposta sobre a condição de comutatividade (7.12). Usando o operador unitário  $U$ , onde  $U^2 = \Omega$ , a equação resultante pode ser escrita na forma

$$\tilde{C} \tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger \tilde{a}_1 \tilde{a}_1^\dagger = 2(\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_1) \tilde{C} \quad (7.14)$$

onde,  $\tilde{a}_1 = a_1 U$ ,  $\tilde{C} = UC$  e  $\tilde{\eta}_j = U \eta_j U$ . Devemos encontrar um operador  $\tilde{C}$  o qual nos leve a solução de (7.14). Para isso usamos o ansatz  $\tilde{C} = \tilde{a}_1$ , que nos leva a

$$\left\{ \tilde{a}_1, \left[ \tilde{a}_1, \tilde{a}_1^\dagger \right] \right\} = 2(\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_1) \tilde{a}_1. \quad (7.15)$$

Deste modo, a conservação de  $S$  só ocorre se o lado esquerdo de (7.15) for proporcional a  $\tilde{a}_1$ . Essa condição é satisfeita se existir um  $c$ -número <sup>2</sup>  $\kappa$ , tal que

$$\left[ \tilde{a}_1, \tilde{a}_1^\dagger \right] = \kappa. \quad (7.16)$$

Assim

$$\{\kappa, \tilde{a}_1\} = 2(\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_1) \tilde{a}_1. \quad (7.17)$$

Se reescrevermos a expressão acima em termos das quantidades originais, obtemos

$$\kappa + U^\dagger \kappa U = 2(\eta_3^2 - \eta_1^2) \quad (7.18)$$

Quando as condições (7.16) e (7.18) são cumpridas, a condição que  $[H, S] = 0$  é satisfeita.

---

<sup>2</sup>Um  $c$ -número depende apenas dos parâmetros da função, como  $R(a_1)$  visto em csip

Vamos refazer o resultado acima na ordem inversa. Supomos que  $a_1^\dagger a_1$  é SI. Então,

$$a_1 a_1^\dagger - U_1^\dagger a_1^\dagger a_1 U_1 = \kappa . \quad (7.19)$$

onde  $\kappa$  é um  $c$ -número e  $U$  implementando um deslocamento nos parâmetros da teoria. Com esta condição satisfeita podemos construir múltiplos setores da tendo  $H = a_1^\dagger a_1 + 2\eta_1^2$  como a hamiltoniana do primeiro setor. Para esta teoria de multi setores, definimos

$$a_3 = (U^\dagger)^2 a_1 (U)^2 \quad (7.20)$$

$$2\eta_3^2 = 2\eta_1^2 + \kappa + U^\dagger \kappa U \quad (7.21)$$

O operador deslocamento toma a forma

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U^\dagger a_1 U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U^{\dagger 2} a_1 U^2 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.22)$$

enquanto a hamiltoniana para o segundo setor pode ser escrita como  $H_2 = (U^\dagger A_1 U)^\dagger (U^\dagger A_1 U) + \eta_1^2 + \kappa$ .

Desta maneira, vemos que a descrição algébrica da invariância de forma corresponde a teoria SUSY estendida centralmente e acrescida de um operador deslocamento  $S$ . A generalização do operador deslocamento na teoria de  $2N$  setores é dada por

$$S = U \mathbf{U}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{U} , \quad (7.23)$$

onde  $\mathbf{U} = \text{diag}(1, U, \dots, U^{2N-1})$  e  $\mathbf{a}_{i,j} = a_1 \delta_{i,j+1}$ .

## 7.2 Caráter BPS da Invariância de Forma

Agora, vamos mostrar em que forma a álgebra da super-simetria estendida centralmente, adicionada com o operador deslocamento  $S$ , apresenta um caráter BPS.

Por simplicidade consideremos o caso de 4 setores.

Devido a (7.10), (7.19) e (7.20), a hamiltoniana se relaciona com  $S$ , de maneira simples:

$$H = S^\dagger S + B, \quad (7.24)$$

onde  $B$  é a matriz diagonal que, exceto pelo último termo da diagonal, consiste inteiramente de  $c$ -números. Dessa forma, temos

$$B = \begin{pmatrix} 2\eta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta_1^2 + \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta_1^2 + \kappa + U^\dagger \kappa U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_4 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Observando a expressão (7.14), notamos que, escrita dessa maneira, a hamiltoniana (que descreve a energia do sistema quântico) tem estrutura idêntica à concebida no método de Bogomol'nyi. (veja equação (2.20))

De fato, os três primeiros termos da diagonal, tem a energia limitada por  $B_{kk}$ , que joga o papel da energia de Bogomol'nyi ( $H_\kappa \geq (B)_{\kappa\kappa}$ ). Este limite é saturado apenas por estados anulados pelo operador diferencial de primeira ordem  $S$  (estados fundamentais dos três primeiros setores), sendo essa condição de anulação, equivalente à equação de Bogomol'nyi para estados BPS.

Se considerarmos a teoria completa dos quatro setores, a identidade  $S^4 = 0$  implica que um multipletto de estados degenerados consiste de quatro estados. Os multipletos nos quais os três primeiros setores satisfaz em  $S\psi = 0$  são encurtados, contudo, com um, dois e três estados, respectivamente. Certamente, nada é especial sobre o modelo de quatro setores, é possível estender facilmente esses resultados para uma teoria com um número arbitrário de setores [7]. No modelo com  $2N$ , a estrutura BPS ainda é mantida, com  $S$  como em (7.23) e

$$\begin{aligned} H &= S^\dagger S + B \\ B &= \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_{2N-1}, H_{2N}) \\ b_1 &= 2\eta_1^2 \\ b_{j+1} &= b_j + (U^\dagger)^{j-1} \kappa U^{j-1} \end{aligned}$$

Nos primeiros  $2N - 1$  setores, o estado fundamental satura o limite de Bogomol'nyi  $H = B$ , e esse estado é anulado pelo operador diferencial de primeira ordem. Por conta das degene-

rescências produzidas pela conservação de  $S$ , estes valores limites de Bogomol'nyi são também as energias dos primeiros  $2N - 1$  estados de  $H_1$ . Estes  $2N - 1$  valores de energia mais baixos de  $H_1$  são parte de um multipletto reduzido (desde que  $S^{2N} = 0$ , multipletos de comprimento  $2N$  são a norma); o  $j$ -ésimo nível de energia de  $H_1$  pode ser obtido aplicando  $S^\dagger$  repetidamente ao estado fundamental saturado de Bogomol'nyi do  $j$ -ésimo setor. Enquanto para um valor finito de  $2N$ , a estrutura BPS aplica-se apenas para os primeiros  $2N - 1$  setores e níveis de energia, isto não é uma limitação fundamental; como o processo inteiro pode ser iterado para um número arbitrário de valores de  $2N$ , de fato, todos os níveis de energia de  $H_1$  (e, de fato, das hamiltonianas com as quais estão associada via invariância de forma) se ajustam dentro dessa ferramenta algébrica.

### Exemplos

A fim de comparar a invariância de forma pela mudança de parâmetro e por meio da atuação do operador  $\mathbf{U}$  – veja Apêndice 8– apresentaremos alguns casos aplicando os dois métodos.

- **Morse**

Iniciamos com o potencial de Morse, que é caracterizado por:

$$V_1(x; A, B) = A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A + \frac{\alpha}{2} \right), \quad (7.26)$$

cujo potencial parceiro é:

$$V_1(x; A, B) = A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (7.27)$$

Ao realizarmos uma mudança no parâmetro do tipo  $A \rightarrow A - \alpha$  em (7.27), obtemos:

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A - \frac{\alpha}{2} \right) - 2A\alpha + \alpha^2. \quad (7.28)$$

Comparando (7.27) e (7.28), chegamos a seguinte igualdade,

$$V_2(x; A, B) = V_1(x; A - \alpha, B) + 2A\alpha - \alpha^2, \quad (7.29)$$

onde  $\{a_1\} = (A, B)$ ,  $\{a_2\} = (A - \alpha, B)$  e  $R(a_1) = -2A\alpha + \alpha^2$ .

Faremos agora a aplicação do operador  $U$ , dado por

$$U = \left\{ 1 - \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \right\} \quad (7.30)$$

sobre o potencial (7.26). Assim, temos

$$\begin{aligned} UV_1(x) &= \left\{ 1 - \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \right\} \left\{ A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A + \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \\ &= A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A + \frac{\alpha}{2} \right) - 2A\alpha + 2B e^{-\alpha x} + \alpha^2. \\ &= A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left( A - \frac{\alpha}{2} \right) - 2A\alpha + \alpha^2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

É possível ver que, usando o operador, chegamos ao mesmo resultado da variação no parâmetro.

#### • Scarf II

O potencial e Scarf II e o seu potencial parceiro, são caracterizados por

$$V_1(x; A, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 - A\alpha)}{\cosh^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} \quad (7.32)$$

$$V_2(x; A, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cosh^2(\alpha x)} + B(2A - \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} \quad (7.33)$$

Uma mudança de parâmetro do tipo  $A \rightarrow A - \alpha$ , no potencial (7.32), nos leva a

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cosh^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} - 2A\alpha + \alpha^2 \quad (7.34)$$

Comparando (7.34) com (7.33), é fácil ver que:

$$V_2(x; A, B) = V_1(x; A - \alpha, B) + 2A\alpha - \alpha^2. \quad (7.35)$$

Aplicando o operador  $U$  ao potencial (7.32), temos

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cosh^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} - 2A\alpha + \alpha^2. \quad (7.36)$$

O resultado acima é o mesmo obtido em (7.34).

#### • Poschl-Teller

Para esse caso, o potencial e o potencial parceiro são:

$$V_1(r; A, B) = A^2 + \frac{(A^2 + B^2 + A\alpha)}{\sinh^2(\alpha r)} - B(2A + \alpha) \frac{\cosh(\alpha r)}{\sinh^2(\alpha r)} \quad (7.37)$$

$$V_2(r; A, B) = A^2 + \frac{(A^2 + B^2 - A\alpha)}{\sinh^2(\alpha r)} - B(2A - \alpha) \frac{\cosh(\alpha r)}{\sinh^2(\alpha r)} \quad (7.38)$$

Assim como nos casos anteriores, realizamos a mudança  $A \rightarrow A - \alpha$  em (7.37). Com isso,

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 + \frac{(A^2 + B^2 - A\alpha)}{\sinh^2(\alpha x)} - B(2A - \alpha) \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh^2(\alpha x)} - 2A\alpha + \alpha^2 \quad (7.39)$$

nos levando novamente a igualdade

$$V_2(x; A, B) = V_1(x; A - \alpha, B) + 2A\alpha - \alpha^2. \quad (7.40)$$

Usando agora o operador  $U$ , temos

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 + \frac{(A^2 + B^2 - A\alpha)}{\sinh^2(\alpha x)} - B(2A - \alpha) \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh^2(\alpha x)} - 2A\alpha + \alpha^2 \quad (7.41)$$

#### • Scarf I

Neste último caso temos,

$$V_1(x; A, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 - A\alpha)}{\cos^2(\alpha x)} - B(2A - \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cos^2(\alpha x)} \quad (7.42)$$

$$V_2(x; A, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cos^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cos^2(\alpha x)} \quad (7.43)$$

A mudança de parâmetro neste caso é do tipo  $A \rightarrow A + \alpha$ . Fazendo essa mudança no potencial (7.42), nos leva a

$$V_1(x; A - \alpha, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cos^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cos^2(\alpha x)} - 2A\alpha - \alpha^2 \quad (7.44)$$

Comparando (7.44) com (7.43), é fácil ver que:

$$V_2(x; A, B) = V_1(x; A - \alpha, B) + 2A\alpha + \alpha^2. \quad (7.45)$$

Aqui o operador  $U$ , é dado por

$$U = \left\{ 1 + \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \right\}. \quad (7.46)$$

Assim, aplicando o operador em (7.42), obtemos

$$V_1(x; A + \alpha, B) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 + A\alpha)}{\cos^2(\alpha x)} + B(2A + \alpha) \frac{\sinh^2(\alpha x)}{\cos^2(\alpha x)} - 2A\alpha - \alpha^2. \quad (7.47)$$

Mostrando mais uma vez que o operador e a mudança de nos parâmetros nos levam ao mesmo resultado.

# Capítulo 8

## Comentários e Perspectivas

No trabalho aqui apresentado fizemos uma abordagem alternativa, via teoria clássica de campos, da inter-relação existente entre sistemas quânticos unidimensionais que apresentam a propriedade de invariância de forma.

O interesse principal nessa propriedade reside em que todos os sistemas quânticos unidimensionais completamente solúveis conhecidos caem dentro dessa classe.

A inter-relação entre os potenciais invariantes de forma se manifesta através de mapeamentos nas coordenadas e parâmetros chamados transformações canônicas pontuais. Nosso estudo foi construído por um caminho completamente diferente, aproveitando o conhecimento de dois fatos: a análise da estabilidade das soluções clássicas leva a operadores tipo Schrödinger fatorizáveis, o que naturalmente se encaixa no contexto da mecânica quântica supersimétrica e a invariância de forma; a possibilidade de se estabelecer mapas entre modelos de campos escalares e suas soluções tipo defeito (método de deformação).

Portanto, em cada contexto (clássico ou quântico) observamos uma maneira de mapear os potenciais: se tratando de potenciais quânticos com invariância de forma, o mapeamento conhecido é feito através de transformações canônicas pontuais nos parâmetros dos potenciais. Já, para os potenciais escalares associados via operador flutuação, usamos o método de deformação.

De maneira concreta, analisamos os modelos de potenciais encontrados na literatura, onde é mostrado quais se relacionam e as mudanças necessárias para realizar o mapeamento. Para vários desses potenciais, fizemos a reconstrução de modelos clássicos de campos escalares. Os

---

resultados foram resumidos na Tabela 3.2.

Do ponto de vista conceitual, a ideia é simples e poderia ser aplicada de uma maneira formal, mas, durante o processo de reconstrução, vimos que isso não era possível para todos os potenciais.

Isto foi devido a duas complicações que surgem no procedimento: (i) Nem sempre é possível realizar a integração requerida em 3.6, para valores arbitrários dos parâmetros dos potenciais; (ii) a inviabilidade de realizar a inversão da solução para se obter a variável (coordenada) como função do campo e construir o potencial (3.7).

Por outro lado, verificamos que, dentre os modelos de campos reconstruídos, alguns não suportam soluções BPS. Visto que a ideia da reconstrução é baseada na identificação das hamiltonianas supersimétricas com o operador flutuação obtido ao estudarmos a estabilidade de soluções BPS, os modelos cujas soluções não saturam o limite de Bogomol'nyi, não possuem um operador flutuação a elas relacionado. Contudo, incluímos tais modelos no intuito de avaliarmos a aplicabilidade do método de reconstrução. Assim, esses resultados nos possibilitam classificar as hamiltonianas que podemos relacionar com o comportamento de perturbações quânticas em torno de soluções tipo defeito.

Após as reconstruções dos modelos de campos, efetuamos um novo mapeamento, utilizando o método de deformação. Novamente, encontramos dificuldades durante o mapeamento dos modelos de campos suportando soluções tipo defeito, já que estamos lidando com equações não lineares.

Os casos mais bem sucedidos na hora de aplicar a deformação foram obtidos ao se relacionar os modelos associados aos potenciais Pöschl-Teller→Morse e Scarf II → Morse.

Dentre os modelos mapeados no capítulo 6, o resultado do caso Scarf II→Morse (ver Tabelas 3.1 e 3.2) foi o mais satisfatório, desde que ambos os modelos mapeados apresentam soluções BPS. Dos outros dois casos, um apresenta soluções BPS somente “de um lado do mapa” e o outro não apresenta tais soluções e foi apresentado apenas para reforçar a ideia inicial do trabalho, e evidenciar as dificuldades encontradas no processo.

Como conclusão do trabalho, obtivemos um resultado satisfatório ao conseguirmos obter uma relação fechada entre os potenciais, mostrando a viabilidade de uma maneira alternativa de estudarmos as relações entre potenciais invariantes de forma explorando a sua relação com

---

estruturas BPS.

Como perspectivas futuras do presente trabalho podemos identificar vários assuntos que ficaram em aberto. A continuação natural do estudo aqui apresentado, seria o de se investigar, no caso dos potenciais envolvidos na relação “Transformações Canônica Pontual  $\rightarrow$  Reconstrução de modelos clássicos  $\rightarrow$  Método de deformação”, qual seria a relação entre as características BPS presentes nos dois níveis. Em particular, se há alguma manifestação identificável da carga topológica carregada pelo defeito e a auto-função do estado fundamental.

O caminho para se entender essa relação, o primeiro passo seria realizar uma discussão mais profunda da estrutura algébrica dos sistemas invariantes de forma, no sentido de se explorar se a relação entre diferentes modelos invariantes de forma tem uma correlação com algum operador semelhante ao operador deslocamento  $S$ , descrito no Capítulo 7. Para isso deveria-se investigar primeiramente os mapas entre potenciais “parceiros” para, na sequência, considerar potenciais invariantes de forma relacionados pelas transformações canônicas pontuais.

Uma outra investigação interessante de ser feita é analisar se existe uma base algébrica por trás dos mapeamentos entre modelos de campos construídos com o método de deformação, semelhante a encontrada entre potenciais invariantes de forma.

Por último, uma outra questão em aberto é a de se identificar em que forma deve ser estendida a álgebra supersimétrica (qual seria o equivalente ao operador  $S$ ) para dar conta dos casos de invariância de forma por escalamento dos parâmetros, descritos no final da Seção 5.4.

# Apêndice

## A.1. O operador momento como gerador de translações

Na mecânica quântica, o operador posição  $X$  e o operador momento  $P = -i\hbar d/dx$  satisfazem a relação de comutação  $[X, P] = -i\hbar$ .

Considere uma transformação implementada pelo operador

$$U_P(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha P} \left( = e^{\alpha \frac{d}{dx}} \right) \quad (1)$$

sobre o espaço de Hilbert. O seu efeito será

$$\text{Sobre um Estado } |\psi\rangle: \quad |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha P} |\psi\rangle$$

$$\text{Sobre um Observável } O: \quad O \rightarrow O' = O'(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha P} O e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha P}$$

Realizamos uma expansão de Taylor (deslocamento infinitesimal) obtemos

$$O'(\alpha) = O - \frac{i}{\hbar}\alpha [P, O] + \frac{1}{2}\left(-\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 [P, [P, O]] + \dots$$

Assim, se  $O = x$  temos:  $[P, X] = -\frac{i}{\hbar} \Rightarrow [P, [P, X]] = [P, -i\hbar] = 0$ . Logo

$$\Rightarrow X'(\alpha) = X + \alpha$$

Portanto,  $U_P(\alpha)$  definido em (1), implementa a translação da coordenada  $X$  em  $\alpha$ .

Se o observável é uma função (analítica) arbitrária dos operadores de posição e momento,  $O = f(X, P)$ , a ação do operador unitário  $U$  é, simplesmente,  $O' = f(X', P')$ . Assim, uma função que depende somente da coordenada, cumpre  $O = f(X) \rightarrow O'(\alpha) = f(X') = f(X + \alpha)$ . Esta relação pode ser diretamente generalizada ao caso de 3 dimensões espaciais.

Seguindo esta ideia, podemos propor um operador unitário que gere uma translação, agindo sobre o espaço dos parâmetros do nosso operador hamiltoniano.

## A.2. Operador translação de parâmetro $U(\hat{\alpha})$

A invariância de forma existente entre potenciais parceiros, permite obter o potencial  $V_2$  a partir de  $V_1$  ao fazermos uma translação em um dos seus parâmetros. Diferentemente do que ocorre com a simples permutação de  $a$  e  $a^\dagger$ , a translação do parâmetro gera um termo adicional referente a energia do estado ligado. Este mesmo processo pode ser realizado através do operador  $\hat{U}$  aplicado ao potencial. Ele tem a propriedade de efetuar uma translação no parâmetro e possui a seguinte forma

$$\hat{U} = \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial A}\right) = 1 + \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} + \dots \quad (2)$$

Usaremos o potencial de Morse para fazer a comparação entre os dois casos.

- Mudança de Parâmetro.

O potencial de Morse é dado por:

$$V = A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (3)$$

Fazendo a mudança de parâmetro  $A \rightarrow A - \alpha$ , chegamos a

$$V = A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A - \frac{\alpha}{2}\right) - 2A\alpha + \alpha^2 \quad (4)$$

- Aplicando o operador  $\hat{U}$

Agora aplicamos  $\hat{U}$  sobre o potencial (para os cálculos usamos uma função teste  $f(A)$ ), obtendo

$$\hat{U}V = A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A - \frac{\alpha}{2}\right) - 2A\alpha + \alpha^2. \quad (5)$$

Vemos o mesmo resultado nos dois casos, mostrando que é possível gerar toda uma hierarquia de potenciais com o uso do operador e conseguir o mesmo resultado obtido com a mudança no parâmetro.

# Referências Bibliográficas

- [1] Asim Gangopadhyaya, Prasanta K. Panigrahi, and Uday P. Sukhatme. Interrelations of solvable potentials. *Helv.Phys.Acta*, 67:363–368, 1994.
- [2] Fred Cooper, Avinash Khare, and Uday Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys.Rept.*, 251:267–385, 1995.
- [3] Thomas Curtright and David Fairlie. Morphing quantum mechanics and fluid dynamics. *J.Phys.*, A36:8885–8902, 2003.
- [4] C.V. Sukumar. Supersymmetry, Potentials With Bound States at Arbitrary Energies and Multi - Soliton Configurations. *J.Phys.*, A19:2297–2316, 1986.
- [5] Qin-mou Wang, Uday P. Sukhatme, Wai-Yee Keung, and Tom D. Imbo. Solitons From Supersymmetry. *Mod.Phys.Lett.*, A5:525, 1990.
- [6] Jose Orlando Organista, Marek Nowakowski, and H.C. Rosu. Shape invariance through Crum transformation. *J.Math.Phys.*, 47:122104, 2006.
- [7] Michael Faux and Donald Spector. A BPS interpretation of shape invariance. *J.Phys.*, A37:10397–10407, 2004.
- [8] D.J. Korteweg and D. de Vries. On the change or form of long waves advancing in a retagunlar canal, and on a new typeof long stationary waves. *Phil.mag.*, 39:422–443.
- [9] Mirjam Cvetič. Topological defects in the moduli sector of string theory. 1991.
- [10] Alejandro Gangui. Topological defects in cosmology. 2001.

- 
- [11] Julien Garaud and Egor Babaev. Topological defects in mixtures of superconducting condensates with different charges. *Phys.Rev.*, B89:214507, 2014.
- [12] Nikos Platis, Ioannis Antoniou, and Leandros Perivolaropoulos. Dilatonic Topological Defects in 3+1 Dimensions and their Embeddings. 2014.
- [13] Yevgeny V. Stadnik and Victor V. Flambaum. New Atomic probes for Dark Matter detection: Axions, Axion-like particles and Topological Defects. 2014.
- [14] M. Cristina Diamantini and Carlo A. Trugenberger. Higgsless superconductivity from topological defects in compact BF terms. 2014.
- [15] E.B. Bogomolny. Stability of Classical Solutions. *Sov.J.Nucl.Phys.*, 24:449, 1976.
- [16] G. Junker and P. Roy. Construction of (1+1)-dimensional field models with exactly solvable fluctuation equations about classical finite-energy configurations. *Annals Phys.*, 256:302–319, 1997.
- [17] G. Flores-Hidalgo and N. F. Svaiter. Constructing bidimensional scalar field theory models from zero mode fluctuations. *Phys.Rev.*, D66:025031, 2002.
- [18] C N Kumar. Isospectral hamiltonians: generation of the soliton profile. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(15):5397, 1987.
- [19] L.J. Boya and J. Casahorran. QUANTUM MASSES FOR A GENERAL FAMILY OF BIDIMENSIONAL KINKS. *Phys.Rev.*, D41:1342, 1990.
- [20] D. Bazeia, L. Losano, and J.M.C. Malbouisson. Deformed defects. *Phys.Rev.*, D66:101701, 2002.
- [21] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, and J. Mateos Guilarte. Orbit-based deformation procedure for two-field models. *Phys.Rev.*, D76:025010, 2007.
- [22] D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes. Defect structures in sine-Gordon-like models. *Physica*, D208:236–256, 2005.

- 
- [23] D. Bazeia and L. Losano. Deformed defects with applications to braneworlds. *Phys.Rev.*, D73:025016, 2006.
- [24] C.dos Santos and D. Rubiera-Garcia. Deforming solitons in generalized Abelian Higgs models. 2011.
- [25] D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, and J. Mateos Guilarte. Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions. *Phys.Rev.*, D73:105008, 2006.
- [26] Edward Witten. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl.Phys.*, B188:513, 1981.
- [27] Fred Cooper and Barry Freedman. Aspects of Supersymmetric Quantum Mechanics. *Annals Phys.*, 146:262, 1983.
- [28] J. Wess and B. Zumino. Supergauge Transformations in Four-Dimensions. *Nucl.Phys.*, B70:39–50, 1974.
- [29] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. (Editora Livraria da Física, Sao Paulo, SP), 2004.
- [30] E. J. Saletan and J. V. Jose. *Classical Dynamics*. (Cambridge University Press), 1998.
- [31] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. (Add. Wesley), 1980.
- [32] R. Jackiw. Quantum Meaning of Classical Field Theory. *Rev.Mod.Phys.*, 49:681–706, 1977.
- [33] G. Junker. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*. Berlin, 1996.
- [34] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, and J. Mateos Guilarte. Constructing networks of defects with scalar fields. *Phys.Lett.*, B662:75–79, 2008.
- [35] A.E.R. Chumbes, A.E. Obispo Vasquez, and Marcelo Hott. Reconstruction of deformed defects in field theory from deformed zero modes and applications. *Europhys.Lett.*, 98:31004, 2012.
- [36] C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano, and J.M.C. Malbouisson. New results for deformed defects. *Phys.Rev.*, D69:067702, 2004.

- 
- [37] L.E. Gendenshtein. Derivation of Exact Spectra of the Schrodinger Equation by Means of Supersymmetry. *JETP Lett.*, 38:356–359, 1983.
- [38] Erwin Schrodinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc.Roy.Irish Acad.(Sect.A)*, 46:9–16, 1940.
- [39] L. Infeld and T.E. Hull. The factorization method. *Rev.Mod.Phys.*, 23:21–68, 1951.
- [40] Jonathan Bougie, Asim Gangopadhyaya, and Jeffry V. Mallow. Generation of a Complete Set of Supersymmetric Shape Invariant Potentials from an Euler Equation. *Phys.Rev.Lett.*, 105:210402, 2010.
- [41] Fred Cooper, Joseph N. Ginocchio, and Avinash Khare. Relationship Between Supersymmetry and Solvable Potentials. *Phys.Rev.*, D36:2458–2473, 1987.
- [42] Michael Martin Nieto. HYDROGEN ATOM AND RELATIVISTIC PI MESIC ATOM IN N SPACE DIMENSIONS. *Am. J. Phys.*, 1979.
- [43] Ranabir Dutt, Avinash Khare, and Uday P. Sukhatme. Supersymmetry, Shape Invariance and Exactly Solvable Potentials. *Am.J.Phys.*, 56:163–168, 1988.
- [44] G. Levai. A Search for Shape Invariant Solvable Potentials. *J.Phys.*, A22:689–702, 1989.
- [45] F.A. Brito and A.A. Marinho. q-Deformed Landau diamagnetism problem embedded in D-dimensions. *Physica*, A390:2497–2503, 2011.
- [46] A Shabat. The infinite-dimensional dressing dynamical system. *Inverse Problems*, 8(2):303, 1992.
- [47] Vyacheslav Spiridonov. Exactly solvable potentials and quantum algebras. *Phys.Rev.Lett.*, 69:398–401, 1992.
- [48] R De, R Dutt, and U Sukhatme. Mapping of shape invariant potentials under point canonical transformations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(13):L843, 1992.

- 
- [49] S. Chaturvedi, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, C. Rasinariu, et al. Algebraic shape invariant models. *Phys.Lett.*, A248:109–113, 1998.
- [50] D. Spector. BPS and duality in supersymmetric quantum mechanics. *Int.J.Mod.Phys.*, A20:6288–6297, 2005.