



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Condensado de Píons

Fernando José de Almeida Gama

CAMPINA GRANDE
-Abril 2011-

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Condensado de Píons

Fernando José de Almeida Gama

CAMPINA GRANDE

- Abril 2011 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Condensado de Píons

Fernando José de Almeida Gama

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Abril 2011 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

G184c

Gama, Fernando José de Almeida.

O condensado de Píons / Fernando José de Almeida Gama. —
Campina Grande, 2011.

58 f. : il. col.

Dissertação (Mestrado em Física)- Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva.

1. Mesons - pi. 2. Física das Partículas. 3. Hádrons. 4.
Condensados. I. Título.

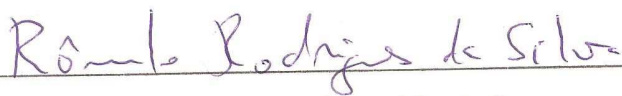
CDU – 539.126.34(043)

FERNANDO JOSÉ DE ALMEIDA GAMA

"O CONDENSADO DE PÍONS"

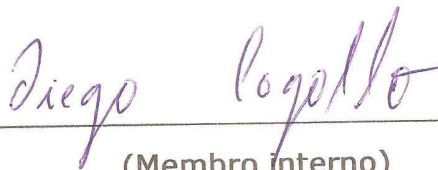
Dissertação aprovada em 29/04/2011

BANCA EXAMINADORA



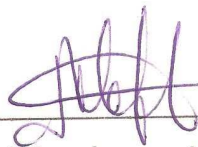
(Presidente)

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponte
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof.ª Dr.ª Morgana Lígia de Farias Freire
Departamento de Física - UEPB

*A meus queridos pais
José Adelmo Gama (in memoriam) e
Ayde Mesquita Almeida Gama
A minha mulher Jacqueline
e meus filhos: Renato, Juliana e Lucas.*

AGRADECIMENTOS

- A Deus, fonte de toda a Sabedoria, Força e Beleza, grande criador de tudo que existui, existe e existirá no Universo, pois sem Ele, não haveria sentido para a vida.

- Ao Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, pela amizade, sugestões, estímulos, e pela competência e profissionalismo na condução da orientação deste trabalho.

- Aos colegas de Pós-graduação em Física e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade, especialmente aos integrantes do nosso grupo de pesquisas hadrônicas Emanuel Cunha e Celson Agripino que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho.

- A professora Morgana Freire pela cessão de sua dissertação que serviu de base para o desenvolvimento do nosso trabalho.

- A Coordenação de Pós-graduação em Física e a todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação, especialmente aos Profs. Francisco de Assis Brito e Fábio Leal Dahia pelo incentivo constante e fundamental para que chegássemos ao final deste trabalho.

- A minha mulher Jacqueline e meus filhos Renato, Juliana e Lucas que sempre me apoiaram e incentivaram nos momentos difíceis, amenizados com a sua presença e confiança.

- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a matéria composta dos mésons π^+ e π^- a temperatura finita e potencial químico nulo no contexto da teoria relativística de campo médio (MFT). Neste modelo, consideramos os mésons ρ e σ , e mostramos que o valor médio do campo ρ^μ é zero. Obtemos duas soluções para o campo σ para cada valor de temperatura, porém para temperaturas acima de 80 MeV não obtemos nenhuma solução, isto nos leva a concluir que a temperatura de Bose-Einstein para esta matéria de píons é de 80 MeV.

Foram analisados também o comportamento da massa efetiva do pión, massa efetiva do sigma, pressão, densidade de energia do sistema e energia por pión, todos em função da temperatura. Para cada valor do campo σ foram obtidos dois valores diferentes para a densidade escalar resultando em quatro soluções distintas para: massa efetiva do pión, massa efetiva do sigma, pressão, densidade de energia, e número total de partículas. Dos quatro resultados obtidos para cada variável analisada, dois representam estados que apresentam dificuldade de interpretação física pois fornecem pressão negativa, por isto não são considerados neste trabalho, e os outros dois estados representam: uma matéria que lembra um gás e outra com característica de um líquido.

ABSTRACT

We study the meson's matter π^+ and π^- at finite temperature and zero chemical potential in the relativistic mean field theory (MFT) including the mesons exchange ρ and σ among π^+ and π^- . We get the mean ρ^μ field is zero. We obtain two solutions for the σ field for each temperature, but the temperatures above 80 MeV, we don't get any solution, this leads us to conclude that the Bose-Einstein's temperature of pion's matter is 80 MeV.

We analyze the behavior of the effective pion's mass, the effective sigma's mass, pressure, energy density and energy per pion, all of them as a function of temperature. For each value of the σ field was obtained two different values for the scalar density resulting in four distinct solutions for the: effective pion's mass, effective sigma's mass, energy density, pressure and particles's number. Among these four solutions, two states represent difficulty in physical interpretation, situation that provide negative pressure, so are not considered in this work, and the others two states represent: a matter that resembles a gas and the other likes a liquid state.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Breve Histórico das Partículas Elementares	4
2.1	Do átomo indivisível a atual diversidade de partículas	4
2.2	Modelos efetivos	9
2.3	O diagrama de fases da matéria hadrônica	10
3	Formalismo Teórico	12
3.1	O Modelo	12
3.2	Conexão com a Mecânica Estatística	18
3.3	Equação auto-consistente para a densidade escalar	20
3.4	Observáveis Termodinâmicos	21
4	Resultados e Discussões	23
5	Conclusões e Perspectivas	30
A	Operadores de Criação e Aniquilação	32
B	Determinação do Operador Número	36
C	Álgebra com o Operador Número	38
C.1	Determinação do Comutador $[b(\vec{p}), N] = -b(\vec{p})$	38
D	Determinação da Hamiltoniana	40
E	Conexão da Teoria de Campos com a Mecânica Estatística	45
F	Método de Gauss-Laguerre	51
F.1	Exemplo $N=2$	51
F.2	Espaços Lineares Funcionais	52
F.3	Construção da Base do Espaço Vetorial	53
F.4	Polinômios de Laguerre	54
F.5	Método de Gauss-Laguerre	54

Lista de Figuras

2.1	Mésons, Prótons e Nêutrons formados a partir de quarks.	6
2.2	Resumo das Partículas Elementares.	7
2.3	Diagrama das fases de interação forte da matéria.	11
4.1	Diagrama do condensado de Bose-Einstein para a matéria bosônica . .	24
4.2	Comportamento da massa efetiva do pión em função da temperatura.	25
4.3	Comportamento da massa efetiva do σ em função da temperatura.	26
4.4	Comportamento da pressão em função da temperatura.	27
4.5	Comportamento da densidade de energia em função da temperatura.	28
4.6	Comportamento energia por pión em função da temperatura.	29

Capítulo 1

Introdução

Hoje defrutamos da oportunidade ímpar de ter em operação, desde setembro de 2009, o maior acelerador de partículas já construído pelo homem. Um acelerador com capacidade de gerar uma energia colossal maior do que 7 TeV por nucleon [1], o famoso Grande Colisor de Hádrõs ou LHC, em pleno funcionamento no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN) localizado nas proximidades de Genebra na Suíça.

O LHC foi idealizado e construído com o propósito de investigar várias questões, dentre estas destaca-se a identificação do bóson de Higgs. Por outro lado o LHC permitirá testar a matéria nuclear em condições extremas de energia e temperatura, semelhantes as condições ocorridas nos primeiros instantes do surgimento do Universo, ou seja, após o Big Bang. Mesmo com pouco tempo de funcionamento, em sua fase atual, a partir de fevereiro de 2010, o LHC já rendeu bons resultados a exemplo da prova definitiva da existência do plasma de quarks e glúons que aconteceu em novembro de 2010 [2].

Um outro caso em que a matéria é encontrada em uma situação de elevados valores de energia e temperatura são os instantes iniciais após as colisões de íons relativísticos pesados com temperatura inferior a necessária para formar o plasma de quarks e glúons. Neste caso será formada uma matéria composta basicamente de píons [3]. Na maioria dos casos essa matéria de píons é tratada como um gás ideal, por outro lado Shuryak em 1990 [3] afirma que em altas temperaturas, entre 100 e 200 MeV, a matéria de píons é fortemente interagente, formando uma espécie de “matéria líquida” ou condensado

de pions, até então não descoberta experimentalmente.

Quando falamos em “matéria líquida”, entendemos que trata-se de um sistema composto de muitas partículas que são interagentes e formam uma espécie de superfície. Por outro lado, um gás é formado por um sistema de partículas fracamente interagentes ou não interagentes de modo que não existe a formação desta espécie de superfície. Infelizmente até o momento não há registro de matéria hadrônica sólida. Para a matéria de bárions temos o seguinte comportamento com a temperatura: a baixas temperaturas esta matéria é encontrada no estado líquido por outro lado, com o aumento da temperatura há uma transição de fase para o estado gasoso [4]. Para o caso da matéria de pions a situação é inversa, ou seja, a baixas temperaturas a matéria é encontrada no estado gasoso e a altas temperaturas, entre 100 e 200 MeV, ela é encontrada no estado líquido [3]. Este comportamento também foi observado para a matéria de mésons D [5] onde a temperatura de transição de fase ocorreu em 1.2 GeV.

Existem várias teorias sobre a “matéria de pions”, que tem um papel muito importante entre todos os estados hadrônicos, pois os pions são os hádrons mais leves, e por isso mesmo, somente os pions são excitados a baixas temperaturas, onde a distância média entre as partículas é grande, assim as interações são fracas sendo justificável uma aproximação tipo um gás ideal para a matéria de pions. Recentemente Helmut Satz [6] tratou a “matéria de pions” a altas temperaturas como um gás ideal de massa zero com a finalidade de determinar a temperatura de transição de fase da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons, obtendo para a temperatura de transição de fase o valor de $T_c \approx 150$ MeV. Esta estimativa de Helmut Satz poderia ser melhorada levando em consideração que a altas temperaturas a interação entre os pions é grande, como foi proposto por Shuryak, onde essa matéria está mais próxima de uma “matéria líquida”.

Shuryak estudou a interação pión-pión usando a teoria de perturbação quiral tratando os pions como partículas sem massa. Neste trabalho usa-se a teoria relativística de campo médio, desenvolvida inicialmente em 1974 por Dirk Walecka com

o objetivo de estudar a matéria nuclear. Walecka desenvolveu uma teoria de campos relativística para a interação dos nucleons via troca dos mésons sigma e ômega. Essa teoria foi chamada de hadrodinâmica quântica (QHD). Nessa teoria, os mésons mediadores são tratados como campos clássicos, dentro de uma aproximação chamada teoria de campo médio (MFT). Com esta teoria, Walecka calculou muitos parâmetros de interesse da física nuclear, por exemplo: a energia de ligação por nucleon e a incompressibilidade. Atualmente, têm se usado essa teoria para calcular a temperatura de transição de fase da matéria de bárions para o plasma de quarks e glúons [7, 8, 9].

Neste trabalho estudamos a matéria de mésons π numa abordagem de troca de mésons σ e ρ usando a teoria relativística de campo médio. Calculamos a energia de ligação por par e obtemos uma temperatura crítica, que pode ser interpretada como uma transição de fase para o plasma de quarks e glúons.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos um breve histórico das partículas elementares desde o átomo imaginado por Demócrito até a diversidade caótica de partículas atualmente conhecidas, muitas delas ainda não observadas experimentalmente. Apresentamos também neste capítulo os Modelos Efetivos que são usados neste trabalho e o diagrama de fases da matéria hadrônica onde fazemos referência ao Plasma de quarks e glúons. No capítulo 3, apresentamos o formalismo teórico, para a matéria de mésons $\pi^+ - \pi^-$. No capítulo 4, apresentamos os resultados para a matéria de mésons a temperatura finita. No último capítulo, apresentamos a conclusão do trabalho e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Breve Histórico das Partículas Elementares

Neste capítulo são abordados alguns tópicos importantes para o entendimento da evolução da Física das Partículas, desde a concepção do átomo indivisível até o Modelo Padrão, as descobertas em curso através dos modernos aceleradores de partículas além das perspectivas de novas descobertas ou confirmações das teorias atualmente aceitas.

2.1 Do átomo indivisível a atual diversidade de partículas

O primeiro modelo que tentou explicar a constituição da matéria foi feita por Demócrito em 585 a.C. quando sugeriu que a matéria era formada a partir de pequenas partículas maciças e indivisíveis a quem ele chamou de átomos [10]. Até que em 1803, John Dalton criou um modelo que retomava a idéia de Demócrito, mas desta feita os átomos seriam pequenas esferas com massas distintas que os tornavam capazes de dar origem a qualquer tipo de matéria através da formação das moléculas. A descoberta de partículas com carga elétrica por Michael Faraday em seus estudos entre 1813 e 1834 o levaram a definir o elétron como a menor quantidade de carga elétrica fazendo com que o modelo atômico de Dalton ficasse superado [11].

Em 1897, Joseph John Thomson, mais conhecido como J. J. Thomson idealizou um experimento para determinar a razão carga elétrica - massa do elétron [11] e com

base nesse experimento, ele apresentou um modelo para o átomo como sendo uma esfera uniforme de carga positiva incrustada de elétrons, um modelo que lembra um pudim de passas e assim ficou conhecido. Este modelo foi drasticamente modificado em 1911 por Rutherford. Ele observou experimentalmente que a maior parte da massa do átomo está no seu núcleo que é extremamente compacto e com carga elétrica positiva, ocupando apenas 10^{-12} do seu volume total [11] e envolto por uma nuvem de carga elétrica negativa (elétrons) girando em torno dele, existindo portanto um grande espaço vazio entre o núcleo e os elétrons. A descoberta do núcleo atômico feita por Rutherford iniciou a era da física nuclear.

Em 1932 acreditava-se que no núcleo atômico residiam apenas os prótons e os nêutrons e até meados de 1940 as partículas fundamentais conhecidas eram apenas quatro: o próton, o nêutron, o elétron e o fóton. Mas nesta época já haviam problemas com esse limitado conjunto de partículas fundamentais. Um deles era que a explicação do decaimento beta do nêutron exigia a presença de uma nova partícula chamada de neutrino. O tamanho reduzido do núcleo atômico e a presença nele apenas de cargas positivas que levaria a uma ação de repulsão conforme as leis do eletromagnetismo até então conhecidas, também exigia a atuação de uma nova força na natureza que descrevesse a interação entre os prótons e nêutrons mantendo-os fortemente unidos no núcleo, a chamada força forte.

O primeiro a formular uma teoria “simples” para as forças nucleares foi Hideki Yukawa em 1935, baseado na troca de uma nova partícula, que ele chamou de méson π [12, 13]. O nome méson está relacionado ao fato que a massa dessa partícula prevista por Yukawa ter um valor intermediário entre a massa do elétron e a do nêutron, de 130 MeV. Somente dez anos mais tarde, a partícula predita por Yukawa foi observada através de experimentos envolvendo raios cósmicos realizados pelo físico brasileiro Cesare Mansueto Giulio Lattes, mais conhecido como César Lattes e seus colaboradores [14, 15].

Na década de 1950, com o avanço das pesquisas com raios cósmicos e o surgimento dos primeiros aceleradores de partículas operacionalmente capazes de promover

a desintegração da matéria nuclear, foram observadas dezenas de outras partículas e o número de descobertas não parava de crescer. Era uma variedade tão grande de novas partículas descobertas a cada ano que uma classificação tipo a feita por Mendeleev para os elementos químicos tornou-se necessária também para a física de partículas.

A teoria mais bem sucedida para entender essa diversidade caótica de partículas foi proposta por Murray Gell-Mann [16] e George Zweig [17, 18] em 1961, que agrupava todas as partículas sensíveis à interação forte em um grupo chamado de hádrons, por sua vez compostos de constituintes ainda mais fundamentais chamados de quarks, e as partículas sensíveis a interação eletromagnética em outro grupo chamado de léptons.

Na época, Gell-Mann elaborou sua teoria com apenas três quarks: u (up), d (down) e s (strange). Nessa teoria, o nêutron é um estado ligado de um quark u e dois quarks d (uud) e o próton é um estado ligado de um quark d e dois quarks u (duu). O méson π^+ é um estado de um antiquark \bar{d} com um quark u ($\bar{d}u$) (Fig. 2.1).

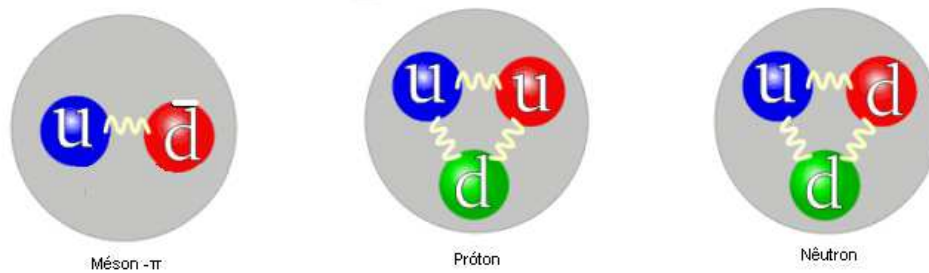


Figura 2.1: Mésons, Prótons e Nêutrons formados a partir de quarks.

O hádron constituído de um número ímpar de quarks possui spin semi-inteiro e é chamado de bárion enquanto o hádron constituído de um número par de quarks possui spin inteiro e é chamado de méson. Na época, Gell-Mann imaginou que os bárions eram formados apenas por três quarks e os mésons formados por um par quark-antiquark. Atualmente esta visão vem sendo modificada com a descoberta de hádrons com quatro ou mais quarks [19].

A teoria sugerida por Gell-Mann evoluiu na década de 70 para um modelo teórico da física de partículas que foi aperfeiçoada ao longo da década de 80 dando origem ao que hoje conhecemos como o “Modelo Padrão” (MP) que resume todo o nosso

entendimento sobre as interações fundamentais da natureza excluindo a gravitação. As forças que fazem parte do MP são: eletromagnética, fraca e a forte. Na Fig.(2.2) apresentamos um resumo das partículas elementares e dos hádrons.

PARTÍCULAS DE MASSIVAS					
Férmions	Nome	Tipo		Força	
	Léptons	Elétron	e		Eletromagnética
		Neutrino do elétron			
	Bárions (três quarks)	Múon	Fraca		Fraca
Neutrino do múon					
*Mésons (par de quark e anti-quark)	Táu	Fraca		Fraca	
	Neutrino do táu				
	Q u a r k s	Up	Forte		
		Down			
		Charm			
		Strange			
		Top			
		Bottom			

PARTÍCULAS MEDIADORAS			
Bósons	Nome	Interação	Carga
	Glúons	Forte	Cor
	Z^0, W^+, W^-	Fraca	Fraca
	Fótons	Eletromagnética	Elétrica
	**Grávitons	Gravitacional	Massa
	**Bóson de Higgs	Eletrofraca	?????

* Antigo modelo de Gell-Mann.

** Grávitons e os Bósons de Higgs não identificados experimentalmente.

Figura 2.2: Resumo das Partículas Elementares.

A força forte é descrita pela cromodinâmica quântica (QCD), uma teoria que descreve a interação entre os quarks pela troca de glúons. Essa teoria possui uma característica muito importante que é a sua constante de acoplamento decrescer com o aumento da energia, tornando-a tratável no regime de altas energias. Para energias mais baixas em que são formados os hádrons são usados métodos não perturbativos da QCD: regras de soma da QCD e QCD na rede. Outro tratamento também usado para estudar os hádrons em baixas energias é o uso de teorias efetivas, tipo o modelo de Walecka, em que a interação entre os nucleons é feita via troca de mésons.

2.2 Modelos efetivos

Em 1974 John Dirk Walecka [4, 20], retomando a idéia de Yukawa, construiu um modelo bastante simples baseado na troca de mésons, numa teoria de campos para a interação nuclear. Esse modelo associado com a aproximação do campo médio, constitui a teoria Relativística de Campo Médio (MFT) nuclear. Essa teoria tem sido amplamente utilizada e com muito sucesso na descrição de propriedades globais nucleares e de núcleos finitos [21].

O modelo de Walecka [22] na sua versão mais simples descreve a interação nucleon-nucleon pela troca de dois mésons, o méson escalar σ e o méson vetorial ω^μ . A densidade Lagrangeana mais simples que se pode construir com esses graus de liberdade é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \hbar c \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M + g_\sigma \sigma)] \psi \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - M_\sigma^2 \sigma^2], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\gamma_\mu = (\beta, -\beta\vec{\alpha})$ são as matrizes usuais de Dirac. As quantidades M_σ e M_ω são as massas dos mésons σ e ω respectivamente, M é a massa do nucleon e as quantidades g_σ e g_ω são chamadas de constantes de acoplamento. A Lagrangeana é uma Lagrangeana efetiva, uma vez que as constantes de acoplamento são ajustadas de modo a reproduzir as propriedades de saturação nuclear na aproximação de campo médio (MTF).

Para a matéria de mésons, apenas um trabalho aplica a teoria do campo médio [23] e nele foi estudada a matéria de píons usando um modelo em que os píons auto-interagem e as constantes de acoplamento são obtidas através da análise experimental da produção de di-elétrons da “bola de fogo” formada pela matéria de píons a $T_c \approx 75$ MeV e potencial químico zero.

2.3 O diagrama de fases da matéria hadrônica

As pesquisas referentes a física das partículas atualmente buscam responder a um dos mais ambiciosos questionamentos da humanidade: de que o mundo é feito ou qual a constituição do Universo?

Com o advento do LHC, as colisões entre íons relativísticos e próton-próton atingem um nível de energia jamais atingido antes pelo homem. A energia do LHC está na escala de 7 TeV por nucleon. O resultado desta colisão tem despertado muitas especulações sobre a constituição da matéria, como a produção do bóson de Higgs e a geração de novos tipos de matéria, dentre estas o plasma de quarks e glúons (QGP) [10]. Acredita-se que no QGP são encontradas as condições semelhantes ao do universo primordial [24, 25, 26].

A QCD na rede prevê que para altas temperaturas e densidades de energia, a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um plasma de quarks e glúons (QGP) [27]. Neste estado os quarks e glúons encontram-se desconfiados, formando um sistema em equilíbrio termodinâmico [28].

A Figura 2.3 apresenta o diagrama de fases da QCD, que relaciona a dependência da temperatura em função do potencial químico μ . O potencial químico próximo de zero e temperaturas abaixo da temperatura crítica, $T_c \approx 175$ MeV temos o surgimento de apenas matéria mesônica [6].

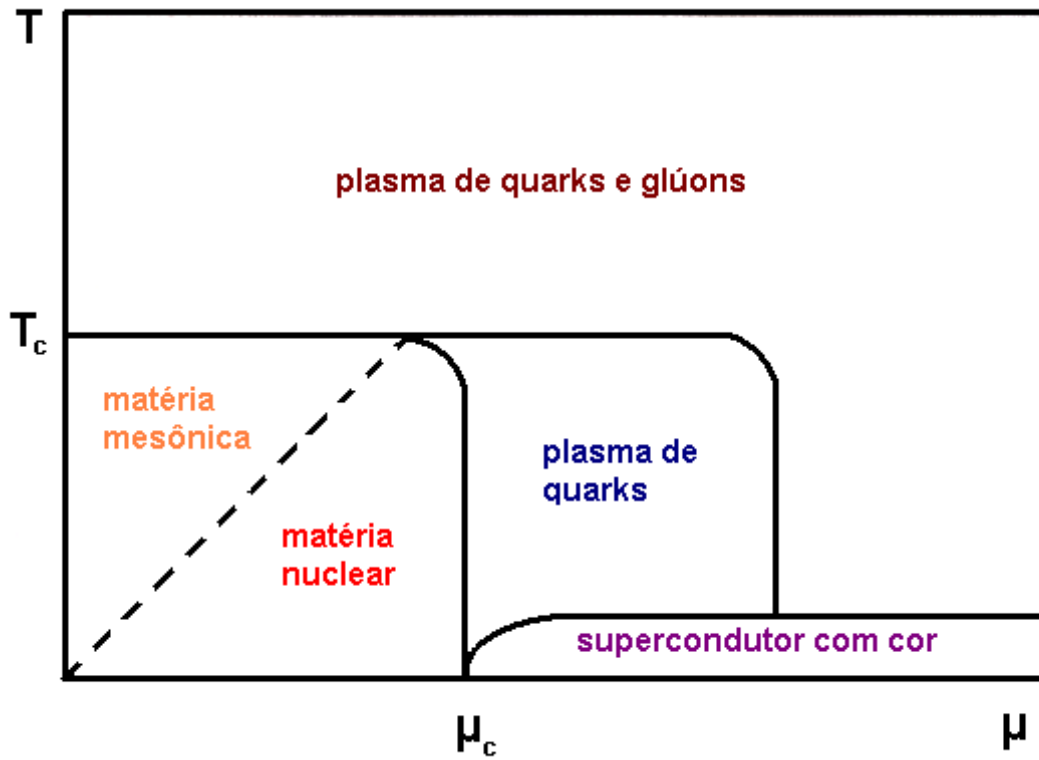


Figura 2.3: Diagrama das fases de interação forte da matéria.

Para valores de temperatura superiores ao da temperatura crítica a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um plasma de quarks e glúons.

Capítulo 3

Formalismo Teórico

3.1 O Modelo

Este trabalho é direcionado ao estudo do comportamento termodinâmico da matéria de píons π^+ e π^- , para isto foi usado o modelo sigma linear [29] para descrever a dinâmica dos píons, π^+ e π^- , com o méson sigma. Este modelo teórico foi originalmente introduzido por Gell-Mann e Lévy em 1960, sendo um exemplo da realização da simetria quiral e da conservação parcial da corrente axial. Também é considerado uma interação adicional entre o campo vetorial ρ e os mésons π [30]. A escolha do méson ρ se deve ao fato de ser o méson vetorial mais leve com paridade-G positiva, que permite a sua aplicação como mediador da força forte entre dois píons.

A densidade lagrangeana para o sistema é dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{livre} + \mathcal{L}^{int}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}^{livre} é a parte da lagrangeana referente aos termos livres para cada campo individualmente e \mathcal{L}^{int} é a parte da lagrangeana referente aos termos de interação desse sistema. Expressando estas em termos dos campos, temos:

$$\mathcal{L}^{livre} = \mathcal{L}_{\pi}^{livre} + \mathcal{L}_{\sigma}^{livre} + \mathcal{L}_{\rho}^{livre} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}^{int} = \mathcal{L}_{\rho\pi\pi}^{int} + \mathcal{L}_{\sigma\pi\pi}^{int} + \mathcal{L}_{\sigma\sigma\sigma}^{int} + \mathcal{L}_{\sigma\pi\pi\sigma}^{int}. \quad (3.3)$$

Adotando o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$, as expressões das densidades das lagrangeanas livres, para cada campo individualmente (π , σ e ρ), são [19]:

$$\mathcal{L}_\pi^{livre} = (\partial_\mu \pi^+) (\partial^\mu \pi^-) - m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_\sigma^{livre} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}_\rho^{livre} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu. \quad (3.6)$$

Onde m_π , m_σ e m_ρ são as massas dos mésons: π , σ e ρ , respectivamente e $F_{\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu$. As quatro lagrangeanas de interação são dadas nas Refs. [19, 30, 31] e são:

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi}^{int} = g_{\sigma\pi\pi} \sigma (\pi^+ \pi^-). \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\pi\pi}^{int} = i g_{\rho\pi\pi} \rho^\mu (\pi^+ \partial_\mu \pi^- - \pi^- \partial_\mu \pi^+). \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_{\sigma\sigma\sigma}^{int} = \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \sigma^3. \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi\sigma}^{int} = -\lambda (\pi^+ \pi^-)^2 - \lambda (\pi^+ \pi^-) \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \quad (3.10)$$

Sendo $g_{\sigma\pi\pi}$ e $g_{\rho\pi\pi}$ as constantes de acoplamento desta teoria e que estão diretamente relacionadas aos vértices $\sigma\pi^+\pi^-$ e $\rho\pi^+\pi^-$. A constante $\lambda = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{f_\pi}$, onde $f_\pi = 92,4 MeV$ [30] é a constante de decaimento do pión e tem origem no modelo σ linear.

Dessa forma, o modelo pode ser sintetizado em unidades naturais como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \pi^+) (\partial^\mu \pi^-) - m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu \\ & + g_{\sigma\pi\pi} \sigma (\pi^+ \pi^-) + i g_{\rho\pi\pi} \rho^\mu [\pi^+ \partial_\mu \pi^- - \pi^- \partial_\mu \pi^+] \\ & + \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \sigma^3 - \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 - \lambda (\pi^+ \pi^-) \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \end{aligned} \quad (3.11)$$

As equações de movimento para os campos gerados pela lagrangeana Eq. (3.11), são:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + \sigma m_{\sigma ef}^2 = g_{\sigma\pi\pi} (\pi^+ \pi^-), \quad (3.12)$$

onde:

$$m_{\sigma ef}^2 = m_\sigma^2 - \frac{3}{2}g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda(\pi^+\pi^-) + \lambda \langle \sigma \rangle^2 \quad (3.13)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \rho^\nu + m_\rho^2 \rho^\nu = ig_{\rho\pi\pi} (\pi^+ \partial^\nu \pi^- - \pi^- \partial^\nu \pi^+), \quad (3.14)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \pi^+ + 2ig_{\rho\pi\pi} \rho^\mu \partial_\mu \pi^+ + \pi^+ [m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \sigma + 2\lambda(\pi^+\pi^-) + \lambda \sigma^2] = 0. \quad (3.15)$$

Para a obtenção da Eq.(3.15) aplicamos o gauge de Lorentz $\partial_\lambda \rho^\lambda = 0$.

Esta equação pode ser reescrita em termos de uma derivada covariante através da transformação:

$$\partial'_\mu = \partial_\mu + ig_{\rho\pi\pi} \rho_\mu, \quad (3.16)$$

resultando numa equação do tipo Klein-Gordon livre:

$$\partial'_\mu \partial'^\mu \pi^+ + m_{ef}^2 \pi^+ = 0, \quad (3.17)$$

onde:

$$m_{ef}^2 = m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \sigma + 2\lambda(\pi^+\pi^-) + \lambda \sigma^2 + g_{\rho\pi\pi}^2 (\rho^\mu)^2. \quad (3.18)$$

Aplicando a teoria de campo médio, nas equações para os mediadores de forma a quantizar o campo nas Eqs.(3.12) e Eqs.(3.14), onde inicialmente se faz um “sanduíche” nessas equações com o estado físico que descreve o sistema $|F\rangle$ e considerando que os campos médios são estáticos, uniformes e desconsiderando os efeitos hidrodinâmicos, $\langle \vec{\rho} \rangle = \vec{0}$, temos que:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle$$

$$\rho^0 \rightarrow \langle \rho \rangle$$

Que nos leva a:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{m_{\sigma ef}^2} \rho_{\pi s} \quad (3.19)$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \rho_{\pi v}. \quad (3.20)$$

Onde: $\rho_{\pi s} = \langle \pi^+ \pi^- \rangle$, $\rho_{\pi v} = \langle i(\pi^+ \partial^o \pi^- - \pi^- \partial^o \pi^+) \rangle$ chamadas respectivamente de densidade escalar e densidade vetorial. Devido ao fato se considerar os campos médios como constantes, as densidades devem ser calculadas tomando a média em todo o espaço (Ver apêndice E).

Para a equação de movimento do campo a ser quantizado Eq.(3.15), aplicamos a teoria de campo médio, que impõe a substituição dos campos mediadores σ , ρ e $(\pi^+ \pi^-)$ pelos seus campos médios, levando a equação:

$$\partial_\mu \partial^\mu \pi^+ + 2ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \partial_\mu \pi^+ + (m_{ef}^2 - g_{\rho\pi\pi}^2 \rho^2) \pi^+ = 0. \quad (3.21)$$

Percebemos que mesmo usando a Teoria do Campo Médio, a Eq.(3.21) continua não sendo quantizável, pois a equação diferencial parcial possui termos cúbicos para o campo do pión. Para resolver esse problema consideramos a aproximação:

$$(\pi^+ \pi^-) \rightarrow \langle \pi^+ \pi^- \rangle$$

Então as massas efetivas do pión e do sigma assumem a forma:

$$m_{ef}^2 = m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \sigma + 2\lambda \langle \pi^+ \pi^- \rangle + \lambda \sigma^2 + g_{\rho\pi\pi}^2 \rho^2 \quad (3.22)$$

$$m_{\sigma ef}^2 = m_\sigma^2 - \frac{3}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda \langle \pi^+ \pi^- \rangle + \lambda \langle \sigma \rangle^2 \quad (3.23)$$

Para resolver a equação de movimento Eq.(3.21), consideramos como solução de teste, a solução de onda plana:

$$\pi(x) = a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}. \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq.(3.24) na Eq.(3.21), temos:

$$E_\pm(\vec{k}) = g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pm q^o(\vec{k}), \quad (3.25)$$

onde:

$$q^o(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{ef}^2}. \quad (3.26)$$

Para o campo do méson π^+ as soluções encontradas podem ser escritas na seguinte forma:

$$\pi^+(\vec{x}, t) = e^{-ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2q^o(\vec{k})} \left[a(\vec{k}) f_k(x) + b^\dagger(\vec{k}) f_k^*(x) \right], \quad (3.27)$$

onde $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}$ e $kx = q^o(\vec{k})x^0 - \vec{k}\vec{x}$.

A partir da solução de $\pi^+(\vec{x}, t)$, quantizamos a teoria, promovendo $\pi^+(\vec{x}, t)$ e $\pi^-(\vec{x}, t)$ e o seus momentos conjugados $\Pi_I(\vec{x}, t)$ e $\Pi_{II}(\vec{x}, t)$ a operadores e sujeito as regras de quantização canônicas:

$$[\Pi_I(\vec{x}, t), \pi^+(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.28)$$

$$[\Pi_{II}(\vec{x}, t), \pi^-(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.29)$$

$$[\pi^+(\vec{x}, t), \pi^+(\vec{y}, t)] = [\Pi_I(\vec{x}, t), \Pi_I(\vec{y}, t)] = 0. \quad (3.30)$$

$$[\pi^-(\vec{x}, t), \pi^-(\vec{y}, t)] = [\Pi_{II}(\vec{x}, t), \Pi_{II}(\vec{y}, t)] = 0. \quad (3.31)$$

Onde $\Pi_I(\vec{x}, t)$ e $\Pi_{II}(\vec{x}, t)$ são dados por (ver Apêndice A):

$$\Pi_I(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi^+)} = \partial^0 \pi^-(\vec{x}, t) - ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^-(\vec{x}, t). \quad (3.32)$$

$$\Pi_{II}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi^-)} = \partial^0 \pi^+(\vec{x}, t) + ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^+(\vec{x}, t). \quad (3.33)$$

Dos comutadores acima, obtemos a quantização do sistema (ver Apêndice A):

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0, \quad (3.34)$$

$$[b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = [a(\vec{k}'), a^\dagger(\vec{k})] = 2q^o(\vec{k})\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.35)$$

Com a ajuda das relações algébricas acima, importantes operadores podem ser construídos em termos dos operadores de a e b . O operador número de partículas N , é um dos operadores mais importantes da teoria de campos e é definido por [31]:

$$N = \int d^3x J_0(x), \quad (3.36)$$

onde:

$$J_0(x) = i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi^+)} \pi^+ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi^-)} \pi^- \right]. \quad (3.37)$$

A partir do campo $\pi(\vec{x}, t)$ e das regras de quantização, o operador N pode ser escrito em termos dos operadores a e b como: (ver Apêndice B):

$$N = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \{a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})\}. \quad (3.38)$$

O operador número possui as seguintes relações de comutação (demonstradas no Apêndice C):

$$[b(\vec{p}), N] = -b(\vec{p}), \quad (3.39)$$

$$[b^\dagger(\vec{p}), N] = b^\dagger(\vec{p}), \quad (3.40)$$

$$[a(\vec{p}), N] = a(\vec{p}) \quad (3.41)$$

$$[a^\dagger(\vec{p}), N] = -a^\dagger(\vec{p}). \quad (3.42)$$

definindo o estado de vácuo da teoria como $a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = |zero\rangle$, podemos estabelecer que a regra para criar um méson π^+ e π^- é:

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\pi^+(\vec{k})\rangle,$$

$$b^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\pi^-(\vec{k})\rangle.$$

Um dos resultados da álgebra acima é que os operadores $a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})$ estão associados respectivamente ao número de partículas π^+ e π^- , no sistema físico, assim:

$$N_{a^\dagger a}|\vec{k}\rangle_{(\pi^+)} = n_{\vec{k}}|\vec{k}\rangle_{(\pi^+)}, \quad (3.43)$$

$$N_{b^\dagger b}|\vec{p}\rangle_{(\pi^-)} = m_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle_{(\pi^-)}. \quad (3.44)$$

Onde defimos:

$$N = N_{a^\dagger a} + N_{b^\dagger b}$$

No caso de um méson π^+ , temos $n_{\vec{k}} = 1$ e de um méson π^- , temos $m_{\vec{p}} = -1$.

Outro operador de interesse na teoria é a hamiltoniana do sistema que é dada por (ver Apêndice D):

$$\begin{aligned}
H = \int d^3x & \left[(\partial_o \pi^+) (\partial_o \pi^-) - (\partial_j \pi^+) (\partial^j \pi^-) + m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) - \frac{m_\rho^2}{2} \langle \rho \rangle^2 \right. \\
& + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 \\
& \left. + \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação esta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
H = \int \frac{d^3k}{2} & [a(k)a^\dagger(k) + b^\dagger(k)b(k)] \\
& + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \int \frac{d^3k}{q^o(k)} [a(k)a^\dagger(k) - b^\dagger(k)b(k)] \\
& + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

onde $V = \int d^3(x)$ é o volume. Substituindo N, encontrado na Eq.(3.38), ficamos com:

$$\begin{aligned}
H = \int \frac{d^3k}{2} & [a(k)a^\dagger(k) + b^\dagger(k)b(k)] + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle N \\
& + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

3.2 Conexão com a Mecânica Estatística

Para estudar a equação de estado do sistema a temperatura finita devemos construir o grande potencial Φ , que depende do potencial químico μ , do volume V e da temperatura T [33]:

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \ln \Xi, \tag{3.48}$$

onde é adotando o sistema de unidades $k_B = 1$. A grande função de partição Ξ é dada por:

$$\Xi(T, V, \mu) = \text{Tr} \left[e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T} \right], \tag{3.49}$$

onde $\beta = \frac{1}{T}$, \hat{H} é a hamiltoniana do sistema e \hat{N} é o operador número do sistema.

Através dos cálculos do Apêndice E, obtemos a expressão para o grande potencial termodinâmico do sistema em função da temperatura e do potencial químico como:

$$\begin{aligned} \Phi(T, V, \mu) = & \frac{TV}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty k^2 dk \ln \left[1 - e^{-[q^0(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu]/T} \right] \right. \\ & + \left. \int_0^\infty k^2 dk \ln \left[1 - e^{-[q^0(k) - g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu]/T} \right] \right\} \\ & + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Assim, o valor esperado para o número de partículas no sistema em função da temperatura e do potencial químico é:

$$\langle N \rangle = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \left[\frac{e^{-[q^0(k) - g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu]/T}}{1 - e^{-[q^0(k) - g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu]/T}} \right] - \left[\frac{e^{-[q^0(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu]/T}}{1 - e^{-[q^0(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu]/T}} \right] \right\}. \quad (3.51)$$

Comparando esse resultado, com o valor esperado para o operador de número Eq.(3.38), fazendo a transformação $d^3k = 4\pi k^2 dk$, temos:

$$\langle a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{(q^0(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu)/T} - 1}, \quad (3.52)$$

$$\langle b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{(q^0(k) - g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu)/T} - 1}. \quad (3.53)$$

A partir destas relações observamos que o potencial químico está relacionado com as proporções entre as quantidades de matéria π^+ e π^- no sistema. Neste trabalho desejamos estudar uma matéria com carga “líquida zero”, ou seja, $\langle N \rangle = 0$. Esperamos que esta matéria seja produzida de forma abundante em colisões entre próton e anti-próton ($p\bar{p}$) como foi relatado na introdução deste trabalho. Esta situação é obtida para:

$$\mu = g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \quad (3.54)$$

neste caso, temos que:

$$\langle a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \rangle = \langle b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{q^0(k)/T} - 1}. \quad (3.55)$$

Analizando as equações para o número de ocupação dos mésons π^+ e π^- , Eq. (3.55), concluímos que para esta escolha de potencial químico, a matéria de mésons encontra-se numa situação onde as partículas com energia nula possuem um “valor infinito” para o número de ocupação, ou seja, as partículas encontram-se num estado de condensado de Bose-Einstein.

3.3 Equação auto-consistente para a densidade escalar

A densidade escalar definida na Eq. (3.19);

$$\rho_{\pi s} = \langle \pi^+ \pi^- \rangle = \frac{\langle \int d^3 \vec{x} \pi^+(x) \pi^-(x) \rangle}{V}, \quad (3.56)$$

pode ser escrita em termos dos operadores de criação e aniquilação (ver Apêndice E).

$$\rho_{\pi s} = \frac{\pi}{V} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{q^0(k)^2} \langle a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \rangle, \quad (3.57)$$

aplicando a relação de comutação Eq.(3.35):

$$a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + 2q^0(\vec{k}) \delta^3(0),$$

onde $\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$. Percebemos que a parcela proporcional a $\delta^3(0)$ leva a uma integral divergente. Admitindo a renormalização aditiva para a densidade escalar e substituindo as equações Eq.(3.55), temos a equação autoconsistente para a densidade escalar:

$$\rho_{\pi s} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{q^0(k) [e^{-[q^0(k)/T} - 1]}. \quad (3.58)$$

A auto-consistência aparece devido ao fato de que a energia $q^0(\vec{k})$ depende da massa efetiva do pión e este, depende da densidade escalar, como mostrado a seguir:

$$q^0(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{ef}^2}, \quad (3.59)$$

$$m_{ef}^2 = m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda \rho_s + \lambda \langle \sigma \rangle^2 + g_{\rho\pi\pi}^2 \langle \rho \rangle^2. \quad (3.60)$$

Após a resolução da equação auto-consistente para a densidade escalar Eq. (3.58), temos o comportamento da densidade escalar em função da temperatura e dos campos $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \rho \rangle$.

Inserindo este resultado,

$$\rho_{\pi s}(T, \langle \sigma \rangle, \langle \rho \rangle), \quad (3.61)$$

na equação de movimento para o campo sigma, Eq.(3.19), obtemos:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{m_{\sigma ef}^2} \rho_{\pi s}(T, \langle \sigma \rangle, \langle \rho \rangle), \quad (3.62)$$

onde:

$$m_{\sigma ef}^2 = m_{\sigma}^2 - \frac{3}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda \rho_s(T, \langle \sigma \rangle, \langle \rho \rangle) + \lambda \langle \sigma \rangle^2. \quad (3.63)$$

Esta equação possui uma nova auto-consistência para o campo $\langle \sigma \rangle$. Após a resolução desta equação auto-consistente, temos o comportamento do campo $\langle \sigma \rangle$ em função da temperatura e do campo $\langle \rho \rangle$.

Como foi visto na Eq.(3.20), o campo $\langle \rho \rangle$ obedece a equação:

$$\langle \rho \rangle = \frac{g_{\rho\pi\pi}}{m_{\rho}^2} \rho_{\pi v}, \quad (3.64)$$

onde a densidade vetorial é calculada de modo análogo ao caso anterior:

$$\rho_{\pi v} = \frac{\langle \int d^3 \vec{x} i((\partial^0 \pi^+) \pi^- - \pi^+ \partial^0 \pi^-) \rangle}{V}, \quad (3.65)$$

e através dos cálculos do Apêndice E, obtemos:

$$\rho_{\pi v} = \frac{2 \langle N \rangle}{V} + 2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \rho_{\pi s}. \quad (3.66)$$

Para $\langle N \rangle = 0$ e inserindo esse resultado na Eq.(3.64), temos:

$$\langle \rho \rangle = \frac{2g_{\rho\pi\pi}^2}{m_{\rho}^2} \langle \rho \rangle \rho_{\pi s}.$$

Para $\langle \rho \rangle \neq 0$, tem-se $\rho_{\pi s} = \frac{m_{\rho}^2}{2g_{\rho\pi\pi}^2}$, ou seja, uma constante. Como a equação para o campo sigma, Eq.(3.62), deixa claro que o campo não é constante, uma única solução é possível:

$$\langle \rho \rangle = 0. \quad (3.67)$$

3.4 Observáveis Termodinâmicos

A partir da solução $\langle \rho \rangle = 0$, concluímos que a dependência para o campo $\langle \sigma \rangle$ só depende da temperatura e de $\langle \sigma \rangle(T)$.

A partir destas duas soluções, vários observáveis termodinâmicos de interesse podem ser calculados. Para a obtenção da energia interna do sistema, são usadas as equações dos valores médios dos operadores de criação e aniquilação dadas na Eq.(3.55) e substituídos no valor médio do operador hamiltoniano Eq.(3.47). Desse modo, a densidade de energia do sistema é dada por ϵ :

$$\epsilon = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 q^0(k)}{e^{\frac{q^0(k)}{T}} - 1} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle \sigma(T) \rangle^2 - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma(T) \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma(T) \rangle^4. \quad (3.68)$$

As variáveis termodinâmicas, pressão (P) e entropia (S), são obtidas através das relações termodinâmicas do potencial grande canônico:

$$\begin{aligned} \Phi(T, V, \mu) &= T \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \ln[1 - e^{-\frac{q^0(k)}{T}}] \\ &+ \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde:

$$P = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu}, \quad (3.70)$$

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V, \mu}. \quad (3.71)$$

Como o sistema estudado possui o mesmo número de mésons π^+ e mésons π^- , isto leva a $\langle N \rangle = 0$, definimos então uma nova quantidade que calcula o número total de partículas no sistema, que é 2 vezes o número de mésons π^+ , definida por:

$$\langle N_{Tot} \rangle = 2 \times \langle N a^\dagger a \rangle = \int \frac{d^3 k}{q^0(k)} \langle a^\dagger a \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \int \frac{d^3 k}{q^0(k)} \frac{q^0(k)}{e^{q^0(k)/T} - 1}. \quad (3.72)$$

Capítulo 4

Resultados e Discussões

No capítulo anterior foi obtido através da Eq.(3.67) que o campo vetorial $\langle \rho \rangle$ é zero, portanto o acoplamento $g_{\rho\pi\pi}$ não contribui para os resultados apresentados a seguir. Neste trabalho foram usados os seguintes parâmetros:

$$g_{\sigma\pi\pi} = 2.5 \text{ GeV} \text{ [36]},$$

$$m_{\pi} = 140 \text{ MeV} \text{ [37]},$$

$$m_{\sigma} = 500 \text{ MeV} \text{ [37]}$$

$$f_{\pi} = 92.4 \text{ MeV} \text{ [30]}.$$

Para resolver a integral que aparece na densidade escalar, Eq.(3.58), utilizamos o método de integração numérica de Gauss-Laguerre com 32 pesos (ver Apêndice F), em que na implantação do método, é preciso transformar o módulo do momento k em uma variável sem dimensão u , através da transformação do momento:

$$k = uT.$$

Para resolver a equação autoconsistente para a densidade escalar, foi construído um programa no Maple 12, que permite encontrar as raízes da seguinte função:

$$F(\rho_{\pi s}, \sigma, T) = \rho_{\pi s} - \text{Lado direito da Eq.(3.58)}. \quad (4.1)$$

extraindo a solução:

$$\rho_{\pi s}(T, \langle \sigma \rangle), \quad (4.2)$$

Inserindo este resultado na Eq.(3.62) uma nova equação autoconsistente é gerada, o que é equivalente a encontrar as raízes da seguinte função:

$$G(\sigma, T) = \langle \sigma \rangle - \text{Lado direito da Eq.(3.62)}, \quad (4.3)$$

de onde extraímos o resultado:

$$\langle \sigma \rangle (T). \quad (4.4)$$

Obtemos duas soluções para o campo σ para cada valor de temperatura, porém quando estudamos o comportamento do campo σ para a temperatura de 70 MeV, apenas uma solução foi obtida e, acima de 80 MeV não obtemos nenhuma solução, isto nos leva a interpretação de que a temperatura de Bose-Einstein para esta matéria de pión é de 80 MeV.

$$T_{BE} = 80 \text{ MeV}. \quad (4.5)$$

Chamamos esta temperatura de Bose-Einstein devido ao fato de ao estudar a matéria de píons para potencial químico zero ficamos com uma situação análoga ao comportamento dos átomos no regime de baixas temperaturas [39], ver Fig. 4.1.

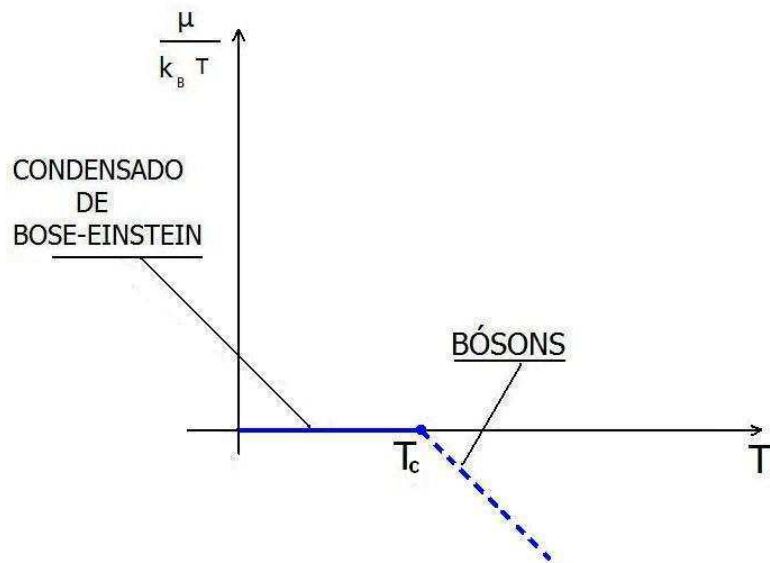


Figura 4.1: Diagrama do condensado de Bose-Einstein para a matéria bosônica

No condensado os átomos com potencial químico zero só existem a partir da temperatura zero até uma temperatura crítica $T_{BE} = T_c$. Para sistemas atômicos como um gás de Hélio, a temperatura crítica é muito baixa por volta de 2.17 K [39]. As propriedades físicas desse condensado se parecem com um superfluido [39].

Para cada solução do campo σ obtido pela equação Eq.(4.3) obtemos duas soluções para a densidade escalar, totalizando quatro soluções distintas para: massa efetiva do pión Eq.(3.60), massa efetiva do sigma Eq. (3.63), pressão Eq.(3.70) e número total de partículas Eq.(3.72).

Na Fig. 4.2 apresentamos o comportamento da massa efetiva do pión (m_{ef}) Eq.(3.60) em função da temperatura (T) para um sistema com potencial químico zero, obtido através da equação Eq.(3.54).

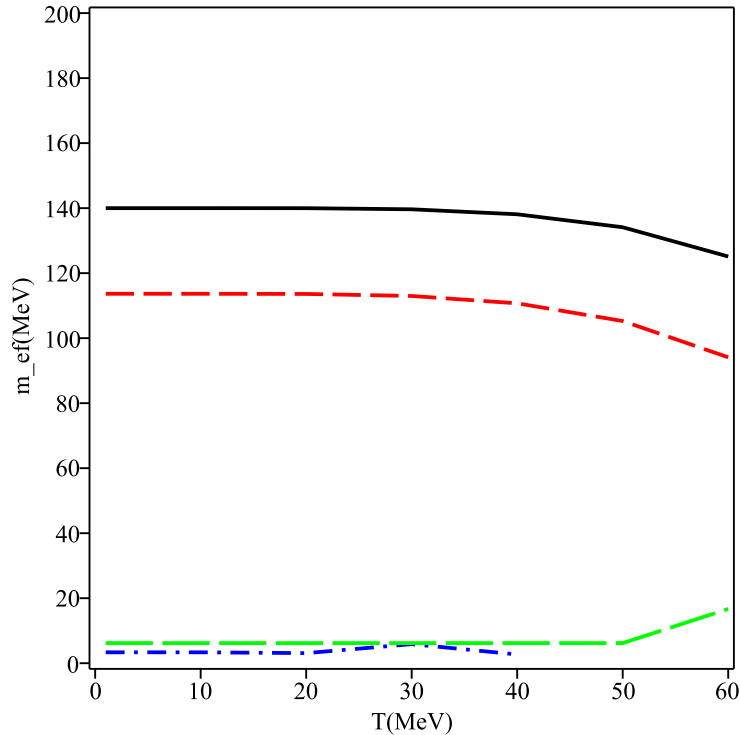


Figura 4.2: Comportamento da massa efetiva do pión em função da temperatura.

Podemos observar que a massa efetiva representada pela linha sólida fornece o valor da massa do pión a baixas temperaturas, deixando claro que a interação aumenta com o aumento da temperatura e é nula a baixas temperaturas. Este comportamento

também já foi observado para a matéria de mésons $D - \bar{D}$ [38]. A massa efetiva representada pelas linha traço-curto, tem um comportamento parecido com a anterior exceto pelo fato de apresentar um valor 20 MeV abaixo ao valor apresentado no caso anterior, mostrando neste caso a interação a baixas temperaturas não é nula. As duas outras soluções, traço-longo e traço-ponto, fornecem baixos valores da ordem de 130 MeV abaixo da massa do pión, a linha traço-ponto apresentando inclusive valores complexos para temperaturas superiores a 40 MeV, concluindo-se a partir destas observações tratar-se de uma matéria altamente interagente.

Na Fig. 4.3 apresentamos o comportamento da massa efetiva do sigma ($m_{s_{ef}}$) Eq.(3.63) em função da temperatura (T) para um sistema com potencial químico zero.

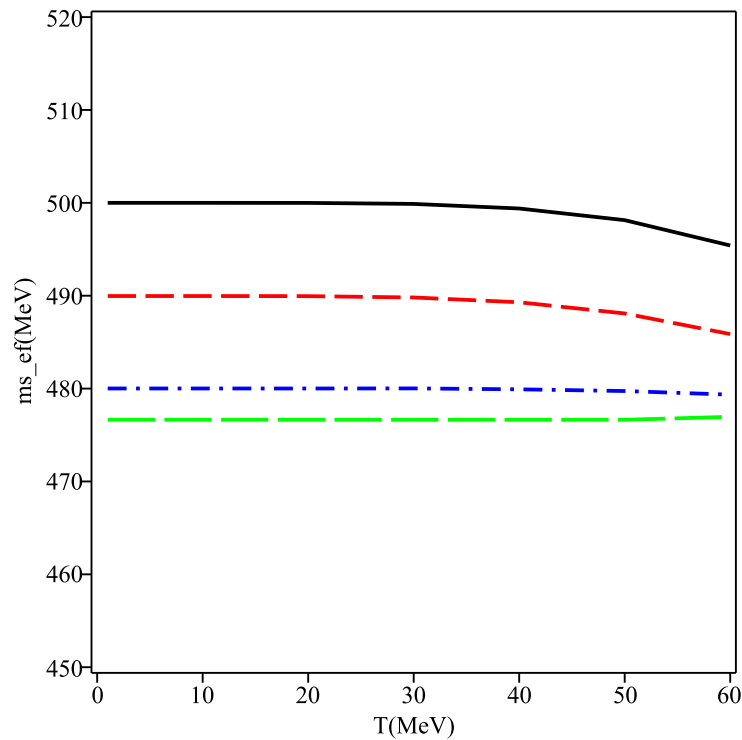


Figura 4.3: Comportamento da massa efetiva do σ em função da temperatura.

Podemos observar que a massa efetiva do sigma representada pela linha sólida fornece o valor da massa do sigma a baixas temperaturas e decresce com o aumento da temperatura. A massa efetiva representada pela linha traço-curto, tem um comporta-

mento parecido com a anterior exceto pelo fato de apresentar um valor 10 MeV abaixo ao valor apresentado no caso anterior. Também as massas efetivas representadas pelas linhas traço-longo e traço-ponto, fornecem valores pouco abaixo, da ordem de 20 MeV abaixo da massa do sigma. É importante destacar que a massa efetiva do sigma obtida neste trabalho depende da temperatura.

Na Fig. 4.4 apresentamos o comportamento da pressão (P) Eq.(3.70) em função da temperatura (T) também para um sistema com potencial químico zero.

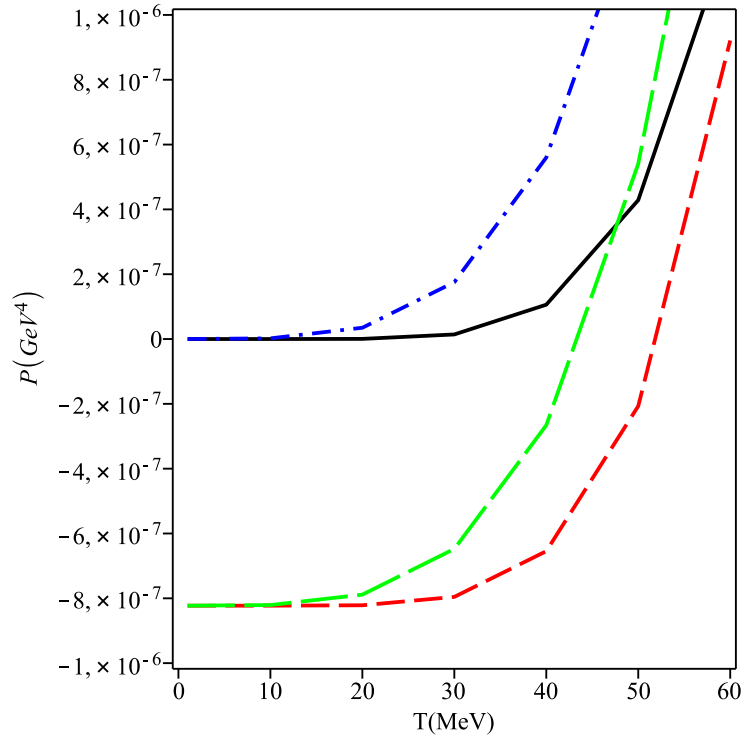


Figura 4.4: Comportamento da pressão em função da temperatura.

Podemos observar que a pressão representada pela linha sólida e a traço-ponto fornecem o valor zero para baixas temperaturas crescimento polinomial com o aumento da temperatura o que lembra um gás de fótons ($u = \sigma T^4$). A pressão representada pelas linha traço-curto e traço-longo apresentam uma matéria com valores negativos de pressão para baixas temperaturas que representa uma dificuldade de interpretação física e, como não fazem parte dos objetivos deste trabalho não serão consideradas.

Na Fig. 4.5 apresentamos o comportamento da densidade de energia (ϵ) Eq.(3.68) em função da temperatura (T) também para um sistema com potencial químico zero.

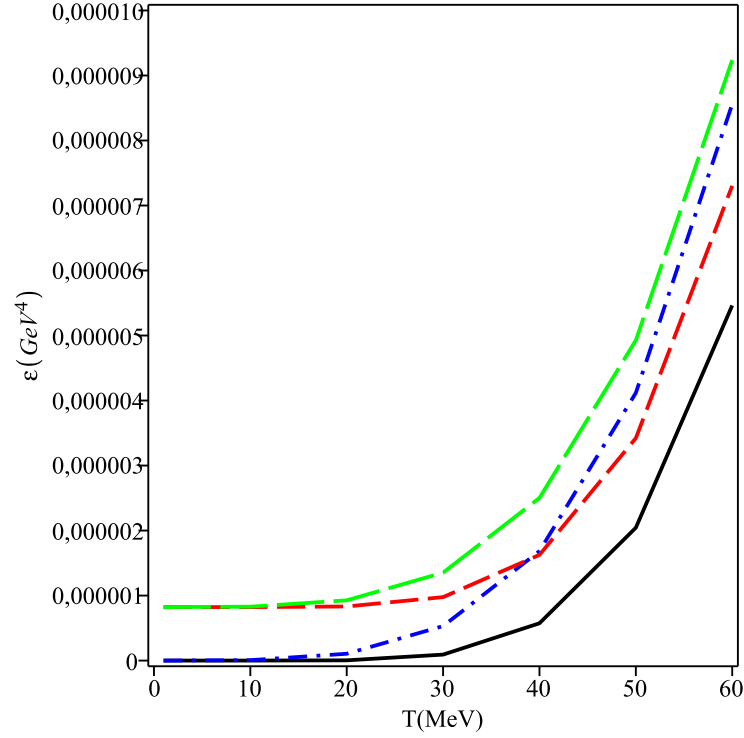


Figura 4.5: Comportamento da densidade de energia em função da temperatura.

Podemos observar que as densidades de energia representadas pelas linhas sólida e traço-ponto fornecem o valor próximo de zero para baixas temperaturas crescendo exponencialmente com o aumento da temperatura conforme esperado para o caso de um gás. As densidades de energia representadas pelas linhas traço-curto e traço-longo apresentam valores acima de zero para baixas temperaturas.

Na Fig. 4.6 apresentamos o comportamento da energia por pión (U/N) em função da temperatura (T) também para um sistema com potencial químico zero.

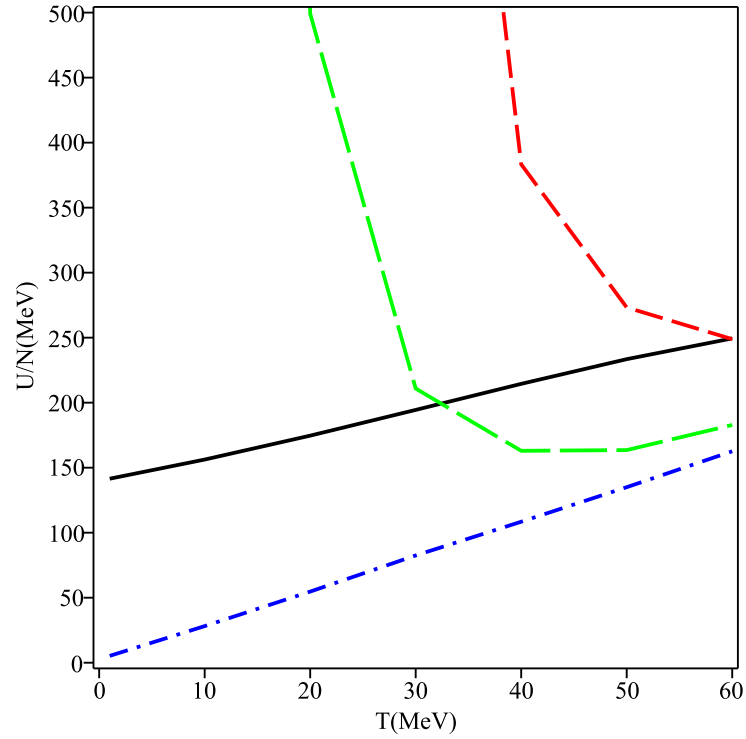


Figura 4.6: Comportamento energia por pión em função da temperatura.

Podemos observar que a energia por pión representada pela linha sólida representa o comportamento de um gás pouco interagente, a linha traço-ponto representa o comportamento de um gás muito interagente enquanto as linhas traço-curto e traço-longo reforçam nossa dificuldade em entender esta matéria, pois o valor da energia por pión assume altos valores para baixas temperaturas.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a matéria composta dos mésons π^+ e π^- com temperatura finita e potencial químico nulo no contexto da teoria relativística de campo médio (MFT). É importante destacar que essa é a primeira vez que a MFT é aplicada usando o modelo sigma linear e a lagrangeana de interação $\rho\pi\pi$ e $\sigma\pi\pi$ para uma matéria de píons. Neste modelo, consideramos apenas os mésons ρ e σ , e mostramos que o valor médio do campo ρ^μ é zero.

A partir dos resultados apresentados no Capítulo 4, concluímos que a temperatura de Bose-Einstein para esta matéria de píons é de 80 MeV.

$$T_{BE} = 80 \text{ MeV}. \quad (5.1)$$

Outro ponto de destaque deste trabalho consiste no estudo da possível formação de estados multi-mésons ou estados líquidos no meio nuclear. Observamos que das quatro soluções para a massa efetiva do pión Fig. 4.2, a linha sólida representa um estado semelhante a um gás pois a massa efetiva à $T = 0$ é igual a massa do pión, enquanto a linha traço-ponto descreve uma solução fortemente interagente, onde a massa efetiva do pión a $T = 0$ é aproximadamente 3 MeV.

Observando o gráfico da energia por pión Fig. 4.6, concluímos que a solução traço-ponto, fornece a energia do estado ligado de 135 MeV por partícula. Devido ao fato deste estado ligado ter um valor alto, concluímos que a solução traço-ponto permite que apenas grandes aglomerados de píons sejam formados. Comparando com o espectro hadrônico que inicia com 140 MeV, que é o valor da massa do pión, é fácil concluir que a

massa de uma molécula $\pi^+\pi^-$ daria 10.52 MeV. Por outro lado, considerando a massa do méson sigma como sendo de 500 MeV, obtemos um estado exótico que poderia explicar em termos de uma abordagem molecular o méson sigma como formado por uma molécula de 100 píons! Como ninguém observou um decaimento do méson sigma em 100 píons, concluímos que uma abordagem molecular para a sigma é desfavorável.

Comparando nossos resultados com o estudo de E. V. Shuryak [3], A. Kostyuk *et al.* [40] e D. V. Anchishkin [23] vemos que a nossa solução também prevê a formação de um estado líquido da matéria de píons que é dada pela solução traço-ponto. Por outro lado, o estado líquido é atingido mesmo a baixas temperaturas de 1 MeV até 40 MeV. Para temperaturas acima de 40 MeV não temos solução real para a massa efetiva do pión como é vista na descontinuidade apreentada na Fig 4.1 para a nossa solução traço-ponto. No entanto não podemos descartar a solução gasosa para a matéria de píons, cuja interação aumenta com a temperatura como prevê E. V. Shuryak [3], mas não é capaz de formar um estado líquido.

Apêndice A

Operadores de Criação e Aniquilação

Em teoria de campos a segunda quantização para os campos bosônicos, trata os campos como operadores de modo que o campo e o seu momento conjugado satisfazem relações de comutação. Assim, para o méson π , representado pelo campo π^+ , satisfazem as seguintes relações de comutação [31, 32, 34].

$$\left[\pi^+(\vec{x}, t), \pi^+(\vec{y}, t) \right] = \left[\Pi_I(\vec{x}, t), \Pi_I(\vec{y}, t) \right] = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\pi^-(\vec{x}, t), \pi^-(\vec{y}, t) \right] = \left[\Pi_{II}(\vec{x}, t), \Pi_{II}(\vec{y}, t) \right] = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\left[\Pi_I(\vec{x}, t), \pi^+(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.3})$$

$$\left[\Pi_{II}(\vec{x}, t), \pi^-(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.4})$$

onde $\Pi_I(\vec{x}, t)$ e $\Pi_{II}(\vec{x}, t)$ são os operadores momento canonicamente conjugados aos campos π^+ e π^- , dados por:

$$\Pi_I(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \pi^+)} = \partial^0 \pi^-(\vec{x}, t) - ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^-(\vec{x}, t). \quad (\text{A.5})$$

$$\Pi_{II}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \pi^-)} = \partial^0 \pi^+(\vec{x}, t) + ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^+(\vec{x}, t). \quad (\text{A.6})$$

Para resolver a equação de movimento Eq.(3.21) apresentada no capítulo 3, consideramos como solução de teste, a solução de onda plana:

$$\pi(x) = a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}, \quad (\text{A.7})$$

que como já foi visto, fornece dois valores para a energia:

$$E_{\pm}(\vec{k}) = 2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pm q^0(\vec{k}). \quad (\text{A.8})$$

Da condição de normalização, temos:

$$\langle \vec{x}' | \vec{k}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.9})$$

então:

$$\langle \vec{x}' | \pi(E, \vec{k}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}}. \quad (\text{A.10})$$

Usando a notação $kx \equiv q^0(\vec{k})x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$, podemos construir a função de onda normalizada que contém as duas possibilidades de energia [31],

$$\pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k e^{-ikx} \tilde{\xi}(x), \quad (\text{A.11})$$

com $\tilde{\xi}(x) = \delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)]\chi(k)$, sendo $\chi(k)$ dada por:

$$\chi(k) = \theta(k^0)\chi^+(k) + \theta(-k^0)\chi^-(k).$$

Da relação:

$$\delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)] = \frac{1}{E_+ - E_-} [\delta(k^0 - E_+) + \delta(k^0 - E_-)],$$

e integrando a Eq. A.11 em k_0 , o campo $\pi(\vec{x}, t)$ pode ser escrito como:

$$\pi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \left[\frac{\chi^+(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_+t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \frac{\chi^-(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_-t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Usando $E_{\pm}(\vec{k}) = 2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pm q^0(\vec{k})$ e substituindo $\vec{k} = \vec{q}$ no primeiro termo e $\vec{k} = -\vec{q}$ no segundo termo da integral, podemos reescrever a Eq. A.12 como:

$$\pi(\vec{x}, t) = e^{-2ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} [a(\vec{q})f_q(x) + b^\dagger(\vec{q})f_q^*(x)], \quad (\text{A.13})$$

onde,

$$f_q(x) = \frac{e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (\text{A.14})$$

Definindo a função de onda:

$$\tilde{\pi}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{q}) f_q(x) + b^\dagger(\vec{q}) f_q^*(x) \right], \quad (\text{A.15})$$

podemos escrever a função de onda na forma:

$$\pi(\vec{x}, t) = e^{-i2g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle t} \tilde{\pi}(\vec{x}, t). \quad (\text{A.16})$$

Assim a relação de comutação Eq.(A.2), $[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0$:

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= e^{-2g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle t} \int \frac{d^3 k}{2q^0(\vec{k})} \int \frac{d^3 k'}{2q^0(\vec{k}')} \\ &\underbrace{\left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t), a(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + b^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t) \right]}_{C_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde C_1 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + \left[a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t) \\ &+ \left[b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + \left[b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

de onde obtemos a solução:

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = \left[b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = 0. \quad (\text{A.19})$$

Para a relação de comutação da Eq. A.3, $[\Pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, temos:

$$\begin{aligned} \left[\Pi^0(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \right] &= - \int \frac{d^3 \vec{k}}{4i} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{q^0(\vec{k}')} \\ &\underbrace{\left[a^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(\vec{x}) - b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(\vec{x}), a(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + b^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}) \right]}_{C_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde o comutador C_2 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} C_2 &= \left[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}) f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + \left[a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}) \\ &+ \left[b(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}) f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + \left[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Como o operador a está relacionado as partículas π^+ e b as partículas π^- , adotamos:

$$\left[a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$[b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0. \quad (\text{A.23})$$

Considerando que os outros dois comutadores são proporcionais a uma função $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, temos as soluções:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 2q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.24})$$

$$[b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = 2q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.25})$$

Explicitando todas as relações de comutação obtidas temos:

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$[b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = 2q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.28})$$

Apêndice B

Determinação do Operador Número

O operador número é definido por [31]:

$$\hat{N} = \int d^3x J_0(x), \quad (\text{B.1})$$

onde a corrente $J^\mu(x)$ é dada por:

$$J^\mu(x) = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi^+)} \pi^+ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi^-)} \pi^- \right]. \quad (\text{B.2})$$

As derivadas do primeiro e do segundo termo da corrente são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi^+)} = (\partial^\mu \pi^-) - ig_{\rho\pi\pi} \rho^\mu \pi^-, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi^-)} = (\partial^\mu \pi^+) + ig_{\rho\pi\pi} \rho^\mu \pi^+. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as Eqs. B.3 e B.4 em B.2, temos que a expressão da corrente fica escrita como:

$$J^\mu(x) = -i \left[(\partial^\mu \pi^+) \pi^- - (\partial^\mu \pi^-) \pi^+ - 2ig_{\rho\pi\pi} \rho^\mu \pi^+ \pi^- \right]. \quad (\text{B.5})$$

A componente $J^0(x)$ é portanto:

$$J^0(x) = -i \left[(\partial^0 \pi^+) \pi^- - (\partial^0 \pi^-) \pi^+ - 2ig_{\rho\pi\pi} \rho^0 \pi^+ \pi^- \right]. \quad (\text{B.6})$$

Em termos da função de onda da Eq.(A.16), $\pi(\vec{x}, t) = e^{-ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \tilde{\pi}(\vec{x}, t)$, temos que a componente $J_0(x)$ pode ser escrita como:

$$J_0(x) = i \left[(\partial_0 \tilde{\pi}^+) \tilde{\pi}^- - (\partial_0 \tilde{\pi}^-) \tilde{\pi}^+ \right]. \quad (\text{B.7})$$

Definindo:

$$\hat{N}_1 = i \int d^3x (\partial_0 \tilde{\pi}^+) \tilde{\pi}^-, \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{N}_1^\dagger = -i \int d^3x (\partial_0 \tilde{\pi}^-) \tilde{\pi}^+, \quad (\text{B.9})$$

O operador \hat{N} pode ser escrito como:

$$\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_1^\dagger. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo a função de onda $\tilde{\pi}(\vec{x}, t)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, onde:

$$f_q(x) = \frac{e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (\text{B.11})$$

$$\tilde{\pi} = \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{q}) f_q(x) + b^\dagger(\vec{q}) f_q^*(x) \right], \quad (\text{B.12})$$

temos que:

$$\hat{N}_1^\dagger = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \right]. \quad (\text{B.13})$$

Como $\hat{N}_1 = (\hat{N}_1^\dagger)^\dagger$, a expressão do operador número \hat{N} é:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \right]. \quad (\text{B.14})$$

Aplicando a relação de comutação:

$$b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) + 2q^0(\vec{k}) \delta^3(0)$$

e desprezando a parcela infinita do operador número, este pode ser escrito, como:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right]. \quad (\text{B.15})$$

Apêndice C

Álgebra com o Operador Número

A álgebra do operador número é gerada pelos operadores $\{a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}), b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}), \hat{N}, 1\}$ e correspondem aos seguintes comutadores: $[b(\vec{p}), \hat{N}]$, $[b^\dagger(\vec{p}), \hat{N}]$, $[a(\vec{p}), \hat{N}]$ e $[a^\dagger(\vec{p}), \hat{N}]$, que são descritos a seguir. Para isso usaremos a expressão do operador de número determinado no Apêndice B, ou seja:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})].$$

C.1 Determinação do Comutador $[b(\vec{p}), N] = -b(\vec{p})$

$$[b(\vec{p}), \hat{N}] = \left[b(\vec{p}), \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \right]. \quad (\text{C.1})$$

Aplicando a relação $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, temos:

$$\begin{aligned} [b(\vec{p}), \hat{N}] &= \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \{ [b(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})]a(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})[b(\vec{p}), a(\vec{k})] \} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \{ [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{k})]b(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})[b(\vec{p}), b(\vec{k})] \}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Como o único comutador diferente de zero é:

$$[b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{k})] = 2q^0(\vec{p})\delta^3(\vec{p} - \vec{k}), \quad (\text{C.3})$$

temos de imediato:

$$[b(\vec{p}), \hat{N}] = -b(\vec{p}). \quad (\text{C.4})$$

De modo análogo, podemos obter as outras relações de comutação:

$$[b^\dagger(\vec{p}), \hat{N}] = b^\dagger(\vec{p}) \quad (\text{C.5})$$

$$[a(\vec{p}), \hat{N}] = a(\vec{p}) \quad (\text{C.6})$$

Apêndice D

Determinação da Hamiltoniana

A densidade hamiltoniana para o caso em que os campos σ e ρ são estáticos, é dada por:

$$\mathcal{H} = \Pi_I(x) \partial^0 \pi^+(x) + \Pi_{II}(x) \partial^0 \pi^-(x) - \mathcal{L}, \quad (\text{D.1})$$

onde a lagrangeana é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\partial_\mu \pi^+ \right) \left(\partial^\mu \pi^- \right) - m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu \\ & + g_{\sigma\pi\pi} \sigma (\pi^+ \pi^-) + i g_{\rho\pi\pi} \rho^\mu [\pi^+ \partial_\mu \pi^- - \pi^- \partial_\mu \pi^+] \\ & + \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \sigma^3 - \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 - \lambda (\pi^+ \pi^-) \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

E os momentos momentos canonicamente conjugados a $\Pi_I(x)$ e $\Pi_{II}(x)$ são:

$$\Pi_I(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \pi^+)} = \partial^0 \pi^-(x) - i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^-(x) \quad (\text{D.3})$$

$$\Pi_{II}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \pi^-)} = \partial^0 \pi^+(x) + i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^+(x) \quad (\text{D.4})$$

A lagrangeana para os campos $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \rho \rangle$ estáticos é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\partial_0 \pi^+ \right) \left(\partial^0 \pi^- \right) + (\partial_j \pi^+) (\partial^j \pi^-) - m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2 \\ & + i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle (\pi^+ \partial_0 \pi^- - \pi^- \partial_0 \pi^+) + g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) \\ & + \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 - \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 - \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 - \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Aplicando as Eqs. D.3, D.4 e D.5 em D.1, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left(\partial^0 \pi^- - i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^- \right) \partial^0 \pi^+ + \left(\partial^0 \pi^+ + i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \pi^+ \right) \partial^0 \pi^- \\
&\quad - (\partial^0 \pi^+) (\partial^0 \pi^-) + (\partial_j \pi^+) (\partial^j \pi^-) + m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2 \\
&\quad - i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle (\pi^+ \partial_0 \pi^- - \pi^- \partial_0 \pi^+) - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 + \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left[(\partial^0 \pi^+) (\partial^0 \pi^-) + (\partial_j \pi^+) (\partial^j \pi^-) \right] + m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 \\
&\quad + \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 + \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Sabendo que $\Pi(x, t) = e^{-i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \tilde{\Pi}(x)$, temos que:

$$(\partial^0 \pi^+ \partial^0 \pi^-) \equiv (\partial_0 \pi^+) (\partial_0 \pi^-) = \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \tilde{\Pi}_I \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle t} \tilde{\Pi}_{II} \right) \tag{D.8}$$

Fazendo a derivada do produto, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\partial_0 \pi^+) (\partial_0 \pi^-) &= g_{\rho\pi\pi}^2 \langle \rho \rangle^2 \tilde{\Pi}_I \tilde{\Pi}_{II} - i g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \left(\tilde{\Pi}_I \frac{\partial \tilde{\Pi}_{II}}{\partial t} - \tilde{\Pi}_{II} \frac{\partial \tilde{\Pi}_I}{\partial t} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_I}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_{II}}{\partial t} \right).
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Assim, para o cálculo de \mathcal{H} precisamos calcular as derivadas $\frac{\partial \tilde{\Pi}_I}{\partial t}$ e $\frac{\partial \tilde{\Pi}_{II}}{\partial t}$. A primeira é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_I}{\partial t} = \int \frac{d^3 k}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{k}) \frac{\partial f_{\vec{k}}(x)}{\partial t} + b^\dagger(\vec{k}) \frac{\partial f_{\vec{k}}^*(x)}{\partial t} \right], \tag{D.10}$$

a segunda derivada é o complexo conjugado da primeira. Como $\partial_0 f_{\vec{k}}(x) = -i q_0(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x)$ e $\partial_0 f_{\vec{k}}^*(x) = -i q_0(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x)$. Daí, temos:

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_{II}}{\partial t} = -\frac{i}{2} \int d^3 k \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) - b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) \right]. \tag{D.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_{II}}{\partial t} = \frac{i}{2} \int d^3 k \left[a^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) - b(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) \right]. \tag{D.12}$$

A hamiltoniana é dada por:

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}$$

Logo a expressão para \hat{H} é:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d^3x \left[(\partial_o \pi^+) (\partial_o \pi^-) + (\partial_j \pi^+) (\partial^j \pi^-) + m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) - \frac{m_\rho^2}{2} \langle \rho \rangle^2 \right. \\ & + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 \\ & \left. + \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Os termos a seguir apresentados em função dos operadores de criação e aniquilação serão usados para a determinação da hamiltoniana. Eles são:

$$\begin{aligned} \int d^3x \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^-}{\partial t} \right) = & \frac{1}{4} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) - b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) \right] \\ & \left[a^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(x) - b(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \tilde{\pi}^+ \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^-}{\partial t} \right) = & \frac{i}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \int d^3k' \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) + b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) \right] \\ & \left[a^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(x) - b^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \tilde{\pi}^+ \tilde{\pi}^- = & \int d^3x \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \int \frac{d^3k'}{2q^0(\vec{k}')} \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) + b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) \right] \\ & \left[a^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(x) - b(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^+}{\partial t} \right) \tilde{\pi}^- = & \frac{-i}{2} \int d^3x \int d^3k \int \frac{d^3k'}{2q^0(\vec{k}')} \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) - b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) \right] \\ & \left[a^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(x) + b^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x (\partial_j \tilde{\pi}^+) (\partial^j \tilde{\pi}^-) = & \int d^3x \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} (ik_j) \int \frac{d^3k'}{2q^0(\vec{k}')} (-ik'^j) \left[a(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) \right. \\ & \left. + b^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x) \right] \left[a^\dagger(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^*(x) - b(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Sendo $j \geq 1$. Onde todos os estados $\langle 0 | a(\vec{k}) a(\vec{k}') | 0 \rangle$, $\langle 0 | a(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle$, $\langle 0 | b^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') | 0 \rangle$ e $\langle 0 | b^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle$ são ortogonais. Então estes termos são expressos por:

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^-}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \int d^3k \left[a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right], \quad (\text{D.19})$$

$$\int d^3x \tilde{\pi}^+ \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^-}{\partial t} \right) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right], \quad (\text{D.20})$$

$$\int d^3x \tilde{\pi}^+ \tilde{\pi}^- = \int \frac{d^3k}{4[q^0(\vec{k})]^2} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right], \quad (\text{D.21})$$

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \tilde{\pi}^+}{\partial t} \right) \tilde{\pi}^- = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k}) \right], \quad (\text{D.22})$$

$$\int d^3x (\partial_j \tilde{\pi}^+) (\partial^j \tilde{\pi}^-) = \int \frac{d^3k}{4[q^0(\vec{k})]^2} k_j k^j \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right]. \quad (\text{D.23})$$

Substituindo as Eqs. D.19, D.20, D.21, D.22, D.23 na Eq. D.9 e o resultado na Eq. D.13, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\text{H}} &= g_{\rho\pi\pi}^2 \langle \rho \rangle^2 \int \frac{d^3k}{4[q^0(\vec{k})]^2} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] \\ &\quad - ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] \\ &\quad + ig_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \frac{-i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \int d^3k \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] - \int \frac{d^3k}{4[q^0(\vec{k})]^2} k_j k^j \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] \\ &\quad + \int d^3x m_\pi^2 (\pi^+ \pi^-) - \int d^3x \frac{m_\rho^2}{2} \langle \rho \rangle^2 + \int d^3x \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - \int d^3x g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle (\pi^+ \pi^-) \\ &\quad - \int d^3x \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \int d^3x \lambda (\pi^+ \pi^-)^2 + \int d^3x \lambda (\pi^+ \pi^-) \langle \sigma \rangle^2 \\ &\quad + \int d^3x \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Substituindo o valor encontrado na Eq. D.21 e como $k_j k^j = -k_j k_j = k^2$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \hat{\text{H}} &= \left[g_{\rho\pi\pi}^2 \langle \rho \rangle^2 + k^2 + m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda \langle \pi^+ \pi^- \rangle + \lambda \langle \sigma \rangle^2 \right] \\ &\quad \int \frac{d^3k}{4[q^0(\vec{k})]^2} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \int \frac{d^3k}{4q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{4} \left[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right] + \int d^3x \left[\frac{m_\rho^2}{2} \langle \rho \rangle^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Como $[q^0(\vec{k})]^2 = k^2 + m_{ef}^2$, $Volume = V = \int d^3x$, onde:

$$m_{ef}^2 = g_{\rho\pi\pi}^2 \langle \rho \rangle^2 + k^2 + m_\pi^2 - g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle + 2\lambda \langle (\pi^+\pi^-) \rangle + \lambda \langle \sigma \rangle^2,$$

$$\hat{N} = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})],$$

Obtemos que a expressão para \hat{H} é:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \frac{d^3k}{2} [a(k)a^\dagger(k) + b^\dagger(k)b(k)] + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \hat{N} \\ & + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V \end{aligned} \quad (D.26)$$

Apêndice E

Conexão da Teoria de Campos com a Mecânica Estatística

O ponto central que conecta a teoria de campos com a mecânica estatística se concentra no estudo das relações de comutação envolvendo o operador número N (ver Apêndice B),

$$N = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})]. \quad (\text{E.1})$$

Para calcular o número de partículas e antipartículas presentes no sistema, considere o estado físico $|F\rangle^j$,

$$|F\rangle^j = \left| \vec{k}_1, \vec{k}_2 \dots \vec{k}_n; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_m \right\rangle,$$

onde j significa uma configuração possível, para distribuir a ocupação de n -partículas e m -anti-partículas em todos os níveis acessíveis de energia. Esses níveis são gerados da quantização de partículas confinadas numa caixa, para funções de onda de paridade ímpar, considerando um tamanho finito para o volume do sistema, onde temos a relação entre o momento e o nível de energia- n :

$$\vec{k} = \vec{n} \frac{2\pi}{V^{1/3}}, \quad (\text{E.2})$$

onde as componentes do vetor \vec{n} são números inteiros, $n_x = 1, 2, 3, \dots$, $n_y = 1, 2, 3, \dots$, $n_z = 1, 2, 3, \dots$. Dessa forma o vetor \vec{n} que descreve o estado fundamental do sistema é $\vec{n} = (1, 1, 1)$. A aplicação do operador número nesse estado, resulta em:

$$N|F\rangle^j = \left(\sum_{i^2=3}^{\infty} N_{i^2}^{\{j\}} - \sum_{k^2=3}^{\infty} N_{k^2}^{\{j\}} \right) |F\rangle^j \quad (\text{E.3})$$

onde N_i e N_k são os números de ocupação de partículas e antipartículas do sistema relacionado aos operadores $a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})$, onde:

$$\sum_{i^2=3}^{\infty} N_{i^2}^{\{j\}} = n,$$

$$\sum_{k^2=3}^{\infty} N_{k^2}^{\{j\}} = m.$$

A grande função de partição é dada por:

$$\Xi(T, V, \mu) = \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \right].$$

Inserindo os operadores \hat{H} e \hat{N} na função Ξ e adotando o estado físico do sistema como normalizado, temos:

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{\{j\}} e^{-\left[\sum_{i^2=3}^{\infty} N_{i^2}^{\{j\}} (q^o(i) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu) \right] / T} \\ &\quad e^{-\left[\sum_{k^2=3}^{\infty} N_{k^2}^{\{j\}} (q^o(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu) \right] / T} \\ &\quad e^{-\left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V / T} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A Eq. (E.4) pode ser escrita em termos de produtórios,

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{\{j\}} \left[\prod_{i=3}^{\infty} e^{-N_i^{\{j\}} (q^o(i) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle - \mu) / T} \right] \\ &\quad \left[\prod_{k=3}^{\infty} e^{-N_k^{\{j\}} (q^o(k) + g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle + \mu) / T} \right] \\ &\quad e^{-\left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle \rho \rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle \sigma \rangle^4 \right) V / T} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Comutando o somatório com o produtório, e usando o fato que no ensemble grande canônico há um banho de partículas no sistema, temos que para cada nível há um

número infinito de partículas. Assim o somatório em j pode ser tratado como um somatório em $N_i^{\{j\}}$ assumindo valores inteiros de zero até o infinito. Considerando a fórmula para as séries geométricas de razões:

$$r_1 = e^{-(q^\circ(i)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu)/T} \quad \text{e} \quad r_2 = e^{-(q^\circ(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu)/T}, \text{ tem-se:}$$

$$\sum_{N_i^{\{j\}}=0}^{\infty} r^{N_i^{\{j\}}} = \frac{1}{1-r}. \quad (\text{E.6})$$

Logo a grande função de partição Eq. (E.5) pode ser escrita como:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{i^2=3}^{\infty} \prod_{k^2=3}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-(q^\circ(i)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu)/T}} \frac{1}{1 - e^{-(q^\circ(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu)/T}}$$

$$e^{-\left(\frac{m_\sigma^2\langle\sigma\rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2\langle\rho\rangle^2}{2} - \frac{1}{2}g_{\sigma\pi\pi}\langle\sigma\rangle^3 + \frac{\lambda}{4}\langle\sigma\rangle^4\right)V/T}. \quad (\text{E.7})$$

O grande potencial termodinâmico é dado por:

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \ln \Xi(T, V, \mu), \quad (\text{E.8})$$

Substituindo o resultado encontrado para $\Xi(T, V, \mu)$, podemos escrever Φ como:

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \sum_{k^2=3}^{\infty} \left\{ \ln \left[1 - e^{-(q^\circ(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu)/T} \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[1 - e^{-(q^\circ(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu)/T} \right] \right\}$$

$$- \left(\frac{m_\sigma^2\langle\sigma\rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2\langle\rho\rangle^2}{2} - \frac{1}{2}g_{\sigma\pi\pi}\langle\sigma\rangle^3 + \frac{\lambda}{4}\langle\sigma\rangle^4 \right) V/T. \quad (\text{E.9})$$

Considerando a regra de quantização da Eq.(E.2), podemos transformar o somatório numa integral, na forma:

$$\sum_{i^2=3}^{\infty} f(i_x, i_y, i_z) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} f(\vec{k}). \quad (\text{E.10})$$

Dessa forma, a Eq. (E.9) é escrita como:

$$\begin{aligned}\Phi(T, V, \mu) &= \frac{-TV}{2\pi^3} \left\{ \int_0^\infty d^3\vec{k} \ln \left[1 - e^{-[q^o(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu]/T} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty d^3\vec{k} \ln \left[1 - e^{-[q^o(k)-g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu]/T} \right] \right\} \\ &\quad + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle\rho\rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle\sigma\rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle\sigma\rangle^4 \right). \quad (\text{E.11})\end{aligned}$$

Como a nossa energia $E(\vec{k}) = q^o(k) \pm g_{\rho\pi\pi} \langle\rho\rangle$ depende apenas do módulo de \vec{k} , isto permite transformar a integral tripla numa integral de uma dimensão, via lei de transformação: $d^3\vec{k} = 4\pi k^2 dk$, daí temos:

$$\begin{aligned}\Phi(T, V, \mu) &= \frac{TV}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty k^2 dk \ln \left[1 - e^{-[q^o(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu]/T} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty k^2 dk \ln \left[1 - e^{-[q^o(k)-g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu]/T} \right] \right\} \\ &\quad + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle^2}{2} - \frac{m_\rho^2 \langle\rho\rangle^2}{2} - \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} \langle\sigma\rangle^3 + \frac{\lambda}{4} \langle\sigma\rangle^4 \right). \quad (\text{E.12})\end{aligned}$$

Munido desse potencial termodinâmico, podemos extrair o número de partículas médias submetidas ao banho térmico,

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mu},$$

que nos leva a expressão:

$$\langle N \rangle = \frac{TV}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \left[\frac{e^{-[q^o(k)-g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu]/T}}{1 - e^{-[q^o(k)-g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu]/T}} \right] - \left[\frac{e^{-[q^o(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu]/T}}{1 - e^{-[q^o(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu]/T}} \right] \right\} \quad (\text{E.13})$$

Considerando o operador de número da Eq.(E.1), podemos extrair os valores esperados dos operadores $a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})$ no estado físico térmico, comparando com a expressão para o número de partículas obtido da mecânica estatística, Eq.(E.13), assim temos:

$$\langle a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{(q^o(k)+g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle-\mu)/T} - 1}, \quad (\text{E.14})$$

$$\langle b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{(q^0(k)-g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle+\mu)/T} - 1}. \quad (\text{E.15})$$

Para $\langle N \rangle = 0$, só temos uma única solução, $\mu = 0$, de forma que:

$$\langle a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \rangle = \langle b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{4\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{(q^0(k)\pm g_{\rho\pi\pi}\langle\rho\rangle)/T} - 1}. \quad (\text{E.16})$$

Na aproximação de campo médio temos as equações:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{m_\sigma^2} \rho_{\pi s}, \quad (\text{E.17})$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \rho_{\pi v}, \quad (\text{E.18})$$

onde:

$$\rho_{\pi v} = \frac{\langle \int d^3\vec{x}_i (\partial^0 \pi^+) \pi^- - \pi^+ (\partial^0 \pi^-) \rangle}{V}, \quad (\text{E.19})$$

$$\rho_{\pi s} = \frac{\langle \int d^3\vec{x} \pi^+(x) \pi^-(x) \rangle}{V}. \quad (\text{E.20})$$

Considerando a identidade:

$$i [(\partial_0 \pi^+) \pi^- - \pi^+ (\partial_0 \pi^-)] = i \left[\frac{\partial \tilde{\pi}^+}{\partial t} \tilde{\pi}^- - \tilde{\pi}^+ \frac{\partial \tilde{\pi}^-}{\partial t} \right] + [2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \tilde{\pi}^+ \tilde{\pi}^-], \quad (\text{E.21})$$

onde: $\tilde{\pi}^+ \tilde{\pi}^- = \pi^+ \pi^-$, temos:

$$\rho_{\pi v} = \frac{2 \langle N \rangle}{V} + 2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \rho_{\pi s}. \quad (\text{E.22})$$

Para $\langle N \rangle = 0$, temos:

$$\rho_{\pi v} = 2g_{\rho\pi\pi} \langle \rho \rangle \rho_{\pi s}. \quad (\text{E.23})$$

Substituindo a Eq.(E.23) na equação de campo Eq.(E.18), temos para o caso $\langle \rho \rangle \neq 0$, temos o valor para a densidade escalar é dado por:

$$\rho_{\pi s} = \frac{m_\rho^2}{2g_{\rho\pi\pi}^2}. \quad (\text{E.24})$$

Este é um resultado que entra em conflito com o valor da densidade escalar obtido na Eq.(D.21), que substituindo com os valores esperados para os operadores de criação e aniquilação, fornecem uma equação autoconsistente para o campo sigma e consequentemente uma densidade não uniforme. Logo, temos a solução:

$$\langle \rho \rangle = 0.$$

Apêndice F

Método de Gauss-Laguerre

O método de Gauss, possibilita o cálculo de uma integral como uma soma, do tipo:

$$\int_a^b K(x)f(x)dx = \sum_{m=1}^N W_m f(x_m), \quad (\text{F.1})$$

onde $K(x)$ é uma função típica de um espectro de funções $f(x)$, W_m é o peso específico e x_m ponto específico.

Ao contrário dos métodos numéricos usuais, Simpson e Trapézio, o método de Gauss é exato para funções polinomiais.

F.1 Exemplo N=2

Considere $f(x)$ escrito numa expansão de Taylor,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Aplicando a definição da Eq. (F.1), ficamos com um sistema independente de a_0, a_1, \dots dado por:

$$W_1x_1^j + W_2x_2^j = \int_a^b K(x)x^j dx, j \geq 0, \quad (\text{F.2})$$

Assim para N=2, temos que para obter univocamente os pesos W_1, W_2 e os pontos x_1, x_2 são necessárias quatro equações. Como o número de equações é dado por grau[$f(x)$]+1, temos que o grau máximo de $f(x)$ tem que ser 3, para que possamos calcular os pesos e pontos específicos através do sistema.

$$\begin{cases} W_1 + W_2 & = \int_a^b K(x)dx, \\ W_1x_1 + W_2x_2 & = \int_a^b K(x)xdx, \\ W_1x_1^2 + W_2x_2^2 & = \int_a^b K(x)x^2dx, \\ W_1x_1^3 + W_2x_2^3 & = \int_a^b K(x)x^3dx \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

Assim sendo especificados $K(x)$, a , b obtemos para qualquer função de grau 3, a integral no formato de soma,

$$\int_a^b K(x)f_3(x)dx = W_1f_3(x_1) + W_2f_3(x_2). \quad (\text{F.4})$$

Para $f(x)$ com grau inferior a 3 o método também se aplica, pois em todos os casos o sistema será satisfeito. Do mesmo modo, se desenvolvermos o método mágico para uma função de grau N , certamente o método valerá para todas as funções de grau inferior a N .

F.2 Espaços Lineares Funcionais

Com o objetivo de evitarmos os sistemas não lineares dados pelas Eqs. (F.3) que envolvem o cálculo dos pesos e pontos específicos, utilizamos álgebra linear. Do exemplo anterior reescrevemos a Eq.(F.1) como

$$\int_a^b K(x)f_{\leq 2N-1}(x)dx = \sum_{m=1}^N W_m f_{\leq 2N-1}(x_m). \quad (\text{F.5})$$

Escolhemos uma base do espaço vetorial $\{\phi_n(x)\}$, onde n é o grau da função da base. O produto interno neste espaço vetorial é dado, para as funções da base, por

$$\int_a^b K(x)\phi_n(x)\phi_j(x)dx = c_j\delta_{n,j}. \quad (\text{F.6})$$

Então, podemos expressar uma função de grau $(N-1)$ neste espaço por

$$q_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} q_i\phi_i(x) \quad , q_i \in R. \quad (\text{F.7})$$

Além disso, podemos construir uma função $f_{2N-1}(x)$ através de

$$f_{2N-1}(x) = \phi_N(x)q_{N-1}(x).$$

Aplicando o método mágico de Gauss, Eq. (F.5), temos

$$\int_a^b K(x)f_{\leq 2N-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{N-1} q_i \int_a^b K(x)\phi_N(x)\phi_i(x)dx. \quad (\text{F.8})$$

Por definição do produto interno, Eq. (F.6), temos que a integral do lado direito desta equação é zero e assim obtemos

$$\sum_{m=1}^N W_m q_{N-1}(x_m) \phi_N(x_m) = 0. \quad (\text{F.9})$$

Como $q_{N-1}(x)$ é uma função arbitrária e os pesos e raízes deverão valer para qualquer tipo de função, temos que a única solução permitida é

$$\phi_N(x_m) = 0 \quad , 1 \leq m \leq N. \quad (\text{F.10})$$

Assim o cálculo dos pontos específicos neste formalismo se transformou num problema mais simples de encontrar raízes. Para obter os pesos específicos, iremos considerar a função interpoladora de Lagrange,

$$l_{j,N}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_N)}. \quad (\text{F.11})$$

Esta expressão é derivada a partir da expansão de Taylor e da regra de Cramer. A propriedade interpoladora desta função vêm do fato de que

$$l_{j,N}(x_k) = \delta_{j,k}. \quad (\text{F.12})$$

Aplicando o método mágico, Eq. (F.5), num polinômio de grau inferior como discutido no exemplo, temos que

$$\int_a^b K(x) l_{j,N}(x) dx = \sum_{m=1}^N W_m l_{j,N}(x_m) = W_j, \quad (\text{F.13})$$

Assim temos os pesos via integração e os pontos via cálculo de raízes.

F.3 Construção da Base do Espaço Vetorial

Vimos como foi fundamental no cálculo formal dos pesos e dos pontos específicos a existência do produto interno Eq. (F.6). A base conveniente é dada por diversas funções usualmente estudadas Física Matemática, fazendo surgir então métodos específicos de integração como, por exemplo; Gauss-Laguerre, cuja base $\{\phi_j(x)\}$ é formada pelos polinômios de Laguerre, Gauss-Legendre, cuja base $\{\phi_j(x)\}$ é formada pelos polinômios de Legendre e assim por diante.

F.4 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre de grau (n) obedecem a equação diferencial

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n + (1-x) \frac{d}{dx} L_n + n L_n = 0. \quad (\text{F.14})$$

Esta equação diferencial nos fornece os coeficientes do polinômio e a relação

$$\int_0^\infty e^{-x} L_k(x) L_j(x) dx = \delta_{k,j} \int_0^\infty e^{-x} L_k(x)^2 dx. \quad (\text{F.15})$$

Assim, no método de Gauss-Laguerre, temos a base do espaço vetorial

$$K(x) = e^{-x}, \quad \{\phi_n(x)\} = \{\mathbf{L}_n(x)\} \quad (\text{F.16})$$

e, no cálculo dos pesos e pontos específicos,

$$L_N(x_m) = 0.$$

O cálculo dos pesos específicos, é feito via alimentação do polinômio interpolador de Lagrange com os pontos específicos, obtendo-se

$$W_m = \int_0^\infty e^{-x} l_{m,N}(x) dx.$$

Para os outros métodos, como Gauss-Legendre, o procedimento é análogo.

F.5 Método de Gauss-Laguerre

Agora estamos preparados para via método de Gauss-Laguerre, para realizar qualquer integral da forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f_{\leq 2N-1}(x) dx = \sum_{m=1}^N W_m f_{\leq 2N-1}(x_m). \quad (\text{F.17})$$

Para $f(x)$ sendo um polinômio de grau máximo $2N-1$, a integral é calculada exatamente por essa soma. Porém o nosso interesse consiste em trabalhar com $f(x)$ qualquer, então devemos supor que essa função convirja para um polinômio de grau até $2N-1$. Podemos assim usar a quadratura também nestes casos, obtendo um resultado rápido e bastante preciso para o valor da integral.

Considere o exemplo

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} (e^x e^{-x^2}) dx = \sum_{m=1}^N W_m e^{x_m - x_m^2}, \quad (\text{F.18})$$

No presente trabalho, desenvolvermos um programa no Maple que usa $N=32$.

Bibliografia

- [1] N. V. Krasnikov and V. A. Matveev, “Search for new physics at LHC,” *Phys. Usp.* **47**, 643 (2004) [*Usp. Fiz. Nauk* **174**, 697 (2004)] [arXiv:hep-ph/0309200].
- [2] K. Aamodt *et al.* [The ALICE Collaboration], “Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at 2.76 TeV,” [arxiv:1011/1011.3914v1].
- [3] E. V. Shuryak, “Physics of the pion liquid,” *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1764.
- [4] J. D. Walecka. “Theoretical nuclear and subnuclear physics”. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [5] M. L. de F. Freire; “Propriedades Termodinâmicas da Matéria de Mésons $D - \bar{D}$ ”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, (2009).
- [6] H. Satz, “The Quark-Gluon Plasma,” arXiv:1101.3937 [hep-ph].
- [7] A. Delfino, J. B. da Silva, M. Malheiro, M. Chiapparini and M. E. Bracco, “Hadronic entropy enhancement and low density QGP,” *J. Phys. G* **28**, 2249 (2002) [arXiv:hep-ph/0212302].
- [8] Z. G. Tan; A. Bonasera, “Mean field effects in the quark-gluon plasma,” *Nucl. Phys. A* **784**, 368 (2007) [arXiv:nucl-th/0611071].
- [9] S. K. Ghosh, S. C. Phatak; P. K. Sahu, “Quark hadron phase transition and hybrid stars,” *Z. Phys. A* **352**, 457 (1995) [arXiv:nucl-th/9407009].
- [10] F. Close, “A Cebola Cósmica”, Lisboa, Edições 70, (1983).

- [11] R. Eisberg e R. Resnick, “Física Quântica”, Campus, Rio de Janeiro, (1979)
- [12] H. Yukawa. “On the interaction of elementary particle I”. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 48.
- [13] H. Yukawa; S. Sakata. “On the Theory of β^- disintegration an allied phenomenon”. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 379.
- [14] Lattes, C. M. G.; Muirhead, H.; Occhialini, G. P. S.; Powell, C. F. “Processes Involving Charged Mesons”, Nature, Volume 159, p. 694-697 (1947).
- [15] Gardner, E.; Lattes, C. M. G. “Production of mesons by the 184-inch Berkeley cyclotron”. Science, v.107, p.270-271, (1948).
- [16] M. Gell-Mann. “A schematic model of baryons and mesons”, Phys. Lett. 8, (1964), 214.
- [17] G. Zweig. “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking I”, CERN-8182-TH-401, (1964).
- [18] G. Zweig. Preprint. CERN-8419-TH-412, 1964.
- [19] Itzykson and J. B. Zuber, “Quantum Field Teory”, Mc Graw-Hill, New York, (1980)
- [20] B. D. Serot, Walecka, John D., “Advances in Nuclear Physics”. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.
- [21] R. R. da Silva; “O Problema de Superfície Nuclear na Teoria Relativística de Campo Médio”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, (2001).
- [22] B.D. Serot e J.D. Walecka, Adv. in Nucl. Phys. **16** (1986) 1
- [23] D. V. Anchishkin and A. V. Nazarenko, “Liquid-like phases of $\pi^+ \pi^-$ matter,” J. Phys. Stud. **10**, 93 (2006) [arXiv:nucl-th/0611040].

- [24] G. S. F. Stephans; critRHIC: “The RHIC low energy program”; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 32 S447-S453, (2006).
- [25] M. Xu, M. Yu; L. Liu; “The second-order phase transition in the QCD phase diagram and a new approach for locating the critical point using RHIC low-energy-scan data”; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 36 06404, (2009).
- [26] M. Asakawa; “QCD critical point and experimental observables”; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 36 064042, (2009)
- [27] F. Karsch, “Lattice QCD at high temperature and density,” Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002)[arXiv:hep-lat/0106019].
- [28] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005)[arXiv:nucl-ex/0501009].
- [29] M. Gell-Mann and M. Levy, “The Axial Vector Current In Beta Decay,” Nuovo Cim. **16** (1960) 705.
- [30] F. Klingl, N. Kaiser and W. Weise, “Effective Lagrangian approach to vector mesons, their structure and decays,” Z. Phys. A **356**, 193 (1996) [arXiv:hep-ph/9607431].
- [31] M. O. C. Gomes, “Teoria Quântica dos Campos”, Edusp, São Paulo, (2002)
- [32] M. Kaku, “Quantum Field Theory: a modern introduction”, Oxford, New Yorkm (1993).
- [33] K. Huang, “Statistical Mechanics”, second edition, USA, Jonh Wiley and Sons, (1987).
- [34] M. Srednick, “Quantum Fiel Theory”, Cambridge, New York, (2007).

- [35] N. N. Achasov and G. N. Shestakov, “Phenomenological sigma models,” Phys. Rev. D **49** (1994) 5779.
- [36] N. N. Achasov and A. V. Kiselev, “The analytical $\pi\pi$ scattering amplitude and the light scalars,” Phys. Rev. D **83**, 054008 (2011) [arXiv:1011.4446 [hep-ph]].
- [37] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), PL B667, 1 (2008) and 2009 partial update for the 2010 edition (URL: <http://pdg.lbl.gov>)
- [38] M. L. d. Freire and R. R. da Silva, “The $D - \bar{D}$ matter in Walecka’s mean field theory,” AIP Conf. Proc. **1296**, 346 (2010) [arXiv:1003.1690 [hep-ph]].
- [39] Silvio R. A. Salinas, “Introdução à Física Estatística”, Edusp, São Paulo, (2008)
- [40] A. Kostyuk, M. Gorenstein, H. Stoecker and W. Greiner, “Phase transition in hot pion matter,” Phys. Lett. B **500**, 273 (2001) [arXiv:hep-ph/0010076].