Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes

por

Jamilson Ramos Campos

João Pessoa - PB
Abril/2013

Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes

por

Jamilson Ramos Campos

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Abril/2013

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 05/04/2013

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Prof. Dr. Juan Benigno Seoane-Sepúlveda

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Abril/2013

C198c Campos, Jamilson Ramos.
Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes / Jamilson Ramos Campos.-- João Pessoa, 2013.
83f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Tese (Doutorado) – UFPB-UFCG
1. Matemática. 2. Operadores Cohen fortemente somantes. 3. Ideais de operadores e polinômio. 4. Séries em espaços de Banach.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo dos operadores Cohen fortemente somantes sob o ponto de vista da teoria de ideais de operadores e polinômios. Além disso, introduzimos duas novas classes de operadoresque generalizam o conceito de operadores multilineares e polinômios desta natureza, a saber, os operadores múltiplo Cohen fortemente somantes e os operadores Cohen fortemente somantes num dado ponto. Mostramos que as novas classes definidas, como as anteriores, formam ideais normados de operadores/polinômios e que os operadores múltiplo Cohen fortemente somantes formam um ideal de Banach. Também mostramos que a construção da classe dos operadores múltiplo Cohen fortemente somantes fornece um tipo de holomorfia e uma sequência coerente e compatível de ideais.

Palavras-chave: Operadores Cohen fortemente somantes; Ideais de operadores e polinômios; Séries em espaços de Banach.

Abstract

This work presents a study of Cohen strongly summing operators under the viewpoint of the theory of multilinear operators ideals and polynomial ideals. Furthermore, we introduce two new classes that generalize the concept of multilinear operators and polynomials of this nature, namely multiple Cohen strongly summing operators and Cohen strongly summing operators at a given point. We show that the new classes defined, as well as the previous classes, form normed ideals of operators/polynomials and that the class of multiple Cohen strongly summing operators forms a Banach ideal. We also show that the construction of the class of multiple Cohen strongly summing operators provides a holomorphy type and a coherent and compatible sequence of ideals.

Keywords: Cohen strongly summing operators; Operators and polynomials ideals; Series in Banach spaces.

Agradecimentos

A Deus, força criadora do universo.

À minha mãe, Edorice Ramos Campos, pela vida, amor, educação, paciência, conforto e oração.

À minha esposa Andréa Dantas pela amor, paciência e compreensão ao longo da vida a dois e ao longo desta empreitada. Aos meus filhos pelos inúmeros momentos de carinho.

Aos meus irmãos, tios e demais familiares pelo afeto, amizade, apoio, pelas comemorações e momentos de lazer que nos fazem relaxar e esquecer os problemas da vida.

Aos professores do DM/UFPB e da UAME/UFCG pela minha formação. Ao professor Abdoral de Souza (in memorian) pela amizade e apoio sempre tão importantes.

Ao meu orientador Daniel Pellegrino pela acolhida, confiança e amizade. Pela inestimável ajuda em todas as minhas dificuldades.

Aos professores e funcionários do Programa Associado de Pós-graduação, que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação e neste trabalho.

Aos professores membros da banca examinadora, pelo apoio e contribuições valorosas a este trabalho.

A todos os meus colegas de trabalho pelo auxílio inestimável a esse meu propósito. Em especial ao amigo e colega Fabrício Lima.

Aos amigos, companheiros e colegas de Campina e João Pessoa que deram-me força e ânimo. Em especial à Jonathas, Gabriela, Sibério, Laudelino, Lindomberg, Alciônio, Marcelo, Wallace, Esteban, Ricardo e Nacib.

"Se o conhecimento pode criar problemas, não é através da ignorância que podemos solucioná-los."

Isaac Asimov

Dedicatória

Aos meus pais Sebastião (in memorian) e Edorice, aos meus irmãos, à minha esposa Andréa e aos meus filhos Raquel, Tales e Cecília.

Sumário

Introdução

Motivações fortes para o estudo de séries em espaços de Banach surgem com os trabalhos de A. Dvoretzky e C. Rogers [20], com a prova de que, em dimensão infinita, sempre existem séries incondicionalmente convergentes que não convergem absolutamente. A. Grothendieck [21] introduz, então, a essência do conceito de operadores absolutamente somantes, como sendo aqueles que melhoram a convergência de séries, no sentido de transformar séries incondicionalmente convergentes em absolutamente convergentes. Essas ideias foram melhor esclarecidas e apresentadas através dos trabalhos de A. Pietsch [37] e J. Lindenstrauss e A. Pelczyński [29].

A classe dos operadores absolutamente p-somantes, introduzida por A. Pietsch [37] como uma generalização dos operadores absolutamente somantes, tem muitas aplicações à teoria dos espaços de Banach; por exemplo, esta classe forma uma generalização natural da classe dos operadores Hilbert-Schmidt entre espaços de Hilbert. Em 1973, J. S. Cohen [17] introduziu a classe dos operadores lineares fortemente p-somantes motivado pelo fato de que a classe dos operadores lineares absolutamente somantes não é fechada sob conjugação. Pietsch ([37], pág. 338) mostrou que o operador identidade de l_1 em l_2 é absolutamente 2-somante, enquanto que seu conjugado, de l_2 em l_∞, não é absolutamente 2-somante. Em seu trabalho, Cohen mostra que a classe dos operadores lineares fortemente p-somantes caracteriza o conjugado da classe dos operadores lineares absolutamente p^*-somantes, com $1/p + 1/p^* = 1$.

Ainda na década de 1970, Pietsch [38] desenvolve a teoria de ideais de operadores lineares de forma abstrata e em [39] esboça a teoria para aplicações multilineares e polinômios.

No contexto da teoria de ideais de operadores ([38, 39]), surge a questão natural:

a classe dos operadores (lineares) Cohen fortemente p-somantes pode ser generalizada para multi-ideais e ideais de polinômios sem perder a essência do ideal original? Para os operadores lineares absolutamente somantes existem diversos tipos de generalizações (alguns exemplos em [24, 32]). Podemos encontrar em [8, 14, 15, 16, 35] tentativas de estabelecer critérios gerais que um multi-ideal deve satisfazer para preservar as propriedades do ideal linear original.

O conceito multilinear dos operadores Cohen fortemente somantes foi investigado em 2007 por D. Achour e L. Mezrag [1] (ver também [26]). Neste trabalho, Achour e Mezrag compararam a nova classe com a classe dos operadores multilineares p-dominados e provaram um Teorema de Dominação de Pietsch. Recentemente novos conceitos relacionados a essa classe estão sendo investigados, como em [12].

Em nosso trabalho apresentamos um estudo dos operadores (lineares e multilineares) Cohen fortemente somantes sob o ponto de vista da teoria de ideais de operadores e polinômios. Além disso, introduzimos duas novas classes que generalizam o conceito de operadores multilineares e polinômios desta natureza: a classe dos operadores múltiplo Cohen fortemente somantes e a classe dos operadores Cohen fortemente somantes num dado ponto. Também mostramos que as novas classes definidas, como as anteriores, formam ideais de Banach de operadores e de polinômios. Do ponto de vista do bom comportamento dessas extensões, demonstramos que a construção multilinear introduzida por Achour [1] e a nossa construção da classe dos operadores múltiplo Cohen fortemente somantes fornecem sequências de ideais coerentes e compatíveis, segundo os critérios definidos por Pellegrino e Ribeiro [35].

Existem duas abordagens bem conhecidas usadas para estudar classes de polinômios entre espaços de Banach. Na primeira, L. Nachbin [28] introduziu o conceito de tipos de holomorfia como classes de polinômios que são estáveis por meio da diferenciação. Na segunda, A. Pietsch [38] introduziu a noção de ideais de operadores multilineares, imediatamente adaptável a polinômios. Algumas classes de polinômios são ao mesmo tempo tipos de holomorfia e ideais, como os polinômios nucleares e compactos. Mostramos que esse fato também é verdadeiro para a classe dos polinômios múltiplo Cohen fortemente p-somantes.

Organização da tese

O texto está organizado da seguinte forma: o Capitulo 1 contém definições e alguns resultados sobre a teoria dos operadores lineares, multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes; o Capítulo 2 é dedicado ao estudo de ideais das classes Cohen fortemente somantes; o Capítulo 3 contém a definição da nova classe dos operadores e polinômios múltiplo Cohen fortemente somantes, inclusive com resultados da teoria de ideais e tipos de holomorfia; o Capítulo 4 trata das questões de coerência e compatibilidade das sequências construídas com esses ideais; no Capítulo 5 está presente a definição da classe dos operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes num dado ponto e resultados da teoria de ideais.

Como apoio à leitura, apresentamos também dois apêndices: o Apêndice A, com resultados úteis de Análise Funcional; e o Apêndice B, com resultados necessários sobre a teoria de operadores multilineares e polinômios.

Embora a maioria dos autores definam os operadores multilineares Cohen fortemente p-somantes por meio de desigualdades, preferimos defini-los, principalmente, usando seqüências e então mostrando as caracterizações equivalentes via desigualdades. Essa abordagem tem algumas vantagens na demonstração de muitos dos nossos resultados.

Notação e terminologia

- Ao longo do texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Se A for um conjunto e $n \in \mathbb{N}$, a notação A^n denota o produto cartesiano de n cópias de A.

- Identificaremos os elementos do conjunto $\mathbb{N}^n$ com elementos de $\mathbb{N}$, de modo a evitar notações sobrecarregadas. Deste modo, em vez de denotar, por exemplo, $a_{j_1,...,j_n} \in l_1(F;\mathbb{N}^n)$ escrevemos apenas $a_{j_1,...,j_n} \in l_1(F)$.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função". Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.

- Denotamos por $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ o espaço de todos os operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F e se $E_1 = \cdots = E_n$ escrevemos apenas $\mathcal{L}(^nE;F)$.

- O espaço de Banach de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em F, com a norma usual do sup, será denotado por $\mathcal{P}(^nE;F)$. Denotaremos por $\mathcal{L}_s(^nE;F)$ o espaço de todos os operadores n-lineares contínuos simétricos de E^n em F e por $\check{P}$ o único operador de $\mathcal{L}_s(^nE;F)$ tal que $P(x) = \check{P}(x,...,x)$.

- Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, o gráfico de uma função u de E em F é o subconjunto

$$Graf_u = \{(x,y) \in E \times F; y = u(x)\}.$$

Dizemos que u tem gráfico fechado se $Graf_u$ for fechado em $E \times F$.

- Se u e v são operadores, a composição $u \circ v$ será denotada por uv. Também usamos a notação $M(u_1, ..., u_n)$ para o operador n-linear definido por $M(u_1, ..., u_n)(x_1, ..., x_n) := M(u_1(x_1), ..., u_n(x_n))$, onde M é operador n-linear e cada u_i é linear, $i = 1, ..., n$.

- Letras maiúsculas como $E, F, G, E_i, G_i, H, ...$ denotarão espaços de Banach, salvo onde expressamente indicado. A norma de um espaço (completo ou não) E será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; usaremos $\|\cdot\|_E$ caso haja possibilidade de confusão. Usaremos a norma do sup em espaços de funções, exceto menção em contrário. O símbolo B_E denotará a bola unitária fechada $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. Em alguma situação particular, será mencionado se a bola é fechada ou aberta.

- O dual (topológico) de um espaço de Banach E será denotado por E'.

- Um operador linear u de E em F é dito de posto finito se a dimensão de $u(E)$ for finita.

Capítulo 1

Operadores lineares, multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes

Neste capítulo faremos um estudo mais criterioso da classe dos operadores fortemente p-somantes, definida por Cohen [17], buscando uma melhor apresentação desses conceitos e resultados numa linguagem mais clara e moderna e, além disso, propondo algumas caracterizações e resultados ainda não presentes na literatura.

1.1 Operadores lineares Cohen fortemente somantes

As definições, caracterizações e resultados da presente seção são, em sua maioria, essencialmente conhecidos.

Como notação e terminologia básica, os seguintes espaços são muito comuns na teoria de séries em espaços de Banach e serão muito utilizadas ao longo do texto.

Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em E é absolutamente p-somável se $(||x_i||)_{i=1}^{\infty} \in l_p$. O espaço das sequências absolutamente p-somáveis será denotado por $l_p(E)$ e é um espaço normado munido com a norma

$$||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^p\right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_i ||x_i||, \text{ se } p = \infty \ . \end{cases}$$

Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em E é fracamente p-somável se $(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p$, para todo $\varphi \in E'$. O espaço das sequências fracamente p-somáveis será denotado por $l_p^w(E)$ e é um espaço normado munido com a norma

$$||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p} = \begin{cases} \sup\limits_{\psi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\psi(x_i)|^p\right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{i} \left\{ \sup\limits_{||\varphi|| \leq 1} |\varphi(x_i)| \right\}, \text{ se } p = \infty \text{ .} \end{cases}$$

Definição 1.1.1 (Cohen, [17]) *Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é Cohen fortemente p-somante se a série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ convergir para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.*

O espaço das sequências Cohen fortemente p-somantes de E será denotado por $l_p\langle E \rangle$.

O seguinte resultado mostra que se pode substituir a série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ na Definição 1.1.1 pela série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|$. Por questão de manejo, usaremos esta última representação da série em nosso texto.

Proposição 1.1.2 *Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência em E. A série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ converge para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E')$ se, e somente se, a série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|$ converge para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E')$.*

Demonstração. Suponhamos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ converge para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E')$. Para o caso real, tome

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j, \text{ se } \varphi_j(x_j) \geq 0 \\ -\varphi_j, \text{ se } \varphi_j(x_j) < 0 \end{cases}$$

e, para o caso complexo, tome $\psi_j = \varphi_j e^{-i\theta_j}$, onde θ_j é o argumento de $\varphi_j(x_j)$.

Em ambos os casos, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x_j)$ converge, por hipótese, e portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x_j)$$

também converge.

A recíproca é imediata. ■

Como demonstrado em [22], pág 223 Lema 1.1 e Teorema 1.2 (fazendo $p = 1$ e $q^{'} = p^*$), $l_p\langle E\rangle$ é um espaço normado e completo com a norma dada por

$$||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_{C,p} = \sup_{||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \ .$$

Vamos usar a dualidade $(l_p(E))^{'} = l_{p^*}(E^{'})$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ (ver Apêndice A, Proposição A.3) para provar o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 *Se $1 \leq p \leq \infty$, então:*

i) $l_p\langle E\rangle \subset l_p(E) \subset l_p^w(E)$;

ii) Se $p = 1$, $\ l_p\langle E\rangle = l_p(E)$ e, se $p = \infty$, $\ l_p(E) = l_p^w(E)$.

Demonstração. A inclusão $l_p(E) \subset l_p^w(E)$ e a coincidência $l_\infty(E) = l_\infty^w(E)$ são canônicas (veja [41]).

Como $(l_p(E))^{'} = l_{p^*}(E^{'})$, se $(x_i) \in l_p\langle E\rangle$, segue que

$$||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p = \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_{p^*}(E^{'})}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in B_{l^w_{p^*}(E^{'})}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| = ||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_{C,p} \ , \tag{1.1}$$

logo $l_p\langle E\rangle \subset l_p(E)$.

Note que se $p = 1$, então $p^* = \infty$ e por (1.1) usando o fato de $l_\infty(E^{'}) = l_\infty^w(E^{'})$, obtemos $||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p = ||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_{C,p}$, o que implica $l_p\langle E\rangle = l_p(E)$. ■

Observamos que se $T \in \mathcal{L}(E;F)$, então o operador

$$\widehat{T}^s : l_p\,(E) \to l_p(F) \text{ definido por } (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (T\,(x_i))_{i=1}^{\infty}\,,$$

está bem definido e é contínuo. De fato, é claro que $\widehat{T}^s$ é linear e se $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$, então

$$\left\|\widehat{T}^s\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|_p = \|(T\,(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p \leq \|T\|\,\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p\,.$$

Em nosso contexto, o caso interessante ocorre quando esse tipo de correspondência induz um operador contínuo de $l_p(E)$ em $l_p\langle F\rangle$, o que motiva a próxima definição.

Definição 1.1.4 *Seja $1 < p \leq \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é Cohen fortemente p-somante se*

$$(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle \ \text{ sempre que } \ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)\ ,$$

isto é, se o operador

$$\widehat{T}\ : l_p\,(E) \to l_p\langle F\rangle\ ; (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (T\,(x_i))_{i=1}^{\infty} \tag{1.2}$$

está bem definido e é contínuo.

Denotamos por $\mathcal{D}_p(E;F)$ o conjunto formado pelos operadores Cohen fortemente p-somantes. Note que, pela Proposição 1.1.3, $\mathcal{D}_1(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$.

O próximo resultado traz algumas caracterizações para operadores Cohen fortemente p-somantes.

Proposição 1.1.5 *Para $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é Cohen fortemente p-somante;

ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C\,||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\ ,$$

sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(F^{'})$;

iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C\,||(x_i)_{i=1}^{m}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\ , \tag{1.3}$$

para todos $m \in \mathbb{N},\ x_i \in E,\ \varphi_i \in F^{'},\ i = 1, ..., m$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como T é Cohen fortemente p-somante, o operador

$$\begin{aligned} \widetilde{T}:\ & l_{p^*}^w(F^{'}) \times l_p(E) \to l_1 \\ & ((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}) \mapsto (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty}\ , \end{aligned}$$

está bem definido e portanto é bilinear. Vamos mostrar que $\widetilde{T}$ tem gráfico fechado.

Supondo que ocorrem

$$(\varphi^k, x^k) \to (\varphi, x) \text{ em } l_{p^*}^w(F^{'}) \times l_p(E) \tag{1.4}$$

$$\text{e }\ \widetilde{T}(\varphi^k, x^k) \to y \text{ em } l_1\ , \tag{1.5}$$

então $\widetilde{T}(\varphi, x) = y$. De fato, como vale (1.5), segue que

$$y = \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}(\varphi^k, x^k) = \lim_{k\to\infty} \left(\varphi_i^k(T(x_i^k))\right)_{i=1}^{\infty} \ ,$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^k(T(x_i^k)) = y_i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \ . \tag{1.6}$$

Por outro lado, de (1.4) segue que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^k(T(x_i^k)) = \varphi_i(T(x_i)), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \ .$$

Da igualdade acima e por (1.6), concluímos que

$$\varphi_i(T(x_i)) = y_i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \ ,$$

donde $\widetilde{T}(\varphi, x) = y$ e T possui gráfico fechado. Desta forma, $\widetilde{T}$ é contínuo e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| = \left\|\widetilde{T}((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty})\right\|_{l_1} \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \ ||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ . \tag{1.7}$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sejam $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F^{'})$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| &= \sup_m \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))|\right) \\
&\leq \sup_m \left(C\, ||(x_i)_{i=1}^{m}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\right) \\
&= C\, ||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}.
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas. ■

Proposição 1.1.6 *O ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade (1.3) da Proposição 1.1.5 define uma norma em $\mathcal{D}_p(E;F)$, denotada $d_p(\cdot)$. Além disso, $\left\|\widetilde{T}\right\| = d_p(T)$.*

Demonstração. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{D}_p(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que $T_1 + \lambda T_2$ satisfaz (1.3) da proposição anterior. Para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F^{'}$, $i = 1, ..., n$, pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i((T_1 + \lambda T_2)(x_i))| &\leq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_1(x_i))| + \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\lambda T_2(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_1(x_i))| + |\lambda| \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_2(x_i))| \qquad (1.8) \\
&\leq (d_p(T_1) + |\lambda| d_p(T_2))\, ||(x_i)_{i=1}^{m}||_p||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \ ,
\end{aligned}$$

e portanto $T_1+\lambda T_2 \in \mathcal{D}_p(E;F)$, donde $\mathcal{D}_p(E;F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$. Por (1.8) fica claro que vale a desigualdade triangular para $d_p(\cdot)$ e a desigualdade $d_p(\lambda T) \leq |\lambda| d_p(T)$. Se $d_p(T)=0$, tomando $m=1$ em (1.3) temos que $|\varphi(T(X))|=0$, para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach, $||T(x)||=0$, para todo $x \in E$, e portanto $T=0$. As demais propriedades de uma norma são de fácil verificação.

Agora note que

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}\right\| &= \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\,,\,||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} ||(\varphi_i(T(x_i))_{i=1}^{\infty}||_{l_1} \\
&= \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\,,\,||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(T(x_i))|\right) \\
&\leq \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\,,\,||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} \left(d_p(T)\,||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\,||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\right) = d_p(T)\ ,
\end{aligned}$$

isto é, $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq d_p(T)$. Deste fato e de (1.7) segue que $\left\|\widetilde{T}\right\| = d_p(T)$. ■

A seguinte observação será muito útil quando estivermos, mais adiante, lidando com ideais de operadores.

Observação 1.1.7 *Se* $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$, *então* $\left\|\widehat{T}\right\| = \left\|\widetilde{T}\right\|$ *(ou ainda, pelo exposto acima,*
$\left\|\widehat{T}\right\| = d_p(T)$ *). De fato,*

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{T}\right\| &= \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\leq 1} \left\|\widehat{T}((x_i)_{i=1}^{\infty})\right\|_{C,p} = \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\leq 1} ||(T(x_i))_{i=1}^{\infty})||_{C,p} \\
&= \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\leq 1} \left(\sup_{||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(T(x_i))|\right) \\
&= \sup_{||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p\,,\,||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\leq 1} ||(\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty}||_{l_1} \\
&= \left\|\widetilde{T}\right\| \ .
\end{aligned}$$

Como consequência do fato de que um operador linear é Cohen fortemente p-somante se, e somente se, seu conjugado é um operador absolutamente p^*-somante (Teorema 2.2.2 em [17], pág. 184) e do Teorema de Dvoretzky-Rogers para operadores lineares absolutamente somantes, um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers também é válido para os operadores lineares Cohen fortemente p-somantes:

Teorema 1.1.8 (do tipo Dvoretzky-Rogers) *Se E é um espaço de Banach, então $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente p-somante se, e somente se,* $\dim E < \infty$.

Demonstração. Vamos denotar por $T' : F' \to E'$ o operador adjunto de $T : E \to F$. Supondo que $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente p-somante, segue que $id_E' : E' \to E'$ é absolutamente p^*-somante. Então, pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers ([32], pág 449 Teorema 2.1) para operadores lineares absolutamente somantes, segue que a dimensão de E', e consequentemente de E, é finita.

Reciprocamente, se $\dim E < \infty$ então $id_E' : E' \to E'$ é absolutamente p^*-somante e portanto $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente p-somante. ■

Também vale o seguinte resultado de inclusão, cuja demonstração está presente em [17] (Teorema 2.4.1, pág. 188): Se $p_1 \leq p_2$, então tem-se

$$\mathcal{D}_{p_2}(E;F) \subset \mathcal{D}_{p_1}(E;F).$$

1.2 Operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes

Nesta seção estudaremos a classe dos operadores multilineares Cohen p-somantes como extensão natural do caso linear. Como feito anteriormente, a definição dessa classe é construída por sequências, diferentemente do modo mais comum, como em [1]. Em seguida, os operadores são caracterizados por desigualdades e introduzimos um resultado abstrato relacionado a duas diferentes caracterizações para a classe.

Definição 1.2.1 *Sejam $1 < p \leq \infty$ e E_j, F espaços de Banach, $j = 1, ..., n$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é Cohen fortemente p-somante se*

$$\left(T\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle \quad \text{sempre que} \quad \left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E_j)\ ,\ j = 1, ..., n\ ,$$

isto é, se o operador

$$\begin{aligned} \widehat{T} \quad &: l_{np}(E_1) \times \cdots \times l_{np}(E_n) \to l_p\langle F\rangle \\ &\left(\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}, ..., \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \mapsto \left(T\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \end{aligned} \tag{1.9}$$

está bem definido e é contínuo.

O conjunto dos operadores n-lineares Cohen fortemente p-somantes será denotado por $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$. É fácil mostrar que $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$, munido com as operações usuais, é subespaço de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Proposição 1.2.2 *Para* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é Cohen fortemente p-somante;*

ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq$$
$$\leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(1)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \cdots \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(n)} \right\|^{np} \right)^{1/np} ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ , \tag{1.10}$$

sempre que $\left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E_j)$, $j = 1, ..., n$ *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(F')$.

iii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq$$
$$\leq C \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \cdots \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(n)} \right\|^{np} \right)^{1/np} ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \ , \tag{1.11}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como T é Cohen fortemente p-somante, o operador

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : l_{p^*}^w(F') \times l_{np}(E_1) \times \cdots \times l_{np}(E_n) &\longrightarrow l_1 \\ \left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty}, ..., \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right) &\longmapsto \left(\varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right)_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido e portanto é $(n+1)$-linear. Além disso, procedendo como na demonstração da Proposição 1.1.5, verificamos que $\widetilde{T}$ possui gráfico fechado e portanto é contínuo. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| &= \left\| \widetilde{T} \left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty}, ..., \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right) \right\|_{l_1} \\ &\leq \left\| \widetilde{T} \right\| \left\| x^{(1)} \right\|_{np} \cdots \left\| x^{(n)} \right\|_{np} ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ . \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ De modo semelhante ao caso linear, é suficiente usar o fato de que a soma da série é o supremo de suas somas parciais. ■

A demonstração da proposição seguinte é análoga à da Proposição 1.1.6 e portanto será omitida.

Proposição 1.2.3 *O ínfimo das constantes C que satisfazem (1.11), denotado $||T||_{Coh,p}$, define uma norma em $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$. Além disso, $\left\|\widehat{T}\right\| = ||T||_{Coh,p}$.*

Definição 1.2.4 *Sejam $1 < p \leq \infty$ e E, F espaços de Banach. Um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é Cohen fortemente p-somante se*

$$(P(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle \text{ sempre que } (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E) \ .$$

O conjunto dos polinômios n-homogêneos Cohen fortemente p-somantes será denotado por $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$. É fácil mostrar que $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$, munido com as operações usuais, é subespaço de $\mathcal{P}(^nE; F)$.

Lema 1.2.5 *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é Cohen fortemente p-somante se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}_s(^nE; F)$ é Cohen fortemente p-somante.*

Demonstração. Se $\check{P}$ é Cohen fortemente p-somante, para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E)$, segue que

$$(P(x_i))_{i=1}^{\infty} = (\check{P}(x_i, ..., x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle \ .$$

Logo, P é Cohen fortemente p-somante.

Reciprocamente, pela Fórmula de Polarização (Apêndice B, Teorema B.3) com $x_0 = 0$, segue que

$$n!2^n\check{P}\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right) = \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(\varepsilon_1 x_i^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_i^{(n)}\right) \ ,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, se $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E)$, com $j = 1, ..., n$, como P é Cohen fortemente p-somante,

$$\left(P\left(\varepsilon_1 x_i^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle \ ,$$

quaisquer que sejam os valores dos ε_j. Assim, $\left(\check{P}\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle$ e, portanto, $\check{P}$ é Cohen fortemente p-somante. ■

Proposição 1.2.6 *Para* $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) P *é Cohen fortemente p-somante;*

ii) Existe uma constante $C>0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}||x_i||^{np}\right)^{1/p}||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\ , \tag{1.12}$$

sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E)$ *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F')$.

iii) Existe uma constante $C>0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(P(x_i))| \leq C\left(\sum_{i=1}^{m}||x_i||^{np}\right)^{1/p}||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\ , \tag{1.13}$$

para todos $m \in \mathbb{N},\ x_i \in E,\ \varphi_i \in F',\ i=1,...,m$ *.*

Além disso, o ínfimo das constantes C *que satisfazem (1.13), denotado* $||P||_{Coh,p}$ *, define uma norma em* $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE;F)$*.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Se P é Cohen fortemente p-somante, então, pelo lema anterior, $\check{P}$ também é Cohen fortemente p-somante. Usando a Proposição 1.2.2, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| &= \sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(\check{P}(x_i,...,x_i))| \\ &\leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}||x_i||^{np}\right)^{1/p}||(\varphi_i)||_{w,p^*}\ .\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatos.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Se $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{np}(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F')$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| &= \sup_m\left(\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(\check{P}(x_i,...,x_i))|\right) \\ &\leq \sup_m\left(C\left(\sum_{i=1}^{m}||x_i||^{np}\right)^{1/p}||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\right) \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty}||x_i||^{np}\right)^{1/p}||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*}\ .\end{aligned}$$

A demonstração de que o ínfimo das constantes C satisfazendo (1.13) define uma norma em $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE;F)$ é similar à feita nas proposições anteriores. ∎

1.3 Um resultado abstrato sobre operadores multilineares Cohen fortemente somantes

Por meio da Proposição 1.2.2, poderíamos ter definido um operador multilinear Cohen fortemente p-somante usando a desigualdade (1.11). Muitos autores, incluindo D. Achour e K. Saadi [2], definem um operador multilinear Cohen fortemente p-somante da seguinte forma:

Sejam $1 < p \leq \infty$, E_j, F espaços de Banach, $j = 1, ..., n$. Um operador n-linear contínuo $T : E_1 \times ... \times E_n \to F$ é Cohen fortemente p-somante se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $x_1^{(j)}, ..., x_m^{(j)} \in E_j$ e $\varphi_1, ..., \varphi_m \in F'$ e para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left\| x_i^{(j)} \right\|^p \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} . \tag{1.14}$$

Com esta definição, Achour-Mezrag [1] provam um Teorema da Dominação de Pietsch (1.16) para esta classe. A seguir, mostramos que as definições dadas por (1.14) e (1.11) são, de fato, equivalentes por serem caracterizadas pelo mesmo Teorema da Dominação de Pietsch.

Observamos que, como

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\left\| x_i^{(1)} \right\| \; ... \; \left\| x_i^{(n)} \right\| \right)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\|^{np} \right)^{1/np} ... \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(n)} \right\|^{np} \right)^{1/np} ,$$

a implicação (1.14) $\Rightarrow$ (1.11) é óbvia. Entretanto, a implicação (1.11) $\Rightarrow$ (1.14) não nos parece imediata. A principal ferramenta usada na demonstração desta equivalência é o Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado [11, 33]:

Sejam $X_1, ..., X_n, Y$ e $E_1, ..., E_r$ conjuntos não-vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de funções de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y. Sejam $K_1, ..., K_t$ espaços topológicos de Hausdorff compactos, $G_1, ..., G_t$ espaços de Banach e suponha que as aplicações

$$\begin{cases} R_j \; : \; K_j \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j \to [0, \infty) \; , \; j = 1, ..., t \; , \\ S \; : \; \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_1 \times \cdots \times G_t \to [0, \infty) \end{cases}$$

possuam as seguintes propriedades:

1. Para cada $x^{(l)} \in E_l$ e $b \in G_j$, com $(j, l) \in \{1, ..., t\} \times \{1, ..., r\}$, a aplicação

$$(R_j)_{x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b} \; : \; K_j \to [0, \infty) \; ,$$

definida por $(R_j)_{x^{(1)},...,x^{(r)},b}(\varphi) = R_j\left(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b\right)$, é contínua;

2. As seguintes desigualdades são válidas:

$$\begin{cases} R_j\left(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, \eta_j b^{(j)}\right) \leq \eta_j R_j\left(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(j)}\right) \\ S\left(f, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, \alpha_1 b^{(1)}, ..., \alpha_t b^{(t)}\right) \geq \alpha_1 ... \alpha_t S\left(f, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(1)}, ..., b^{(t)}\right) \end{cases}$$

para todos $\varphi \in K_j$, $x^{(l)} \in E_l$ (com $l = 1, ..., r$), $0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1$, $b^{(j)} \in G_j$, $j = 1, ..., t$ e $f \in \mathcal{H}$.

Sob essas condições, temos a seguinte definição e teorema, obtidos de [34]:

Definição 1.3.1 *Sejam* $0 < p_1, ..., p_t, p_0 < \infty$, *com* $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$. *Uma aplicação* $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ *em* $\mathcal{H}$ *é* $R_1, ..., R_t$*-*S*-abstrato* $(p_1, ..., p_t)$*-somante se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(S\left(f, x_i^{(1)}, ..., x_i^{(r)}, b_i^{(1)}, ..., b_i^{(t)}\right)\right)^{p_0}\right)^{1/p_0}$$
$$\leq C \prod_{k=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_k}\left(\sum_{i=1}^{m} R_k\left(\varphi, x_i^{(1)}, ..., x_i^{(r)}, b_i^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{1/p_k}$$

para todos $x_1^{(s)}, ..., x_m^{(s)} \in E_s$, $b_1^{(s)}, ..., b_m^{(s)} \in G_l$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $(s,l) \in \{1, ..., r\} \times \{1, ..., t\}$.

Teorema 1.3.2 (Teorema da Dominação de Pietsch generalizado) *Uma aplicação* $f \in \mathcal{H}$ *é* $R_1, ..., R_t$*-*S*-abstrato* $(p_1, ..., p_t)$*-somante se, e somente se, existem uma constante* $C > 0$ *e medidas de probabilidade de Borel* μ_k *em* K_k, $k = 1, ..., t$, *tais que*

$$S\left(f, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(1)}, ..., b^{(t)}\right) \leq C \prod_{k=1}^{t}\left(\int_{K_k} R_k\left(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(k)}\right)^{p_k} d\mu_k\right)^{1/p_k},$$

para todos $x^{(l)} \in E_l$, $l = 1, ..., r$ *e* $b^{(k)} \in G_k$, *com* $k = 1, ..., t$.

Usaremos a sigla TDP para designar o Teorema da Dominação de Pietsch a partir deste ponto.

Vamos estabelecer a equivalência entre as diferentes abordagens sobre operadores multilineares Cohen fortemente somantes:

Teorema 1.3.3 *Seja* $1 < p \leq \infty$, *com* $1/p + 1/p^* = 1$. *Para* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},...,x_i^{(n)}\right)\right)\right| \leq C\left(\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left\|x_i^{(j)}\right\|^p\right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*},$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in X_j$, $\varphi_i \in Y'$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$;

ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},...,x_i^{(n)}\right)\right)\right| \leq C\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(j)}\right\|^{np}\right)^{1/np} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} , \tag{1.15}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in X_j$, $\varphi_i \in Y'$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$;

*iii) Existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{Y''}$ (com a topologia fraca *) tais que*

$$|\varphi(T(x_1,...,x_n))| \leq C||x_1|| \ ... \ ||x_n|| \left(\int_{B_{Y''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} d\mu(\psi)\right)^{1/p^*} , \tag{1.16}$$

para todos $x_j \in X_j$, $\varphi \in Y'$, $j = 1,...,n$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Como já dito, basta usar a desigualdade de Hölder.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Usando o TDP generalizado, escolhendo

$$\left|\begin{array}{l}
t = n+1 \text{ e } \ r = 1 \\
E_1 = \{0\} \\
K_k = \{0\} \ , k = 1,...,n \text{ e } \ K_{n+1} = B_{Y''} \\
G_k = X_k, \quad k = 1,...,n, \text{ e } \ G_{n+1} = Y' \\
\mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1,...,X_n;Y) \\
p_0 = 1, \quad p_k = np, \quad k = 1,...,n \text{ e } \ p_{n+1} = p^* \\
S\left(T,0,x^{(1)},...,x^{(n)},\varphi\right) = \left|\varphi\left(T\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\right)\right| \\
R_k\left(\gamma,0,x^{(k)}\right) = \left\|x^{(k)}\right\|, \ k = 1,...,n \\
R_{n+1}(\psi,0,\varphi) = |\psi(\varphi)|
\end{array}\right.$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m}\left(S\left(T,x_i^{(1)},...,x_i^{(r)},b_i^{(1)},...,b_i^{(t)}\right)\right)^{p_0}\right)^{1/p_0} &= \left(\sum_{i=1}^{m}\left(S\left(T,0,x_i^{(1)},...,x_i^{(n)},\varphi_i\right)\right)^{p_0}\right)^{1/p_0} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},...,x_i^{(n)}\right)\right)\right| \ ,
\end{aligned}$$

e também

$$
\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n+1}\sup_{\varphi\in K_k}\left(\sum_{i=1}^{m}R_k\left(\varphi,x_i^{(1)},...,x_i^{(r)},b_i^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{1/p_k}\\
&=\sup_{\psi\in K_{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{m}R_{n+1}(\psi,0,\varphi_i)^{p_{n+1}}\right)^{1/p_{n+1}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\sup_{\gamma\in K_k}\left(\sum_{i=1}^{m}R_k\left(\gamma,0,x_i^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{1/p_k}\\
&=\sup_{\psi\in B_{Y''}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\psi\left(\varphi_i\right)\right|^{p^*}\right)^{1/p^*}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(k)}\right\|^{np}\right)^{1/np}\\
&=||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(k)}\right\|^{np}\right)^{1/np}.
\end{aligned}
$$

Assim, T satisfaz (1.15) se, e somente se, é $R_1,...,R_t$-S-abstrato $(p_1,...,p_t)$-somante. Pelo TDP generalizado, existem uma constante $C>0$ e medidas de probabilidade de Borel μ_k em K_k, $k=1,...,t$, tais que

$$
S(T,x_1,...,x_r,b_1,...,b_t)\leq C\prod_{k=1}^{t}\left(\int_{K_k}R_k(\varphi,x_1,...,x_r,b_k)^{p_k}d\mu_k\right)^{1/p_k},
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(T(x_1,...,x_n))|&\leq C\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{K_k}||x_k||^{np}d\mu_k\right)^{1/np}\right]\left(\int_{B_{Y''}}|\psi(\varphi)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)^{1/p^*}\\
&\leq C||x_1||\ ...\ ||x_n||\left(\int_{B_{Y''}}|\psi(\varphi)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)^{1/p^*}.
\end{aligned}
$$

$(iii)\Rightarrow(i)$: (Teorema 2.4 em [1]) Para todo $m\in\mathbb{N}$, se $1\leq i\leq m$ segue, por (1.16), que

$$
\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},...,x_i^{(n)}\right)\right)\right|\leq C\left\|x_i^{(1)}\right\|\ ...\ \left\|x_i^{(n)}\right\|\left(\int_{B_{Y''}}|\psi(\varphi_i)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)^{1/p^*}.
$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},...,x_i^{(n)}\right)\right)\right| \\
&\leq C\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \ ... \ \left\|x_i^{(n)}\right\|\left(\int_{B_{Y''}}|\psi(\varphi_i)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)^{1/p^*}\right) \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \ ... \ \left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{B_{Y''}}|\psi(\varphi_i)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)\right)^{1/p^*} \\
&= C\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \ ... \ \left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{1/p}\left(\int_{B_{Y''}}\sum_{i=1}^{m}|\psi(\varphi_i)|^{p^*}d\mu(\psi)\right)^{1/p^*} \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \ ... \ \left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{1/p}\left(\sup_{\psi\in B_{Y''}}\sum_{i=1}^{m}|\psi(\varphi_i)|^{p^*}\right)^{1/p^*} \\
&= C\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \ ... \ \left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{1/p}||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\ .
\end{aligned}$$

■

O teorema anterior pode ser visto como um caso particular do próximo teorema, mais geral e abstrato. A ferramenta usada na demonstração será novamente o TDP generalizado (veja [34]).

Teorema 1.3.4 *Seja $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ uma aplicação em $\mathcal{H}$ e sejam*

$$0 < p^*, u, s, p_1, ..., p_{t-1}, q_1, ..., q_{t-1} < \infty\ ,$$

tais que

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{t-1}} + \frac{1}{p^*} \quad \text{e} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_{t-1}} + \frac{1}{p^*}.$$

Se $R_{k_{(x_1,...,x_r,b)}}(\cdot)$ é constante, para cada $x_1, ..., x_r, b$ e para todo $1 \leq k \leq t-1$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) f é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(p_1, ..., p_{t-1}, p^*)$-somante;

ii) f é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(q_1, ..., q_{t-1}, p^*)$-somante;

Demonstração. Pelo TDP generalizado, f é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(p_1, ..., p_{t-1}, p^*)$-somante se, e somente se, existem uma constante C e medidas de probabilidade de Borel μ_i em K_i, $i = 1, ..., t$, tais que

$$S(f, x_1, ..., x_r, b_1, ..., b_t) \leq C\prod_{i=1}^{t}\left(\int_{K_i} R_i(\varphi, x_1, ..., x_r, b_i)^{p_i}d\mu_i\right)^{1/p_i}\ .$$

Em nosso caso, f é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(p_1, ..., p_{t-1}, p^*)$-somante se, e somente se, existem uma constante C e uma medida de probabilidade de Borel μ em K_t tais que

$$S(f, x_1, ..., x_r, b_1, ..., b_t) \leq C \left(\prod_{i=1}^{t-1} R_i(\varphi, x_1, ..., x_r, b_i) \right) \cdot \left(\int_{K_t} R_t(\varphi, x_1, ..., x_r, b_t)^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*} , \tag{1.17}$$

já que, por hipótese, para qualquer $\varphi \in K_i$ fixo,

$$\left(\int_{K_i} R_i(\varphi, x_1, ..., x_r, b_i)^{p_i} d\mu_i \right)^{1/p_i} = R_i(\varphi, x_1, ..., x_r, b_i) \ , \ i = 1, ..., t-1.$$

Por outro lado, o mesmo raciocínio mostra que f é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(q_1, ..., q_{t-1}, p^*)$-somante se, e somente se, existem uma constante C e uma medida de probabilidade de Borel μ em K_t tais que

$$S(f, x_1, ..., x_r, b_1, ..., b_t) \leq C \left(\prod_{i=1}^{t-1} R_i(\varphi, x_1, ..., x_r, b_i) \right) \cdot \left(\int_{K_t} R_t(\varphi, x_1, ..., x_r, b_t)^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*} ,$$

expressão que corresponde exatamente à dada por (1.17). ■

Vale ressaltar uma conseqüência um tanto surpreendente do Teorema 1.3.4 para os operadores lineares. Sejam $p^* \in (1, \infty)$ fixo e

$$\Gamma = \left\{ (r, q) \in [1, \infty) \times (1, \infty) : \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*} \right\}.$$

Seja $C_{r,q}(E; F)$ a classe de todos os operadores $T \in \mathcal{L}(E; F)$ tais que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_i (T (x_i))|^r \right)^{1/r} \leq C \left\| (x_i)_{i=1}^m \right\|_q \left\| (\varphi_i)_{i=1}^m \right\|_{w,p^*}$$

para todo inteiro positivo m e todos $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$. Pelo Teorema 1.3.4, segue que

$$C_{r_1,q_1}(E; F) = C_{r_2,q_2}(E; F)$$

para todos $(r_1, q_1), (r_2.q_2) \in \Gamma$. Em particular,

$$C_{r,q}(E; F) = C_{1,p}(E; F) = \mathcal{D}_p(E; F) \ ,$$

com $1 = 1/p + 1/p^*$, para todo $(r, q) \in \Gamma$.

Um fato importante que será usado posteriormente é que a classe $C_{1,q}(E; F)$ é trivial se $p < q$. A demonstração deste fato é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.3.5 *Se $1 < p < \infty$, $1 = 1/p + 1/p^*$ e $p < q$, então $C_{1,q}(E;F) = \{0\}$.*

Demonstração. O caso $E = \{0\}$ ou $F = \{0\}$ é trivial. Suponhamos $E \neq \{0\}$ e $F \neq \{0\}$. Usando a Proposição A.5 do Apêndice A, vamos tomar a sequência $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} = (\alpha_i \beta_i)_{i=1}^{\infty} \notin l_1$ com $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ e $(\beta_i)_{i=1}^{\infty} \in l_q$.

Se $T \in C_{1,q}(E;F)$, $0 \neq x \in E$ e $0 \neq \varphi \in F'$, então, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |\varphi(T(\lambda_i x))| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(T(\alpha_i \beta_i x))| &= \sum_{i=1}^{m} |(\alpha_i \varphi)(T(\beta_i x))| \\ &\leq C ||(\beta_i x)_{i=1}^{m}||_q \, ||(\alpha_i \varphi)_{i=1}^{m}||_{w,p*} \ .\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\varphi(T(x))| \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| &\leq C ||x|| \, ||(\beta_i)_{i=1}^{m}||_q \sup_{\psi \in B_{F''}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\psi(\alpha_i \varphi)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\ &= C ||x|| \, ||(\beta_i)_{i=1}^{m}||_q \sup_{\psi \in B_{F''}} |\psi(\varphi)| \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\ &= C ||x|| \, ||(\beta_i)_{i=1}^{m}||_q \, ||\varphi|| \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^{p^*} \right)^{1/p^*} .\end{aligned}$$

Agora, tomando seguidamente o $\sup_{||\varphi|| \leq 1}$ e o $\sup_{||x|| \leq 1}$ na desigualdade acima, obtemos

$$||T|| \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leq C \, ||(\beta_i)_{i=1}^{m}||_q \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^{p^*} \right)^{1/p^*} ,$$

donde concluímos que se $T \neq 0$, segue que $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1$, o que é absurdo. ■

Capítulo 2

Ideais de operadores Cohen fortemente somantes

Neste capítulo vamos estudar os operadores Cohen fortemente somantes sob o ponto de vista da teoria de ideais de operadores e polinômios. Mostraremos que, de fato, as generalizações multilinear e polinomial apresentadas no Capítulo 1 formam ideais de Banach.

2.1 Ideais de operadores: exposição breve da teoria

Convém apresentarmos uma breve introdução à teoria de ideais de operadores, com vistas ao estudo de ideais de operadores Cohen fortemente p-somantes. Os resultados desta seção são todos conhecidos e o livro [38], de Pietsch, é uma excelente referência para consultas. Também sugerimos [4, 8, 9]

Definição 2.1.1 *Um ideal de operadores (lineares) $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:*

i) $\mathcal{I}(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores de posto finito;

ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F,G)$ e $t \in \mathcal{L}(G,H)$, então $tvu \in \mathcal{I}(E;H)$.

Definição 2.1.2 *Um ideal normado de operadores* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0, \infty)$ *tal que:*

i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *restrita a* $\mathcal{I}(E; F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*;*

ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$*, onde* $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}}(x) = x$*;*

iii) Se $u \in \mathcal{L}(E, F)$*,* $v \in \mathcal{I}(F; G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G; H)$*, então*

$$\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|.$$

Quando as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ do ideal $\mathcal{I}$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal de Banach (ou completo) de operadores.

A desigualdade abaixo será muito utilizada neste capítulo, em especial nas demonstrações de completude dos ideais de operadores Cohen somantes.

Proposição 2.1.3 *Seja* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *um ideal normado de operadores. Então,* $\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}$ *para qualquer* $t \in \mathcal{I}$*.*

Observação 2.1.4 *Se* $\varphi \in E'$*, então* $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathcal{I}}$*. De fato, como* φ *é de posto finito, então* $\varphi \in \mathcal{I}$ *e*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{I}} = \|id_{\mathbb{K}}\varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|\varphi\| = \|\varphi\|. \tag{2.1}$$

A desigualdade contrária segue da Proposição 2.1.3.

Agora, como uma generalização natural da teoria de ideais de operadores lineares, vejamos a noção de ideais de aplicações multilineares.

Definição 2.1.5 *Sejam* $E_1, ..., E_n$ *são espaços normados. A aplicação* $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é dita de tipo finito se existem* $m \in \mathbb{N}$*,* $\varphi_i^{(j)} \in E_j'$ *e* $b_i \in F$ *com* $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$*, tais que*

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_i^{(n)}(x_n) b_i.$$

O conjunto formado por essas aplicações é denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, ..., E_n; F)$*. É fácil ver que* $\mathcal{L}_f(E_1, ..., E_n; F)$ *é um subespaço de* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$*.*

Definição 2.1.6 *Um ideal de aplicações multilineares* $\mathcal{M}$ *é uma subclasse da classe de todas aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$ *e* F*, as componentes* $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) \cap \mathcal{M}$ *satisfazem:*

i) $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *que contém as aplicações* n*-lineares de tipo finito;*

ii) A propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ *para* $j = 1, ..., n$ *e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$, *então* $tA(u_1, ..., u_n) \in \mathcal{M}(G_1, ..., G_n; H)$.

O ideal $\mathcal{M}$ também é denominado *multi-ideal* e, para cada n fixo,

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{E_1,...,E_n,F \text{ Banach}} \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$$

é chamado de ideal de aplicações n-lineares.

Definição 2.1.7 *Um ideal normado de aplicações multilineares* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *é um ideal de aplicações multilineares* $\mathcal{M}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$, *tal que:*

i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ *restrita a* $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$, F *e todo* $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} = 1$, *onde* $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}^n}(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdots x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

iii) Se $M \in \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ *para* $j = 1, ..., n$ *e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$, *então*

$$\|tM(u_1, ..., u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \|M\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Se n for um inteiro positivo fixo, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{M}_n$ é um ideal normado de aplicações n-lineares. Quando as componentes $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um multi-ideal de Banach. O mesmo se diz de $\mathcal{M}_n$.

Observação 2.1.8 *As componentes de um multi-ideal* $\mathcal{M}$ *ou de um ideal de aplicações* n*-lineares* $\mathcal{M}_n$ *envolverão sempre espaços de Banach sobre o mesmo corpo (fixo)* $\mathbb{K}$.

Note que o espaço vetorial $\mathcal{L}_f\left(E_1,...,E_n;F\right)$ satisfaz a propriedade de ideal. De fato, seja $M\in\mathcal{L}_f\left(E_1,...,E_n;F\right)$ da forma

$$M\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^{(1)}\left(x_1\right)\cdots\varphi_i^{(n)}\left(x_n\right)b_i$$

e sejam $u_j\in\mathcal{L}\left(G_j;E_j\right)$ com $j=1,...,n$, e $t\in\mathcal{L}\left(F;H\right)$. Então,

$$\begin{aligned}
tM\left(u_1,...,u_n\right)\left(x_1,...,x_n\right)&=tM\left(u_1\left(x_1\right),...,u_n\left(x_n\right)\right)\\
&=t\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^{(1)}\left(u_1\left(x_1\right)\right)\cdots\varphi_i^{(n)}\left(u_n\left(x_n\right)\right)b_i\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{m}t\left(\varphi_i^{(1)}\left(u_1\left(x_1\right)\right)\cdots\varphi_i^{(n)}\left(u_n\left(x_n\right)\right)b_i\right)\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^{(1)}\left(u_1\left(x_1\right)\right)\cdots\varphi_i^{(n)}\left(u_n\left(x_n\right)\right)t\left(b_i\right)\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\varphi_i^{(1)}u_1\right)\left(x_1\right)\cdots\left(\varphi_i^{(n)}u_n\right)\left(x_n\right)t\left(b_i\right)\right),
\end{aligned}$$

com $\left(\varphi_i^{(j)}u_j\right)\in G_j'$ e $t\left(b_i\right)\in H$. Portanto

$$tM\left(u_1,...,u_n\right)\in\mathcal{L}_f\left(G_1,...,G_n;H\right).$$

As normas em multi-ideais têm comportamento semelhante ao caso de ideais de operadores lineares, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 2.1.9 *Seja $\left(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}}\right)$ um multi-ideal normado. Então, $\|M\|\leq\|M\|_{\mathcal{M}}$ para qualquer M em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Sejam $M\in\mathcal{M}\left(E_1,...,E_n;F\right)$, $\varphi\in F'$ e $x_j\in E_j$ fixos, com $j=1,...,n$. Defina, para cada $j=1,...,n$, $R_j:\mathbb{K}\to E_j$, por $R_j\left(\lambda\right)=\lambda x_j$. Segue que $\|R_j\|=\|x_j\|$ e

$$\varphi M\left(R_1,...,R_n\right)\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=\varphi M\left(\lambda_1x_1,...,\lambda_nx_n\right)=\lambda_1\cdots\lambda_n\left(\varphi M\right)\left(x_1,...,x_n\right).$$

Então,

$$\varphi M\left(R_1,...,R_n\right)=\left(\varphi M\right)\left(x_1,...,x_n\right)id_{\mathbb{K}^n},\tag{2.2}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|(\varphi M)(x_1,...,x_n)| &= |(\varphi M)(x_1,...,x_n)| \, \|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} \\
&= \|(\varphi M)(x_1,...,x_n)\, id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} \\
&= \|\varphi M(R_1,...,R_n)\|_{\mathcal{M}} \\
&\leq \|\varphi\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| \cdots \|R_n\| .
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\begin{aligned}
\|M(x_1,...,x_n)\| &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |(\varphi M)(x_1,...,x_n)| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|\varphi\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| \cdots \|R_n\| \\
&= \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|x_1\| \cdots \|x_n\| \ ,
\end{aligned}$$

donde $\|M\| \leq \|M\|_{\mathcal{M}}$. ■

Apresentaremos a noção de ideais de polinômios como adaptação natural do conceito de ideais de aplicações multilineares. Em princípio, vejamos a definição de polinômio de tipo finito.

O subespaço de $\mathcal{P}(^nE;F)$ gerado pelas aplicações $P(x) = \varphi(x)^n b$, com $\varphi \in E'$ e $b \in F$, é denotado por $\mathcal{P}_f(^nE;F)$ e seus elementos são chamados de polinômios n-homogêneos de tipo finito. Denotamos por $\mathcal{P}_A(^nE;F)$ o fecho de $\mathcal{P}_f(^nE;F)$ em $\mathcal{P}(^nE;F)$, e os elementos de $\mathcal{P}_A(^nE;F)$ são chamados de polinômios aproximáveis.

Definição 2.1.10 *Um ideal de polinômios homogêneos, ou simplesmente um ideal de polinômios, é uma subclasse $\mathcal{U}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{U}(^nE;F) := \mathcal{P}(^nE;F) \cap \mathcal{U}$ satisfazem:*

i) $\mathcal{U}(^nE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$ que contém os polinômios n-homogêneos de tipo finito;

ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{U}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $tPu \in \mathcal{U}(^nG;H)$.

Se $n \in \mathbb{N}$ for fixado, a classe

$$\mathcal{U}_n := \bigcup_{E,F \text{ Banach}} \mathcal{U}(^nE;F)$$

é chamada de ideal de polinômios n-homogêneos.

Definição 2.1.11 *Um ideal normado de polinômios* $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ *é um ideal de polinômios* $\mathcal{U}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow [0, \infty)$ *, tal que:*

i) $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ *restrita a* $\mathcal{U}(^nE; F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F *e todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

ii) $\|id_{\mathbb{K}}^n\|_{\mathcal{U}} = 1$*, onde* $id_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}}^n(x) = x^n$*;*

iii) Se $u \in \mathcal{L}(G, E)$ *,* $P \in \mathcal{U}(^nE; F)$*, e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$ *, então* $\|tPu\|_{\mathcal{U}} \leq \|t\| \|P\|_{\mathcal{U}} \|u\|^n$ *.*

Se as componentes $\mathcal{U}(^nE; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$, dizemos que $\mathcal{U}$ é ideal de Banach de polinômios. De modo análogo se procede para $\mathcal{U}_n$.

As definições e resultados a seguir mostram que sempre é possível obter um ideal de polinômios a partir de um multi-ideal. Doravante, denotaremos a classe de todos os polinômios n-homogêneos e contínuos entre espaços de Banach por $\mathcal{P}^n$.

Definição 2.1.12 *Seja* $\mathcal{M}$ *um ideal normado de aplicações multilineares. A classe*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \left\{ P \in \mathcal{P}^n; \check{P} \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

com $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\| \check{P} \right\|_{\mathcal{M}}$*, é chamada ideal de polinômios gerado pelo ideal* $\mathcal{M}$*.*

Proposição 2.1.13 *Seja* $\mathcal{M}$ *um ideal de Banach de aplicações multilineares. Então* $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ *é um ideal de Banach de polinômios.*

Demonstração. Sejam E, F espaços de Banach, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE; F)$ e $k \in \mathbb{K}$. Então $\check{P}_1, \check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE; F)$. Como $\mathcal{M}(^nE; F)$ é um ideal, segue que $\check{P}_1 + k\check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE; F)$. Assim,

$$(P_1 + kP_2)^{\vee} = \check{P}_1 + k\check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE; F),$$

e portanto

$$P_1 + kP_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE; F).$$

Se P é um polinômio n-homogêneo de tipo finito, segue diretamente da Fórmula de Polarização que $\check{P}$ é de tipo finito e portanto $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE; F)$.

Sejam $u \in \mathcal{L}(G, E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Como

$$t\check{P}(u, ..., u)(x, ..., x) = t\check{P}(u(x), ..., u(x)) = tPu(x) = (tPu)^{\vee}(x, ..., x),$$

segue que

$$(tPu)^{\vee} = t\check{P}(u, ..., u) \in \mathcal{M}\left({}^{n}E; F\right), \tag{2.3}$$

e portanto vale a propriedade de ideal, isto é, $tPu \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}G; H\right)$.

Não é difícil mostrar que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$ restrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)$ é uma norma.

Para o cálculo da norma do operador $id_{\mathbb{K}}^{n}$, note que $(id_{\mathbb{K}}^{n})^{\vee} = id_{\mathbb{K}^n}$. Assim

$$\|id_{\mathbb{K}}^{n}\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} = 1.$$

Sejam $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)$ e $u \in \mathcal{L}(G, E)$. De (2.3), segue que

$$\|tPu\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|t\check{P}(u, ..., u)\right\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} \|u\|^{n} = \|t\| \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \|u\|^{n}.$$

Como $\mathcal{M}$ é um ideal de Banach e como ${}^{\vee} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left({}^{n}E; F\right) : P \longrightarrow \check{P}$ é uma isometria linear sobre a imagem, para provar que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)$ é um espaço de Banach basta mostrar que ${}^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)\right)$ é fechado em $\mathcal{M}\left({}^{n}E; F\right)$. Mas isso não é difícil de verificar. De fato, se

$$\lim_{k\to\infty} {}^{\vee}(P_k) = A \in \mathcal{M}\left({}^{n}E; F\right)$$

na norma de $\mathcal{M}$, então $\left\|\check{P}_k - A\right\|_{\mathcal{M}} \to 0$, e como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, segue que $\left\|\check{P}_k - A\right\| \to 0$. Sabendo que $\mathcal{L}_s\left({}^{n}E; F\right)$ é fechado em $\mathcal{L}\left({}^{n}E; F\right)$, segue que $A \in \mathcal{L}_s\left({}^{n}E; F\right)$ e portanto $\hat{A} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)$, pois $\left(\hat{A}\right)^{\vee} = A \in \mathcal{M}\left({}^{n}E; F\right)$. Assim, $A = {}^{\vee}\left(\hat{A}\right) \in {}^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)\right)$ e segue que ${}^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^{n}E; F\right)\right)$ é fechada. Portanto $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios. ■

2.2 Ideal de operadores lineares Cohen fortemente somantes

Vamos denotar por $\mathcal{D}_p$ a subclasse da classe de todos os operadores lineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente p-somantes.

Nesta seção, por razões de completude do trabalho, vamos mostrar que $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal de Banach de operadores lineares. Este resultado é conhecido embora não esteja tão presente na literatura.

Apenas uma pequena observação é necessária antes de mostrarmos os principais resultados da seção.

Observação 2.2.1 *Se* $0 \neq T \in \mathcal{L}(E;F)$ *e* $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, *então*

$$\begin{aligned} ||(\varphi_i T)_{i=1}^m||_{w,p^*} &= \sup_{y \in B_E} ||(\varphi_i(T(y)))_{i=1}^m||_{p^*} \\ &= ||T|| \sup_{y \in B_E} \left\| \left(\varphi_i \left(\frac{T(y)}{||T||} \right) \right)_{i=1}^m \right\|_{p^*} \\ &\leq ||T|| \sup_{h \in B_F} ||(\varphi_i(h))_{i=1}^m||_{p^*} \\ &= ||T|| \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \ , \end{aligned}$$

onde, na primeira e na última igualdade, usamos a Proposição A.4 do Apêndice A.

Proposição 2.2.2 *Se* $1 < p \leq \infty$, *então* $(\mathcal{D}_p, d_p)$ *é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração. Já sabemos que as componentes $\mathcal{D}_p(E;F)$ são espaços vetoriais normados (com a norma $d_p(\cdot)$) quaisquer que sejam os espaços de Banach E e F (Proposição 1.1.6). Vamos mostrar que toda componente $\mathcal{D}_p(E;F)$ contém os operadores de posto finito, isto é, $\mathcal{L}_f(E;F) \subset \mathcal{D}_p(E;F)$, para todos os espaços de Banach E e F. Nesta direção, vamos verificar que

$$T : E \to F \ : T(x) = \psi(x)y, \text{ com } \psi \in E' \text{ e } y \in F,$$

pertence a $\mathcal{D}_p(E;F)$. De fato, para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |\varphi_i(T(x_i))| &= \sum_{i=1}^m |\varphi_i(\psi(x_i)y)| = \sum_{i=1}^m |\psi(x_i)\varphi_i(y)| \\ &\leq ||\psi|| \sum_{i=1}^m ||x_i|| |\varphi_i(y)| \\ &\leq ||\psi|| \left(\sum_{i=1}^m ||x_i||^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi_i(y)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\ &= ||\psi|| \, ||y|| \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \left(\sum_{i=1}^m \frac{|\varphi_i(y)|^{p^*}}{||y||^{p^*}} \right)^{1/p^*} \\ &\leq ||\psi|| \, ||y|| \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \sup_{w \in B_F} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi_i(w)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\ &= C \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \ , \end{aligned}$$

e então $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$.

Propriedade de ideal: Sejam $A_1 \in \mathcal{L}(E_0;E)$, $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$ e $A_2 \in \mathcal{L}(F;F_0)$. Para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E_0$, $\varphi_i \in F_0^{'}$, $i = 1,...,m$, usando a Observação 2.2.1,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i((A_2TA_1)(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |(\varphi_i A_2)(T(A_1(x_i))| \\
&\leq d_p(T)||(A_1x_i)_{i=1}^m||_p \, ||(\varphi_i A_2)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&\leq d_p(T)||A_1|| \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \, ||A_2|| \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||A_2|| \, d_p(T) \, ||A_1|| \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \qquad (2.4) \\
&= C \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}
\end{aligned}$$

e, portanto, $A_2TA_1 \in \mathcal{D}_p(E_0;F_0)$. Note também que, por (2.4),

$$d_p(A_2TA_1) \leq ||A_2|| \, d_p(T) \, ||A_1|| \ .$$

Por último, vamos mostrar que $d_p(id_{\mathbb{K}}) = 1$. Como $id_{\mathbb{K}}$ é de posto finito (logo, Cohen fortemente p-somante) e $l_q^w(\mathbb{K})$ é isometricamente isomorfo a $l_q(\mathbb{K})$ (Apêndice A, Proposição A.2), tomando $m = 1$ em (1.3), segue que

$$|\varphi(id_{\mathbb{K}}(x))| = |\varphi(x)| \leq ||x||||\varphi|| = ||(x,0,0,...)||_p \, ||(\varphi,0,0,...)||_{w,p^*} \ ,$$

o que nos diz que $d_p(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$. Além disso, para todos $x, \varphi \in \mathbb{K}$, com $||\varphi|| = 1$,

$$||x|| = ||(x,0,0,...)||_{C,p} = ||(id_{\mathbb{K}}(x),0,0,...)||_{C,p} \leq d_p(id_{\mathbb{K}}) \, ||x|| \, ||\varphi||,$$

o que implica em $1 \leq d_p(id_{\mathbb{K}})$. Logo $d_p(id_{\mathbb{K}}) = 1$. ■

Proposição 2.2.3 *Se $1 < p \leq \infty$, então $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal de Banach de operadores lineares.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{D}_p(E;F), d_p)$. Como $||\cdot|| \leq d_p(\cdot)$ (Proposição 2.1.3), segue que $(T_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \in \mathcal{L}(E;F). \qquad (2.5)$$

Devemos agora mostrar que $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$.

Como cada T_n é Cohen fortemente p-somante, $\widehat{T}_n : l_p(E) \to l_p\langle F \rangle$ está bem definido para todo n. Além disso, $\left\|\widehat{T}_n\right\| = d_p(T_n)$, donde $(\widehat{T}_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(l_p(E);l_p\langle F \rangle)$ e portanto $\lim_{n\to\infty} \widehat{T}_n = A \in \mathcal{L}(l_p(E);l_p\langle F \rangle)$.

Defina, para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p(E)$,

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} := A((x_j)_{j=1}^{\infty}) \in l_p\langle F\rangle.$$

Com isso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} ||T_n(x_j) - y_j|| &\leq ||(T_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty}||_{C,p} \\ &= \left\| \widehat{T}_n((x_j)_{j=1}^{\infty}) - A((x_j)_{j=1}^{\infty}) \right\|_{C,p} \\ &< \varepsilon ||(x_j)_{j=1}^{\infty}||_p \ , \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} T_n(x_j) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Disto e de (2.5), segue que $T(x_j) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, donde

$$(T(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle, \text{ para toda } (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(E),$$

e portanto $\widehat{T} : l_p(E) \to l_p\langle F\rangle$ está bem definido. ■

2.3 Ideal de operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes

Vamos denotar por $\mathcal{L}_{Coh,p}$ a subclasse da classe de todos os operadores multilineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente p-somantes. Se $n \in \mathbb{N}$ for fixado, $\mathcal{L}^n_{Coh,p}$ denotará a classe de todos os operadores n-lineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente p-somantes. Nesta seção vamos mostrar que $(\mathcal{L}_{Coh,p}, ||\cdot||_{Coh,p})$ é um ideal de Banach de operadores multilineares. Primeiro, verifiquemos que todo operador multilinear de tipo finito é Cohen fortemente p-somante.

Proposição 2.3.1 *Se $1 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é de tipo finito, então T é Cohen fortemente p-somante.*

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que a aplicação

$$A_n : E_1 \times \cdots \times E_n \to F : \ A_n(x_1, ..., x_n) = \psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n)\, b \ ,$$

com $\psi_k \in E_k'$, $k = 1, ..., n$ e $b \in F$, é Cohen fortemente p-somante. Assim, para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(r)} \in E_r$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, $r = 1, ..., n$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(A_n \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left| \psi_1 \left(x_i^{(1)} \right) \cdots \psi_n \left(x_i^{(n)} \right) \varphi_i(b) \right| \\
&\leq ||\psi_1|| \cdots ||\psi_n|| \sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\| \cdots \left\| x_i^{(n)} \right\| |\varphi_i(b)| \\
&\leq ||\psi_1|| \cdots ||\psi_n|| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(r)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \right] \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(b)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\
&= ||\psi_1|| \cdots ||\psi_n|| \, ||b|| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(r)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \right] \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|\varphi_i(b)|^{p^*}}{||b||^{p^*}} \right)^{1/p^*} \\
&\leq ||\psi_1|| \cdots ||\psi_n|| \, ||b|| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(r)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \right] \sup_{w \in B_F} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(w)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\
&= C \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(r)} \right\|^{np} \right)^{1/np} \right] ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \ .
\end{aligned}$$

Portanto A_n é Cohen fortemente p-somante para todo n. ■

Os seguinte lema é consequência imediata do fato de $(\mathcal{L}_{Coh,p}, ||\cdot||_{Coh,p})$ ser ideal mas, por uma necessidade imediata, vamos adiantar sua apresentação.

Lema 2.3.2 *Se $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é Cohen fortemente p-somante, então*

$$||T|| \leq ||T||_{Coh,p} \ .$$

Demonstração. Tomando $m = 1$ em (1.11), segue que

$$|\varphi(T(x_1, ..., x_n))| \leq ||T||_{Coh,p} \, ||(x_1, 0, 0, ...)||_{np} \cdots ||(x_n, 0, 0, ...)||_{np} \, ||(\varphi, 0, 0, ...)||_{w,p^*} \ ,$$

e portanto, pelo Teorema de Hahn-Banach, $||T|| \leq ||T||_{Coh,p}$. ■

Teorema 2.3.3 *Se $1 < p \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\left(\mathcal{L}^n_{Coh,p}, ||\cdot||_{Coh,p}\right)$ é um ideal normado de operadores n-lineares.*

Demonstração. Já sabemos que as componentes $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ são espaços vetoriais normados (com a norma $||\cdot||_{Coh,p}$) quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$, os espaços de

Banach E_j e F, $j = 1, ...n$, (Proposição 1.2.3), e contêm os operadores de tipo finito (Proposição 2.3.1).

Vejamos a validade da propriedade de ideal. Sejam $A_r \in \mathcal{L}(H_r; E_r)$, $r = 1, ..., n$, $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e $A \in \mathcal{L}(F; F_0)$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_i^{(r)} \in H_r$, $\varphi_i \in F_0'$, $r = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$, usando a Observação 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i((AT(A_1, ..., A_n))\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|(\varphi_i A)\left(T\left(A_1\left(x_i^{(1)}\right), ..., A_n\left(x_i^{(n)}\right)\right)\right)\right| \\
&\leq ||T||_{Coh,p} \left\|(A_1 x_i^{(1)})_{i=1}^m\right\|_{np} ... \left\|(A_n x_i^{(n)})_{i=1}^m\right\|_{np} ||(\varphi_i A)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&\leq ||T||_{Coh,p} ||A_1||...||A_n|| \left\|(x_i^{(1)})_{i=1}^m\right\|_{np} \cdots \left\|(x_i^{(n)})_{i=1}^m\right\|_{np} ||A|| \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||A|| \, ||T||_{Coh,p} \, ||A_1||...||A_n|| \left\|(x_i^{(1)})_{i=1}^m\right\|_{np} \cdots \left\|(x_i^{(n)})_{i=1}^m\right\|_{np} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \qquad (2.6) \\
&= C \left\|(x_i^{(1)})_{i=1}^m\right\|_{np} \cdots \left\|(x_i^{(n)})_{i=1}^m\right\|_{np} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}
\end{aligned}$$

e, portanto, $AT(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{L}_{Coh,p}(H_1, ..., H_n; F_0)$. Note também que, por (2.6),

$$||AT(A_1, ..., A_n)||_{Coh,p} \leq ||A|| \, ||T||_{Coh,p} \, ||A_1||...||A_n|| \ .$$

Por último, vamos mostrar que $||id_{\mathbb{K}^n}||_{Coh,p} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $id_{\mathbb{K}^n}$ é de tipo finito (logo, Cohen fortemente p-somante), pelo Lema 2.3.2,

$$1 = ||id_{\mathbb{K}^n}|| \leq ||id_{\mathbb{K}^n}||_{Coh,p} \ .$$

Por outro lado, como $||\varphi||_{w,p^*} = ||\varphi||_{p^*}$ em $\mathbb{K}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}^n}\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(x_i^{(1)} \cdots x_i^{(n)}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} ||\varphi_i|| \left\|x_i^{(1)}\right\| ... \left\|x_i^{(n)}\right\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} ||\varphi_i||^{p^*}\right)^{1/p^*} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^{np}\right)^{1/np} \cdots \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(n)}\right\|^{np}\right)^{1/np} \\
&= \left\|(x_i^{(1)})_{i=1}^m\right\|_{np} \cdots \left\|(x_i^{(n)})_{i=1}^m\right\|_{np} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \ ,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_i^{(r)}, \varphi_i \in \mathbb{K}$, $r = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$, o que implica em $||id_{\mathbb{K}^n}||_{Coh,p} \leq 1$. Assim, $||id_{\mathbb{K}^n}||_{Coh,p} = 1$. ■

Proposição 2.3.4 *Se* $1 < p \leq \infty$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\left(\mathcal{L}^n_{Coh,p}, ||\cdot||_{Coh,p}\right)$ *é um ideal de Banach de operadores n-lineares.*

Demonstração. Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ em $(\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F), ||\cdot||_{Coh,p})$ uma sequência de Cauchy. Como, pelo Lema 2.3.2, $||\cdot|| \leq ||\cdot||_{Coh,p}$, segue que $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F). \tag{2.7}$$

Mostraremos que $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$. Como cada T_k é Cohen fortemente p-somante, $\widehat{T}_k$ está bem definido para todo k. Além disso, $\left\|\widehat{T}_k\right\| = ||T_k||_{Coh,p}$, logo $(\widehat{T}_k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(l_{np}(E_1), ..., l_{np}(E_n); l_p\langle F\rangle)$ e portanto $\lim_{k\to\infty} \widehat{T}_k = A \in \mathcal{L}(l_{np}(E_1), ..., l_{np}(E_n); l_p\langle F\rangle)$.

Definindo

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} := \left(A\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle,$$

para $\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_{np}(E_1) \times ... \times l_{np}(E_n)$, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) - y_j\right\| \\
&\leq \left\|\left(T_k\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{C,p} \\
&= \left\|\widehat{T}_k\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) - A\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{C,p} \\
&< \varepsilon \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{np} \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{np} ,
\end{aligned}$$

para todo $k > k_0$, isto é, $\lim_{k\to\infty} T_k\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Disto e de (2.7), obtemos $T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, donde

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle ,$$

para todo $\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_{np}(E_1) \times ... \times l_{np}(E_n)$. Portanto o operador $\widehat{T} : l_{np}(E_1) \times ... \times l_{np}(E_n) \to l_p\langle F\rangle$ está bem definido e assim $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$.
■

Vamos denotar por $\mathcal{P}_{Coh,p}$ a subclasse da classe de todos os polinômios entre espaços de Banach que são Cohen fortemente p-somantes. Se $n \in \mathbb{N}$ for fixado, $\mathcal{P}^n_{Coh,p}$ denotará a classe de todos os polinômios n-homogêneos entre espaços de Banach que são Cohen fortemente p-somantes.

Segue imediatamente do Lema 1.2.5 e dos Teoremas 2.3.4 e 2.1.13 que $\mathcal{P}_{Coh,p}$ é um ideal de Banach de polinômios:

Proposição 2.3.5 *Se $1 < p \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\left(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, ||\cdot||_{Coh,p}\right)$ é um ideal de Banach de polinômios n-homogêneos.*

Capítulo 3

Operadores múltiplo Cohen fortemente somantes

Neste capítulo usamos a teoria bem sucedida dos operadores múltiplo absolutamente somantes (veja p. ex. [25, 34, 36]) como protótipo para motivar nossa definição de operador multilinear múltiplo Cohen fortemente p-somante. Como ficará claro mais adiante, esta nova abordagem é adequada do ponto de vista da teoria de ideais de operadores multilineares e de polinômios bem como sob o ponto de vista de tipos de holomorfia.

Esses nossos resultados já se encontram publicados na Revista Linear and Multilinear Algebra sob o título "Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators" [13].

3.1 Operadores multilineares múltiplo Cohen fortemente somantes

Como temos procedido até agora em todo o texto, exibiremos a definição de operador multilinear múltiplo Cohen fortemente p-somante em termos de sequências e, em seguida, caracterizações por desigualdades.

Definição 3.1.1 *Sejam* $1 < p \leq \infty$ *e* E_i, F *espaços de Banach,* $i = 1, ..., n$*, com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$*. Um operador* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e dito múltiplo Cohen fortemente* *p-somante se*

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\in l_p\langle F\rangle\ ,$$

para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_p(E_i)$, $i=1,...,n$.

Não é difícil mostrar que a classe de todas as aplicações multilineares múltiplo Cohen fortemente p-somantes de $E_1\times\cdots\times E_n$ em F é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. Essa classe será denotada por $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,...,E_n;F)$.

Proposição 3.1.2 *Para* $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é múltiplo Cohen fortemente p-somante;*

ii) *Existe uma constante* $C>0$ *tal que*

$$\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|$$
$$\leq C\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{1/p}\cdots\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{1/p}\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p^*}\ ,$$

para quaisquer $(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\in l_{p^*}^w(F')$ *e* $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_p(E_i)$, $i=1,...,n$.

iii) *Existe uma constante* $C>0$ *tal que*

$$\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \tag{3.1}$$
$$\leq C\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{1/p}\cdots\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{1/p}\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p^*}\ ,$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, $\varphi_{j_1,...,j_n}\in F'$ *e* $x_j^{(i)}\in E_i$, $i=1,...,n$, $j_i=1,...,m$, $j=1,...,m$.

Além disso, o ínfimo das constantes C que satisfazem (3.1), denotado $||T||_{mCoh,p}$ *, define uma norma em* $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,...,E_n;F)$.

Demonstração. $(i)\Rightarrow(ii)$ Se T é múltiplo Cohen fortemente p-somante, o operador

$$\widetilde{T}:\ l_{p^*}^w(F')\times l_p(E_1)\times\cdots\times l_p(E_n)\longrightarrow l_1$$

dado por

$$\left((\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \longmapsto \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}$$

está bem definido e é $(n+1)$-linear.

Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F') \times l_p(E_1) \times \cdots \times l_p(E_n)$ com

$$\begin{cases} x_k \to x \in l_{p^*}^{w}(F') \times l_p(E_1) \times \cdots \times l_p(E_n) \\ \widetilde{T}(x_k) \to (z_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_1 \ . \end{cases} . \tag{3.2}$$

Escrevendo

$$\begin{cases} x_k = \left((\varphi^k_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}, \left(x_{k,j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{k,j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \\ x = \left((\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \end{cases} , \tag{3.3}$$

segue que

$$\begin{aligned}(z_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} &= \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\varphi^k_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{k,j_1}^{(1)}, ..., x_{k,j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} .\end{aligned}$$

Precisamos mostrar que

$$\widetilde{T}(x) = (z_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}.$$

Mas

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(x) &= \widetilde{T}\left(\left((\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} ,\end{aligned}$$

de forma que precisamos mostrar que

$$\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right) = z_{j_1,...,j_n} \tag{3.4}$$

para todos $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^k_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{k,j_1}^{(1)}, ..., x_{k,j_n}^{(n)}\right)\right) = z_{j_1,...,j_n} \tag{3.5}$$

e, por outro lado, de (3.2) e (3.3) segue que

$$x_{k,j}^{(i)} \to x_j^{(i)} \text{ em } E_i \ \text{ e } \ \varphi^k_{j_1,...,j_n} \to \varphi_{j_1,...,j_n} \text{ em } F' , \tag{3.6}$$

para quaisquer $j \in \mathbb{N},\ i = 1, ..., n$ e $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$. Como T é contínuo, segue de (3.6) que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^k_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{k,j_1}, ..., x^{(n)}_{k,j_n}\right)\right) = \varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(n)}_{j_n}\right)\right) \ , \tag{3.7}$$

para todos $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$. Assim, de (3.7) e (3.5) obtemos (3.4). Logo, T possui gráfico fechado e portanto é contínuo. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(n)}_{j_n}\right)\right)\right| \\
&= \left\|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(n)}_{j_n}\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_1 \\
&= \left\|\widetilde{T}\left((\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}, \left(x^{(1)}_{j_1}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x^{(n)}_{j_n}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_1 \\
&\leq \left\|\widetilde{T}\right\| \left\|\left(x^{(1)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \cdots \left\|\left(x^{(n)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p^*} .
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sejam $(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l^w_{p^*}(F')$ e $\left(x^{(i)}_j\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(E_i),\ i = 1, ..., n$. Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(n)}_{j_n}\right)\right)\right| \\
&= \sup_m \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(n)}_{j_n}\right)\right)\right|\right) \\
&\leq \sup_m \left(C \left\|\left(x^{(1)}_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdots \left\|\left(x^{(n)}_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p^*}\right) \\
&= C \left\|\left(x^{(1)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \cdots \left\|\left(x^{(n)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p^*} .
\end{aligned}$$

■

O resultado seguinte demonstra que a definição de operador múltiplo Cohen fortemente p-somante generaliza o conceito de operador Cohen fortemente p-somante.

Proposição 3.1.3 *Todo operador multilinear Cohen fortemente p-somante é múltiplo Cohen fortemente p-somante e*

$$||\cdot||_{mCoh,p} \leq ||\cdot||_{Coh,p} \ .$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.3, $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ se, e somente se, existem uma constante positiva C e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{F''}$ tais que

$$|\varphi(T(x_1,...,x_n))| \leq C||x_1|| \; ... \; ||x_n|| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*} ,$$

para todos $x_j \in E_j, \; \varphi \in F', \; j = 1,...,n$. Assim, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\left| \varphi_{j_1,...,j_n} \left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right| \leq C \left\| x_{j_1}^{(1)} \right\| \; ... \; \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*} ,$$

para todos $\varphi_{j_1,...,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1,...,n$, $1 \leq j_1,...,j_n \leq m$. Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_n} \left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right| \\
&\leq C \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left(\left\| x_{j_1}^{(1)} \right\| \; ... \; \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*} \right) \\
&\leq C \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left(\left\| x_{j_1}^{(1)} \right\| \; ... \; \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\| \right)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*} \\
&= C \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| x_j^{(1)} \right\|^p \right)^{1/p} \cdots \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| x_j^{(n)} \right\|^p \right)^{1/p} \left(\int_{B_{F''}} \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} |\psi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*} \\
&\leq C \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \left(\sup_{\psi \in B_{F''}} \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} |\psi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\
&= C \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \left\| (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m} \right\|_{w,p^*} ,
\end{aligned}$$

e portanto $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,...,E_n;F)$. ∎

3.2 Ideais de operadores e de polinômios múltiplo Cohen fortemente somantes

Vamos denotar por $\mathcal{L}_{mCoh,p}$ a subclasse da classe de todos os operadores multilineares entre espaços de Banach que são múltiplo Cohen fortemente p-somantes. Se $n \in \mathbb{N}$ for fixado, $\mathcal{L}_{mCoh,p}^n$ denotará a classe de todos os operadores n-lineares entre espaços de Banach que são múltiplo Cohen fortemente p-somantes.

Vamos, nesta seção, mostrar que $(\mathcal{L}_{mCoh,p} \, , || \cdot ||_{mCoh,p})$ é um ideal de Banach de operadores multilineares. Nesta direção, a Proposição 3.1.3 mostra que as componentes $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,...,E_n;F)$ contém os operadores de tipo finito e, além disso, a Proposição

3.1.2 garante que essas componentes são espaços normados. A observação seguinte nos levará ao fato de que $||id_{\mathbb{K}^n}||_{mCoh,p} = 1$.

Observação 3.2.1 *Se T é múltiplo Cohen fortemente p-somante, então $||T|| \leq ||T||_{mCoh,p}$.*

De fato, tomando $m = 1$ em (3.1), temos

$$|\varphi(T(x_1, ..., x_n))| \leq ||T||_{mCoh,p}||(x_1, 0, ...)||_p \cdots ||(x_n, 0, ...)||_p||(\varphi, 0, ...)||_{w,p^*} \ ,$$

e assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que $||T|| \leq ||T||_{mCoh,p}$.

Como $||id_{\mathbb{K}^n}|| = 1$, a Observação 3.2.1 nos dá a desigualdade $1 \leq ||id_{\mathbb{K}^n}||_{mCoh,p}$. Além disso, como $\mathcal{L}_{Coh,p}$ é um ideal, $||id_{\mathbb{K}^n}||_{Coh,p} = 1$ e a Proposição 3.1.3 nos dá a desigualdade $||id_{\mathbb{K}^n}||_{mCoh,p} \leq 1$.

Resta-nos mostrar a propriedade de ideal e a completude.

Teorema 3.2.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{L}^n_{mCoh,p}$, munido com a norma $|| \cdot ||_{mCoh,p}$, é ideal de Banach de operadores n-lineares.*

Demonstração. Sejam $A_i \in \mathcal{L}(H_i; E_i)$, $i = 1, ..., n$, $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e $A \in \mathcal{L}(F; G)$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, se $\varphi_{j_1,...,j_n} \in G'$ e $x_j^{(i)} \in H_i$, $i = 1, ..., n$, $j_i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m$, então, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(AT(A_1, ..., A_n)\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|(\varphi_{j_1,...,j_n}A)\left(T\left(A_1\left(x_{j_1}^{(1)}\right), ..., A_n\left(x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)\right| \\
&\leq ||T||_{mCoh,p}\left(\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(A_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)_{j=1}^{m}\right\|_p\right)||(\varphi_{j_1,...,j_n}A)_{j_1,...,j_n=1}^{m}||_{w,p^*} \\
&\leq ||A||\,||T||_{mCoh,p}\,||A_1||\cdots||A_n||\left(\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p\right)||(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}||_{w,p^*} \ .
\end{aligned}$$

Portanto, $AT(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(H_1, ..., H_n; G)$ e

$$||AT(A_1, ..., A_n)||_{mCoh,p} \leq ||A||\,||T||_{mCoh,p}\,||A_1||\cdots||A_n|| \ .$$

A completude é demonstrada de maneira análoga à feita para o caso do ideal dos operadores multilineares Cohen fortemente p-somantes (Teorema 2.3.4). ■

A noção de polinômios múltiplo Cohen fortemente p-somantes será introduzida por meio da Proposição 2.1.13.

Definição 3.2.3 *A classe dos polinômios n-homogêneos múltiplo Cohen fortemente p-somantes será dada por*

$$\mathcal{P}^n_{mCoh,p} := \left\{ P \in \mathcal{P}^n ; \check{P} \in \mathcal{L}^n_{mCoh,p} \right\} \ .$$

Além disso, com a norma dada por

$$||P||_{\mathcal{P}_{mCoh,p}} = ||\check{P}||_{mCoh,p} \ ,$$

obtemos um ideal (de Banach) de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{L}_{mCoh,p}$, como garante a proposição 2.1.13.

3.3 Tipos de holomorfia e ideais múltiplo Cohen fortemente somantes

Nesta seção, usamos o artigo [8] de G. Botelho *et. al.*, que estabelece condições para que um ideal de polinômios gerados por um ideal de operadores multilineares seja um tipo de holomorfia global.

3.3.1 Tipos de holomorfia global e ideais de polinômios

Dados $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $k \leq n$ e $a \in E$, definimos o polinômio $\hat{d}^kP(a) \in \mathcal{P}(^kE;F)$ por

$$\hat{d}^kP(a)(x) = \frac{k!}{(n-k)!}\check{P}(a, \overset{(n-k)}{\ldots}, a, x, \overset{(k)}{\ldots}, x) \ .$$

Diremos que um operador $(n+1)$-linear e contínuo T é simétrico nas n primeiras variáveis se

$$T(a_1, ..., a_n, b) = T\left(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}, b\right) \ ,$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1, ..., n\}$ e todos $a_1, ..., a_n \in E$ e $b \in G$.

A prova do resultado principal desta subseção será omitida. Ela pode ser encontrada em [8]. A seguinte definição é essencialmente a mesma que a dada por Nachbin [28]:

Definição 3.3.1 (Botelho *et. al.*, [8]) *Um tipo de holomorfia global é uma classe $\mathcal{P}_H$ de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{P}_H(^nE;F) := \mathcal{P}(^nE;F) \cap \mathcal{P}_H$ satisfazem:*

i) $\mathcal{P}_H({}^nE;F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{P}({}^nE;F)$ *munido com uma norma denotada por* $P \mapsto ||P||_H$*;*

ii) $\mathcal{P}_H({}^0E;F) = F$ *como espaço vetorial normado para todos* E *e* F*;*

iii) Existe uma constante $\sigma \geq 1$ *tal que para todos* $n \in \mathbb{N}$*,* $k \leq n$*,* $a \in E$ *e quaisquer espaços de Banach* E *e* F*, com* $P \in \mathcal{P}_H({}^nE;F)$*,*

$$\hat{d}^kP(a) \in \mathcal{P}_H({}^kE;F) \text{ e } \left\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kP(a)\right\|_H \leq \sigma^n||P||_H||a||^{n-k} \ .$$

Para a próxima definição, usamos a notação $({}^nE,G;F)$ em vez de $(E,\overset{(n)}{\cdots},E,G;F)$.

Definição 3.3.2 (Botelho et. al., [8]) *Seja* $\mathcal{J}$ *uma classe de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que para todos* $n \in \mathbb{N}$ *e espaços de* $E_1,...,E_n$ *e* F*, a componente* $\mathcal{J}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) \cap \mathcal{J}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *equipado com a norma denotada por* $||\cdot||_{\mathcal{J}}$ *. Dizemos que* $\mathcal{J}$ *possui a propriedade (B) se existe* $C \geq 1$ *tal que, para todos* $n \in \mathbb{N}$*, quaisquer espaços de Banach* E *e* F *e todo* $A \in \mathcal{J}({}^nE,\mathbb{K};F)$ *simétrico nas primeiras* n *variáveis, ocorre*

$$A1 \in \mathcal{J}({}^nE;F) \quad \text{e} \quad ||A1||_{\mathcal{J}} \leq C||A||_{\mathcal{J}} \ ,$$

onde $A1 : E^n \to F$ *é definido por* $A1(x_1,...,x_n) := A(x_1,...,x_n,1)$*.*

Teorema 3.3.3 (Botelho et. al., [8]) *Se um multi-ideal de Banach* $\mathcal{M}$ *possui a propriedade (B) com constante* C*, então o ideal de Banach* $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ *de polinômios gerado por* $\mathcal{M}$ *é um tipo de holomorfia global com constante* $\sigma = 2C$*.*

3.3.2 $\mathcal{P}_{mCoh,p}$ é um tipo de holomorfia global.

Vamos demonstrar que o ideal $\mathcal{L}_{mCoh,p}$ dos operadores multilineares Cohen fortemente p-somantes possui a propriedade (B) e, portanto, a classe $\mathcal{P}_{mCoh,p}$ dos polinômios múltiplo Cohen fortemente p-somantes é um tipo de holomorfia global.

Teorema 3.3.4 *O multi-ideal de Banach* $\mathcal{L}_{mCoh,p}$ *possui a propriedade (B) com constante* $C = 1$*. Portanto, o ideal* $\mathcal{P}_{mCoh,p}$ *dos polinômios múltiplo Cohen fortemente* p*-somantes é um tipo de holomorfia global com constante* $\sigma = 2$*.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(^nE, \mathbb{K}; F)$. Para todo inteiro positivo m, definimos

$$\varphi_{j_1,...,j_n,j_{n+1}} = \begin{cases} \varphi_{j_1,...,j_n}, \text{ se } j_{n+1} = 1 \\ 0, \text{ se } j_{n+1} = 2, ..., m \end{cases}, \quad \text{e} \quad y_{j_{n+1}} = \begin{cases} 1, \text{ se } j_{n+1} = 1 \\ 0, \text{ se } j_{n+1} = 2, ..., m \end{cases}, \tag{3.8}$$

com $j_1, ..., j_n, j_{n+1} = 1, ..., m$. Assim, para todos $\varphi_{j_1,...,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n$, $j_i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T1\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}, 1\right)\right)\right| \\
&\overset{(3.8)}{=} \sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}, y_{j_{n+1}}\right)\right)\right| \\
&\leq ||T||_{mCoh,p} \left\|(y_j)_{j=1}^m\right\|_p \prod_{i=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_p ||(\varphi_{j_1,...,j_{n+1}})_{j_1,...,j_{n+1}=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||T||_{mCoh,p} \prod_{i=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_p ||(\varphi_{j_1,...,j_{n+1}})_{j_1,...,j_n=1}^m||_{w,p^*} ,
\end{aligned}$$

de modo que $T1 \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(^nE; F)$ e $||T1||_{mCoh,p} \leq ||T||_{mCoh,p}$. Portanto, $\mathcal{L}_{mCoh,p}$ possui a propriedade (B) com constante $C = 1$ e, pelo Teorema 3.3.3, é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma = 2$. ■

Capítulo 4

Coerência e compatibilidade de ideais Cohen fortemente somantes

Neste capítulo mostramos que os ideais de polinômios e ideais de aplicações multilineares Cohen fortemente p-somantes e múltiplo Cohen fortemente p-somantes são coerentes e compatíveis como pares, segundo os critérios definidos por Pellegrino e Ribeiro [35], ao ideal dos operadores lineares da mesma classe. Esses conceitos são variações de abordagens anteriores de [10, 14]. Esse fato deixa claro que as generalizações multilinear e polinomial do ideal de operadores Cohen fortemente p-somantes lineares, aqui apresentadas, possuem um bom comportamento, preservando uma relevante interconexão com os níveis de n-linearidade e as características do ideal original.

4.1 Definições e resultados de coerência e compatibilidade

Dados $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e $a_k \in E_k$, o operador $T_{a_k} \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_{k-1}, E_{k+1}, ..., E_n; F)$ é definido fixando-se o elemento a_k na k-ésima coordenada e dados $a_r \in E_r$, com $r = 1, ..., n$ e $r \neq k$, o operador $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n} \in \mathcal{L}(E_k; F)$ é definido por

$$T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n}(x) = T(a_1, ..., a_{k-1}, x, a_{k+1}, ..., a_n) \ .$$

Dados $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, $k \leq n$ e $a \in E$, definimos o operador $P_{a^k} \in \mathcal{P}(^{n-k}E; F)$

por

$$P_{a^k}(x) := \check{P}(a^k, x^{n-k}) = \check{P}(a, \overset{(k)}{\dots}, a, x, \overset{(n-k)}{\dots}, x)$$

e para $k = 1$ denotamos simplesmente P_a.

Seja $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ uma N-upla de pares, onde cada $\mathcal{U}_n$ é um ideal normado de polinômios n-homogêneos e cada $\mathcal{M}_n$ é um ideal normado de aplicações n-lineares. O parâmetro N pode ser eventualmente infinito.

As demonstrações dos resultados desta seção encontram-se em [40] e serão omitidas.

Definição 4.1.1 *[Par de ideais compatíveis] Sejam $\mathcal{I}$ um ideal normado de operadores e $N \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$. Uma sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$, onde $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é compatível com $\mathcal{I}$ se existem constantes positivas α_1, α_2, α_3 e α_4 tais que para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \dots, E_n$ e F, as seguintes condições são verdadeiras para todo $n \in \{2, \dots, N\}$:*

$(CP1)$ *Se $k \in \{1, \dots, n\}$, $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \dots, E_n; F)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, então*

$$T_{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n} \in \mathcal{I}(E_k; F)$$

e

$$\left\| T_{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n} \right\|_{\mathcal{I}} \leq \alpha_1 \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \dots \|a_{k-1}\| \|a_{k+1}\| \dots \|a_n\| .$$

$(CP2)$ *Se $P \in \mathcal{U}_n(^n E; F)$ e $a \in E$, então $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{I}(E; F)$ e*

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{I}} \leq \alpha_2 \left\| \check{P} \right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|^{n-1} .$$

$(CP3)$ *Se $u \in \mathcal{I}(E_n; F)$ e $\gamma_j \in E_j'$ para todo $j = 1, \dots, n-1$, então*

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u \in \mathcal{M}_n(E_1, \dots, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u\|_{\mathcal{M}_n} \leq \alpha_3 \|\gamma_1\| \cdots \|\gamma_{n-1}\| \|u\|_{\mathcal{I}} .$$

$(CP4)$ *Se $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $\gamma \in E'$, então $\gamma^{n-1} u \in \mathcal{U}_n(^n E; F)$ e*

$$\left\| \gamma^{n-1} u \right\|_{\mathcal{U}_n} \leq \alpha_4 \|\gamma\|^{n-1} \|u\|_{\mathcal{I}} .$$

$(CP5)$ *$P \in \mathcal{U}_n(^n E; F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{M}_n(^n E; F)$.*

Definição 4.1.2 (Par de ideais coerentes) *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal normado de operadores e $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Uma sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$, onde $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é coerente se existem constantes positivas β_1, β_2, β_3 e β_4 tais que para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, ..., E_{n+1}$ e F as seguintes condições são satisfeitas para $n = 1, \ldots, N-1$:*

$(CH1)$ *Se $T \in \mathcal{M}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_j \in E_j$ para $j = 1, \ldots, n+1$, então*

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$$

e

$$\left\| T_{a_j} \right\|_{\mathcal{M}_n} \leq \beta_1 \left\| T \right\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \left\| a_j \right\| \ .$$

$(CH2)$ *Se $P \in \mathcal{U}_{n+1}({}^{n+1}E; F)$ e $a \in E$, então $P_a \in \mathcal{U}_n({}^nE; F)$ e*

$$\left\| P_a \right\|_{\mathcal{U}_n} \leq \beta_2 \left\| \check{P} \right\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \left\| a \right\| \ .$$

$(CH3)$ *Se $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$, então $\gamma T \in \mathcal{M}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e*

$$\left\| \gamma T \right\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \leq \beta_3 \left\| T \right\|_{\mathcal{M}_n} \left\| \gamma \right\| .$$

$(CH4)$ *Se $P \in \mathcal{U}_n({}^nE; F)$ e $\gamma \in E'$, então $\gamma P \in \mathcal{U}_{n+1}({}^{n+1}E; F)$ e*

$$\left\| \gamma P \right\|_{\mathcal{U}_{n+1}} \leq \beta_4 \left\| P \right\|_{\mathcal{U}_n} \left\| \gamma \right\| .$$

$(CH5)$ *Para cada $n = 1, \ldots, N$, $P \in \mathcal{U}_n({}^nE; F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{M}_n({}^nE; F)$.*

Segundo as definições acima, coerência não necessariamente implica em compatibilidade. Entretanto, sob restrições das constantes β_i, $i = 1, ..., 4$, temos esta implicação. É o que afirma a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [40]:

Proposição 4.1.3 *Se $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ é coerente, com constantes $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$, então é compatível com o ideal $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$.*

4.2 Sequências Cohen fortemente somantes

Vamos mostrar que a sequência $(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \mathcal{L}^n_{Coh,p})_{n=1}^{\infty}$, composta pelos ideais de polinômios n-homogêneos e ideais de operadores n-lineares Cohen fortemente p-somantes, é coerente e compatível com o ideal dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes.

Na demonstração deste resultado, por conveniência, usaremos a expressão do Teorema 1.3.3, ítem i), como definição de operador Cohen fortemente p-somante.

Teorema 4.2.1 *A sequência* $(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \mathcal{L}^n_{Coh,p})_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com o ideal* $\mathcal{D}_p$ *dos operadores lineares Cohen fortemente* p*-somantes.*

Demonstração. Usando a Proposição 4.1.3, vamos mostrar que a sequência é coerente com constantes $\beta_i = 1$, $i = 1, ..., 4$.

$(CH5)$ Já foi demonstrado no Lema 1.2.5.

$(CH1)$ Seja $a_1 \in E_1$. Se $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_{n+1}; F)$, segue que, para todo inteiro positivo m e todos $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T_{a_1} \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T \left(a_1, x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \right) \right| \\
&\leq ||T||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} ||a_1||^p \left\| x_i^{(1)} \right\|^p \cdots \left\| x_i^{(n)} \right\|^p \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||T||_{Coh,p} ||a_1|| \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\|^p \cdots \left\| x_i^{(n)} \right\|^p \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} ,
\end{aligned}
$$

donde $T_{a_1} \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_2, ..., E_{n+1}; F)$ e $||T_{a_1}||_{Coh,p} \leq ||T||_{Coh,p}||a_1||$. Procedendo de modo análogo, observamos que

$$
T_{a_j} \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_{j-1}, E_{j+1}, ..., E_{n+1}; F), \quad j = 2, ..., n
$$

e $||T_{a_j}||_{Coh,p} \leq ||T||_{Coh,p}||a_j||$.

$(CH2)$ Seja $a \in E$. Se $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^{n+1}E; F)$, então, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_i \in$

$E,\ \varphi_i \in F',\ i = 1, ..., m,$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(P_a(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\check{P}(a, x_i, ..., x_i))| \\ &\leq ||\check{P}||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} ||a||^p ||x_i||^{np} \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\ &= ||\check{P}||_{Coh,p} ||a|| \left(\sum_{i=1}^{m} ||x_i||^{np} \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}\end{aligned}$$

e, portanto, $P_a \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$ e $||P_a||_{Coh,p} \leq ||\check{P}||_{Coh,p} ||a||$.

$(CH3)$ Se $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\gamma \in E_{n+1}'$, então, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_i^{(j)} \in E_j,\ \varphi_i \in F',\ i = 1, ..., m\ ,\ j = 1, ..., n+1,$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(\gamma T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}, x_i^{(n+1)} \right) \right) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \right) \gamma \left(x_i^{(n+1)} \right) \right) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left(T \left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)} \gamma \left(x_i^{(n+1)} \right) \right) \right) \right| \\ &\leq ||T||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\|^p \cdots \left\| x_i^{(n-1)} \right\|^p \left\| x_i^{(n)} \gamma \left(x_i^{(n+1)} \right) \right\|^p \right)^{1/np} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\ &\leq ||T||_{Coh,p} ||\gamma|| \left(\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n+1} \left\| x_i^{(j)} \right\|^p \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}\end{aligned}$$

e portanto γT pertence a $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n, E_{n+1}; F)$ e $||\gamma T||_{Coh,p} \leq ||T||_{Coh,p} ||\gamma||$.

$(CH4)$ Sejam $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$ e $\gamma \in E'$. Para todo inteiro positivo m e todos $x_i \in E,\ \varphi_i \in F',\ i = 1, ..., m$, temos, para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\gamma P(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\gamma(x_i) P(x_i))| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(P((\gamma(x_i))^{1/n} x_i))| \\ &\leq ||P||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} ||(\gamma(x_i))^{1/n} x_i||^{np} \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\ &\leq ||P||_{Coh,p} ||\gamma|| \left(\sum_{i=1}^{m} ||x_i||^{(n+1)p} \right)^{1/p} ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}\ ,\end{aligned}$$

onde $(\gamma(x_i))^{1/n}$ representa a raíz n-ésima de menor argumento principal de $\gamma(x_i)$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, façamos

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ se } \gamma(x_i) \geq 0 \\ -1, \text{ se } \gamma(x_i) < 0 \end{cases},$$

de forma que $a_i \gamma(x_i) \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\gamma P(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |\gamma(x_i)||\varphi_i(P(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i \gamma(x_i)|\varphi_i(P(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(P((a_i\gamma(x_i))^{1/n} x_i))| \\
&\leq ||P||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} ||(a_i\gamma(x_i))^{1/n} x_i||^{np} \right)^{1/p} \quad ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||P||_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} || \, |\gamma(x_i))|^{1/n} x_i||^{np} \right)^{1/p} \quad ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||P||_{Coh,p} ||\gamma|| \left(\sum_{i=1}^{m} ||x_i||^{(n+1)p} \right)^{1/p} \quad ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} .
\end{aligned}$$

Portanto γP pertence a $\mathcal{P}_{Coh,p}(^{n+1}E; F)$ e $||\gamma P||_{Coh,p} \leq ||P||_{Coh,p}||\gamma||$.

Assim, pela Proposição 4.1.3, $(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \mathcal{L}^n_{Coh,p})_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{D}_p$ dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes ■

4.3 Sequências múltiplo Cohen fortemente somantes

Nesta seção mostramos que a sequência $(\mathcal{P}^n_{mCoh,p}, \mathcal{L}^n_{mCoh,p})_{n=1}^{\infty}$, composta pelos ideais de polinômios n-homogêneos e ideais de operadores n-lineares múltiplo Cohen fortemente p-somantes, são coerentes e compatíveis (como pares) ao ideal dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes. Buscamos mostrar com isso o bom comportamento dessas classes, realçando a pertinência das generalizações propostas.

Teorema 4.3.1 *A sequência $(\mathcal{P}^n_{mCoh,p}, \mathcal{L}^n_{mCoh,p})_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{D}_p$ dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes.*

Demonstração. Usando a Proposição 4.1.3, vamos mostrar que a sequência é coerente com constantes $\beta_i = 1,\ i = 1, ..., 4.$

$(CH5)$ Segue imediatamente da Definição 3.2.3.

$(CH1)$ Seja $a_{n+1} \in E_{n+1}$. Vamos mostrar que se $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_{n+1}; F)$, então $T_{a_{n+1}} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F)$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, tomando os funcionais

$$\varphi_{j_1,...,j_n,j_{n+1}} = \begin{cases} \varphi_{j_1,...,j_n}, \text{ se } j_{n+1} = 1 \\ 0, \text{ se } j_{n+1} = 2, ..., m \end{cases},$$

com $j_1, ..., j_n, j_{n+1} = 1, ..., m$, então, para todos $\varphi_{j_1,...,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n$, $j_i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_{a_{n+1}}\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,...,j_n,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_n,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}, a_{n+1}\right)\right)\right| \\
&\leq ||T||_{mCoh,p}\, ||a_{n+1}||_p \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^m\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^m\right\|_p ||(\varphi_{j_1,...,j_n,j_{n+1}})_{j_1,...,j_n,j_{n+1}=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||T||_{mCoh,p}\, ||a_{n+1}||_p \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^m\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^m\right\|_p ||(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^m||_{w,p^*},
\end{aligned}$$

e segue que

$$T_{a_{n+1}} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F) \quad \text{e} \quad ||T_{a_{n+1}}||_{mCoh,p} \leq ||T||_{mCoh,p}\, ||a_{n+1}||.$$

Procedendo de modo análogo, observamos que

$$T_{a_j} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_{j-1}, E_{j+1}, ..., E_{n+1}; F),\ j = 1, ..., n$$

e $||T_{a_j}||_{mCoh,p} \leq ||T||_{mCoh,p}\, ||a_j||$.

$(CH2)$ Sejam $P \in \mathcal{P}_{mCoh,p}(^{n+1}E; F)$ e $a \in E$. Por $(CH5)$, segue que $\check{P} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(^{n+1}E; F)$ e, por $(CH1)$, temos

$$\check{P}_a \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(^{n}E; F) \ \text{ e } \ ||\check{P}_a||_{mCoh,p} \leq ||\check{P}||_{mCoh,p}\, ||a||.$$

Assim, como $(P_a)^\vee = \check{P}_a$ segue, novamente por $(CH5)$, que

$$P_a \in \mathcal{U}_n(^{n}E; F) \ \text{ e } \ ||P_a||_{mCoh,p} \leq ||P||_{mCoh,p}\, ||a||.$$

$(CH3)$ Se $\gamma \in E_{n+1}^{'}$, então, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $\varphi_{j_1,...,j_n} \in F^{'}$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n+1,\ j_i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., m,$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_{n+1}}\left(\gamma T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,...,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \ . \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Note que a expressão (4.1) pode ser reescrita na forma

$$\sum_{j_n=1}^{m^2} \sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left|\tilde{\varphi}_{j_1,...,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)}, ..., z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \ ,$$

com as escolhas

$$\begin{cases}
z_{j_i}^{(i)} = x_{j_i}^{(i)},\ j_i = 1, ..., m\ ,\ i = 1, ..., n-1 \\
z_{j_n}^{(n)} = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_1}^{(n+1)}\right),\ j_n = 1, ..., m \\
z_{m+j_n}^{(n)} = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_2}^{(n+1)}\right),\ j_n = 1, ..., m \\
\quad \vdots \\
z_{(m-1)m+j_n}^{(n)} = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_m}^{(n+1)}\right),\ j_n = 1, ..., m
\end{cases}$$

e

$$\begin{cases}
\tilde{\varphi}_{j_1,...,j_n} = \varphi_{j_1,...,j_n,1},\ j_n = 1, ..., m \\
\tilde{\varphi}_{j_1,...,m+j_n} = \varphi_{j_1,...,j_n,2},\ j_n = 1, ..., m \\
\quad \vdots \\
\tilde{\varphi}_{j_1,...,(m-1)m+j_n} = \varphi_{j_1,...,j_n,m},\ j_n = 1, ..., m\ .
\end{cases}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_{n+1}}^{m}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,1}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_1}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|+\\
&+\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,2}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_2}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|+\cdots\\
&\cdots+\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,m}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_m}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|+\\
&+\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,m+j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{m+j_n}^{(n)}\right)\right)\right|+\cdots\\
&\cdots+\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,(m-1)m+j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{(m-1)m+j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_n=1}^{m^2}\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\ .
\end{aligned}
$$

Desta forma, se $T\in\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$, usando (4.1), segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\gamma T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_n=1}^{m^2}\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\\
&=\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2}\left|\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\\
&\leq||T||_{mCoh,p}\left\|\left(z_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m^2}\right\|_p\prod_{i=1}^{n-1}\left\|\left(z_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{m}\right\|_p||(\tilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2}||_{w,p^*}\\
&=||T||_{mCoh,p}\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\gamma(x_{j_{n+1}}^{(n+1)})\right)_{j_n,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_p\prod_{i=1}^{n-1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}\\
&\overset{(*)}{\leq}||T||_{mCoh,p}\,||\gamma||\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}\ ,
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$, estamos usando a igualdade

$$\left\| \left(x_{j_n}^{(n)} \gamma \left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right)_{j_n, j_{n+1}=1}^{m} \right\|_p = \left(\sum_{j_n, j_{n+1}=1}^{m} \left| \gamma \left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right|^p \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\|^p \right)^{1/p}$$
$$= \left\| \left(\gamma \left(x_j^{(n+1)} \right) \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \left\| \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p$$

e a limitação de γ. Assim, $\gamma T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $\|\gamma T\|_{mCoh,p} \leq \|T\|_{mCoh,p} \|\gamma\|$.

$(CH4)$ Seja $\gamma \in E'$. A aplicação

$$(x_1, ..., x_{n+1}) \in E^{n+1} \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \gamma(x_k) \check{P}(x_1, \overset{[k]}{\cdots}, x_{n+1}) \in F \ ,$$

onde $\overset{[k]}{\cdots}$ indica a omissão da k-ésima coordenada, é $(n+1)$-linear, simétrica e sua restrição à diagonal coincide com γP. Então (ver Apêndice B, Proposição B.4) esta aplicação coincide com $(\gamma P)^{\vee}$. Usando este fato, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todos $\varphi_{j_1,...,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n+1$, $j_i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m$, segue que

$$\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left((\gamma P)^{\vee} \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right|$$
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \gamma \left(x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left(x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\cdots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right|$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\gamma \left(x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left(x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\cdots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) \right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\gamma \left(x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left(x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\cdots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_1$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left\| \left(\left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\gamma \left(x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left(x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\cdots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_1$$
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\gamma \left(x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left(x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\cdots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left[\left(\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\check{P} \left(\gamma \left(x_{j_1}^{(1)} \right) x_{j_2}^{(2)}, \cdots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\sum_{j_1,...,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \left(\check{P} \left(\gamma \left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) x_{j_1}^{(1)}, \cdots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right| \right) \right] .$$

Assim,

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right| \tag{4.2}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\cdots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},\cdots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\right)\right].$$

Então, por argumento análogo ao usado na demonstração da propriedade $(CH3)$, cada parcela de (4.2), por exemplo a primeira, pode ser escrita sob como

$$\sum_{j_2=1}^{m^2}\sum_{j_3,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\tilde{\varphi}_{j_2,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|$$

para as escolhas convenientes dos $\tilde{\varphi}_{j_2,\ldots,j_{n+1}}$ e $z_{j_k}^{(k)}$, com $k=2,\ldots,n+1$. Portanto, como demonstrado na propriedade $(CH3)$, segue que

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\cdots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|$$
$$\leq ||\check{P}||_{mCoh,p}\,||\gamma||\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p ||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}\,.$$

Voltando a (4.2), finalmente obtemos

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\cdots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},\cdots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\right)\right]$$
$$\leq \frac{1}{n+1}\left[||\check{P}||_{mCoh,p}\,||\gamma||\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p ||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+||\check{P}||_{mCoh,p}\,||\gamma||\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p ||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}\right]$$
$$= ||\check{P}||_{mCoh,p}\,||\gamma||\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p ||(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}||_{w,p^*}\,.$$

Assim, $\gamma P \in \mathcal{P}_{mCoh,p}(^{n+1}E;F)$ e

$$||\gamma P||_{mCoh,p} \leq ||\check{P}||_{mCoh,p}\, ||\gamma|| = ||P||_{mCoh,p}\, ||\gamma|| \ .$$

Conclui-se, pela Proposição 4.1.3, que $(\mathcal{P}^n_{mCoh,p}, \mathcal{L}^n_{mCoh,p})_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{D}_p$ dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes. ■

Observação 4.3.2 *Com resultados anteriores e os dessa seção, podemos mostrar que a classe dos operadores multilineares múltiplo Cohen fortemente p-somantes, que contém a classe $\mathcal{L}_{Coh,p}$, não é "tão grande" no sentido de que, por exemplo, contenha todo operador multilinear contínuo.*

De fato, invocando a propriedade (CP1) na Definição 4.1.1, a qual é satisfeita pela classe $\mathcal{L}_{mCoh,p}$, concluímos que se $u : E \to F$ não é Cohen fortemente p-somante, então o operador multilinear contínuo

$$\psi : E \times \cdots \times E \to F, \quad \text{definido por} \quad \psi(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n-1}) u(x_n) \ ,$$

onde $0 \neq \varphi \in E^{'}$, não está em $\mathcal{L}_{mCoh,p}$.

Capítulo 5

Operadores Cohen fortemente somantes em todo ponto

A definição de aplicações absolutamente somantes num dado ponto foi concebida por M. Matos e apresentada em [24]. Em seguida, a teoria vem sendo consolidada e muitos resultados foram estabelecidos (veja [3, 8, 30]). De forma natural, este tipo de abordagem vem sendo aplicada a outras classes de operadores multilineares e polinômios, como é possível ver em [6] e em [31].

Neste capítulo vamos introduzir as classes dos operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes em um dado ponto e demonstrar alguns resultados, como teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers. Também observamos as novas classes sob o ponto de vista da teoria de ideais.

Por não conseguirmos transpor, num primeiro momento, alguns detalhes técnicos, vamos mostrar apenas que as classes formam ideais normados de operadores e de polinômios. Em trabalhos futuros buscaremos mostrar que esses ideais são de Banach.

5.1 Operadores e polinômios Cohen fortemente somantes em todo ponto

Definição 5.1.1 *Sejam* $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $E_1, ..., E_n, F$ *espaços de Banach. Uma aplicação multilinear contínua* $T : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ *é Cohen fortemente p-somante* *no ponto* $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *quando*

$$\left(T\left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle$$

sempre que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_j)$, $j = 1, ..., n$.

Definição 5.1.2 *Sejam* $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *e* E,F *espaços de Banach. Um polinômio* n*-homogêneo* $P : E \longrightarrow F$ *é Cohen fortemente* p*-somante no ponto* $a \in E$ *quando*

$$(P(a + x_i) - P(a))_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle F\rangle$$

sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$.

Não é difícil provar que a classe de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F, que são Cohen fortemente p-somantes num dado ponto é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. Denotaremos esse espaço por $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(a)}(E_1, ..., E_n; F)$. O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são Cohen fortemente p-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$.

De forma semelhante, a classe de todos os polinômios Cohen fortemente p-somantes de E em F num dado ponto a é um subespaço de $\mathcal{P}(^nE; F)$, denotado por $\mathcal{P}_{Coh,p}^{(a)}(^nE; F)$. O espaço vetorial formado pelos polinômios n-homogêneos $P : E \longrightarrow F$ que são Cohen fortemente p-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{P}_{Coh,p}^{ev}(^nE; F)$.

Observação 5.1.3 *É importante perceber que nas definições acima usamos sequências em* $l_p(E_j)$, $j = 1, ..., n$, *e* $l_p(E)$, *diferentemente das definições de operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes (Definições 1.2.1 e 1.2.4). Desta forma, os conceitos de* $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(0)}(E_1, ..., E_n; F)$ *são distintos. Ao final desta seção justificamos o motivo da escolha desses espaços nas Definições 5.1.1 e 5.1.2.*

As próximas duas proposições são demonstradas usando os mesmos argumentos de [3] e faremos essas demonstrações por razão de completude.

Proposição 5.1.4 *Se* $a \in E$ *e* $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) P *é Cohen fortemente* p*-somante em* $a \in E$;

ii) $\check{P}$ *é Cohen fortemente p-somante em* $(a, ..., a) \in E^n$.

Demonstração.

ii) $\Rightarrow$ *i)* é imediato.

i) $\Rightarrow$ *ii)*: Suponhamos que P seja Cohen fortemente p-somante em $a \in E$ e tomemos $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$, com $j = 1, ..., n$. Usando a Fórmula de Polarização (Teorema B.3, no Apêndice B), para cada $x_0 \in E$ e todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} & n!2^n \left[\check{P}\left(a + x_i^{(1)}, ..., a + x_i^{(n)}\right) - P(a, ..., a)\right] \qquad (5.1) \\ & = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(x_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(a + x_i^{(k)}\right)\right) - \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(x_0 + \varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a\right) \\ & = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left[\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(x_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_i^{(k)}\right)\right) - P\left(x_0 + \varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a\right)\right], \end{aligned}$$

de onde percebemos, de imediato, que $\check{P}$ é Cohen fortemente p-somante se $a = 0$ (basta tomar $x_0 = 0$).

Se $a \neq 0$, escolha $x_0 = (n+1)\, a$. Para essa escolha,

$$x_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a = x_0 + \varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a = \lambda a \neq 0 \ .$$

Mas se $\lambda a \neq 0$, a igualdade

$$P(\lambda a + x_j) - P(\lambda a) = P\left(\lambda\left(a + \frac{x_j}{\lambda}\right)\right) - P(\lambda a) = \lambda^m \left[P\left(a + \frac{1}{\lambda} x_j\right) - P(a)\right]$$

implica que P é Cohen fortemente p-somante em λa, se o for em a. Portanto, P é Cohen fortemente p-somante em $(x_0 + (\varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a))$ e, pela expressão em (5.1), $\check{P}$ é Cohen fortemente p-somante em $(a, ..., a)$. ■

Fica estabelecida um tipo de relação entre $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(a)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(b)}(E_1, ..., E_n; F)$, por meio da proposição a seguir. Ela será bastante útil para a demonstração de vários resultados, inclusive um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para a classe dos operadores Cohen fortemente p-somantes em todo ponto.

Proposição 5.1.5 *Sejam* $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *e* $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}^{(a)}(E_1, ..., E_n; F)$. *Então*

i) Se $1 \leq r < n$, *então* $T_{a_{k_1}, ..., a_{k_r}} \in \mathcal{L}_{Coh,p}^{(0)}(E_{j_1}, ..., E_{j_s}; F)$, *com*

$$\{1, ..., n\} = \{j_1, ..., j_s\} \cup \{k_1, ..., k_r\}$$

e

$$\{j_1,...,j_s\}\cap\{k_1,...,k_r\}=\emptyset;$$

ii) $T\in\mathcal{L}_{Coh,p}^{(b)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$ *para todo*

$$b\in\left\{\left(\lambda_1a_1,...,\lambda_na_n\right);\lambda_i\in\mathbb{K},i=1,...,n\right\}.$$

Em particular, T é Cohen fortemente p-somante na origem.

Demonstração.

(i) Para os operadores (lineares) $T_{a_1,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n}$, $j=1,...,n$, basta notar que

$$\begin{aligned}&T_{a_1,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n}\left(x_i^{(j)}\right)\\&=T\left(a_1+0,...,a_{j-1}+0,a_j+x_i^{(j)},a_{j+1}+0,...,a_n+0\right)-T\left(a_1,...,a_n\right)\ .\end{aligned}$$

Assim, se T é Cohen fortemente p-somante em a, então $T_{a_1,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n}$ é Cohen fortemente p-somante na origem.

Para o caso bilinear como, por exemplo, o do operador $T_{a_1,...,a_{n-2}}$, fazemos

$$\begin{aligned}&\left(T_{a_1,...,a_{n-2}}\left(x_i^{(n-1)},x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty}\\&=\left(T\left(a_1+0,a_2+0,...,a_{n-2}+0,a_{n-1}+x_i^{(n-1)},a_n+x_i^{(n)}\right)-T\left(a_1,...,a_n\right)\right)_{i=1}^{\infty}\\&-\left(T\left(a_1,a_2,...,a_{n-1},x_i^{(n)}\right)+T\left(a_1,a_2,...,a_{n-2},x_i^{(n-1)},a_n\right)\right)_{i=1}^{\infty}\\&=\left(T\left(a_1+0,a_2+0,...,a_{n-2}+0,a_{n-1}+x_i^{(n-1)},a_n+x_i^{(n)}\right)-T\left(a_1,...,a_n\right)\right)_{i=1}^{\infty}\\&-\left(T_{a_1,...,a_{n-1}}\left(x_i^{(n)}\right)+T_{a_1,...,a_{n-2},a_n}\left(x_i^{(n-1)}\right)\right)_{i=1}^{\infty}\ ,\end{aligned}$$

donde, pela hipótese e pelo caso anterior (linear), segue que $T_{a_1,...,a_{n-2}}$ é Cohen fortemente p-somante na origem. Os demais casos bilineares e todos os outros casos são demonstrados através do mesmo argumento.

(ii) Se $b=(\lambda_1a_1,...,\lambda_na_n)$, com $\lambda_j\neq0$ para todo j, então

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(T\left(\lambda_1a_1+x_i^{(1)},...,\lambda_na_n+x_i^{(n)}\right)-T\left(\lambda_1a_1,...,\lambda_na_n\right)\right)\right|\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(T\left(\lambda_1a_1+\frac{\lambda_1}{\lambda_1}x_i^{(1)},...,\lambda_na_n+\frac{\lambda_n}{\lambda_n}x_i^{(n)}\right)-T\left(\lambda_1a_1,...,\lambda_na_n\right)\right)\right|\\&=\left|\lambda_1\cdots\lambda_n\right|\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(T\left(a_1+\frac{1}{\lambda_1}x_i^{(1)},...,a_n+\frac{1}{\lambda_n}x_i^{(n)}\right)-T\left(a_1,...,a_n\right)\right)\right|.\end{aligned}$$

Portanto T é Cohen fortemente p-somante em b.

Se $\lambda_j = 0$ para todo j, da demonstração de (i), com o mesmo argumento, segue que T é Cohen fortemente p-somante na origem. Os demais casos, quando $\lambda_j = 0$ para algum ou alguns valores de j, são demonstrados usando (i) e o seguinte tipo de desenvolvimento que, por simplicidade, faremos para o caso $n = 3$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{aligned}
&T(\lambda_1 a_1 + x_i, \lambda_2 a_2 + y_i, z_i) - T(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, 0) \\
&= \lambda_1\lambda_2 \left[T\left(a_1 + \frac{x_i}{\lambda_1}, a_2 + \frac{y_i}{\lambda_2}, z_i\right) - T(a_1, a_2, 0)\right] \\
&= \lambda_1\lambda_2 \left[T(a_1, a_2, z_i) + T\left(\frac{x_i}{\lambda_1}, a_2, z_i\right) + T\left(a_1, \frac{y_i}{\lambda_2}, z_i\right) + T\left(\frac{x_i}{\lambda_1}, \frac{y_i}{\lambda_2}, z_i\right)\right] \\
&= \lambda_1\lambda_2 \left[T_{a_1,a_2}(z_i) + T_{a_2}\left(\frac{x_i}{\lambda_1}, z_i\right) + T_{a_1}\left(\frac{y_i}{\lambda_2}, z_i\right) + T\left(\frac{x_i}{\lambda_1}, \frac{y_i}{\lambda_2}, z_i\right)\right].
\end{aligned}$$

■

A classe dos operadores Cohen fortemente p-somantes em todo ponto contém a classe dos operadores múltiplo Cohen fortemente somantes, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 5.1.6 *Se $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F)$, então $T \in \mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$.*

Demonstração. Vamos nos ater ao caso $n = 2$. Os outros casos são análogos. Sejam $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, E_2; F)$, $(a, b) \in E_1 \times E_2$ um ponto qualquer. Pela desigualdade triangular e pela bilinearidade dos operadores, segue que, para todos $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_1)$, $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_2)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l^w_{p^*}(F')$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(a + x_i, b + y_i) - T(a, b))| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(a, y_i))| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, b))| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, y_i))| \ . \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Mas cada parcela da expressão (5.2) é finita, para todo $(a, b) \in E_1 \times E_2$. De fato, tomando a primeira parcela, com as escolhas de

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \varphi_i, \text{ se } j = 1 \\ 0, \text{ se } j \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad (z_j)_{j=1}^{\infty} = (a, 0, 0, ...) \ ,$$

juntamente com a hipótese de que $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, E_2; F)$, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(a, y_i))| = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\varphi_{i,j} (T(z_j, y_i))| < \infty \ .$$

Aplicando argumento similar segue que $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, b))| < \infty$. Para a última parcela, tomando

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \varphi_i, \ \text{se } i = j \\ 0, \ \text{se } i \neq j \ , \end{cases}$$

com $i, j \in \mathbb{N}$, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, y_i))| = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\varphi_{i,j} (T(x_i, y_j))| < \infty \ .$$

Concluímos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T (a + x_i, b + y_i) - T(a, b))| < \infty \ ,$$

para todo $(a, b) \in E_1 \times E_2$, e portanto $T \in \mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, E_2; F)$. ■

Observação 5.1.7 *Neste ponto vale observar que obtivemos as seguintes inclusões*

$$\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F) \ ,$$

como consequência da Proposição 3.1.3 e do teorema anterior.

Desta observação, segue imediatamente que

Proposição 5.1.8 *As classes $\mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\mathcal{P}^{ev}_{Coh,p}(^nE; F)$ contêm os operadores n-lineares e polinômios n-homogêneos de tipo finito, respectivamente.*

Entretanto, a classe dos operadores multilineares Cohen fortemente p-somantes em todo ponto goza de um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers, de modo que esta classe não coincide com a classe dos operadores multilineares contínuos. Esse teorema e sua demonstração seguem as ideias de [3].

Teorema 5.1.9 (do tipo Dvoretzky-Rogers) *Sejam E um espaço de Banach e $n \geq 2$ um número natural. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\dim E = \infty$*;*

b) $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(a)}(^nE;E) \neq \mathcal{L}(^nE;E)$, *para todo* $a = (a_1, ..., a_n) \in E^n$ *com* $a_i \neq 0$ *para todo* i, *ou* $a_i = 0$ *para um único* i.

Demonstração.

a) $\Rightarrow$ *b)* Supondo $\dim E = \infty$, seja $a = (a_1, ..., a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i, ou $a_i = 0$ para um único i. Vamos tomar um natural $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i \neq 0$ para todo $i \neq k$ (repare que isso não exclui o caso $a_i \neq 0$, para todo i). Agora, para cada $i \neq k$ escolhamos $\varphi_i \in E'$ tal que $\varphi_i(a_i) = 1$ e vamos definir $T \in \mathcal{L}(^nE;E)$ por

$$T(x_1, ..., x_n) = \varphi_1(x_1) \overset{[k]}{\cdots} \varphi_n(x_n) x_k \ .$$

Com isto, $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n}(x) = T(a_1, ..., a_{k-1}, x, a_{k+1}, ..., a_n) = x$, para todo $x \in E$. Logo, pelo Teorema 1.1.8, $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n}$ não é Cohen fortemente p-somante. Finalmente, pela Proposição 5.1.5, T não é Cohen fortemente p-somante em a.

b) $\Rightarrow$ *a)* Vamos supor que $\dim E < \infty$. Sejam $\{e_1, ..., e_r\}$ e $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ bases de E e de E', nesta ordem, com $\varphi_k(e_i) = \delta_{k,i}$. Assim, todo $x \in E$ pode ser escrito da forma $x = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) e_k$ e, se $T \in \mathcal{L}(^nE;E)$, então

$$\begin{aligned} T(x_1, ..., x_n) &= T\left(\sum_{k_1=1}^{r} \varphi_{k_1}(x_1)e_{k_1}, ..., \sum_{k_n=1}^{r} \varphi_{k_n}(x_n)e_{k_n}\right) \\ &= \sum_{k_1,...,k_n=1}^{r} \varphi_{k_1}(x_1) \cdots \varphi_{k_n}(x_n) T(e_1, ..., e_n) \ , \end{aligned}$$

donde T é de tipo finito. Portanto, pela Proposição 5.1.8, T é Cohen fortemente p-somante em todo ponto. ■

A proposição seguinte nos oferece uma caracterização por desigualdades para os operadores Cohen fortemente p-somantes na origem que nos será útil na demonstração de resultados posteriores. A sua demonstração é análoga à da Proposição 1.2.2 e, portanto, será omitida.

Proposição 5.1.10 $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}^{(0)}(E_1, ..., E_n; F)$ *se, e somente se, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}\right)\right)\right| \leq C \left(\prod_{j=1}^{n} \left\|\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\right) ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ ,$$

sempre que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_j)$, $j = 1, ..., n$, *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F')$. *O ínfimo dos* C *tais que a desigualdade acima é válida define uma norma em* $\mathcal{L}_{Coh,p}^{(0)}(E_1, ..., E_n; F)$.

Os próximos resultados nos levarão a mostrar que os operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes em todo ponto formam ideais normados.

Lema 5.1.11 *Se* $1 < p < \infty$, $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *e* $T \in \mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, ..., E_n; F)$, *então existe uma constante* $C = C(a_1, ..., a_n)$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left(T \left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)} \right) - T(a_1, ..., a_n) \right) \right| \leq C \ ,$$

sempre que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_j)$, $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l^w_{p^*}(F')$, $\left\| \left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \leq 1$ *e* $||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \leq 1$, $j = 1, ..., n$.

Demonstração. Vamos mostrar o caso bilinear. O mesmo argumento serve para todos os demais casos. Sejam $T \in \mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}(E_1, E_2; F)$ e $(a, b) \in E_1 \times E_2$. Pela Proposição 5.1.5, os operadores T_a, T_b e T são Cohen fortemente p-somantes na origem e por intermédio da Proposição 5.1.10, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(a + x_i, b + y_i) - T(a, b))| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(a, y_i))| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, b))| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (T(x_i, y_i))| \\
&\leq C_1 \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_p ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} + C_2 \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \\
&+ C_3 \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_p ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \\
&\leq C_{a,b} \ ,
\end{aligned}$$

sempre que $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq 1$, $\|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq 1$ e $||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \leq 1$. ■

Teorema 5.1.12 *Para* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é Cohen fortemente p-somante em todo ponto;*

ii) *Para todo* $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *existe uma constante* $C > 0$ *tal que,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left(T \left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)} \right) - T(a_1, ..., a_n) \right) \right| \leq$$
$$\leq C \left(||a_1|| + \left\| \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \right) \cdots \left(||a_n|| + \left\| \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \right) \ ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ ,$$

sempre que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_j)$, $j = 1, ..., n$, *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l^w_{p^*}(F')$.

iii) Para todo $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i \left(T\left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right| \leq$$
$$\leq C \left(||a_1|| + \left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_p\right) ... \left(||a_n|| + \left\|\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_p\right) \; ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \ , \tag{5.3}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Além disso, o ínfimo das constantes C para as quais a desigualdade (5.3) é satisfeita, define uma norma em $\mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$, a qual será denotada por $|| \cdot ||_{ev}$.

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Se $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E_j)$, $j = 1, ..., n$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^{w}(F')$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i \left(T\left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right|$$
$$= \sup_m \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i \left(T\left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right|\right)$$
$$\leq \sup_m \left(C \left(||a_1|| + \left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_p\right) ... \left(||a_n|| + \left\|\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_p\right) \; ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}\right)$$
$$= C \left(||a_1|| + \left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\right) ... \left(||a_n|| + \left\|\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\right) \; ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ .$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ A demonstração dessa implicação segue a técnica introduzida por M. Matos em [24]. Vamos definir espaços $G_r = E_r \times l_p(E_r)$, $r = 1, ..., n$, com a norma da soma, e considerar a aplicação $(n+1)$-linear

$$\Phi(T) : G_1 \times \cdots \times G_n \times l_{p^*}^{w}(F') \longrightarrow l_1(F)$$

que faz corresponder a cada $(n+1)$-upla $\left(\left(a_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(a_n, \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)$, a sequência $\left(\varphi_i \left(T\left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right)_{i=1}^{\infty}$. A boa definição da função Φ segue da hipótese. Vamos mostrar que $\Phi(T)$ é contínua, donde seguirá o resultado desejado. O conjunto

$$F_{k,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}, ..., \left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}, (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}} = \{(b_1, ..., b_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ tais que}$$
$$\left\|\Phi(T)\left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_n, \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}, (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{l_1} \leq k\right\}$$

é fechado em $E_1\times\cdots\times E_n$ para todo número natural k, $\left(x_i^{(r)}\right)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_p(E_r)},\ r=1,...,n,$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_{p^*}^w(F')}$. De fato, basta observar que

$$F_{k,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty},...,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty},(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}F_{k,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{m},...,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{m},(\varphi_i)_{i=1}^{m}}=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}S_m^{-1}([0,k])\ ,$$

onde

$$S_m:E_1\times\cdots\times E_n\to[0,\infty),$$

é a função contínua dada por

$$S_m\left(b_1,...,b_n\right)=\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(T\left(b_1+x_i^{(1)},...,b_n+x_i^{(n)}\right)-T\left(b_1,...,b_n\right)\right)\right|.$$

Seja

$$F_k:=\bigcap F_{k,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty},...,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty},(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}\ ,$$

com interseção tomada sobre todas as sequências $\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_p(E_r)},\ r=1,...,n,$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_{p^*}^w(F')}$. Pelo Lema 5.1.11, $E_1\times\cdots\times E_n=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}F_k$ e pelo Teorema de Baire, existe k_0 tal que F_{k_0} tem interior não vazio. Sendo $(b_1,...,b_n)$ um ponto interior de F_{k_0}, existe $0<\varepsilon<1$ tal que

$$\left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(c_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(c_n,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|_{l_1}\leq k_0\ , \tag{5.4}$$

sempre que $||c_r-b_r||<\varepsilon$ com $\left(x_i^{(r)}\right)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_p(E_r)},\ r=1,...,n$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_{p^*}^w(F')}$. Assim, se $(v_1,...,v_n)$ é um ponto tal que

$$\left\|\left(v_r,\left(x_i^{(r)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|<\varepsilon,$$

para todo $r=1,...,n$, temos

$$\|v_r\|<\varepsilon\ \ ,\ \ \left\|\left(x_i^{(r)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p<\varepsilon\ ,$$

e com o uso de (5.4) e se $||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p*}<\varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}&\|\Phi\left(T\right)[((b_1,(0)_{i=1}^{\infty}),...,(b_n,(0)_{i=1}^{\infty}),(0)_{i=1}^{\infty}))+\\&+\left(\left(v_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(v_n,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)\Big]\Big\|_{l_1}\\&=\left\|\Phi\left(T\right)\left[\left(b_1+v_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(b_n+v_n,\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty},(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right]\right\|_{l_1}\leq k_0,\end{aligned}$$

pois

$$\|(b_r + v_r) - b_r\| = \|v_r\| < \varepsilon \ ,$$

$$\left\| \left(x_j^{(r)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_p < \varepsilon \ \text{ e } \ ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p*} < \varepsilon \ .$$

Portanto, $\Phi(T)$ é limitada na bola de raio ε e centro em

$$((b_1, (0)_{i=1}^{\infty}) \ , ..., (b_n, (0)_{i=1}^{\infty} \ , (0)_{i=1}^{\infty})) \in G_1 \times \cdots \times G_n \times l_{p^*}^w(F').$$

Pelo Teorema B.1, $\Phi(T)$ é contínua e segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left(T \left(b_1 + x_i^{(1)}, ..., b_n + x_i^{(n)} \right) - T\left(b_1, ..., b_n\right) \right) \right| \\
&= \left\| \Phi\left(T\right) \left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right), ..., \left(b_n, \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right), (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \right) \right\|_{l_1} \\
&\leq \left\| \Phi\left(T\right) \right\| \left(\|b_1\| + \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \right) \cdots \left(\|b_n\| + \left\| \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \right) \ ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*},
\end{aligned}$$

e que

$$\|T\| = \|\Phi\left(T\right)\| \ .$$

Um cálculo extenso, porém direto, mostra que a função $||\cdot||_{ev} := \|\Phi\left(\cdot\right)\|$ é de fato uma norma em $\mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$. ■

De forma natural, usando os mesmos argumentos aplicados ao caso multilinear, com as devidas adaptações, segue um teorema análogo ao Teorema 5.1.12 para polinômios Cohen fortemente somantes em todo ponto. As demonstrações serão omitidas.

Teorema 5.1.13 *Para* $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}^{ev}({}^nE; F)$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *P é Cohen fortemente p-somante em todo ponto;*

ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $a \in E$*,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i\left(P\left(a + x_i\right) - P(a)\right)\right| \leq C \left(||a|| + \left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\right)^n \ ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{w,p^*} \ ,$$

sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p(E)$ *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(F')$.

iii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $a \in E$*,*

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(P\left(a + x_i\right) - P(a)\right)\right| \leq C \left(||a|| + \left\|(x_i)_{i=1}^{m}\right\|_p\right)^n \ ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \ , \tag{5.5}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$.

Além disso, o ínfimo das constantes C para as quais a desigualdade (5.5) é satisfeita, define uma norma em $\mathcal{P}^{ev}_{Coh,p}(^nE; F)$*, denotada por* $|| \cdot ||_{ev}$.

Vamos justificar a escolha apontada pela Observação 5.1.3 fazendo uso do caso bilinear ($n = 2$). Sejam $p^* \in (1, \infty)$ fixo e

$$\Gamma = \left\{ (r, q) \in [1, \infty) \times (1, \infty) : \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*} \right\}.$$

Seja $C^{(a,b)}_{r,q}(E_1, E_2; F)$, com $(a, b) \in E_1 \times E_2$, a classe de todos os operadores $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ tais que existe uma constante $C \geq 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i (T(a + x_i, b + y_i) - T(a, b))|^r \right)^{1/r} \\ &\leq C \left(||a|| + \|(x_i)_{i=1}^m\|_q \right) \left(||b|| + \|(y_i)_{i=1}^m\|_q \right) \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p^*}, \end{aligned}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E_1$, $y_i \in E_2$ e $\varphi_i \in F'$, $i = 1, ..., m$. Supondo $q = np$, pela Proposição 5.1.5, se $T \in C^{(a,b)}_{1,np}(E_1, E_2; F)$ então $T_a \in C^{(0)}_{1,np}(E_2; F)$. Mas como $p < np$ (em nosso caso $p < 2p$), o Teorema 1.3.5 nos diz que $T_a = 0$, para todo $a \in E_1$, o que implica diretamente que $T = 0$. Assim, justifica-se a escolha de l_p ao invés de l_{np}.

5.2 Ideais de operadores e polinômios Cohen fortemente somantes em todo ponto

Nesta seção mostramos que os operadores multilineares e polinômios Cohen fortemente somantes em todo ponto formam ideais normados. Neste intuito já demonstramos que essas classes contêm os operadores e polinômios de tipo finito e que são espaços normados munidos com as normas $|| \cdot ||_{ev}$. Além disso, como

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{ev} \geq \|id_{\mathbb{K}^n}\| = 1 ,$$

tanto no caso multilinear quanto no polinomial, para mostrar que $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{ev} = 1$, precisamos apenas, em cada caso, provar a desigualdade contrária.

Proposição 5.2.1 $(\mathcal{L}^{ev}_{Coh,p}, \|\cdot\|_{ev})$ *é um ideal normado de operadores multilineares entre espaços de Banach.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em duas etapas:

1. $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{ev} \leq 1$:

Façamos o caso $n = 2$. Os demais podem ser demonstrados de modo análogo.

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^m$, $\left(x_i^{(2)}\right)_{i=1}^m$ e $(\varphi_i)_{i=1}^m$, com $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \varphi_i \in \mathbb{K}$, para todo $i = 1, ..., m$. Assim, usando o fato de que o operador linear $id_{\mathbb{K}}$ é Cohen fortemente p-somante e $d_p(id_{\mathbb{K}}) = 1$ (ver Seção 2.2), segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}^2}\left(a_1 + x_i^{(1)}, a_2 + x_i^{(2)}\right) - id_{\mathbb{K}^2}\left(a_1, a_2\right)\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(a_1 x_i^{(2)} + a_2 x_i^{(1)} + x_i^{(1)} x_i^{(2)}\right)\right)\right| \\
&\leq |a_1| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right| + |a_2| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right| + \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(1)} x_i^{(2)}\right)\right)\right| \\
&\leq |a_1| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right| + |a_2| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right| + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right|\right)\left(\sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right|\right) \\
&= |a_1| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right)\right| + |a_2| \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right)\right| + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right)\right|\right)\left(\sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right)\right|\right) \\
&= \left(|a_1| + \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right)\right|\right)\left(|a_2| + \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right)\right|\right) - |a_1||a_2| \\
&\leq \left(|a_1| + \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right)\right|\right)\left(|a_2| + \sum_{i=1}^m \left|\left(\varphi_i\left(id_{\mathbb{K}}\left(x_i^{(1)}\right)\right)\right)\right|\right) \\
&\leq \left(|a_1| + \left\|\left(x_i^{(2)}\right)_{i=1}^m\right\|_p ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}\right)\left(|a_2| + \left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^m\right\|_p ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}\right) \\
&\leq \left(|a_1| + \left\|\left(x_i^{(2)}\right)_{i=1}^m\right\|_p\right)\left(|a_2| + \left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^m\right\|_p\right) \ ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \ ,
\end{aligned}
$$

o que nos faz concluir que $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{ev} \leq 1$.

2. A propriedade de ideal e a desigualdade das normas:

Sejam $A_j \in \mathcal{L}(H_j; E_j)$, $j = 1, ..., n$, $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$ e $A \in \mathcal{L}(F; F_0)$. Para todos $m \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$, $x_i^{(k)} \in E_k$ e $\varphi_i \in F_0'$, $k = 1, ..., n$,

$i = 1, ..., m$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left((AT(A_1, ..., A_n)) \left(a_1 + x_i^{(1)}, ..., a_n + x_i^{(n)} \right) - (AT(A_1, ..., A_n))(a_1, ..., a_n) \right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left| (\varphi_i A) \left(T \left(A_1 \left(a_1 + x_i^{(1)} \right), ..., A_n \left(a_n + x_i^{(n)} \right) \right) - T(A_1(a_1), ..., A_n(a_n)) \right) \right| \\
&\leq ||T||_{ev} \prod_{r=1}^{n} \left(||A_r(a_r)|| + \left\| (A_r x_i^{(r)})_{i=1}^{m} \right\|_p \right) ||(\varphi_i A)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \\
&\leq ||T||_{ev} ||A_1||...||A_n|| \prod_{r=1}^{n} \left(||a_r|| + \left\| (x_i^{(r)})_{i=1}^{m} \right\|_p \right) ||A|| \, ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \\
&= ||A|| \, ||T||_{ev} \, ||A_1||...||A_n|| \prod_{r=1}^{n} \left(||a_r|| + \left\| (x_i^{(r)})_{i=1}^{m} \right\|_p \right) ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*} \qquad (5.6) \\
&= C \left(||a_1|| + \left\| (x_i^{(1)})_{i=1}^{m} \right\|_p \right) \cdots \left(||a_1|| + \left\| (x_i^{(n)})_{i=1}^{m} \right\|_p \right) ||(\varphi_i)_{i=1}^{m}||_{w,p^*}
\end{aligned}$$

e, portanto, $AT(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}(H_1, ..., H_n; F_0)$. Além disso, por (5.6), concluímos que

$$||AT(A_1, ..., A_n)||_{ev} \leq ||A|| \, ||T||_{ev} \, ||A_1||...||A_n|| \; .$$

■

Proposição 5.2.2 $(\mathcal{P}_{Coh,p}^{ev}, \|\cdot\|_{ev})$ *é um ideal normado de polinômios entre espaços de Banach.*

Demonstração. Como no caso multilinear, vamos dividir a demonstração em duas etapas:

1. $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{ev} \leq 1$:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i=1}^{m}$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{m}$, com $x_i, \varphi_i \in \mathbb{K}$, para todo $i = 1, ..., m$. Usando o fato de que o operador multilinear $id_{\mathbb{K}^n}$ é Cohen fortemente p-somante para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{Coh,p} = 1$ (ver Seção 2.3), segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(id_{\mathbb{K}^n}(a+x_i) - id_{\mathbb{K}^n}(a))| = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i (a+x_i)^n - a^n| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i \left(na^{n-1}x_i + \binom{n}{2} a^{n-2}x_i^2 + \cdots + \binom{n}{2} a^2 x_i^{n-2} + nax_i^{n-1} + x_i^n\right)\right| \\
&\leq n|a|^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| + \binom{n}{2} |a|^{n-2} \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i(x_i^2)\right| + \cdots + n|a| \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i(x_i^{n-1})\right| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i^n)| \\
&= n|a|^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(id_{\mathbb{K}}(x_i))| + \binom{n}{2} |a|^{n-2} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(id_{\mathbb{K}^2}(x_i, x_i)| + \cdots + \\
&+ n|a| \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i(id_{\mathbb{K}^{n-1}}(\underbrace{x_i, ..., x_i}_{n-1}))\right| + \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i(id_{\mathbb{K}^n}(\underbrace{x_i, ..., x_i}_{n})\right| \\
&\leq n|a|^{n-1} \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} + \binom{n}{2} |a|^{n-2} \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p^2 \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} + \cdots + \\
&+ n|a| \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p^{n-1} \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} + ||(x_i)_{i=1}^m||_p^n \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&\leq (|a| + ||(x_i)_{i=1}^m||_p)^n \; ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \; ,
\end{aligned}
$$

donde se conclui que $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{ev} \leq 1$.

2. A propriedade de ideal e a desigualdade das normas:

Sejam $A_1 \in \mathcal{L}(E_0; E)$, $P \in \mathcal{P}^{ev}_{Coh,p}(^nE; F)$ e $A_2 \in \mathcal{L}(F; F_0)$. Para todos $m \in \mathbb{N}$, $a, x_i \in E_0$ e $\varphi_i \in F_0^{'}$, $i = 1, ..., m$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i((A_2PA_1)(a+x_i) - (A_2PA_1)(a))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |(\varphi_i A_2)(P(A_1(a+x_i)) - P(A_1(a)))| \\
&\leq ||P||_{ev} \, (||A_1(a)|| + ||(A_1x_i)_{i=1}^m||_p)^n \; ||(\varphi_i A_2)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&\leq ||P||_{ev} ||A_1||^n \, (||a|| + ||(x_i)_{i=1}^m||_p)^n \; ||A_2|| \, ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \\
&= ||A_2|| \, ||P||_{ev} \, ||A_1||^n \; (||a|| + ||(x_i)_{i=1}^m||_p)^n \; ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*} \qquad (5.7) \\
&= C \; (||a|| + ||(x_i)_{i=1}^m||_p)^n \; ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}
\end{aligned}
$$

e, portanto, $\mathcal{P}^{ev}_{Coh,p}$ satisfaz a propriedade de ideal. Além disso, por (5.7), conclui-se que

$$||A_2PA_1||_{ev} \leq ||A_2|| \, ||P||_{ev} \, ||A_1||^n \; .$$

■

Apêndices

Apêndice A

Alguns resultados de Análise Funcional

Neste apêndice, apresentamos um material complementar necessário a uma melhor compreensão de cada capítulo. Essencialmente, são resultados importantes mas que não caberiam diretamente no texto, sob pena de desviar o foco e a sequência do trabalho.

O teorema a seguir, cuja demonstração se encontra em [21], exibe uma caracterização do espaço $l_p^w(E)$ muito útil em nosso trabalho.

Teorema A.1 (Grothendieck) *Se $1 < p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, então existe um isomorfismo isométrico entre $l_p^w(E)$ e $\mathcal{L}(l_{p^*}; E)$. Para $p = 1$, $l_1(E)$ e isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}(c_0; E)$. Em ambos os casos, identifica-se uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$ com o operador $T \in \mathcal{L}(l_{p^*}; E)$ definido por*

$$T((b_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \ .$$

Proposição A.2 *Os espaços $l_p^w(\mathbb{K})$ e $l_p(\mathbb{K})$ são isometricamente isomorfos.*

Demonstração. Como $\mathbb{K}'$ é isometricamente isomorfo a $\mathbb{K}$, para cada $\varphi \in \mathbb{K}'$ existe

$a_\varphi \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x) = a_\varphi x$, para todo $x \in \mathbb{K}$. Além disso, $||\varphi|| = |a_\varphi|$. Daí,

$$\begin{aligned}||(x_i)_{i=1}^\infty||_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi(x)|^p\right)^{1/p} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |a_\varphi x_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} = ||(x_i)_{i=1}^\infty||_p \ .\end{aligned}$$

■

Proposição A.3 *Se $1 < p < \infty$, então o dual topológico do espaço $l_p(E)$ é o espaço $l_{p^*}(E')$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Essa dualidade pode ser expressa por*

$$||(x_i)_{i=1}^\infty||_p = \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}(E')}} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| \ .$$

Demonstração. Considere a aplicação linear J de $l_{p^*}(E')$ em $(l_p(E))'$ dada por

$$J\left((\varphi_i)_{i=1}^\infty\right)\left((x_i)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i) \ ,$$

para $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}(E')$ e $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(E)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\left|J\left((\varphi_i)_{i=1}^\infty\right)\left((x_i)_{i=1}^\infty\right)\right| \leq \left(\sum_{i=1}^\infty ||\varphi_i||^{p*}\right)^{1/p^*} ||(x_i)_{i=1}^\infty||_p \ ,$$

o que mostra que J está bem definida, é claramente linear, contínua e $||J|| \leq 1$.

Definindo a aplicação linear I_k de E em $l_p(E)$, pondo $I_k(x) = (0, ..., 0, x, 0, ...)$, com x na k-ésima entrada, segue que $TI_k \in E'$ para todo $T \in (l_p(E))'$. Vamos mostrar que $(TI_k)_{k=1}^\infty \in l_{p^*}(E')$. Dados $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in E$, $||x_k|| \leq 1$, tal que $||TI_k|| < |TI_k(x_k)| + \varepsilon/(2^{k/p^*})$. Para cada $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in l_p$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^\infty ||TI_k||\alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^\infty \left(|TI_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{k/p^*}}\right)|\alpha_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty |TI_k(x_k)||\alpha_k| + \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{k/p^*}}|\alpha_k| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^\infty TI_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| + \varepsilon||(\alpha_k)_{k=1}^\infty||_p = (*) \ ,\end{aligned}$$

onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $\beta_k \in \mathbb{K}$, $||\beta_k|| = 1$, tal que $TI_k(x_k)\alpha_k\beta_k = |TI_k(x_k)\alpha_k|$ no primeiro termo de $(*)$, e no segundo termo usamos a Desigualdade de Hölder. Como

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} TI_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| = |T((\alpha_k\beta_k\ x_k)_{k=1}^{\infty})| \leq ||T||||(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}||_p\ ,$$

segue que

$$(*) \leq (||T|| + \varepsilon)||(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}||_p\ .$$

Assim, $(||TI_k||)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ e, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $(TI_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}(E^{'})$, com $||(TI_k)_{k=1}^{\infty}||_{p^*} \leq ||T||$. Então, fica claro que a aplicação linear I de $(l_p(E))^{'}$ em $l_{p^*}(E^{'})$, dada por $I(T) = (TI_k)_{k=1}^{\infty}$, para cada $T \in (l_p(E))^{'}$, está bem definida, é contínua e $||I|| \leq 1$. Como $IJ = id_{l_{p^*}(E^{'})}$ e $JI = id_{(l_p(E))^{'}}$, concluímos que $(l_p(E))^{'}$ e $l_{p^*}(E^{'})$ são isomorfos isometricamente. ■

Como consequência imediata do Princípio da Reflexividade Local ([18], pág. 73) segue a seguinte proposição:

Proposição A.4 *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi_i \in E^{'}$, $i = 1, ..., m$, e $p \geq 1$. Então*

$$\sup_{\psi \in B_{E''}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\psi(\varphi_i)|^p\right)^{1/p} = \sup_{y \in B_E} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(y)|^p\right)^{1/p}\ .$$

O resultado abaixo é usado no texto para demonstrar a trivialidade de uma classe de operadores sob certas restrições.

Proposição A.5 *Sejam $1 < p < \infty$, $1 = 1/p + 1/p^*$ e $p < q$. Então existem sequências $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ e $(\beta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$ tais que $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} := (\alpha_k\beta_k)_{k=1}^{\infty} \notin l_1$*

Demonstração. Por hipótese, $1 > 1/q + 1/p^*$. Assim, tomando $0 < \varepsilon < \frac{1-\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}{2}$,

$$(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^{(\frac{1}{p^*}+\varepsilon)}}\right)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*} \quad \text{e} \quad (\beta_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^{(\frac{1}{q}+\varepsilon)}}\right)_{k=1}^{\infty} \in l_q\ ,$$

e segue que

$$(\alpha_k\beta_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^{(\frac{1}{q}+\frac{1}{p^*}+2\varepsilon)}}\right)_{k=1}^{\infty} \notin l_1\ .$$

■

Apêndice B

Resultados úteis relacionados a operadores multilineares e polinômios

O objetivo da apresentação destes conhecidos resultados da teoria multilinear e de polinômios se traduz em ter uma coleção de ferramentas recorrentemente usadas no texto. As demonstrações dessas proposições e teoremas fogem do objetivo do texto, porém podem ser encontradas em [4, 5, 27].

Iniciamos apresentando várias equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear e também sobre a continuidade de um polinômio ([4], pág. 3 Teorema 1.2.2 e pág. 20 Teorema 1.3.7):

Teorema B.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, ..., E_n$ e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ uma aplicação multilinear. Então, são equivalentes:*

(i) A é contínua;

(ii) A é contínua na origem;

(iii) Existe uma constante positiva K tal que

$$\|A(x_1, ..., x_n)\| \leq K \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para qualquer $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;

(iv) A é uniformemente contínua sobre os limitados;

(v) A é limitada em toda bola com raio finito;

(vi) A é limitada em alguma bola com raio finito.

Teorema B.2 *Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in P\left({}^{n}E;F\right)$ e $A \in L_{s}\left({}^{n}E;F\right)$ tais que $\hat{A} = P$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $A \in \mathcal{L}_{s}\left({}^{n}E;F\right)$;

(ii) $P \in \mathcal{P}\left({}^{n}E;F\right)$;

(iii) *P é contínuo na origem;*

(iv) *Existe uma constante $K > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq K\|x\|^{n}$ para todo $x \in E$;*

(v) *P é limitado em toda bola com raio finito;*

(vi) *P é limitado em alguma bola com raio finito;*

(vii) *Se $B \subset E$ é limitado, existe $K_B > 0$ tal que*

$$\|Px - Py\| \leq K_{B}\|x - y\|$$

para quaisquer $x, y \in B$.

Uma relação entre polinômios e aplicações multilineares simétricas é dada pelo teorema ([27], pág. 6 Teorema 1.10):

Teorema B.3 (Fórmula de Polarização) *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $A \in L_s({}^{n}E;F)$ então*

$$A(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n,$$

para quaisquer $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in E$.

Um resultado de coincidência para aplicações multilineares simétricas pode ser facilmente obtido por meio da fórmula de polarização:

Proposição B.4 *Se $A, B \in L_s({}^{n}E;F)$ e $Ax^n = Bx^n$ para todo $x \in E$, então as aplicações A e B coincidem em todo o domínio.*

Demonstração. Para todo $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, temos

$$\begin{aligned} A(x_1, ..., x_n) &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n B(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n \\ &= B(x_1, ..., x_n)\ . \end{aligned}$$

■

O teorema do gráfico fechado ([4], pág. 9 Teorema 1.2.8) e o teorema de Banach-Steinhaus ([5], pág. 206 Corolário 1), em suas versões multilineares, são ferramentas bastante usadas, principalmente a primeira, na caracterização dos operadores Cohen fortemente somantes por desigualdades.

Teorema B.5 (do gráfico fechado multilinear) *Sejam $E_1, ..., E_n$ e F espaços de Banach e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ uma aplicação n-linear de gráfico fechado. Então A é contínua.*

Teorema B.6 (de Banach-Steinhaus multilinear) *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach, F um espaço vetorial normado e $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ tal que para cada $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., n$, a seqüência $(A_j(x_1, ..., x_n))_{j=1}^{\infty}$ é convergente. Definindo*

$$A(x_1, ..., x_n) := \lim_{j\to\infty} A_j(x_1, ..., x_n) \ ,$$

então $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Este último também possui uma versão para polinômios homogêneos ([4], pág. 26 Teorema 1.3.13):

Teorema B.7 (de Banach-Steinhaus para polinômios homogêneos) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(^nE; F)$ tal que, para cada $x \in E$, a seqüência $(P_jx)_{j=1}^{\infty}$ é convergente. Definindo*

$$P(x) := \lim_{j\to\infty} P_j(x) \ ,$$

então $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$.

Referências Bibliográficas

[1] D. Achour, L. Mezrag. On the Cohen strongly p-summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **327** (2007), 550–563.

[2] D. Achour, K. Saadi. A polynomial characterization of Hilbert spaces, Collectanea Mathematica, **61** (2010), 291–301.

[3] J. A. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino. Spaces of absolutely summing polynomials, Mathematica Scandinavica, **101** (2007), 219–237.

[4] A. T. L. Bernardino. Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach, Dissertação de mestrado, UFPB (2008).

[5] A. T. L. Bernardino. A simple natural approach to the uniform boundedness principle for multilinear mappings, Proyecciones Journal of Mathematics, **28** (2009), 203–207.

[6] A. T. L. Bernardino. Contribuições à teoria multilinear de operadores absolutamente somantes, Tese de Doutorado, UFPE (2011).

[7] O. Blasco, G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda. Coincidence results for summing multilinear mappings, Preprint.

[8] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek, D. Pellegrino. Holomorphy types and ideals of multilinear mappings, Studia Mathematica, **177** (2006), 43–65.

[9] G. Botelho. Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note di Matematica, **25** (2006), 69–102.

[10] G. Botelho, D. Pellegrino. Two new properties of ideals of polynomials and applications, Indagationes Mathematicae, **16** (2005), 157–169.

[11] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda. A unified Pietsch Domination Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **365** (2010), 269–276.

[12] Q. Bu, Z. Shi. On Cohen almost summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **401** (2013), 174–181.

[13] J. R. Campos. Cohen and Multiple Cohen strongly summing multilinear operators, Linear and Multilinear Algebra, On-line version (2013), doi:10.1080/03081087.2013.779270.

[14] D. Carando, V. Dimant, S. Muro. Coherent sequences of polinomial ideals on Banach spaces, Mathematische Nachrichten, **282** (2009), 1111–1133.

[15] D. Carando, V. Dimant, S. Muro. Holomorphic functions and polynomial ideals on Banach spaces, Collectanea Mathematica, **63** (2012), 71–91.

[16] D. Carando, V. Dimant, S. Muro. Every Banach ideal of polynomials is compatible with an operator ideal, Monatshefte für Mathematik, **165** (2012), 1–14.

[17] J. S. Cohen. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Mathematische Annalen, **201** (1973), 177–200.

[18] J. Defant, K. Floret. Tensor norms and operators ideals, North-Holland, Amsterdam, (1993).

[19] V. Dimant. Strongly p-summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **278** (2003), 182–193.

[20] A. Dvoretzky, C Rogers. Absolutely and unconditional convergence in normed linear spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, **36** (1950), 192–197.

[21] A. Grothendieck. Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1956), 81–110.

[22] R. Khalil. On some Banach space sequences, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **25** (1982), 231–241.

[23] M. C. Matos. Análise Funcional, Notas de aula, 2007.

[24] M. C. Matos. Nonlinear absolutely summing mappings, Mathematische Nachrichten, **258** (2003), 71–89.

[25] M. C. Matos. Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators, Collectanea Mathematica, **54** (2003), 111–136.

[26] L. Mezrag, K. Saadi. Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, **16** (2009), 1–11.

[27] J. Mujica. Complex analysis in Banach spaces, North-Holland Mathematics Studies **120**, North-Holland (1986).

[28] L. Nachbin. Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Springer, New York (1969).

[29] J. Lindenstrauss, A. Pelczyński. Absolutely summing operator in L_p spaces and their applications, Studia Mathematica, **29** (1968), 275–326.

[30] D. Pellegrino. Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, Tese de Doutorado, UNICAMP, (2002).

[31] D. Pellegrino. Almost summing mappings, Archiv der Mathematik, **82** (2004), 68–80.

[32] D. Pellegrino, J. Santos. Absolutely summing multilinear operators: a panorama, Quaestiones Mathematicae, **34** (2011), 447–478.

[33] D. Pellegrino, J. Santos. A general Pietsch Domination Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **375** (2011), 371–374.

[34] D. Pellegrino, J. Santos, J. B. Seoane-Sepúlveda. Some techniques on nonlinear analysis and applications, Advances in Mathematics, **229** (2012), 1235–1265.

[35] D. Pellegrino, J. O. Ribeiro. On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility, arXiv:1101.1992v3 [math.FA].

[36] D. Peréz-García, I. Villanueva. Multiple summing operators on Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **285** (2003), 86–96.

[37] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normiertn Räumen, Studia Mathematica, **28** (1967), 333–353.

[38] A. Pietsch. Operator Ideals, North-Holland Holland Math. Library, Amsterdam (1980).

[39] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner-Texte, Leipzig (1983), 185–199.

[40] J. O. Ribeiro. Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach, Tese de Doutorado, UFPE (2011).

[41] J. Santos. Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de mestrado, UFPB (2008).