Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre a Geometria de Imersões Riemannianas em Variedades Semi-Riemanianas.

por

Joseilson Raimundo de Lima.

Campina Grande - PB
Abril/2013

Sobre a Geometria de Imersões Riemannianas em Variedades Semi-Riemanianas.

por

Joseilson Raimundo de Lima.

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima.

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB
Abril/2013

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria e Topologia.

Aprovada em:

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Prof. Dr. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Abril/2013

Dedico este trabalho à memória de minha mãe Margarida Raimundo de Lima, ao meu pai José Antônio Francisco e aos meus irmãos e irmãs.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima por toda dedicação na orientação desta tese e ao Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez por sua grande contribuição.

Agradeço aos professores Dr. Abdênago Alves de Barros, Dr. Cícero Pedro de Aquino e Dr. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves, por aceitarem participar da banca de defesa desta tese.

Agradeço, também, a todos os professores da Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG, pelo apoio e, principalmente, por terem permitido que eu tivesse minha carga horária em sala de aula reduzida. Agradeço, em especial, ao professor Dr. Claudianor Oliveira Alves, por todo o incentivo.

Agradeço a todos os professores das universidades UFCG, UFPB, UFC e UFPE, com os quais estudei ou apenas discuti algumas ideias sobre matemática e que, dessa forma, contribuíram para a minha formação. Quero destacar meus agradecimentos aos professores Dr. Antonio Gervásio Colares e Dr. João Lucas Marques Barbosa da UFC por suas relevantes contribuições na minha formação em Geometria Diferencial.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu conseguisse chegar até aqui.

Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio e eis que a verdade se me revela.

Albert Einstein.

RESUMO

Nesta tese, inicialmente estabelecemos um teorema de caracterização sobre as hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares completas imersas em um espaço de Lorentz localmente simétrico, cuja curvatura seccional obedece a certas condições apropriadas. Sob uma condição adequada na norma da segunda forma fundamental, provamos que tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples. Depois, obtemos o mesmo resultado, quando o espaço de Lorentz localmente simétrico é Einstein, usando como principal ferramenta analítica um princípio do máximo generalizado para variedades Riemaniannas completas não-compactas. Em seguida, estudamos a unicidade de hipersuperfícies imersas num produto warped semi-Riemanniano no qual a função warping possui logaritmo convexo e suas fibras possuem curvatura seccional constante. Usando como principal ferramenta analítica um princípio do máximo generalizado para variedades Riemannianas completas não-compactas e supondo uma desigualdade natural entre as r-ésimas curvaturas médias da hipersuperfície e dos slices da região onde a hipersuperfície está contida, somos capazes de provar que tal hipersuperfície deve ser, de fato, um slice. Finalmente, estudamos a geometria de *gráficos Killing conformes inteiros*, isto é, gráficos construídos através do fluxo gerado por um campo de vetores de Killing conforme completo V e que são definidos sobre uma folha integral da folheação $V^{\perp}$ ortogonal a V. Sob uma restrição apropriada na norma do gradiente da função z que determina tal gráfico $\Sigma(z)$, estabelecemos condições suficientes para garantir que $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral de $V^{\perp}$. Estabelecemos também condições suficientes para garantir que $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica. Em seguida, quando o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, obtemos estimativas por baixo para o índice de nulidade relativa mínima de $\Sigma(z)$.

ABSTRACT

In this thesis, we initially established a characterization theorem concerning to complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces immersed in a locally symmetric Lorentz space, whose sectional curvature is supposed to obey certain appropriated conditions. Under a suitable restriction on the length of the second fundamental form, we prove that a such spacelike hypersurface must be either totally umbilical or an isoparametric hypersurface with two distinct principal curvatures one of which is simple. Afterwards, we obtain the same result, when the locally symmetric Lorentz space is Einstein, by using as main analytical tool a generalized maximum principle for complete noncompact Riemannian manifolds. Following, we study the uniqueness of complete hypersurfaces immersed in a semi-Riemannian warped product whose warping function has convex logarithm and such that its fiber has constant sectional curvature. By using as main analytical tool a suitable maximum principle for complete noncompact Riemannian manifolds and supposing a natural comparison inequality between the r-th mean curvatures of the hypersurface and that ones of the slices of the region where the hypersurface is contained, we are able to prove that a such hypersurface must be, in fact, a slice. Finally, we study the geometry of *entire conformal Killing graphs*, that is, graphs constructed through the flow generated by a complete conformal Killing vector field V and which are defined over an integral leaf of the foliation $V^{\perp}$ orthogonal to V. In this setting, under a suitable restriction on the norm of the gradient of the function z which determines such a graph $\Sigma(z)$, we establish sufficient conditions to ensure that $\Sigma(z)$ is totally umbilical and, in particular, an integral leaf of $V^{\perp}$. We too establish sufficient conditions to ensure that $\Sigma(z)$ is totally geodesic. Afterwards, when the ambient space $\overline{M}$ has constant sectional curvature, we obtain lower estimates for the index of minimum relative nullity of $\Sigma(z)$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese nos propomos a abordar as seguintes temáticas dentro da teoria das imersões isométricas: caracterizações de hipersuperfícies Weingartens lineares em variedades de Lorentz localmente simétricas, rigidez de hipersuperfícies em produtos warpeds semi-Riemannianos e umbilicidade e nulidade de gráficos Killing conformes em espaços Riemannianos. Nesse sentido, o Capítulo 2 é devotado aos preliminares gerais referentes a essas temáticas.

No Capítulo 3, apresentamos os resultados referentes aos artigos [55] e [56], onde estabelecemos um teorema de caracterização sobre as hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares completas imersas em um espaço de Lorentz localmente simétrico, cuja curvatura seccional obedece a certas condições apropriadas. Sob uma condição adequada na norma da segunda forma fundamental, provamos que tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples. Em seguida, estudamos a geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear imersa em um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico, cuja curvatura seccional obedece a certas restrições canônicas. Nesta configuração, usando, como principal ferramenta analítica, um princípio do máximo generalizado para variedades Riemannianas completas, não-compactas, estabelecemos condições suficientes para garantir que tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples.

O interesse no estudo de hipersuperfícies tipo espaço imersas em um espaço de Lorentz é motivado por suas propriedades do tipo Bernstein. Para o caso do espaço de de Sitter, Goddard [68] conjecturou que toda hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H em S_1^{n+1} deve ser totalmente umbílica. Embora a conjectura resultou-se ser falsa em sua afirmação original, motivou uma grande quantidade de trabalhos de diversos autores tentando encontrar uma resposta afirmativa para a conjectura sob hipóteses adicionais apropriadas. Por exemplo, em [2] Akutagawa mostrou que a conjectura de Goddard é verdadeira quando $0 \leq H^2 \leq 1$ no caso $n = 2$, e quando $0 \leq H^2 < 4(n-1)/n^2$ no caso $n \geq 3$. Depois, Montiel [77] resolveu o problema de Goddard no caso compacto, provando que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço fechadas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, com curvatura média constante, são as hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Outro problema do tipo Goddard é estudar hipersuperfícies imersas em um espaço de Lorentz com curvatura escalar constante. Um resultado interessante de Cheng e Ishikawa [47] afirma que as esferas redondas totalmente umbílicas são as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura escalar normalizada constante $R < 1$. Vários outros autores, tais como Brasil, Colares e Palmas [29], Camargo, Chaves e Sousa Jr. [36], Caminha [39], Hu, Scherfner e Zhai [69] e Li [72] também têm trabalhado em problemas relacionados a este.

Prosseguindo, é natural estudar a geometria de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em espaços de Lorentz mais gerais, pois estes possuem relevante importância na teoria da relatividade e são bem interessantes do ponto de vista da geometria e da cosmologia matemática. Nesta configuração, para constantes c_1 e c_2, Choi et al. [48, 92] introduziram a classe dos espaços de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}$ de dimensão n+1 que satisfazem as seguintes condições (onde K denota a curvatura seccional de $\mathbb{L}_1^{n+1}$):

$$K(u, v) = -\frac{c_1}{n} \tag{1.1}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u e tipo-tempo v; e

$$K(u, v) \geq c_2 \tag{1.2}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u e v.

Observamos que os espaços formas de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}(c)$ satisfazem as condições (1.1) e (1.2) para $-\frac{c_1}{n} = c_2 = c$. Além disso, existem vários exemplos de espaços de Lorentz que não são espaços formas e que satisfazem (1.1) e (1.2). Por exemplo, variedades produtos semi-Riemannianas $\mathbb{H}_1^k(-c_1/n) \times N^{n+1-k}(c_2)$, onde $c_1 > 0$, e $\mathbb{R}_1^k \times \mathbb{S}^{n+1-k}$. Em particular, $\mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{S}^n$, o chamado *Universo Estático de Einstein*. Também, o chamado *espaço-tempo de Robertson-Walker*, $N(c, f) = I \times_f N^3(c)$ é outro exemplo de um espaço de Lorentz, onde I denota um intervalo aberto de $\mathbb{R}^1_1$, f é uma função suave positiva definida no intervalo I e $N^3(c)$ é uma variedade Riemanniana 3-dimensional de curvatura constante c. $N(c, f)$ também satisfaz as condições (1.1) e (1.2) para uma escolha apropriada da função f (para mais detalhes, veja [48] e [92]).

Nosso propósito é estudar a rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço *Weingarten lineares* completas, isto é, hipersuperfícies tipo-espaço completas cuja a curvatura média H e a curvatura escalar normalizada R satisfazem:

$$R = aH + b,$$

para constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Nestas condições, como uma aplicação do princípio do máximo forte de Hopf e sob restrições apropriadas no quadrado da norma S da segunda forma fundamental, conseguimos estabelecer um teorema de caracterização em relação a tal hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço de Lorentz localmente simétrico $\mathbb{L}^{n+1}_1$, o qual supomos satisfazer as condições (1.1) e (1.2).

Para enunciar um de nossos resultados, precisamos de alguns fatos básicos. Denote por $\bar{R}_{CD}$ as componentes do tensor de Ricci de $\mathbb{L}^{n+1}_1$ satisfazendo as condições (1.1) e (1.2). Então a curvatura escalar $\bar{R}$ de $\mathbb{L}^{n+1}_1$ é dada por

$$\bar{R} = \sum_{A=1}^{n+1} \varepsilon_A \bar{R}_{AA} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji} - 2\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji} + 2c_1.$$

Além disso, é bem conhecido que a curvatura escalar de um espaço de Lorentz localmente simétrico é constante. Consequentemente, $\sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji}$ é uma constante naturalmente associada ao espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições (1.1) e (1.2).

Agora, estamos em condições de apresentar um de nossos resultados.

Teorema 1.1. *Seja $\mathbb{L}^{n+1}_1$ um espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições* (1.1) *e* (1.2)*, com $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2 > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{L}^{n+1}_1$, tal que $R = aH + b$ com $b < \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \bar{R}_{ijji}$. Se H atinge o máximo em M^n e $S \leq 2\sqrt{n-1}\,c$, então M^n é totalmente umbílica ou, caso contrário, é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples.*

No Capítulo 4, apresentamos os resultados referentes ao artigo [54], no qual estudamos a unicidade de hipersuperfícies completas imersas em um produto warped do tipo $\epsilon I \times_f M^n$, onde M^n é uma variedade Riemanniana n-dimensional conexa e orientada, $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva e $\epsilon = \pm 1$. Nos últimos anos, muitos autores têm estudado problemas deste tipo, por exemplo, podemos citar os trabalhos de Alías et al [7, 17, 13, 14], Montiel [79, 80] e Romero et al [32, 33, 88, 89]. Antes de apresentar nossos teoremas, faremos uma breve explanação de alguns artigos recentes contendo resultados diretamente relacionados com os nossos resultados.

Usando o chamado princípio do máximo generalizado de Omori-Yau [84, 96], de Lima juntamente com Albujer e Camargo [12] obtiveram alguns resultados de unicidade com relação a uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante imersa em um produto warped Lorentziano cuja fibra possui curvatura seccional constante. Em [20], usando outro princípio do máximo adequado devido a Akutagawa [2], de Lima juntamente com Aquino estudaram gráficos verticais completos de curvatura média constante em um produto warped Riemanniano. Sob restrições adequadas nos valores da curvatura média e da norma do gradiente da função altura eles obtiveram teoremas de rigidez relativos a tais gráficos. Em [34], de Lima juntamente com Camargo e Caminha obtiveram resultados do tipo Bernstein em dois produtos warped semi-Riemannianos específicos: o tipo hiperbólico $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ e o tipo steady state space $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Mais recentemente, de Lima juntamente com Colares [49] também estudaram o problema de unicidade de hipersuperfícies completas imersas em um produto warped semi-Riemanniano. Além disso, em seus resultados relativos à r-ésima curvatura média, eles trataram apenas o caso em que o espaço ambiente possui curvatura seccional constante.

Aqui, sob uma desigualdade natural envolvendo as r-ésimas curvaturas médias da hipersuperfície e as dos slices, estendemos os resultados de unicidade de [12], [20], [34] e [49] para o contexto de hipersuperfícies completas imersas em produtos warped semi-Riemannianos satisfazendo certas condições de convergência adequadas que estão estabelecidas na literatura corrente (veja, por exemplo, [13], [14], [79] e [80]). Neste sentido, juntamente com uma extensão de um princípio do máximo no infinito de [97] devido a Caminha em [43] (cf. Lema 2.21), exploramos a geometria da função altura h de imersões Riemannianas $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ (isto é, a função altura com respeito ao campo de vetores unitário ∂_t) para provar nosso resultado de unicidade.

O próximo teorema, que é no ambiente Lorentziano, estende o Teorema 3.3 de [12], o Teorema 3.6 de [34] e o Teorema 5.4 de [49]. No que segue, de acordo com a terminologia estabelecida em [11], assumiremos que as hipersuperfícies são *limitadas no infinito* do espaço ambiente; isto é, elas estão contidas em um vão limitado por slices $\{t_1\} \times M^n$ e $\{t_2\} \times M^n$, para alguns $t_1, t_2 \in I$. Além disso, $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ denotará o espaço de funções integráveis a Lebesgue na hipersuperfície Σ^n.

Teorema 1.2. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um produto warped Lorentziano tal que $\log f$ é uma função convexa e cuja a fibra M^n possui curvatura seccional constante κ satisfazendo*

$$\kappa \leq \inf_I (ff'' - f'^2). \tag{1.3}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{f'}{f}(h) > 0. \tag{1.4}$$

Se $f(h)$ possui um mínimo local e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ em Σ^n, então Σ^n é um slice.

No mesmo caminho, no ambiente Riemanniano obtemos uma extensão do Teorema 3.4 de [20], do Teorema 3.7 de [34] e do Teorema 5.8 de [49] (ver Teorema 4.8).

No Capítulo 5, apresentamos os resultados referentes aos artigos [57] e [58], onde estudamos a geometria de *gráficos Killing conformes inteiros*, isto é, gráficos construídos através do fluxo gerado pelos campos de Killing conformes completos V e que estão definidos sobre uma folha integral da folheação $V^\perp$ ortogonal a V.

Nesse sentido, vamos considerar uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}$ dotada de um campo de Killing conforme completo V cuja distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ é integrável. Dessa forma, denotamos por $\Phi : \mathbb{R} \times M \to \overline{M}$ o fluxo gerado por V, onde M é uma folha integral fixada arbitrariamente de $\mathcal{D}$ considerada como $t = 0$ e que suporemos ser conexa e completa. Ao longo deste trabalho, nos restringimos ao caso em que a função λ depende apenas da variável t, isto é, $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$. Geometricamente, como já foi observado em [62], esta hipótese nos permite relacionar as métricas induzidas nas folhas distintas da folheação ortogonal a V, que vamos denotar por $V^\perp$.

Seja $M_t = \Phi_t(M)$ uma folha de $V^\perp$ munida com a métrica induzida. De acordo com [62], dado um domínio Ω em $M = M_0$, o *gráfico Killing conforme* $\Sigma(z)$ de uma função suave z em $\overline{\Omega}$ é a hipersuperfície dada por

$$\Sigma(z) = \{\Phi(z(u), u) : u \in \overline{\Omega}\}.$$

Quando $\Omega = M$, $\Sigma(z)$ é dito ser *inteiro*.

Campos de Killing conformes são importantes objetos que têm sido amplamente utilizados para se compreender a geometria de subvariedades e, mais particularmente, de hipersuperfícies imersas em espaços Riemannianos. S. Montiel [79] estudou a singularidade de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante em uma variedade completa Riemanniana dotada de um campo de vetores de Killing conforme fechado, obtendo resultados análogos para os teoremas clássicos de Alexandrov [5, 6] e Jellett-Liebmann [70, 75] sobre hipersuperfícies no espaço Euclidiano.

Mais tarde, Alías, Dajczer e Ripoll [8] estenderam o também clássico teorema de Bernstein [27] para o contexto de superfícies mínimas completas em espaços Riemannianos de curvatura de Ricci não negativa munida de um campo de Killing. Isto foi feito sob a hipótese de que o sinal da função ângulo entre uma aplicação de Gauss global e o campo de vectores de Killing permanece inalterado ao longo da superfície. De fato, o seu principal resultado só requer a presença de um campo de vetores de Killing conforme homotético.

Em [61], Dajczer, Hinojosa e de Lira definiram uma noção de gráfico Killing em uma classe de variedades Riemannianas dotadas de um campo de vetores de Killing e resolveram o problema de Dirichlet correspondente para curvatura média prescrita sob hipóteses envolvendo dados do domínio e a curvatura de Ricci do espaço ambiente.

Em [43], Caminha estabeleceu condições para a existência de campos de Killing conformes fechados e não paralelos em variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não positiva, generalizando um teorema devido a Pan [86]. Além disso, ele obteve teoremas do tipo Bernstein gerais para certas hipersuperfícies completas em variedades Riemannianas fechadas equipadas com campos de Killing conformes.

Mais recentemente, Dajczer e de Lira [62] estenderam os resultados de [61], considerando gráficos que são construídos através do fluxo gerado por um campo de Killing conforme globalmente definido em uma variedade Riemanniana. De acordo com a terminologia estabelecida em [62], tais gráficos são chamados de *gráficos Killing conformes.*

Aqui, motivado pelos trabalhos descritos acima, obtivemos alguns resultados sobre a geometria de gráficos Killing conformes inteiros. Sob uma restrição adequada na norma do gradiente da função z que determina o gráfico $\Sigma(z)$, estabelecemos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral $V^{\perp}$. Um dos resultados obtidos nessa configuração é o seguinte (ver Teorema 5.2):

Teorema 1.3. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Einstein munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que H é constante e que H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$. Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.*

Em seguida, estabelecemos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica, como no Teorema 5.12 que enunciamos aqui.

Teorema 1.4. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ e o fator conforme ψ de V satisfazem uma das seguintes condições:*

(a) $H \geq 0$ e $\psi \leq 0$ em $\Sigma(z)$;

(b) $H \leq 0$ e $\psi \geq 0$ em $\Sigma(z)$.

Se Dz tem norma integrável na folha M, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície mínima. Além disso, se $\overline{M}$ é uma variedade de Einstein e H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$, então $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica.

Além disso, quando o espaço ambiente $\overline{M}$ possui curvatura seccional constante, obtemos estimativas por baixo para o índice de nulidade relativa de $\Sigma(z)$, como, por exemplo, no Teorema 5.17, enunciado a seguir.

Teorema 1.5. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c e munida com um campo de vetores paralelo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, com segunda forma fundamental limitada A e tal que H_{r+1}*

não muda de sinal, para algum $0 \leq r \leq n-1$. *Se* Dz *tem norma integrável na folha* M, *então* $\Sigma(z)$ *é* r*-mínima. Além disso, se* H_{r+2} *também não muda de sinal,* $0 \leq r \leq n-2$, *então o índice de nulidade relativa mínimo* η_0 *de* $\Sigma(z)$ *é ao menos* $n-r$. *Em particular, quando* $\overline{M}_c$ *é o espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e se* H_r *não se anula em* $\Sigma(z)$, *então através de cada ponto de* $\Sigma(z)$ *passa um* $(n-r)$*-hiperplano de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *totalmente contido em* $\Sigma(z)$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste primeiro capítulo temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos como referências [38], [51], [52] e [85].

2.1 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *positiva definida*, se $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(b) *negativa definida*, se $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(c) *não-degenerada*, se $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço $W \subset V$ é dito *não-degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.

O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço $W \subset V$ tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja definida negativa.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V;\ \langle v, w\rangle = 0;\ \forall\, w \in W\}.$$

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos relevantes sobre formas bilineares simétricas (cf. [85], Lema 2.19, Lema 2.22 e Lema 2.23).

Lema 2.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(a) *b é não-degenerada se e só se sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de V for invertível.*

(b) *Se W é não-degenerado então $dim(W) + dim(W^{\perp}) = dim(V)$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

(c) *W é não-degenerado se e só se $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não-degenerado se e só se $W^{\perp}$ for não-degenerado.*

No que segue, supomos que $b = \langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:

(i) *tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;

(ii) *tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;

(iii) *tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base $\{e_i\}$ ortonormal com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i (cf. [85], Lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Seja V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle\cdot,\cdot\rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u\rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo* (ou *cone temporal*) *de V contendo u* por $C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v\rangle < 0\}$.

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos sobre cones tipo-tempo (cf. Lema 1.2.1 de [51], ou ainda Lema 5.26 e Proposição 5.30 de [85]).

Lema 2.2. *Nas notações acima, se $v, w \in \mathcal{T}$, então:*

(a) *O subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^\perp$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*

(b) *Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.*

(c) *Se v e w pertencem ao mesmo cone tipo-tempo de V então existe um único número $\theta \geq 0$, chamado ângulo hiperbólico entre v e w, tal que*

$$\langle v, w\rangle = -|v||w| \cosh\theta.$$

(d) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

Voltando nossa atenção a partir de agora a variedades diferenciáveis, temos o seguinte

Definição 2.3. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle\cdot,\cdot\rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Como o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}$ em $\mathbb{N}$, temos que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}$. No que segue, por simplificação de notação, escreveremos $\overline{M}$ para o par $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}$ e ν para o seu índice. Quando o índice ν de $\overline{M}$ é zero, $\overline{M}$ é simplesmente uma *variedade Riemanniana*; quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma *variedade de Lorentz*.

Denotemos, a partir de agora, por $\mathfrak{X}(\overline{M})$ como sendo o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em $\overline{M}$ e por $C^\infty(\overline{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\overline{M}$.

Da mesma forma, assim como ocorre em geometria Riemanniana, o teorema fundamental de Levi-Civita é válido para variedades semi-Riemannianas (cf. Teorema 3.11 de [85]), garantindo a existência, em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$, de uma única conexão $\overline{\nabla}$ (a *conexão de Levi-Civita*) simétrica e compatível com o tensor métrico de $\overline{M}$. Temos também o seguinte

Lema 2.4 ([85], Lema 3.35). *Se $\overline{M}$ é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, então a aplicação $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M})^3 \to \mathfrak{X}(\overline{M})$, dada para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ por*

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

é $C^\infty(\overline{M})$-trilinear, sendo denominada o tensor de curvatura de $\overline{M}$.

Sempre que $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do Lema 2.1 que $\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \neq 0$. Faz sentido, portanto, a seguinte

Definição 2.5. *Sejam $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}$ em p, segundo σ.

Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem *curvatura seccional constante em $p \in \overline{M}$* se os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço de dimensão 2 não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$. Se $\dim(\overline{M}) \geq 3$ e $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, o análogo do teorema de Schur para variedades semi-Riemannianas (cf. [85], exercício 21 do Capítulo 3) garante que o valor de $K(\sigma)$ também independe do ponto $p \in \overline{M}$ escolhido.

Aproximando subespaços de dimensão 2 degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (cf. [85], Corolário 3.43), se $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\left\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\right\}, \tag{2.1}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Definição 2.6. *Se $\overline{M}$ é uma variedade semi-Riemanniana, o tensor de Ricci de $\overline{M}$ é definido por*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X,Z)Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}).$$

Se $p \in \overline{M}$ e $X \in T_p\overline{M}$, $|X| = 1$, o número $\mathrm{Ric}(X,X)$ chama-se curvatura de Ricci em p na direção de X.

Assim, se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$.

Definição 2.7. *A curvatura escalar de $\overline{M}$ é a função $\overline{S} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{S} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(E_j, E_j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} K(E_i, E_j).$$

Para o que segue precisaremos também da seguinte

Definição 2.8. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é* temporalmente orientável *se existir uma aplicação τ que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, a qual é suave no seguinte sentido: para cada $p \in \overline{M}$ existem uma vizinhança aberta U de p e um campo $V \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$.*

O resultado a seguir torna operacional a definição anterior.

Lema 2.9 ([85], Lema 5.32)**.** *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo de vetores tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

Sempre que uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como na Definição 2.8, ou de um campo de vetores tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$ e $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $Y(q) \in \tau_q$ (respectivamente, $-Y(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}$, dizemos que Y *aponta para o futuro* (respectivamente, *aponta para o passado*). Sendo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para $\overline{M}$, segue do item (c) do Lema 2.2 que um campo de vetores tipo-tempo Y sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle Y, V\rangle < 0$ (respectivamente, $\langle Y, V\rangle > 0$).

2.2 Hipersuperfícies

Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ variedades semi-Riemannianas de dimensões n e $n+1$, respectivamente. Uma *imersão isométrica* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $x^*\overline{g} = g$. Neste caso, é costume denotar (e assim o faremos) os tensores métricos de M e $\overline{M}$ pelo mesmo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dada $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersão isométrica, dizemos que M é uma *hipersuperfície* de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ é de Lorentz, uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é dita uma *hipersuperfície tipo-espaço* de $\overline{M}^{n+1}$ se a métrica g de M^n for Riemanniana. O resultado a seguir garante que se $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientada, então suas hipersuperfícies tipo-espaço são necessariamente orientáveis.

Proposição 2.10 ([38], Proposição 2.9)**.** *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, então M^n admite um campo de vetores normal unitário $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, apontando para o futuro. Em particular, M^n é orientável*

Daqui por diante, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ sempre denotará uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana $n-$dimensional em uma variedade Riemanniana orientada ou de Lorentz temporalmente orientada, $(n+1)-$dimensional, estando o caso considerado em cada situação sempre claro no contexto. Quando $\overline{M}^{n+1}$ for Riemanniana, M será sempre assumida orientável. A proposição acima torna essa hipótese desnecessária no caso de ambiente Lorentziano temporalmente orientado. Se $\overline{M}^{n+1}$ for uma variedade de Lorentz temporalmente orientada e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ for uma hipersuperfície tipo-espaço, a escolha de um campo normal unitário N como na proposição anterior é dita uma *orientação temporal* para M. Diremos ainda que N é a *aplicação normal de Gauss* de M apontando para o futuro. Em qualquer caso M é orientada pela escolha de um campo de vetores normal unitário N sobre a mesma.

Ainda em relação à situação do parágrafo anterior, exceto pela métrica, objetos *sem barra* se referirão a M^n, ao passo que objetos *com barra* se referirão a $\overline{M}^{n+1}$. Em particular, ∇ e $\overline{\nabla}$ denotarão as conexões de Levi-Civita, e R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente.

Não é difícil verificar que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (cf. [85], Lema 4.3), onde $(\cdot)^\top$ denota a componente tangente a M. Assim, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ é a componente normal a M em $\overline{M}$. Não é difícil provar que $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^\perp(M)$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinear e simétrica (cf. [85], Lema 4.4), denominada a *segunda forma fundamental* da imersão x. Portanto, definindo $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ pela igualdade

$$\langle AX, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), N\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos um campo de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \to T_pM$, $p \in M$, denominado o *operador de forma* da imersão x. É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \epsilon_N \langle AX, Y\rangle N,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (cf. [85], Lema 4.19).

Para referência futura, dado $p \in M$, dizemos que os autovalores de A_p são as *curvaturas principais* de x em p (em relação à orientação escolhida para M). Ademais, um ponto $p \in M$ é *umbílico* se todas as curvaturas principais de x em p forem iguais.

A proposição a seguir estabelece as equações fundamentais que relacionam as geometrias de M^n e $\overline{M}^{n+1}$ por intermédio da segunda forma fundamental da imersão. Para uma demonstração da mesma, veja o Lema 1.3.1 de [51], ou ainda o Teorema 5 e a Proposição 33 de [85].

Proposição 2.11. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana orientada de dimensão $n+1$, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície (tipo-espaço, no caso Lorentziano) orientada pela escolha de um campo normal unitário N, e $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma correspondente. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos:*

(*a*) (*Equação de Gauss*)

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^\top + \epsilon_N \left(\langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX\right).$$

(*b*) (*Equação de Codazzi*)

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X.$$

Como uma consequência imediata deste último resultado temos, para ambientes de curvatura seccional constante, o seguinte

Corolário 2.12. *Nas hipóteses da proposição anterior, se* $\overline{M}^{n+1}$ *tiver curvatura seccional constante* c *e* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*, então:*

(*a*) (*Equação de Gauss*)

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c\left\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle\right\}\\ &\quad + \epsilon_N\left(\langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle - \langle AX,W\rangle\langle AY,Z\rangle\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

(*b*) (*Equação de Codazzi*)

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{2.3}$$

2.3 Curvaturas de ordem superior

Em tudo o que segue, $\overline{M}^{n+1}$ denota uma variedade Riemanniana orientada ou uma variedade de Lorentz temporalmente orientada de dimensão $n+1$ e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada conexa no caso Riemanniano e, no caso Lorentziano, uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e orientada pela escolha de uma orientação temporal N. Denotamos ainda por $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma correspondente.

Dados $p \in M$ e $1 \leq r \leq n$, denote por $S_r(p)$ a r-ésima função simétrica elementar dos autovalores de A_p, i.e.,

$$S_r = \sigma_r\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right), \tag{2.4}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A_p e $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$.

Pondo $S_0 = 1$, não é difícil verificar que

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k t^{n-k} \tag{2.5}$$

em todo ponto de M, de sorte que obtemos n funções suaves $S_r : M^n \to \mathbb{R}$.

Para $1 \leq r \leq n$, definimos a *r-ésima curvatura H_r* de x por

$$\binom{n}{r} H_r = \epsilon_N^r S_r = \sigma_r(\epsilon_N\lambda_1, \ldots, \epsilon_N\lambda_n), \tag{2.6}$$

onde $\epsilon_N = \langle N, N \rangle = \pm 1$. Em particular, para $r = 1$ obtemos

$$H_1 = \epsilon_N \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \epsilon_N \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) = H,$$

a curvatura média de M^n, a qual é a principal curvatura extrínseca da hipersuperfície.

A importância do termo $(\epsilon_N)^r$ em (2.6) é devida ao fato de que, definindo o vetor curvatura média por $\overrightarrow{H} = HN$, temos $H(p) > 0$ em um ponto $p \in M$ se, e somente se, $\overrightarrow{H}(p)$ está na mesma orientação temporal de $N(p)$, i.e., $\langle \overrightarrow{H}, N \rangle_p < 0$.

Vale observar que H_2 define uma quantidade geométrica intimamente relacionada com a curvatura escalar R de M, a qual é um invariante geométrico *intrínseco*. Por exemplo, se $\overline{M}^{n+1}$ tiver curvatura seccional constante c, segue facilmente da equação de Gauss (2.2) que

$$R = n(n-1)(c - H_2). \tag{2.7}$$

Em particular, se $n = 2$ e denotarmos por K_M a curvatura Gaussiana da superfície tipo-espaço $x : M^2 \to \overline{M}^3$, temos a partir da última igualdade acima que

$$K_M = c - H_2. \tag{2.8}$$

Observamos também que a norma de Hilbert-Schmidt do operador forma A de M^n é dada por

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2. \tag{2.9}$$

Definição 2.13. *Em relação à hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, dizemos que um ponto $p_0 \in M$ é* elíptico *se as curvaturas principais de x em p_0 tiverem todas o mesmo sinal (forem todas negativas com respeito a uma escolha apropriada da orientação temporal de M^n, no caso Lorentziano, ou forem todas positivas, no caso Riemanniano).*

É um fato clássico que as r-ésimas curvaturas médias satisfazem um conjunto muito útil de desigualdades, as quais apresentamos na seguinte proposição (cf. [38], Proposição 3.2 e [40], Proposição 1):

Proposição 2.14. *Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = S_r(\lambda_i)$ como acima, e $H_r = \binom{n}{r}^{-1} \epsilon_N^r S_r$.*

1. *Para* $1 \leq r < n$, *tem-se*
$$H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}.$$
Além disso, se a igualdade ocorrer para $r = 1$ *ou para algum* $1 < r < n$, *com* $H_{r+1} \neq 0$, *neste último caso, então* $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

2. *Se a hipersuperfície admite um ponto elíptico e* H_r *é positivo para algum* $1 < r \leq n$, *então* $H_1, H_2, ..., H_r > 0$ *e*
$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \cdots \geq H_{r-1}^{1/(r-1)} \geq H_r^{1/r}. \tag{2.10}$$
Além disso, se a igualdade ocorrer para algum $r \leq j < r$, *então* $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

3. *Se, para algum* $1 \leq r < n$, *tivermos* $H_r = H_{r+1} = 0$, *então* $H_j = 0$ *para todo* $r \leq j \leq n$. *Em particular, no máximo* $r - 1$ *dos* λ_i *serão não-nulos neste caso.*

2.4 As transformações de Newton e o operador L_r

Continuando nossa discussão, para $0 \leq r \leq n$ definimos a r-ésima *transformação de Newton*
$$P_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
de x pondo $P_0 = I$, o operador identidade de $\mathfrak{X}(M)$, e
$$P_r = \epsilon_N^r(S_r I - S_{r-1}A + S_{r-2}A^2 - \ldots + (-1)^r A^r), \tag{2.11}$$
para $1 \leq r \leq n$. Uma fácil indução permite verificar que
$$P_r = \epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1}, \tag{2.12}$$
para $1 \leq r \leq n$. Também, segue prontamente de (2.5), (2.11) e do Teorema de Cayley-Hamilton que $P_n = 0$.

Desde que P_r é um polinômio em A, se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, o qual diagonaliza A em $p \in M$, com $Ae_i = \lambda_i e_i$ para

$1 \leq i \leq n$, então $\{e_1, \cdots, e_n\}$ também diagonaliza P_r em p. Ademais, escrevendo $P_r e_i = \lambda_{i,r} e_i$ para $1 \leq i \leq n$, não é difícil verificar (veja a Proposição 2.2.1 de [51] ou a Seção 3 de [7]) que

$$\lambda_{i,r} = (\epsilon_N)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r,\ i_j \neq i} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} = \sum_{i_1 < \cdots < i_r,\ i_j \neq i} (\epsilon_N \lambda_{i_1}) \cdots (\epsilon_N \lambda_{i_r}),$$

e daí que

$$\lambda_{i,r} = (\epsilon_N)^r S_r + \lambda_i \lambda_{i,r-1}$$

para $1 \leq r \leq n$ (com $\lambda_{i,0} = \lambda_i$).

Além disso, denotando por A_i a restrição de A para $\langle e_i \rangle^\perp \subset T_p M$, temos

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n \\ j_1, \ldots, j_k \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Com estas notações obtemos a expressão

$$P_r e_i = (\epsilon_N)^r S_r(A_i) e_i. \tag{2.13}$$

Sendo assim, com um cálculo simples (cf. Lemma 2.1 of [23]) obtemos

Lema 2.15. *Com as notações acima, valem as seguintes fórmulas:*

(a) $S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)$;

(b) $\mathrm{tr}(P_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = \epsilon_N^r (n-r) S_r = b_r H_r$;

(c) $\mathrm{tr}(AP_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^n \lambda_i S_r(A_i) = \epsilon_N^r (r+1) S_{r+1} = \epsilon_N b_r H_{r+1}$,

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r}$.

Do Lema 3.1 de [7], fazendo uma adaptação do sinal para o caso Riemanniano (levando em conta ϵ_N na equação (2.12)), temos:

Lema 2.16. *Os divergentes das transformações de Newton são dados pelas seguintes fórmulas indutivas:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{div} P_0 = 0 \\ &\mathrm{div} P_r = -\epsilon_N A(\mathrm{div} P_{r-1}) - \epsilon_N \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\overline{R}(N, P_{r-1}e_i)e_i\right)^\top \end{aligned} \tag{2.14}$$

Equivalentemente, para todo campo $x \in \mathfrak{X}(M)$, seque-se que:

$$\langle \mathrm{div} P_r, X\rangle = \sum_{j=1}^{r} (-\epsilon_N)^j \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}e_i)e_i, A^{j-1}X \right\rangle \tag{2.15}$$

onde o divergente de P_r em M^n é dado por

$$\mathrm{div} P_r = \mathrm{tr}(\nabla P_r) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} P_r)(e_i).$$

De acordo com o Corolário 3.2 de [7], quando o ambiente tem curvatura seccional constante, as transformações de Newton P_r são *livres de divergência*, i.e.,

$$\mathrm{div}\,(P_r) := \mathrm{tr}\,(V \to (\nabla_V P_r)\, V) = 0. \tag{2.16}$$

Associado a cada transformação de Newton P_r, temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, dado por

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r \,\mathrm{Hess}\, f). \tag{2.17}$$

Assim, se $r = 0$, L_r é simplesmente o operador Laplaciano, o qual é intrínseco, mas para $1 \le r \le n-1$ o operador L_r é extrínseco. A partir das propriedades do Hessiano de funções, segue que

$$L_r(fg) = fL_r(g) + gL_r(f) + 2\langle P_r \nabla f, \nabla g\rangle,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Para uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{D}(M)$, temos também que

$$L_r(\varphi \circ h) = \varphi'(h)L_r(h) + \varphi''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle. \tag{2.18}$$

Observe ainda que, sendo $\{e_1, \cdots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M^n, temos

$$\begin{aligned} L_r(f) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, P_r(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_r(e_i)} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f \circ P_r). \end{aligned}$$

Além disso, de acordo com [90] temos que

$$\operatorname{div}(P_r \nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} P_r)(\nabla f), e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \tag{2.19}$$

$$= \langle \operatorname{div} P_r, \nabla f \rangle + L_r(f). \tag{2.20}$$

Consequentemente, concluimos que o operador L_r é elíptico se, e somente se, P_r for positivo definido (para uma escolha apropriada da orientação temporal N de M^n, se r for ímpar). Notemos que $L_0 = \triangle$ é sempre elíptico.

Os lemas a seguir (cf. Lema 3.2 e Lema 3.3 de [17], respectivamente) fornecem condições geométricas suficientes para a elipticidade dos operadores L_r. Ambos são adaptações, para ambientes Lorentzianos, de resultados análogos de Elbert (cf. [63]) e Cafarelli, Nirenberg e Spruck (cf. [35]), e fornecem condições suficientes para a elipticidade do operador L_r quando $r \geq 2$. Para uma demonstração acessível do segundo lema veja a Proposição 3.2 de [23]. (Aqui, enunciamos os lemas de forma mais geral para considerar os casos Riemanniano e Lorentziano.)

Lema 2.17. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa numa variedade semi-Riemanniana. Se $H_2 > 0$ em M^n, então P_1 é definido positivo para uma escolha apropriada da orientação N de M^n. Em particular, L_1 é elíptico.*

Lema 2.18. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa numa variedade semi-Riemanniana e suponhamos que, com respeito a uma escolha apropriada de sua orientação, M^n possua um ponto elíptico. Se $H_{r+1} > 0$ em M para algum $2 \leq r \leq n-1$, então P_k é positivo definido para $1 \leq k \leq r$. Em particular, L_k é elíptico para $1 \leq k \leq r$.*

2.5 Um princípio do máximo para variedades completas.

Nesta tese, precisaremos também de um resultado obtido por Caminha (Proposição 2.1 de [43], veja o Lema 2.21 a seguir), que estende um resultado de Yau [97](veja o Lema 2.20 a seguir) sobre uma versão do Teorema de Stokes para uma variedade Riemanniana completa, não-compacta, n-dimensional. Por questão de completude, daremos uma demonstração aqui. Para tal, vamos enunciar o seguinte resultado de Yau [97]:

Lema 2.19. *Sejam M uma variedade Riemanniana orientada, completa, não-compacta, n-dimensional, e ω uma $(n-1)$-forma diferencial definida em M tal que $\int_M |\omega| < \infty$. Então existem uma sequencia de domínios $B_1 \subset ... \subset B_i \subset ...$ tais que $M = \bigcup_i B_i$ e*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Demonstração. Considere um ponto fixo $p \in M$ e seja r a função Lipzchitiziana definida em M que associa a cada ponto $q \in M$ a distância de p a q. Para cada $R > 0$, seja $B(R)$ a bola de raio R e centro p. Dessa forma, de acordo com Gaffney [66],em $B(R)$, podemos aproximar a função r por uma função suave e não-negativa g_R tal que:

(1) para quase todo $t < R$, a menos de um número finito, $g_R^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

(2) $|dg_R| \leq \frac{3}{2}$ em $g_R^{-1}([0,R])$,

(3) $g_R^{-1}(t) \subset B(t+1) - B(t-1)$ para $t \leq R$.

Por outro lado, usando um teorema de mudança de variáveis, temos que

$$\int_{g_R^{-1}([0,R])} |dg_R|\, |\omega| = \int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt.$$

Juntamente com (2), temos

$$\int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|\,.$$

Ou ainda,

$$\int_{R/2}^{R}\left(\int_{g_R^{-1}(t)}|\omega|\right)dt \leq \frac{3}{2}\int_M |\omega|\,.$$

Usando (1) e o Teorema do Valor Médio para integrais, temos para algum $R/2 \leq t_R \leq R$, onde $g^{-1}(t_R)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

$$\int_{g_R^{-1}(t_R)}|\omega| \leq \frac{3}{R}\int_M |\omega|\,. \tag{2.21}$$

Do Teorema de Stokes e de 2.21, temos

$$\left|\int_{g_R^{-1}([0,t_R])} d\omega\right| \leq \int_{g_R^{-1}(t_R)}|\omega| \leq \frac{3}{R}\int_M |\omega|\,. \tag{2.22}$$

Da propriedade (3), temos que

$$M = \bigcup_i g_i^{-1}([0,t_i]).$$

E de 2.22,

$$\lim_{i\to\infty}\int_{g_R^{-1}([0,t_R])} d\omega = 0.$$

Concluindo a demonstração do lema.

□

Usando o Lema acima, Yau provou o seguinte

Lema 2.20. *Se u é uma função subharmônica definida em uma variedade Riemanniana orientada, completa e não-compacta M tal que $\int_M |\nabla u| < \infty$, então u é harmônica.*

Caminha observou em [43] que é possível generalizar esse resultado trocando ∇u por um campo diferenciável X tal que $\int_M |X| < \infty$. Ou seja, temos

Lema 2.21. *Seja X um campo de vetores suave sobre uma variedade Riemanniana (sem bordo) orientada, completa, n-dimensional M, tal que $\mathrm{div}_M X$ não muda de sinal em M. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\mathrm{div}_M X = 0$.*

Demonstração. Se M é compacta, como o bordo de M é vazio, o resultado segue direto do Teorema da Divergência. Portanto, vamos considerar que M não é compacta. Considere a $n-1$-forma $\omega = i_X dM$, ou, ω é a contração de dM na direção de X. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal, temos

$$i_X dM = \sum_j (-1)^{j-1} \omega_j(X) \omega_1 \wedge ... \wedge \hat{\omega}_j \wedge ... \wedge \omega_n.$$

Mas

$$\omega_j(X) = \omega_j \left(\sum_i x_i e_i \right) = \sum_i x_i \omega_j(e_i) = \sum_i x_i \langle e_j, e_i \rangle = \langle X, e_j \rangle .$$

Assim, temos

$$i_X dM = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \langle X, e_j \rangle \omega_1 \wedge ... \wedge \hat{\omega}_j \wedge ... \wedge \omega_n$$

e

$$|\omega|^2 = |i_X dM|^2 = \sum_j \langle X, e_j \rangle^2 = |X|^2.$$

Além disso,

$$d\omega = d(i_X dM) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} d \langle X, e_j \rangle \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \hat{\omega}_j \wedge ... \wedge \omega_n.$$

Porém,

$$d \langle X, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle + \langle X, \nabla_{e_i} e_j \rangle \right) \omega_i,$$

observe que se $i = j$, temos $\nabla_{e_i} e_j = 0$ e se $i \neq j$, temos $\omega_i \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \hat{\omega}_j \wedge ... \wedge \omega_n = 0$. Portanto,

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle \omega_j \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \hat{\omega}_j \wedge ... \wedge \omega_n = (\mathrm{div}_M X) \, dM.$$

Agora, pelo Lema 2.19, temos

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B_i}(\mathrm{div}_M X)\,dM = 0$$

e, como $\mathrm{div}_M X$ não muda de sinal em M, temos $\mathrm{div}_M X = 0$. $\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares

Nesse capítulo, apresentamos os resultados referentes aos artigos [55] e [56]. Iniciamos estabelecendo um teorema de caracterização sobre as hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares completas imersas em um espaço de Lorentz localmente simétrico, cuja curvatura seccional obedece a certas condições apropriadas. Sob uma condição adequada na norma da segunda forma fundamental, provamos que tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples. Em seguida, estudamos a geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear imersa em um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico, cuja curvatura seccional obedece a certas restrições canônicas. Nesta configuração, usando, como principal ferramenta analítica, um princípio do máximo generalizado para variedades Riemannianas completas, não-compactas, estabelecemos condições suficientes para garantir que tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples.

3.1 Enunciados dos resultados principais

Para constantes c_1 e c_2, Choi et al. [48, 92] introduziram a classe dos espaços de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}$ de dimensão n+1 que satisfazem as seguintes duas condições (onde K denota a curvatura seccional de $\mathbb{L}_1^{n+1}$):

$$K(u,v) = -\frac{c_1}{n} \tag{3.1}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u e tipo-tempo v; e

$$K(u,v) \geq c_2 \tag{3.2}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u e v.

Nosso propósito é estudar a rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço *Weingarten lineares* completas, isto é, hipersuperfícies tipo-espaço completas cuja curvatura média H e a curvatura escalar normalizada R satisfazem:

$$R = aH + b,$$

para constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Nestas condições, como uma aplicação adequada do princípio do máximo forte de Hopf e sob restrições apropriadas no quadrado da norma S da segunda forma fundamental, conseguimos estabelecer um teorema de caracterização em relação a tal hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço de Lorentz localmente simétrico $\mathbb{L}_1^{n+1}$, o qual supomos satisfazer as condições (3.1) e (3.2). Lembramos que um espaço de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}$ é *localmente simétrico* se todas as componentes das derivadas covariantes $\bar{R}_{ABCD;E}$ do tensor curvatura de $\mathbb{L}_1^{n+1}$ são identicamente nulas.

Para enunciar nossos resultados, precisamos de alguns fatos básicos. Denote por $\bar{R}_{CD}$ as componentes do tensor de Ricci de $\mathbb{L}_1^{n+1}$ satisfazendo as condições (3.1) e (3.2), então a curvatura escalar $\bar{R}$ de $\mathbb{L}_1^{n+1}$ é dada por

$$\bar{R} = \sum_{A=1}^{n+1} \varepsilon_A \bar{R}_{AA} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji} - 2\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji} + 2c_1.$$

Além disso, é bem conhecido que a curvatura escalar de um espaço de Lorentz localmente simétrico é constante. Consequentemente, $\sum_{i,j=1}^{n} \bar{R}_{ijji}$ é uma constante naturalmente associada ao espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições (3.1) e (3.2).

Agora, estamos em condição de apresentar nossos resultados.

Teorema 3.1. *Seja $\mathbb{L}_1^{n+1}$ um espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições* (3.1) *e* (3.2)*, com $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2 > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{L}_1^{n+1}$, tal* *que* $R = aH + b$ *com* $b < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}$. *Se* H *atinge o máximo em* M^n *e* $S \leq 2\sqrt{n-1}\,c$, *então* M^n *é totalmente umbílica ou, caso contrário, é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples.*

No caso de um espaço de Einstein localmente simétrico temos o seguinte

Teorema 3.2. *Seja* $\mathcal{E}_1^{n+1}$ *um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico satisfazendo as condições* (3.1) *e* (3.2), *com* $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2 > 0$. *Seja* M^n *uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa, não-compacta, imersa em* $\mathcal{E}_1^{n+1}$, *tal que* $R = aH+b$ *com* $(n-1)^2a^2+4\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}-4n(n-1)b > 0$. *Se* $|\nabla H|$ *é integrável a Lebesgue em* M^n *e* $S \leq 2\sqrt{n-1}\,c$, *então* M^n *é totalmente umbílica ou, caso contrário, é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples.*

Relacionado ao caso compacto, temos o seguinte

Teorema 3.3. *Seja* $\mathcal{E}_1^{n+1}$ *um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico satisfazendo as condições* (3.1) *e* (3.2), *com* $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2 > 0$. *Seja* M^n *uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear compacta imersa em* $\mathcal{E}_1^{n+1}$, *tal que* $R = aH + b$ *com* $(n-1)^2a^2 + 4\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - 4n(n-1)b \geq 0$. *Se* $S < 2\sqrt{n-1}\,c$, *então* M^n *é totalmente umbílica.*

Observamos que os teoremas anteriores podem ser vistos como extensões dos resultados de rigidez da literatura atual sobre hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante ou curvatura escalar constante num espaço de Lorentz localmente simétrico. Neste sentido, sugerimos aos leitores as obras de Ok Baek et al. [82], Liu e Sun [76], e Zhang e Wu [98]. Além disso, destacamos que Li et al. [73] obteveram teoremas de rigidez sobre hipersuperfícies Weingarten lineares imersas na esfera unitária Euclidiana.

3.2 Uma fórmula tipo Simons.

De agora em diante, consideraremos hipersuperfícies tipo-espaço completas M^n imersas no espaço de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}$. Escolhemos um referencial ortonormal semi-Riemanniano de campos locais $\{e_A\}_{1\leq A\leq n+1}$ em $\mathbb{L}_1^{n+1}$, com correferencial dual $\{\omega_A\}_{1\leq A\leq n+1}$, tal que, em cada ponto de M^n, $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a M^n e e_{n+1} é normal a M^n. Usaremos a seguinte convenção para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+1,\ 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n.$$

Sob estas condições, denotando por $\{\omega_{AB}\}$ as formas de conexão de L_1^{n+1}, temos que as equações de estrutura de L_1^{n+1} são dadas por:

$$d\omega_A = -\sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad \varepsilon_i = 1, \varepsilon_{n+1} = -1, \tag{3.3}$$

$$d\omega_{AB} = -\sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D \bar{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D. \tag{3.4}$$

Aqui, $\bar{R}_{ABCD}$, $\bar{R}_{CD}$ e $\bar{R}$ denotam, respectivamente, o tensor curvatura Riemanniano, o tensor de Ricci e a curvatura escalar do espaço de Lorentz $\mathbb{L}_1^{n+1}$. Nesta configuração, temos que

$$\bar{R}_{CD} = \sum_B \varepsilon_B \bar{R}_{BCDB}, \quad \bar{R} = \sum_A \varepsilon_A \bar{R}_{AA}.$$

Além disso, as componentes $\bar{R}_{ABCD,E}$ da derivada covariante do tensor curvatura Riemanniana de $\mathbb{L}_1^{n+1}$ são definidas por

$$\begin{aligned} \sum_E \varepsilon_E \bar{R}_{ABCD,E} \omega_E &= d\bar{R}_{ABCD} - \sum_E \varepsilon_E (\bar{R}_{EBCD} \omega_{EA} \\ &\quad + \bar{R}_{AECD} \omega_{EB} + \bar{R}_{ABED} \omega_{EC} + \bar{R}_{ABCE} \omega_{ED}). \end{aligned}$$

Em seguida, restringimos todos os tensores para a hipersuperfície tipo-espaço M^n em $\mathbb{L}_1^{n+1}$. Antes de tudo, $\omega_{n+1} = 0$ em M^n, assim, $\sum_i \omega_{(n+1)i} \wedge \omega_i = d\omega_{n+1} = 0$. Consequentemente, pelo *Lema de Cartan* [44], existem h_{ij} tais que

$$\omega_{(n+1)i} = \sum_j h_{ij} \omega_j \quad \text{e} \quad h_{ij} = h_{ji}. \tag{3.5}$$

Isto dá a segunda forma fundamental de M^n, $h = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \omega_j e_{n+1}$, e o quadrado de sua norma $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2 = |A|^2$. Além disso, a curvatura média H de M^n é definida por $H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$.

As formas de conexões $\{\omega_{ij}\}$ de M^n são caracterizadas pelas equações de estrutura de M^n:

$$d\omega_i = -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{3.6}$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \tag{3.7}$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M^n.

Usando as equações de estrutura, obtemos a equação de Gauss:

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{3.8}$$

As componentes R_{ij} do tensor de Ricci e a curvatura escalar R de M^n são dadas, respectivamente, por

$$R_{ij} = \sum_k \bar{R}_{kijk} - nHh_{ij} + \sum_k h_{ik}h_{kj} \tag{3.9}$$

e

$$n(n-1)R = \sum_{j,k} \bar{R}_{kjjk} - n^2H^2 + S. \tag{3.10}$$

As primeiras derivadas covariantes h_{ijk} de h_{ij} satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} - \sum_k h_{ik}\omega_{kj} - \sum_k h_{jk}\omega_{ki}. \tag{3.11}$$

Então, pela diferenciação exterior de (3.5), obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk} - h_{ikj} = \bar{R}_{(n+1)ijk}. \tag{3.12}$$

Analogamente, as segundas derivadas covariantes h_{ijkl} de h_{ij} são dadas por

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} - \sum_l h_{ljk}\omega_{li} - \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} - \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{3.13}$$

Pela diferenciação exterior de (3.11), podemos obter a seguinte *fórmula de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = -\sum_m h_{im}R_{mjkl} - \sum_m h_{jm}R_{mikl}. \tag{3.14}$$

Restringindo a derivada covariante $\bar{R}_{ABCD;E}$ de $\bar{R}_{ABCD}$ em M^n, temos que $\bar{R}_{(n+1)ijk;l}$ é dado por

$$\begin{aligned} \bar{R}_{(n+1)ijk;l} &= \bar{R}_{(n+1)ijkl} + \bar{R}_{(n+1)i(n+1)k}h_{jl} \\ &\quad + \bar{R}_{(n+1)ij(n+1)}h_{kl} + \sum_m \bar{R}_{mijk}h_{ml}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\bar{R}_{(n+1)ijkl}$ denota a derivada covariante de $\bar{R}_{(n+1)ijk}$ como um tensor em M^n, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_l \bar{R}_{(n+1)ijkl}\omega_l &= d\bar{R}_{(n+1)ijk} - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ljk}\omega_{li} \\ &\quad - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ilk}\omega_{lj} - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ijl}\omega_{lk}.\end{aligned}$$

O Laplaciano Δh_{ij} of h_{ij} é definido por $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$. De (3.12), (3.14) e (3.15), após um cálculo simples, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= (nH)_{ij} - nH\sum_l h_{il}h_{lj} + Sh_{ij} \\ &\quad + \sum_k (\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j}) \\ &\quad - \sum_k (h_{kk}\bar{R}_{(n+1)ij(n+1)} + h_{ij}\bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}) \\ &\quad - \sum_{k,l} (2h_{kl}\bar{R}_{lijk} + h_{jl}\bar{R}_{lkik} + h_{il}\bar{R}_{lkjk}).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Como $\Delta S = 2\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij}\Delta h_{ij}\right)$, de (3.16) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= S^2 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j}(nH)_{ij}h_{ij} \\ &\quad + \sum_{i,j,k}(\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j})h_{ij} \\ &\quad -(\sum_{i,j} nHh_{ij}\bar{R}_{(n+1)ij(n+1)} + S\sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}) \\ &\quad -2\sum_{i,j,k,l}(h_{kl}h_{ij}\bar{R}_{lijk} + h_{il}h_{ij}\bar{R}_{lkjk}) - nH\sum_{i,j,l} h_{il}h_{lj}h_{ij}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, seja $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij}\omega_i\omega_j$ um tensor simétrico em M^n definido por

$$\phi_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}.$$

De acordo com Cheng-Yau [45], denotamos por $\square$ o operador associado a ϕ agindo em qualquer função suave f por

$$\square f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}. \tag{3.18}$$

Observe que $\square f = -\mathrm{tr}(P_1 \operatorname{Hess} f) = -L_1(f)$.

Fazendo $f = nH$ em (3.18) e tomando um referencial ortonormal (local) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em M^n tal que $h_{ij} = \lambda\delta_{ij}$, da equação (3.10) obtemos que

$$\begin{aligned} \square(nH) &= \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - \sum_i (nH)_i^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} \\ &= \frac{1}{2}\Delta S - n^2|\nabla H|^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{i,j} \bar{R}_{ijji} - n(n-1)R\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.3 Alguns resultados auxiliares

Para provar nossos teoremas precisaremos de alguns lemas. O primeiro é um lema algébrico clássico obtido por Okumura em [83], completado com o caso da igualdade provado em [4] por Alencar e do Carmo.

Lema 3.4. *Sejam $\mu_1, ..., \mu_n$ números reais tais que $\sum_i \mu_i = 0$ e $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$, onde $\beta \geq 0$. Então*

$$-\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \tag{3.20}$$

e a igualdade vale se, e somente se, ao menos $(n-1)$ dos números μ_i são iguais.

Agora, apresentamos nosso segundo lema auxiliar. Seguindo os passos da prova do Lema 2.1 de [73], obtemos

Lema 3.5. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear imersa em um espaço de Lorentz localmente simétrico $\mathbb{L}_1^{n+1}$, tal que $R = aH + b$. Suponha que*

$$(n-1)^2a^2 + 4\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - 4n(n-1)b \geq 0. \tag{3.21}$$

Então,

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2|\nabla H|^2. \tag{3.22}$$

Além disso, se a desigualdade (3.21) *é estrita e a igualdade vale na equação* (3.22) *em M^n, então H é constante em M^n.*

Demonstração. Como supomos que $R = aH + b$, da equação (3.10) temos

$$2h_{ij}h_{ijk} = \big(2n^2H + n(n-1)a\big)\,(H)_k.$$

Assim,

$$4\sum_k\left(\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk}\right)^2 = \big(2n^2H + n(n-1)a\big)^2\,|\nabla H|^2.$$

Consequentemente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$\begin{aligned} 4S\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= 4\left(\sum_{i,j} h_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\right) \\ &\geq 4\sum_k\left(\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk}\right)^2 \\ &= \big(2n^2H + n(n-1)a\big)^2\,|\nabla H|^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado, como $R = aH + b$, usando novamente a equação (3.10) verificamos facilmente que

$$\begin{aligned} \big(2n^2H + n(n-1)a\big)^2 &= 4n^2\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - 4n^3(n-1)b \\ &\quad + n^2(n-1)^2a^2 + 4n^2S. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dessa forma, de (3.21), (3.23) e (3.24), temos

$$S\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2S|\nabla H|^2.$$

Portanto, obtemos que $S = 0$, donde $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2|\nabla H|^2$, ou $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2|\nabla H|^2$. Além disso, se a desigualdade (3.21) é estrita, de (3.24) temos que

$$\big(2n^2H + n(n-1)a\big)^2 > 4n^2S.$$

Sendo assim, se $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2|\nabla H|^2$ vale em M^n, de (3.23) concluimos que $\nabla H = 0$ em M^n e, assim, H é constante em M^n. $\square$

Agora, consideramos o operador modificado de Cheng-Yau

$$L = \square + \frac{n-1}{2}a\Delta. \tag{3.25}$$

Associado a tal operador, temos o seguinte critério suficiente de elipticidade.

Lema 3.6. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear imersa em um espaço de Lorentz localmente simétrico $\mathbb{L}_1^{n+1}$, tal que $R = aH + b$ com $b < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}$. Então, L é elíptico.*

Demonstração. Da equação (3.10), como sabemos que $R = aH + b$ com $b < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}$, vemos facilmente que H não pode se anular em M^n e, escolhendo a aplicação de Gauss apropriada, podemos assumir que $H > 0$ em M^n.

Considere o caso que $a = 0$. Como $R = b < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}$, da equação (3.10), se escolhermos um referencial ortonormal (local) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, temos que $\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j > 0$. Consequentemente,

$$n^2H^2 = \sum_i \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j > \lambda_i^2$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ e, assim, temos que $nH - \lambda_i > 0$ para todo i. Portanto, neste caso, concluimos que L é elíptico.

Agora, suponha que $a \neq 0$. Da equação (3.10) temos que

$$a = \frac{1}{n(n-1)H}\left(S - n^2H^2 + \sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - n(n-1)b\right).$$

Consequentemente, para todo $i = 1, \dots, n$, com um cálculo algébrico simples verificamos que

$$\begin{aligned} nH - \lambda_i + \frac{n-1}{2}a &= nH - \lambda_i \\ &+ \frac{1}{2nH}\left(S - n^2H^2 + \sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - n(n-1)b\right) \\ &= \frac{1}{2nH}\left(\sum_{j\neq i}\lambda_j^2 + (\sum_{j\neq i}\lambda_j)^2 + \sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - n(n-1)b\right). \end{aligned}$$

Sendo assim, como $b < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji}$, também concluimos, neste caso, que L é elíptico. □

3.4 Demonstração dos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3

***Demonstração do Teorema 3.1*:**

Inicialmente, observamos que a simetria local de $\mathbb{L}_1^{n+1}$ implica que

$$\sum_{i,j,k}(\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j})h_{ij} = 0.$$

Dessa forma, se escolhermos um referencial ortonormal (local) $\{e_1, \dots, e_n\}$ em M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, usando as equações (3.17) e (3.19) temos de (3.25) que

$$\begin{aligned} L(nH) &= \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 - n^2|\nabla H|^2 + S^2 - nH\sum_i\lambda_i^3 \\ &-2\sum_{i,j,k,l}(\lambda_i\lambda_k\bar{R}_{kiik} + \lambda_i^2\bar{R}_{ikik}) \\ &-(\sum_{i,j}nH\lambda_i\bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S\sum_k\bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim, do Lema 3.5, temos

$$\begin{aligned} L(nH) &\geq S^2 - nH\sum_i\lambda_i^3 - 2\sum_{i,j,k,l}(\lambda_i\lambda_k\bar{R}_{kiik} + \lambda_i^2\bar{R}_{ikik}) \\ &-(\sum_{i,j}nH\lambda_i\bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S\sum_k\bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Agora, defina $\Phi_{ij} = h_{ij} - H\delta_{ij}$. Consideraremos o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{ij}\omega_i\omega_j.$$

Seja $|\Phi|^2 = \sum_{i,j} \Phi_{ij}^2$ o quadrado da norma de Φ. É fácil verificar que Φ é livre de traço (isto é, $\mathrm{tr}\Phi = 0$) e

$$|\Phi|^2 = S - nH^2.$$

Se tomarmos um referencial (local) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $p \in M^n$, tal que

$$h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij} \text{ e } \Phi_{ij} = \mu_i\delta_{ij},$$

é simples verificar que

$$\sum_i \mu_i = 0, \sum_i \mu_i^2 = |\Phi|^2 \text{ e } \sum_i \mu_i^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3H|\Phi|^2 - nH^3.$$

Consequentemente, aplicando o Lema 3.4 aos números reais $\mu_1, \ldots, \mu_n$, temos

$$\begin{aligned} S^2 - nH\sum_i \lambda_i^3 &= (|\Phi|^2 + nH^2)^2 - n^2H^4 \\ &\quad -3nH^2|\Phi|^2 - nH\sum_i \lambda_i^3 \\ &\geq |\Phi|^4 - nH^2|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando as condições (3.1) e (3.2), obtemos

$$-(\sum_{i,j} nH\lambda_i\bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S\sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}) = c_1(S - nH^2) \tag{3.29}$$

e

$$\begin{aligned} -2\sum_{i,j,k,l}(\lambda_i\lambda_k\bar{R}_{kiik} + \lambda_i^2\bar{R}_{ikik}) &\geq c_2\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 \\ &= 2nc_2(S - nH^2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Assim, tomando $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$, de (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30) obtemos que

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(nc + S - 2nH^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| \right). \tag{3.31}$$

Por outro lado, com um simples cálculo verificamos que

$$\begin{aligned} S - 2nH^2 &= \frac{1}{2\sqrt{n-1}}\big((\sqrt{n-1}+1)|\Phi| - (\sqrt{n-1}-1)\sqrt{n}H\big)^2 \\ &\quad + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} S. \end{aligned}$$

Assim, como supomos que $S \leq 2\sqrt{n-1}\, c$, de (3.31) obtemos

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(nc - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} S \right) \geq 0. \tag{3.32}$$

Como o Lema 3.6 garante que L é elíptico e como estamos supondo que H atinge seu máximo em M^n, de (3.32) concluimos que H é constante em M^n. Donde, considerando a equação (3.26), obtemos $|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2|\nabla H|^2 = 0$, e segue-se que λ_i é constante para todo $i = 1, \ldots, n$. Além disso, de (3.32) temos

$$|\Phi|^2 \left(nc - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} S \right) = 0. \tag{3.33}$$

Se $S < 2\sqrt{n-1}\, c$, então $|\Phi|^2 = 0$ e M^n é totalmente umbílica. Se $S = 2\sqrt{n-1}\, c$, como todas as desigualdade que obtivemos são, na verdade, igualdades, verificamos facilmente que

$$|\Phi| = \frac{(\sqrt{n-1}-1)\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+1} H. \tag{3.34}$$

Logo, no caso que $n = 2$, de (3.34) obtemos que $|\Phi|^2 = 0$. Sendo assim, M^2 é totalmente umbílica. Finalmente, quando $n \geq 3$, como a igualdade vale em (3.20) do Lema 3.4, concluimos que M^n é totalmente umbílica ou, caso contrário, é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples. $\square$

***Demonstração do Teorema 3.2*:**

De (3.18) temos que

$$\Box f = -\mathrm{tr}(P_1 \circ \nabla^2 f),$$

onde, denotando por I a identidade na álgebra dos campos vetoriais suaves em M^n, $P_1 = nHI - h$ e $\nabla^2 f$ representa o operador linear auto-adjunto metricamente equivalente à hessiana de f. Assim, usando a notação $\langle\, , \rangle$ para a métrica (induzida) em M^n, temos

$$\Box f = -\sum_i \langle P_1(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em M^n. Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(P_1(\nabla f)) &= \sum_i \langle (\nabla_{e_i} P_1)(\nabla f), e_i \rangle + \sum_i \langle P_1(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \\ &= \langle \mathrm{div} P_1, \nabla f \rangle - \Box f. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Por outro lado, como $\mathcal{E}_1^{n+1}$ é um espaço-tempo de Einstein, existe um parâmetro λ tal que $\overline{\mathrm{Ric}} = \lambda\langle\, , \rangle$, onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\mathcal{E}_1^{n+1}$. Assim, denotando por $\overline{R}$ o tensor curvatura de $\mathcal{E}_1^{n+1}$, do Lema 2.16 temos

$$\langle \mathrm{div} P_1, \nabla f \rangle = \sum_i \langle \overline{R}(N, e_i)e_i, \nabla f \rangle = -\overline{\mathrm{Ric}}(N, \nabla f) = -\lambda \langle N, \nabla f \rangle = 0,$$

onde N representa a aplicação de Gauss de M^n. Assim, de (3.35), concluimos que

$$\Box f = -\mathrm{div}(P_1(\nabla f)). \tag{3.36}$$

Agora, consideramos novamente o operador modificado de Cheng-Yau

$$L = \Box + \frac{n-1}{2} a \Delta. \tag{3.37}$$

De (3.36), temos que

$$L(nH) = \mathrm{div}(P(\nabla H)), \tag{3.38}$$

onde $P = -nP_1 + \frac{n(n-1)}{2} aI$. Além disso, como S é suposta ser limitada, verificamos facilmente que o operador P é limitado. Dessa forma, como também assumimos que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, obtemos que

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M). \tag{3.39}$$

Agora observamos que, da simetria local de $\mathcal{E}_1^{n+1}$, podemos seguir os passos da *Demonstração do Teorema 3.1* para obter

$$\begin{aligned} L(nH) &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2|\nabla H|^2 + S^2 - nH\sum_i \lambda_i^3 \\ &\quad -2\sum_{i,k}(\lambda_i\lambda_k\bar{R}_{kiik} + \lambda_i^2\bar{R}_{ikik}) \\ &\quad -(\sum_i nH\lambda_i\bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S\sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}). \end{aligned} \tag{3.40}$$

e

$$L(nH) \geq |\Phi|^2\left(nc - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\right) \geq 0. \tag{3.41}$$

onde

$$\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij}\omega_i\omega_j,$$

com $\phi_{ij} = h_{ij} - H\delta_{ij}$.

Portando, tendo em conta as equações (3.38), (3.39) e (3.41), podemos aplicar o Lema 2.21 para cocluir que $L(nH) = 0$ e, da equação (3.40), temos

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2|\nabla H|^2.$$

Consequentemente, como assumimos que $(n-1)^2a^2 + 4\sum_{i,j}\bar{R}_{ijji} - 4n(n-1)b > 0$, do Lema 3.5 segue que H é constante e, assim, λ_i é constante para todo $i = 1, \ldots, n$. Além disso, de (3.41) temos

$$|\Phi|^2\left(nc - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\right) = 0. \tag{3.42}$$

Se $S < 2\sqrt{n-1}\,c$, então $|\Phi|^2 = 0$ e M^n é totalmente umbílica. Se $S = 2\sqrt{n-1}\,c$, como todas as desigualdades que obtivemos são, de fato, igualdades, verificamos facilmente que

$$|\Phi| = \frac{(\sqrt{n-1}-1)\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+1}H. \tag{3.43}$$

Assim, no caso que $n = 2$, de (3.43), obtemos que $|\Phi|^2 = 0$. Portanto, M^2 é totalmente umbílica.

Finalmente, quando $n \geq 3$, como a igualdade vale em (3.20) do Lema 3.4, concluimos que M^n é totalmente umbílica ou uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas e que uma delas é simples. $\square$

***Demonstração do Teorema 3.3*:**

De (3.38) e (3.41), aplicando o Teorema da Divergência, temos

$$0 = \int_M L(nH) \geq \int_M \left\{ |\Phi|^2 \left(nc - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} S \right) \right\} dM \geq 0. \tag{3.44}$$

Consequentemente, como estamos supondo que $S < 2\sqrt{n-1}\,c$, de (3.44) obtemos que $|\Phi| = 0$ em M^n e, assim, M^n é totalmente umbílica. $\square$

3.5 Aplicações no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Denotemos por $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowiski $(n+2)$-dimensional $(n \geq 2)$, ou seja, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^{n+2}$. Dessa forma, definimos o *espaço de De Sitter* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ $(n+1)$-dimensional como sendo a seguinte hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+2}$:

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\}.$$

A métrica induzida pela inclusão $i : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ torna $\mathbb{S}_1^{n+1}$ uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante igual a 1. Além disso, para cada $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, temos que o espaço tangente a $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em p é dado por

$$T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Observemos que $e_{n+2} = (0, ..., 0, 1)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitário e globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+2}$, determinando, assim, uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+2}$. Portanto, dada uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de De Sitter $\psi : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, podemos escolher um único campo normal unitário de vetores tipo-tempo N ao longo de M^n apontando para o passado em $\mathbb{L}^{n+2}$ (i.e., $\langle N, e_{n+2} \rangle > 0$); desta forma, podemos assumir que M^n é orientada por N. Neste contexto, denotaremos por ∇°, $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$, e M^n, respectivamente. Então, as fórmulas de Gauss e Weingarten relativas a imersão $\psi : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \nabla^\circ_V W &= \bar{\nabla}_v W - \langle V, W\rangle \psi \\ &= \nabla_V W - \langle AV, W\rangle N - \langle V, W\rangle \psi \end{aligned} \tag{3.45}$$

e

$$A(V) = -\nabla^\circ_V N = -\bar{\nabla}_V N, \tag{3.46}$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $V, W \in \mathcal{X}(M)$, onde A denota o operador de forma de M^n em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ associado a N.

Os exemplos a seguir nos dão uma descrição geométrica das hipersuperfícies do espaço de De Sitter que aparecerão nos resultados dados logo a seguir (veja, por exemplo, [30], [72] e [77]).

Exemplo 3.7. *Os exemplos canônicos de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílica do espaço de De Sitter são dados por*

$$M_\tau = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle x, a\rangle = \tau\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, $\langle a, a\rangle = 1, 0, -1$ *e* $\tau^2 > \langle a, a\rangle$. *Então, para* $x \in M_\tau$, *o campo de vetores normais tipo-tempo unitários de* M_τ, *único a menos de orientação, é dado por*

$$N_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \langle a, a\rangle}}(a - \tau x).$$

Consequentemente, a segunda forma fundamental de M_τ *é dada por*

$$B_\tau X = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \langle a, a\rangle}} X,$$

Para todo campo de vetores X *tangente a* M_τ. *Assim, pode ser verificado que:*

i. se a *é um vetor unitário tipo-espaço, então* M_τ *é isométrico a um espaço hiperbólico* n*-dimensional de curvatura seccional constante* $-\frac{1}{\tau^2-1}$ *e* H^2 *assume todos os valores possíveis em* $(1, \infty)$;

ii. se a *é um vetor tipo-luz não nulo, então* M_τ *é isométrico ao espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *e* $H^2 = 1$;

iii. *se a é um vetor unitário tipo-tempo, então M_τ é isométrico a uma esfera n-dimensional de curvatura seccional constante $\frac{1}{\tau^2+1}$ e H^2 assume todos os valores possíveis em $[0,1)$.*

Exemplo 3.8. *Considere a hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}(1)$ definida por*

$$T_{k,r} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}(1) | -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_k^2 = -\sinh^2 r\},$$

onde r é um número real positivo e $1 \leq k \leq n-1$. $T_{k,r}$ é completa e isométrica ao produto Riemanniano $\mathbb{H}^k(1-\coth^2 r) \times \mathbb{S}^{n-k}(1-\tanh^2 r)$ de um espaço hiperbólico k-dimensional e uma esfera $(n-k)$-dimensional de curvaturas seccionais constantes $1-\coth^2 r$ e $1-\tanh^2 r$, respectivamente. Para $x \in T_{k,r}$, o campo de vetores normais tipo-tempo unitários de $T_{k,r} \hookrightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}(1)$, único a menos de orientação, é dado por

$$N(x) = \tanh r x + (\sinh r \cosh r)^{-1}(x_0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Em particular, $\mathbb{H}^1(1-\coth^2 r) \times \mathbb{S}^{n-1}(1-\tanh^2 r)$ é chamado cilindro hiperbólico *e $\mathbb{H}^{n-1}(1-\coth^2 r) \times \mathbb{S}^1(1-\tanh^2 r)$ é conhecido como* cilindro esférico*. É possível verificar que $T_{k,r} \hookrightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}(1)$ possui duas curvaturas principais, que são iguais a $\coth r$ e $\tanh r$ com multiplicidades k e $n-k$, respectivamente. Além disso, é possível verificar também que $T_{k,r}$ possui curvatura média constante $H = \frac{1}{n}(k \coth r + (n-k)\tanh r)$ e curvatura escalar normalizada*

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \left(k(k-1)(1-\coth^2 r) + (n-k)(n-k-1)(1-\tanh^2 r) \right).$$

Mais ainda, se $k=1$, então R satisfaz $0 < R = \frac{n-2}{n}(1-\tanh^2 r) < \frac{n-2}{n}$; analogamente, se $k = n-1 \geq 2$, vemos que $R = \frac{n-2}{n}(1-\coth^2 r) < 0$. Assim, para qualquer R satisfazendo $0 < R < \frac{n-2}{n}$ e para qualquer $R < 0$, podemos escolher r tal que as hipersuperfícies $T_{1,r}$ e $T_{n-1,r}$, respectivamente, são completas, não totalmente umbílicas e possuem curvatura escalar normalizada constante R.

Do Teorema 3.1 e de acordo com o teorema clássico de congruência obtido por Abe, Koike e Yamaguchi (cf. Teorema 5.1 de [1]), obtemos o seguinte resultado no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Corolário 3.9. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, tal que $R = aH + b$ com $b < 1$. Se H atinge o máximo em M^n e $S \leq 2\sqrt{n-1}$, então M^n é totalmente umbílica ou, caso contrário, é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{S}^{n-1}(c_2)$, para $R > 0$, ou ao cilindro esférico $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{S}^1(c_2)$, para $R < 0$, onde $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ e $\dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} = 1$.*

Analogamente, do Teorema 3.2, obtemos o seguinte resultado, o qual corresponde ao Teorema 3.5 de [59].

Corolário 3.10. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten completa, não-compacta, imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 + 4n(1-b) > 0$. Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $S \leq 2\sqrt{n-1}$, então M^n é totalmente umbílica ou, caso contrário, é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{S}^{n-1}(c_2)$, para $R > 0$, ou ao cilindro esférico $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{S}^1(c_2)$, para $R < 0$, onde $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ e $\dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} = 1$.*

Observação 3.11. *Em [78], Montiel caracterizou os cilindros hiperbólicos como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas, não-compactas, em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante $H = \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$ e possuindo ao menos dois fins. Mais tarde, Brasil, Colares e Palmas [30] obtiveram uma espécie de extensão do resultado de Montiel, mostrando que os cilindros hiperbólicos são as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante, curvatura de Ricci não-negativa e tendo ao menos dois fins. Eles também caracterizaram todas as hipersuperfícies tipo-espaço completas de curvatura média constante com duas curvaturas principais distintas como hipersuperfícies de rotação ou cilindros hiperbólicos generalizados $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$, onde $1 < k < (n-1)$, $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$.*

Finalmente, de acordo com a descrição de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por Montiel no Exemplo 1 de [77], do Teorema 3.3, temos o seguinte resultado, o qual corresponde ao Teorema 3.6 de [59].

Corolário 3.12. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear compacta imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 + 4n(1-b) \geq 0$. Se $S < 2\sqrt{n-1}$, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^n$.*

Capítulo 4

Hipersuperfícies completas em produtos warped

Nesse capítulo, apresentamos os resultados referentes ao artigo [54]. Nosso objetivo é estudar a unicidade de hipersuperfícies completas imersas em um produto warped semi-Riemanniano cuja função warping possui logaritmo convexo e tal que sua fibra possui curvatura seccional constante. Usando como principal ferramenta analítica um princípio do máximo adequado para variedades Riemannianas completas, não-compactas e supondo uma desigualdade natural entre as r-ésimas curvaturas médias da hipersuperfície e a dos slices da região onde a hipersuperfície está contida, somos capazes de provar que tal hipersuperfície deve ser, de fato, um slice.

4.1 Produtos warped semi-Riemannianos

Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa orientada n-dimensional, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Na variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, π_I e π_M denotam as projeções nos fatores I e M, respectivamente. Uma classe particular de variedades semi-Riemannianas tendo campos conformes é a obtida tomando $\overline{M}$ com a métrica

$$\langle v, w\rangle_p = \epsilon\langle(\pi_I)_*v, (\pi_I)_*w\rangle + f(p)^2\langle(\pi_M)_*v, (\pi_M)_*w\rangle,$$

para todo $p \in \overline{M}$ e todo $v, w \in T_p\overline{M}$, onde $\epsilon = \epsilon_{\partial_t}$ e ∂_t é o campo de vetores unitário canônico tangente a I. Além disso, de (cf. [79] e [80]), o campo de vetores

$$V = (f \circ \pi_I)\partial_t$$

é conforme e fechado (no sentido que sua $1-$forma dual é fechada), com fator conforme $\phi = f' \circ \pi_I$, onde a linha denota diferenciação com respeito a $t \in I$. Tal espaço é um exemplo particular de um *produto warped* semi-Riemanniano, e, de agora em diante, escrevemos $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$ para denotá-lo.

Se $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ é uma imersão Riemanniana, com Σ^n orientada pelo campo de vetores unitário N, tem-se obviamente $\epsilon = \epsilon_{\partial_t} = \epsilon_N$.

Observação 4.1. *Para $t_0 \in \mathbb{R}$, orientamos o* slice $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ *usando o campo de vetores unitário normal ∂_t. De acordo com* [13], *$\Sigma^n_{t_0}$ tem r-ésima curvatura média $H_r = -\epsilon \left(\dfrac{f'(t_0)}{f(t_0)}\right)^r$ constante com respeito a ∂_t (veja também* [79] *e* [80]*).*

Agora, h denota a função altura (vertical) naturalmente associada a Σ^n, ou seja, $h = (\pi_I)|_\Sigma$. $\overline{\nabla}$ e ∇ denotam os gradientes com respeito às métricas de $\epsilon I \times_f M^n$ e Σ^n, respectivamente. Um cálculo simples mostra que o gradiente de π_I em $\epsilon I \times_f M^n$ é dado por

$$\overline{\nabla}\pi_I = \epsilon\langle\overline{\nabla}\pi_I, \partial_t\rangle = \epsilon\partial_t, \tag{4.1}$$

temos que o gradiente de h em Σ^n é

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = \epsilon\partial_t^\top = \epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \tag{4.2}$$

pois $\partial_t^\top = \partial_t - \epsilon\langle N, \partial_t\rangle N$.
Em particular, temos

$$|\nabla h|^2 = \epsilon\left(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2\right), \tag{4.3}$$

onde $|\ \ |$ denota a norma de um campo de vetores em Σ^n.

O seguinte lema é uma extensão do resultado obtido (no ambiente Lorentziano) por Alías e Colares no Lema 4.1 de [17]. Por questão de completeza, daremos uma demonstração que contempla ambos os ambientes (Riemanniano e Lorentziano)

Lema 4.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana. Se $h = (\pi_I)|_\Sigma : \Sigma^n \to I$ é a função altura de Σ^n, então*

$$L_r(h) = (\log f)'(\epsilon \mathrm{tr} P_r - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle) + \mathrm{tr}(AP_r)\langle N, \partial_t\rangle.$$

Demonstração. O campo de vetores

$$K(t,x) = f(t)(\partial/\partial t)_{(t,x)}, (t,x) \in \epsilon I \times_f M^n$$

determina um campo de vetores conforme fechado não nulo (apontando para o futuro no caso Lorentziano) em $\epsilon I \times_f M^n$. De fato,

$$\overline{\nabla}_Z K = f'(h) Z \tag{4.4}$$

para todo vetor Z tangente a $\epsilon I \times_f M^n$ em um ponto (t,x).
Agora seja $g : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva qualquer de f. Como $g' = f > 0$, então $g(h)$ pode ser vista como uma reparametrização da função altura. Em particular, o gradiente da função $g(h)$ em Σ é

$$\nabla g(h) = f(h) \nabla h = \epsilon f(h) \partial_t^\top = \epsilon K^\top \tag{4.5}$$

onde $K^\top$ denota a componente tangente de K ao longo da hipersuperfície, ou seja

$$K^\top = K - \epsilon \langle K, N \rangle N.$$

Da equação (4.4), temos

$$\overline{\nabla}_X K = f'(h) X \tag{4.6}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como,

$$\nabla_X K^\top = \left(\overline{\nabla}_X K^\top\right)^\top$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X K^\top &= \overline{\nabla}_X \left(K - \epsilon \langle \partial_t, N \rangle N\right) \\ &= \overline{\nabla}_X K - \epsilon X \langle K, N \rangle N - \epsilon \langle K, N \rangle \overline{\nabla}_X N \\ &= f'(h) X - \epsilon X \langle K, N \rangle N + \epsilon \langle K, N \rangle AX, \end{aligned}$$

temos

$$\nabla_X K^\top = f'(h) X + \epsilon \langle K, N \rangle AX = \left(f'(h) + \epsilon f(h) \langle \partial_t, N \rangle A\right) X. \tag{4.7}$$

Portanto, da equação (4.5), obtemos

$$\nabla_X \left(\nabla g(h)\right) = \epsilon \nabla_X K^\top = \left(\epsilon f'(h) + f(h) \langle \partial_t, N \rangle A\right) X. \tag{4.8}$$

Por outro lado, ainda da equação (4.5), temos

$$\nabla h = \frac{1}{f(h)} \nabla g(h),$$

que, juntamente com as equações (4.5), (4.8) e (4.2), nos dá

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla h) &= \tfrac{1}{f(h)}\nabla_X\nabla g(h) + X\left(\tfrac{1}{f(h)}\right)\nabla g(h)\\
&= \tfrac{1}{f(h)}\left(\epsilon f'(h)X + f(h)\left\langle \partial_t, N\right\rangle AX\right) - \tfrac{X(f(h))}{f^2(h)}\epsilon f(h)\partial_t^\top\\
&= \epsilon\tfrac{f'(h)}{f(h)}X + \left\langle \partial_t, N\right\rangle AX - \tfrac{X(f(h))}{f(h)}\epsilon\partial_t^\top\\
&= \epsilon\tfrac{f'(h)}{f(h)}X + \left\langle \partial_t, N\right\rangle AX - \tfrac{X(f(h))}{f(h)}\epsilon\partial_t^\top\\
&= \epsilon\tfrac{f'(h)}{f(h)}X + \left\langle \partial_t, N\right\rangle AX - \tfrac{f'(h)}{f(h)}\left\langle \nabla h, X\right\rangle \nabla h\\
&= (\log f)'(h)\left(\epsilon X - \left\langle \nabla h, X\right\rangle \nabla h\right) + \left\langle \partial_t, N\right\rangle AX
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
L_r(h) &= \mathrm{tr}\left(P_r \circ \nabla^2 h\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\nabla^2 h \circ P_r\right)\\
&= (\log f)'(h)\left(\epsilon \mathrm{tr} P_r - \textstyle\sum_{i=1}^n \left\langle \left\langle \nabla h, P_r E_i\right\rangle \nabla h, E_i\right\rangle\right) + \left\langle \partial_t, N\right\rangle \mathrm{tr}\left(AP_r\right)\\
&= (\log f)'(h)\left(\epsilon \mathrm{tr} P_r - \left\langle P_r\nabla h, \nabla h\right\rangle\right) + \mathrm{tr}\left(AP_r\right)\left\langle N, \partial_t\right\rangle
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

□

Observação 4.3. *Em* [34]*, H.F. de Lima juntamente com F. Camargo e A. Caminha apresentaram uma demonstração alternativa do lema anterior.*

Das equações (6.2) e (6.16) de [17], temos o seguinte

Lema 4.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana no produto warped semi-Riemanniano $\epsilon I \times_f M^n$. Se $h = (\pi_I)|_\Sigma : \Sigma^n \to I$ é a função altura de Σ^n, então*

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla h\rangle = -\epsilon\left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + \epsilon(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right)\langle N, \partial_t\rangle,$$

onde Ric_M *denota a curvatura de Ricci da fibra M^n e $N^* = N - \epsilon\langle N, \partial_t\rangle\partial_t$ é a projeção do campo de vetores unitário normal N de Σ^n sobre M^n. Além disso, se a fibra M^n possui curvatura seccional κ constante, então*

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla h\rangle = -\epsilon(n-r)\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} + \epsilon(\log f)''(h)\right)\langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle.$$

Demonstração. Da equação (2.15) do Lema 2.16 temos:

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla h\rangle = -\epsilon \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)e_i, \nabla h\right\rangle = \epsilon \overline{\mathrm{Ric}}(N, \nabla h)$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\epsilon I \times_f M^n$. Um cálculo direto usando a terceira relação dada entre as curvatuvas de Ricci no Colorário 43 do Capítulo 7 do livro do O'Neill [85], nos dá:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}(U,V) = \;& \mathrm{Ric}_M(U^*, V^*) + \\ & -\epsilon\left[n((\log f)')^2 + (\log f)''\right]\langle U, V\rangle + \\ & +\epsilon(n-1)(\log f)''\langle U, \partial_t\rangle \langle V, \partial_t\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

para campos vetoriais arbitrários U e V em $\epsilon I \times_f M^n$, onde, por simplicidade, escrevemos $\log f = \log f(\pi_I)$, $(\log f)' = (\log f)'(\pi_I)$ e $(\log f)'' = (\log f)''(\pi_I)$. Observe que da equação (4.2), temos $\nabla h = \epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N$, donde $(\nabla h)^* = -\langle N, \partial_t\rangle N^*$. Em particular segue de (4.9) que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla H\rangle &= \epsilon \overline{\mathrm{Ric}}(N, \nabla h) \\ &= -\epsilon\left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + \epsilon(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right)\langle N, \partial_t\rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle \nabla h, N\rangle = 0$ e $\langle \nabla h, \partial_t\rangle = \langle \epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \partial_t\rangle = 1 - \langle N, \partial_t\rangle^2 = \epsilon|\nabla h|^2$ (veja a equação (4.3))

Agora vamos demonstrar a segunda equação do Lema. Ainda da equação (2.15) do Lema 2.16 temos:

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla h\rangle = \sum_{j=1}^{r}(-\epsilon)^j \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}e_i)e_i, A^{j-1}\nabla h\right\rangle. \tag{4.10}$$

Um cálculo direto usando a relação (5) da Proposição 42 do Capítulo 7 do livro do O'Neill [85], nos dá:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}(U,V), W = \;& \mathrm{Ric}_M(U^*, V^*)W^* + \\ & -\epsilon\left[((\log f)')^2(\langle U, W\rangle V - \langle V, W\rangle U)\right] + \\ & -\epsilon(\log f)''\langle W, \partial_t\rangle(\langle V, \partial_t\rangle U - \langle U, \partial_t\rangle V) + \\ & +\epsilon(\log f)''(\langle V, \partial_t\rangle\langle U, W\rangle - \langle U, \partial_t\rangle\langle V, W\rangle)\partial_t, \end{aligned} \tag{4.11}$$

para campos vetoriais arbitrários U, V e W em $\epsilon I \times_f M^n$. Em princípio, não assumimos que a curvatura seccional de M^n é constante. Em particular, (4.11) implica em

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(e_i, X), N &= \mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^* + \\
&-\epsilon(\log f)'' \langle N, \partial_t\rangle \left(\langle X, \partial_t\rangle e_i - \langle e_i, \partial_t\rangle X\right) \\
&= \mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^* + \\
&-\epsilon(\log f)'' \langle N, \partial_t\rangle \left(\epsilon \langle X, \nabla h\rangle e_i - \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle X\right) \\
&= \mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^* + \\
&-(\log f)'' \langle N, \partial_t\rangle \left(\langle X, \nabla h\rangle e_i - \langle e_i, \nabla h\rangle X\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

para cada campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Das decomposições $N = N^* + \epsilon \langle N, \partial_t\rangle \partial_t$, $e_i = e_i^* + \epsilon \langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t$ e $X = X^* + \epsilon \langle X, \partial_t\rangle \partial_t$, temos que

$$\begin{aligned}
(N^*)^\top &= N^* - \tfrac{\langle N^*, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N \\
&= N^* - \epsilon \langle N - \epsilon \langle N, \partial_t\rangle \partial_t, N\rangle N \\
&= N^* - N + \langle N, \partial_t\rangle^2 N \\
&= -\epsilon \langle N, \partial_t\rangle \partial_t + \langle N, \partial_t\rangle^2 N \\
&= -\langle N, \partial_t\rangle \left(\epsilon \partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N\right) \\
&= -\langle N, \partial_t\rangle \nabla h,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
(e_i^*)^\top &= e_i^* - \epsilon \langle e_i^*, N\rangle N \\
&= e_i^* - \epsilon \langle e_i - \epsilon \langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t, N\rangle N \\
&= e_i^* + \langle e_i, \partial_t\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= e_i^* + \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= e_i - \epsilon \langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t + \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= e_i - \langle e_i, \nabla h\rangle \partial_t + \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= e_i - \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle \left[\epsilon \partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N\right] \\
&= e_i - \epsilon \langle e_i, \nabla h\rangle \nabla h,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)^\top &= X^* - \epsilon \langle X^*, N\rangle N \\
&= X - \epsilon \langle X, \partial_t\rangle \partial_t - \epsilon \langle X - \epsilon \langle X, \partial_t\rangle \partial_t, N\rangle N \\
&= X - \epsilon \langle X, \partial_t\rangle \partial_t + \langle X, \partial_t\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= X - \langle X, \nabla h\rangle \partial_t + \epsilon \langle X, \nabla h\rangle \langle \partial_t, N\rangle N \\
&= X - \epsilon \langle X, \nabla h\rangle \left[\epsilon \partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N\right] \\
&= X - \epsilon \langle X, \nabla h\rangle \nabla h,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle N^*, N^*\rangle_M &= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\langle N, N\rangle - \epsilon\,\langle(\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(N)\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\epsilon - \epsilon\,\langle\epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\partial_t, \epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\epsilon - \epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle^2\,\langle\partial_t,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\epsilon - \epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle^2\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\epsilon\left(1 - \langle N,\partial_t\rangle^2\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\,|\nabla h|^2,
\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\langle N^*, e_i^*\rangle_M &= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\langle N, e_i\rangle - \epsilon\,\langle(\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(e_i)\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\epsilon\,\langle\epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\partial_t, \epsilon\,\langle e_i,\partial_t\rangle\,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle e_i,\partial_t\rangle\,\langle\partial_t,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle e_i,\nabla h\rangle\right)\\
&= -\tfrac{1}{f^2(h)}\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle e_i,\nabla h\rangle,
\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\langle N^*, X^*\rangle_M &= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(\langle N, X\rangle - \epsilon\,\langle(\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(X)\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\epsilon\,\langle\epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\partial_t, \epsilon\,\langle X,\partial_t\rangle\,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\epsilon\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle X,\partial_t\rangle\,\langle\partial_t,\partial_t\rangle_I\right)\\
&= \tfrac{1}{f^2(h)}\left(-\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle X,\nabla h\rangle\right)\\
&= -\tfrac{1}{f^2(h)}\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle X,\nabla h\rangle.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Observamos que as equações ((4.13)-(4.18)) valem mesmo quando M^n não possui curvatura seccional constante.

Se M^n possui curvatura seccional constante κ, então também temos que

$$(\mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^*)^\top = \kappa(\langle e_i^*, N^*\rangle_M\,(X^*)^\top - \langle X^*, N^*\rangle_M\,(e_i^*)^\top)$$

Então, usando as equações (4.14), (4.15), (4.17) e (4.18) obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^*)^\top &= \kappa\Big[-\tfrac{1}{f^2(h)}\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle e_i,\nabla h\rangle\,(X - \epsilon\,\langle X,\nabla h\rangle\,\nabla h)+\\
&\quad +\tfrac{1}{f^2(h)}\,\langle N,\partial_t\rangle\,\langle X,\nabla h\rangle\,(e_i - \epsilon\,\langle e_i,\nabla h\rangle\,\nabla h)\Big]\\
&= \tfrac{\kappa}{f^2(h)}\,\langle N,\partial_t\rangle\,[\langle X,\nabla h\rangle\,e_i - \langle e_i,\nabla h\rangle\,X],
\end{aligned}$$

que, juntamente com a equação (4.12), nos dá

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(e_i, X), N &= (\mathrm{Ric}_M(e_i^*, X^*)N^*)^\top +\\
&\quad -(\log f)''(h)\,\langle N,\partial_t\rangle\,(\langle X,\nabla h\rangle\,e_i - \langle e_i,\nabla h\rangle\,X)\\
&= \left(\tfrac{\kappa}{f^2(h))} - (\log f)''(h)\right)\langle N,\partial_t\rangle\,(\langle X,\nabla h\rangle\,e_i - \langle e_i,\nabla h\rangle\,X)
\end{aligned}$$

Assim, para cada $j = 1, ..., k$ fixo, encontramos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}e_i)e_i, X \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(e_i, X)N, P_{r-j}e_i \right\rangle = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\langle (\overline{R}(e_i, X)N)^{\top}, P_{r-j}e_i \right\rangle = \\
&= \left(\tfrac{\kappa}{f^2(h))} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \textstyle\sum_{i=1}^{n} (\langle X, \nabla h \rangle \langle e_i, P_{r-j}e_i \rangle + \\
&- \langle e_i, \nabla h \rangle \langle X, P_{r-j}e_i \rangle) = \\
&= \left(\tfrac{\kappa}{f^2(h))} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle (\mathrm{tr}(P_{r-j}) \langle X, \nabla h \rangle + \\
&- \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle \langle P_{r-j}X, e_i \rangle e_i, \nabla h \rangle) \\
&= \left(\tfrac{\kappa}{f^2(h))} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle (\mathrm{tr}(P_{r-j}) \langle X, \nabla h \rangle - \langle P_{r-j}X, \nabla h \rangle)
\end{aligned}$$

para cada campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando essa expressão na equação (4.10) temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{div}_{\Sigma} P_r, \nabla h \rangle \ &= \left(\tfrac{\kappa}{f^2(h))} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \times \\
&\times \textstyle\sum_{j=1}^{r} (-\epsilon)^j \left(\mathrm{tr}(P_{r-j}) \langle A^{j-1} \nabla h, \nabla h \rangle + \right. \\
&\left. - \langle P_{r-j} A^{j-1} \nabla h, \nabla h \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{r} (-\epsilon)^j \left(\mathrm{tr}(P_{r-j}) A^{j-1} - P_{r-j} A^{j-1} \right) = \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{r} (-\epsilon)^{r-j+1} \left(\mathrm{tr}(P_{j-1}) A^{r-j} - P_{j-1} A^{r-j} \right),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

para cada $1 \leq r \leq n$. Agora afirmamos que

$$\sum_{j=1}^{r} (-\epsilon)^{r-j+1} \left(\mathrm{tr}(P_{j-1}) A^{r-j} - P_{j-1} A^{r-j} \right) = -\epsilon(n-r)P_{r-1}, \tag{4.21}$$

para cada $2 \leq r \leq n$.

Provemos (4.21) por indução em r. Quando $r = 2$, pelo Lema 2.15, temos que $\mathrm{tr}P_r = b_r H_r$, e (4.21) se reduz a

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(P_0)A - P_0 A - \epsilon \mathrm{tr}(P_1)A^0 + \epsilon P_1 A^0 \ &= nA - A - \epsilon b_1 H_1 I + \epsilon P_1 \\
&= (n-1)A - \epsilon n(n-1) H_1 I + \epsilon P_1 \\
&= -\epsilon(n-1)(nH_1 - \epsilon A)I + \epsilon P_1 \\
&= -\epsilon(n-1)P_1 + \epsilon P_1 \\
&= -\epsilon(n-2)P_1.
\end{aligned}$$

Supondo, agora, que (4.21) vale para $r-1 \geq 1$, vamos mostrar que vale para r. De fato, usando que $\mathrm{tr}P_r = b_r H_r = \epsilon^r (n-r) S_r$, temos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{r}(-\epsilon)^{r-j+1}\left(\mathrm{tr}(P_{j-1})A^{r-j} - P_{j-1}A^{r-j}\right) = \\
&= -\epsilon \textstyle\sum_{j=1}^{r-1}(-\epsilon)^{r-j}\left(\mathrm{tr}(P_{j-1})A^{r-1-j} - P_{j-1}A^{r-1-j}\right)A + \\
&-\epsilon\mathrm{tr}(P_{r-1})A^0 + \epsilon P_{r-1}A^0 = \\
&= (-\epsilon)^2(n-r+1)P_{r-2}A - \epsilon\mathrm{tr}(P_{r-1})A^0 + \epsilon P_{r-1}A^0 = \\
&= (n-r+1)P_{r-2}A - \epsilon\mathrm{tr}(P_{r-1}) + \epsilon P_{r-1} = \\
&= (n-r+1)P_{r-2}A - \epsilon b_{r-1}H_{r-1} + \epsilon P_{r-1} = \\
&= -\epsilon\left[-\epsilon(n-r+1)P_{r-2}A + \epsilon^{r-1}(n-r+1)S_{r-1}\right] + \epsilon P_{r-1} = \\
&= -\epsilon(n-r+1)\left[\epsilon^{r-1}S_{r-1} - \epsilon A P_{r-2}\right] + \epsilon P_{r-1} = \\
&= -\epsilon(n-r+1)P_{r-1} + \epsilon P_{r-1} = \\
&= -\epsilon(n-r)P_{r-1}
\end{aligned}$$

como afirmado.

Finalmente, usando (4.21) em (4.19)(levando em consideração a igualdade (4.20)), concluimos que

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla h\rangle = -\epsilon(n-r)\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} + \epsilon(\log f)''(h)\right)\langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Precisaremos também de uma condição suficiente para garantir a existência de um ponto elíptico na imersão Riemanniana. No que segue, citamos a versão semi-Riemanniana do Lema 5.4 de [7] devido a L.J. Alías, A. Brasil Jr e A.G. Colares.

Lema 4.5. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$ um produto warped semi-Riemanniano e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão Riemanniana. Se $-\epsilon f(h)$ atinge um mínimo local em algum $p \in \Sigma^n$, tal que $f'(h(p)) \neq 0$, então p é um ponto elíptico de Σ^n.*

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$ o ponto no qual $-\epsilon f(h)$ atinge um mínimo local e $f'(h(p)) \neq 0$.

Seja

$$K(t,x) = f(t)(\partial/\partial t)_{(t,x)}, (t,x) \in \epsilon I \times_f M^n$$

o campo de vetores dado na demonstração do Lema 4.2. Assim, a função $u = -\langle K, K\rangle|_\Sigma = -f^2(h)\langle \partial_t, \partial_t\rangle|_\Sigma = -\epsilon f^2(h)$ atinge um mínimo em p (visto que, f é positiva e $-\epsilon f(h)$ atinge um mínimo em p). Portanto,

$$\nabla u(p) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u_p(v, v) \geq 0$$

para todo $v \in T_p\Sigma$. Da equação (4.6), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\langle \nabla u, X\rangle = \overline{\nabla}_X u = \overline{\nabla}_X\left[-\langle K, K\rangle|_\Sigma\right] = -2f'(h)\left\langle X, K^\top\right\rangle$$

donde,

$$\nabla u = -2f'(h)K^\top \tag{4.22}$$

e, como $f'(h(p)) \neq 0$, temos

$$K^\top(p) = 0 \tag{4.23}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(X, X) &= \langle \nabla_X(\nabla u), X\rangle = \left\langle \nabla_X(-2f'(h)K^\top), X\right\rangle \\ &= -2X(f'(h))\left\langle K^\top, X\right\rangle - 2f'(h)\left\langle \nabla_X K^\top, X\right\rangle \end{aligned} \tag{4.24}$$

Agora , da equação (4.7), temos

$$\left\langle \nabla_X K^\top, X\right\rangle = f'(h)\langle X, X\rangle + \epsilon\langle K, N\rangle\langle AX, X\rangle \tag{4.25}$$

Por outro lado,

$$K^\top = K - \epsilon\langle K, N\rangle N$$

donde,

$$\begin{aligned} \left\langle K^\top, K^\top\right\rangle &= \langle K, K\rangle - 2\epsilon\langle K, N\rangle^2 + \langle K, N\rangle^2\langle N, N\rangle \\ &= \langle K, K\rangle - 2\epsilon\langle K, N\rangle^2 + \epsilon\langle K, N\rangle^2 \\ &= \langle K, K\rangle - \epsilon\langle K, N\rangle^2 \end{aligned}$$

e, sendo $K^\top(p) = 0$, temos

$$\langle K, N\rangle^2(p) = \epsilon\langle K, K\rangle(p)$$

Ou seja,

$$\langle K, N\rangle(p) = \epsilon\sqrt{-\epsilon u(p)}$$

a qual, juntamente com a equação (4.25), nos dá

$$\left\langle \nabla_X K^\top, X\right\rangle(p) = f'(h(p))\langle X, X\rangle(p) + \sqrt{-\epsilon u(p)}\langle AX, X\rangle(p)$$

Usando isto, juntamente com $K^\top(p) = 0$, da equação (4.24), obtemos

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u_p(v,v) = -\left[f'(h(p))\right]^2 |v|^2 - f'(h(p))\sqrt{-\epsilon u(p)}\,\langle A_p v, v\rangle \geq 0 \qquad (4.26)$$

para todo $v \in T_p\Sigma$.
Dessa forma, escolhendo uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de direções principais em p, temos dois casos:
Se $f'(h(p)) > 0$, da equação (4.26), temos

$$\kappa_i(p) = \frac{\langle A_p e_i, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} \leq \frac{-f'(h(p))}{\sqrt{-\epsilon u(p)}} < 0 \quad i = 1, ..., n.$$

E se $f'(h(p)) < 0$, da equação (4.26), temos

$$\kappa_i(p) = \frac{\langle A_p e_i, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} \geq \frac{-f'(h(p))}{\sqrt{-\epsilon u(p)}} > 0 \qquad i = 1, ..., n.$$

Em ambos os casos, temos que p é um ponto elíptico de Σ.

$\square$

4.2 Resultados de rigidez em produtos warped

De acordo com a terminologia estabelecida em [11], dizemos que uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ é *limitada no infinito futuro* de $\epsilon I \times_f M^n$ se existe $\bar{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t,x) \in \epsilon I \times_f M^n; t \leq \bar{t}\}.$$

Analogamente, dizemos que Σ^n é *limitada no infinito passado* de $\epsilon I \times_f M^n$ se existe $\underline{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t,x) \in \epsilon I \times_f M^n; t \geq \underline{t}\}.$$

Finalmente, Σ^n é dita ser *limitada no infinito* de $\epsilon I \times_f M^n$ se ela é limitada no infinito futuro e no infinito passado de $\epsilon I \times_f M^n$. Em outras palavras, Σ^n é limitada no infinito se existem $\underline{t} < \bar{t}$ tais que $\psi(\Sigma)$ está contida na região determinada pelos slices $\{\underline{t}\} \times M^n$ e $\{\bar{t}\} \times M^n$.

No que segue, assumiremos que as hipersuperfícies são limitadas no infinito do espaço ambiente. $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ denotará o espaço de funções integráveis a Lebesgue na hipersuperfície Σ^n.

Além disso, motivado pela Observação 4.1, quando $\epsilon = -1$, assumiremos que a orientação N da hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ é a que sua função ângulo satisfaz

$$\langle N, \partial_t \rangle \leq -1.$$

Teorema 4.6. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um produto warped Lorentziano tal que $\log f$ é uma função convexa e cuja fibra M^n possui curvatura seccional constante κ satisfazendo*

$$\kappa \leq \inf_I (ff'' - f'^2). \tag{4.27}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{f'}{f}(h) > 0. \tag{4.28}$$

Se $f(h)$ possui um mínimo local e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ em Σ^n, então Σ^n é um slice.

Demonstração. Inicialmente, observamos da equação (2.18) que

$$L_r f(h) = f''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle + f'(h) L_r h.$$

Assim, juntamente com os Lemas 2.15 e 4.2, obtemos

$$\begin{aligned} L_r f(h) &= \left(\frac{f''f - f'^2}{f}(h)\right)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \\ &\quad - b_r f'(h) H_r \left(\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_{r+1}}{H_r}\langle N, \partial_t\rangle\right), \end{aligned} \tag{4.29}$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r}$. Além disso, do Lema 4.4, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla f(h)\rangle &= f'(h)\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla h\rangle \\ &= f'(h)(n-r)\left(\frac{\kappa - (ff'' - f'^2)(h)}{f^2(h)}\right)\times \\ &\quad \times \langle N, \partial_t\rangle\langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Por outro lado, como $f'(h)$ não se anula e H_{r+1} é positiva em Σ^n, usando os Lemas 2.18 e 4.5, garantimos que P_r e P_{r-1} são definidos positivos. Sendo assim, como supomos que $\log f$ é convexa, de (4.28) e (4.29), temos

$$L_r f(h) \geq 0$$

e, de (4.27), (4.28) e (4.30),

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla f(h) \rangle \geq 0.$$

Consequentemente, da equação (2.19), temos que

$$\mathrm{div}_\Sigma (P_r(\nabla f(h))) \geq 0. \tag{4.31}$$

Além disso, se A é a segunda forma fundamental de Σ^n, então seus autovalores são funções contínuas em Σ^n. Como H é limitada e H_2 é positiva em Σ^n, de (2.9) temos que $|A|$ é limitada em Σ^n. Portanto, segue-se da equação (2.12) que $|P_r|$ é limitado em Σ^n. Dessa forma, concluimos que existe uma constante $C > 0$ tal que $|P_r| \leq C$ em Σ^n. Consequentemente,

$$|P_r(\nabla f(h))| \leq |P_r||f'(h)||\nabla h| \leq C|f'(h)||\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma), \tag{4.32}$$

pois Σ é limitada no infinito, donde,

$$|f'(h)| = \max_{p \in \Sigma} |f'(h(p))| = \max_{[t_1, t_2]} f'(t) < +\infty.$$

Logo, de acordo com (4.31) e (4.32), estamos em posição de aplicar o Lema 2.21 ao campo de vetores $X = P_r(\nabla f(h))$ para concluir que

$$\mathrm{div}_\Sigma (P_r(\nabla f(h))) = 0$$

em Σ^n. Ou seja, $L_r f(h) = 0$ e $\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla f(h) \rangle = 0$.

Agora, suponha, por contradição, que existe $p \in \Sigma^n$ tal que $|\nabla h|(p) > 0$. Como P_r é definida positiva, voltando a equação (4.29), temos

$$f'' f - f'^2 = 0$$

em um subconjunto aberto de I, i. e., $(\log f)'' = 0$, donde, $f(t) = \alpha e^{\beta t}$ para algumas constantes não nulas α e β. Sendo assim, voltando novamente a (4.29) juntamente com a hipótese (4.28), temos

$$-\beta = \frac{H_{r+1}}{H_r} \langle N, \partial_t \rangle \leq -\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq -\beta,$$

donde, $\langle N, \partial_t\rangle \equiv -1$ e $\frac{H_{r+1}}{H_r} \equiv \beta$. Então, segue-se de (4.3) e de Σ^n ser conexa que ela é um slice de $-I \times_{\alpha e^{\beta t}} M^n$, e chegamos a uma contradição. Portanto, $|\nabla h| \equiv 0$, i.e., Σ^n é um slice de $-I \times_f M^n$. $\square$

Da demonstração do Teorema 4.6 obtemos o seguinte resultado

Corolário 4.7. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um produto warped Lorentziano tal que* $\log f$ *é convexa e cuja fibra* M^n *tem curvatura de Ricci satisfazendo*

$$\mathrm{Ric}_M \leq (n-1)\inf_I (ff'' - f'^2)\langle , \rangle_M. \tag{4.33}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de* $\overline{M}^{n+1}$. *Suponha que a curvatura média* H *é limitada e que* H_2 *é positiva e satisfaz*

$$\frac{H_2}{H} \geq \frac{f'}{f}(h) > 0. \tag{4.34}$$

Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, *então* Σ^n *é um slice.*

Demonstração. Sendo H_2 positiva, do Lema 2.17, temos que P_1 é definido positivo. Por outro lado, da equação (2.18) temos que

$$L_1 f(h) = f''(h)\langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle + f'(h)L_1 h.$$

Assim, juntamente com os Lemas 2.15 e 4.2, obtemos

$$\begin{aligned} L_1 f(h) &= \left(\frac{f''f - f'^2}{f}(h)\right)\langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle \\ &\quad -n(n-1)f'(h)H\left(\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_2}{H}\langle N, \partial_t\rangle\right). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Além disso, do Lema 4.4, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle &= f'(h)\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla h\rangle \\ &= f'(h)\left[\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*)\right. \\ &\quad \left. -(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right]\langle N, \partial_t\rangle. \end{aligned}$$

Usando (4.16), temos

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) = \frac{1}{f^2(h)}\mathrm{Ric}_M(\nabla h, \nabla h),$$

donde,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle &= \frac{f'}{f^2}(h)\left(\mathrm{Ric}_M(\nabla h, \nabla h)\right.\\ &\left.-(n-1)(ff''-f'^2)(h)|\nabla h|^2\right)\langle N, \partial_t\rangle.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Por outro lado, como P_1 é definido positivo e $\log f$ é convexa, de (4.34) e (4.35), temos

$$L_1 f(h) \geq 0$$

e, de (4.33), (4.34) e (4.36),

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle \geq 0.$$

Consequentemente, da equação (2.19), temos que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_1(\nabla f(h))) \geq 0. \tag{4.37}$$

Além disso, se A é a segunda forma fundamental de Σ^n, então seus autovalores são funções contínuas em Σ^n. Como H é limitada e H_2 é positiva em Σ^n, de (2.9) temos que $|A|$ é limitada em Σ^n. Portanto, segue-se da equação (2.12) que $|P_1|$ é limitado em Σ^n. Dessa forma, concluimos que existe uma constante $C > 0$ tal que $|P_1| \leq C$ em Σ^n. Consequentemente,

$$|P_1(\nabla f(h))| \leq |P_1||f'(h)||\nabla h| \leq C|f'(h)||\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma), \tag{4.38}$$

pois Σ é limitada no infinito, donde,

$$|f'(h)| = \max_{p\in\Sigma}|f'(h(p))| = \max_{[t_1,t_2]} f'(t) < +\infty$$

Logo, de acordo com (4.37) e (4.38), estamos em posição de aplicar o Lema 2.21 ao campo de vetores $X = P_1(\nabla f(h))$ para concluir que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_1(\nabla f(h))) = 0$$

em Σ^n. Ou seja, $L_1 f(h) = 0$ e $\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle = 0$.

Sendo assim, aplicando um argumento análogo a última parte da demonstração do Teorema 4.6, concluimos que Σ^n é um slice de $I \times_f M^n$.

□

No que segue, considerando a observação 4.1 mais uma vez, quando $\epsilon = 1$, assumiremos que a orientação N da hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to I \times_f M^n$ é a que sua função ângulo satisfaz

$$-1 \leq \langle N, \partial_t \rangle \leq 0.$$

Teorema 4.8. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Riemanniano tal que $\log f$ é uma função convexa e cuja fibra M^n possui curvatura seccional constante κ satisfazendo*

$$\kappa \geq \sup_I (f'^2 - ff''). \tag{4.39}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq \frac{f'}{f}(h). \tag{4.40}$$

se a função ângulo $\langle N, \partial_t \rangle$ não muda de sinal, $f(h)$ possui um máximo local e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice.

Demonstração. Da hipótese (4.40), temos que

$$\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_{r+1}}{H_r}\langle N, \partial_t \rangle \geq 0.$$

Por outro lado, usando os Lemas 4.5 e 2.18, garantimos que P_r e P_{r-1} são definidos positivos. Consequentemente, como $\log f$ é convexa, do Lema 4.2 e da equação (2.18) obtemos que

$$\begin{aligned} L_r f(h) &= \left(\frac{f''f - f'^2}{f}(h) \right) \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle + \\ &\quad + b_r f'(h) H_r \left(\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_{r+1}}{H_r}\langle N, \partial_t \rangle \right) \geq 0, \end{aligned}$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r}$.

Além disso, de acordo com a condição de convergência (4.39), do Lema 4.4 temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla f(h) \rangle &= f'(h) \langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla h \rangle \\ &= -(n-r) f'(h) \left(\tfrac{\kappa - (f'^2 - ff'')(h)}{f^2(h)} \right) \langle N, \partial_t \rangle \langle P_{r-1} \nabla h, \nabla h \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, da equação (2.19), temos

$$\operatorname{div}_\Sigma(P_r(\nabla f(h))) \geq 0.$$

Sendo assim, aplicando um argumento análogo a última parte da demonstração do Teorema 4.6, concluimos que Σ^n é um slice de $I \times_f M^n$. $\square$

Finalmente, da demonstração do Teorema 4.8 obtemos o seguinte

Corolário 4.9. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Riemanniano que $\log f$ é convexo e cuja fibra M^n tem curvatura de Ricci satisfazendo*

$$\operatorname{Ric}_M \geq (n-1)\sup_I(f'^2 - ff'')\langle,\rangle_M. \tag{4.41}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, completa, não-compacta, limitada no infinito de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que H_2 é positiva e satisfaz

$$\frac{H_2}{H} \leq \frac{f'}{f}(h). \tag{4.42}$$

Se a função ângulo $\langle N, \partial_t\rangle$ não muda de sinal e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice.

Demonstração. Sendo H_2 positiva, do Lema 2.17, temos que P_1 é definido positivo. Da hipótese (4.42), temos que

$$\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_2}{H}\langle N, \partial_t\rangle \geq 0.$$

Por outro lado, da equação (2.18) temos que

$$L_1 f(h) = f''(h)\langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle + f'(h)L_1 h.$$

Assim, juntamente com os Lemas 2.15 e 4.2, obtemos

$$\begin{aligned} L_1 f(h) &= \left(\frac{f''f - f'^2}{f}(h)\right)\langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle \\ &\quad + n(n-1)f'(h)H\left(\frac{f'}{f}(h) + \frac{H_2}{H}\langle N, \partial_t\rangle\right). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Além disso, do Lema 4.4, temos que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle &= f'(h)\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla h\rangle \\ &= -f'(h)\left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*)\right. \\ &\quad \left.+(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right)\langle N, \partial_t\rangle.\end{aligned}$$

Usando (4.16), temos

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) = \frac{1}{f^2(h)}\mathrm{Ric}_M(\nabla h, \nabla h),$$

donde,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle &= -\frac{f'}{f^2}(h)\left(\mathrm{Ric}_M(\nabla h, \nabla h)\right. \\ &\quad \left.-(n-1)(ff'' - f'^2)(h)|\nabla h|^2\right)\langle N, \partial_t\rangle.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Por outro lado, como P_1 é definido positivo e $\log f$ é convexa, de (4.42) e (4.43), temos

$$L_1 f(h) \geq 0$$

e, de (4.41), (4.42) e (4.44),

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle \geq 0.$$

Consequentemente, da equação (2.19), temos que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_1(\nabla f(h))) \geq 0. \tag{4.45}$$

Além disso, se A é a segunda forma fundamental de Σ^n, então seus autovalores são funções contínuas em Σ^n. Como H é limitada e H_2 é positiva em Σ^n, de (2.9) temos que $|A|$ é limitada em Σ^n. Portanto, segue-se da equação (2.12) que $|P_1|$ é limitado em Σ^n. Dessa forma, concluimos que existe uma constante $C > 0$ tal que $|P_1| \leq C$ em Σ^n. Consequentemente,

$$|P_1(\nabla f(h))| \leq |P_1||f'(h)||\nabla h| \leq C|f'(h)||\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma), \tag{4.46}$$

pois Σ é limitada no infinito, donde,

$$|f'(h)| = \max_{p\in\Sigma}|f'(h(p))| = \max_{[t_1,t_2]} f'(t) < +\infty$$

Logo, de acordo com (4.45) e (4.46), estamos em posição de aplicar o Lema 2.21 ao campo de vetores $X = P_1(\nabla f(h))$ para concluir que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_1(\nabla f(h))) = 0$$

em Σ^n. Ou seja, $L_1 f(h) = 0$ e $\langle \mathrm{div}_\Sigma P_1, \nabla f(h)\rangle = 0$.

Sendo assim, aplicando um argumento análogo a última parte da demonstração do Teorema 4.6, concluimos que Σ^n é um slice de $I \times_f M^n$.

□

4.3 Aplicações no Steady State Space e no Espaço Hiperbólico.

Nesta seção apresentaremos algumas formas espaciais com seus modelos dados por produto warped e aplicaremos nossos resultados a esses casos (veja [79] e [80]).

Considere o espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ apresentado na Seção 3.5 do Capítulo 3. Se escolhermos um vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, podemos considerar o campo de vetores conforme dado por

$$Y(p) = a - \langle p, a\rangle p$$

com $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$. Este campo é tipo-tempo apenas no subconjunto aberto

$$\mathcal{O} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle p, a\rangle \neq 0\}.$$

Considere a componente conexa $\mathcal{H}^{n+1}$ dada por $\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle p, a\rangle > 0\}$, a qual é chamada de *steady state space* e corresponde ao produto warped $-\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^n$ (veja [80], exemplo 2 e [11]). Da demonstração do Teorema 4.6, temos

Corolário 4.10. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\mathcal{H}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem*

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq 1. \tag{4.47}$$

Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ em Σ^n, então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{R}^n$.

Observação 4.11. *Observe que no corolário anterior não precisamos da hipótese de $f(h)$ possuir um mínimo local, pois temos $\kappa = 0$ e $f''f - f'^2 = 0$. Sendo assim, na demonstração do Teorema 4.6, teremos*

$$L_r f(h) \geq 0$$

e

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_r, \nabla f(h) \rangle = 0.$$

Consequentemente, da equação (2.19), temos que

$$\mathrm{div}_\Sigma (P_r(\nabla f(h))) \geq 0.$$

Os espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^{n+1}$ podem ser vistos como hiper-esferas no espaço de Minkowski. De fato, temos que cada componente conexa da hiperquádrica

$$\{p \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle p, p \rangle = -1\},$$

munida da métrica induzida é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante igual a -1. Com este modelo para $\mathbb{H}^{n+1}$, não é difícil ver que

$$X_a(p) = a + \langle a, p \rangle p, p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

para $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ fixado, é um campo conforme exato que é qualitativamente diferente de acordo com a característica casual do vetor a. Assim, cada X_a dará uma folheação de $\mathbb{H}^{n+1}$ por esferas, quando a é um vetor tipo-tempo; por horo-esferas, quando a é um vetor tipo-luz e por hiperplanos hiperbólicos totalmente geodésicos, quando a é um vetor tipo-espaço. No primeiro caso, temos $\mathbb{H}^{n+1} - \{a\} = \mathbb{R}^+ \times_{\sinh t} \mathbb{S}^n$. No segundo caso, temos $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. E no terceiro caso, temos $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n$ (veja [79], exemplo 3 e [16]). Para o segundo e o terceiro casos daremos uma aplicação (da demonstração) do Teorema 4.8. Para o segundo caso, temos

Corolário 4.12. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\mathbb{H}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem*

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq 1. \tag{4.48}$$

se a função ângulo $\langle N, \partial_t \rangle$ não muda de sinal e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{R}^n$.

Aqui, usamos o mesmo argumento da Observação 4.11 para retirar a hipótese de $f(h)$ possuir um máximo local. Também é importante observar que o cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2})$ não cumpre $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$.

E para o terceiro caso, temos

Corolário 4.13. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície conexa, completa, não-compacta e limitada no infinito de $\mathbb{H}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média H é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e satisfazem*

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq \tanh(h). \tag{4.49}$$

se a função ângulo $\langle N, \partial_t \rangle$ não muda de sinal, $f(h)$ possui um máximo local e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é homotética ao $\mathbb{H}^n$.

Capítulo 5

Gráficos Killing conformes inteiros

Nesse capítulo, apresentamos os resultados referentes aos artigos [57] e [58], onde estudamos a geometria de *gráficos Killing conformes inteiros*, isto é, gráficos construídos através do fluxo gerado pelos campos de Killing conformes completos V e que estão definidos sobre uma folha integral da folheação $V^\perp$ ortogonal a V. Dessa forma, sob uma restrição adequada na norma do gradiente da função z que determina o gráfico $\Sigma(z)$, estabelecemos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral da folheação $V^\perp$. Em seguida, estabelecemos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica. Além disso, quando o espaço ambiente $\overline{M}$ possui curvatura seccional constante, obtemos estimativas por baixo para o índice de nulidade relativa de $\Sigma(z)$.

5.1 Gráficos Killing conformes

Nesta seção, o nosso objetivo é dar uma descrição de nossos objetos de estudo: gráficos Killing conformes. Neste sentido, vamos considerar uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}$ dotada de um campo de Killing conforme completo V cuja distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ é integrável. Assim, existe uma função suave $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ tal que

$$\mathcal{L}_V \overline{g} = 2\psi\overline{g}, \tag{5.1}$$

onde $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie da métrica $\overline{g}$ de $\overline{M}$; a função ψ é chamada o *fator conforme* de V.

Dessa forma, denotamos por $\Phi : \mathbb{R} \times M \to \overline{M}$ o fluxo gerado por V, onde M é uma folha integral fixada arbitrariamente de $\mathcal{D}$ considerada como $t = 0$ e que suporemos ser conexa e completa. Como $\Phi_t = \Phi(t, .)$ é uma aplicação conforme para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixado, existe uma função positiva $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ tal que $\lambda(0, u) = 1$ e $\Phi_t^* \overline{g}(u) = \lambda^2(t, u)\overline{g}(u)$, para qualquer $u \in M$.

Ao longo deste trabalho, nos restringimos ao caso em que a função λ depende apenas da variável t, isto é, $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$. Geometricamente, como já foi observado em [62], esta hipótese nos permite relacionar as métricas induzidas nas folhas distintas da folheação ortogonal a V, que vamos denotar por $V^\perp$.

$\overline{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana em $\overline{M}$ e $\langle X, Y\rangle = \overline{g}(X, Y)$. De (5.1) deduzimos facilmente que

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V\rangle = 2\psi\langle X, Y\rangle, \tag{5.2}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Neste ponto, supomos que o campo de vetores conforme V é *fechado*, isto é,

$$\overline{\nabla}_X V = \psi X \tag{5.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Além disso, dizemos que V é *homotético* se seu fator conforme ψ é constante e dizemos que V é *paralelo* se ψ se anula identicamente em $\overline{M}$. Mais ainda, observamos que da equação (5.2) o fator conforme ψ de um campo de vetores de Killing conforme fechado V pode ser caracterizado por

$$\psi = \frac{1}{n+1}\mathrm{Div}V, \tag{5.4}$$

onde Div denota o divergente no espaço ambiente $\overline{M}$.

Seja $M_t = \Phi_t(M)$ uma folha de $V^\perp$ munida com a métrica induzida. De (5.3) temos

$$\overline{\nabla}\langle V, V\rangle = 2\psi V. \tag{5.5}$$

Consequentemente, $|V|^2$ é constante nas folhas de $V^\perp$. Além disso, aplicando a derivada covariante em (5.5), temos

$$(\mathrm{Hess}_{\overline{M}}\langle V, V\rangle)(X, Y) = 2X(\psi)\langle V, Y\rangle + 2\psi^2\langle X, Y\rangle.$$

Portanto, como $\mathrm{Hess}_{\overline{M}}$ e a métrica são ambos tensores simétricos, temos

$$X(\psi)\langle V, Y\rangle = Y(\psi)\langle V, X\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Agora, fazendo $Y = V$ obtemos

$$\overline{\nabla}\psi = \frac{V(\psi)}{|V|^2}V = \nu(\psi)\nu,$$

onde $\nu = -\dfrac{V}{|V|}$ e, assim, ψ é também constante nas folhas de $V^{\perp}$.

Além disso, com um cálculo simples, verifica-se que o operador de forma A_t de uma folha $M_t \in V^{\perp}$ com respeito a ν é dado por

$$A_t(X) = \overline{\nabla}_X\nu = \frac{\psi}{|V|}X,$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M_t)$ e, assim, as folhas M_t são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ com respeito a ν dada por

$$\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}. \tag{5.6}$$

De acordo com [62], dado um domínio Ω em $M = M_0$, o *gráfico Killing conforme* $\Sigma(z)$ de uma função suave z em $\overline{\Omega}$ é a hipersuperfície dada por

$$\Sigma(z) = \{\Phi(z(u), u) : u \in \overline{\Omega}\}.$$

Quando $\Omega = M$, $\Sigma(z)$ é dito ser *inteiro*.

Se atribuirmos coordenadas $x_0 = t, x_1, \ldots, x_n$ aos pontos em $\overline{M}$ da forma $\overline{u} = \Phi(t, u)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são coordenadas locais em M, então os campos coordenados correspondentes são

$$\partial_0|_{\overline{u}} = V(t) \;\text{ e }\; \partial_i|_{\overline{u}} = \Phi_{t*}\partial_i|_u, \text{ for } 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, o gráfico Killing conforme $\Sigma(z)$ é parametrizado em termos das coordenadas locais por $z(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n$ e o espaço tangente a $\Sigma(z)$ é gerado pelos vetores

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}. \tag{5.7}$$

Assim, de (5.7) vemos que a métrica induzida em $\Sigma(z)$ é dada por

$$\lambda^2(z(u))\left(\frac{1}{\gamma}dz^2 + d\sigma^2\right), \tag{5.8}$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{|V(0)|^2}$ e $d\sigma^2$ é a métrica da folha M. De fato, se denotarmos por $\langle\ ,\ \rangle_M$ a métrica induzida em M, temos de (5.7) que

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}\rangle = \\
&\quad \frac{\partial z}{\partial x_i}^2 \langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}\rangle + \langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}\rangle = \\
&\lambda^2(z(u))\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}^2 \langle V(0), V(0)\rangle + \langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}\rangle_M\right).
\end{aligned}$$

Além disso, denotando por Dz o gradiente da função z com respeito a métrica $d\sigma^2$, com um cálculo simples, verificamos que

$$N = \frac{1}{\lambda(z(u))\sqrt{\gamma + |Dz(u)|^2}}\left(\Phi_{z(u)*}Dz(u) - \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}\right) \tag{5.9}$$

nos dá uma orientação em $\Sigma(z)$ tal que $\langle N, V\rangle < 0$. De fato, considerando a aplicação $F : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ dada por $F(t,u) = z(u) - t$, temos que a aplicação $G : \overline{M} \to \mathbb{R}$ tal que $G = F \circ \Phi^{-1}$ satisfaz $G \equiv 0$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, se α é uma curva suave em $\Sigma(z)$ com $\alpha'(0) = w \in T_p\Sigma(z)$, temos

$$\frac{d}{ds}G\circ\alpha(s) = 0,$$

ou seja,

$$w(G) = \alpha'(G) = 0.$$

Por outro lado, como $w(G) = \langle\overline{\nabla}G, w\rangle$, segue que $\overline{\nabla}G \perp w$, para todo $w \in T_p\Sigma(z)$. Sendo assim, basta observar que $\overline{\nabla}G = \Phi_{z(u)*}Dz(u) - \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}$.

Ao longo deste trabalho, vamos supor que a orientação N de um gráfico Killing conforme $\Sigma(z)$ é a que foi dada em (5.9).

5.2 Umbilicidade de gráficos Killing conformes inteiros

Iniciamos esta seção apresentando o seguinte lema auxiliar:

Lema 5.1. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Então, $\Sigma(z)$ é completo. Além disso, se Dz tem norma integrável na folha M, então a projeção $V^{\top}$ de V sobre $\Sigma(z)$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$.*

Demonstração. Observe primeiro que, sob as hipóteses do lema, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície completa. De fato, como $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$ e tendo em conta que γ é uma constante positiva, de (5.8) vemos que existe uma constante positiva C_0 tal que

$$|X|^2 \geq C_0 |X^*|_M^2$$

para todo campo de vetores tangente X em $\Sigma(z)$, onde $X^* = X - \langle X, \nu \rangle \nu$ denota a projeção de X sobre a folha M e $|\,.\,|_M$ denota a norma com respeito a métrica $d\sigma^2$. Isto implica que

$$L(\alpha) \geq \sqrt{C_0} L_M(\alpha^*), \tag{5.10}$$

onde $L(\alpha)$ denota o comprimento da curva α em $\Sigma(z)$ com respeito à métrica induzida (5.8) e $L_M(\alpha^*)$ denota o comprimento da projeção α^* de α sobre a folha M com respeito à métrica $d\sigma^2$. Consequentemente, como a métrica $d\sigma^2$ é completa, usando o Teorema de Hopf e Rinow, temos que M é geodesicamente completa. Da desigualdade (5.10), concluimos que $\Sigma(z)$ é geodesicamente completa, usando o Teorema de Hopf e Rinow, mais uma vez, temos que $\Sigma(z)$ com a métrica induzida (5.8) é também completa.

Por outro lado, de (5.9) e usando novamente a hipótese de que $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, temos que existe uma constante positiva C_1 tal que

$$|N^*|_M \leq C_1 |Dz|_M, \tag{5.11}$$

onde, como antes, $N^* = N - \langle N, \nu \rangle \nu$ denota a projeção de N sobre a folha M.

Agora, considerando a projeção $V^{\top}$ de V sobre $\Sigma(z)$, que é dada por

$$V^{\top} = V - \langle V, N \rangle N.$$

Como $(V^{\top})^* = -\langle N, V \rangle N^*$, temos que

$$|(V^{\top})^*|_M = \frac{1}{\lambda^2} |V| |N^*|_M. \tag{5.12}$$

Portanto, estando $\Sigma(z)$ entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, de (5.11) e (5.12) vemos que existe uma constante positiva C_2 tal que

$$|(V^{\top})^{*}|_M \leq C_2|Dz|_M. \tag{5.13}$$

Assim, de (5.8) e (5.13) concluimos que a hipótese que Dz tem norma integrável em M garante que $V^{\top}$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

□

Teorema 5.2. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Einstein munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que H é constante e que H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$. Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Observe primeiro que, sob as hipóteses do teorema, usando o Lema 5.1, temos que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície completa e $V^{\top}$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Definimos em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangentes

$$X = -P_1V^{\top} + (n-1)HV^{\top}.$$

Como H é constante e H_2 é limitada por baixo, da equação (2.9) obtemos que $|A|$ é limitada em $\Sigma(z)$. Portanto, de (2.12) concluimos que $|P_1|$ é também limitado em $\Sigma(z)$. Consequentemente,

$$|X| \leq (|P_1| + (n-1)|H|)\,|V^{\top}|$$

e, assim, X também tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Por outro lado, da equação (8.4) de [10] temos que

$$\text{div}V^{\top} = n(\psi + \langle V, N\rangle H) \tag{5.14}$$

e

$$\text{div}P_1V^{\top} = \langle \text{div}P_1, V^{\top}\rangle + n(n-1)(\psi H + \langle V, N\rangle H_2). \tag{5.15}$$

Mas, como $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade de Einstein, de (2.15) temos

$$\langle \text{div}P_1, V^{\top}\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, E_i)E_i, V^{\top}\rangle = \overline{\text{Ric}}(N, V^{\top}) = \lambda\langle N, V^{\top}\rangle = 0,$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\overline{M}$. Consequentemente, de (5.14) e (5.15) obtemos que

$$\mathrm{div}X = n(n-1)(H^2 - H_2)\langle V, N\rangle \leq 0,$$

onde a última desigualdade segue-se tomando $r = 1$ no item (1) da Proposição 2.14.

Portanto, podemos aplicar o Lema 2.21 para garantir que $\mathrm{div}X$ se anula identicamente em $\Sigma(z)$ e, assim, o mesmo vale para $H^2 - H_2$. Dessa forma, $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica. $\square$

Teorema 5.3. *Seja $\overline{M}$ variedade Riemanniana munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$. Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ satisfaz*

$$0 < H \leq \mathcal{H}. \tag{5.16}$$

Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^\perp$ e $H = \mathcal{H}$.

Demonstração. Da equação (8.4) de [10] juntamente com (5.6), temos que

$$\mathrm{div}V^\top = n|V|(\mathcal{H} - H\cos\theta), \tag{5.17}$$

onde θ é o ângulo entre ν e N. Assim, de (5.16) e (5.17) temos

$$\mathrm{div}V^\top \geq nH|V|(1-\cos\theta) \geq 0.$$

Por outro lado, do Lema 5.1, temos que $\Sigma(z)$ é completa e $V^\top$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Portanto, podemos aplicar o Lema 2.21 para garantir que $\mathrm{div}V^\top$ se anula identicamente em $\Sigma(z)$. Assim, $\cos\theta \equiv 1$, isto é, $N = \nu$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^\perp$ e $H = \mathcal{H}$. $\square$

Lembramos que uma hipersuperfície é dita ser *mínima* se sua curvatura média é identicamente zero. Da prova do Teorema 5.3, também obtemos o seguinte:

Corolário 5.4. *Seja $\overline{M}$ variedade Riemanniana munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing* *conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ é constante e satisfaz*

$$0 \leq H \leq \mathcal{H}.$$

Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ ou é mínima ou uma folha da folheação $V^{\perp}$.

Teorema 5.5. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa e munida com um campo de vetores de Killing conforme homotético completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ é limitada e satisfaz*

$$0 \leq H \cos\theta \leq \mathcal{H}, \tag{5.18}$$

onde θ denota o ângulo entre N e ν, e que H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$. Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica e a curvatura de Ricci de $\overline{M}$ se anula identicamente na direção de N.

Demonstração. Definimos em $\Sigma(z)$ a função suave dada por

$$f_V = \langle V, N \rangle.$$

Temos que f_V é negativa em $\Sigma(z)$ e, para todo campo de vetores Y tangente a $\Sigma(z)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_V, Y \rangle &= Y(f_V) \;=\; Y\langle V, N \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_Y V, N \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y N \rangle \\ &= \psi \langle Y, N \rangle - \langle V^{\top}, A(Y) \rangle \;=\; \langle -A(V^{\top}), Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f_V = -A(V^{\top}). \tag{5.19}$$

Por outro lado, da Proposição 2.1 de [41],

$$\Delta f_V = -n\langle \nabla H, V \rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2 \right) f_V - nH\psi - nN(\psi), \tag{5.20}$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota a curvatura de Ricci de $\overline{M}$. Assim, como V é homotético, de (5.20) temos que

$$\Delta f_V = -n\langle \nabla H, V \rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2 \right) f_V - nH\psi. \tag{5.21}$$

Agora, consideremos em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente

$$X = \nabla f_V + nHV^{\top}.$$

Como H é limitada e H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$, de (2.9) obtemos que a norma da forma fundamental A é limitada. Portanto, da equação (5.19) temos

$$|X| \leq (|A| + nH)\,|V^{\top}|$$

e, assim, usando o Lema 5.1, concluimos que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Além disso, da equação (8.4) de [10] juntamente com (2.9) e (5.21) temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}X &= \Delta f_V + n\langle \nabla H, V\rangle + nH\mathrm{div}V^{\top} \\ &= -\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + n^2H^2 - n(n-1)H_2\right) f_V \\ &\quad - nH\psi + n^2\psi H + n^2H^2 f_V \\ &= -\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) - n(n-1)H_2\right) f_V + n(n-1)H\psi. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dessa forma, de (5.6) e (5.22) obtemos

$$\mathrm{div}X = -\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) - n(n-1)H_2\right) f_V + n(n-1)H\mathcal{H}|V|. \tag{5.23}$$

Assim, de (5.18), (5.23) e tendo em vista que $f_V = -|V|\cos\theta$, obtemos que

$$\mathrm{div}X \geq -\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + n(n-1)(H^2 - H_2)\right) f_V. \tag{5.24}$$

Consequentemente, como $f_V < 0$, $\overline{\mathrm{Ric}} \geq 0$, e $H^2 - H_2 \geq 0$, com igualdade apenas em pontos umbílicos de $\Sigma(z)$ (cf. Proposição 2.14), temos de (5.24) que $\mathrm{div}X \geq 0$ em $\Sigma(z)$. Portanto, o Lema 2.21 nos diz que $\mathrm{div}X$ se anula identicamente em $\Sigma(z)$. Sendo assim, $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \equiv 0$ e $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica. □

5.3 Extensões para as r-ésimas curvaturas médias

Nesta seção, nosso objetivo é estender os resultados da seção anterior para o contexto das r-ésimas curvaturas médias. Então, iniciamos estendendo o Teorema 5.2.

Teorema 5.6. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$. Suponha que $\Sigma(z)$ possui segunda forma fundamental A limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n$, H_{r-1} e H_r são constantes. Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Primeiro notamos que, como $\overline{M}_c$ possui curvatura seccional constante c, de (2.15) temos

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div} P_r, V^\top\rangle \;=\; c\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\sum_{i=1}^{n}\big(&\langle N, E_i\rangle\langle P_{r-j}E_i, A^{j-1}V^\top\rangle\\ &-\langle P_{r-j}E_i, E_i\rangle\langle N, A^{j-1}V^\top\rangle\big) = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, da equação (8.4) de [10], temos

$$\mathrm{div} P_r V^\top = b_r\left(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}\right), \tag{5.25}$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$.

Agora, consideremos o seguinte campo de vetores tangentes em $\Sigma(z)$

$$X = b_r H_r P_{r-1}V^\top - b_{r-1}H_{r-1}P_r V^\top.$$

Assim,

$$|X| \leq \left(b_r|H_r||P_{r-1}| + b_{r-1}|H_{r-1}||P_r|\right)|V^\top|.$$

Consequentemente, como estamos supondo que $|A|$ é limitada e que H_{r-1} e H_r são constantes, temos que $|P_r|$ e $|P_{r-1}|$ são limitadas e, usando o Lema 5.1, podemos ver que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Além disso, da equação (5.25) e do item (1) da Proposição 2.14, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= b_r H_r \mathrm{div}_M P_{r-1}V^\top - b_{r-1}H_{r-1}\mathrm{div}_M P_r V^\top\\ &= b_r H_r\left(b_{r-1}\psi H_{r-1} + \langle V, N\rangle b_{r-1}H_r\right)\\ &\quad - b_{r-1}H_{r-1}\left(b_r\psi H_r + \langle V, N\rangle b_r H_{r+1}\right)\\ &= b_r b_{r-1}\langle V, N\rangle\left(H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1}\right) \leq 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, o Lema 2.21 nos dá $\mathrm{div}X \equiv 0$. Portanto,

$$H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1} \equiv 0$$

e, assim, $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica. $\square$

A fim de estabelecer os nossos próximos resultados, precisamos de uma condição suficiente para garantir a existência de um ponto elíptico em nossos gráficos Killing conformes. Neste sentido, citamos uma versão Riemanniana do Lema 5.4 de [7] devido a Alías, Brasil Jr. e Colares.

Lema 5.7. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores conforme fechado completo V. Seja Σ uma hipersuperfície completa em $\overline{M}$. Suponha que* $\mathrm{Div}V$ *não se anula em um ponto de Σ onde a restrição $|V|_{\Sigma(z)}$ de $|V|$ a Σ atinge um máximo local. Então existe um ponto elíptico em Σ.*

Demonstração. Assuma que existe um ponto $p_{max} \in M$ onde a função positiva $|V|_M$, ou equivalentemente a função $u = \langle V, V\rangle|_M$, atinge um máximo local, com $\mathrm{div}_{\overline{M}}V(p_{max}) \neq 0$ (ou equivalentemente, $\psi(p_{max}) \neq 0$). Assim,

$$\nabla u(p_{max}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 u_{p_{max}}(v, v) \leq 0$$

para todo $v \in T_{p_{max}}M$. Usando que $\overline{\nabla}_X V = \psi X$ para todo campo de vetores X, um cálculo simples mostra que o gradiente de u é dado por

$$\nabla u = 2\psi V^T.$$

Além disso, para todo campo de vetores tangentes $X \in \mathcal{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(X, X) &= \langle \nabla_X(\nabla u), X\rangle = 2X(\psi)\langle X, V^T\rangle + 2\psi\langle \nabla_X V^T, X\rangle \\ &= 2X(\psi)\langle X, V^T\rangle + 2\psi^2|X|^2 - 2\psi\langle V, N\rangle\langle AX, X\rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle \nabla_V^T, X\rangle = \psi\langle X, X\rangle - \langle V, N\rangle\langle AX, X\rangle$. Portanto, no ponto p_{max} temos

$$V^T(p_{max}) = 0, \qquad \langle V, N\rangle(p_{max}) = -\sqrt{u(p_{max})},$$

e

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u_{p_{max}}(v, v) = \psi^2(p_{max})|v|^2 + \psi(p_{max})\sqrt{u(p_{max})}\langle A_{p_{max}}v, v\rangle \leq 0 \quad (5.26)$$

para todo $v \in T_{p_{max}}M$. Assumamos que $\mathrm{div}_{\overline{M}}V(p_{max})$ (ou equivalentemente, que $\psi(p_{max})$) é negativa (a prova para o caso onde $\mathrm{div}_{\overline{M}}V(p_{max})$ é positiva é análoga). Escolhendo agora uma base de direções principais $\{e_1, ..., e_n\}$ em p_{max}, concluimos de (5.26) que

$$\kappa_i(p_{max}) \geq \frac{-\psi(p_{max})}{\sqrt{u(p_{max})}} > 0, \qquad i = 1, ..., n.$$

□

Teorema 5.8. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folha da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H é limitada, H_r é constante, para algum $2 \leq r \leq n$ e que* Div$V$ *não se anula em um ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Consideremos o seguinte campo de vetores tangentes em $\Sigma(z)$

$$X = b_r H_r V^{\top} - nP_r V^{\top},$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$. Da equação (5.25) temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X &= b_r H_r \mathrm{div}_M V^{\top} - n \mathrm{div}_M P_r V^{\top} \\ &= n\psi b_r H_r + n b_r H H_r \langle N, V\rangle - n b_r \left(\psi H_r + \langle N, V\rangle H_{r+1}\right) \\ &= n b_r \langle V, N\rangle \left(H H_r - H_{r+1}\right). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Neste ponto, notemos que

$$H H_r - H_{r+1} \geq 0, \tag{5.28}$$

com igualdade apenas em pontos umbílicos. De fato, como Div$V$ não se anula em um ponto de $\Sigma(z)$ onde a restrição de $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 5.7 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Assim, como H_r é constante, temos que $H_r > 0$. Então, do item (2) da Proposição 2.14 obtemos que $H_k > 0$, para $k \in \{1, \ldots, r-1\}$, e

$$H_{r-1} \geq H_r^{(r-1)/r}, \quad H \geq H_{r-1}^{1/(r-1)},$$

com igualdade apenas em pontos umbílicos. Além disso, o item (1) da Proposição 2.14 assegura-nos que

$$H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1} > 0.$$

Assim,

$$H_{r+1} \leq \frac{H_r^2}{H_{r-1}}.$$

Então, das desigualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} HH_r - H_{r+1} &\geq HH_r - \frac{H_r^2}{H_{r-1}} = \frac{H_r}{H_{r-1}}\left(HH_{r-1} - H_r\right) \\ &\geq \frac{H_r}{H_{r-1}}\left(HH_{r-1} - H_{r-1}^{r/(r-1)}\right) \\ &= H_r\left(H - H_{r-1}^{1/(r-1)}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

com igualdade apenas em pontos umbílicos.

Por outro lado, como H é limitada e $H_2 > 0$ em $\Sigma(z)$, da equação (2.9) temos que $|A|$ é limitada em $\Sigma(z)$, assim, $|P_r|$ é limitada em $\Sigma(z)$. Mais ainda, como

$$|X| \leq (b_r H_r + n|P_r|)\,|V^\top|,$$

podemos usar o Lema 5.1 para concluir que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Portanto, como de (5.27) e (5.28) temos que $\mathrm{div}X$ não muda de sinal em $\Sigma(z)$, o Lema 2.21 garante que $\mathrm{div}X = 0$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, $HH_r - H_{r-1} = 0$ em $\Sigma(z)$ e, assim, $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica. □

Teorema 5.9. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida de um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$. Suponha que H é limitada, que para $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$*

$$H_s = a_r H_r + \ldots + a_{s-1}H_{s-1}, \tag{5.29}$$

para alguns números não negativos $a_r, \ldots, a_{s-1}$, e que $\mathrm{Div}V$ *não se anula em um ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se Dz tem norma integrável, então$\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Faremos a análise em dois casos distintos.

Caso 1: Primeiro, assumiremos que $s < n$.
Usando a relação linear (5.29) e a equação (5.25), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}P_sV^\top &= b_s\psi H_s + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1} \\ &= b_s\psi\sum_{j=r}^{s-1} a_jH_j + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1} \\ &= b_s\sum_{j=r}^{s-1} a_j\left(\frac{1}{b_j}\mathrm{div}_M P_jV^\top - \langle V, N\rangle H_{j+1}\right) + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{div} P_s V^\top = b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} \mathrm{div} P_j V^\top + b_s \langle V, N \rangle \left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1} \right). \tag{5.30}$$

Por outro lado, como $\mathrm{Div} V$ não se anula em um ponto de $\Sigma(z)$ onde a restrição $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 5.7 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Consequentemente, se $0 \leq r < s < n$, como na prova do Teorema 6.1 de [7], afirmamos que

$$H_{s+1} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}, \tag{5.31}$$

ocorrendo igualdade apenas em pontos umbílicos. Para provar nossa afirmação, assumimos, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Div} V$ é negativo. Então, sabemos do Lema 5.7 que existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Denote por Σ_s a componente conexa de $\{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\}$ contendo o ponto elíptico p_0. É claro que Σ_s é um subconjunto aberto não-vazio de $\Sigma(z)$. Mostraremos que ele também é fechado. De fato, como $H_s(p_0) > 0$, existe ao menos um coeficiente positivo a_j, digamos $a_l > 0$. Pelo item (2) da Proposição 2.14 sabemos que em cada ponto $p \in \Sigma_s$

$$H_j^{s/j}(p) \geq H_s(p) > 0, \quad 1 \leq j \leq s-1. \tag{5.32}$$

Em particular, como $a_j \geq 0$, em cada ponto $p \in \Sigma_s$, temos

$$H_s(p) \geq a_l H_l(p).$$

Se $l = 0$, então $H_s \geq a_0 > 0$ on Σ_s, mostrando que Σ_s é fechado. Se $l \geq 1$, então temos em Σ_s

$$H_l^{s/l} \geq H_s \geq a_l H_l > 0.$$

Assim $H_l^{(s-l)/l} \geq a_l$ em Σ_s, que nos dá

$$H_s \geq a_l a_l^{l/(s-l)} = a_l^{s/(s-l)} > 0,$$

mostrando que, também neste caso, Σ_s é fechado.

Dessa forma, $\Sigma_s = \Sigma(z)$ e (5.32) valem em todo ponto $p \in \Sigma(z)$. Em particular, $H_j > 0$ para todo j, $1 \leq j \leq s$. Além disso, também sabemos do item (1) da Proposição 2.14 que

$$H_j^2 - H_{j-1} H_{j+1} \geq 0,$$

com igualdade em pontos umbílicos. Como cada $H_j > 0$, para $1 \leq j \leq s$, isto é equivalente a

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} \leq \ldots \leq \frac{H_{j+1}}{H_j} \leq \ldots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1 \tag{5.33}$$

com igualdade em qualquer passo apenas em pontos umbílicos. Observe que a primeira desigualdade em (5.33) vale independentemente do sinal de H_{s+1}. De (5.33), e usando (5.29), obtemos que

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_j}{H_{s-1}} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_{j+1}}{H_s},$$

que significa que a afirmação em (5.31) é verdade.

Agora, consideremos em Σ o campo de vetores tangentes

$$X = P_s V^\top - b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} P_j V^\top.$$

Do item (2) da Proposição 2.14, temos que H_2 é positiva em $\Sigma(z)$. Portanto, como estamos supondo que H é limitada, da equação (2.9) temos que $|A|$ é limitada em $\Sigma(z)$. Então, de (2.12) concluimos que $|P_r|$ é também limitado, para qualquer $1 \leq r \leq n$. Consequentemente, como

$$|X| \leq \left(|P_s| + b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} |P_j| \right) |V^\top|,$$

podemos ver, usando o Lema 5.1, que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Então, usando que $\langle V, N \rangle < 0$, obtemos de (5.30) e da afirmação (5.31) que

$$\mathrm{div} X = b_s \langle V, N \rangle \left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1} \right) \geq 0.$$

Portanto, o Lema 2.21 assegura que $\mathrm{div} X = 0$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, $H_{s+1} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}$ e, assim, $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica.

Caso 2: Agora, assumamos que $s = n$ e $r > 0$.
Neste caso, usando a relação linear (5.29) e a equação (5.25), obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{div} P_{n-1}V^{\top} &= b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\langle V, N\rangle H_n \\ &= b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\langle V, N\rangle \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_j \\ &= b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\sum_{j=r}^{n-1} a_j \left(\frac{1}{b_{j-1}}\mathrm{div} P_{j-1}V^{\top} - \psi H_{j-1}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{div} P_{n-1}V^{\top} &= b_{n-1}\sum_{j=r}^{n-1} \frac{a_j}{b_{j-1}}\mathrm{div} P_{j-1}V^{\top} \\ &\quad + b_{n-1}\psi\left(H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1}\right).\end{aligned} \tag{5.34}$$

Como antes, existe também um ponto elíptico em $\Sigma(z)$ e, se $0 < r < s \leq n$, afirmamos agora que

$$H_{n-1} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1}, \tag{5.35}$$

ocorrendo igualdade apenas em pontos umbílicos. Para provar a afirmação (5.35), podemos assumir outra vez, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Div}V$ é negativo. Então, sabemos do Lema 5.7 que existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. O mesmo raciocínio do *Caso* 1 agora mostra que $\Sigma_s = \{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\} = \Sigma(z)$ e $H_j^{n/j}(p) \geq H_n(p) > 0$ em cada ponto $p \in \Sigma(z)$, para $1 \leq j \leq n-1$. Pelo item (1) da Proposição 2.14 temos então que

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} \leq \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \leq \ldots \leq \frac{H_j}{H_{j-1}} \leq \ldots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1,$$

com igualdade, em qualquer passo, apenas em pontos umbílicos. Daqui, e usando (5.29), obtemos que

$$\frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \geq \frac{H_n}{H_{n-1}} = \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_j}{H_{n-1}} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_{j-1}}{H_{n-2}},$$

que significa que a afirmação (5.35) é verdade.

Agora, consideremos em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente

$$Y = P_{n-1}V^{\top} - b_{n-1}\sum_{j=r}^{n-1}\frac{a_j}{b_{j-1}}P_{j-1}V^{\top}.$$

Seguindo o mesmo caminho no qual provamos para o campo X no caso anterior, obtemos que Y tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Portanto, como estamos supondo que $\mathrm{Div}V$ é negativo em $\Sigma(z)$, usando a equação (5.4) temos de (5.34) que

$$\mathrm{div}Y = b_{n-1}\psi\left(H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1}a_jH_{j-1}\right)$$

é também negativo. Assim, observando que, como antes, $|A|$ é limitada em $\Sigma(z)$, o Lema 2.21 garante que $\mathrm{div}Y = 0$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, $H_{n-1} = \sum_{j=r}^{n-1} a_jH_{j-1}$ e, assim, $\Sigma(z)$ é totalmente umbílica. □

Teorema 5.10. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a segunda forma fundamental A é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$,*

$$0 < H_{r+1} \leq H_r\mathcal{H}. \tag{5.36}$$

Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$.

Demonstração. Como $|A|$ é limitada e tendo em conta a hipótese que Dz tem norma integrável implica que $V^{\top}$ também tem norma integrável, concluimos que $P_rV^{\top}$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Além disso, da equação (5.25) e da desigualdade (5.36), obtemos

$$\mathrm{div}P_rV^{\top} = b_r\left(\psi H_r - H_{r+1}|V|\cos\theta\right) \geq b_r(1-\cos\theta)H_{r+1}|V| \geq 0,$$

onde $b_r = (r+1)\binom{n}{r+1}$ e θ denota o ângulo entre ν e N. Consequentemente, o Lema 2.21 garante que $\mathrm{div}P_rV^{\top}$ se anula identicamente em $\Sigma(z)$. Portanto, $\cos\theta = 1$ em $\Sigma(z)$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$. □

Uma hipersuperfície Σ é dita ser *r-mínima* se H_{r+1} se anula identicamente em Σ. Assim, da prova do Teorema 5.10 também temos o seguinte:

Corolário 5.11. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a segunda forma fundamental A é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$, H_{r+1} é uma constante satisfazendo*

$$0 \leq H_{r+1} \leq H_r \mathcal{H}.$$

Se Dz tem norma integrável, então $\Sigma(z)$ é r-minimal ou é uma folha da folheação $V^{\perp}$.

5.4 Gráficos Killing conformes totalmente geodésicos

Teorema 5.12. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ e o fator conforme ψ de V satisfazem uma das seguintes condições:*

(a) $H \geq 0$ e $\psi \leq 0$ em $\Sigma(z)$;

(b) $H \leq 0$ e $\psi \geq 0$ em $\Sigma(z)$.

Se Dz tem norma integrável na folha M, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície mínima. Além disso, se $\overline{M}$ é uma variedade de Einstein e H_2 é limitada por baixo em $\Sigma(z)$, então $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica.

Demonstração. Da equação (8.4) de [10] temos que

$$\mathrm{div} V^{\top} = n(\psi + \langle V, N \rangle H). \tag{5.37}$$

Consequentemente, como $\langle N, V \rangle < 0$ em $\Sigma(z)$, considerando o item (a) ou o item (b) concluimos da equação (5.37) que $\mathrm{div} V^{\top}$ não muda de sinal em $\Sigma(z)$.

Por outro lado, do Lema 5.1 temos que $\Sigma(z)$ é completa e $V^\top$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Assim, o Lema 2.21 nos dá $\mathrm{div}V^\top = 0$ em $\Sigma(z)$. Portanto, retornando à equação (5.37), temos que ψ e H se anulam identicamente em $\Sigma(z)$.

Agora, da equação (2.9), temos $|A|^2 = -n(n-1)H_2$, que implica em $H_2 \leq 0$. Assim, assumindo que H_2 é limitado por baixo em $\Sigma(z)$, temos que $|A|$ é limitada em M^n. Consequentemente, de (2.12) temos que $|P_1|$ é também limitado e, como $V^\top$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$, o mesmo ocorre com $P_1V^\top$.

Além disso, da equação (8.4) de [10] temos também que

$$\mathrm{div}P_1V^\top = \langle \mathrm{div}P_1, V^\top\rangle + n(n-1)(\psi H + \langle V, N\rangle H_2). \tag{5.38}$$

Mas, se $\overline{M}$ é uma variedade de Einstein, de (2.15) temos

$$\langle \mathrm{div}P_1, V^\top\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, E_i)E_i, V^\top\rangle = \overline{\mathrm{Ric}}(N, V^\top) = \lambda\langle N, V^\top\rangle = 0,$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\overline{M}$. Consequentemente, de (5.38) obtemos

$$\mathrm{div}P_1V^\top = n(n-1)\langle V, N\rangle H_2. \tag{5.39}$$

Portanto, de (5.39) obtemos que $\mathrm{div}P_1V^\top$ não muda de sinal em $\Sigma(z)$ e, aplicando mais uma vez o Lema 2.21, concluimos que $\mathrm{div}P_1V^\top = 0$ em $\Sigma(z)$. Dessa forma, $H_2 = 0$ em $\Sigma(z)$ e, assim, $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica. □

A fim de estabelecer o nosso próximo teorema, precisamos do seguinte resultado auxiliar:

Proposição 5.13. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com dois campos vetoriais de Killing conformes fechados V e W, com fatores conformes ψ e μ, respectivamente. Se $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma função definida em uma hipersuperfície Σ de $\overline{M}$ por $f = \langle V, W\rangle|_\Sigma$, então*

$$\nabla f = \psi W^\top + \mu V^\top$$

e

$$\Delta f = W^\top(\psi) + V^\top(\mu) + 2n\psi\mu + nH\{\psi\langle W, N\rangle + \mu\langle V, N\rangle\}.$$

Demonstração. Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$ então de (5.3) temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, Y \rangle &= Y(f) = \langle \overline{\nabla}_Y V, W \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y W \rangle \\ &= \psi \langle Y, W^\top \rangle + \mu \langle V^\top, Y \rangle = \langle \psi W^\top + \mu V^\top, Y \rangle. \end{aligned}$$

Assim, de (5.37) e (5.13) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{div}(\psi W^\top + \mu V^\top) \\ &= \psi \operatorname{div} W^\top + \langle \nabla \psi, W^\top \rangle + \mu \operatorname{div} V^\top + \langle \nabla \mu, V^\top \rangle \\ &= \psi \{ n\mu + nH \langle N, W \rangle \} + W^\top(\psi) + \mu \{ n\psi + nH \langle N, V \rangle \} + V^\top(\mu) \\ &= W^\top(\psi) + V^\top(\mu) + 2n\psi\mu + nH \{ \psi \langle N, W \rangle + \mu \langle N, V \rangle \}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.14. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores paralelo V e um campo de vetores homotético e não paralelo W. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$ e cuja curvatura média H não muda de sinal. Se Dz tem norma integrável na folha M, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície mínima. Além disso, se $\overline{M}$ é Einstein e H_2 é limitada por baixo, então $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica.*

Demonstração. Como V é paralelo e W é homotético e não paralelo, considerando em $\Sigma(z)$ a função suave $f = \langle V, W \rangle|_{\Sigma(z)}$, segue-se da Proposição 5.13 que $\nabla f = \mu V^\top$ e $\Delta f = nH\mu \langle V, N \rangle$, onde o fator conforme μ de W é uma constante não nula.

Portanto, do Lema 5.1, juntamente com nossa hipótese de que Dz tem norma integrável na folha M garante que ∇f tem norma integrável em $\Sigma(z)$, e nossa hipótese sobre H, juntamente com o fato de que $\langle V, N \rangle < 0$ em $\Sigma(z)$, assegura que Δf não muda de sinal em $\Sigma(z)$. Sendo assim, o Lema 2.21 implica que $\Delta f = 0$ em $\Sigma(z)$ e, assim, H se anula identicamente em $\Sigma(z)$.

Para provar a segunda parte do Teorema 5.14, basta seguir os mesmos passos do final da prova do Teorema 5.12. □

A fim de provar o nosso próximo resultado, precisaremos do seguinte resultado clássico devido a Yau [97].

Lema 5.15. *Toda variedade Riemanniana completa e não compacta com curvatura de Ricci não negativa possui volume infinito.*

Teorema 5.16. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa e munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado completo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, com curvatura média H limitada e H_2 limitada por baixo. Suponha que H tem o mesmo sinal do fator conforme ψ de V, e que*

$$\frac{1}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} \leq nH^2, \tag{5.40}$$

onde t denota o parâmetro real do fluxo de V. Se Dz tem norma integrável na folha M, então $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de $\overline{M}$ na direção de N se anula identicamente. Além disso, se $\Sigma(z)$ é não compacta, $\langle V,V\rangle$ é constante em $\Sigma(z)$ e a curvatura de Ricci de $\Sigma(z)$ é também não negativa, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$.

Demonstração. Considere $f_V : \Sigma(z) \to \mathbb{R}$ dada por $f_V = \langle V, N\rangle$. Então, f_V é negativa em $\Sigma(z)$ e

$$\begin{aligned}\langle \nabla f_V, Y\rangle &= Y(f_V) = Y\langle V,N\rangle\\ &= \langle \overline{\nabla}_Y V, N\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y N\rangle\\ &= \psi\langle Y,N\rangle - \langle V^{\top}, A(Y)\rangle = \langle -A(V^{\top}), Y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Consequentemente,

$$\nabla f_V = -A(V^{\top}). \tag{5.41}$$

Por outro lado, da Proposition 2.1 de [41], temos que

$$\Delta f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right) f_V - nH\psi - nN(\psi), \tag{5.42}$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota a curvatura de Ricci de $\overline{M}$.

De (5.1) também observamos que

$$N(\psi) = \langle N, \overline{\nabla}\psi\rangle = \frac{V(\psi)}{|V|^2}\langle N, V\rangle = \frac{1}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} f_V, \tag{5.43}$$

onde t é o parâmetro do fluxo de V. Assim, retornando à equação (5.42) temos

$$\Delta f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right) f_V - nH\psi - \frac{n}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} f_V. \tag{5.44}$$

Portanto, de (5.40) e (5.44), temos que

$$\Delta f_V \geq -n\langle \nabla H, V\rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right) f_V - nH\psi - n^2H^2 f_V. \tag{5.45}$$

Agora, consideremos em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente

$$X = \nabla f_V + nHV^\top.$$

Como H é limitado e H_2 é limitado por baixo, de (2.9) obtemos que a norma de A é também limitada. Portanto, de (5.41), temos

$$|X| \leq (|A| + n|H|)|V^\top|.$$

Consequentemente, usando mais uma vez o Lema 5.1, garantimos que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$.

Além disso, da equação (5.37) e da desigualdade (5.45) obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \Delta f_V + n\langle \nabla H, V\rangle + nH\mathrm{div}V^\top \\ &\geq -n\langle \nabla H, V\rangle - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right) f_V \\ &\quad - nH\psi - n^2H^2 f_V + n\langle \nabla H, V\rangle + n^2\psi H + n^2H^2 f_V \\ &= -\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right) f_V + n(n-1)H\psi \geq 0.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Assim, o Lema 2.21 nos dá $\mathrm{div}X = 0$ em $\Sigma(z)$. Portanto, $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) = 0$ e $\Sigma(z)$ é totalmente geodésica.

Agora, suponha que $\Sigma(z)$ é não compacto, $\langle V, V\rangle$ é constante em $\Sigma(z)$ e a curvatura de Ricci de $\Sigma(z)$ é também não negativa. Como $A \equiv 0$, de (5.41) concluimos que f_V é constante e não nula em $\Sigma(z)$. Consequentemente, como

$$|V^\top|^2 = \langle V, V\rangle - \langle V, N\rangle^2, \tag{5.47}$$

temos que $|V^\top|$ é também constante em $\Sigma(z)$. Assim,

$$+\infty > \int_{\Sigma(z)} |V^\top| d\Sigma(z) = |V^\top|\,\mathrm{Vol}(\Sigma(z)).$$

Portanto, o Lema 5.15 nos dá $\mathrm{Vol}(\Sigma(z)) = +\infty$ e, consequentemente, devemos ter $|V^\top| \equiv 0$. Então, de (5.47) temos

$$|\langle V, N\rangle| = |V|.$$

Dessa forma, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que V é paralelo a N e, assim, $\Sigma(z)$ é uma folha de $V^\perp$. □

5.5 Estimando o índice de nulidade relativa mínimo

De acordo com [60] e considerando o mesmo contexto da seção anterior, para $p \in \Sigma(z)$, definimos o *espaço de nulidade relativa* $\Delta(p)$ de $\Sigma(z)$ em p por

$$\Delta(p) = \{v \in T_p\Sigma(z) \; ; \; v \in \ker(A_p)\},$$

onde $\ker(A_p)$ denota o núcleo de A_p. O *índice de nulidade relativa* $\eta(p)$ de $\Sigma(z)$ em p é a dimensão de $\Delta(p)$, isto é,

$$\eta(p) = \dim\left(\Delta(p)\right),$$

e o *índice de nulidade relativa mínimo* η_0 de $\Sigma(z)$ é definido por

$$\eta_0 = \min_{p \in \Sigma(z)} \eta(p).$$

Agora, apresentamos nossa primeira estimativa do índice de nulidade relativa mínimo de $\Sigma(z)$. Neste sentido, lembramos que $\Sigma(z)$ é dita ser *r-mínima* se H_{r+1} se anula identicamente em $\Sigma(z)$.

Teorema 5.17. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c e munida com um campo de vetores paralelo V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, com segunda forma fundamental limitada A e tal que H_{r+1} não muda de sinal, para algum $0 \leq r \leq n-1$. Se Dz tem norma integrável na folha M, então $\Sigma(z)$ é r-mínima. Além disso, se H_{r+2} também não muda de sinal, $0 \leq r \leq n-2$, então o índice de nulidade relativa mínimo η_0 de $\Sigma(z)$ é ao menos $n-r$. Em particular, quando $\overline{M}_c$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e se H_r não se anula em $\Sigma(z)$, então através de cada ponto de $\Sigma(z)$ passa um $(n-r)$-hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ totalmente contido em $\Sigma(z)$.*

Demonstração. Primeiro notamos que, como $\overline{M}_c$ tem curvatura seccional constante c, de (2.15) temos

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div} P_r, V^{\top}\rangle \;=\; & c\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\sum_{i=1}^{n}\big(\langle N, E_i\rangle\langle P_{r-j}E_i, A^{j-1}V^{\top}\rangle \\ & -\langle P_{r-j}E_i, E_i\rangle\langle N, A^{j-1}V^{\top}\rangle\big) = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, da equação (8.4) de [10], temos

$$\mathrm{div} P_r V^\top = b_r \left(\psi H_r + \langle V, N \rangle H_{r+1} \right), \tag{5.48}$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$. Assim, como V é suposto ser paralelo, da equação (5.48) obtemos

$$\mathrm{div} P_r V^\top = b_r \langle V, N \rangle H_{r+1}. \tag{5.49}$$

Consequentemente, como $\langle N, V \rangle < 0$ e H_{r+1} não muda de sinal em $\Sigma(z)$, da equação (5.49) obtemos que $\mathrm{div} P_r V^\top$ não muda de sinal em $\Sigma(z)$.

Por outro lado, como $|A|$ é suposta ser limitada, de (2.12) temos que $|P_r|$ é também limitado, para qualquer $1 \leq r \leq n$. Portanto, usando o Lema 5.1, juntamente com a hipótese de que Dz tem norma integrável na folha M temos que $P_r V^\top$ tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Dessa forma, o Lema 2.21 garante que $\mathrm{div} P_r V^\top$ se anula identicamente em$\Sigma(z)$ e, retornando à equação (5.49), concluimos que $H_{r+1} = 0$ em $\Sigma(z)$.

Além disso, se $0 \leq r \leq n-2$ e a $(r+2)$-ésima curvatura média H_{r+2} também não muda de sinal, podemos trocar r por $r+1$ na equação (5.49) e seguir os mesmos passos anteriores para obter que $H_{r+2} = 0$ em $\Sigma(z)$. Sendo assim, como $H_{r+1} = H_{r+2} = 0$ em $\Sigma(z)$, a Proposição 1 de [40] assegura que $H_j = 0$ para todo $j \geq r+1$ e, assim, $\eta_0 \geq n - r$.

Agora, suponha que $\overline{M}_c$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Como estamos supondo que H_r não se anula em $\Sigma(z)$, do Teorema 5.3 de [60] (veja também [64]) temos que a distribuição $p \mapsto \Delta(p)$ de nulidade relativa mínima de $\Sigma(z)$ é suave e integrável com folhas completas, totalmente geodésicas em $\Sigma(z)$ e em $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, o resultado segue-se da caracterização de subvariedades completas totalmente geodésicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ como hiperplanos de dimensão adequada. $\square$

Teorema 5.18. *Seja $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c e munida com um campo de vetores de Killing conforme fechado V. Seja $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$, com segunda forma fundamental limitada A e, para algum $0 \leq r \leq n-1$, H_r não muda de sinal e H_{r+1} é limitada. Se Dz tem norma integrável na folha M e o fator conforme ψ de V satisfaz*

$$\frac{1}{|V|^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq -c, \tag{5.50}$$

onde t denota o parâmetro real do fluxo de V, então $\Sigma(z)$ é $(r-1)$-mínima. Além disso, se H_{r+1} também não muda de sinal, então o índice de nulidade relativa mínimo η_0 de $\Sigma(z)$ é ao menos $n-(r-1)$.

Demonstração. Consideremos a função $f_V : \Sigma(z) \to \mathbb{R}$, dada por $f_V = \langle V, N\rangle$. Temos que f_V é negativa em $\Sigma(z)$ ae, de (5.41), $\nabla f_V = -A(V^\top)$. Além disso, tendo em conta a equação (5.43), usando o Teorema 2 de [26] temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} P_r \nabla f_V = & \left(n\binom{n}{r+1} H H_{r+1} - (n-r-1)\binom{n}{r+1} H_{r+2}\right. \\ & \left. -c(r+1)\binom{n}{r+1} H_r\right) f_V - (r+1)\binom{n}{r+1}\frac{H_r}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} f_V \\ & + (r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}\psi + \binom{n}{r+1}\langle V, \nabla H_{r+1}\rangle. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Por outro lado, da equação (5.37) temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} H_{r+1} V^\top &= \langle \nabla H_{r+1}, V\rangle + H_{r+1}\mathrm{div} V^\top \\ &= \langle \nabla H_{r+1}, V\rangle + n\psi H_{r+1} + nHH_{r+1} f_V. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Assim, considerando em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangentes $Y = P_r\nabla f_V - \binom{n}{r+1} H_{r+1} V^\top$, de (5.51) e (5.52) temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} Y = & \left(-(n-r-1)\binom{n}{r+1} H_{r+2} - c(r+1)\binom{n}{r+1} H_r\right) f_V \\ & -(r+1)\binom{n}{r+1}\frac{H_r}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} f_V - (n-r-1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}\psi. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Por outro lado, da equação (5.48), temos

$$\mathrm{div} P_{r+1} V^\top = (n-r-1)\binom{n}{r+1}\psi H_{r+1} + (n-r-1)\binom{n}{r+1} H_{r+2} f_V. \tag{5.54}$$

Agora, consideremos em $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangentes

$$X = Y + P_{r+1} V^\top.$$

Como $|A|$ é limitada, de (2.12) temos que $|P_r|$ é também limitada, para qualquer $1 \le r \le n$. Portanto, de (5.41),

$$|X| \le \left(|Y| + |P_{r+1}V^\top|\right) \le \left(|P_r||A| + \binom{n}{r+1}|H_{r+1}| + |P_{r+1}|\right)|V^\top|.$$

Consequentemente, como estamos assumindo que H_{r+1} é limitada, podemos usar mais uma vez o Lema 5.1 para garantir que X tem norma integrável em $\Sigma(z)$. Além disso, de (5.53) e (5.54),

$$\mathrm{div}X = -(r+1)\binom{n}{r+1}\left(\frac{1}{|V|^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\right)H_r f_V. \tag{5.55}$$

Portanto, como H_r não muda de sinal em $\Sigma(z)$ e tendo em conta a hipótese (5.50), temos que $\mathrm{div}X$ não muda de sinal em $\Sigma(z)$. Assim, o Lema 2.21 nos dá $\mathrm{div}X = 0$ em $\Sigma(z)$. Em particular, retornando à equação (5.55), temos que $H_r = 0$ em $\Sigma(z)$.

Além disso, supondo que H_{r+1} não muda de sinal em $\Sigma(z)$, de (5.54) obtemos que

$$\mathrm{div}P_r V^\top = (n-r)\binom{n}{r}H_{r+1}f_V \tag{5.56}$$

também não muda de sinal em $\Sigma(z)$. Aqui, observamos que $|P_r V^\top| \leq |P_r||V^\top|$. Portanto, o Lema 2.21 também nos dá $\mathrm{div}P_r V^\top = 0$ em $\Sigma(z)$ e, retornando à equação (5.56), vemos que $H_{r+1} = 0$ em $\Sigma(z)$.

Dessa forma, como $H_r = H_{r+1} = 0$ em $\Sigma(z)$, podemos aplicar mais uma vez a Proposição 1 de [40] a fim de concluir que $H_j = 0$ para todo $j \geq r$ e, assim, temos que $\eta_0 \geq n - (r-1)$. □

Referências Bibliográficas

[1] N. Abe, N. Koike and S. Yamaguchi, *Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form*, Yokohama Math. J. **35** (1987), 123–136.

[2] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987), 13–19.

[3] J. A. Aledo, L. J. Alías and A. Romero, *Integral formulas for compact space-like hypersurfaces in de Sitter space: Applications to the case of constant higher order mean curvature*, J. Geom. Phys. **31** (1999), 195–208.

[4] H. Alencar and M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1223–1229.

[5] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large I*, Vestinik Leiningrad Univ. **11** (1956), 5–17 .

[6] A.D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl. **58** (1962), 303–315.

[7] L. J. Alías, A. Brasil Jr. and A. G. Colares, *Integral Formulae for Spacelike Hypersurfaces in Conformally Stationary Spacetimes and Applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **46** (2003), 465–488.

[8] L.J. Alías, M. Dajczer and J.B. Ripoll, *A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 363–373.

[9] L.J. Alías, D. Impera and M. Rigoli, *Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 591–621.

[10] L.J. Alías, J.H. de Lira and J.M. Malacarne, *Constant higher order mean curvature hypersufaces in Riemannian spaces*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006) , 527–562.

[11] A.L. Albujer and L.J. Alías, *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 711–721.

[12] A.L. Albujer, F. Camargo and H.F. de Lima, *Complete spacelike hypersurfaces in a Robertson-Walker spacetime*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **151** (2011), 271–282.

[13] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relat. Grav. **27** (1995), 71–84.

[14] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems*, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 337–345.

[15] L.J. Alías, J.H.S. de Lira and J.M. Malacarne, *Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 527–562.

[16] L.J. Alías and M. Dajczer, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), 653–663.

[17] L.J. Alías and A.G. Colares, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143** (2007), 703–729.

[18] L.J. Alías, D. Impera and M. Rigoli, *Spacelike hypersurfaces of constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **152** (2012), 365–383.

[19] K. Andrzejewski and P. Walczak, *The Newton transformation and new integral formulae for foliated manifolds.* Ann. Global Anal. Geom. **37** (2010), 103–111.

[20] C.P. Aquino and H.F. de Lima, *On the rigidity of constant mean curvature complete vertical graphs in warped products*, Diff. Geom. Appl. **29** (2011), 590–596.

[21] J. L. M. Barbosa and M. do Carmo, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Z. **185** (1984), 339–353.

[22] J. L. M. Barbosa, M. do Carmo and J. Eschenburg, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Z. **197** (1988), 123–138.

[23] J. L. M. Barbosa and A. G. Colares, *Stability of Hypersurfaces with Constant $r-$Mean Curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277–297.

[24] J. L. M. Barbosa and V. Oliker, *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz Spaces*, Matem. Contemporânea **4** (1993), 27–44.

[25] A. Barros, A. Brasil and A. Caminha, *Stability of spacelike hypersurfaces in foliated spacetimes*, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 357–365.

[26] A. Barros and P. Sousa, *Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3105–3114.

[27] S. Bernstein, *Sur les surfaces d'efinies au moyen de leur courboure moyenne ou totale*, Ann. Ec. Norm. Sup. **27** (1910), 233–256.

[28] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentziana Geometry*, Second Edition. CRC Press, (1996).

[29] A. Brasil Jr., A.G. Colares and O. Palmas, *A gap theorem for complete constant scalar curvature hypersurfaces in the de Sitter space*, J. Geom. Phys. **37** (2001), 237–250.

[30] A. Brasil Jr., A.G. Colares and O. Palmas, *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space: A gap theorem*, Illinois J. of Math **47** (2003), 847–866.

[31] A. Brasil Jr. and A. G. Colares, *Stability of spacelike hypersurfaces with constant r-mean curvature in de Sitter space,*. Proceedings of the XII Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. R. Soc. Mat. Esp. **7**, R. Soc. Mat. Esp. Madrid (2004), 139–145.

[32] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, *Constant mean curvature spacelike surfaces in three-dimensional generalized Robertson-Walker spacetimes*, Lett. Math. Phys. **93** (2010), 85–105.

[33] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, *Uniqueness of maximal surfaces in Generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 394–402.

[34] F. Camargo, A. Caminha and H.F. de Lima, *Bernstein-type theorems in semi-Riemannian warped products*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 1841–1850.

[35] L. Cafarelli, L. Nirenberg and J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985), 262–301.

[36] F.E.C. Camargo, R.M.B. Chaves and L.A.M. Sousa Jr., *Rigidity theorems for complete spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in de Sitter space*, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 592–599.

[37] F. Camargo, A. Caminha, M. da Silva and H. de Lima, *On the r-stability of sapalike hypersurfaces*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 1402–1410.

[38] A. Caminha, *Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2004).

[39] A. Caminha, *A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Diff. Geom. and Appl. **24** (2006), 652–659.

[40] A. Caminha, *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds*, J. Geom. Phys. **56** (2006), 1144–1174.

[41] A. Caminha and H.F. de Lima, *Complete vertical graph with constant mean curvature in Semi-Riemannian warped products*, Bull. Belgian Math. Soc. **16** (2009), 91–105.

[42] A. Caminha, P. Sousa and F. Camargo, *Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **41** (2010), p339.

[43] A. Caminha, *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **42** (2011), 277–300.

[44] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), 177–191.

[45] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195–204.

[46] X. Cheng e H. Rosenberg, *Embedded positive constant r-mean curvature hypersurfaces in $M^m \times \mathbb{R}$*, An. Acad. Bras. Cienc. **77(2)** (2005), 183–199.

[47] Q.M. Cheng and S. Ishikawa, *Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature*, Manuscripta Math. **95** (1998), 499–505.

[48] S.M. Choi, S.M. Lyu and Y.J. Suh, *Complete space-like hypersurfaces in a Lorentz manifold*, Math. J. Toyama Univ. **22** (1999), 53–76.

[49] A.G. Colares and H.F. de Lima, *Some rigidity theorems in semi-Riemannian warped products*, Kodai Math. J. **35**, (2012), 268–282.

[50] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1973).

[51] H. F. de Lima, *Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará (2002).

[52] H. F. de Lima, *Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2007).

[53] H. F. de Lima, *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 967–975.

[54] H. F. de Lima and J. R. de Lima, *Complete hypersurfaces immersed in a semi-Riemannian warped product*, Diff. Geom. Appl. **30** (2012), 136–143.

[55] H. F. de Lima and J. R. de Lima, *Complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces immersed in a locally symmetric Lorentz space*, to appear in Results in Math.

[56] H. F. de Lima and J. R. de Lima, *Characterizations of linear Weingarten spacelike hypersufaces in Einstein spacetimes*, to appear in Glasgow Math. J.

[57] H. F. de Lima, J. R. de Lima and M. A. L. Velásquez, *Entire conformal Killing graphs*, to appear in The Journal of Geometric Analysis.

[58] H. F. de Lima, J. R. de Lima and M. A. L. Velásquez, *On the nullity of conformal Killing graphs in foliated Riemannian spaces*, to appear in Aequationes Mathematicae.

[59] H.F. de Lima and Marco A.L. Velásquez, *On the geometry of linear Weingarten spacelike hypersurfaces in the de Sitter space*, Bull. Braz. Math. Soc. **44** (2013), 1–17.

[60] M. Dajczer, et al., *Submanifolds and Isometric Immersions.* Publish or Perish, Houston, (1990).

[61] M. Dajczer, P. Hinojosa and J. H. de Lira, *Killing graphs with prescribed mean curvature*, Calc. Var. Partial Diff. Eq. **33** (2008), 231–248.

[62] M. Dajczer and J. H. de Lira, *Conformal Killing graphs with prescribed mean curvature*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 780–799.

[63] M. F. Elbert, *Constant positive 2-mean curvature hypersuperfaces*, Illinois J. Math **46** (2002), 247–267.

[64] D. Ferus, *On the completeness of nullity foliations.* Mich. Math. J. **18** (1971), 61–64.

[65] S. Fornari and J. Ripoll, *Killing fields, mean curvature, translation maps.* Illinois J. Math **48** (2004), 1385–1403.

[66] M. Gaffney, *A special Stokes' theorem for complete Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **60** (1954), 140–145.

[67] L. Gårding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8** (1959), 957–965.

[68] A. J. Goddard, *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **82** (1977), 489–495.

[69] Z.-J. Hu, M. Scherfner and S.-J. Zhai, *On spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the de Sitter space*, Diff. Geom. Appl. **25** (2007), 594–611.

[70] J. J. Jellett, *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl. **18** (1853), 163–167.

[71] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **218**, Ed. Board, (2003).

[72] H. Li, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Mat. **35** (1997), 327–351.

[73] H. Li, Y. J. Suh and G. Wei, *Linear Weingarten hypersurfaces in a unit sphere*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 321–329.

[74] A. Lichnerowicz, *L'integration des équations de la gravitation relativiste et le problème n corps*, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 37–63.

[75] H. Liebmann, *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, Nachr. Kg. Ges. Wiss. Götingen, Math. Phys. Kl. (1899), 44–55.

[76] J. Liu and Z. Sun, *On spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in locally symmetric Lorentz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), 195–203.

[77] S. Montiel, *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in the de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 909–917.

[78] S. Montiel, *A characterization of hyperbolic cylinders in the de Sitter space*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 23–31.

[79] S. Montiel, *Unicity of Constant Mean Curvature Hypersurfaces in Some Riemannian Manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

[80] S. Montiel, *Uniqueness of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in foliated Spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.

[81] S. Montiel and A. Ros, *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, in *Differential geometry* (ed. B. Lawson e K. Tenenblat), Longman, (1991), 279–296.

[82] J. Ok Baek, Q. M. Cheng and Y. Jin Suh, *Complete space-like hypersurfaces in locally symmetric Lorentz spaces*, J. Geom. Phys. **49** (2004), 231–247.

[83] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. **96** (1974), 207–213.

[84] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205–214.

[85] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, New York: Academic Press (1983).

[86] T. K. Pan, *Conformal Vector Fields in Compact Riemannian Manifolds*, Proc. American Math. Soc. **14** (1963), 653–657.

[87] R. Reilly, *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, J. Diff. Geom. **8** (1973), 465–477.

[88] A. Romero and R. M. Rubio, *On the mean curvature of spacelike surfaces in certain three-dimensional Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein's type problems*, Ann. Glob. Anal. Geom. **37** (2010), 21–31.

[89] A. Romero and R. M. Rubio, *A Nonlinear Inequality Arising in Geometry and Calabi-Bernstein Type Problems*, J. Inequal. Appl. (2010), Article ID 950380, 10 p.

[90] H. Rosenberg, *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms*, Bull. Sc. Math. **117** (1993), 217–239.

[91] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds.* Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.

[92] Y. J. Suh, Y. S. Choi and H.Y. Yang, *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in a Lorentz manifold*, Houston J. Math. **28** (2002), 47–70.

[93] R. Wald, *General Relativity*, Univ of Chicago Press, Chicago (1984).

[94] Y. Xin, *Minimal submanifolds and related topics*, World scientific publishing co., Singapore (2003).

[95] L. Ximin and D. Junlei, *Stable space-like hypersurfaces in the de Sitter Space*, Arch. Mathematicum (BRNO) Tomus **40** (2004), 111–117.

[96] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.

[97] S. T. Yau, *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 659–670.

[98] S. Zhang and B. Wu, *Rigidity theorems for complete spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in locally symmetric Lorentz spaces*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 333–340.