Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Imersões de Subvariedades Completas

por

Jogli Gidel da Silva Araújo

Campina Grande - PB
Julho/2017

Imersões de Subvariedades Completas

por

Jogli Gidel da Silva Araújo †

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Julho/2017

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (Orientador)

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Julho/2017

Resumo

O propósito desta Tese é é estudar a geometria de subvariedades completas imersas em certos espaços semi-Riemannianos. Nos capítulos iniciais estabelecemos resultados de unicidade e rigidez de hipersuperfícies completas isometricamente imersas num produto warped semi-Riemanniano mediante restrições apropriadas sobre as curvaturas médias de ordem superior. Na última parte deste trabalho, usando uma fórmula do tipo Simons, investigamos as subvariedades completas com vetor curvatura média normalizado paralelo imersas em formas espaciais Riemannianas. Nesse contexto, obtemos alguns resultados de caracterização destas subvariedades.

Palavras-chave: Produtos warped semi-Riemannianos; formas espaciais Riemannianas; subvariedades completas; curvaturas de ordem superior; vetor curvatura média.

Abstract

The purpose of this Thesis is study the geometry of complete submanifolds immersed in certain semi-Riemannian spaces. In the initial chapters, we establish uniqueness and rigidity results concerning complete hypersurfaces isometrically immersed in a semi-Riemannian warped product space through some appropriate restrictions on the higher order mean curvatures. In the last part of this work, using a Simons type formula, we investigate complete submanifolds immersed with parallel normalized mean curvature vector field in Riemannian space forms. In this context, we obtain some results of characterizations for these submanifolds.

Keywords: Semi-Riemannian warped products; Riemannian space forms; complete submanifolds; higher order mean curvatures; mean curvature vector field.

Agradecimentos

A Deus pela vida, aos meus pais, ao meu orientador pela dedicação e paciência, aos membros da banca examinadora, aos amigos e a CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução 1

1 Preliminares **4**

1.1 Variedades semi-Riemannianas 4

1.2 Imersões isométricas e suas equações fundamentais 5

1.3 As curvaturas médias de ordem superior H_r, as transformações de Newton P_r e os operadores diferenciais lineares L_r 7

2 Hipersuperfícies em produtos warped Riemannianos **11**

2.1 Produtos warped Riemannianos 11

2.2 Rigidez de hipersuperfícies completas em $I \times_f M^n$ 12

2.3 Um critério de parabolicidade 17

2.4 Resultados de unicidade 20

2.5 Extensões para curvaturas médias de ordem superior 25

3 Hipersuperfícies tipo-espaço em um espaço-tempo GRW **29**

3.1 Espaços-tempo GRW 29

3.2 Unicidade de hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo GRW . . 31

3.3 Gráficos inteiros tipo-espaço 44

4 Subvariedades completas em formas espaciais Riemannianas **47**

4.1 Alguns fatos básicos 47

4.2 Uma fórmula tipo Simons 49

4.3 Lemas auxiliares 51

4.4 Caracterização de subvariedades com curvatura escalar constante 53

4.5 Caracterizações de subvariedades Weingarten lineares 58

Referências **66**

Introdução

Uma temática importante na teoria das imersões isométricas é o estudo das propriedades tipo Bernstein relativas às hipersuperfícies completas imersas em um espaço produto *warped* semi-Riemanniano do tipo $\varepsilon I \times_f M^n$, onde M^n é uma variedade Riemanniana orientada conexa n-dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função suave positiva e $\varepsilon = \pm 1$. Seguindo essa linha de pesquisa, um de nosso objetivos é estabelecer algumas condições suficientes para garantir que uma hipersuperfície completa imersa em um produto warped semi-Riemanniano $\varepsilon I \times_f M^n$ seja um slice $\{t\} \times M^n$, sob restrições apropriadas em suas curvaturas médias de ordem superior. A nossa abordagem é baseada na extensão do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau aplicados aos operadores linearizados das curvaturas médias de ordem superior. Ressaltamos que, comparados com aqueles resultados na literatura atual, nossos resultados não requerem que alguma curvatura média de ordem superior das hipersuperfícies em estudo seja constante e nem a existência de um ponto elíptico em tal hipersuperfície. Além disso, observamos também que os resultados de rigidez aqui apresentados são extensões naturais daquelas obtidas em [19, 22].

Campos de vetores Killing conformes são objetos importantes que têm sido estudados para entender a geometria de subvariedades e, em particular, de hipersuperfícies imersas em espaços Riemannianos. Neste sentido, Montiel [68] estudou as hipersuperfícies compactas com curvatura média constante imersas em um produto warped do tipo $\mathbb{R} \times_f M^n$ e $\mathbb{S}^1 \times_f M^n$, onde a curvatura de Ricci Ric_M da fibra M^n e a função warping f satisfazem a seguinte condição de convergência:

$$\mathrm{Ric}_M \geq (n-1) \sup_I (f'^2 - ff'').$$

Observemos que tal classe de produto warped são munidas com um campo de vetores Killing conforme globalmente definido dado por $f\partial_t$, onde ∂_t denota o campo de vetores tangente a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$. Nesse contexto, inspirados pelo trabalho de Romero et al. [77], no Capítulo 2 estabelecemos um critério de parabolicidade para hipersuperfícies sabendo que sua fibra M^n tem cobertura universal parabólica e obtemos alguns resultados de unicidade juntamente com algumas estimativas envolvendo o indice de nulidade relativa.

Diversos autores estudaram alguns problemas de unicidade de hipersuperfícies completas tipo espaço com curvatura média constante em um espaço-tempo generalizado de Robertson-Walker (GRW), isto é, produtos warped Lorentzianos com base negativa definida 1-dimensional e fibra Riemanniana. Por exemplo, podemos citar os trabalhos de [5, 31, 32, 33, 76, 77, 78] onde Romero et al. obtiveram resultados de unicidade para hipersuperfícies completas tipo-espaço imersas com curvatura média constante em um espaço-tempo GRW obedecendo a condição de convergência nula (NCC) ou a condição de convergência tipo-tempo (TCC). Lembremos que um espaço tempo obedece a (NCC) ou a (TCC) se a forma quadrática associada ao tensor de Ricci é não-negativa sobre as direções tipo-luz ou tipo-tempo, respectivamente. Já em [13], Alías e Colares consideraram um espaço-tempo GRW obedecendo uma nova noção de condição de convergência, chamada condição de convergência nula forte (SNCC), a qual corresponde à seguinte restrição sobre a curvatura seccional K_{M^n} da fibra Riemanniana M^n do espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$:

$$K_M \geq \sup_I (ff'' - f'^2).$$

Considerando este contexto, no Capítulo 3 aplicamos alguns princípios do máximo com o objetivo de estabelecer novos resultados de unicidade referentes a hipersuperfícies tipo-espaço imersas em um espaço-tempo GRW satisfazendo uma determinada condição de convergência.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos subvariedades completas M^n com curvatura escalar positiva constante e vetor curvatura média normalizado paralelo em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ de curvatura seccional constante $c \in \{1, 0, -1\}$. Nesta configiração, obtemos uma fórmula tipo-Simons e um princípio do máximo do tipo-Omori para o operador quadrado de Cheng-Yau, e utilizamos tais ingredientes analíticos para provar uma nova caracterização de tais subvariedades. Em seguida, tratamos de subvariedades Weingarten lineares com vetor curvatura média normalizado paralelo imersas em $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Neste caso, estendemos a técnica desenvolvida em [23] para caracterizar tais subvariedades sob uma restrição adequada da norma do operador de umbilicidade, obtendo generalizações naturais dos resultados de [23] e [52].

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é estabelecer algumas notações as quais serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Nesta seção, apresentamos alguns fatos básicos da teoria de variedades semi-Riemannianas. No que segue, iniciamos com a seguinte definição

Definição 1.1.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e $b = \langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e simétrica. Dizemos que b é*

i. positiva definida, quando $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V - \{0\}$.

ii. negativa definida, quando $\langle v, v \rangle < 0$ para todo $v \in V - \{0\}$.

iii. não degenerada, quando $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in V$ implicar $v = 0$.

Dizemos ainda que um subespaço W de V é não degenerado quando a restrição $b|_{W \times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não degenerada. Um importante conceito é o índice de uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ que é definido como sendo a maior dimensão de um subespaço W de V de modo que $b|_{W \times W}$ seja negativa definida. Denotamos por ν_b o índice de b.

Definição 1.1.2 *Seja $b = \langle , \rangle$ uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre o espaço vetorial real V. Dizemos que $v \in V - \{0\}$ é:*

i. tipo-tempo, quando $\langle v, v \rangle < 0$;

ii. tipo-luz, quando $\langle v, v \rangle = 0$;

iii. tipo-espaço, quando $\langle v, v \rangle > 0$.

De maneira similar, um subespaço não degenerado W de V é tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, quando ocorrer $\langle w, w \rangle < 0$, $\langle w, w \rangle = 0$ ou $\langle w, w \rangle > 0$ para todo $w \in W$, respectivamente. Seja $v \in V - \{0\}$ um vetor tipo-tempo ou tipo-espaço. Definimos o sinal ε_v de v pondo

$$\varepsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A norma de $v \in V$ é definida por $|v| = \sqrt{\varepsilon_v \langle v, v \rangle}$. Dizemos que v é um vetor unitário se $|v| = 1$.

1.2 Imersões isométricas e suas equações fundamentais

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-Riemanniana. Uma imersão isométrica $\psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão que satisfaz a condição $\psi^* \overline{g} = g$. Por simplicidade, denotamos os tensores métricos de M^n e $\overline{M}^{n+1}$ pelo mesmo símbolo $\langle , \rangle$.

Definição 1.2.1 *Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade diferenciável n-dimensional Σ^n em uma variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}^{n+1}$ é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida em Σ^n pela imersão ψ for uma métrica Riemanniana. Neste caso, dizemos que a imersão ψ é Riemanniana.*

No que segue, $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ denotará uma imersão Riemanniana de uma variedade diferenciável n-dimensional Σ^n numa variedade Riemanniana orientada. Neste caso, N representa o campo unitário e normal que orienta Σ^n. Denotamos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente. É possível mostrar que $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, onde $()^\top$ denota a componente tangencial de um campo de vetores ao longo de Σ^n. A segunda forma fundamental da imersão ψ é a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma^n)$ que cumpre a condição

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{1.1}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Observe que sendo α uma forma $C^\infty(\Sigma^n)$-bilinear e simétrica, obtemos um campo $A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_p\Sigma^n \longrightarrow T_p\Sigma^n$, denominados operadores de Weingarten da imersão ψ, definindo

$$\langle AX, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), N\rangle. \tag{1.2}$$

É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \varepsilon_N \langle AX, Y\rangle N, \tag{1.3}$$

onde X e Y são campos tangentes a Σ^n. Temos ainda que o tensor de curvatura R de Σ^n é definido como a aplicação $R : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.4}$$

onde $[,]$ denota o colchete de Lie.

Na Proposição seguinte temos as equações fundamentais de uma imersão isométrica. Sua demonstração pode ser encontrada em [72].

Proposição 1.2.2 *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se R e $\overline{R}$ denotam os respectivos tensores de curvatura de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$, então, para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, temos que*

i. (Equação de Gauss)

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^\top + \varepsilon_N[\langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX] \tag{1.5}$$

ii. (Equação de Codazzi)

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \tag{1.6}$$

Um caso particular da Proposição anterior é dado pelo seguinte:

Corolário 1.2.3 *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ é um ambiente de curvatura seccional constante c. Então, para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ temos*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W\rangle &= c[\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle] + && (1.7)\\ &+ \varepsilon_N[\langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle - \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle] && (1.8) \end{aligned}$$

onde R é o tensor de curvatura de Σ^n, e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{1.9}$$

Definição 1.2.4 *Sejam $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e σ um subespaço 2-dimensional não degenerado de $T_p\overline{M}$. A curvatura seccional de $\overline{M}$ segundo σ é o número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2},$$

onde $\overline{R}$ denota o tensor de curvatura de $\overline{M}$.

Definição 1.2.5 *Dizemos que a variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante quando, para cada $p \in \overline{M}$, $K(\sigma_1) = K(\sigma_2)$ para quaisquer subespaços não degenerados σ_1 e σ_2 em $T_p\overline{M}$.*

Uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu = 0$ é simplesmente uma variedade Riemanniana. Quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma variedade Lorentziana (ou espaço-tempo).

Definição 1.2.6 *Se $\overline{M}$ é uma variedade semi-Riemanniana, o tensor de Ricci de $\overline{M}$ é definido por*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(X,Z)Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}).$$

Se $p \in \overline{M}$ e $X \in T_p\overline{M}$, $|X| = 1$, o número Ric(X,X) chama-se curvatura de Ricci em p na direção de X.

Assim, se $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X,e_i)Y, e_i\rangle,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Definição 1.2.7 *A curvatura escalar de $\overline{M}$ é a função $\overline{S} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{S} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j, e_j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} K(e_i, e_j).$$

1.3 As curvaturas médias de ordem superior H_r, as transformações de Newton P_r e os operadores diferenciais lineares L_r

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana conexa munida com a métrica $\overline{g} = \langle , \rangle$ de índice $\nu \leq 1$, e uma conexão semi-Riemanniana $\overline{\nabla}$. Para um campo de vetores

$X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$, considere $\epsilon_X = \langle X, X\rangle$. Dizemos que X é um campo de vetores unitário se $\epsilon_X = \pm 1$, e tipo-tempo se $\epsilon_X = -1$.

No que segue, consideramos uma imersão Riemanniana $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, onde Σ^n é uma variedade diferenciável orientada n-dimensional e conexa, tal que a métrica induzida $g = \psi^*(\overline{g})$ de Σ^n sobre uma variedade Riemanniana (no caso de Lorentz $\nu = 1$, nos referimos o par (Σ^n, g) como uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$), com a conexão de Levi-Civita ∇.

Neste cenário, escolhemos em Σ^n um campo de vetores N. No que segue, denotamos A como sendo o correspondente operador forma, então, para cada $p \in \Sigma^n$, A restringe a uma aplicação linear auto-adjunta $A_p : T_p\Sigma^n \longrightarrow T_p\Sigma^n$.

Para $0 \leq r \leq n$, considere $S_r(p)$ como sendo uma r-ésima função simétrica elementar sobre os auto-valores de A_p; consequentemente temos n funções suaves $S_r : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$det(tI - [A]_p) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k t^{n-k},$$

onde $S_0 = 1$ por convenção e $[A]_p$ denota a matriz canônica diagonalizada contendo os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ do operador A_p. Se $p \in \Sigma^n$ e $e_1, e_2, \ldots, e_n$ é uma base de $T_p\Sigma^n$ contendo apenas os auto-vetores de A_p, com seus correspondentes auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, observamos que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \tag{1.10}$$

onde $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Além disso, definamos a r-ésima curvatura média H_r de ψ, $0 \leq r \leq n$, por

$$\binom{n}{r} H_r = \epsilon_N^r S_r = \sigma_r(\epsilon_N\lambda_1, \epsilon_N\lambda_2, \ldots, \epsilon_N\lambda_n).$$

Observamos que $H_0 = 1$ e H_1 é a curvatura média usual H de Σ^n.

Para $0 \leq r \leq n$, definamos a r-ésima transformação de Newton P_r sobre Σ^n por $P_0 = I$(o operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$, via a relação de recorrência

$$P_r = \epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1}. \tag{1.11}$$

Por indução, a partir de (1.11) concluimos que

$$P_r = \epsilon_N^r (S_r I - S_{r-1}A + S_{r-2}A^2 - \cdots + (-1)^r A^r), \tag{1.12}$$

e pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos $P_n = 0$. Ademais, segue que P_r é um polinômio em A para cada r, também auto-adjunto e comuta com A. Portanto, todas as bases de $T_p\Sigma^n$ que diagonalizam A em $p \in \Sigma^n$ também diagonalizam todos os P_r's em p. Considere $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um referencial ortonormal sobre $T_p\Sigma$ que diagonaliza A_p, $A_p(e_i) = \lambda_i(p)e_i$, então a partir (1.12) temos

$$(P_r)_p e_i = \epsilon_N^r \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1}(p)\lambda_{i_2}(p)\ldots\lambda_{i_r}(p)e_i. \tag{1.13}$$

Associado para cada transformação de Newton P_r temos um operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ dado por

$$L_r(h) = tr(P_r Hess h). \tag{1.14}$$

Em particular, $L_0 = \Delta$ e, no caso que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, Rosenberg provou em [80] que $L_r h = div(P_r \nabla h)$, onde div denota o divergente sobre Σ^n (recomendamos para os leitores [27] para uma discussão mais aprofundada sobre as curvaturas médias de ordem superior, as transformações de Newton e operadores diferenciáveis linearizados).

Além disso, se $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ denota uma primitiva da função warping f, então a partir do Lema 4.1 de [13] e Proposição 4.1 de [12] temos

$$L_r\sigma(h) = \epsilon c_r(f'(h)H_r + f(h)\Theta H_{r+1}), \tag{1.15}$$

onde $c_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$.

Para uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h \in C^\infty(\Sigma^n)$, segue a partir das propriedades do Hessiano de funções que

$$L_r(\varphi \circ h) = \varphi'(h)L_r(h) + \varphi''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle. \tag{1.16}$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} L_r(f) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla f), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{P_r(e_i)}\nabla f), e_i\rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f \circ P_r), \end{aligned}$$

onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ é um referencial local ortonormal sobre Σ^n. Ademais, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r)(\nabla f), e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla f), e_i\rangle \\ &= \langle \operatorname{div} P_r, \nabla f\rangle + L_r(f), \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde o divergente de P_r sobre Σ^n é dado por

$$\mathrm{div} P_r = \mathrm{tr}(\nabla P_r) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} P_r)(e_i).$$

Capítulo 2

Hipersuperfícies em produtos warped Riemannianos

Nesse capítulo apresentamos os resultados referentes ao artigo [24]. Nosso objetivo é estudar a rigidez de hipersuperfícies completas imersas em um produto warped Riemanniano.

2.1 Produtos warped Riemannianos

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada n-dimensional conexa, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva suave. Na variedade produto diferenciável $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, π_I e π_{M^n} denotam as projeções sobre os fatores I e M^n, respectivamente. Uma classe particular de variedades Riemannianas contendo campos conformes é obtido por $\overline{M}^{n+1}$ com a métrica

$$\langle v, w \rangle_p = \langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w \rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_{M^n})_* v, (\pi_{M^n})_* w \rangle, \tag{2.1}$$

para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$ e todos $v, w \in T_p\overline{M}^{n+1}$, onde ∂_t é um campo de vetores standard tangente em I. Tais espaços é um caso particular de um produto warped Riemanniano, e, de agora em diante, escrevemos $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ para denotá-lo.

Observação 2.1.1 *Para $t_0 \in \mathbb{R}$, orientamos o slice $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ usando o campo de vetores normal ∂_t. De acordo com o exemplo 5.6 de [6] e seção 2 de [12], $\Sigma^n_{t_0}$ tem uma r-ésima curvatura média $H_r = -\left(\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}\right)^r$ com respeito a ∂_t.*

Se $\psi : \Sigma^n \longrightarrow I \times_f M^n$ é uma imersão Riemanniana, com Σ^n orientada por um campo de vetores unitário N. Neste caso, vamos considerar naturalmente duas funções particulares sobre Σ^n, chamadas, a função altura(vertical) $h = (\pi_I)|_{\Sigma^n}$ e a função ângulo $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$.

Não é difícil verificar que o campo gradiente de π_I sobre $I \times_f M^n$ é dado por

$$\overline{\nabla}\pi_I = \langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = \partial_t. \tag{2.2}$$

Assim, a partir de (3.2) verificamos que o campo gradiente de h sobre Σ^n é

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = \partial_t^\top = \partial_t - \Theta N. \tag{2.3}$$

Em particular, a partir de (3.3) obtemos

$$|\nabla h|^2 = (1 - \Theta^2), \tag{2.4}$$

onde $|.|$ denota a norma de um campo de vetores sobre Σ^n.

Observação 2.1.2 *Voltando ao contexto das imersões Riemannianas em produtos warped Riemannianos e levando em conta a terminologia estabelecida em [3], dizemos que uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \longrightarrow I \times_f M^n$ é limitada longe do infinito futuro de $I \times_f M^n$ se existe algum $\overline{t} \in I$ tal que*

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in I \times_f M^n; t \leq \overline{t}\}.$$

Analogamente, dizemos que Σ^n é limitada longe do infinito passado de $I \times_f M^n$ se existe $\underline{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in I \times_f M^n; t \geq \underline{t}\}.$$

2.2 Rigidez de hipersuperfícies completas em $I \times_f M^n$

Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana e $\mathcal{P} : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ um operador auto-adjunto. Extendendo a ideia do operador linearizado L_r definido em (1.14), consideramos um operador diferencial linear de segunda ordem $\mathcal{L} : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ naturalmente associado a $\mathcal{P}$, dado por

$$\mathcal{L}u = tr(\mathcal{P} Hess u). \tag{2.5}$$

A partir do Lema 4.2 de [15], temos o seguinte princípio do máximo generalizado relacionado com o operador $\mathcal{P}$, que é uma extensão do princípio do máximo generalizado de Omori [71] e Yau [91].

Lema 2.2.1 *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada por baixo, e $u \in C^\infty(\Sigma^n)$ uma função limitada por cima sobre Σ^n. Se $\mathcal{P}$ é positivo semi-definido e $tr(\mathcal{P})$ é limitado por cima sobre Σ^n, então existe uma sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^n tal que*

$$\lim_k u(p_k) = \sup_{\Sigma^n} u, \quad \lim_k |\nabla u(p_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_k \mathcal{L}u(p_k) \le 0,$$

onde o operador $\mathcal{L}$ é dado por (2.5).

No que segue, dizemos que uma hipersuperfície é dita ser two-sided se o fibrado normal é trivial, isto é, se existe um campo de vetores unitário normal globalmente definido N.

Vamos enunciar e demonstrar o nosso primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 2.2.2 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Riemanniano cuja fibra M^n tem curvatura seccional K_{M^n} satisfazendo a condição de convergência*

$$K_M \ge \sup_I((f')^2 - ff''). \tag{2.6}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície two-sided completa com a função ângulo $\Theta \le 0$ e cuja curvatura seccional K_{Σ^n} é limitada por baixo tal que

$$K_\Sigma \ge \frac{1}{f^2(h)}(K_M - (f'(h))^2). \tag{2.7}$$

Suponha que, para algum $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, existem constantes positivas α e β tais que $\alpha \le H_r \le \beta$ e que uma das seguintes condições é satisfeita

(i) Σ^n é limitada longe do infinito futuro de $\overline{M}^{n+1}$ e $\dfrac{f'}{f}(h) \ge \dfrac{H_{r+1}}{H_r}$.

(ii) Σ^n é limitada longe do infinito passado de $\overline{M}^{n+1}$ e $\dfrac{f'}{f}(h) \le \dfrac{H_{r+1}}{H_r}$.

Se $|\nabla h| \le \inf_{\Sigma^n}\left|\frac{H_{r+1}}{H_r} - \frac{f'}{f}(h)\right|$, então Σ^n é um slice $\{t\} \times M^n$.

Demonstração. Defina um operador auto-adjunto $\mathcal{P}_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \to \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ por

$$\mathcal{P}_r = H_r P_r.$$

Para cada $p \in \Sigma^n$, considere um referencial local ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$. A partir de (1.13) temos que $P_r e_i = \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obtemos

$$\langle \mathcal{P}_r e_i, e_i\rangle = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i, j_1<\ldots<j_r} (\lambda_{i_1}\lambda_{j_1})\ldots(\lambda_{i_r}\lambda_{j_r}).$$

A partir da equação de Gauss, temos

$$K_\Sigma(e_i, e_j) = \overline{K}(e_i, e_j) + \lambda_i \lambda_j.$$

Além disso, usando mais uma vez a Proposição 7.42 de [72] obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)W &= R_{M^n}(U^*,V^*)W^* - ((\log f)'(h))^2(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U) \\
&- (\log f)''(h)\langle W,\partial_t\rangle(\langle U,\partial_t\rangle V - \langle V,\partial_t\rangle U) \\
&- (\log f)''(h)(\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t\rangle - \langle U,\partial_t\rangle\langle V,W\rangle)\partial_t,
\end{aligned}$$

para campos de vetores arbitrários $U, V, W \in \overline{M}^{n+1}$, onde $U^* = (\pi_{M^n})_* U = U - \langle U, \partial_t\rangle\partial_t$.

Então, para uma base ortonormal X, Y temos

$$\begin{aligned}
\overline{K}(X,Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)|X^*\wedge Y^*|^2 \\
&- ((\log f)'(h))^2 - (\log f)''(h)(\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2).
\end{aligned}$$

Desde que $|X^* \wedge Y^*|^2 = 1 - \langle X, \nabla h\rangle^2 - \langle Y, \nabla h\rangle^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{K}(X,Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)(1 - (\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2)) \\
&- ((\log f)'(h))^2 - (\log f)''(h)(\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*) - ((\log f)'(h))^2 \\
&- \left(\frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*) + (\log f)''(h)\right)(\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*) - \left(\frac{f'}{f}(h)\right)^2 \\
&- \left(\frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*) + \frac{ff''-(f')^2}{f^2}(h)\right)(\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2).
\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned}
\lambda_i\lambda_j &= K_\Sigma(e_i,e_j) - \overline{K}(e_i,e_j) \\
&= K_\Sigma(e_i,e_j) + \left(\frac{f'}{f}(h)\right)^2 - \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*) + \\
&+ \frac{1}{f^2(h)}(K_M(X^*,Y^*) + (ff''-(f')^2)(h))(\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2).
\end{aligned}$$

Assim, levando em conta a condição de convergência (2.6) e a desigualdade (2.7), obtemos

$$\lambda_i\lambda_j \geq 0,$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$. Portanto,

$$\langle \mathcal{P}_r e_i, e_i \rangle \geq 0,$$

e $\mathcal{P}_r$ é positivo semi-definido. Ademais, desde que H_r é limitado sobre Σ^n, o mesmo é válido para $tr(\mathcal{P}_r) = c_r H_r^2$.

Assuma que Σ^n é limitada longe do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_f M^n$, isto é, $h^* = \sup_{\Sigma^n} h < \infty$. A partir de (1.15) obtemos

$$L_r \sigma(h) = c_r f(h) H_r \left(\frac{f'}{f}(h) + \Theta \frac{H_{r+1}}{H_r} \right).$$

Defina o operador $\mathcal{L}_r : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ por

$$\mathcal{L}_r u = \mathrm{tr}(\mathcal{P}_r \circ Hess\, u). \tag{2.8}$$

Consequentemente, considerando o operador $\mathcal{L}_r$ definido em (2.8), temos

$$\mathcal{L}_r(\sigma(h)) \;\; = \;\; c_r f(h) H_r^2 \left(\frac{f'}{f}(h) + \Theta \frac{H_{r+1}}{H_r} \right).$$

A partir do Lema 2.2.1 obtemos uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ tal que

$$\limsup_k \mathcal{L}_r \sigma(h(p_k)) \leq 0 \tag{2.9}$$

e

$$\lim_k |\nabla \sigma(h(p_k))| = \lim_k \left(f(h(p_k)) |\nabla h(p_k)| \right) = 0,$$

isto é,

$$\lim_k |\nabla h(p_k)| = 0. \tag{2.10}$$

De fato, suponha que existe uma subsequência (p_{k_j}) de (p_k) tal que

$$|\nabla h(p_{k_j})| \geq c > 0, \tag{2.11}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0$ implica que

$$f(h(p_{k_j})) |\nabla h(p_{k_j})| < c\varepsilon \Rightarrow c f(h(p_{k_j})) < c\varepsilon \Rightarrow f(h(p_{k_j})) < \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim_j f(h(p_{k_j})) = 0. \tag{2.12}$$

Por outro lado, considerando uma subsequência, temos

$$0 < f(\sup_j h(p_{k_j})) = f(\lim_j h(p_{k_j})) = \lim_j f(h(p_{k_j})). \tag{2.13}$$

Assim, a partir de (2.12) e (2.13) chegamos a uma contradição.

Assim, assumindo que $\Theta \leq 0$ e desde que $\lim_k |\nabla h(p_k)| = 0$, obtemos que $\lim_k \Theta(p_k) = -1$.

Observamos também que

$$\frac{f'}{f}(\sup_j h(p_{k_j})) = \frac{f'}{f}(\lim_j h(p_{k_j})) = \lim_j \frac{f'}{f}(h(p_{k_j})).$$

Então, assumindo (i) obtemos

$$\lim_j(-\Theta)(p_{k_j})\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) = \lim_j \frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) \leq \lim_j \frac{f'}{f}(h(p_{k_j})).$$

Além disso, usando (2.9) obtemos

$$c_r \lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) \lim_j \left(\frac{f'}{f}(h(p_{k_j}) - \frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}))\right) \leq 0. \tag{2.14}$$

Por outro lado, supondo que $\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq \frac{f'}{f}(h)$, concluimos que

$$c_r \lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) \lim_j \left(\frac{f'}{f}(h(p_{k_j})) - \frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j})\right) \geq 0, \tag{2.15}$$

Além disso, sabemos que $0 < \alpha^2 \leq H_r^2 \leq \beta^2$, temos

$$\lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) > 0.$$

Então, a partir de (2.14) e (2.15) concluimos que

$$\lim_j \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) - \frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right) = 0$$

e, consequentemente,

$$\inf_\Sigma \left(\frac{H_{r+1}}{H_r} - \frac{f'}{f}(h)\right) = 0.$$

Assim, tendo em conta a construção sobre $|\nabla h|$, concluimos que Σ^n deve ser um slice.

De forma similar, no caso que Σ^n é limitada longe do infinito passado de $\overline{M}^{n+1}$ e $\frac{f'}{f}(h) \leq \frac{H_{r+1}}{H_r}$, obtemos também que

$$\inf_\Sigma \left(\frac{H_{r+1}}{H_r} - \frac{f'}{f}(h)\right) = 0,$$

o que significa que Σ^n é um slice. ■

Observação 2.2.3 *Vemos que as desigualdades diferenciais que estamos assumindo nos itens (i) e (ii) do Teorema 2.2.2 são, de fato, desigualdades de comparação natural entre as r-ésimas curvaturas médias, sem exigir que essas curvaturas sejam constantes.*

2.3 Um critério de parabolicidade

Dizemos que uma variedade Riemanniana não compacta é dita ser parabólica se não admite uma função positiva superharmônica não constante. Por outro lado, dadas duas variedades Riemannianas (Σ, g) e (Σ', g'), um difeomorfismo ψ a partir de Σ sobre Σ' é chamado uma quase-isometria se existe uma constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1}|v|_g \leq |d\psi(v)|_{g'} \leq c|v|_g$$

para todo $v \in T_p\Sigma, p \in \Sigma$. A partir do Teorema 1 de [55] (ver também o Corolário 5.3 de [51]), temos o seguinte

As fórmulas citadas no seguinte Lema são de Alías, Impera and Rigoli confira Proposição 6 e Corolário 28 de [12].

Lema 2.3.1 *Seja Σ^n uma hipersurpefície em um produto warped $I \times_f M^n$ com função altura h e considere*

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Então,

$$L_r(h) = \frac{f'(h)}{f(h)}\left(c_r H_r - \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle\right) + c_r H_{r+1}\Theta, \tag{2.16}$$

e

$$L_r g(h) = c_r f(h)\left(\frac{f'(h)}{f(h)} H_r + \Theta H_{r+1}\right). \tag{2.17}$$

Além disso, se Θ denota a função ângulo de Σ^n e suponha que a fibra de M^n tem curvatura seccional constante κ, então

$$\begin{aligned} L_r(f(h)\Theta) = &-\binom{n}{r+1} f(h)\langle \nabla h, \nabla H_{r+1}\rangle - c_r f'(h) H_{r+1} \\ &-f(h)\Theta(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}) \\ &-f(h)\Theta\left(\frac{\kappa}{f(h)^2} + \frac{f'(h)}{f(h)}\right)(c_r|\nabla h|^2 H_r - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle). \end{aligned} \tag{2.18}$$

A seguir apresentamos um Lema auxiliar

Lema 2.3.2 *Seja (Σ, g) e (Σ', g') duas variedades Riemannianas. Se Σ e Σ' são quase isométricas, então Σ e Σ' são parabólicas ou não simultanemante.*

Dada uma hipersuperfície completa two-sided Σ^n imersa em um produto warped $I \times_f M^n$, no próximo resultado usaremos o Lema 2.3.2 afim de proporcionar condições suficientes para garantir que Σ^n é parabólica. A prova segue de forma similar ao Teorema 4.4 de [77].

Proposição 2.3.3 *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa two-sided imersa em um produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica. Se a função ângulo Θ é limitada longe do zero e a restrição $f(h)$ para Σ^n satisfaz*

(a) $\sup f(h) < +\infty$ *e*

(b) $\inf f(h) > 0$,

então Σ^n é parabólica.

Demonstração. Inicialmente observemos que a seguinte aplicação

$$\pi := \pi_M \circ x : \Sigma^n \to M,$$

é um difeomorfismo local, onde π_M denota a projeção sobre M^n.

Por outro lado, dados $p \in \Sigma^n$ e $v \in T_p\Sigma^n$, temos da métrica (2.1) e equação (2.3), que

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \langle v, \nabla h\rangle^2 \langle \pi_I^*(\partial_t), \pi_I^*(\partial_t)\rangle + f(h)^2 \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M \\ &= \langle v, \nabla h\rangle^2 + f(h)^2 \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M, \end{aligned} \tag{2.19}$$

e consequentemente, obtemos a seguinte desigualdade

$$\langle v, v\rangle \geq f(h)^2 \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M.$$

A partir de outras hipóteses,

$$\langle v, v\rangle \geq c_1 \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M, \tag{2.20}$$

onde $c_1 = \min\{\inf f(h)^2, 1\}$.

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\langle v, \nabla h\rangle^2 \leq \langle \nabla h, \nabla h\rangle \langle v, v\rangle,$$

então, a partir de (2.19) obtemos

$$\langle v, v\rangle \leq \langle \nabla h, \nabla h\rangle \langle v, v\rangle + f(h)^2 \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M.$$

Assim, a partir da equação (2.4) obtemos

$$\langle v,v\rangle\Theta^2 \le f(h)^2\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M. \tag{2.21}$$

Desde que assumimos que a função ângulo de Σ^n é limitada longe do zero, temos que,

$$|\Theta| \ge \beta > 0, \tag{2.22}$$

para alguma constante $\beta > 0$.

Então, a partir (2.21) e (2.22), obtemos

$$\langle v,v\rangle \le c_2\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M, \tag{2.23}$$

onde $c_2 = \max\left\{1, \dfrac{\sup f(h)^2}{\inf \Theta^2}\right\}$ e, consequentemente, como Σ^n é completa concluimos que a partir do Lema 3.3 do Capítulo 7 de [40] que π é uma aplicação cobertura.

Portanto, a partir das desigualdades (2.20), (2.23) e (2.22) concluimos que

$$c_1\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M \le \langle v,v\rangle \le c_2\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M.$$

uma vez que $c_1 \le 1 \le c_2$, consideremos uma constante $c \ge 1$ suficientemente grande para que

$$c^{-1}\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M \le \langle v,v\rangle \le c\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle_M, \tag{2.24}$$

mostrando que π é uma quase-isometria entre Σ^n e M^n.

Agora, seja $\widetilde{\Sigma}$ uma cobertura Riemanniana universal Σ^n com projeção $\pi_\Sigma : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma^n$. Então, a aplicação $\pi_0 = \pi \circ \pi_\Sigma : \widetilde{\Sigma} \to M$ é uma aplicação cobertura. Agora, se $\widetilde{M}$ é uma cobertura Riemanniana universal de M com projeção $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to M$, então existe um difeomorfismo $\varphi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{M}$ tal que $\widetilde{\pi} \circ \varphi = \pi_0$. Além disso, a partir de (2.24) não é difícil verificar que φ é uma quase-isometria. Portanto, desde que a cobertura Riemanniana universal de M é parabólica, segue a partir do Lema 2.3.2 que a cobertura Riemanniana unversal de Σ^n é parabólica e, assim, Σ^n deve ser também parabólica. ■

Um caso particular da Proposição 2.3.3 é onde a função warping é identicamente um, isto é, o espaço ambiente é justamente o espaço produto $I \times M^n$. Neste caso, obtemos o seguinte

Corolário 2.3.4 *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa two-sided imersa em um produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica. Se a função ângulo é limitada longe do zero, então Σ^n é parabólica.*

2.4 Resultados de unicidade

Esta seção é dedicada a obter resultados de singularidade como aplicação do nosso critério de parabolicidade previamente apresentado. No que segue, uma região limitada $[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in I \times_f M^n : t_1 \leq t \leq t_2\}$ é chamada um slab de um produto warped $I \times_f M^n$.

Teorema 2.4.1 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem covertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, e*

$$0 \leq H \leq \frac{f'(h)}{f(h)}, \tag{2.25}$$

então Σ^n é um slice.

Demonstração. A partir da equação (2.17) do Lema 2.3.1 e (2.25) temos

$$\begin{aligned} \Delta g(h) &= n(f'(h) + f(h)H\Theta) \geq n(f'(h) - f(h)H) \\ &= nf(h)\left(\frac{f'(h)}{f(h)} - H\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Supondo que M^n tem cobertura universal parabólica, a partir da Propositição 2.3.3 segue que Σ^n é parabólica. Por outro lado, assumindo que Σ^n está contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$, garantimos que $g(h)$ é limitada. Consequentemente, a partir de (2.26) obtemos que $g(h)$ é consante. Portanto, desde que $g'(h) = f(h) > 0$, a função altura h é também constante e, assim, Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ∎

Quando o espaço ambiente é justamente o espaço produto, temos

Teorema 2.4.2 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$ e a função curvatura média H não muda de sinal sobre Σ^n, então Σ^n é um slice.*

Demonstração. A partir da equação (2.16) do Lema 2.3.1, obtemos

$$\Delta h = nH\Theta. \tag{2.27}$$

Como Θ é limitado longe do zero e H não muda de sinal sobre Σ^n, podemos ver que Δh também não muda de sinal sobre Σ^n. Por outro lado, supondo também que M^n tem cobertura universal parabólica, segue a partir do Corolário 2.3.4 que Σ^n é parabólica. Consequentemente, levando em conta que Σ^n está contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$, a partir de (2.27) obtemos que h é constante sobre Σ^n. Portanto, Σ^n deve ser um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Como foi mencionado na introdução, Montiel [68] estudou hipersuperfícies compactas em um produto warped $\mathbb{R} \times_f M$, cujo tensor curvatura de Ricci da fibra M^n satisfaz a seguinte condição de convergência

$$\mathrm{Ric}_M \geq (n-1) \sup_{\mathbb{R}} (f'^2 - ff'') \langle \, , \, \rangle_M. \tag{2.28}$$

Mais tarde, Alías e Dajczer [13] extenderam os resultados de Montiel [68] para o contexto de hipersuperfícies completas. Procedendo nesta temática, vamos aplicar o nosso critério de parabolicidade nesta ordem para obter os próximos resultados

Teorema 2.4.3 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e a curvatura de Ricci satisfazendo a condição de convergência* (2.28)*, e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided com curvatura média constante H e contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é totalmente umbílica. Além disso, se a desigualdade* (2.28) *é estrita, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. Consideremos a função suave $\phi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(p) = f(h(p))\Theta(p) + Hg(h(p)). \tag{2.29}$$

Usando o Lema 2.3.1, a partir de (2.29) temos que

$$\Delta\phi = -f(h)\Theta \left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2 - nH^2 \right). \tag{2.30}$$

Levando em conta (2.28), e desde que Θ é negativo sobre Σ^n, a partir de (2.30) concluimos que ϕ é uma função subharmônica. Como Σ^n está contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$ e H é constante, obtemos que ϕ é limitada sobre Σ^n. Mas, como M^n tem cobertura universal parabólica, a Propositição 2.3.3 garante que Σ^n é parabólica. Assim, temos que ϕ deve ser constante sobre Σ^n. Voltando a equação (2.30), temos

$$f(h)\Theta \left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2 - nH^2 \right) = 0.$$

Desde que $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, obtemos

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2 - nH^2 = 0.$$

Consequentemente, temos

$$|A|^2 - nH^2 = 0 \tag{2.31}$$

e

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 = 0. \tag{2.32}$$

A igualdade em (2.31) assegura que Σ^n é totalmente umbílica. Finalmente, quando a desigualdade (2.28) é estrita, a equação (2.32) implica que $N^*(p) = 0$ em qualquer $p \in \Sigma^n$, isto é, $\nabla h = 0$ sobre Σ^n e, assim, Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Como uma primeira consequência do Teorema 2.4.3, obtemos

Corolário 2.4.4 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e curvatura de Ricci satisfazendo a condiç ao de convergência (2.28), e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided com curvatura média constante H e contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é totalmente umbílica. Além disso, se a função warping f é monótona estrita sobre Σ^n, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. A partir do Teorema 2.4.3, temos que Σ^n é totalmente umbílica e que a função ϕ definida em (2.29) é constante. Por outro lado, um cálculo simples garante que

$$\nabla\phi = -f(h)A(\nabla h) + f'(h)\Theta\nabla h + Hf(h)\nabla h. \tag{2.33}$$

Então, como Θ tem sinal estrito, segue a partir de (2.33) que $f'(h)\nabla h = 0$. Portanto, assumindo que f é monótona estrita sobre Σ^n, concluimos que ∇h é identicamente nulo, assim, Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ■

De acordo com o Corolário 9.107 de [28], $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ é Einstein com $\overline{\mathrm{Ric}} = \overline{c}\langle\, , \rangle$, $\overline{c} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a fibra M^n tem curvatura de Ricci constante c e a função warping f satisfaz as equações diferenciais

$$\frac{f''}{f} = -\frac{\overline{c}}{n} \qquad \text{and} \qquad \frac{\overline{c}(n-1)}{n} = \frac{c-(n-1)(f')^2}{f^2}.$$

Em particular, temos que $(n-1)((f')^2 - ff'') = c =$ constant e que $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a condição de convergência (2.28), com $\mathrm{Ric}_M = c\langle\, , \rangle_M = (n-1)((f')^2 - ff'')\langle\, , \rangle_M$.

Levando em conta digressão anterior, a partir do Teorema 2.4.1 e Corolário 2.4.4 obtemos

Corolário 2.4.5 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Einstein cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided com curvatura média constante H e contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é totalmente umbílica. Além disso, se a função warping f é monótona estrita, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.*

Raciocínio análogo ao Teorema 2.4.2, obtemos também que

Teorema 2.4.6 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e curvatura de Ricci satisfazendo a condição de convergência (2.28), e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$ e com curvatura média constante H tal que $f'(h)H \leq 0$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é totalemente geodésica. Além disso, se a desigualdade (2.28) é estrita, então Σ^n é um slice $\{t_0\} \times M^n$, com $f'(t_0) = 0$.*

Demonstração. A partir do Lema 2.3.1 temos

$$\Delta(f(h)\Theta) = -f(h)\Theta\left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 + |A|^2\right) - nHf'(h) \tag{2.34}$$

Usando a hipótese $f'(h)H \leq 0$ e a condição de convergência (2.28), a partir de (2.34) concluimos que

$$\Delta(f(h)\Theta) \geq 0.$$

Como Σ^n está contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$, temos que $f(h)\Theta$ é limitado sobre Σ^n. Por outro lado, a partir da Proposição 2.3.3 obtemos também que Σ^n é parabólica. Consequentemente, a função $f(h)\Theta$ é, de fato, constante sobre Σ^n. Portanto, a partir de (2.34) concluimos que $|A|$ é identicamente nulo e, assim, Σ^n é totalmente geodésica.

Além disso, a partir da igualdade (2.34) obtemos também que $\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 = 0$ sobre Σ^n. Em cada ponto, assumindo que a desigualdade (2.28) é estrita, podemos raciocinar como na última parte do Teorema 2.4.3 para concluir que Σ^n é um slice $\{t_0\} \times M^n$, com $f'(t_0) = 0$. ■

Seguindo as ideias do Corolário 2.4.5, obtemos

Corolário 2.4.7 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Einstein cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa* *two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$ e com curvatura média constante H satisfazendo $f'(h)H \leq 0$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se a função $f'(h)$ não muda de sinal sobre Σ^n, entãoΣ^n é um slice $\{t_0\} \times M^n$, com $f'(t_0) = 0$.*

Demonstração. A partir do Teorema 2.4.3, temos que Σ^n é totalmente geodésica. Assim, a partir da equação (2.17) obtemos

$$\Delta g(h) = nf'(h).$$

Portanto, o resultado segue como na última parte da demonstração do Teorema 2.4.1.

■

O próximo Lema é justamente uma consequência de uma extensão mais geral de um Teorema do tipo Liouville devido a Yau [91].

Lema 2.4.8 *Somente as funções semi-limitadas harmônica definidas sobre uma variedade Riemanniana completa n-dimensional que tem curvatura de Ricci não negativa são as constantes.*

Voltando a nossa temática, vamos usar o Lema anterior para obter o seguinte resultado

Teorema 2.4.9 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem curvatura seccional não negativa e cobertura universal parabólica, e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided contida em um semi-espaço determinado por um slice de $\overline{M}^{n+1}$ e com curvatura média constante H. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. Tendo em conta que H é constante juntamente com a nossa restrição sobre Θ, a partir do Lema 2.3.1 temos

$$\Delta\Theta = -\Theta(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2) \geq 0. \tag{2.35}$$

Aplicando a Proposição 2.3.3 para garantir que Σ^n é parabólica, segue que Θ é constante sobre Σ^n e, voltando para (2.35) obtemos que $|A|$ é identicamente nulo, isto é, Σ^n é totalmente geodésica.

Pro outro lado, denotando por $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$ e $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$ as projeções ortogonais dos campos de vetores tangentes X e E_i sobre as fibras M^n, respectivamente, não é difícil ver que a partir da equação de Gauss temos que a curvatura de Ricci Ric_Σ de Σ^n é tal que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle = \sum_i K_M(X^*,E_i^*)(\langle X^*,X^*\rangle\langle E_i^*,E_i^*\rangle - \langle X^*,E_i^*\rangle^2) \\ &= \sum_i K_M(X^*,E_i^*)|X^*\wedge E_i^*|^2, \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$ e K_M denota a curvatura seccional de M^n. Então, assumindo que K_M é não negativa, a partir de (4.13) obtemos que Ric_Σ é também não negativo. Desde que Σ^n está contido em um semi-espaço determinado por um slice de $\overline{M}^{n+1}$, segue que h é semi-limitado. Como Σ^n é totalmente geodésico, a partir de (2.27) obtemos também que h é uma função harmônica. Portanto, a partir do Lema 2.4.8 concluimos que h é constante e, assim, Σ^n é um slice (totalmente geodésico) de $\overline{M}^{n+1}$.

■

Fechamos esta seção observando que a partir do Teorema 2.4.9 obtemos o seguinte semi-espaço que resulta do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$

Corolário 2.4.10 *Somente as superfícies completas imersas em um semi-espaço de $\mathbb{R}^3$ determinada por um plano $a^\perp$, tendo curvarura média constantee cujo fecho da imagem da aplicação de Gauss está em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ determinado por um vetor unitário a, são justamente os planos ortogonais para a.*

2.5 Extensões para curvaturas médias de ordem superior

Nesta seção apresentamos alguns resultados para o caso das curvaturas médias de ordem superior. No que segue, dizemos que o r-ésimo operador de Newton P_r é limitado por cima, se é limitado no sentido de formas quadráticas ou, equivalentemente, se existe alguma constante positiva α tal que

$$P_r \leq \alpha I, \tag{2.37}$$

onde I denota o operador identidade.

Teorema 2.5.1 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n é limitada longe do zero, H_{r+1} não muda de sinal sobre Σ^n e P_r é limitado por cima, para algum $0 \leq r \leq n-1$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. Como P_r satisfaz a desigualdade (2.37), não é difícil verificar que

$$\alpha\Delta\xi \geq L_r\xi, \tag{2.38}$$

para alguma constante positiva α e todo $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Então, a partir da equação (2.16) do Lema 2.3.1 obtemos

$$n\alpha\Delta h \geq L_r(h) = c_r H_{r+1}\Theta.$$

Assim, desde que H_{r+1} e Θ não muda de sinal sobre Σ^n, temos que Δh também não muda de sinal sobre Σ^n. Portanto, como M^n tem cobertura universal parabólica e Σ^n está em um slab de $\overline{M}^{n+1}$, podemos raciocinar como nos Teoremas da seção anterior para concluir que h é constante e, assim, Σ^n deve ser um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ∎

Agora obtemos o seguinte

Teorema 2.5.2 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hiperspuperfície completa two-sided contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, P_r é limitado por cima, para algum $0 \leq r \leq n-1$, e*

$$0 \leq H_{r+1} \leq \frac{f'(h)}{f(h)} H_r,$$

então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. A partir das equações (2.17) e (2.38) obtemos

$$n\alpha\Delta g(h) \geq L_r(g(h)) = c_r f(h)\left(\frac{f'(h)}{f(h)}H_r + \Theta H_{r+1}\right) \geq c_r f(h)\left(\frac{f'(h)}{f(h)}H_r - H_{r+1}\right) \geq 0.$$

Como Σ^n está contida em um slab, temos que $g(h)$ é limitada. Portanto, a Proposição 2.3.3 garante que $g(h)$ é constante e, consequentemente, Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

∎

De acordo com [48], para $p \in \Sigma^n$, definimos o espaço de nulidade relativa $\mathcal{N}(p)$ de Σ^n em p por

$$\mathcal{N}(p) = \{v \in T_p\Sigma\,;\ v \in \ker(A_p)\},$$

onde $\ker(A_p)$ denota o núcleo de A_p. O índide de nulidade relativa $\eta(p)$ de Σ^n em p é a dimensão de $\mathcal{N}(p)$, isto é,

$$\eta(p) = \dim\left(\mathcal{N}(p)\right).$$

Então, o ínidice de nulidade relativa mínima η_0 de Σ^n é definida por

$$\eta_0 = \min_{p\in\Sigma} \eta(p).$$

Nesta configuração, obtemos a seguinte estimativa para η_0.

Teorema 2.5.3 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica com curvatura seccinal constante κ e função warping satisfazendo a condição convergência (2.33), e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided com r-´sima curvatura média constante H_r e contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, $f'(h) \leq 0$, P_{r-1} é limitada por cima e $H_1, H_2, \ldots, H_{r+1} \geq 0$, então o índice de nulidade relativa mínimal η_0 de Σ^n é pelo menos $n - (r-1)$.*

Demonstração. Assumindo o fato que H_r é constante, a partir da equação (2.18) do Lema 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} L_{r-1}(f(h)\Theta) =& -c_{r-1}f'(h)H_r - f(h)\Theta\binom{n}{r}(nH_1H_r - (n-r)H_{r+1}) \\ & -\frac{1}{f(h)}\Theta\left(\kappa - (f'(h)^2 - f''(h)f(h))\right)\left(|\nabla h|^2 c_{r-1}H_{r-1} - \langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Desde que $H_1, H_2, \ldots, H_{r+1} \geq 0$, a Propositição 2.2 de [42] garante que

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

Então, não é difícil verificar que

$$H_{r-1}H_r^{\frac{1}{r}} - H_r = H_r^{\frac{1}{r}}(H_{r-1} - H_r^{\frac{r-1}{r}}) \geq 0.$$

Além disso,

$$nH_1H_r - rH_r^{\frac{r+1}{r}} \geq nH_r^{\frac{r+1}{r}} - rH_r^{\frac{r+1}{r}} = (n-r)H_r^{\frac{r+1}{r}} \geq (n-r)H_{r+1}.$$

Então,

$$nH_1H_r - (n-r)H_{r+1} \geq rH_r \geq 0. \quad (2.40)$$

A partir da hipótese $H_j \geq 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, r+1$, temos que P_j são positivos semi-definidos, para todo $j = 1, 2, \ldots, r+1$. Então,

$$\langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle \leq \mathrm{tr}(P_{r-1})|\nabla h|^2 = c_{r-1}H_{r-1}|\nabla h|^2.$$

Consequentemente,

$$|\nabla h|^2 c_{r-1}H_{r-1} - \langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h\rangle \geq 0. \tag{2.41}$$

Assim, usando as desigualdades (2.40) e (2.41), concluimos que

$$L_{r-1}(f(h)\Theta) \geq 0. \tag{2.42}$$

Como P_{r-1} é limitado por cima, a partir de (2.38) e (2.42) obtemos

$$n\alpha\Delta(f(h)\Theta) \geq L_r(f(h)\Theta) \geq 0.$$

Assumindo que M^n tem cobertura universal parabólica e que Σ^n está em um slab do espaço ambiente, concluimos que $f(h)\Theta$ é constante. Portanto por (2.39) segue que $nH_1H_r - (n-r)H_{r+1} = 0$ sobre Σ^n. Agora voltando a (2.40) obtemos que $H_r = H_{r+1} = 0$ sobre Σ^n. Portanto, podemos aplicar a Proposição 1 de [39] para concluir que $H_j = 0$ para todo $j \geq r$ e, assim, temos que $\eta_0 \geq n - (r-1)$. ■

Levando em conta mais uma vez a digressão feita antes do Corolário 2.4.7, a partir do Teorema 2.5.3 obtemos a seguinte consequência

Corolário 2.5.4 *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped Einstein cuja fibra M^n tem cobertura universal parabólica com curvatura seccional constante κ e seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa two-sided com r-ésima curvatura média constante H_r e contida slab de $\overline{M}^{n+1}$. Se a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz $-1 \leq \Theta \leq -\beta < 0$, para alguma constante $\beta > 0$, $f'(h) \leq 0$, P_{r-1} é limitada por cima e $H_1, H_2, \ldots, H_{r+1} \geq 0$, então o índice de nulidade relativa mínimal η_0 de Σ^n é pelo menos $n-(r-1)$.*

Capítulo 3

Hipersuperfícies tipo-espaço em um espaço-tempo GRW

Neste capítulo, apresentamos os resultados referentes ao artigo [25]. Nosso objetivo é estudar a unicidade e rigidez de hipersuperfícies tipo espaço em um espaço-tempo GRW.

3.1 Espaços-tempo GRW

Agora, seja M^n uma variedade Riemanniana orientada n-dimensional conexa, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva suave. Na variedade produto diferenciável $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, π_I e π_{M^n} denotam as projeções sobre os fatores I e M^n, respectivamente. Uma classe particular de variedades semi-Riemannianas contendo campos conformes é obtido por $\overline{M}^{n+1}$ com a métrica

$$\langle v, w\rangle_p = -\langle(\pi_I)_*v, (\pi_I)_*w\rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2\langle(\pi_{M^n})_*v, (\pi_{M^n})_*w\rangle, \tag{3.1}$$

para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$ e todos $v, w \in T_p\overline{M}^{n+1}$, onde ∂_t é um campo de vetores standard tangente em I. Tais espaços é um caso particular de um produto warped semi-Riemanniano, e, de agora em diante, escrevemos $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ para denotá-lo.

Observação 3.1.1 *De acordo com a terminologia estabelecida em [17], dizemos que $\overline{M}^{n+1}$ é um Robertson-Walker generalizado (GRW) espaço tempo. Quando a fibra M^n tem curvatura seccional constante, $\overline{M}^{n+1}$ é chamada na literatura matemática de*

Robertson-Walker (RW) espaço tempo, em motivação ao fato que, para $n = 3$, é exatamente a solução das equações de campos de Einstein (confira por exemplo o capítulo 12 de [72]). Neste caso, dizemos que N é a aplicação de Gauss de Σ^n apontando para o futuro.

Observação 3.1.2 *Para $t_0 \in \mathbb{R}$, orientamos o slice $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ usando o campo de vetores normal ∂_t. De acordo com o exemplo 5.6 de [6] e seção 2 de [12], $\Sigma^n_{t_0}$ tem uma r-ésima curvatura média $H_r = \left(\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}\right)^r$ com respeito a ∂_t.*

Se $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ é uma imersão Riemanniana, com Σ^n orientada por um campo de vetores unitário N. Neste caso, vamos considerar naturalmente duas funções particulares sobre Σ^n, chamadas, a função altura(vertical) $h = (\pi_I)|_{\Sigma^n}$ e a função ângulo $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$.

Não é difícil verificar que o campo gradiente de π_I sobre $\epsilon I \times_f M^n$ é dado por

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t. \tag{3.2}$$

Assim, a partir de (3.2) verificamos que o campo gradiente de h sobre Σ^n é

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = -\partial_t^\top = -\partial_t - \Theta N. \tag{3.3}$$

Em particular, a partir de (3.3) obtemos

$$|\nabla h|^2 = -(1 - \Theta^2), \tag{3.4}$$

onde $|.|$ denota a norma de um campo de vetores sobre Σ^n.

No que segue, motivado pela observação anterior, vamos assumir que a orientação N da hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ é tal que a função ângulo satisfaz

$$\Theta \leq -1.$$

Observação 3.1.3 *Voltando ao contexto das imersões Riemannianas em produtos warped Lorentzianos e levando em conta a terminologia estabelecida em [3], dizemos que uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ é limitada longe do infinito futuro de $-I \times_f M^n$ se existe algum $\overline{t} \in I$ tal que*

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^n; t \leq \overline{t}\}.$$

Analogamente, dizemos que Σ^n é limitada longe do infinito passado de $-I \times_f M^n$ se existe $\underline{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^n; t \geq \underline{t}\}.$$

3.2 Unicidade de hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo GRW

Considerando o contexto descrito na seção anterior, enunciaremos e demonstraremos o nosso primeiro resultado de unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em um espaço-tempo GRW.

Teorema 3.2.1 *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW cuja fibra* M^n *tem curvatura seccional* K_{M^n} *satisfazendo a condição de convergência*

$$K_{M^n} \geq \sup_I (ff'' - (f')^2). \tag{3.5}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa tipo-espaço com curvatura seccional* K_{Σ^n} *limitada por baixo e tal que*

$$K_{\Sigma^n} \leq \frac{f''}{f}(h). \tag{3.6}$$

Suponha que, para algum $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*, a futura* r*-ésima curvatura média é tal que* $\alpha \leq H_r \leq \beta$*, para algumas constantes positivas* α *e* β*, e que uma das seguintes condições é satisfeita*

(i) Σ^n *é limitada longe do infinito futuro de* $\overline{M}^{n+1}$ *e* $\frac{f'}{f}(h) \leq \frac{H_{r+1}}{H_r}$.

(ii) Σ^n *é limitada longe do infinito passado de* $\overline{M}^{n+1}$ *e* $\frac{f'}{f}(h) \geq \frac{H_{r+1}}{H_r}$.

Se $|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma^n} \left| \frac{H_{r+1}}{H_r} - \frac{f'}{f}(h) \right|$*, então* Σ^n *é um slice* $\{t\} \times M^n$.

Demonstração. Defina um operador auto-adjunto $\mathcal{P}_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ por

$$\mathcal{P}_r = H_r P_r.$$

Para cada $p \in \Sigma^n$, consideramos um referencial local ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$. A partir de (1.13) temos que $P_r e_i = (-1)^r \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_r} e_i$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obtemos

$$\langle \mathcal{P}_r e_i, e_i \rangle = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r, i_j \neq i, j_1 < j_2 < \ldots < j_r} (\lambda_{i_1} \lambda_{j_1})(\lambda_{i_2} \lambda_{j_2}) \ldots (\lambda_{i_r} \lambda_{j_r}).$$

Por outro lado, a partir da equação de Gauss obtemos

$$K_{\Sigma^n}(e_i, e_j) = \overline{K}(e_i, e_j) - \lambda_i \lambda_j, \tag{3.7}$$

onde K_{Σ^n} e $\overline{K}$ são as curvaturas seccionais de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente.

Usando a relação geral entre o tensor curvatura de um produto warped e os tensores curvaturas da base e da fibra(confira Proposição 7.42 de [72]; ver também a equação (6.6) de [13]) obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)W &= R_{M^n}(U^*,V^*)W^* + ((\log f)'(h))^2(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U)\\
&- (\log f)''(h)\langle W,\partial_t\rangle(\langle U,\partial_t\rangle V - \langle V,\partial_t\rangle U) \qquad (3.8)\\
&- (\log f)''(h)(\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t\rangle - \langle U,\partial_t\rangle\langle V,W\rangle)\partial_t,
\end{aligned}$$

para campos de vetores arbitrários $U,V,W \in \overline{M}^{n+1}$, onde $U^* = (\pi_{M^n})_*U = U + \langle U,\partial_t\rangle\partial_t$. Então, para uma base ortonormal X,Y de um 2-plano tangente sobre Σ^n, a equação (3.8) nos da

$$\begin{aligned}
\overline{K}(X,Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)|X^*\wedge Y^*|^2 +\\
&+ ((\log f)'(h))^2(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle Y,X\rangle\langle X,Y\rangle)\\
&- (\log f)''(h)\langle X,\partial_t\rangle(\langle X,\partial_t\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle Y,\partial_t\rangle\langle X,Y\rangle) \qquad (3.9)\\
&- (\log f)''(h)(\langle X,X\rangle\langle Y,\partial_t\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\langle Y,X\rangle)\langle\partial_t,Y\rangle\\
&= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)|X^*\wedge Y^*|^2 + ((\log f)'(h))^2\\
&- (\log f)''(h)(\langle X,\partial_t\rangle^2 + \langle Y,\partial_t\rangle^2).
\end{aligned}$$

Desde que $\nabla h = -\partial_t^\top = -\partial_t - \Theta N$, temos que

$$\langle X,\partial_t\rangle^2 = \langle X,-\nabla h - \Theta N\rangle^2 = \langle X,\nabla h\rangle^2. \qquad (3.10)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|X^*\wedge Y^*|^2 &= |X^*|^2|Y^*|^2 - \langle X^*,Y^*\rangle^2\\
&= \langle X^*,X^*\rangle\langle Y^*,Y^*\rangle - \langle X^*,Y^*\rangle^2\\
&= (1+\langle X,\partial_t\rangle^2)(1+\langle Y,\partial_t\rangle^2) - \langle X,\partial_t\rangle^2\langle Y,\partial_t\rangle^2 \qquad (3.11)\\
&= 1+\langle X,\partial_t\rangle^2 + \langle Y,\partial_t\rangle^2\\
&= 1+\langle X,\nabla h\rangle^2 + \langle Y,\nabla h\rangle^2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, inserindo (3.10) e (3.11) sobre (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{K}(X,Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)(1+\langle X,\nabla h\rangle^2+\langle Y,\nabla h\rangle^2)+((\log f)'(h))^2\\
&- (\log f)''(h)(\langle X,\nabla h\rangle^2+\langle Y,\nabla h\rangle^2)\\
&= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)+((\log f)'(h))^2+ \\
&+ \left(\frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)-(\log f)''(h)\right)(\langle X,\nabla h\rangle^2+\langle Y,\nabla h\rangle^2)\\
&= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*,Y^*)+\left(\frac{f'}{f}(h)\right)^2+\\
&+ \frac{1}{f^2(h)}(K_M(X^*,Y^*)-ff''+(f')^2)(\langle X,\nabla h\rangle^2+\langle Y,\nabla h\rangle^2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Assumindo agora a condição de convergência (3.5), a partir (3.12) deduzimos a seguinte desigualdade

$$\overline{K}(X,Y)\geq \frac{f''}{f}(h). \tag{3.13}$$

Então, a partir (3.7) e (3.13) temos

$$\lambda_i\lambda_j=\overline{K}(e_i,e_j)-K_\Sigma(e_i,e_j)\geq \frac{f''}{f}(h)-K_\Sigma(e_i,e_j). \tag{3.14}$$

Consequentemente, a partir de (3.6) e (3.14) temos

$$\lambda_i\lambda_j\geq 0 \quad ,\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\}, i\neq j.$$

Assim,

$$\langle \mathcal{P}_r e_i,e_i\rangle = \binom{n}{r}^{-1}\sum(\lambda_{j_1}\lambda_{i_1})\cdots(\lambda_{j_r}\lambda_{i_r})\geq 0. \tag{3.15}$$

Portanto, a partir de (3.15) concluimos que $\mathcal{P}_r$ é positivo semi-definido. Além disso, H_r é limitado sobre Σ^n, o mesmo vale para $tr(\mathcal{P}_r)=c_rH_r^2$, onde $c_r=(n-r)\binom{n}{r}$. Por outro lado, a partir de (1.15) temos que

$$L_r\sigma(h)=c_rf(h)\left(-\Theta H_{r+1}-\frac{f'}{f}(h)H_r\right). \tag{3.16}$$

Daí, a partir de (3.16) e (2.8) obtemos

$$\mathcal{L}_r(\sigma(h))=c_rf(h)H_r^2\left(-\Theta\frac{H_{r+1}}{H_r}-\frac{f'}{f}(h)\right). \tag{3.17}$$

Agora, suponha que Σ^n é limitada longe do infinito futuro de $\overline{M}^{n+1}$. Assim, pelo Lema 2.2.1 obtemos uma sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ tal que

$$\limsup_k \mathcal{L}_r(\sigma(h(p_k))) \leq 0. \tag{3.18}$$

Logo, a partir de (3.17) e (3.18) temos

$$\lim_k c_r f(h(p_k))H_r^2(p_k)\left(-\Theta(p_k)\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_k) - \frac{f'}{f}(h(p_k))\right) \leq 0 \tag{3.19}$$

e

$$\lim_k |\nabla\sigma(h(p_k))| = \lim_k \left(f(h(p_k))|\nabla h(p_k)|\right) = 0. \tag{3.20}$$

Note que

$$\lim_k |\nabla h(p_k)| = 0.$$

e daí,

$$\lim_k \Theta(p_k) = -1.$$

Observamos também que

$$\frac{f'}{f}(\sup_j h(p_{k_j})) = \frac{f'}{f}(\lim_j h(p_{k_j})) = \lim_j \frac{f'}{f}(h(p_{k_j})).$$

Então, assumindo (i) obtemos

$$\lim_j (-\Theta)(p_{k_j})\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) = \lim_j \frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) \geq \lim_j \frac{f'}{f}(h(p_{k_j})).$$

A partir (3.19) temos que

$$c_r \lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) \lim_j \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) - \frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right) \leq 0. \tag{3.21}$$

Por outro lado, supondo que $\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{f'}{f}(h)$, concluimos que

$$c_r \lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) \lim_j \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) - \frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right) \geq 0, \tag{3.22}$$

Além disso, sabemos que $0 < \alpha^2 \leq H_r^2 \leq \beta^2$, temos

$$\lim_j \left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right) > 0.$$

Então, a partir de (3.21) e (3.22) concluimos que

$$\lim_j \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j}) - \frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right) = 0$$

e, consequentemente,

$$\inf_{\Sigma}\left(\frac{H_{r+1}}{H_r}-\frac{f'}{f}(h)\right)=0.$$

Portanto, $0\leq|\nabla h|\leq\inf_{\Sigma}\left(\frac{H_{r+1}}{H_r}-\frac{f'}{f}(h)\right)=0$ e, assim, Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Resta considerar o caso que Σ^n é limitada longe do infinito passado de $\overline{M}^{n+1}$. Conforme foi feito antes, usando mais uma vez o Lema 2.2.1, obtemos uma sequência $(p_{k_j})\subset\Sigma^n$ tal que

$$c_r\lim_j\left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right)\lim_k\left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j})-\frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right)\geq 0.$$

Por outro lado, temos

$$c_r\lim_j\left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right)\lim_k\left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j})-\frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right)\leq 0.$$

Assim

$$\lim_j\left(H_r^2(p_{k_j})f(h(p_{k_j}))\right)>0,$$

então

$$\lim_j\left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_{k_j})-\frac{f'}{f}(h(p_{k_j}))\right)=0,$$

e, daí,

$$\inf_{\Sigma}\left(\frac{f'}{f}(h)-\frac{H_{r+1}}{H_r}\right)=0.$$

Portanto, como no caso anterior, também concluimos que Σ^n deve ser um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ■

A partir da equação (1.17), concluimos que o operador L_r é elíptico se, e somente se, P_r é positivo definido. Observemos que $L_0=\Delta$ é sempre elíptico. O próximo Lema da uma condição geométrica que garante a elipticidade de L_1(confira o Lema 3.2 de [13])

Lema 3.2.2 *Seja $\psi:\Sigma^n\to\overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1}$. Se $H_2>0$ sobre Σ^n, então L_1 é elíptico ou, equivalentemente, P_1 é positivo definido (para uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N).*

Quando $r\geq 2$, o seguinte Lema estabelece condições suficientes para garantir a elipticidade de L_r(confira o Lema 3.3 de [13]).

Lema 3.2.3 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1}$. Se existe um ponto elíptico de Σ^n, com respeito a uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N, e $H_{r+1} > 0$ sobre Σ^n, para $2 \leq r \leq n-1$, então para todos $1 \leq k \leq r$ o operador L_k é elíptico ou, equivalentemente, P_k é positivo definido (para uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N, se k é ímpar).*

Aqui, ser um ponto elíptico de uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ em um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1}$, quer dizer um ponto $p_0 \in \Sigma^n$ onde todas as curvaturas principais $\lambda_i(p_0)$ são negativas.

Para a demonstração do próximo Lema, recomendamos o Lema 4.1 de [13].

Lema 3.2.4 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$. Se $h = (\pi_I)|_\Sigma : \Sigma^n \to I$ é a função altura de Σ^n, então*

$$L_r(h) = -(\log f)'(c_r H_r + \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle) - c_r H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle \tag{3.23}$$

e

$$L_r(g(h)) = -c_r\left(f'(h)H_r + f(h)H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right), \tag{3.24}$$

onde $g : I \to \mathbb{R}$ denota uma primitiva arbitrária da função warping f.

Além disso, a partir das equações (6.2) e (6.16) de [6] temos também o seguinte.

Lema 3.2.5 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana em um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$. Se $h = (\pi_I)|_\Sigma : \Sigma^n \to I$ é a função altura de Σ^n, então*

$$\langle \mathrm{div} P_1, \nabla h\rangle = (\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle, \tag{3.25}$$

onde Ric_{M^n} denota a curvatura de Ricci da fibra M^n e $N^* = N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t$ é a projeção do campo de vetores normal unitário N de Σ^n sobre M^n. Além disso, se a fibra M^n tem curvatura seccional constante κ, então

$$\langle \mathrm{div} P_r, \nabla h\rangle = (n-r)\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle. \tag{3.26}$$

Precisamos também de condições suficientes para garantir a existência de um ponto elíptico em uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Então vamos citar o Lema 5.4 de [6].

Lema 3.2.6 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW, e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão Riemanniana. Se $f(h)$ atinge um mínimo local em algum ponto $p \in \Sigma^n$, tal que $f'(h(p)) \neq 0$, então p é um ponto elíptico em Σ^n.*

Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW e seja N a aplicação de Gauss apontando para o futuro. Podemos definir o ângulo normal hiperbólico Θ de Σ^n como uma função suave $\Theta : \Sigma^n \to [0, +\infty)$ como sendo

$$\cosh\Theta = -\langle N, \partial_t\rangle \geq 1.$$

De acordo com a terminologia usada em [79], dizemos que um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$ é dita ser espacialmente parabólica se a cobertura universal Riemanniana da fibra M^n é parabólica (e então, M^n também é parabólica). O próximo Lema estabelece condições suficientes para uma hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW espacialmente parabólica ser parabólica (Para ver a demonstração, ver o Teorema 4.4 de [77]). No que se segue, um slab

$$[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in -I \times_f M^n : t_1 \leq t \leq t_2\}$$

é chamada uma região limitada tipo tempo.

Lema 3.2.7 *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa tipo-espaço que está em uma região limitada tipo tempo de um espaço-tempo GRW espacialmente parabólica $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. Se o ângulo normal hiperbólico de Σ^n é limitado, então Σ^n é parabólica.*

Agora, estamos em condições de enunciar e demonstrar nosso próximo resultado.

Teorema 3.2.8 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW parcialmente parabólica e seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo espaço que está entre uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que P_r é limitada por cima (no sentido de formas quadráticas) e que o ângulo normal hiperbólico de Σ^n é limitado. Se, para algum $0 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é não negativo e satisfaz*

$$H_{r+1} \geq \frac{f'}{f}(h)H_r, \tag{3.27}$$

então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Vamos assumir que Σ^n está entre uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$, então existe uma constante positiva C tal que $|g(h)| < C$ sobre Σ^n, onde g denota uma primitiva de f. Então, definimos sobre Σ^n a função positiva $\xi = C - g(h)$. Desde que $P_r \leq \beta I$ para algum $\beta > 0$ temos $\beta\Delta \geq L_r$. Assim a partir (3.24) temos que

$$\begin{aligned}
\beta\Delta\xi = -\beta\Delta g(h) &\leq -L_r(g(h)) \\
&= b_r\left(f'(h)H_r + f(h)H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right) \\
&= b_r f(h)\left(\frac{f'}{f}(h)H_r + H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right).
\end{aligned}$$

Consequentemente, tendo em conta a nossa hipótese (3.27), obtemos

$$\beta\Delta\xi \leq b_r f(h)\left(\frac{f'}{f}(h)H_r + H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right) \leq b_r f(h)\left(\frac{f'}{f}(h)H_r - H_{r+1}\right) \leq 0.$$

Assim, ξ é uma função superharmônica positiva sobre Σ^n. Daí, o Lema 3.2.7 garante que ξ é uma constante sobre Σ^n e, sendo $g' = f > 0$, h é também uma constante sobre Σ^n. Portanto, Σ^n deve ser um *slice* de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Observação 3.2.9 *Relacionado à hipótese* (3.27) *no Teorema 3.2.8, observamos que Aledo em [4] usou o princípio do máximo generalizado de Omori [71] para obter estimativas severas para a curvatura média de ordem superior de uma hipersuperfície completa tipo-espaço em um espaço-tempo GRW em termos do quociente* $\frac{f'}{f}$.

Desde que $P_0 = I$, a partir do Teorema 3.2.8 obtemos o seguinte

Corolário 3.2.10 *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW espacialmente parabólico e seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa tipo espaço que está em uma região limitada tipo tempo de* $\overline{M}^{n+1}$. *Suponha que o ângulo hiperbólico normal de* Σ^n *é limitado. Se* H *é não negativo e tal que* $H \geq \frac{f'}{f}(h)$, *então* Σ^n *é um slice de* $\overline{M}^n$.

Para obtermos alguns resultados de unicidade, vamos considerar dois Lemas chaves. O próximo corresponde ao Teorema 3 de [92]. No que segue, usaremos a notaąão $\mathcal{L}^p(\Sigma) := \{u : \Sigma^n \to \mathbb{R} : \int_\Sigma |u|^p(x)d\Sigma < +\infty\}$.

Lema 3.2.11 *Seja* u *uma função suave não negativa subharmônica sobre uma variedade Riemanniana completa* Σ^n. *Se* $u \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$, *para algum* $p > 1$, *então* u *é constante.*

O próximo Lema corresponde ao Teorema 7 de [92].

Lema 3.2.12 *Cada variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa tem volume infinito.*

Agora, estamos em condições de enunciar e demonstrar os nossos próximos resultados.

Teorema 3.2.13 *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW tal que* $\log f$ *é convexo. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa tipo espaço tal que* P_r *é limitado por cima (no sentido de formas quadráticas). Suponha que* $H_{r+1} > 0$ *e* $f'(h) > 0$ *satisfazendo*

$$H_{r+1} \geq H_r \frac{f'}{f}(h). \tag{3.28}$$

Se $f(h) \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$, *para algum* $p > 1$, *e* h *tem um mínimo local sobre* Σ^n, *então* Σ^n *é um slice de* $\overline{M}^{n+1}$ *com* $vol(\Sigma^n) < +\infty$. *Além disso, se a fibra* M^n *tem curvatura de Ricci não negativa, então* Σ^n *é compacta.*

Demonstração. A partir de (1.16) temos

$$L_r(f(h)) = f'(h)L_r(h) + f''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle.$$

Agora, usando (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} L_r(f(h)) &= f'(h)\left((\log f)'(h)(-b_r H_r - \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle) - b_r H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right) + \\ &+ f''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \\ &= -f'(h)(\log f)'(h) b_r H_r - f'(h)(\log f)'(h)\langle P_r \nabla, \nabla h\rangle \\ &- f'(h) b_r H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle + f''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \\ &= f(h)(\log f)''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle - b_r f'(h)\left(H_r \frac{f'}{f}(h) + H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por outro lado, desde que assumimos que h tem um mínimo local e $f'(h) > 0$ sobre Σ^n, a partir do Lema 3.2.5 temos que Σ^n tem um ponto elíptico. Agora, desde que $H_{r+1} > 0$, o Lema 3.2.3 assume que P_r é positivo definido. Consequentemente, usando a hipótese que $\log f$ é convexo e usando o raciocínio da demonstração do Teorema anterior, a partir de (3.29) temos

$$\beta \Delta f(h) \geq L_r(f(h)) \geq b_r f'(h)\left(-H_r \frac{f'}{f}(h) + H_{r+1}(-\langle N, \partial_t\rangle)\right), \tag{3.30}$$

para alguma constante positiva.

Consequentemente, desde que $\langle N, \partial_t\rangle \leq -1$ e $f'(h) > 0$, considerando (3.28) sobre (3.30) concluimos que

$$\beta \Delta f(h) \geq b_r f'(h)\left(H_{r+1} - H_r \frac{f'}{f}(h)\right) \geq 0. \tag{3.31}$$

Portanto, assumindo que $f(h) \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$, a partir de (3.31) podemos aplicar o Lema 3.2.11 para concluir que $f(h)$ é constante sobre Σ^n e $vol(\Sigma^n) < +\infty$. Assim, desde que

$f'(h) > 0$ sobre Σ^n, obtemos que h é também constante e, consequentemente, Σ^n deve ser um slice de $\overline{M}^{n+1}$. Além disso, se a fibra M^n tem curvatura de *Ricci* não negativa, então Σ^n também tem curvatura de Ricci não negativa. Portanto, neste caso, o Lema 3.2.12 garante que Σ^n é compacta. ■

Observação 3.2.14 *De acordo com [68], $V = V(t,p) = f(t)\partial_t$ é um campo de vetores conforme fechado globalmente definido em um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. Seguindo as ideias de [66, 56], dada uma hipersuperfície tipo espaço Σ^n imersa em $\overline{M}^{n+1}$ com aplicação de Gauss N apontando para o futuro, podemos escrever $V_q = e(q)N_q + V_q^\top$, para cada $q \in \Sigma^n$, onde $e(q) = -\langle V_q, N_q\rangle > 0$ e $V_q^\top$ são, respectivamente, a energia e o n-impulso que o observador instantâneo N_q medidas para V_q. Neste caso, dizemos que Σ^n tem p-energia total finita quando $\int_\Sigma e^p(q)d\Sigma < +\infty$, para $p \geq 1$. Assim, desde que $e(q) \geq f(q)$ para todo $q \in \Sigma^n$, se assumimos no Teorema 3.2.20 que Σ^n tem p-energia total finita em vez de $f(h) \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$, o resultado ainda é válido.*

Também relacionado ao Teorema 3.2.20, levando em conta o Lema 3.2.2, vemos que a hipótese que h tem um mínimo local sobre Σ^n não é necessária no caso que $r = 1$. Além disso, no caso em que $r = 0$, o Teorema 3.2.20 pode ser lido da seguinte forma

Corolário 3.2.15 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW e seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo espaço. Suponha que $H > 0$, $f'(h) > 0$ e que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\frac{n^2}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2(h) \leq \frac{n^2H^2}{4} \leq (n-1)\frac{f''}{f}(h). \tag{3.32}$$

Se $f(h) \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$, para algum $p > 1$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$ com $vol(\Sigma) < +\infty$. Além disso, se $\overline{M}^{n+1}$ obedece a SNCC, *então Σ^n é compacta.*

Demonstração. Primeiramente notemos que não é dificil verificar uqe a hipótese (3.32) implica que $\log f$ é convexo em Σ^n. Então, podemos proceder como no Teorema 3.2.20 para obter que Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$ com $vol(\Sigma) < +\infty$.

Além disso, assumindo que $\overline{M}^{n+1}$ obedece a SNCC juntamente com a segunda desigualdade em (3.32), garantimos que a curvatura de Ricci de Σ^n é não negativa. De fato, fixe $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial local ortonormal sobre um conjunto aberto $U \subset \Sigma^n$. Segue a partir da equação de Gauss que a curvatura de Ricci Ric de Σ^n satisfaz

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2. \tag{3.33}$$

Para estimar a primeira soma do lado direito de (3.33), seja (mudando U para um pequeno conjunto aberto, se necessário) $E_i^* = (\pi_M)_*(E_i)X^* = (\pi_M)_*(X)$. A partir da Proposição 7.42 de [72] e equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle = & \sum_i \langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle + (n-1)((\log f)')^2|X|^2 \\ & -(n-2)(\log f)''\langle X,\nabla h\rangle^2 - (\log f)''|\nabla h|^2|X|^2,\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde R_M denota o tensor curvatura de M. Por escrito $X^* = X + \langle X,\partial_t\rangle\partial_t$, podemos estimar a primeira soma do lado direito de (3.34) para obtermos

$$\begin{aligned}\sum_i \langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle &= f^2(|X^*|_M^2|E_i^*|_M^2 - \langle X^*,E_i^*\rangle_M^2)K_M(X^*,E_i^*) \\ &\geq \frac{1}{f^2}((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 \\ &\quad +(n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2)\min_i K_M(X^*,E_i^*).\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que o nosso ambiente satisfaz a SNCC, temos que

$$\begin{aligned}\sum_i \langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle \geq & \ ((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 \\ & +(n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2)(\log f)''.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Substituindo (3.35) sobre (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle \geq & \ ((n-1)|X|^2 + (n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2 \\ & +|\nabla h|^2|X|^2)(\log f)'' + (n-1)((\log f)')^2|X|^2 \\ & -(n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2(\log f)'' - |\nabla h|^2|X|^2(\log f)'' \\ & = (n-1)\frac{f''}{f}|X|^2.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Então, a partir (3.33) e (3.36), finalmente chegamos a

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \left((n-1)\frac{f''}{f} - \frac{n^2H^2}{4}\right)|X|^2 \geq 0.$$

Portanto, podemos aplicar mais uma vez o Lema 3.2.7 para concluir que Σ^n é compacta. ■

Para estabelecer nossos próximos resultados, precisamos também do seguinte resultado obtido por Caminha (confira Proposição 2.1 de [38]) em que extende o resultado do Yau [92] sobre uma versão do Teorema de Stokes para uma variedade Riemannian completa n-dimensional.

Lema 3.2.16 *Seja X um campo de vetores sobre uma variedade Riemanniana Σ^n completa orientada n-dimensional, tal que div$X$ não muda de sinal sobre Σ^n. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, então div$X = 0$.*

Agora, consideremos um espaço-tempo GRW obedecendo uma condição de convergência que pode ser considerado como uma situação oposta da SNCC.

Teorema 3.2.17 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW cuja fibra M^n tem curvatura seccional constante κ satisfazendo a seguinte condição de convergência*

$$\kappa \leq \inf_I (ff'' - f'^2). \tag{3.37}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo espaço que está em uma região limitada de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média $H > 0$ é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são positivas e tal que

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{f'}{f}(h) > 0. \tag{3.38}$$

Se h tem um mínimo local em Σ^n e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Denotando por g uma primitiva arbitrária da função warping f, a partir (1.17) temos que

$$\operatorname{div}(P_r(\nabla g(h))) = \langle \operatorname{div} P_r, \nabla g(h) \rangle + L_r(g(h)). \tag{3.39}$$

Então, a partir de (3.24) e (3.39) obtemos

$$\operatorname{div}(P_r(\nabla g(h))) = f(h)\langle \operatorname{div} P_r, \nabla h \rangle - b_r(f'(h)H_r + f(h)H_{r+1}\langle N, \partial_t \rangle). \tag{3.40}$$

Assumimos que H_r and H_{r+1} são positivas e considerando que $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$, a partir (3.40) obtemos

$$\operatorname{div}(P_r(\nabla g(h))) \geq f(h)\langle \operatorname{div} P_r, \nabla h \rangle + b_r f(h) H_r \left(\frac{H_{r+1}}{H_r} - \frac{f'}{f}(h) \right). \tag{3.41}$$

Então, usando a hipótese (3.38), a partir (3.41) obtemos

$$\operatorname{div}(P_r(\nabla g(h))) \geq f(h)\langle \operatorname{div} P_r, \nabla h \rangle. \tag{3.42}$$

Assim, a partir (3.26) e (3.42) temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r(\nabla g(h))) &\geq f(h)(n-r)\left(\frac{\kappa}{f(h)^2} - (\log f)''(h) \right) \langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h \rangle \langle N, \partial_t \rangle \\ &\geq \frac{1}{f(h)}(n-r)((ff'' - f'^2)(h) - \kappa)\langle P_{r-1}\nabla h, \nabla h \rangle. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Desde que $f'(h) > 0$ e h tem um mínimo local sobre Σ^n, a partir do Lema 3.2.6 concluimos que Σ^n tem um ponto elíptico. Consequentemente, assumindo que $H_{r+1} > 0$, podemos aplicar o Lema 3.2.3 para concluir que P_k é positivo definido para todos $2 \leq k \leq r$. Então, também considerando a condição de convergência (3.37), a partir de (3.43) obtemos que $\operatorname{div}(P_r \nabla g(h)) \geq 0$.

Por outro lado, desde que H é limitado e $H_2 > 0$, podemos usar a relação algébrica $|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$ para garantir que P_r é limitado. Então, desde que Σ^n está em uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$, existe uma constante positiva C tal que

$$|P_r(\nabla g(h))| = |P_r f(h) \nabla h| \leq C|\nabla h|. \tag{3.44}$$

Assim, assumindo que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, a partir de (3.44) concluimos que $|P_r(\nabla g(h))| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Consequentemente, podemos aplicar o Lema 3.2.16 para obter que $div(P_r \nabla g(h)) = 0$ em Σ^n. Então, voltando para (3.40) e usando mais uma vez a hipótese (3.38) obtemos que

$$-\frac{f'}{f}(h) = \frac{H_{r+1}}{H_r}\langle N, \partial_t \rangle \leq -\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq -\frac{f'}{f}(h). \tag{3.45}$$

Portanto, a partir de (3.45) obtemos que $\langle N, \partial_t \rangle = -1$ on Σ^n e, assim, Σ^n deve ser um slice de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Não é difícil verificar que, levando em conta a equação (3.25) juntamente com o Lema 3.2.2, podemos raciocinar de maneira semelhante como na demonstração do Teorema 3.2.17 para obter o seguinte resultado, onde o ambiente espaço tempo é suposto a obedecer a uma condição de convergência que é que é uma situação oposta a NCC.

Corolário 3.2.18 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW que satisfaz a seguinte condição de convergência*

$$\operatorname{Ric}_M \leq (n-1)\inf_I (ff'' - f'^2)\langle\,\rangle_M. \tag{3.46}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo espaço que está entre uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média $H > 0$ é limitada e que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\frac{H_2}{H} \geq \frac{f'}{f}(h) > 0.$$

Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Notemos que, considerando $r = 0$ ao longo da demonstração do Teorema 3.2.17, obtemos o seguinte

Corolário 3.2.19 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW e seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa tipo espaço que está entre uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média $H > 0$ satisfaz*

$$H \geq \frac{f'}{f}(h) > 0.$$

Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Para fechar essa seção, também observamos que podemos raciocinar como na demonstração do Teorema 3.2.17 para obtermos a seguinte extensão do Teorema 3.7 de [12] e o Teorema 4.1 de [76].

Teorema 3.2.20 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW cuja fibra M^n tem curvatura seccional constante κ satisfazendo a SNCC e seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície completa tipo espaço que está em uma região limitada tipo tempo de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média $H > 0$ é limitada e que, para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_r e H_{r+1} são potitivas e tais que*

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq -\frac{1}{\langle N, \partial_t \rangle} \frac{f'}{f}(h).$$

Se h tem um mínimo local em Σ^n e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

3.3 Gráficos inteiros tipo-espaço

Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio conexo de M^n. Para cada $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $|Du|_M < f(u)$ onde $|Du|_M$ denota a norma do campo gradiente Du de u, vamos considerar o gráfico sobre Ω determinado por uma função suave $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e que é dado por

$$\Sigma(u) = \{(u(x), x);\, x \in \Omega\} \subset -I \times_f M^n.$$

A métrica induzida sobre Ω a partir da métrica Lorentziana sobre o espaço ambiente via $\Sigma(u)$ é

$$\langle\, , \rangle = -du^2 + f^2(u)\langle\, , \rangle_{M^n}. \tag{3.47}$$

O gráfico é dito ser inteiro quando $\Omega = M^n$. Neste caso, não é difícil ver que o gráfico $\Sigma(u)$ é um gráfico tipo espaço se, e somente se, $|Du|_M < f(u)$. Observe que o

Lema 3.1 em [17], neste caso onde M^n é é uma variedade simplesmente conexa, cada hipersuperfície completa tipo espaço Σ^n em $-I \times_f M^n$ tal que a função warping é limitada sobre Σ^n em um gráfico inteiro tipo espaço em tal espaço. Em particular, isso acontece para uma hipersuperfície completa tipo espaço limitada longe do infinito de $-I \times_f M^n$. Assim, em contraste para o caso de subvariedades fechadas em um espaço Riemanniano completo, um gráfico inteiro tipo espaço em um espaço-tempo GRW completo não é necessariamente completo, nesse sentido a métrica Riemanniana induzida (3.47) não é necessariamente completa sobre M^n. Por exemplo, Albujer [1] obteve exemplos explícitos de gráficos inteiros maximais não completos em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

Se $\Sigma(u)$ é um gráfico inteiro tipo espaço vertical sobre um domínio Ω, a aplicação de Gauss N apontando para o futuro é dado pelo campo de vetores

$$N(x) = \frac{f(u(x))}{\sqrt{f^2(u(x)) - |Du(x)|_M^2}} \left(\partial_t|_{(u(x),x)} + \frac{1}{f^2(u(x))} Du(x) \right), \quad x \in \Omega. \tag{3.48}$$

Então, no que segue podemos ver que, usando (3.4) e (3.48) obtemos a seguinte relação

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_M^2}{f^2(u) - |Du|_M^2}. \tag{3.49}$$

A partir do Teorema 3.2.8 obtemos o seguinte resultado não paramétrico.

Corolário 3.3.1 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente parabólico e seja $\Sigma(u)$ um gráfico inteiro vertical de uma função suave limitada $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Suponha que P_r é limitado por cima (no sentido de formas quadráticas) e que, para algum $0 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é não negativo e satisfaz*

$$H_{r+1} \geq \frac{f'}{f}(u) H_r.$$

Se $|Du|_M^2 \leq \alpha f^2(u)$, para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então $\Sigma(u)$ é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Usando o raciocínio da primeira parte da demonstração do Teorema 4.1 de [2] (recomendamos ver também o Lema 17 de [5]), obtemos que $\Sigma(u)$ é, de fato, completa. Além disso, a partir da relaão (3.49) vemos que nossa hipótese que $|Du|_M^2 \leq \alpha f^2(u)$, para alguma constante $0 < \alpha < 1$. também garante que $\Sigma(u)$ tem ângulo hiperbólico normal limitado. Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.2.8 para concluir o resultado. ■

Finalmente, procedendo de forma similar a demonstração do Corolário 5.1 de [12], não é difícil ver que podemos obter a seguinte versão dos Teoremas 3.2.17 e 3.2.20, respectivamente.

Corolário 3.3.2 *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW cuja fibra* M^n *tem curvatura seccional constante* κ *satisfazendo a condição de convergência* (3.37) *e seja* $\Sigma(u)$ *um gráfico inteiro vertical de uma função suave limitada* $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. *Suponha que a curvatura média* $H > 0$ *é limitada e que, para algum* $1 \leq r \leq n-1$, H_r *e* H_{r+1} *são positivas tais que*

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{f'}{f}(u) > 0.$$

Se u *tem um mínimo local sobre* M^n, $|Du|_M^2 \leq \alpha f^2(u)$, *para alguma constante* $0 < \alpha < 1$, *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1(M)$, *então* $\Sigma(u)$ *é um slice de* $\overline{M}^{n+1}$.

Corolário 3.3.3 *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW cuja fibra* M^n *tem curvatura seccional constante* κ *satisfazendo a SNCC e seja* $\Sigma(u)$ *um gráfico inteiro vertical de uma função suave limitada* $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. *Suponha que a cuvatura média* $H > 0$ *é limitada e que, para algum* $1 \leq r \leq n-1$, H_r *e* H_{r+1} *são positivas tais que*

$$\frac{H_2}{H} \leq (1-\alpha)\frac{f'}{f}(u)$$

e

$$|Du|_M^2 \leq \alpha f^2(u),$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$. *If* u *tem um ponto elíptico sobre* M^n *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1(M)$, *então* $\Sigma(u)$ *é um slice de* $\overline{M}^{n+1}$.

Capítulo 4

Subvariedades completas em formas espaciais Riemannianas

Neste capítulo, apresentamos os resultados referentes aos artigos [62, 63]. No que segue, considerando o vetor curvatura média normalizado paralelo, apresentamos uma fórmula tipo Simons para subvariedades imersas em ambientes com curvatura seccional constante.

4.1 Alguns fatos básicos

Seja M^n uma subvariedade conexa n-dimensional imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com curvatura seccional constante c. No que segue, consideramos a seguinte convenção para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n \quad \text{e} \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+p.$$

Escolhemos um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}\}$ ao longo de M^n, onde $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ são tangentes a M^n e $\{e_\alpha\}_{\alpha=n+1,\ldots,n+p}$ são normais a M^n. Seja $\{\omega_B\}$ os correspondentes duais coreferenciais, e $\{\omega_{BC}\}$ a conexão 1-formas sobre $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Restrigindo sobre M^n, a segunda forma fundamental A, o tensor curvatura R e o tensor curvatura normal $R^\perp$ de M^n pode ser dado por

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad A = \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha,$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l,$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^{\perp}_{\alpha\beta kl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

Além disso, as componentes h^α_{ijk} da derivada covariante ∇A satisfaz

$$\sum_k h^\alpha_{ijk}\omega_k = dh^\alpha_{ij} + \sum_k h^\alpha_{ki}\omega_{kj} + \sum_k h^\alpha_{kj}\omega_{ki} + \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}. \tag{4.1}$$

A equação de Gauss é

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}). \tag{4.2}$$

Em particular, as componentes do tensor de Ricci R_{ik} são dadas por

$$R_{ik} = c(n-1)\delta_{ik} + n\sum_\alpha H^\alpha h^\alpha_{ik} - \sum_{\alpha,j} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{jk}, \tag{4.3}$$

onde $H^\alpha = \frac{1}{n}\sum_i h^\alpha_{ii}$ são as componentes do vetor curvatura média

$$\mathbf{H} = \sum_\alpha H^\alpha e_\alpha.$$

Além disso, a curvatura escalar normalizada R é dada por

$$R = \frac{1}{(n-1)}\sum_i R_{ii}. \tag{4.4}$$

A partir de (4.3) e (4.4), obtemos a seguinte relação

$$n(n-1)R = n(n-1)c + n^2H^2 - |A|^2, \tag{4.5}$$

onde

$$|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2$$

é a norma ao quadrado da segunda forma fundamental e

$$H = |\mathbf{H}|$$

é a função curvatura média de M^n.

Pela diferenciação exterior de (4.1), temos a identidade de Ricci

$$h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum_m h^\alpha_{mj}R_{mikl} + \sum_m h^\alpha_{im}R_{mjkl} + \sum_\beta h^\beta_{ij}R^{\perp}_{\beta\alpha kl}. \tag{4.6}$$

As equações de Codazzi e Ricci são dadas, respectivamente, por

$$h_{ijk}^{\alpha} = h_{ikj}^{\alpha} = h_{jik}^{\alpha} \tag{4.7}$$

e

$$R_{\alpha\beta ij}^{\perp} = \sum_{k} (h_{ik}^{\alpha} h_{kj}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ki}^{\beta}). \tag{4.8}$$

4.2 Uma fórmula tipo Simons

A partir de agora, vamos considerar subvariedades M^n de $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ com vetor curvatura média normalizado paralelo, em que a função curvatura média H é positiva e que o correspondente vetor curvatura média normalizado $\dfrac{\mathbf{H}}{H}$ é paralelo como uma seção de fibrado normal.

Neste contexto, podemos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ tal que $e_{n+1} = \dfrac{\mathbf{H}}{H}$. Então,

$$H^{n+1} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(h^{n+1}) = H \quad \text{and} \quad H^{\alpha} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(h^{\alpha}) = 0,\ \alpha \geq n+2. \tag{4.9}$$

Vamos considerar o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{\alpha,i,j} \Phi_{ij}^{\alpha} \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_{\alpha},$$

onde $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$. Consequentemente, temos que

$$\Phi_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij} \quad \text{and} \quad \Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha}, \quad n+2 \leq \alpha \leq n+p. \tag{4.10}$$

Seja $|\Phi|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (\Phi_{ij}^{\alpha})^2$ o quadrado da norma de Φ. A partir de (4.5), não é difícil verificar que Φ é sem-traço com

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2 = n(n-1)(c + H^2 - R). \tag{4.11}$$

Extendendo as ideias de [52], obtemos a seguinte fórmula tipo Simons

Proposição 4.2.1 *Seja M^n uma subvariedade n-dimensional ($n \geq 2$) com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Então, temos*

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{i,j,\alpha} nH_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} + cn|\Phi|^2 + n \sum_{\beta,i,j,k} H h_{ij}^{n+1} h_{jk}^{\beta} h_{ki}^{\beta}$$
$$- \sum_{i,j,k,l} \left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha} h_{kl}^{\alpha} \right)^2 - \sum_{i,j,\alpha,\beta} (R_{\alpha\beta ij}^{\perp})^2.$$

Demonstração. Observe que

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j} h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij} + \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2, \tag{4.12}$$

onde o Laplaciano Δh^α_{ij} de h^α_{ij} é definido por $\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk}$, usando a equação de Codazzi (4.7) em (4.12) temos

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j} h^\alpha_{ij}\left(\sum_k h^\alpha_{ijkk}\right) + \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kijk}. \tag{4.13}$$

Então, a partir de (4.6) e (4.13) concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = {} & |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kki})_j - \sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ijj}h^\alpha_{kki} + \sum_{\alpha,i,j,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mj} \\ & + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} + \sum_{\beta,\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ki}R^\perp_{\beta\alpha jk}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, observemos que $\sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ijj}h^\alpha_{kki} = n^2|\nabla^\perp \mathbf{H}|^2$, onde $|\nabla^\perp \mathbf{H}|^2 = \sum_{\alpha,i}(H^\alpha_i)^2$, a partir de (4.14) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = {} & |\nabla A|^2 - n^2|\nabla^\perp \mathbf{H}|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kki}\right)_j + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mk}R_{mijk} \\ & + \sum_{\alpha,i,j,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{im}R_{mj} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}R^\perp_{\beta\alpha jk}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Mas, usando novamente a equação de Codazzi (4.7) obtemos que

$$-n^2|\nabla^\perp \mathbf{H}|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kki})_j = \sum_{i,j,\alpha} nH^\alpha_{ij}h^\alpha_{ij}. \tag{4.16}$$

A partir de (4.2) e (4.3) concluimos também que

$$\begin{aligned}& \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mk}R_{mijk} + \sum_{\alpha,i,j,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{im}R_{mj} + \sum_{\beta,\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ji}h^\beta_{ik}R^\perp_{\beta\alpha jk} \\ & \quad = c|\Phi|^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}h^\alpha_{mk}h^\beta_{mk} + n\sum_{\alpha,\beta,i,j,m} H^\beta h^\beta_{mj}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{im} \\ & \qquad - \sum_{\alpha,\beta,i,j,m,l} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{im}h^\beta_{ml}h^\beta_{lj} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}h^\beta_{jm}h^\beta_{ik} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ji}h^\beta_{ik}R^\perp_{\beta\alpha jk}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Por outro lado, a partir de (4.44) obtemos

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,m} H^\beta h^\beta_{mj}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{im} = \sum_{\beta,i,j,k} H h^{n+1}_{ij}h^\beta_{jk}h^\beta_{ki}, \tag{4.18}$$

e

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}h_{mk}^{\alpha}h_{mk}^{\beta} = \sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2. \tag{4.19}$$

Assim, usando (4.8) temos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,j,k}(R_{\alpha\beta jk}^{\perp})^2 &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,k}(h_{ji}^{\beta}h_{ik}^{\alpha} - h_{ji}^{\alpha}h_{ik}^{\beta})R_{\beta\alpha jk}^{\perp} \qquad (4.20)\\ &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,m,l} h_{ij}^{\alpha}h_{im}^{\alpha}h_{ml}^{\beta}h_{lj}^{\beta} - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{jm}^{\beta}h_{ik}^{\beta} - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h_{ji}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}^{\perp}.\end{aligned}$$

Portanto, considerando (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.15), concluimos a demonstração. ■

4.3 Lemas auxiliares

Esta secção é dedicada a citar os Lemas chaves que serão usados para demonstrar o Teorema 4.5.3 na próxima secção. O primeiro é justamente o Lema 2.1 de [52].

Lema 4.3.1 *Seja M^n uma subvariedade imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com curvatura escalar normalizada constante $R \geq c$. Então*

$$|\nabla A|^2 \geq n^2|\nabla H|^2.$$

O segundo Lema auxiliar é um resultado algébrico, cuja demonstração pode ser encontrada em [83].

Lema 4.3.2 *Sejam $B, C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações lineares simétricas tais que $BC - CB = 0$ e $trB = trC = 0$, então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|B|^2|C| \leq \mathrm{tr}(B^2C) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|B|^2|C|. \tag{4.21}$$

Considere o seguinte Lema algébrico, cuja demonstração pode ser encontrada em[60].

Lema 4.3.3 *Seja $B^1, B^2, \ldots, B^p$ matrizes simétricas $(n \times n)$. Se $S_{\alpha\beta} = tr(B^{\alpha}B^{\beta})$, $S_{\alpha} = S_{\alpha\alpha}$, $S = \sum_{\alpha} S_{\alpha}$, então*

$$\sum_{\alpha,\beta}|B^{\alpha}B^{\beta} - B^{\beta}B^{\alpha}|^2 + \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}^2 \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha} S_{\alpha}\right)^2. \tag{4.22}$$

De acordo com Cheng-Yau [44], introduzimos o operador $\square$ associado a Φ atuando sobre uma função suave f por

$$\square f = \sum_{i,j} \Phi_{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}) f_{ij}. \tag{4.23}$$

Considerando um referencial local ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ em $q \in \Sigma^n$ tal que $h_{ij}^{n+1} = \lambda_i^{n+1}\delta_{ij}$, podemos raciocinar como na demonstração do Lema 5 em [15] afim de obter o seguinte critério suficiente para a elipticidade do operador quadrado.

Lema 4.3.4 *Seja M^n uma subvariedade com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com curvatura escalar normalizada $R > c$. Então, $\square$ é elíptico.*

O último Lema chave corresponde ao princípio do máximo do tipo Omori para o operador quadrado.

Lema 4.3.5 *Seja M^n uma subvariedade completa com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com curvatura escalar normalizada constante $R \geq c$. Se a função curvatura média H é limitada sobre M^n, então existe uma sequência de pontos$\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M^n$ tal que*

$$\lim_k nH(q_k) = \sup_M nH, \quad \lim_k |\nabla nH(q_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_k \square(nH(q_k)) \leq 0.$$

Demonstração. Escolha um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij}^{n+1} = \lambda_i^{n+1}\delta_{ij}$. A partir de (4.23) temos

$$\square(nH) = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - \lambda_i^{n+1}\delta_{ij})(nH)_{ij} = n\sum_i (nH - \lambda_i^{n+1})H_{ii}.$$

Por outro lado, assumindo que $R \geq c$, a partir de (4.5) obtemos, para todos $i = 1, \ldots, n$ e $n+1 \leq \alpha \leq n+p$,

$$(\lambda_i^\alpha)^2 \leq |A|^2 = n^2H^2 + n(n-1)(c-R) \leq (nH)^2.$$

Consequentemente, $i = 1, \ldots, n$ e $n+1 \leq \alpha \leq n+p$, temos

$$|\lambda_i^\alpha| \leq nH. \tag{4.24}$$

Além disso, a partir de (4.2) obtemos

$$R_{ijij} = c + \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha - \sum_\alpha (h_{ij}^\alpha)^2. \tag{4.25}$$

Desde que $|A|^2 \leq (nH)^2$, temos que

$$(h_{ij}^{\alpha})^2 \leq |A|^2 \leq (nH)^2,$$

para cada α, i, j e, assim, a partir de (4.24) temos

$$|h_{ii}^{\alpha} h_{jj}^{\alpha}| = |h_{ii}^{\alpha}||h_{jj}^{\alpha}| \leq (nH)^2.$$

Então, assumindo que H é limitado sobre M^n, segue por

$$h_{ii}^{\alpha} h_{jj}^{\alpha} \geq -(nH)^2 > -\infty \quad \text{e} \quad -(h_{ij}^{\alpha})^2 \geq -(nH)^2 > -\infty. \tag{4.26}$$

Assim, a partir de (4.25) e (4.26) concluimos que as curvaturas seccionais de M^n são limitadas por baixo. Então, podemos aplicar o princípio do máximo generalizado de Omori [71] para a função nH, obtendo uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em M^n tal que

$$\lim_k nH(q_k) = \sup nH, \quad \lim_k |\nabla nH(q_k)| = 0 \quad \text{and} \quad \limsup_k \sum_i nH_{ii}(q_k) \leq 0. \tag{4.27}$$

Além disso, a partir de (4.24) temos também que

$$\begin{aligned} 0 &\leq nH(q_k) - |\lambda_i^{n+1}(q_k)| \leq nH(q_k) - \lambda_i^{n+1}(q_k) \\ &\leq nH(q_k) + |\lambda_i^{n+1}(q_k)| \leq 2nH(q_k). \end{aligned}$$

Esta estimativa anterior mostra que $nH(q_k) - \lambda_i^{n+1}(q_k)$ é não negativa e limitada sobre M^n, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, levando em conta (4.27), obtemos

$$\limsup_k (\square(nH)(q_k)) \leq n \sum_i \limsup_k \left[(nH - \lambda_i^{n+1})(q_k) H_{ii}(q_k)\right] \leq 0.$$

■

4.4 Caracterização de subvariedades com curvatura escalar constante

Agora, estamos em condições suficientes para enunciar e demonstrar o Teorema principal desta seção

Teorema 4.4.1 *Seja M^n uma subvariedade completa com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ ($c \in \{1, 0, -1\}$ e $n \geq 4$), com curvatura escalar normalizada constante $R \geq 1$, quando $c = 1$, e $R > 0$, quando $c \in \{0, -1\}$. Então* *i.* $|\Phi| \equiv 0$ *e* M^n *é totalmente umbílica,*

ii. ou

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}.$$

Além disso, assumindo que $R > 1$ *quando* $c = 1$*, a igualdade* $\sup_M |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ *vale e o supremo é atingido em algum ponto de* M^n *se, e somente se,* M^n *é isométrico ao*

(a) toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p}$*, quando* $c = 1$*,*

(b) cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$*, quando* $c = 0$*,*

(c) cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1\left(-\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+p}$*, quando* $c = -1$*,*

onde $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{nR}}$.

Demonstração. A partir de (4.5), (4.23), Proposição 4.2.1 e o Lema 4.3.1 obtemos

$$\Box(nH) \geq cn|\Phi|^2 + n\sum_{\beta,i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{\beta}h_{ki}^{\beta} - \sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j}(R_{\alpha\beta ij}^{\perp})^2. \tag{4.28}$$

A partir de (4.44) e (4.10) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,\beta} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{\beta}h_{ki}^{\beta} &= \sum_{i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{n+1}h_{ki}^{n+1} + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta} \\
&= H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1}+HI)^3 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta} + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^{\beta}|^2 \\
&= H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1})^3 + 3H^2|\Phi^{n+1}|^2 + nH^4 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^{\beta}|^2 \\
&\quad + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Note que $\mathrm{tr}\,\Phi^{\alpha} = 0$ e $\Phi^{n+1}\Phi^{\beta} - \Phi^{\beta}\Phi^{n+1} = 0, n+2 \leq \beta \leq n+p$, a partir do Lema

4.3.2 obtemos

$$
\begin{aligned}
H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1})^3 + 3H^2|\Phi^{n+1}|^2 + nH^4 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^\beta|^2 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^\beta\Phi_{ki}^\beta & \qquad (4.30)\\
\geq \ -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}|^3 + 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 &\\
-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{\beta=n+2}^{n+p} H|\Phi^{n+1}||\Phi^\beta|^2 &\\
= \ 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2. &
\end{aligned}
$$

Assim, a partir de (4.50) e (4.51) temos

$$
\sum_{\beta,i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^\beta h_{ki}^\beta \geq 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2. \qquad (4.31)
$$

A partir da equação de Ricci (4.8) obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l}\left(\sum_\alpha h_{ij}^\alpha h_{kl}^\alpha\right)^2 + \sum_{\alpha,\beta,i,j}(R_{\alpha\beta ij}^\perp)^2 &= \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{tr}(A^\alpha A^\beta))^2 + \sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1,i,j}(R_{\alpha\beta ij}^\perp)^2 \qquad (4.32)\\
&= [\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{n+1})]^2 + 2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^{n+1}A^\beta)]^2\\
&\quad + \sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}(\mathrm{tr}(A^\alpha A^\beta))^2 + \sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}|A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha|^2.
\end{aligned}
$$

Mas, usando (4.10) e o Lema 4.3.3 obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^\alpha A^\beta)]^2 + \sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}|A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha|^2 \ &\leq \ \frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}(A^\beta A^\beta)\right)^2\\
&\leq \ \frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1}|\Phi^\beta|^2\right)^2.
\end{aligned}
$$

Assim, a partir de (4.53) e (4.54) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2 &+ \sum_{\alpha,\beta,i,j}(R^{\perp}_{\alpha\beta ij})^2 \leq [\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{n+1})]^2 \qquad (4.33)\\
&+ 2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{\beta})]^2 + \frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1}|\Phi^{\beta}|^2\right)^2\\
&= |\Phi^{n+1}|^4 + 2nH^2|\Phi^{n+1}|^2 + n^2H^4 + 2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(\Phi^{n+1}\Phi^{\beta})]^2\\
&\quad + \frac{3}{2}(|\Phi|^2 - |\Phi^{n+1}|^2)^2 \qquad (4.34)\\
&\leq \frac{5}{2}|\Phi^{n+1}|^4 + 2nH^2|\Phi^{n+1}|^2 + n^2H^4 + 2|\Phi^{n+1}|^2(|\Phi|^2 - |\Phi^{n+1}|^2)\\
&\quad + \frac{3}{2}|\Phi|^4 - 3|\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2\\
&= \frac{1}{2}|\Phi^{n+1}|^4 + 2nH^2|\Phi^{n+1}|^2 + n^2H^4 - |\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2 + \frac{3}{2}|\Phi|^4.
\end{aligned}$$

Portanto, a partir de (4.49), (4.52) e (4.55) obtemos

$$\begin{aligned}
\square(nH) &\geq cn|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2 + nH^2|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi^{n+1}|^4\\
&+ |\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2 - \frac{3}{2}|\Phi|^4 \qquad (4.35)\\
&= |\Phi|^2\left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2+c)\right)\\
&\quad + (|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^2 - \frac{1}{2}(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a partir de (4.11) obtemos o seguinte

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)}|\Phi|^2 + (R-c) \qquad (4.36)$$

Então, a partir de (4.56) e (4.57) obtemos

$$\begin{aligned}
\square(nH) &\geq (|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)\left[\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^2 - \frac{1}{2}(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2\right]\\
&+ \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|), \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

onde $Q_R(x)$ é a função introduzida por Alías, García-Martínez e Rigoli em [15] e que é dada por

$$Q_R(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R.$$

Por outro lado, notemos que vale a seguinte desigualdade algébrica (3.5) de [52]

$$(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2 \leq \frac{32}{27}|\Phi|^3. \tag{4.38}$$

Ademais, assumindo que $R \geq c$, usando (4.5) temos também

$$n^2H^2 = |A|^2 + n(n-1)(R-c) \geq |A|^2 = |\Phi|^2 + nH^2,$$

que nos dão

$$H \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|. \tag{4.39}$$

Então, a partir de (4.59) e (4.60) concluimos que

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^2 - \frac{1}{2}(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2 \geq \left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27}\right)|\Phi|^3. \tag{4.40}$$

Mas, assumindo que $n \geq 4$, temos que

$$\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27} > 0. \tag{4.41}$$

Consequentemente, a partir de (4.58), (4.61) e (4.62) obtemos que

$$\square(nH) \geq \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R\left(|\Phi|\right) + (|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27}\right)|\Phi|^3 \geq \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R\left(|\Phi|\right). \tag{4.42}$$

Desde que $R \geq 1$, qaundo $c = 1$, e $R > 0$, quando $c \in \{0, -1\}$, temos que $Q_R(0) = n(n-1)R > 0$ e a função $Q_R(x)$ é estritamente decrescente para $x \geq 0$, com $Q_R(x^*) = 0$ em

$$x^* = R\sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR-(n-2)c)}} = \sqrt{\alpha_{n,c}(R)} > 0.$$

Agora, suponha que M^n não é totalmente umbílica. Neste caso, podemos considerar sem perda de generalidade que $\sup_M |\Phi| < +\infty$. Então, a partir (4.11) obtemos que H é limitada sobre M^n e podemos aplicar o Lema 4.3.5 juntamente com (4.11) e (4.63) para obter a sequência de pontos $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M^n$ tal que

$$0 \geq \limsup_k \square(nH)(q_k) \geq \frac{1}{n-1}\sup_M |\Phi|^2 Q_R\left(\sup_M |\Phi|\right). \tag{4.43}$$

Consequentemente, a partir de (4.43) obtemos que $Q_R\left(\sup_M |\Phi|\right) \leq 0$. Assim, a partir do comportamento da função Q_R anteriormente descrito, concluimos que $\sup_M |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R)$.

Vamos assumir que $R > 1$ quando $c = 1$, a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ vale e o supremo é atingido em algum ponto de M^n. Neste caso, notemos a partir de (4.11) que H também atinge o máximo sobre M^n e, a partir de (4.63), temos que

$$\square(nH) \geq \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R\left(|\Phi|\right) \geq 0.$$

Como o Lema 4.3.4 garante que $\square$ é elíptico, concluimos que H é constante sobre M^n. Assim, voltando (4.63), obtemos que $|\Phi| = |\Phi^{n+1}|$ e, consequentmente, $\Phi^\alpha = 0$, para todo $n+2 \leq \alpha \leq n+p$. Então, como $e_{n+1} = \dfrac{\mathbf{H}}{H}$ é paralelo no fibrado normal de M^n, estamos em condições de aplicar o Teorema 1 de [90] para concluir que M^n é, de fato, imersa isometricamente em uma subvariedade $(n+1)$-dimensional totalmente geodésica $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ de $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Portanto, podemos usar os Teoremas 1 e 2 de [15] para concluir a demonstração. ■

4.5 Caracterizações de subvariedades Weingarten lineares

A partir de agora, vamos considerar subvariedades M^n Weingarten linear de $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, isto é, $R = aH + b$ onde a, b são constantes, tendo vetor curvatura média normalizado paralelo, em que a função curvatura média H é positiva e que o vetor curvatura média normalizado correspondente $\dfrac{\mathbf{H}}{H}$ é paralelo como uma seção do fibrado normal.

Neste contexto, podemos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ tal que $e_{n+1} = \dfrac{\mathbf{H}}{H}$. Então,

$$H^{n+1} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(h^{n+1}) = H \quad \text{and} \quad H^\alpha = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(h^\alpha) = 0,\ \alpha \geq n+2. \tag{4.44}$$

No que segue, o seguinte Lema pode ser demonstrado usando um raciocínio semelhante à Proposição 2.2 de [89] (ver também o Lema 3.2 de [23]).

Lema 4.5.1 *Seja M^n uma subvariedade Weingarten linear imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com $R = aH + b$ para alguns $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que*

$$(n-1)a^2 + 4n(b-c) \geq 0. \tag{4.45}$$

Então

$$|\nabla A|^2 \geq n^2|\nabla H|^2. \tag{4.46}$$

Além disso, a igualdade vale em (4.46) *sobre* M^n *se, e somente se,* M^n *é uma subvariedade isoparamétrica de* $\mathbb{Q}_c^{n+p}$.

No estudo de subvariedades Weingarten lineares, vamos considerar, para cada $a \in \mathbb{R}$, um operador modificado apropriado de Cheng-Yau, que é dado por

$$L = \Box - \frac{n-1}{2} a\Delta. \tag{4.47}$$

Considerando um referencial local ortonormal $e_1, \dots, e_n$ at $q \in \Sigma^n$ tal que $h_{ij}^{n+1} = \lambda_i^{n+1}\delta_{ij}$, podemos mostrar as seguintes condições suficientes para o critério de elipticidade de uma forma similar ao Lema 3.3 em [23].

Lema 4.5.2 *Seja* M^n *uma subvariedade Weingarten linear com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial Riemanniana* $\mathbb{Q}_c^{n+p}$*, tal que* $R = aH + b$ *com* $b > c$*. Então,* L *é elíptico.*

No que segue, apresentaremos nossos resultados de caracterização referentes às subvariedades Weingarten lineares completas imersas em uma forma espacial Riemanniana. O primeiro será obtido aplicando o princípio do máximo forte de Hopf's que é uma extensão natural do Teorema 1.1 de [23].

Teorema 4.5.3 *Seja* M^n *uma subvariedade Weingarten linear completa com vetor curvatura média normalizado paralelo imersa em uma forma espacial Riemanniana* $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ $(c = 1, 0, -1$ *e* $n \geq 4)$*, tal que* $R = aH + b$ *com* $a \geq 0$ *e* $b > c$*. No caso que* $c = -1$*, assumimos que* $R > 0$*. Se* H *atinge o máximo em* M^n *e*

$$\sup_M |\Phi|^2 \leq \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}, \tag{4.48}$$

então

i. ou $|\Phi| \equiv 0$ *e* M^n *é totalmente umbílica,*

ii. ou $|\Phi|^2 \equiv \dfrac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}$ *e* M^n *é isométrica a*

  (a) toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p}$*, quando* $c = 1$*,*

  (b) cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$*, quando* $c = 0$*,*

  (c) cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1\left(-\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+p}$*, quando* $c = -1$*,*

onde r é uma constante igual a $\sqrt{\dfrac{n-2}{nR}}$.

Demonstração. A partir de (4.5), (4.23), (4.47) e Proposição 4.2.1 temos que

$$\begin{aligned}
L(nH) =& \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1})(nH)_{ij} - \frac{n-1}{2}a\Delta(nH) \\
=& \frac{1}{2}n^2\Delta H^2 - n^2|\nabla H|^2 - \frac{n-1}{2}a\Delta(nH) - n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij} \qquad (4.49)\\
=& \big(|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2\big) + cn|\Phi|^2 + n\sum_{\beta,i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{\beta}h_{ki}^{\beta} - \sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j}(R_{\alpha\beta ij}^{\perp})^2.
\end{aligned}$$

A partir de (4.44) e (4.10) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,\beta} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{\beta}h_{ki}^{\beta} =& \sum_{i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{n+1}h_{ki}^{n+1} + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta} \qquad (4.50)\\
=& H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1} + HI)^3 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta} + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^{\beta}|^2 \\
=& H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1})^3 + 3H^2|\Phi^{n+1}|^2 + nH^4 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^{\beta}|^2 \\
&+ \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Note que $\mathrm{tr}\,\Phi^{\alpha} = 0$ e $\Phi^{n+1}\Phi^{\beta} - \Phi^{\beta}\Phi^{n+1} = 0, n+2 \leq \beta \leq n+p$, a partir do Lema 4.3.2 obtemos

$$\begin{aligned}
H\mathrm{tr}(\Phi^{n+1})^3 + 3H^2|\Phi^{n+1}|^2 + nH^4 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p} H^2|\Phi^{\beta}|^2 + \sum_{\beta=n+2}^{n+p}\sum_{i,j,k} H\Phi_{ij}^{n+1}\Phi_{jk}^{\beta}\Phi_{ki}^{\beta} \qquad (4.51)\\
\geq\ & -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}|^3 + 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 \\
& -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{\beta=n+2}^{n+p} H|\Phi^{n+1}||\Phi^{\beta}|^2 \\
=\ & 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2.
\end{aligned}$$

Assim, a partir de (4.50) e (4.51) temos

$$\sum_{\beta,i,j,k} Hh_{ij}^{n+1}h_{jk}^{\beta}h_{ki}^{\beta} \geq 2H^2|\Phi^{n+1}|^2 + H^2|\Phi|^2 + nH^4 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2. \qquad (4.52)$$

A partir da equação de Gauss (4.3) obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2+\sum_{\alpha,\beta,i,j}(R^{\perp}_{\alpha\beta ij})^2 &= \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{tr}(A^{\alpha}A^{\beta}))^2+\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1,i,j}(R^{\perp}_{\alpha\beta ij})^2 \\ &= [\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{n+1})]^2+2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{\beta})]^2 \\ &\quad+\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}(\mathrm{tr}(A^{\alpha}A^{\beta}))^2+\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}|A^{\alpha}A^{\beta}-A^{\beta}A^{\alpha}|^2.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Mas, usando (4.10) e o Lema 4.3.3 obtemos

$$\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^{\alpha}A^{\beta})]^2+\sum_{\alpha\neq n+1,\beta\neq n+1}|A^{\alpha}A^{\beta}-A^{\beta}A^{\alpha}|^2 \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1} tr(A^{\beta}A^{\alpha})\right)^2 \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1}|\Phi^{\beta}|\right)^2. \tag{4.54}$$

Assim, a partir de (4.53) e (4.54) temos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}\left(\sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha}\right)^2+\sum_{\alpha,\beta,i,j}(R^{\perp}_{\alpha\beta ij})^2 &\leq [\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{n+1})]^2+2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(A^{n+1}A^{\beta})]^2+\frac{3}{2}\left(\sum_{\beta\neq n+1}|\Phi^{\beta}|^2\right)^2 \\ &= |\Phi^{n+1}|^4+2nH^2|\Phi^{n+1}|^2+n^2H^4+2\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(\Phi^{n+1}\Phi^{\beta})]^2 \\ &\quad+\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi^{n+1}|^2)^2 \qquad (4.55) \\ &\leq \frac{5}{2}|\Phi^{n+1}|^4+2nH^2|\Phi^{n+1}|^2+n^2H^4+2|\Phi^{n+1}|^2(|\Phi|^2-|\Phi^{n+1}|^2) \\ &\quad+\frac{3}{2}|\Phi|^4-3|\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\Phi^{n+1}|^4+2nH^2|\Phi^{n+1}|^2+n^2H^4-|\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2+\frac{3}{2}|\Phi|^4.\end{aligned}$$

Portanto, a partir de (4.49), (4.52) e (4.55) obtemos

$$\begin{aligned}L(nH) &\geq cn|\Phi|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi^{n+1}||\Phi|^2+nH^2|\Phi|^2-\frac{1}{2}|\Phi^{n+1}|^4 \\ &+\ |\Phi|^2|\Phi^{n+1}|^2-\frac{3}{2}|\Phi|^4 \qquad (4.56) \\ &= |\Phi|^2\left(-|\Phi|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|+n(H^2+c)\right) \\ &\quad+(|\Phi|-|\Phi^{n+1}|)\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^2-\frac{1}{2}(|\Phi|-|\Phi^{n+1}|)(|\Phi|+|\Phi^{n+1}|)^2\right).\end{aligned}$$

Por outro lado, a partir de (4.5) e (4.11) obtemos

$$H^2=\frac{1}{n(n-1)}|\Phi|^2+(R-c). \tag{4.57}$$

Então, a partir de (4.56) e (4.57) obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) \geq & (|\Phi| - |\Phi^{n+1}|) \left[\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi|^2 - \frac{1}{2}(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2 \right] \\ & + \frac{1}{n-1} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|), \end{aligned} \tag{4.58}$$

onde $Q_R(x)$ é a função introduzida por Alías, García-Martínez e Rigoli em [15] e que é dada por

$$Q_R(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R.$$

Por outro lado, notemos que vale a seguinte desigualdade algébrica (3.5) de [52]

$$(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2 \leq \frac{32}{27}|\Phi|^3. \tag{4.59}$$

Além disso, desde que $a \geq 0$ e $b > c$ usando (4.5), temos também

$$n^2H^2 \geq n^2H^2 - n(n-1)aH = |A|^2 + n(n-1)(b-c) \geq |A|^2 = |\Phi|^2 + nH^2,$$

que é dada por

$$H \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|. \tag{4.60}$$

A partir de (4.59) e (4.60) concluimos que

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi|^2 - \frac{1}{2}(|\Phi| - |\Phi^{n+1}|)(|\Phi| + |\Phi^{n+1}|)^2 \geq \left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27} \right) |\Phi|^3. \tag{4.61}$$

Mas, assumindo que $n \geq 4$, temos que

$$\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27} > 0. \tag{4.62}$$

Consequentemente, a partir de (4.58), (4.61) e (4.62) obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) \geq & \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) + (|\Phi| - |\Phi^{n+1}|) \left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{16}{27} \right) |\Phi|^3 \\ \geq & \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \end{aligned} \tag{4.63}$$

Observemos que nossas hipóteses sobre a, b e M^n é Weingarten linear, obtemos

$$R = aH + b \geq b > c. \tag{4.64}$$

Assim, quando $c = 0, 1$, a partir de (4.64) devemos ter $R > 0$. Então, $Q_R(0) = n(n-1)R > 0$ é a função $Q_R(x)$ é estritamente decrescente para $x \geq 0$, com $Q_R(x^*) = 0$ em

$$x^* = R\sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR-(n-2)c)}} > 0,$$

uma vez

$$nR - (n-2)c = naH + n(b-c) + 2c > 2c$$

e, consequentemente, se $c = 0, 1$, obtemos $nR - (n-2)c > 0$. Além disso, assumindo que $R > 0$ quando $c = -1$, temos também que $nR + (n-2) > 0$.

Então, a partir de nossa restrição (4.48) sobre a norma de Φ, obtemos que $Q_R(|\Phi|) \geq 0$. Assim, a partir de (4.63)

$$L(nH) \geq \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \geq 0.$$

O Lema 4.5.2 garante que L é elíptico e supondo que H atinge o máximo sobre M^n, a partir de(4.63) concluimos que H é constante sobre M^n. Então, voltando a (4.49), obtemos a igualdade em (4.46). O Lema 4.5.1 garante que M^n é uma subvariedade isoparamétrica $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ e, em particular, $|\Phi|$ é constante. Agora, suponha que M^n não é totalmente umbílica, assim $|\Phi|$ é uma constante positiva. Neste caso, levando em conta (4.62), a partir de (4.63) concluimos que $|\Phi| = |\Phi^{n+1}|$ e, consequentemente, $\Phi^\alpha = 0$, para todo $n+2 \leq \alpha \leq n+p$. Então, desde que e_{n+1} é paralelo no fibrado normal de M^n, estamos em posição de aplicar o Teorema 1 de [90] para concluir que M^n é, de fato, imersa isometricamente em uma subvariedade totalmente geodésica $(n+1)$ $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ de $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Assim, por resultados clássicos sobre hipersuperfícies isoparamétricas de uma forma espacial [41, 57, 85] e tendo em conta que $R > 0$, concluimos que $|\Phi| \equiv 0$ e M^n é totalmente umbílica, ou $|\Phi|^2 \equiv \dfrac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}$ e M^n é isométrica a

(a) toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, com $0 < r < 1$, se $c = 1$,

(b) cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, com $r > 0$, se $c = 0$,

(c) cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1\left(-\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, com $r > 0$, se $c = -1$.

Quando $c = 1$, para um dado raio $0 < r < 1$, é um fato padrão que $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ tem cuvaturas principais constantes dadas por

$$\lambda_1 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Então, neste caso,

$$H = \frac{nr^2 - (n-1)}{nr\sqrt{1-r^2}} \quad \text{and} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)}.$$

Quando $c = 0$, para um dado raio $r > 0$, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tem curvaturas principais constantes dadas por

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{r}.$$

Neste caso,

$$H = \frac{n-1}{nr} \quad \text{and} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2}.$$

Finalmente, quando $c = -1$, para um dado raio $r > 0$, $\mathbb{H}^1\left(-\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tem curvaturas principais constantes dadas por

$$\lambda_1 = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}, \;\; \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Então, neste caso,

$$H = \frac{nr^2 + (n-1)}{nr\sqrt{1+r^2}} \quad \text{and} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1+r^2)}.$$

Portanto, para finalizar a nossa demonstração, a partir das equações (4.5) e (4.11) e com um cálculo algébrico não é difícil verificar que $r = \sqrt{\frac{n-2}{nR}}$. ■

Encerramos esta seção aplicando o Lema 3.2.16 para obter o seguinte resultado:

Teorema 4.5.4 *Seja M^n uma subvariedade Weingarten linear completa com vetor curvatura média normalizado paralelo em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ ($c = 1, 0, -1$ e $n \geq 4$), tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$ e $b \geq c$. Neste caso $b = c = 0$ ou $c = -1$, assumimos além disso que $R > 0$. Se H é limitada sobre M^n, $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M^n)$ e*

$$\sup_M |\Phi|^2 \leq \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)},$$

então

i. ou $|\Phi| \equiv 0$ e M^n é totalmente umbílica,

ii. ou $|\Phi|^2 \equiv \dfrac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}$ e M^n é isométrica a

(a) toro de Clyfford $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p}$, quando $c = 1$,

(b) cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, quando $c = 0$,

(c) cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1\left(-\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+p}$, *quando* $c = -1$,

onde r *é uma constante igual a* $\sqrt{\dfrac{n-2}{nR}}$.

Demonstração. Observemos que a partir de (4.23) e (4.47) nãp é difícil verificar que

$$L(nH) = \operatorname{div}(P(\nabla H)), \tag{4.65}$$

onde

$$P = \left(n^2 H - \frac{n(n-1)}{2} a\right) I - nh^{n+1}, \tag{4.66}$$

Seja $h^{n+1} = (h_{ij}^{n+1})$ em M^n na direção e_{n+1} e I é o operador identidade sobre M^n.

Por outro lado, desde que $R = aH + b$ e H é limitada sobre M^n, a partir da equação (4.5) temos que A é limitado sobre M^n. Consequentemente, a partir de (4.66) concluimos que o operador P é limitado, isto é, existe uma constante positiva C tal que $|P| \leq C$. Assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M^n)$, obtemos

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \leq C|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M^n).$$

Assim, aplicando o Lema 3.2.16 obtemos $L(nH) = 0$ sobre M^n. Então, desde que vale (4.63), podemos usar mais uma vez o Lema 4.5.1 para obter que M^n é uma subvariedade isoparamétrica $\mathbb{Q}_c^{n+p}$. Portanto, podemos raciocinar como na demonstração do Teorema 4.5.3 para concluir o resultado. ∎

Observação 4.5.5 *Considerando no Teorema 4.5.4 no caso que* M^n *é compacta,* $a = 0$ *e* $c = 1$, *reobtemos justamente o Teorema* 1.3 *de [52].*

Referências Bibliográficas

[1] A.L. Albujer. New examples of entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 456–462.

[2] A.L. Albujer, F. Camargo, H.F. de Lima. Complete spacelike hypersurfaces in a Robertson-Walker spacetime, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **151** (2011), 271–282.

[3] A.L. Albujer, L.J. Alías. Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 711–721.

[4] J.A. Aledo, J.A. Gálvez, A. Romero. Some estimates for the curvatures of complete spacelike hypersurfaces in generalized Robertson-Walker spacetimes, J. Geom. Phys. **52** (2004), 469–479.

[5] J.A. Aledo, A. Romero, R.M. Rubio. Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian warped products and Calabi-Bernstein type problems, Nonl. Anal. **106** (2014), 57–69.

[6] L.J. Alías, A. Brasil Jr., A.G. Colares. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications, Proc. Edinb. Math. Soc. **46** (2003), 465–488.

[7] L.J. Alías, A.G. Colares. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **143** (2007), 703–729.

[8] L.J. Alías, A.G. Colares, H.F. de Lima. On the rigidity of complete spacelike hypersurfaces immersed in a generalized Robertson-Walker spacetime, Bull. Brazilian Math. Soc. **44** (2013), 195–217.

[9] L.J. Alías, A.G. Colares, H.F. de Lima. Uniqueness of entire graphs in warped products, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), 60–75.

[10] L.J. Alías, M. Dajczer. Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab, Comment. Math. Helv. **81** (2006), 653–663.

[11] L.J. Alías, D. Impera, M. Rigoli. Spacelike hypersurfaces of constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **152** (2012), 365–383.

[12] L.J. Alías, D. Impera, M. Rigoli. Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 591–621.

[13] L.J. Alías, M. Dajczer. Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces, Proc. Edinb. Math. Soc. **50** (2007), 511–526.

[14] L.J. Alías, S.C. García-Martínez. On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms, J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 579–587.

[15] L.J. Alías, S.C. García-Martínez, M. Rigoli. A maximum principle for hypersurfaces with constant scalar curvature and applications, Ann. Glob. Anal. Geom. **41** (2012), 307–320.

[16] L.J. Alías, S. Montiel. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, Differential Geometry, Valencia, (2001), 59–69, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[17] L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, Gen. Relat. Grav. **27** (1995), 71–84.

[18] L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez. Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 337–345.

[19] C.P. Aquino, H.F. de Lima. Uniqueness of complete hypersurfaces with bounded higher order mean curvature in semi-Riemannian warped products, Glasgow Math. J. **54** (2012), 201–212.

[20] C.P. Aquino, H.F. de Lima. On the unicity of complete hypersurfaces immersed in a semi-Riemannian warped product, J. Geom. Anal. **24** (2014), 1126–1143.

[21] C.P. Aquino, H.F. de Lima. On the rigidity of constant mean curvature complete vertical graphs in warped products, Diff. Geom. Appl. **29** (2011), 590–506.

[22] C.P. Aquino, E.A. Lima Jr, H.F. de Lima. On the angle of complete CMC hypersurfaces in Riemannian product spaces, Diff. Geom. Appl. **33** (2014), 139–148.

[23] C.P. Aquino, H.F. de Lima, M.A.L. Velásquez. A new characterization of complete linear Weingarten hypersurfaces in real space forms, Pacific J. Math. **261** (2013), 33-43.

[24] C.P. Aquino, J.G. Araújo, H.H. de Lima. Rigidity of complete hypersurfaces in warped product spaces via higher order mean curvatures Beit. Alg. Geom. **57** (2016) 391–405.

[25] C.P. Aquino, J.G. Araújo, H.F. de Lima, M. Batista. Uniqueness of spacelike hypersurfaces in a GRW spacetimes via higher order mean curvatures, Bull. Brazilian Math. Soc. **48** (2017), 45–61.

[26] K. Akutagawa. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space, Math. Z. **196** (1987), 13–19.

[27] J.L.M. Barbosa, A.G. Colares. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277–297.

[28] A.L. Besse. Einstein Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[29] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley. Global Lorentzian Geometry, Second Edition, CRC Press, New York, 1996.

[30] A. Brasil Jr., A.G. Colares, O. Palmas. Complete hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres, Monatsh. Math. **161** (2010), 369–380.

[31] M. Caballero, A. Romero, R.M. Rubio. Constant mean curvature spacelike surfaces in three-dimensional generalized Robertson-Walker spacetimes, Lett. Math. Phys. **93** (2010), 85–105.

[32] M. Caballero, A. Romero, R.M. Rubio. Uniqueness of maximal surfaces in generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems, J. Geom. Phys. **60** (2010), 394–402.

[33] M. Caballero, A. Romero, R.M. Rubio. Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in generalized Robertson-Walker spacetimes, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **7** (2010), 961–978.

[34] E. Calabi. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 223–230.

[35] F. Camargo, A. Caminha, H.F. de Lima. Bernstein-type theorems in semi-Riemannian warped products, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 1841–1850.

[36] F. Camargo, A. Caminha, H.F. de Lima, U.L. Parente. Generalized maximum principles and the rigidity of complete spacelike hypersurfaces, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **153** (2012), 541–556.

[37] F. Camargo, H.F. de Lima. New characterizations of totally geodesic hypersurfaces in the anti-de Sitter space $\mathbb{H}_1^{n+1}$, J. Geom. Phys. **60** (2010), 1326–1332.

[38] A. Caminha. The geometry of closed conformal vector fields on Riemmanian spaces, Bull. Brazilian Math. Soc. **42** (2011), 277-300.

[39] A. Caminha. On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds, J. Geom. Phys. **56** (2006), 1144–1174.

[40] M.P. do Carmo. Riemannian Geometry, Birkhäuser, Boston, 1992.

[41] É. Cartan. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), 177-191.

[42] X. Cheng, H. Rosenberg. Embedded positive constant r-mean curvature Hypersurfaces in $M^n \times \mathbb{R}$, Ann. Brazilian Acad. Sc. **77** (2005), 183–199.

[43] Q.M. Cheng. Submanifolds with constant scalar curvature, Proc. Royal Soc. Edingburgh **132A** (2002), 1163–1183.

[44] S.Y. Cheng, S.T. Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature, Math. Ann. **225** (1977), 195–204.

[45] S.Y. Cheng, S.T. Yau. Maximal Spacelike Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Space, Ann. of Math. **104** (1976), 407–419.

[46] A.G. Colares, H.F. de Lima. Some rigidity theorems in semi-Riemannian warped products, Kodai Math. J. **35** (2012), 267–281.

[47] A.G. Colares, H.F. de Lima. On the rigidity of spacelike hypersurfaces immersed in the steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$. Publ. Math. Debrecen **81** (2012), 103–119.

[48] M. Dajczer. Submanifolds and Isometric Immersions, Publish or Perish, Houston, 1990.

[49] M. Émery. Stochastic Calculus on Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[50] A.A. Grigor'yan. Stochastically complete manifolds and summable harmonic functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), 1102–1108; translation in Math. USSR-Izv. **33** (1989), 425–432.

[51] A.A. Grigor'yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, Bull. American Math. Soc. **36** (1999), 135–249.

[52] X. Guo, H. Li. Submanifolds with cosntant scalar curvature in a unit sphere, Tohoku Math. J. **65** (2013), 331-339.

[53] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[54] T. Ishihara. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature, Mich. Math. J. **35** (1988), 345–352.

[55] M. Kanai. Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 227-238.

[56] J.M. Latorre, A. Romero. Uniqueness of noncompact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, Geom. Dedicata **93** (2002), 1–10.

[57] T. Levi-Civita. Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **26** (1937), 355-362.

[58] H. Li. Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms, Math. Ann. **305** (1996), 665–672.

[59] H. Li. Global rigidity theorems of hypersurfaces, Ark. Mat. **35** (1997), 327–351.

[60] A.M. Li, J.M. Li. An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere, Arch. Math. **58** (1992), 582–594.

[61] H. Li, Y.J. Suh, G. Wei. Linear Weingarten hypersurfaces in a unit sphere, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 321-329.

[62] H.F. de Lima, J.G. Araújo, F.R. Santos, M.A.L. Velásquez. Submanifolds with constant scalar curvature in a space form, J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), 488–498.

[63] H.F. de Lima, J.G. Araújo, F.R. Santos, M.A.L. Velásquez. Linear Weingarten submanifolds immersed in a space form Kodai Math. J. **40** (2017), 214–228.

[64] H.F. de Lima, E.A. Lima Jr, U.L. Parente. Hypersurfaces with prescribed angle function, Pacific J. Math. **269** (2014), 393–406.

[65] H.F. de Lima, U.L. Parente. On the geometry of maximal spacelike hypersurfaces immersed in a generalized Robertson-Walker spacetime, Ann. Mat. Pura Appl. **192** (2013), 649–663.

[66] H.F. de Lima, M.A.L. Velásquez. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces via their higher order mean curvatures in a conformally stationary spacetime, Math. Nachr. **287** (2014), 1223–1240.

[67] J. Marsden, F. Tipler. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity, Bull. American Phys. Soc. **23**, (1978) 84.

[68] S. Montiel. Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.

[69] S. Montiel. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

[70] S. Montiel. Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.

[71] H. Omori. Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205–214.

[72] B. O'Neill. Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.

[73] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti. Maximum principles on Riemannian manifolds and applications, Mem. American Math. Soc. **822** (2005).

[74] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti. A remark on the maximum principle and stochastic completeness, Proc. American Math. Soc. **131** (2003), 1283–1288.

[75] M. Rainer, H-J. Schmidt. Inhomogeneous cosmological models with homogeneous inner hypersurface geometry, Gen. Relat. Grav. **27** (1995), 1265–1293.

[76] A. Romero, R.M. Rubio. On the mean curvature of spacelike surfaces in certain three-dimensional Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein's type problems, Ann. Global Anal. Geom. **37** (2010), 21–31.

[77] A. Romero, R.M. Rubio, J.J. Salamanca. Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic generalized Robertson-Walker spacetimes, Class. Quantum Grav. **30** (2013), 115007 (13pp).

[78] A. Romero, R.M. Rubio, J.J. Salamanca. A new approach for uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic GRW spacetimes, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 355–372.

[79] A. Romero. A new technique for the study of complete maximal hypersurfaces in certain open Generalized Robertson-Walker spacetimes, Proc. of the 2014 ICM

Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds, Daejeon, Korea, Ed. by Y.J. Suh, J. Berndt, Y. Ohnita, B.H. Kim and H. Lee, Springer Proc. in Mathematics and Statistics, Vol. **106**, 21–31.

[80] H. Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in space forms, Bull. Sc. Math. **117** (1993), 217–239.

[81] H. Rosenberg, F. Schulze, J. Spruck. The half-space property and entire positive minimal graphs in $M \times \mathbb{R}$, J. Diff. Geom. **95** (2013), 321–336.

[82] R.M. Rubio. Complete constant mean curvature spacelike hypersurfaces in the Einstein-De Sitter spacetime, Rep. Math. Phys. **74** (2014), 127–133.

[83] W. Santos. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres, Tohoku Math. J. **46** (1994), 403–415.

[84] R.K. Sachs, H. Wu. General Relativity for Mathematicians, Graduate Texts in Mathematics Vol. 48, Springer-Verlag, New York, 1977.

[85] B. Segre. Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **27** (1938), 203-207.

[86] S. Stumbles. Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature, Ann. Phys. **133**, (1980) 28–56.

[87] D. Stroock. An Introduction to the Analysis of Paths on a Riemannian Manifold, Math. Surveys and Monographs, volume 4, American Math. Soc, 2000.

[88] A.E. Treibergs. Entire Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski Space, Invent. Math. **66** (1982), 39–56.

[89] D. Yang , Z. Hou. Linear Weingarten spacelike submanifolds in de Sitter space,J. Geom. **103** (2012), 177-190.

[90] S.T. Yau. Submanifolds with constant mean curvature I, American J. Math. **96** (1974), 346-366.

[91] S.T. Yau. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.

[92] S.T. Yau. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 659–670.