

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

Existência de solução para uma classe  
de desigualdades variacionais com  
crescimento crítico em  $\mathbb{R}^N$

por

Luciano Martins Barros

Campina Grande - PB

Fevereiro/2018



# Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$

por

Luciano Martins Barros

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa  
Associado de Pós-Graduação em Matemática -  
UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do  
título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Fevereiro/2018



Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:



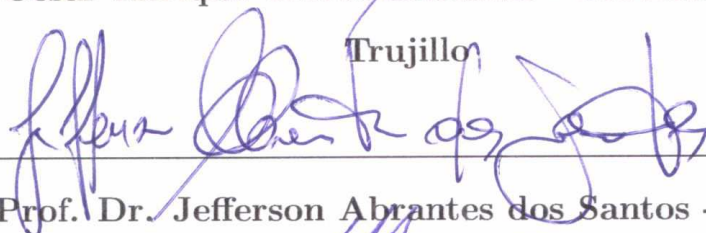
---

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB



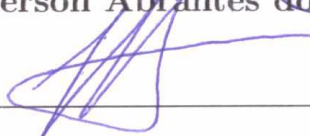
---

Prof. Dr. Cesar Enrique Torres Ledesma - Universidade Nacional de Trujillo



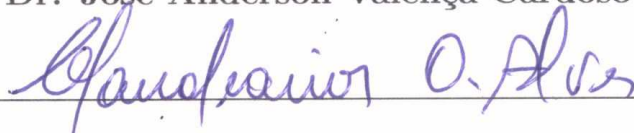
---

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG



---

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS



---

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.



# Resumo

Nesta tese estabelecemos resultados de existência para uma classe de desigualdades variacionais com crescimento crítico: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (P)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E; v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$E$  subespaço de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto conexo limitado com fronteira suave,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\lambda > 0$  é um parâmetro,  $V$  é um potencial contínuo e  $f$  é uma função contínua que muda conforme  $N \geq 3$  e  $N = 2$ . No Capítulo 1, mostramos a existência de solução para uma igualdade com  $N \geq 3$ . No Capítulo 2, estabelecemos resultados de existência para a desigualdade variacional (P) em ambos os casos,  $N \geq 3$  e  $N = 2$ . Finalmente, no Capítulo 3, provamos a existência de solução para a desigualdade variacional (P) em ambos os casos, mas enfraquecendo uma hipótese sobre o potencial  $V$ . Entre as ferramentas utilizadas estão o Método Variacional, o Princípio de Concentração e Compacidade e o Método de Penalização.

**Palavras-chave:** Desigualdades Variacionais; Métodos Variacionais; Crescimento Crítico; Operador de Penalização.





# Abstract

In this thesis we establish results of existence for a class of variational inequalities with critical growth: find  $u \in \mathbb{K}$  satisfying

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (P)$$

where

$$\mathbb{K} = \{v \in E; v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$E$  subspace of  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  is a bounded conexo open with smooth boundary,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\lambda > 0$  is a parameter,  $V$  is a continuous potential and  $f$  is a continuous function that changes according to  $N \geq 3$  and  $N = 2$ . In Chapter 1, we show the existence of a solution for equality with  $N \geq 3$ . In Chapter 2, we establish existence results for the variational inequality (P) in both cases,  $N \geq 3$  and  $N = 2$ . Finally, in Chapter 3, we prove the existence of solution to the variational inequality (P) in both cases, but with a more weaker condition on  $V$ . Among the tools used are the Variational Method, the Principle of Concentration and Compaction and the Method of Penalization.

**Keywords:** Variational Inequalities; Variational Methods; Critical Growth; Penalty Operator.



# Agradecimentos

Primeiramente, à DEUS por está sempre presente em todos os momentos de minha vida, me fortaleceu e me deu coragem para recomeçar quando a razão pedia para desistir. Palavras não são suficientes para agradecer pelo bem que tens feito a mim. Por isso a ELE seja dada toda honra, glória e louvor.

À minha esposa Sânzia Raline e ao meu filhão Luan Max pelo amor, carinho, dedicação e por terem suportado muitas vezes minha ausência. AMO VOCÊS!

À minha mãe Gessy e ao meu pai Sebastião por terem me conduzido no caminho certo e por acreditarem em mim mais que eu mesmo. Mãe pode ter certeza que o nosso maravilhoso DEUS escuta suas orações.

Ao meu orientador Professor Claudianor Oliveira Alves por ter me dado a honra de ser seu orientando. Pela paciência, dedicação, atenção, ensinamentos durante todo esse caminho. Por fim, agradeço pelo excelente trabalho de orientação e pela contribuição para meu desenvolvimento intelectual, social e espiritual.

Ao meu irmão Geilson Germano, minha gratidão por está presente em muitos momentos do doutorado, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e fortalecendo-me em horas difíceis. Te desejo muito sucesso na sua vida.

Aos meus amigos Jogli Gidel e Fábio Reis por me acolherem no apartamento. Compartilhamos de muitos momentos alegres e divertidos. Não posso esquecer Jogli pela força que me deu no início do doutorado, principalmente, no verão em João Pessoa.

Aos meus colegas do doutorado, principalmente, Ronaldo, Romildo, Alânio, Natan, Rivaldo e Cláudio agradeço as experiências compartilhadas.

Aos meus colegas de trabalho Maria de Jesus, Jussê Ubaldo, Marciel Medeiros e Joseclécio Dutra pela amizade e incentivo.

Aos professores Cesar Enrique, Jefferson Abrantes, José Anderson e Uberlandio Severo

pela disponibilidade em me avaliarem e fazerem parte da banca.

Aos professores da pós-graduação da UAME-UFCG, especialmente, Marco Aurélio e Brandão que contribuíram para a formação do meu conhecimento.

Aos funcionários da UAME-UFCG, principalmente, Renato, Aninha, Gislaine e Andressa sempre dispostos a ajudarem, acessíveis, alegres e responsáveis. Os funcionários Davi e Sóstenes por momentos de descontração.

Aos pais de Geilson o senhor Germano e a dona Cícera e sua avó a dona Luiza agradeço pela amizade e carinho. Vocês são pessoas maravilhosas.

À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta pela realização deste trabalho.

*“Aos homens isto é impossível, mas a DEUS tudo é possível.”*

*Mt. 19:26*



# Dedicatória

Aos meus pais Gessy e Sebastião, meus  
amores Sânzia Raline e Luan Max.





# Sumário

Introdução . . . . .	1
<b>1 Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos com crescimento crítico</b>	<b>16</b>
1.1 Introdução . . . . .	16
1.2 O problema limite . . . . .	17
1.3 Resultados preliminares . . . . .	19
1.4 Demonstração do Teorema 1.1.1 . . . . .	34
<b>2 Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte I</b>	<b>38</b>
2.1 Introdução . . . . .	38
2.2 Resultados preliminares . . . . .	41
2.3 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N \geq 3$ . . . . .	44
2.3.1 Solução para o problema penalizado (2.3) . . . . .	45
2.3.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1 . . . . .	55
2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N = 2$ . . . . .	64
2.4.1 Solução para o problema penalizado (2.3) . . . . .	64
2.4.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1 . . . . .	78
<b>3 Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte II</b>	<b>84</b>
3.1 Introdução . . . . .	84
3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N \geq 3$ . . . . .	87
3.2.1 Desigualdade variacional modificada . . . . .	87

3.2.2	Existência de solução para a desigualdade variacional modificada	102
3.2.3	Demonstração do Teorema 3.1.1 . . . . .	106
3.3	Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N = 2$ . . . . .	120
3.3.1	Existência de solução para a desigualdade variacional modificada	126
3.3.2	Demonstração do Teorema 3.1.1 . . . . .	129
<b>Referências</b>		<b>137</b>

# Introdução

O objetivo da presente tese é estudar a existência de soluções para a seguinte classe de Desigualdades Variacionais: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (P)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E; v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$E$  subespaço de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  com parte positiva não trivial e  $\text{supp } \varphi^+ \subset \Omega$ ,  $\lambda > 0$  é um parâmetro e  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando as seguintes condições:

$$(V_1) \quad V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

(V<sub>2</sub>)  $\Omega := \text{int}(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$  é um subconjunto aberto conexo limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave;

(V<sub>3</sub>) Existe  $M_0 > 0$  tal que o conjunto  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M_0\}$  é não vazio e tem medida finita.

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui as seguintes condições: Se  $N \geq 3$ ,  $f$  tem a forma

$$f(t) = \mu |t|^{q-2} t + |t|^{2^*-2} t,$$

onde  $\mu$  é uma constante positiva,  $2^* = 2N/(N-2)$  e  $2 < q < 2^*$ .

Se  $N = 2$ ,  $f$  é uma função de classe  $C^1$  e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0. \end{cases} \quad (\text{veja Figueiredo, Miyagaki \& Ruf [28]})$$

Desigualdades Variacionais são consideradas, hoje, com uma das importantes direções do desenvolvimento atual das equações diferenciais parciais e com uma abundante quantidade de aplicações em vários ramos da ciência. Nos últimos anos, várias ideias, técnicas e métodos tem sido desenvolvidos e devido a estes esforços levaram a soluções de problemas básicos e fundamentais que antes pensaram ser inacessíveis. Esta teoria é relativamente nova e tem desfrutado de um crescimento dinâmico. Ela foi introduzida no início da década de 1960 na Itália por Fichera [25], Stampacchia [54] e outros. Fichera motivado por problemas em mecânica, especificamente em problemas de elasticidade e Stampacchia motivado pela Teoria do Potencial. Na literatura Desigualdades Variacionais ( $P$ ) são chamadas de Problema do Obstáculo, devido a presença do obstáculo  $\varphi$  na definição de  $\mathbb{K}$ .

Uma aplicação física clássica de uma Desigualdade Variacional é o problema em determinar a posição de equilíbrio que uma membrana atinge com a presença de um corpo rígido, para maiores detalhes veja [52]. Neste modelo, consideremos uma membrana homogênea e elástica que ocupa uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (aberto limitado) que seja igualmente esticada em todas as direções por uma tensão uniforme e fixada na fronteira. Assumimos que a membrana é dada pelo gráfico da função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $u = 0$  sobre a fronteira  $\partial\Omega$ . Este problema consiste em encontrar a posição de equilíbrio da membrana que está acima do obstáculo, isto é,  $u \geq \varphi$ . A função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\varphi < 0$  sobre a fronteira  $\partial\Omega$  é chamada de obstáculo. Matematicamente introduzimos o conjunto convexo de admissibilidade

$$\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega); u \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

O princípio de minimização de energia é dado por

$$u \in \mathbb{K} : I(u) \leq I(v), \quad \forall v \in \mathbb{K}, \quad (1)$$

onde

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u dx.$$

O primeiro termo do segundo membro da expressão acima é a energia potencial de deformação da membrana e o segundo termo é o trabalho realizado pela força externa  $f$  durante o deslocamento. Uma formulação equivalente para o mesmo problema (1) é

dada por: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(x)(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \quad (2)$$

Essa última formulação (2) é mais conhecida na literatura como Desigualdade Variacional. Mais aplicações de Desigualdades Variacionais citamos Kinderlehrer & Stampacchia [39], Troianiello [57], Monneau [49], Teka [56], Friedman [29], Ros-Oton [53] e suas referências.

O estudo da desigualdade variacional ( $P$ ) foi motivado por trabalhos envolvendo a seguinte classe de problemas:

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

Em [14], Bartsch & Wang estabeleceram a existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = u^{p-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (4)$$

para  $N \geq 3$ ,  $\lambda > 0$  e  $2 < p < 2^*$  e  $V$  verificando  $(V_1) - (V_3)$ . Nesse trabalho, os autores combinaram métodos variacionais com a categoria Lusternik-Schnirelmann para mostrar que (4) tem no mínimo  $cat(\Omega)$  de soluções positivas quando  $p$  está próximo de  $2^*$  e  $\lambda$  grande. O leitor pode encontrar em Bartsch, Pankov & Wang [11] e Bartsch & Tang [12] e suas referências outros resultados para problemas relacionados com (4).

Em [22], Ding & Tanaka mostraram a existência e a multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5)$$

supondo que o primeiro autovalor de  $-\Delta + Z(x)$  em  $\Omega_j$  sob condições de fronteira de Dirichlet é positivo para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$  e  $N \geq 3$ . Nesse artigo, verificou-se que o problema (5) possui pelo menos  $2^k - 1$  soluções para  $\lambda$  suficientemente grande, as quais são chamadas soluções multi-bump. Essas soluções possuem as seguintes características: para cada subconjunto não vazio  $\Gamma \subset \{1, 2, \dots, k\}$  e  $\varepsilon > 0$  fixado, existe  $\lambda^* > 0$  tal que (5) possui uma solução  $u_\lambda$ , para  $\lambda \geq \lambda^* = \lambda^*(\varepsilon)$ , satisfazendo:

$$\left| \int_{\Omega_j} [|\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_\lambda^2] - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_j \right| < \varepsilon, \quad \forall j \in \Gamma$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma} [|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2] dx < \varepsilon,$$

onde  $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j$  e  $c_j$  é o nível minimax do funcional energia relacionado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + Z(x)u = u^p, & \text{em } \Omega_j, \\ u > 0, & \text{em } \Omega_j, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (6)$$

Motivados pelo estudo feito em [22], Alves, de Moraes Filho & Souto [4] e Alves & Souto [9] consideraram um problema do tipo (5), assumindo que a não-linearidade tem um crescimento crítico para o caso  $N \geq 3$  e crescimento crítico exponencial quando  $N = 2$ , respectivamente. Outros resultados envolvendo soluções multi-bump podem ser encontrados em Alves, Nobrega & Yang [6], Guo & Tang [35], Gui [34] e Wang [59] e suas referências.

Em [20], Clapp & Ding estabeleceram a existência e a multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

para  $N \geq 4$ ,  $\lambda, \mu > 0$  e  $V$  verificando  $(V_1) - (V_3)$ . Ao usar métodos variacionais, os autores mostraram que se  $\lambda$  é grande e  $\mu$  pequeno, (7) tem uma solução positiva que localiza no conjunto onde o potencial se anula.

No Capítulo 1, com intuito de obter soluções para o problema  $(P)$ , para o caso  $N \geq 3$ , realizamos o estudo de existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (P_{\lambda,\mu})$$

onde  $\lambda, \mu > 0$  e  $2 < q < 2^*$ . Isto deve-se ao fato que, uma vez estabelecida a solução para igualdade saberíamos perceber as dificuldades e os desafios para reproduzi-las para a Desigualdade Variacional  $(P)$ . Para nossa surpresa, fizemos um levantamento bibliográfico e constatamos que o mesmo ainda não tinha sido estudado na literatura.

Motivados pelos resultados encontrados em [14] e [20], a nossa intenção no Capítulo 1 é provar que o mesmo tipo de resultado é válido para o problema  $(P_{\lambda,\mu})$ . O problema  $(P_{\lambda,\mu})$  despertou o interesse, devido à falta de compacidade na imersão de

$H^1(\mathbb{R}^N)$  em  $L^s(\mathbb{R}^N)$  para todo  $s \in [2, 2^*]$  e pelo fato de que estamos considerando uma não-linearidade com crescimento crítico. Esses fatos trazem muitas dificuldades para aplicar métodos variacionais, por exemplo, o funcional energia associado não satisfaz, em geral, a condição de Palais-Smale em todos os níveis. Neste capítulo, superamos essa dificuldade explorando os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  em conjunto com argumentos explorados em [14]. Além disso, outro artigo importante, na demonstração do nosso resultado é devido a Alves & Ding [5].

O principal Teorema do Capítulo 1 é o seguinte:

**Teorema 0.0.1** *Assuma  $(V_1) - (V_3)$  e que*

$$N \geq 4 \text{ e } 2 < q < 2^* \quad \text{ou} \quad N = 3 \text{ e } 4 < q < 6.$$

*Então existem  $\lambda^*, \mu^* > 0$  tais que  $(P_{\lambda, \mu})$  tem no mínimo  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas para  $\lambda \geq \lambda^*$  e  $\mu \leq \mu^*$ .*

Os resultados obtidos no Capítulo 1 fazem parte do artigo Alves & Barros [2], o qual foi aceito para publicação na revista Monatshefte für Mathematik.

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução para o problema  $(P)$ . Como vimos no início da introdução a não linearidade deste problema muda conforme  $N \geq 3$  ou  $N = 2$ . Então, dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção, tratamos o caso  $N \geq 3$  e focamos nosso estudo na Desigualdade Variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1}) (v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (P)$$

No contexto dos expoentes críticos, [43], Mancini & Musina estabeleceram a existência de solução não-trivial para a Desigualdade Variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}_\psi$  satisfazendo

$$\int_{\Theta} \nabla u \nabla (v-u) dx \geq \int_{\Theta} u^{2^*-1} (v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \quad (8)$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta); v \leq \psi \text{ q.t.p. em } \Theta \setminus C\}$$

em que  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto limitado com fronteira suave,  $C \subset \Theta$  é um conjunto fechado e  $\psi \in H_0^1(\Theta) \cap C(\overline{\Theta})$  com  $\psi \geq 0$ . Para resolver o problema (8), inicialmente, os autores estudaram o comportamento das sequências  $(PS)$  para a desigualdade variacional (8), isto é,

(i)  $u_n \in \mathbb{K}_\psi$ ;

$$(ii) \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Theta} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Theta} |u_n|^{2^*} dx \right\} < \infty;$$

(iii) Existe  $z_n \in H_0^1(\Theta)$  com  $z_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(\Theta)$  tal que

$$\int_{\Theta} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx - \int_{\Theta} |u_n|^{2^*-1} (v - u_n) dx \geq \int_{\Theta} \nabla z_n \nabla (v - u_n) dx, \quad v \in \mathbb{K}_\psi.$$

Em seguida, utilizando o Lema de Concentração e Compacidade de Lions contido em [40] e [41] provaram que o limite fraco da sequência  $(u_n)$  é solução da desigualdade variacional (8).

Em [36], Jianfu mostrou a existência de duas soluções positivas para a Desigualdade Variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}_\psi$  verificando

$$\int_{\Theta} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (v - u) dx \geq \lambda \int_{\Theta} u^{p^*-1} (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi, \quad (9)$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in W_0^{1,p}(\Theta); v \geq \psi \text{ q.t.p. em } \Theta\}$$

para todo  $\lambda$  pertencente a um intervalo não-degenerado  $(0, \lambda^*)$ ,  $\Theta$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$ ,  $p^* = Np/(N-p)$ ,  $N > p \geq 2$  e  $\psi \in C^{1,\alpha}(\Theta)$ ,  $\psi|_{\partial\Theta} < 0$  com  $\psi^+ \neq 0$ . Na obtenção da primeira solução, o autor utilizou essencialmente o Princípio Variacional de Ekeland [23], para provar a existência de uma sequência minimizante  $(u_n) \subset \mathbb{K}_\psi$  para o funcional

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Theta} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_{\Theta} (u^+)^{p^*} dx \quad (10)$$

e mostrou que o limite fraco da sequência  $(u_n)$  é uma solução de (9). Na segunda solução, ele utilizou uma versão do Teorema do Passo da Montanha na obtenção de um ponto crítico para funcionais semicontínuos inferiormente da forma

$$J(u) = I(u) + \Psi(u) \quad (11)$$

onde  $\Psi : W_0^{1,p}(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$  é conhecida como a função indicatriz do conjunto  $\mathbb{K}_\psi$ , isto é,

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & u \in \mathbb{K}_\psi, \\ +\infty, & u \in W_0^{1,p}(\Theta) \setminus \mathbb{K}_\psi. \end{cases}$$



Esta versão do Teorema do Passo da Montanha para essa classe de funcionais (11) é devido Szulkin [55]. Recordamos que  $u \in W_0^{1,p}(\Theta)$  é ponto crítico para o funcional  $J$  se  $u \in D(J)$  e  $0 \in \partial J(u)$ , onde

$$D(J) = \{v \in W_0^{1,p}(\Theta) : J(v) < +\infty\}$$

é chamado domínio efetivo de  $J$  e  $\partial J(u)$  é a subdiferencial de  $J$  em  $u$ . Desta forma,  $u$  é ponto crítico para o funcional  $J$  se, e somente se,  $u \in D(\Psi)$  e  $-I'(u) \in \partial \Psi(u)$ , onde

$$\partial \Psi(u) = \{u^* \in W_0^{1,p}(\Theta)' : \Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle, \forall v \in W_0^{1,p}(\Theta)\}$$

é chamada de subdiferencial de  $\Psi$  em  $u$ . Observe que  $-I'(u) \in \partial \Psi(u)$  é equivalente

$$\langle I'(u), v - u \rangle + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0, \forall v \in W_0^{1,p}(\Theta).$$

Neste sentido  $u \in W_0^{1,p}(\Theta)$  é dito ser ponto crítico para  $J$  se  $u \in \mathbb{K}_\psi$  e

$$\langle I'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}_\psi$$

(ver conceito em V. Barbu [10]). O leitor pode encontrar em Fang [24] e suas referências outros problemas relacionados com (9).

A proposta de estudo da Desigualdade Variacional ( $P$ ) foi motivada pelo trabalho de Barstch & Wang [14] e pelo fato de existirem poucos resultados envolvendo Desigualdades Variacionais em domínios ilimitados, até onde sabemos, conhecemos apenas Alves & Júlio [3], Frites, Moussaoui & O'Regan [31], Chipot & Yeressian [19] e Jianfu [37].

As principais ferramentas que usamos para encontrar solução para o problema ( $P$ ) são o método de penalização Carl, Le & Motreanu [18], Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60] e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8]. O método de penalização, introduzido por Bensoussan & Lions [16] e aprimorado por Carl, Le & Motreanu em [18], vem sendo bastante usado em vários artigos no estudo das Desigualdades Variacionais. Por exemplo, em [46], Matzeu & Servadei provaram a existência de uma solução não trivial e não negativa para a seguinte Desigualdade Variacional Elíptica Semilinear: encontrar  $u \in \mathbb{K}_\psi$  satisfazendo

$$\int_{\Theta} \nabla u \nabla (v - u) dx - \lambda \int_{\Theta} u(v - u) dx \geq \int_{\Theta} f(x, u, \nabla u)(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \quad (12)$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta); v \leq \psi \text{ q.t.p. em } \Theta\},$$

em que  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto limitado com fronteira suave,  $N \geq 3$ ,  $\lambda \in (0, \lambda_1)$ , o obstáculo  $\psi \in H^1(\Theta)$  e  $\psi|_{\partial\Theta} \geq 0$ , enquanto  $f : \Theta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz algumas condições técnicas. Os autores combinaram métodos variacionais e técnicas de penalização para provar a existência de solução para o problema (12). Outros resultados envolvendo técnicas de penalização podem ser encontrados em Matzeu & Servadei [47], Bensoussan, Chandrasekharan & Turi [15], Magrone & Servadei [44], Matzeu & Servadei [45] e suas referências.

O método adotado de penalização neste capítulo consiste em considerar uma família de equações penalizadas da forma

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (13)$$

onde  $u$  é uma solução fraca de (13), isto é, verifica a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})v dx, \quad \forall v \in E,$$

$\epsilon > 0$  é o parâmetro de penalização, enquanto  $\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx$  é o termo de penalização. Em [46], o termo de penalização considerado foi

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (u - \varphi)^+ v dx.$$

Isto deve-se ao fato que  $u \leq \psi$  na definição  $\mathbb{K}_\psi$ .

As soluções fracas da equação penalizada (13) podem ser encontradas como pontos críticos do funcional  $I_{\lambda, \epsilon} : E \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Uma das dificuldades desta seção é obter um ponto crítico para o funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$ , pois a não linearidade tem crescimento crítico e estamos trabalhando em todo  $\mathbb{R}^N$ . Superamos esta dificuldade utilizando técnicas variacionais semelhantes as trabalhadas no Capítulo 1 e adicionando uma condição ao obstáculo  $\varphi$ .

Uma vez encontradas as soluções penalizadas, trabalhamos com o operador de penalização  $P : E \rightarrow E'$  definido por

$$\langle P(u), v \rangle = - \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx,$$

o qual verifica as seguintes condições:

( $P_1$ ) A função real

$$t \mapsto \langle P(u + tv), w \rangle$$

é contínua sobre  $[0, 1]$ , para todos  $u, v, w \in E$ ;

( $P_2$ ) Vale a desigualdade

$$\langle P(u) - P(v), u - v \rangle \geq 0, \quad u, v \in E;$$

( $P_3$ )  $P(u) = 0$  se, e somente se,  $u \in \mathbb{K}$ ;

( $P_4$ ) O operador  $P$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Pelas propriedades ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ), garantimos que a sequência  $(u_n)$  de soluções do problema penalizado (13) verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (v - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u_n^{q-1} + u_n^{2^*-1}) (v - u_n) dx,$$

para todo  $v \in \mathbb{K}$ .

O desafio em seguida é mostrar que  $u$  o limite fraco da sequência  $(u_n)$  está no convexo  $\mathbb{K}$  e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u dx, \quad (14)$$

onde

$$f(t) = \mu |t|^{q-2} t + |t|^{2^*-2} t.$$

Essa convergência é crucial para garantirmos uma solução para a Desigualdade Variacional ( $P$ ). Ao longo de todo estudo, percebemos que essa convergência é um divisor de água nos problemas envolvendo desigualdades variacionais, pois sem a mesma não conseguiríamos garantir o resultado. Então, isso mostra que resolver uma desigualdade variacional não é meramente aplicar a metodologia de resolver uma equação, existe todo um cuidado específico com a não-linearidade. Tal dificuldade torna o problema do ponto de vista matemático mais interessante, contribuindo desta forma para o desenvolvimento da pesquisa nesta área.

Uma vez estabelecida uma solução  $u_\lambda$  para o problema ( $P$ ), ou melhor, uma sequência de soluções  $(u_{\lambda_n})$ , com  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , podemos extrair uma subsequência  $\lambda_{n_i}$  tal

que  $u_{n_i}$  converge em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  tal que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução do seguinte problema

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u(v - u) dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Ainda no Capítulo 2, na segunda seção, tratamos o caso  $N = 2$ . Para este caso a não linearidade  $f$  tem crescimento crítico exponencial e satisfaz as seguintes condições:

$$(f_1) \quad \frac{f(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } |t| \rightarrow 0;$$

( $f_2$ ) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s) ds \leq f(t)t, \quad t \neq 0;$$

( $f_3$ ) Existem  $C > 0$  tal que

$$|f'(t)| \leq C e^{\alpha_0 t^2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

( $f_4$ ) Existem  $p > 2$  e uma constante  $\nu > 0$  tais que

$$f(t) \geq \nu t^p, \quad \forall t \geq 0.$$

Após uma revisão bibliográfica, observamos que existem poucos trabalhos envolvendo Desigualdades Variacionais quando a não-linearidade  $f$  tem um crescimento crítico exponencial. Conhecemos apenas o trabalho de Figueredo, Furtado & Montenegro [27]. Em [27], os autores provaram a existência de duas soluções para a seguinte Desigualdade Variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}_\psi$  satisfazendo

$$\int_{\Theta} \nabla u \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Theta} f(u)(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \quad (15)$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta); v \geq \psi \text{ q.t.p. em } \Theta\}, \quad (16)$$

$\Theta$  é um domínio do  $\mathbb{R}^2$  limitado,  $\psi \in C^{1,\beta}(\Theta)$ ,  $0 < \beta < 1$  tal que  $\psi < 0$  sobre  $\partial\Theta$ ,  $\psi^+ \neq 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com crescimento crítico exponencial. Nesse trabalho os autores utilizaram argumentos de minimização e uma versão do Teorema

do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55], como foi visto em [36]. Motivados por este fato, estudamos a desigualdade variacional  $(P)$  para caso  $N = 2$ , onde a não-linearidade tem crescimento crítico exponencial.

Os argumentos utilizados no desenvolvimento dos resultados desta seção são semelhantes aos da seção anterior, com alguns cuidados, devido a não linearidade. Sabemos que a noção de criticidade em dimensão  $N = 2$  é diferente do caso  $N \geq 3$ . Na verdade, em dimensão  $N = 2$ , o crescimento crítico está relacionado com uma versão da desigualdade Trudinger & Moser, veja [58] e [50], a qual diz que se  $\Theta$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Theta$  suave, então para qualquer  $u \in H_0^1(\Theta)$ , tem-se

$$\int_{\Theta} e^{\alpha|u|^2} dx < \infty, \quad \forall \alpha > 0. \quad (17)$$

Além disso, existe uma constante  $C = C(\alpha, |\Theta|) > 0$  tal que

$$\sup_{\|u\|_{\Theta} \leq 1} \int_{\Theta} e^{\alpha|u|^2} dx \leq C, \quad \forall \alpha \leq 4\pi. \quad (18)$$

Uma outra versão da desigualdade Trudinger & Moser em todo  $\mathbb{R}^2$ , a qual é fundamental no desenvolvimento do nosso estudo, é devido Cao [17], que afirma o seguinte

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u|^2} - 1) dx < \infty, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } \alpha > 0. \quad (19)$$

Ademais, se  $\alpha < 4\pi$  e  $|u|_2 \leq M$  então existe uma constante  $C = C(\alpha, M) > 0$  tal que

$$\sup_{|\nabla u|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u|^2} - 1) dx \leq C. \quad (20)$$

A ideia é penalizar o problema  $(P)$  e considerar o problema

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_{\Omega} = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (21)$$

Em seguida, encontraremos pontos críticos para o funcional energia associado ao problema penalizado (21)

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{\lambda} + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx.$$

Para obtermos pontos críticos para este funcional energia, além de utilizamos todo estudo anterior, exploramos argumentos encontrados em Freitas [30]. Nesse momento vale ressaltar, que a hipótese  $(f_4)$  desempenha um papel importante para contornar a falta de compacidade, uma vez que neste caso, o funcional energia não irá satisfazer a

condição de Palais-Smale. Tal condição está relacionada com a localização correta do nível do passo da montanha do funcional energia.

O próximo passo é trabalhar com o operador de penalização, que de fato é o mesmo da seção anterior, em conjunto com alguns resultados para obter a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (v - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) (v - u_n) dx,$$

onde  $(u_n)$  é a sequência de soluções do problema penalizado (21). Para obtermos a convergência (14), o desafio foi ainda maior, pois estamos considerando a não linearidade com crescimento crítico exponencial. Com essa convergência, garantimos a existência de solução não trivial para o problema  $(P)$  tratado nesta seção. Da mesma forma que conseguimos um resultado de concentração para uma sequência de soluções da Desigualdade Variacional  $(P)$ , obtemos, também, para o caso  $N = 2$ , ou seja, encontrada uma solução  $u_\lambda$  para o problema  $(P)$ , ou melhor, uma sequência de soluções  $(u_{\lambda_n})$ , com  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , podemos extrair uma subsequência  $\lambda_{n_i}$  tal que  $u_{n_i}$  converge em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  tal que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução da seguinte desigualdade variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u) u (v - u) dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

O principal Teorema do Capítulo 2 é o seguinte:

**Teorema 0.0.2** *Assuma que  $V$  satisfaz  $(V_1) - (V_3)$  e  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$  se  $N = 2$ . Então existem  $\lambda_* > 0$ ,  $\mu_* > 0$ ,  $\nu_* > 0$  e  $\rho > 0$  tais que se  $\|\varphi\| < \rho$ , o problema  $(P)$  tem solução  $u_\lambda$  não trivial para  $\lambda \geq \lambda_*$ ,  $\mu \geq \mu_*$  e  $\nu \geq \nu_*$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$  tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , podemos extrair uma subsequência  $(\lambda_n)$  tal que a sequência  $(u_{\lambda_n})$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u) u (v - u) dx,$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

No Capítulo 3, estudamos a existência de solução não trivial para a Desigualdade Variacional  $(P)$ , mas sem a condição  $(V_3)$  para o potencial  $V$ . Fomos motivados pelo artigo do Alves & Corrêa [3], onde os autores estabeleceram a multiplicidade de soluções positivas para a seguinte Desigualdade Variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}_\varphi$  verificando

$$\int_{\mathbb{R}} u'(v-u)' dx + \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}} f(u)(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\varphi, \quad (22)$$

onde

$$\mathbb{K}_\varphi = \{v \in H^1(\mathbb{R}); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}\}$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  com parte positiva não trivial com  $\text{supp } \varphi^+ \subset V^{-1}(\{0\})$ , o potencial  $V$  verificando  $(V_1) - (V_2)$  e a função  $f$  verificando algumas condições técnicas. Nesse trabalho, os autores combinaram métodos variacionais em conjunto com o Princípio Variacional de Ekeland [23] e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55].

Inspirados nas ideias do Capítulo 2, dividimos o Capítulo 3 também em duas seções: na primeira seção, trataremos o caso  $N \geq 3$  e na segunda o caso  $N = 2$ . Como dissemos anteriormente, o potencial não verifica a condição  $(V_3)$ . Isso nos leva a uma mudança na forma tratada anteriormente de atacar o problema, como, por exemplo, a perda de compacidade. Para superar esta dificuldade, adaptamos algumas ideias encontradas em del Pino & Felmer [21], modificando a não linearidade fora do conjunto  $\Omega$ . Nesse sentido, consideramos as funções

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t, & 0 \leq t \leq a \\ \frac{t}{k}, & t \geq a \end{cases}$$

e

$$g(x, t) = \chi_{\Omega'}(x)\mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t + (1 - \chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

onde  $a$  e  $k$  são constantes positivas tomadas adequadamente e  $\chi_{\Omega'}$  é a função característica do conjunto  $\Omega'$ . Aqui, estamos considerando  $\Omega'$  um aberto conexo limitado contendo  $\overline{\Omega}$ .

O objetivo é mostrar a existência de solução para a seguinte classe de Desigualdades Variacionais modificada:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \quad (23)$$

Uma vez encontrada uma solução  $u_\lambda$  para o problema (23), ou melhor, uma sequência de soluções  $(u_{\lambda_n})$ , com  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , podemos extrair uma subsequência  $\lambda_{n_i}$  tal que  $u_{n_i}$  converge em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  tal que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução do seguinte problema

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u(v - u) dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Ainda, sobre a solução  $u_\lambda$  para o problema (23), podemos utilizar Método de Iteração de Moser [51] para mostra que

$$u_\lambda(x) \leq a, \quad \forall x \in \Omega^c$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. Isso mostra que  $u_\lambda$  é solução do problema original  $(P)$ . Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções  $(u_\lambda)$  da Desigualdade Variacional  $(P)$  e com isso finalizamos a primeira seção do Capítulo 3.

Para mostrar que a Desigualdade Variacional modificada (23) possui solução utilizaremos a mesma metodologia usada no Capítulo 2, penalizando (23), isto é, consideramos o seguinte problema

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = g(x, u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (24)$$

Em seguida, encontramos pontos críticos para o funcional energia associado ao problema penalizado (24) dado por

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx.$$

A dificuldade de encontrar pontos críticos para o funcional energia associado ao problema (24), mais uma vez, está relacionada ao fato que o mesmo não satisfaz em geral a condição de Palais & Smale. Para obtermos tais pontos críticos, utilizamos técnicas variacionais, algumas ideias encontradas em [3], [4] e o Lema de Concentração e Capacidade de Lions [40], [41], [42]. Conforme feito no Capítulo 2, usando as propriedades do operador penalização, encontramos uma sequência  $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  de soluções do problema penalizado (24) que verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (v - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) (v - u_n) dx.$$



Mostraremos, a menos de subsequência, que a mesma converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u_\lambda$ , a qual de fato é solução da Desigualdade Variacional modificada

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_\lambda \nabla (v - u_\lambda) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_\lambda (v - u_\lambda) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda) (v - u_\lambda) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

Na segunda seção, o caso  $N = 2$ , a não-linearidade  $\mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t$  é substituída pela função  $f$  considerada na segunda seção do Capítulo 2 verificando todas condições  $(f_1) - (f_4)$ . Prosseguiremos da mesma forma que foi feito no caso  $N \geq 3$ , com as devidas modificações.

O principal Teorema do Capítulo 3 é o seguinte:

**Teorema 0.0.3** *Assuma que  $V$  satisfaz  $(V_1) - (V_2)$  e  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$  se  $N = 2$ . Então existem  $\lambda_* > 0$ ,  $\mu_* > 0$ ,  $\nu_* > 0$  e  $\rho > 0$  tais que se  $\|\varphi\| < \rho$ , o problema  $(P)$  tem solução  $u_\lambda$  não trivial para  $\lambda \geq \lambda_*$ ,  $\mu \geq \mu_*$  e  $\nu \geq \nu_*$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$  tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , podemos extrair uma subsequência  $(\lambda_n)$  tal que a sequência  $(u_{\lambda_n})$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u) u (v - u) dx,$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$



# Capítulo 1

## Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos com crescimento crítico

### 1.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos com crescimento crítico:

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (P_{\lambda,\mu})$$

onde  $\lambda, \mu > 0$ ,  $2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ ,  $N \geq 3$  e  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V<sub>1</sub>)  $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ;

(V<sub>2</sub>)  $\Omega := \text{int}(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$  é um subconjunto aberto conexo limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave;

(V<sub>3</sub>) Existe  $M_0 > 0$  tal que o conjunto  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M_0\}$  é não vazio e tem medida finita.

Conforme mencionado na Introdução, fomos motivados pelos trabalhos de Bartsch & Wang [9] e Clapp & Ding [10] e nossa intenção é provar que o mesmo tipo de resultado é válido para o problema  $(P_{\lambda,\mu})$ .

Gostaríamos de salientar que a nossa contribuição, em relação ao problema  $(P_{\lambda,\mu})$ , foi de estender o estudo realizado em [14] e [20] no seguinte sentido: Em [14], a não-linearidade tem um crescimento subcrítico, enquanto no nosso a não-linearidade tem um crescimento crítico, então precisamos ter o cuidado ao provar a condição Palais-Smale para o funcional energia. Em relação a [20], observamos que somente o caso  $q = 2$  foi considerado, enquanto que aqui consideramos  $2 < q < 2^*$ . O leitor é convidado a observar que nossa abordagem é totalmente diferente da usada em [20].

O resultado principal deste capítulo é o seguinte

**Teorema 1.1.1** *Assuma  $(V_1) - (V_3)$  e que*

$$N \geq 4 \text{ e } 2 < q < 2^* \quad \text{ou} \quad N = 3 \text{ e } 4 < q < 6.$$

*Então existem  $\lambda^*, \mu^* > 0$  tais que  $(P_{\lambda,\mu})$  tem no mínimo  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas para  $\lambda \geq \lambda^*$  e  $\mu \leq \mu^*$ .*

Na demonstração do Teorema 1.1.1, usamos métodos variacionais adaptando para o nosso caso alguns argumentos explorados em Bartsch & Wang [14]. Além disso, outro trabalho importante na demonstração do nosso teorema principal é devido a Alves & Ding [5], onde a multiplicidade de soluções foi estabelecida para o problema limite. Para mais detalhes veja a próxima seção.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: Na primeira seção, introduzimos o problema limite estabelecido por Alves & Ding [5] e recordamos alguns fatos envolvendo este problema. Na Seção 1.2, apresentamos alguns resultados preliminares. Além disso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição  $(PS)_c$ , para alguns valores de  $c$ . Com isso, mostramos que o problema  $(P_{\lambda,\mu})$  possui solução não trivial. Em seguida, na Seção 1.3, provamos o resultado principal o Teorema 1.1.1.

## 1.2 O problema limite

Nesta seção, relembremos alguns resultados encontrados em [5] para o funcional  $I_\mu : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I_\mu(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx$$

cujos pontos críticos são soluções fracas do problema (problema limite)

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)_\infty$$

Em [5], os autores estabeleceram a existência de pelo menos  $cat(\Omega)$  de soluções positivas do problema  $(P)_\infty$ . Se  $c_\mu$  é o nível do passo da montanha associado ao funcional  $I_\mu$  é possível mostrar a estimativa abaixo

$$0 < c_\mu < \frac{1}{N}S^{N/2}, \quad \forall \mu > 0, \quad (\text{veja Miyagaki [48]}) \quad (1.1)$$

supondo que

$$q \in (2, 2^*) \quad \text{if } N \geq 4 \quad \text{ou} \quad q \in (4, 6) \quad \text{if } N = 3, \quad (1.2)$$

onde  $S$  é a melhor constante da imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  dada pela

$$S = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx; u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1 \right\}. \quad (1.3)$$

Por resultados encontrados em Willem [60],

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{M}} I_\mu(u)$$

onde

$$\mathcal{M} = \{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0 \text{ e } I'_\mu(u)u = 0\}.$$

O conjunto  $\mathcal{M}$  é chamado de variedade de Nehari do funcional  $I_\mu$ .

No que segue, sem perda de generalidade, assumimos que  $0 \in \Omega$ . Entretanto, sendo  $\Omega$  um domínio limitado suave, podemos fixar  $r > 0$  tal que  $B_r(0) \subset \Omega$  e os conjuntos

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x, \Omega) \leq r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

são homotopicamente equivalentes a  $\Omega$ . Denotemos por  $m(\mu)$  o nível do passo da montanha associado ao funcional

$$I_{\mu,r}(u) = \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r(0)} |u|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{B_r(0)} |u|^{2^*} dx.$$

Então

$$0 < m(\mu) < \frac{1}{N}S^{N/2}, \quad (1.4)$$

e

$$m(\mu) = \inf_{u \in \mathcal{M}_r} I_{\mu,r}(u) \quad (1.5)$$

com

$$\mathcal{M}_r = \{u \in H_0^1(B_r(0)); u \neq 0 \text{ e } I'_{\mu,r}(u)u = 0\}. \quad (1.6)$$

Os próximos três lemas podem ser encontrados em [5].

**Lema 1.2.1**  $\lim_{\mu \rightarrow 0} c_\mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} m(\mu) = \frac{1}{N} S^{N/2}$ .

**Lema 1.2.2** *Se  $u$  é um ponto crítico de  $I_\mu$  sobre  $\mathcal{M}$ , então  $u$  é um ponto crítico de  $I_\mu$  em  $H_0^1(\Omega)$ .*

**Lema 1.2.3** *Existe  $\mu^* > 0$  tal que se  $\mu \in (0, \mu^*)$  e  $u \in \mathcal{M}$  com  $I_\mu(u) \leq m(\mu)$ , então  $\beta_0(u) \in \Omega_{r/2}^+$ , onde a aplicação  $\beta_0 : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é definida por*

$$\beta_0(u) = \frac{\int_{\Omega} |u|^{2^*} x \, dx}{\int_{\Omega} |u|^{2^*} \, dx}.$$

Essa aplicação é conhecida na literatura como o *baricentro* de  $u$ . Visto que  $\Omega$  é um domínio limitado, então  $\beta_0(u)$  está bem definida.

Aqui e ao longo deste capítulo estamos assumindo que  $\mu \in (0, \mu^*)$  e (1.2).

### 1.3 Resultados preliminares

O espaço  $E \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  definido por

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \, dx < +\infty \right\}$$

equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + \lambda V(x)uv] \, dx$$

é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|u\|_\lambda = \left( \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda V(x)|u|^2] \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotemos por  $E_\lambda$ , o espaço  $E$  com a norma  $\|\cdot\|_\lambda$ . As condições  $(V_1) - (V_3)$  implicam que existe  $\Upsilon > 0$  satisfazendo

$$\|u\|_\lambda \geq \Upsilon \|u\|, \quad \forall u \in E_\lambda \text{ e } \forall \lambda \geq 1.$$

Esta desigualdade implica que a imersão  $E_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  é contínua para  $\lambda \geq 1$ . Assim, as imersões

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*],$$

são contínuas para  $\lambda \geq 1$ .

Usando as notações acima, definimos o funcional  $I_{\lambda,\mu} : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx,$$

que pertence a  $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$  com a derivada dada por

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = \langle u, v \rangle_\lambda - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} uv dx, \quad \forall u, v \in E_\lambda$$

ou equivalente,

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda V(x)uv) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} uv dx.$$

Observe que os pontos críticos de  $I_{\lambda,\mu}$  são soluções fracas de  $(P_{\lambda,\mu})$ .

O próximo lema mostra que o funcional  $I_{\lambda,\mu}$  satisfaz a geometria do passo da montanha.

**Lema 1.3.1** (a) *Existem constantes  $r, \rho > 0$ , independentes de  $\lambda \geq 1$  e  $\mu > 0$  tais que*

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \rho \quad \text{para} \quad \|u\|_\lambda = r.$$

(b) *Existe  $e \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\|e\|_\lambda > r$  e  $I_{\lambda,\mu}(e) < 0$ .*

**Demonstração.** Usando a imersão de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \text{para} \quad 2 \leq s \leq 2^*, \tag{1.7}$$

segue que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - C \|u\|_\lambda^q - C \|u\|_\lambda^{2^*}.$$

Como  $2 < q < 2^*$ , existem  $\rho, r > 0$  tais que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \rho > 0, \quad \text{para} \quad \|u\|_\lambda = r,$$

mostrando (a). Agora, fixemos  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\text{supp } \Psi \subset \Omega$ . Então,

$$I_{\lambda,\mu}(t\Psi) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \Psi|^2 + |\Psi|^2) dx - \frac{t^q \mu}{q} \int_{\Omega} |\Psi|^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} |\Psi|^{2^*} dx.$$

Desde que  $2 < q < 2^*$ ,

$$I_{\lambda,\mu}(t\Psi) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Assim, (b) segue fixando  $e = t^* \Psi$  com  $t^* > 0$  suficientemente grande.

■

Agora, usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha encontrada em Willem [60], existe uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$ , isto é, existe uma sequência  $(u_n) \subset E_\lambda$  satisfazendo

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,\mu} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

onde  $c_{\lambda,\mu}$  é o nível do passo da montanha associado ao funcional  $I_{\lambda,\mu}$  dado por

$$c_{\lambda,\mu} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \quad (1.9)$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_\lambda); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Como na seção anterior, é possível provar que

$$c_{\lambda,\mu} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}} I_{\lambda,\mu}(u)$$

onde

$$\mathcal{M}_{\lambda,\mu} = \{u \in E_\lambda; u \neq 0 \text{ e } I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0\}.$$

**Lema 1.3.2** *Existe uma constante  $\sigma > 0$ , independente de  $\lambda \geq 1$ , tal que*

$$\sigma \leq \|u\|_\lambda, \quad \forall u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}.$$

**Demonstração.** Dado  $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ , temos

$$\|u\|_\lambda = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Usando as imersões de Sobolev existem constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$\|u\|_\lambda^2 \leq C_1 \|u\|_\lambda^q + C_2 \|u\|_\lambda^{2^*}.$$

Sendo  $q \in (2, 2^*)$ , dado  $\epsilon > 0$  existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$|t|^q \leq \epsilon |t|^2 + C_\epsilon |t|^{2^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando esta estimativa, segue que

$$(1 - \epsilon C_1) \|u\|_\lambda^2 \leq (C_\epsilon + C_2) \|u\|_\lambda^{2^*}.$$



Escolhendo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que  $C_3 = \frac{1 - \epsilon C_1}{C_\epsilon + C_2} > 0$ , obtemos

$$0 < C_3 \leq \|u\|_\lambda^{2^*-2},$$

ou ainda,

$$0 < \sigma \leq \|u\|_\lambda,$$

onde  $\sigma = (C_3)^{1/(2^*-2)}$ . Como  $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  foi dado arbitrariamente, temos

$$\sigma \leq \|u\|_\lambda, \quad \forall u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu},$$

finalizando a demonstração. ■

O lema a seguir está relacionado com a boa localização do nível do passo da montanha do funcional energia  $I_{\lambda,\mu}$ .

**Lema 1.3.3** *Existe  $\tau = \tau(\mu) > 0$  tal que o nível do passo da montanha  $c_{\lambda,\mu}$  verifica a seguinte desigualdade*

$$0 < c_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N} S^{N/2} - \tau, \quad \forall \lambda > 0. \quad (1.10)$$

**Demonstração.** Dado  $u \in \mathcal{M}$ , temos  $u \neq 0$  e  $I'_\mu(u)u = 0$ . Note que  $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  e  $I_\mu(u) = I_{\lambda,\mu}(u)$ . Logo,

$$c_{\lambda,\mu} \leq I_{\lambda,\mu}(u) = I_\mu(u).$$

Pela definição de  $c_\mu$ , segue que  $c_{\lambda,\mu} \leq c_\mu$  para todo  $\lambda, \mu > 0$ . Então, basta aplicar (1.1) para obter o resultado desejado. ■

A seguir, estudaremos algumas propriedades das sequências  $(PS)$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$ , as quais serão provadas em alguns lemas.

**Lema 1.3.4** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_d$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$ , então  $(u_n)$  é limitada em  $E_\lambda$  e*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2qd}{q-2}. \quad (1.11)$$

**Demonstração.** Primeiro de tudo, note que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_{\lambda}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n \leq d + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda}, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Combinando as desigualdades acima, produzimos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_{\lambda}^2 \leq d + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda}, \quad \text{para } n \geq n_0,$$

de onde segue a limitação de  $(u_n)$  e (1.11). ■

**Lema 1.3.5** *Seja  $\Theta > 0$  uma constante que não depende de  $\lambda$  e  $\mu$ . Se  $(u_n) \subset E_{\lambda}$  é uma sequência  $(PS)_d$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$  com  $0 \leq d \leq \Theta$ , então dado  $\delta > 0$  existem  $\lambda_* = \lambda_*(\delta, \Theta) > 0$  e  $R = R(\delta, \Theta) > 0$  tais que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^q dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*.$$

**Demonstração.** Na demonstração utilizaremos alguns argumentos encontrados em Bartch & Wang [14]. Sejam  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_d$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$  com  $0 \leq d \leq \Theta$ . Para cada  $R > 0$ , definimos

$$X_R = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| > R, V(x) \geq M_0\}$$

e

$$Y_R = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| > R, V(x) < M_0\},$$

onde  $M_0$  é dado em (V<sub>3</sub>). Observe que

$$\int_{X_R} |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda M_0} \int_{X_R} \lambda V(x) |u_n|^2 dx \leq \frac{\|u_n\|_{\lambda}^2}{\lambda M_0} \quad (1.12)$$

e pela desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev

$$\int_{Y_R} |u_n|^2 dx \leq \left( \int_{Y_R} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} |Y_R|^{\frac{2}{N}} \leq C \|u_n\|_{\lambda}^2 |Y_R|^{\frac{2}{N}}. \quad (1.13)$$

Usando a desigualdade de interpolação para  $2 < q < 2^*$ , obtemos

$$\|u_n\|_{L^q(B_R^c)}^q \leq \|u_n\|_{L^2(B_R^c)}^{q\eta} \|u_n\|_{L^{2^*}(B_R^c)}^{q(1-\eta)} \leq \|u_n\|_{L^2(B_R^c)}^{q\eta} \|u_n\|_{\lambda}^{q(1-\eta)}, \quad (1.14)$$

para algum  $\eta \in (0, 1)$ . De (1.11)-(1.14) existe  $K > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{L^q(B_R^c)}^q \leq K \left( \frac{1}{\lambda M_0} + |Y_R|^{\frac{2}{N}} \right)^{\frac{q\eta}{2}}. \quad (1.15)$$

De  $(V_3)$ ,  $Y_R \subset \mathcal{L}$ . Logo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |Y_R| = 0.$$

Do limite acima e de (1.15), para cada  $\delta$  existem  $R > 0$  e  $\lambda_* > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^q dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*,$$

como queríamos provar. ■

Como consequência do Lema 1.3.5, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.3.6** *Seja  $(v_n) \subset E_{\lambda_n}$  uma sequência tal que  $(\|v_n\|_{\lambda_n})$  é limitada com  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Se  $v_n \rightarrow 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , então*

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N).$$

**Demonstração.** Seja  $(v_n) \subset E_{\lambda_n}$  uma sequência tal que  $(\|v_n\|_{\lambda_n})$  é limitada com  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Repetindo as ideias contidas na demonstração do Lema 1.3.5 é possível mostrar um resultado semelhante para a sequência  $(v_n)$ , isto é, dado  $\delta > 0$  existem  $R > 0$  e  $\lambda_* > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c(0)} |v_n|^q dx < \delta/2, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*.$$

Por outro lado, temos

$$v_n \rightarrow 0 \quad L^q(B_R(0)).$$

Logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |v_n|_q = 0,$$

de onde segue

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N). \quad \blacksquare$$

A próxima proposição mostra alguns níveis em que o funcional  $I_{\lambda,\mu}$  satisfaz a condição (PS).

**Proposição 1.3.7** *Existe  $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$  tal que  $I_{\lambda,\mu}$  verifica a condição  $(PS)_{d_\lambda}$  para qualquer  $d_\lambda \in (0, \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau)$  para todo  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ , onde  $\tau$  foi dado no Lema 1.3.3.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{d_\lambda}$  para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$ , isto é,

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow d_\lambda \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 1.3.4, a sequência  $(u_n)$  é limitada em  $E_\lambda$ . Sendo  $E_\lambda$  um espaço de Hilbert, para alguma subsequência  $(u_n)$ , existe  $u \in E_\lambda$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq s < 2^*.$$

Com um cálculo direto mostra-se que  $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ , e assim,  $I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0$ . Por outro lado, pelo Lema de Brezis & Lieb [38], segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx + o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + o_n(1),$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Desde que

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx = d_\lambda + o_n(1),$$

temos

$$\frac{1}{2} \|v_n\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u) + o_n(1). \quad (1.16)$$

Agora, usando o fato que  $I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n = o_n(1)$  e  $I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0$ , segue que

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = o_n(1). \quad (1.17)$$

Da limitação de  $(u_n)$ , podemos assumir que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \rightarrow L_\lambda \quad \text{e} \quad \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \rightarrow L_\lambda.$$

Se  $L_\lambda = 0$ , então deduzimos que  $v_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ , ou equivalentemente,  $u_n \rightarrow u$  em  $E_\lambda$ , e com isso finalizamos a demonstração. Em seguida, mostraremos que  $L_\lambda > 0$  não pode ser positivo  $\lambda$  suficientemente grande. Para isso, se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx \rightarrow A_\lambda \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \rightarrow B_\lambda,$$

então  $\mu A_\lambda + B_\lambda = L_\lambda$ . Seguindo os argumentos explorados na demonstração do Lema 1.3.5, vemos que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx = o_\lambda(1),$$

onde  $o_\lambda(1) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$A_\lambda = o_\lambda(1) \quad \text{e} \quad L_\lambda = B_\lambda + o_\lambda(1). \quad (1.18)$$

De (1.17) e das imersões de Sobolev

$$\|v_n\|_\lambda^2 \leq C(\|v_n\|_\lambda^q + \|v_n\|_\lambda^{2^*}) + o_n(1). \quad (1.19)$$

Recordando que existe  $C > 0$  verificando

$$|t|^q \leq \frac{1}{2}|t|^2 + C|t|^{2^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e supondo por contradição que  $L_\lambda > 0$ , a última desigualdade implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_\lambda^2 \geq (1/C)^{2/(2^*-2)} = C_1 > 0,$$

ou equivalentemente,

$$L_\lambda \geq C_1 > 0. \quad (1.20)$$

onde  $C_1$  não depende de  $\lambda > 0$ . Por outro lado, sabemos que

$$S \leq \frac{\|v_n\|_\lambda^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}.$$

Então, tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$ , encontramos

$$S \leq \frac{L_\lambda}{(B_\lambda)^{2/2^*}} = \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Agora, fazemos  $\lambda \rightarrow +\infty$  e usando (1.20), ficamos com

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda. \quad (1.21)$$

De (1.16), segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq d_\lambda,$$

donde

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} d_\lambda \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda.$$

Usando a desigualdade acima combinada com (1.21), deduzimos

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} d_\lambda \geq \frac{1}{N}S^{N/2}, \quad (1.22)$$

o que é um absurdo, pois por hipótese

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} d_\lambda \leq \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau < \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

Sendo assim, existe  $\widehat{\lambda} > 0$  tal que  $L_\lambda = 0$  para todo  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ , finalizando a demonstração. ■

Inspirados na demonstração do resultado precedente, obtemos uma consequência que será muito importante adiante para mostrar a multiplicidade de soluções para o problema  $(P_{\lambda,\mu})$ .

**Corolário 1.3.8** *Existe  $\widehat{\lambda} > 0$  tal que  $I_{\lambda,\mu}$  verifica a condição  $(PS)_{d_\lambda}$  sobre  $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  para qualquer  $d_\lambda \in (0, \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau)$  e  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ , onde  $\tau$  foi dado no Lema 1.3.3.*

O teorema a seguir garante a existência de solução de energia mínima para o problema  $(P_{\lambda,\mu})$ .

**Teorema 1.3.9** *Existe  $\lambda^* > 0$  tal que o nível do passo da montanha  $c_{\lambda,\mu}$  é um valor crítico para o funcional  $I_{\lambda,\mu}$ , para todo  $\lambda \geq \lambda^*$ , isto é, existe  $u_{\lambda,\mu} \in E_\lambda$  verificando*

$$I_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = c_{\lambda,\mu} \quad e \quad I'_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = 0.$$

**Demonstração.** Pelo Lema 1.3.3, tem-se que  $c_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau$ . A Proposição 1.3.7 garante a existência de  $\lambda^* = \lambda^*(\tau) > 0$  tal que o funcional energia  $I_{\lambda,\mu}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$  para  $\lambda \geq \lambda^*$ . Desta forma, pelo Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], existe  $u_{\lambda,\mu} \in E_\lambda$  verificando

$$I_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = c_{\lambda,\mu} \quad e \quad I'_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = 0,$$

isto finaliza a demonstração.

■

Agora, nossa intenção é mostrar uma relação importante entre  $c_{\lambda,\mu}$  e  $c_\mu$ . No entanto, para fazer isso precisamos estudar o comportamento das sequências  $(PS)_{c,\infty}$ . A seguir, seja  $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  uma sequência  $(PS)_{c,\infty}$ , isto é,

$$\begin{aligned} u_n &\in E_{\lambda_n} \text{ e } \lambda_n \rightarrow +\infty, \\ I_{\lambda_n,\mu}(u_n) &\rightarrow c \text{ para algum } c \in \mathbb{R}, \\ \|I'_{\lambda_n,\mu}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Proposição 1.3.10** *Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c,\infty}$  com  $c \in (0, \frac{1}{N}S^{N/2})$ . Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e  $u$  é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)_\infty$$

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Conforme foi feito no Lema 1.3.4,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \frac{2qc}{q-2}. \quad (1.23)$$

Isto mostrar que  $(\|u_n\|_{\lambda_n})$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Desde que

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \geq \Upsilon \|u_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$(u_n)$  também é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , e assim, existe uma subsequência de  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para mostrar (i), para cada  $m \in \mathbb{N}^*$  consideramos o conjunto

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; V(x) > \frac{1}{m} \right\}.$$

É fácil ver que

$$\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m.$$

Note que,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx = \int_{C_m} \frac{\lambda_n V(x)}{\lambda_n V(x)} |u_n|^2 dx \leq \frac{m}{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \frac{mM}{\lambda_n},$$

onde  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{\lambda_n}^2$ . Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{C_m} |u|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{mM}{\lambda_n} = 0$$

e isto implica

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Desta forma  $u = 0$  em quase todo ponto de  $C_m$ , para todo  $m \in \mathbb{N}^*$ . Logo,

$$u(x) = 0 \text{ sobre } \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m = \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}.$$

Conseqüentemente,  $u = 0$  para quase todo ponto em  $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ . Para completar a demonstração de (i), considere uma função teste  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e observe que

$$I'_{\lambda_n, \mu}(u_n)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\mu |u_n|^{q-2} u_n + |u_n|^{2^*-2} u_n) \varphi dx. \quad (1.24)$$

Como  $(u_n)$  é uma seqüência  $(PS)_{c, \infty}$ , temos

$$I'_{\lambda_n, \mu}(u_n)\varphi \rightarrow 0. \quad (1.25)$$

Recordando que  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , devemos ter

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \quad (1.26)$$

e

$$\int_{\Omega} (\mu |u_n|^{q-2} u_n + |u_n|^{2^*-2} u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u) \varphi dx. \quad (1.27)$$

Sendo assim, de (1.24)-(1.27),

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$



Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$ , a igualdade acima nos dá

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u) v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que  $u$  é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.28)$$

Para (ii), note que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \|u\|_{\lambda_n}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + \lambda_n V(x) u_n u) \, dx. \quad (1.29)$$

De (i),

$$\|u\|_{\lambda_n}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + \lambda_n V(x) u_n u) \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + o_n(1).$$

Daí, podemos reescrever (1.29) como

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + o_n(1). \quad (1.30)$$

Juntando a limitação de  $(\|u_n\|_{\lambda_n})$  com o limite  $\|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} \rightarrow 0$ , encontramos

$$I'_{\lambda_n}(u_n) u_n \rightarrow 0.$$

Como,

$$\|u_n\|_{\lambda_n}^2 = I'_{\lambda_n}(u_n) u_n + \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx,$$

então

$$\|u_n\|_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx + o_n(1). \quad (1.31)$$

Por outro lado, sabemos que o limite  $I'_{\lambda_n}(u_n) u \rightarrow 0$  é equivalente

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u \, dx - \int_{\Omega} (\mu |u_n|^{q-2} u_n u + |u_n|^{2^*-2} u_n u) \, dx = o_n(1),$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^q + |u|^{2^*}) \, dx. \quad (1.32)$$

Combinando (1.30) com (1.31) e (1.32), segue que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^q + |u|^{2^*}) \, dx + o_n(1).$$

isto é,

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 = \mu|v_n|_q^q + |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1),$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Pelo Corolário 1.3.6,  $v_n \rightarrow 0$  em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ , conseqüentemente

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 = |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1).$$

Agora, repetindo os mesmos passos dados na finalização da demonstração da Proposição 1.3.7 para a seqüência  $(v_n)$  deduzimos

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0,$$

finalizando a demonstração de (ii). Finalmente, a fim de provar (iii), basta usar a desigualdade abaixo

$$0 \leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n - u|^2 dx \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0.$$

■

No que segue, provaremos alguns resultados envolvendo  $c_{\lambda,\mu}$  e  $c_\mu$ .

**Lema 1.3.11** *Se  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n,\mu} = c_\mu$ .*

**Demonstração.** Pelo Teorema 1.3.9, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existem  $u_n = u_{\lambda_n,\mu} \in E_{\lambda_n}$  tal que

$$I_{\lambda_n,\mu}(u_n) = c_{\lambda_n,\mu} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda_n,\mu}(u_n) = 0.$$

O Lema 1.3.1, juntamente com a definição de  $c_{\lambda_n,\mu}$  implica que

$$0 < \rho \leq c_{\lambda_n,\mu} \leq c_\mu < \frac{1}{N}S^{N/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde segue que  $(c_{\lambda_n,\mu})$  é uma seqüência limitada e  $\|u_n\|_{\lambda_n} \not\rightarrow 0$ . Agora, argumentado como na demonstração do Lema 1.3.4, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \frac{2qc_\mu}{q-2},$$

mostrando que  $(u_n)$  é uma seqüência limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Sendo assim, pela Proposição 1.3.10, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  tais que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned}
u_n &\rightarrow u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N), \\
u_n &\rightarrow u \quad \text{em } L^s(\mathbb{R}^N) \quad \forall s \in [2, 2^*], \\
I'_\mu(u) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que  $I_{\lambda_n, \mu}(u_n) \rightarrow I_\mu(u)$ . Como  $I_{\lambda_n, \mu}(u_n) = c_{\lambda_n, \mu} \leq c_\mu$ ,

$$I_\mu(u) \leq c_\mu. \quad (1.33)$$

Sendo  $u \neq 0$  e  $I'_\mu(u)u = 0$ , devemos ter  $u \in \mathcal{M}$ . Logo,

$$c_\mu \leq I_\mu(u). \quad (1.34)$$

As duas desigualdades (1.33) e (1.34) implicam que  $I_\mu(u) = c_\mu$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n, \mu} = c_\mu,$$

provando o resultado desejado. ■

O Lema 1.3.11 nos fornece informações importantes que estão listadas nos corolários abaixo.

**Corolário 1.3.12** *Seja  $(\lambda_n) \subset (0, +\infty)$  uma sequência verificando  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $u_{\lambda_n, \mu}$  a solução de energia mínima obtida no Teorema 1.3.9. Então, existe uma subsequência de  $(u_{\lambda_n, \mu})$ , denotada por ela mesma, e  $u \in H_0^1(\Omega)$  tais que  $u_{\lambda_n, \mu} \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $u$  é uma solução de energia mínima do problema limite*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)_\infty$$

**Demonstração.** Segue imediatamente da Proposição 1.3.10. ■

**Corolário 1.3.13** *Existem  $\lambda^* > 0$  grande e  $\mu^* > 0$  pequeno tais que*

$$m(\mu) < 2c_{\lambda, \mu}, \quad \forall \lambda \geq \lambda^* \quad \text{e} \quad \forall \mu \in (0, \mu^*).$$

**Demonstração.** Pelo Lema 1.2.1 podemos diminuir  $\mu^*$ , se necessário, de tal forma que

$$m(\mu) < 2c_\mu, \quad \forall \mu \in (0, \mu^*).$$

Sabemos pelo Lema 1.3.11 que  $c_{\lambda,\mu} \rightarrow c_\mu$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Para cada  $\mu > 0$  fixado, existe  $\lambda^* = \lambda^*(\mu)$  tal que

$$m(\mu) < 2c_{\lambda,\mu}, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*,$$

mostrando o resultado desejado. ■

**Corolário 1.3.14** *Assumindo que  $m(\mu) < 2c_{\lambda,\mu}$  e  $u \in E_\lambda$  é um ponto crítico não trivial do funcional  $I_{\lambda,\mu}$  com  $I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)$ . Então,  $u$  é positiva ou  $u$  é negativa.*

**Demonstração.** Se  $u^\pm \neq 0$ , temos que  $u^\pm \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ . De fato,

$$0 = I'_{\lambda_n,\mu}(u)u^+ = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla u^+ + V(x)uu^+) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uu^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}uu^+ dx.$$

Observando que

$$I'_{\lambda_n,\mu}(u)u^+ = I'_{\lambda_n,\mu}(u^+)u^+,$$

tem-se,  $I'_{\lambda_n,\mu}(u^+)u^+ = 0$  e, conseqüentemente,  $u^+ \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ . Da mesma forma mostra-se que  $u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ . Agora, podemos concluir que

$$m(\mu) \geq I_{\lambda,\mu}(u) = I_{\lambda,\mu}(u^+) + I_{\lambda,\mu}(u^-) \geq 2c_{\lambda,\mu},$$

o que é um absurdo. O resultado segue pela aplicação do Princípio de Máximo em [33]. ■

**Observação 1.3.15** *Como  $I_{\lambda,\mu}$  é par, pelo último corolário, podemos supor que os pontos críticos não triviais de  $I_{\lambda,\mu}$  são soluções positivas ( $P_{\lambda,\mu}$ ).*

No que segue, fixamos  $R > 2\text{diam}(\Omega)$  tal que  $\Omega \subset B_R(0)$  e consideramos a função

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq R, \\ \frac{R}{t}, & t \geq R. \end{cases}$$

Além disso, definimos  $\beta : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$  por

$$\beta(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|)|u|^{2^*} x dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx}.$$

Note que pela definição da função  $\xi$ , que a função baricentro  $\beta$  está bem definida.

**Lema 1.3.16** *Existe  $\widehat{\lambda} > 0$  tal que se  $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  e  $I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)$ , então  $\beta(u) \in \Omega_r^+$  para todo  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ .*

**Demonstração.** Suponha, por contradição, que existe uma sequência  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\lambda_n,\mu}$  com  $I_{\lambda_n,\mu}(u_n) \leq m(\mu)$  e

$$\beta(u_n) \notin \Omega_r^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $(\|u_n\|_{\lambda_n})$  é limitada em  $\mathbb{R}$ , existe  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ u_n(x) \rightarrow u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ u_n \rightarrow u & \text{em } L_{loc}^t(\mathbb{R}^N) \quad \text{para } t \in [1, 2^*). \end{cases}$$

Além disso,

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 = \mu|v_n|_q^q + |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1),$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Pelo Corolário 1.3.6,  $v_n \rightarrow 0$  em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ , implicando que

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 = |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1).$$

Argumentando como na demonstração da Proposição 1.3.10, obtemos

$$\|v_n\|_{\lambda_n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|u_n - u\|_{\lambda_n} \rightarrow 0.$$

Este limite combinado com o Lema 1.3.2 implica que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \neq 0, \quad I'_\mu(u)u = 0 \quad \text{e} \quad I_{\lambda_n,\mu}(u_n) \rightarrow I_\mu(u). \quad (1.35)$$

Desse modo,  $u \in \mathcal{M}_\mu$  e  $I_\mu(u) \leq m(\mu)$ . Aplicando o Lema 1.2.3, temos  $\beta_0(u) \in \Omega_{r/2}^+$ , o que é um absurdo, pois

$$\beta_0(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_0(u_n) \notin \Omega_{r/2}^+.$$

Isto completa a demonstração. ■

## 1.4 Demonstração do Teorema 1.1.1

Seja  $u_r \in H_0^1(B_r(0))$  uma função radialmente simétrica que verifica

$$I_{\mu,r}(u_r) = m(\mu) = \inf_{u \in \mathcal{M}_r} I_{\mu,r}(u) \quad \text{e} \quad I'_{\mu,r}(u_r) = 0.$$

Usando a função  $u_r$ , definimos o operador  $\Psi_r : \Omega_r^- \rightarrow H_0^1(\Omega)$  por

$$\Psi_r(y)(x) = \begin{cases} u_r(|x - y|), & x \in B_r(y), \\ 0, & x \in \Omega_r^- \setminus B_r(y), \end{cases}$$

**Afirmção 1.4.1** *O operador  $\Psi_r$  é contínuo e satisfaz*

$$\beta(\Psi_r(y)) = y, \quad \forall y \in \Omega_r^-. \quad (1.36)$$

A continuidade de  $\Psi_r$  segue da continuidade da função  $u_r$ . Note que, para cada  $y \in \Omega_r^-$ ,

$$\beta(\Psi_r(y)) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|) |\Psi_r(y)|^{2^*} x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_r(y)|^{2^*} dx}.$$

Observe que se

$$x \in B_r(y)^c \text{ tem-se } \Psi_r(y)(x) = 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|) |\Psi_r(y)|^{2^*} x \, dx = \int_{B_r(y)} \xi(|x|) |\Psi_r(y)|^{2^*} x \, dx.$$

Assim, se  $x \in B_r(y)$  então  $|x - y| < r$ . Como fixamos  $R > 2 \text{diam}(\Omega)$  tal que  $\Omega \subset B_R(0)$ , temos  $|x| < r + |y| < R$  e conseqüentemente  $\xi(|x|) = 1$ . Desta informação, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|) |\Psi_r(y)|^{2^*} x \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_r(y)|^{2^*} x \, dx.$$

Usando a definição  $\Psi_r(y)$  segue que

$$\beta(\Psi_r(y)) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|x - y|)|^{2^*} x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|x - y|)|^{2^*} dx}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}
\beta(\Psi_r(y)) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} (z + y) dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} y dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz} \\
&= y \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz} \\
&= y + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} dz}.
\end{aligned}$$

Note que

$$u_r(z) = 0 \text{ se } z \in B_r(0)^c.$$

Sendo assim,  $z$  deve verificar  $|z| < r < R$  o que implica em  $\xi(|z|) = 1$ . Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z dz = \int_{\mathbb{R}^N} \xi(|z|) |u_r(|z|)|^{2^*} z dz = \beta(u_r).$$

Portanto,

$$\beta(\Psi_r(y)) = y + \beta(u_r).$$

Como  $u_r$  é radial, isto é,  $\beta(u_r) = 0$ , concluímos que  $\beta(\Psi_r(y)) = y$ , o que mostra a afirmação.

Usando as informações acima, provaremos a seguinte afirmação:

**Afirmção 1.4.2** Para  $0 < \mu < \mu^*$ ,

$$\text{cat}(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) \geq \text{cat}(\Omega),$$

onde  $I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)} := \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}; I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)\}$  e  $\mu^*$  é dado no Lema 1.2.3.

Se  $\text{cat}(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = \infty$ , o resultado é imediato. Assumimos que  $\text{cat}(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = n$ , isto é,

$$I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)} = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n,$$

onde  $F_j$  é fechado e contrátil em  $I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , isto é, existe  $h_j \in C([0, 1] \times F_j, I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)})$  e  $w_j \in F_j$  tais que

$$h_j(0, u) = u \quad \text{e} \quad h_j(1, u) = w_j,$$

para todo  $u \in F_j$ . Considere os conjuntos  $B_j := \Psi_r^{-1}(F_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Sendo  $\Psi_r$  contínua, os conjuntos  $B_j$  são fechados e segue que

$$\Omega_r^- = \Psi_r^{-1}(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = \Psi_r^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right) = \bigcup_{j=1}^n \Psi_r^{-1}(F_j) = \bigcup_{j=1}^n B_j.$$

Defina agora aplicação  $g_j : [0, 1] \times B_j \rightarrow \Omega_r^+$  dada por

$$g_j(t, y) = \beta(h_j(t, \Psi_r(y))),$$

e observe que:

- (a) A aplicação  $g_j$  está bem definida. Tomando  $t \in [0, 1]$  e  $y \in B_j = \Psi_r^{-1}(F_j)$  tem-se  $\Psi_r(y) \in F_j$ . Logo,  $h_j(t, y)$  está bem definida e  $h_j(t, y) \in I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}$ . Além disso, pelo Lema 1.3.16, existe  $\widehat{\lambda} > 0$  tal que

$$\beta(h_j(t, \Psi_r(y))) \in \Omega_r^+, \quad \forall \lambda \geq \widehat{\lambda};$$

- (b) A continuidade de  $g_j$  segue da continuidade das funções  $\beta$ ,  $h_j$  e  $\Psi$ . Todas estas funções são contínuas;
- (c) Note que

$$g_j(0, y) = \beta(h_j(0, \Psi_r(y))) = \beta(\Psi_r(y)) = y, \quad \forall y \in B_j$$

e

$$g_j(1, y) = \beta(h_j(1, \Psi_r(y))) = \beta(w_j), \quad \forall y \in B_j.$$

Portanto,  $B_j$  é contrátil em  $\Omega_r^+$ , para todo  $1 \leq j \leq n$ , donde segue que

$$cat(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n.$$

finalizando a demonstração da afirmação.

Como  $I_{\lambda,\mu}$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  sobre  $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  para  $c \leq m(\mu)$  (veja Corolário 1.3.8), podemos aplicar a Categoria de Lusternik-Schnirelmann na Afirmação 1.4.2 para garantir que  $I_{\lambda,\mu}$  tem pelo menos  $cat(\Omega)$  de pontos críticos sobre  $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$  e, consequentemente,  $cat(\Omega)$  pontos críticos em  $E_\lambda$ .



## Capítulo 2

# Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte I

### 2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções não triviais para a seguinte desigualdade variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.1)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E; v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  com parte positiva não trivial e  $\text{supp } \varphi^+ \subset \Omega$ ,  $\lambda > 0$  é um parâmetro e  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V<sub>1</sub>)  $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ ;

(V<sub>2</sub>)  $\Omega := \text{int}(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$  é um subconjunto aberto conexo limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave;

(V<sub>3</sub>) Existe  $M_0 > 0$  tal que o conjunto  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq M_0\}$  é não vazio e tem medida finita.

Com relação a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assumimos as seguintes condições: Se  $N \geq 3$ ,  $f$  é da forma

$$f(t) = \mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t, \quad (2.2)$$

onde  $2^* = 2N/(N - 2)$  e  $2 < q < 2^*$ .

Se  $N = 2$ ,  $f$  é de classe de  $C^1$  e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

Assumimos também as seguintes condições

$$(f_1) \quad \frac{f(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } |t| \rightarrow 0;$$

( $f_2$ ) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s) ds \leq f(t)t, \quad s \neq 0;$$

( $f_3$ ) Existem  $C > 0$  tal que

$$|f'(t)| \leq Ce^{\alpha_0 t^2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

( $f_4$ ) Existem  $p > 2$  e uma constante  $\nu > 0$  tais que

$$f(t) \geq \nu t^p, \quad \forall t \geq 0.$$

No que segue, supomos sem perda de generalidade  $f(t) = 0$ , para  $t \leq 0$ .

Conforme falamos na introdução, a nossa motivação pelo estudo do problema (2.1) vem dos recentes trabalhos envolvendo a seguinte classe de problemas

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

mais especificamente, do trabalho Bartsch & Wang [14] e dos poucos trabalhos encontrados na literatura de desigualdades variacionais em domínios ilimitados.

Nossa contribuição, em relação ao problema (2.1), foi demonstrar a existência de uma solução não trivial para o mesmo, considerando os casos  $N \geq 3$  e  $N = 2$ .

O principal resultado deste capítulo é o teorema que enunciaremos a seguir.

**Teorema 2.1.1** *Assuma que  $V$  satisfaz  $(V_1) - (V_3)$  e  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$  se  $N = 2$ . Então existem  $\lambda_* > 0$ ,  $\mu_* > 0$ ,  $\nu_* > 0$  e  $\rho > 0$  tais que se  $\|\varphi\| < \rho$ , o problema (2.1) tem solução  $u_\lambda$  não trivial para  $\lambda \geq \lambda_*$ ,  $\mu \geq \mu_*$  e  $\nu \geq \nu_*$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$  tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , podemos extrair uma subsequência  $(\lambda_n)$  tal que a sequência  $(u_{\lambda_n})$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u)u(v - u) dx,$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Com o propósito de demonstrar o Teorema 2.1.1, utilizaremos o método de penalização devido Bensoussan & Lions [16] e melhorado por Carl, Le & Motreanu [18], Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60] e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, introduzimos alguns resultados preliminares e a formulação do método de penalização para o Problema (2.1). Na Seção 2.2, demonstraremos o Teorema 2.1.1 para caso  $N \geq 3$ . Inicialmente, penalizamos o Problema (2.1) o qual chamaremos de problema penalizado. Logo após, iremos mostrar que o mesmo possui solução não trivial. Para isso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição  $(PS)_c$  para alguns valores de  $c$ . Em seguida, trabalhamos com a sequência de soluções do problema penalizado combinado com o operador de penalização para obtermos, a menos de subsequência, uma convergência forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Através desta convergência, garantimos uma solução não trivial para a desigualdade variacional (2.1). Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções  $(u_\lambda)$  da Desigualdade Variacional (2.1) o que de fato demonstra o Teorema 2.1.1. Na Seção 2.3, o objetivo é provar o Teorema 2.1.1 para o caso  $N = 2$ . Seguimos os mesmos passos da Seção 2.3 com os devidos ajustes e faremos uso de uma versão da desigualdade de Trudinger & Moser em todo  $\mathbb{R}^2$ , devido a Cao [17].

## 2.2 Resultados preliminares

Seja  $E \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  definido por

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx < +\infty \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_\lambda = \left( \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + (1 + \lambda V(x))|u|^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual está associada com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx.$$

Mostra-se que  $E$  é um espaço de Hilbert, para todo  $\lambda \geq 0$ . Ao longo deste capítulo, denotemos por  $E_\lambda$ , o espaço  $E$  com a norma  $\| \cdot \|_\lambda$ .

As condições  $(V_1) - (V_2)$  implicam que  $E_\lambda$  satisfaz

$$\|u\|_\lambda \geq \|u\|, \quad \forall u \in E_\lambda \quad \text{e} \quad \forall \lambda > 0.$$

Portanto, a imersão  $E_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  é contínua para  $\lambda > 0$ , de onde segue

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*],$$

também são contínuas para  $\lambda > 0$ .

Para resolvermos o problema (2.1), usaremos o método de penalização encontrado em Carl, Le e Motreanu em [18]. Iniciaremos definindo o que é um operador de penalização.

**Definição 2.2.1** *Seja  $C$  um subconjunto não vazio, fechado e convexo de um espaço de Banach  $X$ . Um operador  $P : X \rightarrow X'$  é chamado operador de penalização associado com  $C \subset X$  se verifica:*

(P<sub>1</sub>) *A função real*

$$t \mapsto \langle P(u + tv), w \rangle$$

*é contínua sobre  $[0, 1]$ , para todos  $u, v, w \in X$ ;*

(P<sub>2</sub>) *Temos*

$$\langle P(u) - P(v), u - v \rangle \geq 0,$$

*para todos  $u, v \in X$ ;*

(P<sub>3</sub>)  $P(u) = 0$  se, e somente se,  $u \in C$ ;

(P<sub>4</sub>) O operador  $P$  leva conjuntos limitados de  $X$  em conjuntos limitados.

O próximo passo consiste em penalizar o problema (2.1). Para isso, considere a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (2.3)$$

Recordamos que  $u$  é uma solução fraca de (2.3) quando verifica a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \quad \forall v \in E_\lambda, \quad (2.4)$$

onde  $\epsilon > 0$  é o parâmetro de penalização, enquanto  $\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx$  é o termo de penalização.

No que segue consideramos o operador  $P : E_\lambda \rightarrow E'_\lambda$  definido por

$$\langle P(u), v \rangle = - \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx.$$

**Lema 2.2.2** *O operador  $P$  definido acima é um operador de penalização associado ao conjunto  $\mathbb{K} \subset E_\lambda$ .*

**Demonstração.** Vamos iniciar por (P<sub>1</sub>). Dados  $u, v, w \in E_\lambda$ , definimos a função  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p(t) = \langle P(u + tv), w \rangle.$$

Seja  $(t_n) \subset [0, 1]$  verificando  $t_n \rightarrow t_0$ , onde  $t_0 \in [0, 1]$ . Então,

$$p(t_n) = - \int_{\Omega} (\varphi - (u + t_n v))^+ w dx \quad \text{e} \quad p(t_0) = - \int_{\Omega} (\varphi - (u + t_0 v))^+ w dx.$$

Nosso objetivo é mostrar  $p(t_n) \rightarrow p(t_0)$ , nesse sentido, observe que

$$|p(t_n) - p(t_0)| \leq \int_{\Omega} |(\varphi - (u + t_n v))^+ - (\varphi - (u + t_0 v))^+| |w| dx.$$

Perceba que

$$|(\varphi - (u + t_n v))^+ - (\varphi - (u + t_0 v))^+| |w| \leq 2|\varphi||w| + 2|u||w| + 2|v||w|$$

e

$$|(\varphi(x) - (u(x) + t_n v(x)))^+ - (\varphi(x) - (u(x) + t_0 v(x)))^+| |w(x)| \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

isso mostra que estamos sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, e portanto,

$$|p(t_n) - p(t_0)| \rightarrow 0,$$

o que mostra a condição  $(P_1)$ .

Agora para mostrar  $(P_2)$  analisaremos pontualmente e dividimos em quatro casos. Dados  $u, v \in E_\lambda$  e fixe  $x \in \Omega$

(i) Se  $\varphi(x) \leq u(x)$  e  $\varphi(x) \leq v(x)$ ,

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = 0$$

(ii) Se  $v(x) \geq \varphi(x) \geq u(x)$

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = -(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) \geq 0$$

(iii) Se  $u(x) \geq \varphi(x) \geq v(x)$

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) \geq 0$$

(iv) Se  $\varphi(x) \geq u(x)$  e  $\varphi(x) \geq v(x)$ ,

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = (u - v)^2(x) \geq 0,$$

de todas as análises feitas o operador  $P$  satisfaz  $(P_2)$ .

Vamos justificar a condição  $(P_3)$ . Seja  $u \in E_\lambda$  com  $P(u) = 0$ , isto é,

$$\langle P(u), v \rangle = - \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular,

$$\int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pelo Lema Fundamental das Distribuições tem-se  $(\varphi - u)^+ = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , ou seja,  $u \geq \varphi$  q.t.p. em  $\Omega$ . Isto mostra que  $u \in \mathbb{K}$ . Por outro lado, se  $u \in \mathbb{K}$ , imediatamente temos  $P(u) = 0$ . Portanto, está mostrado a condição  $(P_3)$ .

Para finalizarmos a demonstração do lema, falta mostrar condição  $(P_4)$ . Seja  $\Sigma \subset E_\lambda$  um conjunto limitado, isto é, existe  $L > 0$

$$\|u\| \leq L, \quad \forall u \in \Sigma.$$

Dada  $u \in \Sigma$  e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|\langle P(u), v \rangle| \leq \|(\varphi - u)^+\|_2 \|v\|_2.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*]$$

existe uma constante  $C > 0$  tal que a última desigualdade fica

$$|\langle P(u), v \rangle| \leq C \|(\varphi - u)^+\|_\lambda \|v\|_\lambda,$$

ou ainda,

$$|\langle P(u), v \rangle| \leq C (\|\varphi\|_\lambda + \|u\|_\lambda) \|v\|_\lambda.$$

Logo,

$$\|P(u)\|_{E'_\lambda} \leq C(L + \|\varphi\|),$$

mostrando que  $P$  verifica a condição  $(P_4)$ . Portanto,  $P$  é um operador de penalização associado ao conjunto  $\mathbb{K}$ . ■

## 2.3 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N \geq 3$

Relembrando que a desigualdade (2.1) que estamos estudando nesta seção é a seguinte: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1}) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

O problema penalizado associado a desigualdade acima é

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon} (\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

As soluções fracas do problema penalizado podem ser encontradas como pontos críticos do funcional  $I_{\lambda, \epsilon} : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_+(u) dx$$

o qual está bem definido e é de classe  $C^1$  sobre o espaço  $E_\lambda$  com a derivada dada por

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \langle u, v \rangle_\lambda - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u)^+ v \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_+(u)v \, dx,$$

$\forall u, v \in E_\lambda$ , onde

$$f_+(t) = \mu(t^+)^{q-1} + (t^+)^{2^*-1} \quad \text{e} \quad F_+(t) = \int_0^t f_+(s) \, ds.$$

### 2.3.1 Solução para o problema penalizado (2.3)

Iniciamos mostrando a geometria do passo da montanha para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ .

**Lema 2.3.1** (a) *Existem constantes  $r, \rho > 0$ , as quais são independentes de  $\lambda$  e  $\epsilon$ , tais que*

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho \quad \text{para} \quad \|u\|_\lambda = r;$$

(b) *Existe  $e \in H^1(\mathbb{R}^N)$  com  $\|e\|_\lambda > r$  e  $I_{\lambda,\epsilon}(e) < 0$ .*

**Demonstração.** Primeiramente, note que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \, dx \quad u \in E_\lambda.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \text{para} \quad 2 \leq s \leq 2^*. \quad (2.5)$$

existem constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{C_1 \mu}{q} \|u\|_\lambda^q - \frac{C_2}{2^*} \|u\|_\lambda^2.$$

Uma vez que  $2 < q < 2^*$ , existem  $\rho > 0$  e  $r > 0$  tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho > 0 \quad \text{para} \quad \|u\|_\lambda = r.$$

Isso mostra (a). Agora, observe que

$$\int_\Omega [(\varphi - \varphi^+)^+]^2 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \|\varphi^+\|_\lambda = \|\varphi^+\|.$$

Logo,

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) \leq \|\varphi^+\|^2 \leq \|\varphi\|^2.$$

Como por hipótese fixamos  $\|\varphi\|$  suficientemente pequena em relação  $\rho$ , temos

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho.$$



Por outro lado para  $t > 1$

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) = \frac{t^2}{2} \|\varphi^+\|_\lambda^2 - \frac{t^q \mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi^+|^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi^+|^{2^*} dx.$$

Sendo  $2 < q < 2^*$ , obtemos  $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Assim, fixando  $t_* > 0$  suficientemente grande e  $w = (1 + t_*)\varphi^+$  tem-se

$$I_{\lambda,\epsilon}(w) < I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho \leq I_{\lambda,\epsilon}(u), \quad \text{com} \quad \|u\|_\lambda = r$$

e

$$\|\varphi^+\|_\lambda < r < \|w\|_\lambda.$$

Em vista disso, concluímos o lema. ■

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], garantimos a existência de uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para  $I_{\lambda,\epsilon}$ , isto é, uma sequência  $(u_n) \subset E_\lambda$  verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = w\}.$$

**Lema 2.3.2** *Existem  $\tau > 0$  e  $\mu_* = \mu_*(\tau) > 0$  tais que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } \mu \geq \mu_*.$$

**Demonstração.** Considere o caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E_\lambda$  definido por  $\gamma(t) = (1 + tt_*)\varphi^+$ . Claramente,  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $(1 + tt_*)\varphi^+ \geq \varphi$ ,

$$\int_{\Omega} [(\varphi - (1 + tt_*)\varphi^+)^+]^2 dx = 0$$

e

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) = \frac{(1 + tt_*)^2}{2} \|\varphi^+\|_\lambda^2 - \frac{(1 + tt_*)^q \mu}{q} \int_{\Omega} |\varphi^+|^q dx - \frac{(1 + tt_*)^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} |\varphi^+|^{2^*} dx.$$

Note que

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \frac{(1+tt_*)^2}{2} \|\varphi^+\|^2 - \frac{(1+tt_*)^q \mu}{q} \int_{\Omega} |\varphi^+|^q dx.$$

Para deixar o cálculo mais simples, chamamos  $A = \|\varphi^+\|^2/2$  e  $B = \|\varphi^+\|^q/q$  e consideramos as funções

$$j_{\mu}(t) = A(1+tt_*)^2 - \mu B(1+tt_*)^q, \quad t \in [0, \infty)$$

e

$$h_{\mu}(t) = At^2 - \mu Bt^q, \quad t \in [0, \infty).$$

Perceba que  $j_{\mu}(t) = h_{\mu}(1+tt_*)$  e

$$h'_{\mu}(t) = 2At - \mu Bqt^{q-1}, \quad q > 2.$$

Fazemos  $h'_{\mu}(t) = 0$ , isso nos dá  $2At - \mu Bqt^{q-1} = 0$ . Fazendo algumas manipulações algébricas encontramos

$$t = \left( \frac{2A}{\mu Bq} \right)^{1/(q-2)}.$$

Denotamos este ponto

$$t_{\mu} = \left( \frac{2A}{\mu Bq} \right)^{1/(q-2)}.$$

Fazendo o estudo com a função  $h_{\mu}$  podemos garantir que  $t_{\mu}$  é um ponto de máximo que verifica

$$h_{\mu}(t_{\mu}) = \frac{A}{\mu^{2/(q-2)}} \left( \frac{2A}{Bq} \right)^{2/(q-2)} - \frac{\mu B}{\mu^{q/(q-2)}} \left( \frac{2A}{Bq} \right)^{q/(q-2)}.$$

Como  $\frac{\mu}{\mu^{q/(q-2)}} = \frac{1}{\mu^{2/(q-2)}}$ , quando  $\mu \rightarrow \infty$  segue que

$$h_{\mu}(t_{\mu}) \rightarrow 0.$$

Recorde,

$$j_{\mu}(t) = h_{\mu}(1+tt_*) \leq h_{\mu}(t_{\mu}).$$

Com as últimas duas informações, obtemos

$$c_{\lambda,\epsilon} \leq \max_{t \geq 0} j_{\mu}(t) = \max_{t \geq 1} h_{\mu}(t) \leq \max_{t \geq 0} h_{\mu}(t) = h_{\mu}(t_{\mu}) < \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau$$

para todo  $\lambda > 0$  e para todo  $\mu \geq \mu_*$  onde fixamos  $\mu_*$  suficientemente grande, finalizando a demonstração. ■

Enunciaremos alguns lemas envolvendo o comportamento das seqüências  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ .

**Lema 2.3.3** *Se  $(u_n)$  é uma seqüência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então  $(u_n)$  é limitada.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma seqüência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Então

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Note que

$$[(\varphi - u_n)^+]^2 + (\varphi - u_n)^+ u_n \geq (\varphi - u_n)^+ \varphi$$

e

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx \geq \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx.$$

Usando tais informações, segue que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \varphi dx$$

ou ainda,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega |\varphi - u_n| |\varphi| dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 - \frac{C}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 \|u_n\|_\lambda. \quad (2.6)$$

Por outro lado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1) \|u_n\|_\lambda \quad n \geq n_0. \quad (2.7)$$

Das condições (2.6) e (2.7),

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + \frac{1}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 + (o_n(1) + \frac{C}{q\epsilon} |\varphi|_2^2) \|u_n\|_\lambda$$

para  $n \geq n_0$ , o que garante a limitação da seqüência  $(u_n)$ .

■

**Lema 2.3.4** *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  dada pelo Lema 2.3.3 pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas, ou seja,  $(u_n^+)$  é uma sequência  $(PS)_c$ .*

**Demonstração.** De fato, sendo  $(u_n)$  limitada, então  $u_n^- = u_n - u_n^+$  também é limitada.

Observe que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n^- = \frac{1}{2}\|u_n^-\|_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u_n^- dx \geq \frac{1}{2}\|u_n^-\|_\lambda^2.$$

Recordando que  $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n^- \rightarrow 0$ , ficamos com

$$\|u_n^-\|_\lambda^2 \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Assim, de (2.8)

$$\|u_n\|_\lambda^2 = \|u_n^+\|_\lambda^2 + o_n(1). \quad (2.9)$$

Nossa intenção é mostrar  $(u_n^+)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Sendo  $(u_n)$  limitada e  $E_\lambda$  um espaço de Hilbert, existem uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in E_\lambda$  tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda.$$

Consequentemente,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para } 2 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Por (2.8), a menos de subsequência

$$u_n^-(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Deduzimos destas informações que a menos de subsequência

$$u_n^+ \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para } 2 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n(x)^+ \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. } \Omega.$$

**Afirmação 2.3.5**

$$\int_{\Omega} [(\varphi - u_n)^+]^2 dx - \int_{\Omega} [(\varphi - u_n^+)^+]^2 dx = o_n(1).$$

Observe

$$\left| \int_{\Omega} [(\varphi - u_n)^+]^2 dx - \int_{\Omega} [(\varphi - u_n^+)^+]^2 dx \right| \leq \int_{\Omega} |[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2| dx.$$

É possível mostrar do estudo feito da sequência  $(u_n)$  que existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que  $|u_n|, |u_n^+| \leq g$ . Assim,

$$|[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2| \leq 4|\varphi| + 4|u_n| + 4|u_n^+| \leq 8|\varphi| + 8g.$$

Além disso, podemos mostrar que

$$|[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2|(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue a afirmação está provada. Vejamos agora que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - I_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) = \frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda} - \frac{1}{2}\|u_n^+\|_{\lambda} + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u_n)^+]^2 dx - \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u_n^+)^+]^2 dx$$

Por (2.9) e pela Afirmção 2.3.5,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) = I_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) + o_n(1). \quad (2.10)$$

Sem maiores dificuldades, mostra-se

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) = I'_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) + o_n(1). \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11),  $(u_n^+)$  é uma sequência  $(PS)_c$ . ■

**Lema 2.3.6** *Sendo  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  então a mesma verifica*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda}^2 \leq \left( \frac{2q}{q-2} \right) c.$$

**Demonstração.** Sabemos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.4 podemos supor  $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , assim

$$\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n dx \geq 0,$$

e com isso,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2.$$

Por outro lado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1) \|u_n\|_\lambda \quad n \geq n_0.$$

Fazendo as mesmas manipulações algébricas que foi feita no Lema 2.3.3 encontramos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + o_n(1) \|u_n\|_\lambda \quad \forall n \geq n_0.$$

De onde segue o lema. ■

O próximo lema constitui um ponto chave para mostrar a a condição  $(PS)_{c,\lambda,\epsilon}$ .

**Lema 2.3.7** *Seja  $\Theta > 0$  uma constante que não depende de  $\lambda$ . Se  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_\lambda$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  com  $0 \leq c \leq \Theta$ . Então dado  $\delta > 0$  existem  $\lambda_* = \lambda_*(\delta) > 0$  e  $R = R(\delta, \Theta)$  tais que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^q dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*$$

Omitimos a demonstração por se tratar da mesma feita no Lema 1.3.5. Como observado no Capítulo 1, o corolário a seguir segue do Lema 2.3.7.

**Corolário 2.3.8** *Seja  $(v_n) \subset E_\lambda$  uma sequência tal que  $(\|v_n\|_{\lambda_n})$  é limitada com  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Se  $v_n \rightharpoonup 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , então*

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N).$$

A proposição seguinte é fundamental para obtenção de solução do problema penalizado (2.3).

**Proposição 2.3.9** *Existe  $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$  tal que  $I_{\lambda,\epsilon}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para qualquer  $c_{\lambda,\epsilon} \in (0, \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau)$  para todo  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ , onde  $\tau$  foi dado no Lema 2.3.1.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  não negativa para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , isto é,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,\epsilon}$$

e

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 2.3.3,  $(u_n)$  é limitada. Então para alguma subsequência existe  $u \in E_\lambda$  tal que podemos assumir os seguintes fatos:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

Essa última convergência significa que dado qualquer aberto limitado  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  tem-se

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s(\Theta), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

Com algumas manipulações algébricas é possível mostrar que  $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$ , e assim,  $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$ . Por Brezis & Lieb (ver [38])

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx + o_n(1) \quad (2.12)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + o_n(1), \quad (2.13)$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Recorde,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx = c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1). \quad (2.14)$$

Usando a mesma argumentação feita na demonstração da Afirmação 2.3.5, temos

$$\int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx = \int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2 dx + o_n(1). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12), (2.13) e (2.15) em (2.14) encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right) - \frac{1}{2^*} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right) = \\ & - \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx + c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 + I_{\lambda,\epsilon}(u) - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1).$$

Desde que

$$\|v_n\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - \|u\|_\lambda^2 + o_n(1),$$

temos

$$\frac{1}{2} \|v_n\|_\lambda^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = c_{\lambda,\epsilon} - I_{\lambda,\epsilon}(u) + o_n(1). \quad (2.16)$$

Por outro lado,  $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n = o_n(1)$ , ou seja,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u_n dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx = o_n(1).$$

Mais uma vez, utilizando (2.12) e (2.13) a última expressão fica

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ u dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = o_n(1),$$

ou ainda

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = o_n(1).$$

Sabemos que  $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$ , logo

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = o_n(1). \quad (2.17)$$

De (2.17) podemos assumir

$$\|v_n\|_\lambda^2 \rightarrow L_\lambda$$

e

$$\mu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \rightarrow L_\lambda.$$

Se  $L_\lambda = 0$  a proposição está provada. Suponha por contradição que  $L_\lambda > 0$ . Considerando

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx \rightarrow A_\lambda \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \rightarrow B_\lambda,$$



devemos ter  $\mu A_\lambda + B_\lambda = L_\lambda$ . É possível mostrar uma versão do Lema 2.3.7 para a sequência  $(v_n)$ , ou seja, mostra-se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx = o_\lambda(1),$$

onde  $o_\lambda(1) \rightarrow 0$  as  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Desta forma,

$$A_\lambda = o_\lambda(1) \quad \text{and} \quad L_\lambda = B_\lambda + o_\lambda(1). \quad (2.18)$$

De (2.17) e das imersões contínuas de Sobolev

$$\|v_n\|_\lambda^2 \leq C(\|v_n\|_\lambda^q + \|v_n\|_\lambda^{2^*}) + o_n(1). \quad (2.19)$$

Sem dificuldades é possível mostrar que existe  $C > 0$  verificando

$$|t|^q \leq \frac{1}{2C}|t|^2 + C|t|^{2^*}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como supomos  $L_\lambda > 0$ , a última desigualdade (2.19) implica em

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_\lambda^2 \geq (1/C)^{2/(2^*-2)} = C_1 > 0,$$

ou equivalentemente,

$$L_\lambda \geq C_1 > 0. \quad (2.20)$$

onde  $C_1$  não depende de  $\lambda > 0$ . Sabemos que

$$S \leq \frac{\|v_n\|_\lambda^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}.$$

Então, tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$ , encontramos

$$S \leq \frac{L_\lambda}{(B_\lambda)^{2/2^*}} = \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow +\infty$  na expressão acima, encontramos

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda. \quad (2.21)$$

De (2.16),

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq c_{\lambda,\epsilon},$$

conduzindo a

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} c_{\lambda,\epsilon} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda.$$

A última desigualdade combinada com (2.21) implica que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} c_{\lambda, \epsilon} \geq \frac{q-2}{2q} S^{N/2}$$

o que é um absurdo, pois por hipótese

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} c_{\lambda, \epsilon} \leq \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau < \frac{q-2}{2q} S^{N/2}.$$

Portanto, existe  $\hat{\lambda} > 0$  tal que  $L_\lambda = 0$ , para todo  $\lambda \geq \hat{\lambda}$ , o que demonstra a proposição. ■

Agora mostraremos que problema penalizado (2.3) possui solução não trivial. Pelo Lema 2.3.2 existe  $\mu_* > 0$  tal que  $c_{\lambda, \epsilon} < \frac{q-2}{2q} S^{N/2}$ , para todo  $\mu \geq \mu_*$ . A Proposição 2.3.9 garante a existência de  $\hat{\lambda} > 0$  tal que o funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda, \epsilon}}$  para todo  $\lambda \geq \hat{\lambda}$ . Então, pelo Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [8], existe  $u_\epsilon \in E_\lambda$  verificando

$$I_{\lambda, \epsilon}(u_\epsilon) = c_{\lambda, \epsilon} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda, \epsilon}(u_\epsilon) = 0.$$

### 2.3.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1

Pelo estudo feito na seção anterior fixados  $\lambda \geq \hat{\lambda}$  e  $\mu \geq \mu_*$ , existe uma solução  $u_\epsilon \in E_\lambda$  não trivial do problema (2.3), ou seja,  $u_\epsilon$  verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_\epsilon v] dx + \frac{1}{\epsilon} \langle P(u_\epsilon), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_+(u_\epsilon) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Recordamos a definição do operador de penalização

$$\langle P(u_\epsilon), v \rangle = - \int_{\Omega} (\varphi - u_\epsilon)^+ v dx.$$

Uma vez que  $u_\epsilon \geq 0$ , temos  $f_+(u_\epsilon) = f(u_\epsilon)$ , portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_\epsilon v] dx + \frac{1}{\epsilon} \langle P(u_\epsilon), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_\epsilon) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Por simplicidade, vamos fazer as seguintes escolhas:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda, \epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde  $c_n = c_{\lambda, \epsilon}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  sabemos que existe  $u_n \in E_\lambda$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_n v] dx + n \langle P(u_n), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda. \quad (2.22)$$

Pelo estudo feito, a sequência  $(u_n)$  cumpre

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \left(\frac{2q}{q-2}\right) c_n \leq \frac{2q}{q-2} \left(\frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau\right) < S^N, \quad (2.23)$$

onde  $\tau$  foi dado no Lema 2.3.2. Diante disso, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tal que a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

Agora demonstraremos um importante resultado para nosso propósito.

**Lema 2.3.10**  $P(u) = 0$ , isto é,  $u \in \mathbb{K}$ .

**Demonstração.** Sabemos que  $I'_n(u_n)v = 0$ , para todo  $v \in E_\lambda$ . Assim,

$$n\langle P(u_n), v \rangle = -\langle u_n, v \rangle_\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v \, dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Relembrando a definição da  $f$ , a última igualdade fica

$$n|\langle P(u_n), v \rangle| \leq \|u_n\|_\lambda \|v\|_\lambda + \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1}v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*-1}v \, dx. \quad (2.24)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e logo após as imersões de Sobolev na desigualdade (2.24) deduzimos

$$|\langle P(u_n), v \rangle| \leq \frac{1}{n} \left( \|u_n\|_\lambda \|v\|_\lambda + C_1 \|u_n\|_\lambda^{q-1} \|v\|_\lambda + C_2 \|u_n\|_\lambda^{2^*-1} \|v\|_\lambda \right).$$

Como sabemos que  $(u_n)$  é limitada, existe  $C > 0$  tal que

$$|\langle P(u_n), v \rangle| \leq \frac{C}{n} \|v\|_\lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou ainda,

$$\|P(u_n)\|_{E'_\lambda} \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com esta informação garantimos que

$$P(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } E'_\lambda. \quad (2.25)$$

Pela condição  $(P_2)$ ,

$$\langle P(v) - P(u_n), v - u_n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda$$

ou ainda,

$$\langle P(v), v - u_n \rangle - \langle P(u_n), v - u_n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda$$

passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$  nesta última desigualdade, por (2.25) segue que

$$\langle P(v), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda. \quad (2.26)$$

Considerando  $v = u + tw$ , para  $t > 0$  e  $w \in E_\lambda$  arbitrário, obtemos

$$\langle P(u + tw), tw \rangle \geq 0, \quad \forall w \in E_\lambda$$

ou ainda,

$$\langle P(u + tw), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in E_\lambda.$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$  e usando a condição  $(P_1)$  tem-se

$$\langle P(u), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in E_\lambda,$$

mostrando que  $P(u) = 0$ , ou seja,  $u \in \mathbb{K}$  finalizando a demonstração. ■

Sabemos que

$$\langle P(u_n), u_n - u \rangle = \langle P(u_n) - P(u), u_n - u \rangle \geq 0$$

Então usando este fato, escolhendo  $v = u_n - u$  e substituindo em (2.22), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla (u_n - u) + (1 + \lambda V(x)) u_n (u_n - u)] dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) (u_n - u) dx. \quad (2.27)$$

**Lema 2.3.11** *Para  $\lambda \approx +\infty$ , temos*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

**Demonstração.** Nesta demonstração usaremos argumentos já conhecidos e também ideias da demonstração da Proposição 2.1. Até mesmo em alguns pontos, usaremos a

mesma notação para que o leitor possa verificar sem dificuldades a conexão. Suponha por contradição que

$$u_n \not\rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|^2 = L_\lambda > 0. \quad (2.28)$$

**Afirmção 2.3.12** *A sequência  $(u_n)$  cumpre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(v_n) - f(u)]v_n \, dx \right| = 0,$$

onde  $v_n = u_n - u$ . De fato utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$|f(v_n + u) - f(v_n)| \leq \int_0^1 |f'(v_n + tu)u| \, dt \leq \int_0^1 [\mu(q-1)|v_n + tu|^{q-2}|u| + (2^* - 1)|v_n + tu|^{2^*-2}|u|] \, dt,$$

ou ainda, existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  positivas tais que

$$|f(v_n + u) - f(v_n)| \leq C_1|v_n|^{q-2}|u| + C_1|u|^{q-1} + C_2|v_n|^{2^*-2}|u| + C_2|u|^{2^*-1}.$$

Com esta informação, podemos observar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(v_n) - f(u)||v_n| \, dx &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}|u| \, dx + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n||u|^{q-1} \, dx \\ &+ C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1}|u| \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n||u|^{2^*-1} \, dx. \end{aligned}$$

Agora vamos justificar que

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}|u| \, dx = o_n(1)$$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1}|v_n| \, dx = o_n(1)$$

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1}|u| \, dx = o_n(1)$$

e

(iv)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-1}|v_n| \, dx = o_n(1)$$

Vamos mostrar apenas uma, pois as demais seguem com os mesmos argumentos. Vamos optar por (iii), onde temos o expoente crítico. Para isso, utilizaremos o Lema de Brézis & Lieb (ver [38]). Note que a sequência  $(|v_n|^{2^*-1})$  é limitada em  $L^{2^*/(2^*-1)}(\mathbb{R}^N)$  e

$$v_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Sendo  $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  e  $2^*$  e  $2^*/(2^*-1)$  expoentes conjugados segue pelo Lema de Brézis & Lieb

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1} |u| dx \rightarrow 0$$

com isso provamos (iii), e conseqüentemente

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(v_n) - f(u)] v_n dx \right| = o_n(1),$$

como queríamos e portanto a Afirmação está provada. Continuando com a demonstração do Lema 2.3.11, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(u)](u_n - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(u_n - u) dx.$$

Pela Afirmação 2.3.12 a expressão acima fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_n dx + o_n(1). \quad (2.29)$$

Usando os mesmos argumentos explorados na demonstração da Afirmação 2.3.12 é possível mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_n dx \rightarrow 0.$$

Assim, (2.29) pode ser escrita na forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + o_n(1). \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.27), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n] dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n + o_n(1). \quad (2.31)$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n] dx = \langle u_n, v_n \rangle_\lambda = \|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1) \quad (2.32)$$

(2.31) e (2.32) implicam que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + o_n(1)$$

ou ainda,

$$\|v_n\|^2 \leq \mu |v_n|_q^q + |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1). \quad (2.33)$$

Pelas imersões de Sobolev existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$\|v_n\|^2 \leq C_1 \|v_n\|^q + \|v_n\|^{2^*} + o_n(1).$$

Usando o fato que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| > 0,$$

deduzimos

$$1 \leq C_1 \|v_n\|^{q-2} + \|v_n\|^{2^*-2} + o_n(1). \quad (2.34)$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  em (2.34) segue que

$$1 \leq C_1 L_\lambda^{q-2} + L_\lambda^{2^*-2}. \quad (2.35)$$

Considerando a função  $h(t) = C_1 t^{q-2} + C_2 t^{2^*-2}$ ,  $t \geq 0$ , percebemos que a mesma é contínua e estritamente crescente. Podemos concluir que existe um único ponto  $\hat{t} > 0$  tal que  $h(\hat{t}) = 1$ . Assim, segue que

$$L_\lambda \geq \hat{t} > 0, \quad \forall \lambda > 0$$

onde  $\hat{t}$  independe de  $\lambda$ . Observe que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|^2 < S^{N/2}, \quad (2.36)$$

De fato, pois

$$\|v_n\|^2 \leq \|v_n\|_\lambda^2 \leq \|u_n\|_\lambda^2 + o_n(1).$$

Deste fato e de (2.23), segue que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|^2 \leq S^{N/2} - \tau < S^{N/2}.$$

Usando o limite  $\|v_n\|^2 \rightarrow L_\lambda$ , segue de (2.36) que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} L_\lambda \leq S^{N/2} - \tau < S^{N/2}. \quad (2.37)$$

É possível mostrar que a sequência  $(v_n)$  verifica o mesmo resultado do Lema 2.3.7, logo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx = o_\lambda(1)$$

onde  $o_\lambda(1) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Desde que

$$S \leq \frac{\|v_n\|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}},$$

segue de (2.33),

$$S \leq \frac{\|v_n\|^2}{\left(\|v_n\|^2 - \mu|v_n|_q^q + o_n(1)\right)^{2/2^*}}.$$

Assim, passando ao limite quando  $n \rightarrow +\infty$  obtemos

$$S \leq \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Mais uma vez, passando ao limite quando  $\lambda \rightarrow +\infty$  na desigualdade encontramos

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda. \quad (2.38)$$

Combinando (2.37) e (2.38) chegaremos a um absurdo, pois

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} L_\lambda \leq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} L_\lambda < S^{N/2}.$$

Portanto,  $(u_n)$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para  $\lambda$  grande. ■

Vimos pelo Lema 2.3.11 que para  $\lambda$  suficientemente grande temos

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N)$$

e conseqüentemente, sem maiores dificuldades, mostra-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx \quad (2.39)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.40)$$

Agora, note que

$$\langle P(u_n), w - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(w), w - u_n \rangle \leq 0$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Então escolhendo  $v = w - u_n$  e substituindo em (2.22), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (w - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u_n(w - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(w - u_n) dx \quad (2.41)$$



Tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  em (2.41) e usando os limites (2.39) e (2.40) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (w - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (w - u) dx \quad (2.42)$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Com isso, mostramos que o Problema (2.1) tem uma solução não trivial. Para finalizarmos a demonstração do Teorema 2.1.1 para  $N \geq 3$ , precisamos provar a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.13** *Seja  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $(u_n)$  uma solução de (2.42). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u (v - u) dx, \quad (2.43)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Demonstração.** Sem maiores dificuldades, é possível mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 < S^N. \quad (2.44)$$

De tal informação, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

A justificativa (i) segue das mesmas ideias encontradas na Proposição 1.3.10. Vamos mostrar (ii). Suponha por contradição que

$$u_n \not\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = L > 0. \quad (2.45)$$

Sabemos que  $u_n \in \mathbb{K}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo,  $u \in \mathbb{K}$ . Agora, percebemos que podemos repetir todas as etapas da demonstração do Lema 2.3.11. Desta forma, repetindo toda argumentação, com as devidas modificações, garantimos a convergência

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.46)$$

No que segue, mais uma vez, reproduzindo algumas etapas da demonstração do Lema 2.3.11 deduzimos

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + o_n(1), \quad (2.47)$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Combinando (2.46) e (2.47) resulta

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$$

finalizando (ii). Para demonstrar (iii), note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n - u|^2 dx \leq C \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2$$

o que implica, pelo item (ii),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n|^2 dx \rightarrow 0.$$

Falta mostrar (iv), ou seja, que  $u$  é solução do problema (3.91). Escolhendo  $w \in \tilde{\mathbb{K}}$ , arbitrária, e substituindo em (2.42) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (w - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x)) u_n (w - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) (w - u_n) dx \quad (2.48)$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  e usando (i) – (iii), concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (w - u) dx + \int_{\Omega} u(w - u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u(w - u) dx, \quad (2.49)$$

para todo  $w \in \tilde{\mathbb{K}}$ .

■

## 2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N = 2$

Antes de iniciarmos o nosso estudo para o caso  $N = 2$ , enunciaremos duas estimativas fundamentais para o desenvolvimento desta seção. A primeira é deduzida pela condição de crescimento da  $f$  combinada com as hipóteses  $(f_1)$  e  $(f_2)$  segue que fixados  $\beta > 0$ ,  $l \geq 0$  e  $\alpha > \alpha_0$  existe uma constante  $C_\beta > 0$  tal que

$$|f(u)| \leq \beta |u| + C_\beta |u|^l \left( e^{\alpha |u|^2} - 1 \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.50)$$

A segunda sejam  $\alpha > 0$  e  $k > 1$ , para cada  $l > k$ , existe uma constante  $C = C(k) > 0$  tal que

$$\left( e^{\alpha |s|^2} - 1 \right)^k \leq C \left( e^{\alpha l |s|^2} - 1 \right). \quad (2.51)$$

Uma desigualdade importante no desenvolvimento desta seção, devido a Cao [17], é uma versão da desigualdade Trundiger-Moser em todo  $\mathbb{R}^2$  que afirma

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\alpha |u|^2} - 1 \right) dx < \infty, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } \alpha > 0.$$

Além disso, se  $\alpha < 4\pi$  e  $|u|_2 \leq M$  então existe uma constante  $C = C(\alpha, M) > 0$  tal que

$$\sup_{|\nabla u|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\alpha |u|^2} - 1 \right) dx \leq C. \quad (2.52)$$

### 2.4.1 Solução para o problema penalizado (2.3)

Iniciamos mostrando que o funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$  verifica a geometria do passo da montanha.

**Lema 2.4.1** (a) *Existem constantes  $r, \rho > 0$ , as quais são independentes de  $\lambda$  e  $\epsilon$ , tais que*

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) \geq \rho \quad \text{para} \quad \|u\|_\lambda = r;$$

(b) *Existe  $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$  com  $\|e\|_\lambda > r$  e  $I_{\lambda, \epsilon}(e) < 0$ .*

**Demonstração.** Da estimativa (2.50) fixados  $\beta > 0$ ,  $l \geq 1$  e  $\alpha > \alpha_0$ , existe  $C_\beta > 0$  tal que

$$|F(u)| \leq \frac{\beta}{2}|u|^2 + C_\beta|u|^{l+1}(e^{\alpha|u|^2} - 1), \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.53)$$

Consequentemente,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx - C_\beta \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1}(e^{\alpha|u|^2} - 1) dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na última expressão e as imersões contínuas de Sobolev na estimativa anterior resulta em

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq C_1\|u\|_\lambda^2 - C_2|u|_{(l+1)s_1}^{l+1} \left| e^{\alpha|u|^2} - 1 \right|_{s_2}, \quad (2.54)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes positivas e  $s_1$  e  $s_2$  são expoentes conjugados. Agora fixemos  $r_0 > 0$  tal que  $\alpha r_0^2 < 4\pi$ . Podemos considerar  $s_2 > 1$  e suficientemente próximo de 1 tal que  $s_2 \alpha r_0^2 < 4\pi$ . Da mesma forma, consideremos  $s'_2 > s_2$  tal que  $s'_2 \alpha r_0^2 < 4\pi$ . Então para  $u \in E_\lambda$  com  $\|u\|_\lambda < r_0$  e usando a estimativa (2.51), ficamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u|^2} - 1)^s dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} (e^{s'_2 \alpha |u|^2} - 1) dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^2} (e^{s'_2 \alpha \|u\|_\lambda^2 (\frac{|u|}{\|u\|_\lambda})^2} - 1) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} (e^{s'_2 \alpha r_0^2 (\frac{|u|}{\|u\|_\lambda})^2} - 1) dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devida a Cao [17] existe  $C' > 0$  tal que

$$\left| e^{\alpha|u|^2} - 1 \right|_{s_2} \leq C', \quad \text{para } \|u\|_\lambda \leq r_0. \quad (2.55)$$

Substituindo (2.55) em (2.54) e usando as imersões contínuas de Sobolev resulta em

$$I(u)_{\lambda,\epsilon} \geq C_1\|u\|_\lambda^2 - C_3\|u\|_\lambda^{l+1}.$$

Tomando  $r_0$  suficientemente pequeno existem  $0 < r < r_0$  e  $\rho > 0$  tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho, \quad \text{para } \|u\|_\lambda = r,$$

uma vez que  $2 < l + 1$ . Isso nos mostra a primeira geometria do passo da montanha. Agora, observe que

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) = \frac{1}{2}\|\varphi^+\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(\varphi^+) dx \leq \|\varphi\|_\lambda^2 \quad \text{e} \quad \|\varphi^+\|_\lambda = \|\varphi^+\|.$$

Como tomamos  $\|\varphi\|$  suficientemente pequena em relação  $\rho$ , por hipótese, então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho.$$

Da condição  $(f_2)$  existem constantes  $A$  e  $B$  positivas verificando

$$F(t) \geq A|t|^\theta - B, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.56)$$

Para  $t > 1$  produzimos

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \leq t^2 \int_{\Omega} (|\nabla\varphi^+|^2 + |\varphi^+|^2) dx + A|t|^\theta \int_{\Omega} |\varphi^+|^\theta dx - B|\Omega|.$$

Podemos concluir pela desigualdade acima que  $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  mostrando que para  $\tilde{w} = (1 + t_*)\varphi^+$  e  $t_*$  suficientemente grande tem-se

$$\|\tilde{w}\|_\lambda > r \quad \text{e} \quad I_{\lambda,\epsilon}(\tilde{w}) < 0.$$

Com isso concluimos a demonstração do lema. ■

Pelo Lema 2.4.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], o qual garante a existência de uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para  $I_{\lambda,\epsilon}$ , isto é, uma sequência  $(u_n)$  verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,\epsilon} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = \tilde{w}\}.$$

**Lema 2.4.2** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então  $(u_n)$  é limitada.*

Omitiremos a demonstração por se tratar de argumentos semelhantes com os da demonstração do Lema 2.3.3. Os mesmos Lemas 2.3.4 e 2.3.6 são verificadas para a sequência  $(u_n)$  dada no Lema (2.4.2). Então resumiremos em apenas um lema.

**Lema 2.4.3** *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas e que cumpre*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \left(\frac{2\theta}{\theta-2}\right) c_{\lambda,\epsilon}.$$

O próximo resultado é fundamental para a demonstração da próxima proposição. Considere o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  sem o termo de penalização, o qual denotaremos por

$$I_\lambda(u) = \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx, \quad u \in E_\lambda$$

vamos demonstrar o seguinte lema

**Lema 2.4.4** *Sejam  $\Theta > 0$  fixo e  $(u_n) \subset E_\lambda$  uma sequência  $(PS)_{c_\lambda}$  para o funcional  $I_\lambda$  com  $0 \leq c_\lambda \leq \Theta$ . Fixado  $s \geq 2$ , então dado  $\delta > 0$  existem  $\lambda_* = \lambda_*(\delta) > 0$  e  $R = R(\delta, \Theta) > 0$  tais que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^s dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*(s).$$

**Demonstração.** A demonstração deste lema segue praticamente a mesma do Lema 2.3.7. Demonstraremos para  $s > 2$  fixo, pois para  $s = 2$  é imediato. Seja  $(u_n)$  a sequência dada pelo  $(PS)_{c_\lambda}$  para o funcional  $I_\lambda$ . Fazendo as mesmas manipulações algébricas do Lema 2.3.3 temos

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\Theta + o_n(1). \quad (2.57)$$

Para  $R > 0$  considere

$$A(R) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > R, V(x) \geq M_0\} \text{ e } B(R) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > R, V(x) < M_0\}$$

onde  $M_0$  foi dado na condição  $(V_3)$ . Segue das imersões contínuas de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2), \quad \forall s \geq 2 \quad (2.58)$$

que  $u_n \in L^t(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $t \geq 2$ . Assim, para  $l > 1$  e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{B(R)} |u_n|^2 dx \leq \left(\int_{B(R)} |u_n|^{2l} dx\right)^{1/l} |B(R)|^{1/l'},$$

e usando as imersões de Sobolev em conjunto com a expressão (2.57) ficamos

$$\int_{B(R)} |u_n|^2 dx \leq \left( \frac{2\theta}{\theta - 2} \right) \Theta |B(R)|^{1/l'} + o_n(1), \quad (2.59)$$

onde  $l'$  é o expoente conjugado de  $l$ .

Mais uma vez, usando a imersões contínuas de Sobolev e a expressão (2.57) tem-se

$$\int_{A(R)} |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \left( \frac{2\theta}{\theta - 2} \right) \Theta + o_n(1). \quad (2.60)$$

Como tomamos  $s \geq 2$  fixo, então por (2.58) e pela desigualdade de interpolação para  $2 \leq s \leq s + 1$  resulta em

$$\int_{B_R^c(0)} |u_n|^s dx \leq |u_n|_{L^{s+1}(B_R^c)}^{ts} |u_n|_{L^2(B_R^c)}^{(1-t)s},$$

para algum  $t \in (0, 1)$ . Novamente, utilizando a imersões contínuas de Sobolev obtemos a seguinte expressão

$$\int_{B_R^c(0)} |u_n|^s dx \leq C \|u_n\|_\lambda^{ts} \left( \int_{A(R)} |u_n|^2 dx + \int_{B(R)} |u_n|^2 dx \right)^{(1-t)s/2}, \quad (2.61)$$

Substituindo (2.60) e (2.60) em (2.61) e sabendo que a sequência  $(u_n)$  verifica (2.57) podemos concluir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^s dx \leq \tilde{C} \left[ \frac{1}{\lambda M_0 + 1} + |B(R)|^{1/l'} \right]^{(1-t)s/2}. \quad (2.62)$$

Recorde de  $(V_3)$ , que  $B(R) \subset \mathcal{L}$ , e assim,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |B(R)| = 0.$$

Tomando  $R$  e  $\lambda$  suficientemente grande tornamos o lado direito da desigualdade (2.62) arbitrariamente pequeno. Com isso, concluimos a demonstração do lema. ■

**Lema 2.4.5** *Sejam  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para  $I_{\lambda,\epsilon}$  com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta - 2)\pi}{\theta\alpha_0}$$

*e  $u \in E_\lambda$  com  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , então  $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$ .*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Pelo Lema 2.4.3 segue que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0} < \frac{4\pi}{\alpha_0}. \quad (2.63)$$

De onde segue que  $(\|u_n\|_\lambda)$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Assim, a menos de subsequência segue os seguintes fatos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^2), s \geq 2.$$

Sejam  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  não nula e  $R > 0$  tais que  $\text{supp } \phi \subset B_R(0)$ . Observe que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \rightarrow 0 \text{ e } \langle u_n, \phi \rangle_\lambda \rightarrow \langle u, \phi \rangle_\lambda,$$

onde

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V)uv] dx$$

é o produto interno de  $E_\lambda$ .

Além disso, argumentando da mesma forma que foi feito em (2.3.5) tem-se

$$\int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \phi dx = \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ \phi dx + o_n(1).$$

Portanto, analisando o que queremos mostrar, fica claro que o objetivo é concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\phi dx$$

ou melhor,

$$\int_{B_R(0)} f(u_n)\phi dx \rightarrow \int_{B_R(0)} f(u)\phi dx$$

pois  $\text{supp } \phi \subset B_R(0)$ .

Podemos mostrar o limite acima fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue. Da estimativa (2.50),

$$|f(u_n)\phi| \leq |u_n|\phi + C|\phi|(e^{\alpha|u_n|^2} - 1).$$

Definimos

- $f_n(x) = f(u_n(x))\phi(x)$ ,  $\tilde{f}(x) = f(u(x))\phi(x)$ ;



- $g_n(x) = |u_n(x)||\phi(x)| + C|\varphi(x)|(e^{\alpha|u_n(x)|^2} - 1)$ ;
- $g(x) = |u(x)||\phi(x)| + C|\varphi(x)|(e^{\alpha|u(x)|^2} - 1)$

Observando as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue precisamos apenas mostrar que

$$g_n \rightarrow g \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Vamos mostrar este limite, para isso, definamos

- $h_n(x) = C|\phi(x)|(e^{\alpha|u_n(x)|^2} - 1)$ ;
- $h(x) = C|\phi(x)|(e^{\alpha|u(x)|^2} - 1)$

Dividiremos a demonstração em duas etapas:

$$(i) \int_{B_R(0)} u_n \phi dx \rightarrow \int_{B_R(0)} u \phi dx;$$

$$(ii) \int_{B_R(0)} h_n dx \rightarrow \int_{B_R(0)} h dx.$$

**Justificativa (i):** Observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R(0)} u_n \phi dx - \int_{B_R(0)} u \phi dx \right| &\leq \int_{B_R(0)} |u_n - u| |\phi| dx \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^2(B_R(0))} \|\phi\|_2, \end{aligned}$$

mas  $u_n \rightarrow u$  em  $L^2(B_R(0))$ , logo, obtemos (i).

**Justificativa (ii):** Inicialmente, mostraremos que para  $t > 1$  e suficientemente próximo de 1 tem-se

$$h_n \in L^t(B_R(0)) \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|_t < \infty,$$

ou seja, existe  $C > 0$  tal que

$$\|h_n\|_t \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (2.63), fixemos  $0 < m < 4\pi/\alpha_0$  de tal maneira que

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leq m.$$

De acordo com a escolha de  $m$  temos  $m\alpha_0 < 4\pi$ . Logo, para  $\alpha > \alpha_0$  e suficientemente próximo de  $\alpha_0$  devemos ter  $m\alpha < 4\pi$ . Portanto, com a escolha de  $t$  segue

$$tm\alpha < 4\pi$$

. Agora, note que

$$\int_{B_R(0)} |h_n|^t dx = \int_{B_R(0)} C|\phi|^t (e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^t dx \leq C \int_{B_R(0)} (e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^t dx.$$

Seja  $t' > t$  e suficientemente próximo de  $t$  tal que  $\alpha mt' < 4\pi$ . Utilizando a desigualdade (2.51) segue

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |h_n|^t dx &\leq C \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha|u_n|^2} - 1) dx \\ &= C_1 \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha\|u_n\|_\lambda \left(\frac{|u_n|}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2} - 1) dx \\ &\leq C_1 \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha m \left(\frac{|u_n|}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2} - 1) dx. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devida a Cao [17] segue que

$$|h_n|_t \leq C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do estudo feito até aqui e por Brezis & Lieb, podemos concluir que

$$h_n \rightharpoonup h \text{ em } L^t(B_R(0)) \text{ com } t > 1.$$

Usando que

$$h_n(x) \rightarrow h(x) \text{ q.t.p. em } B_R(0),$$

podemos concluir que

$$h_n \rightarrow h \text{ em } L^1(B_R(0)),$$

o que prova (ii). Assim, por (i) e (ii) resulta em

$$g_n \rightarrow g \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\phi dx. \quad (2.64)$$

De todo estudo feito até aqui, podemos concluir que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \rightarrow I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi,$$

mas  $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \rightarrow 0$ . Logo, pela unicidade do limite tem-se

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Donde segue por densidade

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Portanto,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0.$$

■

**Lema 2.4.6** *Seja  $c_{\lambda,\epsilon}$  o nível do passo da montanha para  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Então existe uma constante  $A > 0$ , independente de  $\nu$ , de maneira que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}}.$$

**Demonstração.** Considere o caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E_\lambda$  definido por  $\gamma(t) = (1 + tt_*)\varphi^+$ . Claramente,  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $(1 + tt_*)\varphi^+ \geq \varphi$ , então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) = \frac{(1 + tt_*)^2}{2} \|\varphi^+\|^2 - \int_{\Omega} F((1 + tt_*)\varphi^+) dx.$$

Agora, usaremos a condição  $(f_4)$  e a expressão acima resulta em

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \frac{(1 + tt_*)^2}{2} \|\varphi^+\|^2 - \frac{(1 + tt_*)^{p+1}}{p+1} |\varphi^+|_{p+1}^{p+1}.$$

Consideremos a seguinte função

$$j(t) = \frac{(1 + tt_*)^2}{2} \|\varphi^+\|^2 - \frac{\nu(1 + tt_*)^{p+1}}{p+1} |\varphi^+|_{p+1}^{p+1}.$$

Observe que

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \max_{t \geq 0} j(t).$$

Realizando todo estudo feito na demonstração do Lema 2.3.2 com a função  $j$ , podemos concluir que a mesma possui um ponto de máximo global. Com essas informações podemos obter

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}},$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{\|\varphi^+\|^2}{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}} \right)^{2/(p-1)} - \frac{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}}{p+1} \left( \frac{\|\varphi^+\|^2}{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}} \right)^{(p+1)/(p-1)}.$$

■

**Proposição 2.4.7** *Existe  $\lambda_* > 0$  tal que  $\lambda \geq \lambda_*$ , toda  $(u_n)$  sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta - 2)\pi}{\theta\alpha_0}$$

*admite uma subsequência convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  verificando a hipótese da proposição acima. Sabemos que  $(u_n)$  é uma sequência limitada, logo, existe  $u \in E_\lambda$  e a menos de subsequência tem-se

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } E_\lambda,$$

$$v_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2), s \geq 2,$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Recordando que  $(u_n)$  verifica

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

e

$$\|v_n\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - \|u\|_\lambda^2 + o_n(1) \tag{2.65}$$

é possível mostrar que

$$\|u\|_\lambda^2 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\|u\|_\lambda^2 + \|v_n\|_\lambda^2) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\|u_n\|_\lambda^2 + o_n(1)) < 2\pi/\alpha_0$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_\lambda^2 < 2\pi/\alpha_0.$$

Daí, como foi feito na demonstração do Lema 2.4.5 existem  $m \in (0, 2\pi)$  e  $\alpha > \alpha_0$  tais que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \leq m \text{ e } m\alpha < 2\pi. \tag{2.66}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras

(a)  $\int_{\mathbb{R}^2} [F(v_n) - F(u_n) + F(u)] dx = o_n(1);$

(b) Existe  $s > 1$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^2} [f(v_n) - f(u_n) + f(u)]^s dx = o_n(1);$

$$(c) I_\lambda(v_n) - I_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I_{\lambda,\epsilon}(u) = o_n(1);$$

$$(d) \|I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)\| = o_n(1).$$

Vamos justificar cada uma dessas afirmações.

**Justificativa (a):** Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F(v_n(x) + u(x)) - F(v_n(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(v_n(x) + tu(x)) dt = \int_0^1 f(v_n(x) + tu(x))u(x) dt.$$

Assim,

$$|F(v_n + u) - F(v_n)| \leq \int_0^1 |f(v_n + tu)u| dt.$$

Usando a estimativa (2.50),

$$|F(v_n + u) - F(v_n)| \leq \int_0^1 \left[ (|v_n| + t|u|)|u| + C(|v_n| + t|u|)^l |u| (e^{\alpha(|v_n| + t|u|)^2} - 1) \right] dt,$$

onde  $l \geq 1$ ,  $\alpha > \alpha_0$  e  $C > 0$ . Ainda podemos obter

$$|F(v_n + u) - F(v_n)| \leq |v_n||u| + |u|^2 + C|v_n|^l |u| (e^{\alpha(|v_n| + |u|)^2} - 1) + C|u|^{l+1} (e^{\alpha(|v_n| + |u|)^2} - 1).$$

Por simplicidade, usaremos as notações  $w_n = |v_n| + |u|$ ,  $W_n = e^{\alpha w_n^2} - 1$  e  $W = e^{\alpha |u|^2} - 1$ .

Daí,

$$|F(v_n + u) - F(v_n)| \leq |v_n||u| + |u|^2 + C|v_n|^l |u| W_n + C|u|^{l+1} W_n.$$

Consequentemente,

$$|F(v_n + u) - F(v_n) - F(u)| \leq |v_n||u| + C|u|^2 + C|v_n|^l |u| W_n + C|u|^{l+1} W_n + C|u|^l W. \quad (2.67)$$

Sem maiores dificuldades, mostra-se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_\lambda^2 < 4\pi/\alpha_0. \quad (2.68)$$

Definindo

$$Z_n := |v_n||u| + C|u|^2 + C|v_n|^l |u| W_n + C|u|^{l+1} W_n + C|u|^l W$$

e

$$Z := C|u|^2 + C|u|^{l+1} W + C|u|^l W$$

vemos que

$$Z_n(x) \rightarrow Z(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Utilizando (2.68) e repetindo os passos feitos no Lema 2.4.5 podemos justificar que existem  $\alpha > \alpha_0$ ,  $t > 1$  e  $C > 0$  tais que  $(W_n)$  e  $W$  pertencem a  $L^t(\mathbb{R}^2)$  e  $|W_n|_t \leq C$ .

Considere  $s > 1$  e  $s < t$ . Vamos justificar que a sequência  $(|v_n|^l W_n)$  pertence a  $L^s(\mathbb{R}^2)$  e que a mesma é limitada. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s dx = \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{ls} W_n^s dx.$$

Note que  $W_n^s \in L^{t/s}(\mathbb{R}^2)$ , pois  $W_n \in L^t(\mathbb{R}^2)$ . Sabemos que  $v_n \in L^k(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $k \geq 2$ . Assim,  $v_n^l \in L^{t/(t-s)}(\mathbb{R}^2)$  com  $l > 2$ . Pela desigualdade de Hölder segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s dx \leq |W_n|_t^s \left( \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt/(t-s)} dx \right)^{(t-s)/t}.$$

Pelas imersões de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s dx \leq |W_n|_t^s |v_n|_\lambda^l.$$

Usando o fato que as sequências são limitadas, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

justificando o que queríamos. Agora, observe que

$$|v_n|^l(x) W_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Pelo Lema de Brázis & Lieb tem-se  $|v_n|^l W_n \rightarrow 0$  em  $L^s(\mathbb{R}^2)$ . Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l |u| W_n dx \rightarrow 0.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1} W_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1} W dx.$$

Logo podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Z_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} Z dx.$$

A prova de (a) segue da aplicação do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue.

**Justificativa (b):** Pela hipótese  $(f_3)$  resulta em

$$|f(v_n + u) - f(v_n)| \leq \int_0^1 |f'(v_n + tu)u| dt \leq C|u|W_n.$$

Assim, para  $s > 1$

$$|f(v_n + u) - f(v_n) - f(u)|^s \leq C|u|^s W_n^s C|u|W_n + C|f(u)|^s.$$

Definindo,

$$\tilde{Z}_n := C|u|^s W_n^s + C|f(u)|^s$$

e

$$\tilde{Z} := C|u|^s W^s + C|f(u)|^s$$

temos

$$\tilde{Z}_n(x) \rightarrow \tilde{Z}(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Mais uma vez, utilizando os argumentos encontrados no Lema 2.4.5, existem  $\alpha > \alpha_0$  e  $s, t > 1$  tais que  $W^s, W_n^s \in L^t(\mathbb{R}^2)$  e  $(W_n^s)$  é limitada em  $L^t(\mathbb{R}^2)$ . Usando argumentos semelhantes que foi feito no item (a) é possível mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Z}_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Z} dx.$$

Portanto, o item (b) segue diretamente da aplicação do Teorema da Convergência Generalizada de Lebesgue. Vamos justificar o item (d), pois o item (c) é uma consequência imediata do item (a).

**Justificativa (c):** Seja  $\phi \in E_\lambda/\{0\}$  dada arbitrariamente e realizando algumas manipulações algébricas segue que

$$\begin{aligned} |[I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)]\phi| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(v_n) - f(u)| |\phi| dx \\ &\leq C|f(u_n) - f(v_n) - f(u)|_s \|\phi\|_\lambda. \end{aligned}$$

Pelo item (c) temos

$$|[I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)]\phi| \leq o_n(1) \|\phi\|_\lambda,$$

com isso mostramos o item (d), e portanto, mostramos que todas as afirmações são verdadeiras.

As afirmações (c) e (d) mostram que  $(v_n)$  é uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon} - I_{\lambda,\epsilon}(u)}$  para o funcional  $I_\lambda$  considerado no Lema 2.4.4.

Observe que

$$\|v_n\|_\lambda^2 = I'_\lambda(v_n)v_n + \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx + o_n(1). \quad (2.69)$$

**Afirmção 2.4.8** A sequência  $(v_n)$  verifica

$$\|v_n\|_\lambda \rightarrow 0.$$

A justificativa desta afirmação pode ser feita usando argumentos semelhantes aos que foram feitos na demonstração do Lema 2.3.11. Suponha por contradição que o limite acima não ocorra, então a menos de subsequência

$$\|v_n\|_\lambda^2 \rightarrow L_\lambda > 0. \quad (2.70)$$

Pela estimativa (2.50) com  $l > 2$  segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l (e^{\alpha|v_n|^2} - 1) dx. \quad (2.71)$$

Como feito anteriormente, podemos escolher  $s > 1$  e  $s$  suficientemente próximo de 1 tal que  $\alpha ms < 4\pi$ , logo, de (2.71) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2 dx + C|v_n|_{lt}^l |e^{\alpha|v_n|^2} - 1|_s, \quad (2.72)$$

onde  $t$  e  $s$  são conjugados.

Usando algumas manipulações algébricas envolvendo a desigualdade de Trundiger-Moser como feito na demonstração do Lema 2.4.1 da primeira geometria do passo da montanha resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq C_1\epsilon\|v_n\|_\lambda^2 + C_2|v_n|_{lt}^l. \quad (2.73)$$

Pelas imersões de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq C_1\epsilon\|v_n\|_\lambda^2 + C_3\|v_n\|_\lambda^l. \quad (2.74)$$

De (2.69) e (2.74) segue que

$$(1 - C_1\epsilon)\|v_n\|_\lambda^2 \leq o_n(1) + C_3\|v_n\|_\lambda^l. \quad (2.75)$$

Então segue de (2.70) e (2.75) que  $L_\lambda > \delta_0 > 0$ , independente de  $\lambda$ , onde  $\delta_0 = (C_4/C_2)^{\frac{1}{l-2}}$  e  $C_4 = 1 - C_1\epsilon$ .

Agora observe que de (2.69) e (2.73)

$$C_4\|v_n\|_\lambda^2 \leq o_n(1) + C_2|v_n|_{lt}^l. \quad (2.76)$$



Logo,

$$C_4/C_2 L_\lambda^2 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{lt}^l,$$

ou ainda,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt} dx \geq \tilde{\delta}_0 > 0, \quad (2.77)$$

onde  $\tilde{\delta}_0 = (\delta_0^2 C_4 / C_2)^2 > 0$ .

Por outro lado, pelo Lema 2.4.4, existem  $\lambda^* > 0$  e  $R > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^{lt} dx < \tilde{\delta}_0/2, \quad \lambda \geq \lambda_*. \quad (2.78)$$

Portanto, de (2.77) e (2.78) resulta em

$$\tilde{\delta}_0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt} dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^{lt} dx + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^{lt} dx < \tilde{\delta}_0/2,$$

obtendo assim, um absurdo. Então podemos concluir que existe  $\lambda_* > 0$  tal que  $\lambda \geq \lambda_*$  a sequência  $(u_n)$  admite uma subsequência convergente. ■

Agora mostraremos que o problema penalizado (2.3) possui solução não trivial. Seja  $c_{\lambda,\epsilon}$  o nível do passo da montanha. Pelo Lema 2.4.6 existe  $\nu_* > 0$  tal que

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta - 2)4\pi}{2\theta\alpha_0}, \quad \text{para } \nu \geq \nu_*, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall \epsilon > 0.$$

Pela Proposição 2.4.7 existe  $\lambda_*$  tal que  $\lambda \geq \lambda_*$  o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ . Usando o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], podemos concluir que existe  $u_\epsilon \in E_\lambda$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = c_{\lambda,\epsilon} > 0 \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = 0$$

## 2.4.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1

Analogamente ao caso  $N = 3$ , para  $\lambda \geq \lambda^*$  e  $\nu \geq \nu_*$  existe uma solução  $u_\epsilon \in E_\lambda$  não trivial do problema (2.3), ou seja,  $u_\epsilon$  verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_\epsilon v] dx + \frac{1}{\epsilon} \langle P(u_\epsilon), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_\epsilon) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Praticamente todo início desta seção é semelhante ao que foi feita no caso  $N = 3$ . Faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde  $c_n = c_{\lambda, \epsilon}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  sabemos que existe  $u_n \in E_\lambda$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_n v] dx + n \langle P(u_n), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda. \quad (2.79)$$

A sequência de soluções  $(u_n)$  é não negativa e cumpre

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Isso mostrar que  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Logo, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tal que a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^2), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

Fazendo os mesmos cálculos que foram feitos na demonstração do Lema 2.3.10 é possível mostrar que  $P(u) = 0$ , ou seja,  $u \in \mathbb{K}$ .

Observe que

$$\langle P(u_n), u_n - u \rangle = \langle P(u_n) - P(u), u_n - u \rangle \geq 0$$

Então usando este fato e escolhendo  $v = u_n - u$  e substituindo em (2.79), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla (u_n - u) + (1 + \lambda V(x))u_n (u_n - u)] dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) (u_n - u) dx. \quad (2.80)$$

Da mesma forma que foi feito para o caso  $N = 3$ , temos também

**Lema 2.4.9** Para  $\lambda \approx +\infty$ ,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

**Demonstração.** Suponha por contradição

$$u_n \not\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|^2 = L_\lambda > 0. \quad (2.81)$$

Utilizando os mesmos argumentos que foi feito no item (b) da Proposição 2.4.7 podemos concluir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(v_n) - f(u)]v_n dx \right| = 0,$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Note que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u)](u_n - u) dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u)(u_n - u) dx$$

e usando o resultado anterior a expressão acima fica

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v_n dx + o_n(1). \quad (2.82)$$

Novamente, usando os mesmos argumentos encontrados na demonstração da Afirmação 2.3.12 é possível mostrar

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u)v_n dx \rightarrow 0.$$

Conseqüentemente, a expressão (2.82) fica

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx + o_n(1). \quad (2.83)$$

Substituindo (2.83) em (2.80) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n] dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n + o_n(1) \quad (2.84)$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n] dx = \langle u_n, v_n \rangle_\lambda = \|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1). \quad (2.85)$$

Combinando (2.84) e (2.85) obtemos

$$\|v_n\|^2 \leq \|v_n\|_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx + o_n(1) \quad (2.86)$$

Neste momento usaremos os mesmos argumentos que foram feitos na demonstração da Proposição 2.4.7. Temos para algum  $l > 2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq \beta \|v_n\|_2^2 + C_1 \|v_n\|_l^l,$$

onde  $\beta$  é dado pela estimativa (2.50) e  $C_1$  constante positiva. Pelas imersões de Sobolev temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \leq C_2 \beta \|v_n\|^2 + C_3 \|v_n\|^l.$$

Com essas informações, a desigualdade (2.86) fica

$$(1 - C_2\beta)||v_n||^2 \leq C_3||v_n||^l + o_n(1).$$

Tomando o limite quando  $n$  tende ao infinito na última desigualdade, podemos concluir que  $L_\lambda > \omega_0 > 0$ , independente de  $\lambda$ , onde  $\omega_0 = (C_4/C_3)^{\frac{1}{l-2}}$  e  $C_4 = 1 - C_2\beta$ .

Agora note que a desigualdade (2.86) implica

$$(1 - C_2\beta)||v_n||^2 \leq C_2|v_n|_l^l + o_n(1).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na desigualdade acima obtemos

$$C_4/C_2L_\lambda \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_l^l,$$

ou ainda,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l dx \geq \widetilde{\omega}_0 > 0, \quad (2.87)$$

onde  $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 C_4/C_2 > 0$ .

Por outro lado, fazendo as mesmas manipulações algébricas que foi feito no Lema 2.4.4, é possível mostrar para a sequência  $(v_n)$  que existem  $\lambda^* > 0$  e  $R > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^l dx < \widetilde{\omega}_0/2, \quad \lambda \geq \lambda_*. \quad (2.88)$$

Portanto, de (2.87) e (2.88)

$$\widetilde{\omega}_0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^l dx + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^l dx < \widetilde{\omega}_0/2,$$

obtendo assim, um absurdo. Então podemos concluir que existe  $\lambda_*$  tal que  $\lambda \geq \lambda_*$  a sequência  $(u_n)$  converge para  $u$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ .

■

Utilizando os mesmos passos feitos para o caso  $N = 3$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u(w - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(w - u) dx \quad (2.89)$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Com isso mostramos que o Problema (2.1) tem uma solução não trivial. Para concluirmos a demonstração do Teorema 2.1.1 para  $N = 2$  falta mostrar a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.10** *Seja  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $(u_n)$  uma solução de (2.89). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

*Além disso,*

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u)(v - u) dx, \quad (2.90)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Demonstração.** Do estudo feito até aqui podemos assumir

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda}^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

De tal informação, concluímos que  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Consequentemente existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2)$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^2), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

A justificativa (i) segue das mesmas ideias encontradas na Proposição 1.3.10. Para mostrar (ii) utilizamos a mesma argumentação da demonstração da Proposição 2.3.13, isto é, garantimos a convergência

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.91)$$

onde exploramos as ideias contidas na demonstração do Lema 2.4.9. Em seguida, deduzimos

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + o_n(1), \quad (2.92)$$

como foi feito na demonstração do Lema 2.4.9, onde  $v_n = u_n - u$ . Assim, combinando (2.91) e (2.92) concluímos

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$$

finalizando (ii). Os demais itens (iii) e (iv) segue diretamente da demonstração da Proposição 2.3.13.

■

# Capítulo 3

## Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte II

### 3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções para a seguinte desigualdade variacional: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E; v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  com parte positiva não trivial e  $\text{supp } \varphi^+ \subset \Omega$ ,  $\lambda > 0$  é um parâmetro e  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando as seguintes condições:

$$(V_1) \quad V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

(V<sub>2</sub>)  $\Omega := \text{int}(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$  é um subconjunto aberto conexo limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave.

Assumimos as seguintes condições para a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : Se  $N \geq 3$ ,  $f$  tem a forma

$$f(t) = \mu |t|^{q-2} t + |t|^{2^*-2} t, \quad (3.2)$$

onde  $2^* = 2N/(N - 2)$  e  $2 < q < 2^*$ .

Se  $N = 2$ ,  $f$  é uma de classe de  $C^1$  e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

e verifica

$$(f_1) \quad \frac{f(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } |t| \rightarrow 0;$$

( $f_2$ ) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s) ds \leq f(t)t, \quad t \neq 0;$$

( $f_3$ ) Existem  $C > 0$  tal que

$$|f'(t)| \leq Ce^{\alpha_0 t^2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

( $f_4$ ) Existem  $p > 2$  e uma constante  $\nu > 0$  tais que

$$f(t) \geq \nu t^p, \quad \forall t \geq 0.$$

Supomos ainda sem perda de generalidade  $f(t) = 0$ , para  $t \leq 0$ . Como mencionamos na Introdução, fomos motivados pelo trabalho de Alves & Côrrea [5]. Os autores combinaram métodos variacionais em conjunto com Princípio Variacional de Ekeland [23] e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55]. Aqui além garantirmos uma solução não trivial do problema (3.1) em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 2$ , adotamos uma metodologia bastante diferente da abordada em [5]. No nosso estudo utilizamos o método de penalização.

O principal resultado do Capítulo 3 é o teorema que enunciaremos a seguir

**Teorema 3.1.1** *Assuma que  $V$  satisfaz  $(V_1) - (V_2)$  e  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$  se  $N = 2$ . Então existem  $\lambda_* > 0$ ,  $\mu_* > 0$ ,  $\nu_* > 0$  e  $\rho > 0$  tais que se  $\|\varphi\| < \rho$ , o problema (3.1) tem solução  $u_\lambda$  não trivial para  $\lambda \geq \lambda_*$ ,  $\mu \geq \mu_*$  e  $\nu \geq \nu_*$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$  tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , podemos extrair uma subsequência  $(\lambda_n)$  tal que a sequência  $(u_{\lambda_n})$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  que verifica  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u)u(v - u) dx,$$



para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Na demonstração deste teorema utilizamos todo estudo dos capítulos anteriores, algumas ideias encontradas em Alves & Côrrea [3] e o Lema de Concentração e Compacidade de Lions, o qual é uma consequência imediata de um resultado devido a Lions [40, 41, 42], para mais detalhes ver [4].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, introduzimos alguns resultados preliminares. Na Seção 3.2, demonstraremos o Teorema 3.1.1 para caso  $N \geq 3$ . Inicialmente, modificamos a desigualdade variacional (3.1), ou seja, realizamos um truncamento na não-linearidade. Em seguida penalizamos a desigualdade variacional modificada e iremos mostrar que o problema penalizado possui solução não trivial. Para isso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição  $(PS)_c$  para alguns valores de  $c$ . Em seguida, trabalhamos com a sequência de soluções do problema penalizado combinado com o operador de penalização para obtermos, a menos de subsequência, uma convergência forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Através desta convergência, garantimos uma solução não trivial para a desigualdade variacional modificada. Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções  $(u_\lambda)$  da desigualdade variacional modificada. Logo após, mostramos que para  $\lambda$  suficientemente grande uma solução  $u_\lambda$  da desigualdade variacional modificada é solução da desigualdade variacional (3.1). Por fim, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções da desigualdade variacional (3.1) o que de fato demonstra o Teorema 3.1.1 para o caso  $N \geq 3$ . Na Seção 3.3, o objetivo é provar o Teorema 3.1.1 para o caso  $N = 2$ . Seguimos os mesmos passos da Seção 3.2 com os devidos ajustes e faremos uso de uma versão da desigualdade de Trudinger & Moser em todo  $\mathbb{R}^2$ , devido a Cao [17].

**Lema 3.1.2** *Seja  $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  uma sequência limitada satisfazendo*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \xi \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

onde  $\nu$  e  $\xi$  são medidas finitas não negativas em  $\mathbb{R}^N$ . Então existem seqüências  $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$  e  $(\nu_n) \subset [0, \infty)$  satisfazendo

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup |u|^{2^*} + \sum_{i=1}^{+\infty} \nu_i \delta_{x_i} = \nu,$$

com

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n^{2/2^*} < \infty \quad (3.3)$$

e

$$\xi(x_n) \geq S \nu_n^{2/2^*} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

onde  $\delta_i$  é a medida de Dirac e  $S$  é a melhor contante de Sobolev já conhecida dos capítulos anteriores.

## 3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N \geq 3$

Nesta seção consideramos a existência de solução para a classe de desigualdades variacionais (3.1) da seguinte forma: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1}) (v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K},$$

onde o conjunto  $\mathbb{K}$  é o mesmo definido no Capítulo 2.

### 3.2.1 Desigualdade variacional modificada

Nesta seção adaptamos, para nosso caso, alguns argumentos encontrados em [3] e [21]. Fixando  $k = \max\{q/(q-2), 2\}$ , sem dificuldades podemos encontrar uma constante  $a > 0$  verificando  $f_+(a) = a/k$ . Por razões técnicas definimos também as funções  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$h(t) = \begin{cases} f_+(t), & t \leq a \\ \frac{t}{k}, & t \geq a \end{cases}$$

e

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Seja  $\Omega'$  um aberto conexo limitado com fronteira suave contendo  $\bar{\Omega}$ . Usando a função característica de  $\Omega'$ , definimos as seguintes funções  $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g(x, t) = \chi_{\Omega'}(x)f_+(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

e

$$G(x, t) = \chi_{\Omega'}(x)F_+(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))H(t),$$

onde

$$F_+(t) = \int_0^t f_+(s)ds.$$

Nosso interesse nesse momento é estudar a existência de solução não trivial para a seguinte desigualdade variacional modificada: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u(v - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \quad (3.5)$$

**Observação 3.2.1** *Se  $u$  é uma solução de (3.5) não negativa verificando*

$$u(x) \leq a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$$

*então  $u$  é uma solução do problema (3.1).*

De fato, se  $x \in \Omega'$  temos  $\chi_{\Omega'}(x) = 1$  e assim,

$$g(x, u(x)) = f(u(x)) = \mu u(x)^{q-1} - u(x)^{2^*-1}.$$

Se  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$ , então  $\chi_{\Omega'}(x) = 0$  e assim,

$$g(x, u(x)) = h(u(x)) = f(u(x)) = \mu u(x)^{q-1} - u(x)^{2^*-1},$$

pois  $h(u(x)) = f(u(x))$ , quando  $0 \leq u(x) \leq a$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega'$ .

Antes de continuarmos com nosso propósito, mostraremos algumas propriedades envolvendo a função  $g$ .

**Afirmção 3.2.2** *Como  $a > 0$ , então as propriedades abaixo são verdadeiras:*

$$(g_1) \quad g(x, t) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \leq 0;$$

$$(g_2) \quad \frac{g(x, t)}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N;$$

(g<sub>3</sub>) Dado  $\beta > 0$  existe  $C_\beta > 0$  tal que

$$|g(x, t)| \leq \mu\beta|t| + C_\beta|t|^{2^*-1}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

e conseqüentemente,

$$|G(x, t)| \leq \mu\frac{\beta}{2}|t|^2 + C_\beta|t|^{2^*}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R};$$

(g<sub>4</sub>) Para todo  $x \in \Omega'$  e  $t > 0$  tem-se

$$0 < qG(x, t) \leq g(x, t)t;$$

(g<sub>5</sub>) Para todo  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$  e  $t > 0$  tem-se

$$0 < 2G(x, t) \leq g(x, t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Sem maiores dificuldades é possível mostrar as assertivas (g<sub>1</sub>) – (g<sub>4</sub>), por isso vamos mostrar apenas (g<sub>5</sub>). Inicialmente, observemos que

$$g(x, t) = h(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$$

e se  $0 < t \leq a$  temos

$$g(x, t) = h(t) = f(t).$$

Agora, note que

$$2G(x, t) = 2 \int_0^t f(s) ds \leq q \int_0^t f(s) ds \leq f(t)t = h(t)t.$$

Por outro lado,

$$h(t)t = f(t)t = \frac{f(t)}{t}t^2 \leq \frac{f(a)}{a}t^2 = \frac{1}{k}t^2 \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Logo, para  $0 < t \leq a$

$$0 < 2G(x, t) \leq g(x, t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2. \quad (3.6)$$

Vamos agora considerar  $t > a$ . Neste caso  $h(t) = t/k$  donde segue

$$2G(x, t) = 2 \int_0^t h(s) ds = 2 \int_0^t \frac{h(s)}{s} s ds = 2 \left( \int_0^a \frac{h(s)}{s} s ds + \int_a^t \frac{h(s)}{s} s ds \right),$$

mas

$$\int_0^a \frac{h(s)}{s} s ds = \int_0^a \frac{f(s)}{s} s ds \leq \int_0^a \frac{f(a)}{a} s ds$$

e

$$\int_a^t \frac{h(s)}{s} s ds = \int_a^t \frac{1}{k} s ds = \int_a^t \frac{f(a)}{a} s ds$$

então,

$$2G(x, t) \leq 2 \left( \int_0^a \frac{f(a)}{a} s ds + \int_a^t \frac{f(a)}{a} s ds \right) = 2 \int_0^t \frac{f(a)}{a} s ds = \frac{f(a)}{a} t^2 = \left( \frac{1}{k} t \right) t = h(t)t.$$

Observe também

$$h(t)t = \frac{1}{k} t^2 \leq \frac{1}{k} (1 + \lambda V(x)) t^2.$$

Portanto, se  $t > a$

$$0 < 2G(x, t) \leq g(x, t)t \leq \frac{1}{k} (1 + \lambda V(x)) t^2. \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7)

$$0 < 2G(x, t) \leq g(x, t)t \leq \frac{1}{k} (1 + \lambda V(x)) t^2 \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \quad \text{e } t > 0$$

com isso justificamos ( $g_5$ ).

Como fizemos no Capítulo 2, aqui também utilizaremos o método de penalização, isto é, procuramos soluções não triviais para a seguinte classe de equações elípticas

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_{\Omega} = g(x, u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3.8)$$

Recordamos que  $u$  é uma solução fraca de (3.8) se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)v dx, \quad \forall v \in E_{\lambda}, \quad (3.9)$$

onde  $\epsilon > 0$  é o parâmetro de penalização, enquanto  $\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx$  é o termo de penalização.

As soluções fracas da equação penalizada (3.8) podem ser encontradas como pontos críticos do funcional  $I_{\lambda, \epsilon} : E_{\lambda} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} [(\varphi - u)^+]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx,$$

o qual está bem definido e é de classe  $C^1$  sobre o espaço  $E_{\lambda}$  (é o mesmo do Capítulo 2) com

$$I'_{\lambda, \epsilon}(u)v = \langle u, v \rangle_{\lambda} - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E_{\lambda}$$

ou equivalentemente,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u)^+ v dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)v dx \quad \forall u, v \in E_{\lambda}.$$

O próximo lema mostra que funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  verifica a geometria do passo da montanha.

**Lema 3.2.3** (a) *Existem constantes  $r, \rho > 0$ , as quais são independentes de  $\lambda$  e  $\epsilon$ , tais que*

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho \quad \text{para} \quad \|u\|_{\lambda} = r;$$

(b) *Existe  $e \in H^1(\mathbb{R}^N)$  com  $\|e\|_{\lambda} > r$  e  $I_{\lambda,\epsilon}(e) < 0$ .*

**Demonstração.** De  $(g_3)$ , fixado  $\beta > 0$  existe  $C_{\beta} > 0$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 - \frac{\mu\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - C_{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Utilizando as imersões de Sobolev existem constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 - C_1 \beta \|u\|_{\lambda}^2 - C_2 \|u\|_{\lambda}^2,$$

ou ainda,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \left( \frac{1}{2} - C_1 \beta \right) \|u\|_{\lambda}^2 - C_2 \|u\|_{\lambda}^2.$$

Fixando  $\beta$  suficientemente pequeno de maneira que  $1/2 - C_1 \beta > 0$ , existem  $r$  e  $\rho$  positivos tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho > 0, \quad \text{para} \quad \|u\| = r,$$

mostrando a primeira geometria. Agora, observe que

$$\int_{\Omega} [(\varphi - \varphi^+)^+]^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \|\varphi^+\|_{\lambda} = \|\varphi^+\|.$$

Logo,

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) \leq \|\varphi^+\|^2 \leq \|\varphi\|^2.$$

Como tomamos  $\|\varphi\|$  suficientemente pequena em relação  $\rho$ , por hipótese, então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho.$$

Sabemos que  $\text{supp } \varphi^+ \subset \Omega$ , assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, t\varphi^+) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(t\varphi^+) dx = \frac{\mu t^q}{q} \int_{\Omega'} |\varphi^+|^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega'} |\varphi^+|^{2^*} dx$$

para  $t > 1$ . Com essas informações asseguramos que

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) = \frac{t^2}{2} \|\varphi^+\|_\lambda^2 - \frac{t^q \mu}{q} \int_{\Omega'} |\varphi^+|^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega'} |\varphi^+|^{2^*} dx.$$

Sendo  $2 < q < 2^*$ , obtemos  $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Assim, tomando  $t_*$  suficientemente grande e denotando  $w = (1 + t_*)\varphi^+$  tem-se

$$I_{\lambda,\epsilon}(w) < I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho \leq I_{\lambda,\epsilon}(u), \quad \text{com} \quad \|u\|_\lambda = r$$

e

$$\|\varphi^+\|_\lambda < r < \|w\|_\lambda,$$

demonstrado o lema. ■

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], garantimos a existência de uma sequência  $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$  para  $I_{\lambda,\epsilon}$ , isto é, uma sequência  $(u_n)$  verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \rightarrow 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = w\}.$$

**Lema 3.2.4** *Existem  $\tau > 0$  e  $\mu_* = \mu_*(\tau) > 0$  tais que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } \mu \geq \mu_*.$$

Omitiremos a demonstração do Lema 3.2.4, pois a mesma segue os mesmos procedimentos feitos na demonstração do Lema 2.3.2.

**Lema 3.2.5** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então  $(u_n)$  é limitada.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Antes de tudo, note que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, u_n)u_n - qG(x, u_n)) dx. \end{aligned}$$

Como argumentamos na demonstração do Lema 2.3.3,

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 dx + \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n dx \geq \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \varphi dx.$$

Observe também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx \geq \int_{\Omega'} g(x, u_n)u_n dx$$

e pelas observações  $(g_4)$  e  $(g_5)$

$$\frac{1}{q} \int_{\Omega'} (g(x, u_n)u_n - qG(x, u_n)) dx \geq 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx \leq \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{2k} \|u_n\|_\lambda^2.$$

Com essas informações e feitas manipulações algébricas podemos concluir que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2k} \right] \|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{q\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \varphi dx.$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2k} \right] \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 - \frac{C}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 \|u_n\|_\lambda. \quad (3.10)$$

Por outro lado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1) \|u_n\|_\lambda, \quad n \geq n_0. \quad (3.11)$$

Das condições (3.10), (3.11) e recordando que  $k = \max\{q/(q-2), 2\}$  deduzimos

$$\left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2k} \right] \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + \frac{1}{q\epsilon} |\varphi|_2^2 + (o_n(1) + \frac{C}{q\epsilon} |\varphi|_2^2) \|u_n\|_\lambda$$

para  $n \geq n_0$ , o que garante que a sequência  $(u_n)$  é limitada.



■

Aqui, listamos todos os lemas encontrados no Capítulo 2 com relação ao comportamento das sequências  $(PS)_c$ .

**Lema 3.2.6** *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas, ou seja, a  $(u_n^+)$  é uma sequência  $(PS)_c$ .*

**Lema 3.2.7** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  então a mesma verifica*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \left(\frac{2q}{q-2}\right)c.$$

**Lema 3.2.8** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então dado  $\delta > 0$  existe  $R > 0$  tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \delta$$

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então a mesma é limitada. Assim, denotemos

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\lambda.$$

Fixemos um  $R > 0$  tal que  $\Omega' \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$  e seja  $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  uma função satisfazendo

$$0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N; \quad \eta(x) = 0, \quad \forall x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}}(0); \quad \eta(x) = 1, \quad \forall x \in B_R^c(0) \text{ e } |\nabla \eta| \leq \frac{M}{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sem maiores dificuldades, é possível mostrar que  $(\eta u_n) \subset E_\lambda$  e que a mesma é limitada em  $E_\lambda$ . Desta forma, segue

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)(\eta u_n) = o_n(1)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + (1 + \lambda V(x))\eta u_n^2] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \eta u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\eta u_n) dx = o_n(1)$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + (1 + \lambda V(x))\eta |u_n|^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\eta u_n dx = o_n(1)$$

pois

$$\int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \eta u_n dx = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla \eta \nabla u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) \eta |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) \eta u_n dx + o_n(1)$$

Utilizando a desigualdade ( $g_5$ ) e as propriedades da função  $\eta$  podemos concluir

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c(0)} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\overline{B_R(0)}} u_n \nabla \eta \nabla u_n dx + \int_{B_{R/2}^c(0)} (1 + \lambda V(x)) \eta |u_n|^2 dx \\ \leq \frac{1}{k} \int_{B_{R/2}^c(0)} (1 + \lambda V(x)) \eta |u_n|^2 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Sendo  $k > 2$ ,

$$\int_{B_{R/2}^c(0)} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_{R/2}^c(0)} (1 + \lambda V(x)) \eta |u_n|^2 dx \leq \int_{\overline{B_R(0)}} |u_n| |\nabla \eta| |\nabla u_n| dx + o_n(1).$$

Mais uma vez, usando as propriedades da função  $\eta$  e após alguns cálculos segue-se que

$$\int_{B_R^c(0)} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R^c(0)} (1 + \lambda V(x)) \eta |u_n|^2 dx \leq \frac{M}{R} \int_{\overline{B_R(0)}} |u_n| |\nabla \eta| |\nabla u_n| dx + o_n(1).$$

Agora, usaremos a desigualdade de Hölder para deduzimos

$$\int_{B_R^c(0)} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{B_R^c(0)} (1 + \lambda V(x)) |u_n|^2 dx \leq C \frac{M}{R} + o_n(1),$$

onde  $C$  é uma constante positiva. Logo,

$$\int_{B_R^c(0)} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{B_R^c(0)} |u_n|^2 dx \leq C \frac{M}{R} + o_n(1),$$

Tomando  $R$  suficientemente grande e o limite em  $n$  concluímos a demonstração. ■

**Proposição 3.2.9** *Existe  $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$  tal que  $I_{\lambda, \epsilon}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda, \epsilon}}$  para qualquer  $c_{\lambda, \epsilon} \in (0, \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau)$  para todo  $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ , onde  $\tau$  foi dado no Lema 3.2.4.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma seqüência  $(PS)_{c_{\lambda, \epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$ , isto é,

$$I_{\lambda, \epsilon}(u_n) \rightarrow c_{\lambda, \epsilon} \text{ e } I'_{\lambda, \epsilon}(u_n) \rightarrow 0.$$

Suponha sem perda de generalidade que a sequência  $(u_n)$  é não negativa. Sabemos que a mesma é limitada. Então para alguma subsequência existe  $u \in E_\lambda$  tal que podemos assumir os seguintes fatos:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

Com a realização de alguns cálculos é possível mostrar que  $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$ , e assim,  $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$ .

**Afirmção 3.2.10** *A sequência  $(v_n)$  obtida aplicando o Lema 3.1.2 para a sequência  $(u_n)$  verifica  $v_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

De fato, seja  $\psi_\beta = \psi((x - x_j)/\beta)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e para todo  $\beta > 0$ , onde  $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$  tal que  $\psi = 1$  em  $B_1(0)$ ,  $\psi = 0$  sobre  $B_2^c(0)$  e  $|\nabla\psi| \leq 2$ , com  $0 \leq \psi \leq 1$ . Sem dificuldades, é possível mostrar que a sequência  $(\psi_\beta u_n) \subset E_\lambda$  é limitada em  $E_\lambda$ .

Assim,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)(\psi_\beta u_n) = o_n(1)$$

ou também,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n) + (1 + \lambda V(x))(\psi_\beta u_n^2)] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) \psi_\beta u_n dx = o_n(1)$$

Pela definição da função  $\psi_\beta$  e da condição de crescimento da função  $g$  podemos observar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) \psi_\beta u_n dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \psi_\beta dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \psi_\beta dx.$$

Desta desigualdade,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) \psi_\beta u_n^2 dx &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \psi_\beta dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \psi_\beta dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \psi_\beta dx. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  nesta última expressão e usando as definições das medidas  $\nu$  e  $\xi$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - M_n) \leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_\beta dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta d\nu - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta d\xi - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) \psi_\beta u^2 dx. \quad (3.12)$$

onde adotamos por simplicidade

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx$$

e

$$M_n = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n \, dx.$$

Agora, vamos analisar o seguinte limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ . Note que

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx = \int_{B(x_j, 2\beta)} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx,$$

logo

$$|L_n| \leq \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla u_n| |\nabla \psi_\beta| u_n \, dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder,

$$|L_n| \leq \|\nabla u_n\|_2 \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \|u_n\| \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2},$$

ou seja,

$$|L_n| \leq M \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2},$$

onde  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|$ , pois  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n| \leq M \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Usando, mais uma vez, a desigualdade de Hölder com expoentes  $N/(N-2)$  e  $N/2$  segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n| \leq M \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |u|^{2^*} \, dx \right)^{1/2^*} \left( \int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^N \, dx \right)^{1/N}.$$

Agora, observe por uma mudança de variável que

$$\int_{B(x_j, 2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^N(x) \, dx = \int_{B(0,2)} |\nabla \psi_\beta|^N(z\beta + x_j) \beta^N \, dz = \int_{B(0,2)} |\nabla \psi|^N(z) \, dz$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue é possível mostrar que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{B(x_j, 2\beta)} |u|^{2^*} \, dx = 0.$$

De todo estudo feito, podemos garantir que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} L_n \right) = 0.$$

É possível mostrar também,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ \psi_{\beta} u_n dx \right) = 0.$$

Deste modo, tomando o limite quando  $\beta \rightarrow 0$  em (3.12) temos

$$\xi(x_j) \leq \nu_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Pelo Lema 3.1.2, temos  $\xi(x_j) \geq S\nu_i^{2/2^*}$  e por a desigualdade (3.13) segue que  $\nu_j \geq S\nu_i^{2/2^*}$ . Se  $\nu_j > 0$ , então temos

$$\nu_j \geq S^{N/2}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

o que implica que  $(\nu_j)$  é finita, pois  $(\nu_j)$  verifica (3.3).

Provaremos, que  $\nu_j = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Usando, mais uma vez, o fato que a sequência  $(u_n)$  é  $(PS)_{c_{\lambda, \epsilon}}$  temos

$$I_{\lambda, \epsilon}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda, \epsilon}(u_n) u_n \leq c_{\lambda, \epsilon} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n^2 dx \\ & + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, u_n) u_n - qG(x, u_n)) dx = o_n(1). \end{aligned}$$

Recordando os argumentos explorados na demonstração do Lema 3.10 podemos garantir que

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n^2 dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, u_n) u_n - qG(x, u_n)) dx \geq 0,$$

logo,

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \leq c_{\lambda, \epsilon} + o_n(1).$$

Observe que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta |\nabla u_n|^2 dx \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta |\nabla u_n|^2 dx \leq c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1).$$

Passando ao limite quando  $n \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima ficamos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta d\xi \leq c_{\lambda,\epsilon}.$$

Por fim, tomando o limite quando  $\beta \rightarrow 0$  nesta última desigualdade, concluímos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \xi(x_j) \leq c_{\lambda,\epsilon}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Sabemos  $\xi(x_j) \geq S\nu_j^{2/2^*}$ , se existe um  $\nu_{j_0}$  para alguma  $j_0 \in \mathbb{N}$ , então de (3.14) e (3.15) obtemos

$$c_{\lambda,\epsilon} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \xi(x_{j_0}) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) S\nu_{j_0}^{2/2^*} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) S(S^{N/2})^{2/2^*}$$

ou ainda,

$$c_{\lambda,\epsilon} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) S^{N/2}.$$

No entanto, por hipótese

$$c_{\lambda,\epsilon} \in \left(0, \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau\right)$$

o que é uma contradição, portanto  $\nu_j = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$  o que justifica a afirmação.

Da Afirmação 3.2.10 tem se  $|u_n|^{2^*} \rightarrow |u|^{2^*}$  em  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi |u_n|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi |u|^{2^*} dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (3.16)$$

donde podemos concluir que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{loc}^{2^*}(\mathbb{R}^N). \quad (3.17)$$

Para justificarmos este resultado utilizaremos o Lema Brézis & Lieb, ver [38], e o limite (3.16). Dado um  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  aberto limitado, nosso objetivo é mostrar que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{2^*}(\Theta).$$

Seja  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$  com  $\psi = 1$  em  $\Theta$ . Sabendo que

$$|u_n|^{2^*} \psi \rightarrow |u|^{2^*} \psi \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e por (3.16),  $|u_n|^{2^*} \psi$  converge para  $|u|^{2^*} \psi$  em norma no espaço  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , garantimos

$$\| |u_n|^{2^*} \psi - |u|^{2^*} \psi \|_1 \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Note que

$$\int_{\Theta} ||u_n|^{2^*} - |u|^{2^*}| dx = \int_{\Theta} ||u_n|^{2^*} \psi - |u|^{2^*} \psi| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|^{2^*} \psi - |u|^{2^*} \psi| dx$$

logo, por (3.18)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Theta} |u_n|^{2^*} dx = \int_{\Theta} |u|^{2^*} dx.$$

Por este limite e o fato que

$$u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Theta$$

segue do Lema de Brézis & Lieb que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{2^*}(\Theta).$$

Enfim, mostraremos agora que  $u_n \rightarrow u$  em  $E_\lambda$ . Observe que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = \|u_n\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1).$$

Note que

$$\|u_n\|_\lambda^2 = I'_{\lambda, \epsilon}(u_n)u_n + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx$$

e

$$-\langle u_n, u \rangle_\lambda = -I'_{\lambda, \epsilon}(u_n)u - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx$$

Com estas informações e recordando a justificativa da Afirmação 2.3.5 podemos concluir que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx + o_n(1).$$

**Afirmação 3.2.11** *Vale os seguintes limites:*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)u dx;$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Supondo verdadeira a Afirmação 3.2.11, obtemos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = o_n(1)$$

logo,  $u_n \rightarrow u$  em  $E_\lambda$  mostrando a condição (PS). Vamos justificar a Afirmação 3.2.11.

Começamos por (i). Dado  $\delta > 0$ , considere  $R > 0$  como no Lema 3.2.8 e

$$I_{n,1} = \int_{B_R(0)} |g(x, u_n)u_n - g(x, u)u| dx \quad \text{e} \quad I_{2,n} = \int_{B_R^c(0)} |g(x, u_n)u_n - g(x, u)u| dx$$

utilizamos estas notações para simplificar os cálculos na demonstração desta Afirmação.

Da propriedade ( $g_3$ ), obtemos

$$|g(x, t)t| \leq \mu|t|^2 + C_\beta|t|^{2^*}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Sabemos que a imersão  $E_\lambda \hookrightarrow L^s(B_R(0))$ , para  $2 \leq s < 2^*$ , é compacta. Assim, de (3.17) podemos concluir que a imersão

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(B_R(0)), \quad \text{para } 2 \leq s \leq 2^*,$$

é compacta. Desta forma, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,1} = 0. \quad (3.19)$$

Por outro lado, usando que  $\Omega' \subset B_R(0)$ , deduzimos

$$|g(x, t)t| \leq \frac{1}{k}|t|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^2 dx + \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx + \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , para  $R$  suficientemente grande

$$\int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx < \frac{\delta}{2k}.$$

Pelo Lema 3.2.8, tomando o limite superior quando  $n \rightarrow \infty$ , ficamos com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \frac{\delta}{2k}.$$



Consequentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,2} < \delta, \quad \forall \delta > 0.$$

isto implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,1} = 0. \quad (3.20)$$

Desta forma, de (3.19) e (3.20) mostramos o que queríamos, ou seja, (i). A justificativa de (ii) segue os mesmos passos dados na demonstração de (i). ■

De Todo estudo feito até aqui, podemos concluir que o problema penalizado (3.8) possui solução não trivial. Este resultado segue diretamente do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8].

### 3.2.2 Existência de solução para a desigualdade variacional modificada

Para  $\lambda \geq \lambda_*$  e  $\mu \geq \mu_*$  fixados existe uma solução  $u_\epsilon \in E_\lambda$  não trivial do problema (3.8), ou seja,  $u_\epsilon$  verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_\epsilon v] dx + \frac{1}{\epsilon} \langle P(u_\epsilon), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\epsilon) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Mais uma vez, faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde  $c_n = c_{\lambda,\epsilon}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  sabemos que existe  $u_n \in E_\lambda$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_n v] dx + n \langle P(u_n), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda. \quad (3.21)$$

Analogamente ao que foi feito no Lema 3.2.5, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  de soluções é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Diante disso, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  e a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq s < 2^*.$$

**Afirmação 3.2.12** *A sequência de funções  $(u_n)$  é não negativa.*

De fato, considere  $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$  e  $u_n^- = \min\{u_n, 0\}$  temos que  $u_n = u_n^+ + u_n^-$ . Substituindo  $v$  por  $u_n^-$  em (3.21) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla u_n^- + (1 + \lambda V(x)) u_n u_n^-] dx + n \langle P(u_n), u_n^- \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n^- dx$$

Pela definição da  $g$  e algumas manipulações algébricas temos

$$\|u_n^-\|_\lambda^2 + n \langle P(u_n), u_n^- \rangle = 0$$

ou seja,

$$\|u_n^-\|_\lambda^2 = -n \langle P(u_n), u_n^- \rangle$$

mas

$$-n \langle P(u_n), u_n^- \rangle \leq 0$$

donde segue que

$$\|u_n^-\|_\lambda = 0.$$

Consequentemente,

$$\|u_n\|_\lambda = \|u_n^+\|_\lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que  $(u_n)$  é uma sequência de funções não negativas. Como

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

então segue  $u \geq 0$ .

Sem dificuldades (ver Lema 2.3.10), é possível mostrar que o operador de penalização associado ao problema (3.5) verifica  $P(u) = 0$ , isto é,  $u \in \mathbb{K}$ .

**Lema 3.2.13** *A seguinte convergência é válida*

$$u_n \rightarrow u \text{ em } E_\lambda.$$

**Demonstração.** A demonstração deste lema é semelhante a da Proposição 3.2.9, com pequenos ajustes. Primeiro de tudo, note que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = \|u_n\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1). \quad (3.22)$$

Sabemos que

$$\|u_n\|_\lambda^2 = I'_n(u_n)u_n - n\langle P(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx \quad (3.23)$$

e

$$-\langle u_n, u \rangle_\lambda = -I'_n(u_n)u + n\langle P(u_n), u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.22) deduzimos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = n\langle P(u_n), u - u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx + o_n(1). \quad (3.25)$$

Observe que

$$\langle P(u_n), u - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(u), u - u_n \rangle \leq 0.$$

Da observação acima e da expressão (3.25) obtemos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx + o_n(1). \quad (3.26)$$

Para garantirmos os seguintes limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)u dx \quad (3.27)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (3.28)$$

utilizaremos as mesmas ideias da justificativa da Afirmação 3.2.11. Para isso, precisamos que a sequência  $(u_n)$  verifique os mesmos resultados dados pelo Lema 3.2.8: dado  $\delta > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \delta. \quad (3.29)$$

e pela Afirmação 3.2.10 garantimos:

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^{2^*}(\mathbb{R}^N). \quad (3.30)$$

A justificativa (3.29), basta repetir todos os passos dados na demonstração do Lema 3.2.8, e para (3.30), inicialmente, precisamos da seguinte afirmação

**Afirmação 3.2.14** *Para toda  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , com  $\psi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , tem-se*

$$\langle P(u_n), \psi u_n - \psi \varphi^+ \rangle \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veja que

$$(\varphi - u_n)^+(x)(\varphi^+(x) - u_n(x)) \geq 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$$

implica que

$$(\varphi - u_n)^+(x)\psi(x)(\varphi^+(x) - u_n(x)) \geq 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.31)$$

pois,  $\psi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Assim, de (3.31) podemos concluir

$$-\int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+(\psi u_n - \psi \varphi^+) dx = \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+\psi(\varphi^+ - u_n) dx \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\langle P(u_n), \psi u_n - \psi \varphi^+ \rangle = -\int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+(\psi u_n - \psi \varphi^+) dx \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

isso mostra a justificativa da Afirmação 3.2.14. Vejamos agora a justificativa da Afirmação 3.2.10 para a sequência  $(u_n)$  de soluções de (3.21). Mais uma vez, consideremos  $\psi_\beta = \psi((x - x_j)/\beta)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e para todo  $\beta > 0$ , onde  $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$  tal que  $\psi = 1$  em  $B_1(0)$ ,  $\psi = 0$  sobre  $B_2^c(0)$  e  $|\nabla \psi| \leq 2$ , com  $0 \leq \psi \leq 1$ . Note que

$$I'_n(u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) = 0$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) + (1 + \lambda V(x))u_n(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+)] dx \\ + n \langle P(u_n), \psi u_n - \psi \varphi^+ \rangle \\ = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Da igualdade (3.32) e pela Afirmação 3.2.14 deduzimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) + (1 + \lambda V(x))u_n(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+)] dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para simplificar denotaremos por

$$L_{n,\beta} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta \varphi^+) + (1 + \lambda V(x))u_n \psi_\beta \varphi^+] dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) \psi_\beta \varphi^+$$

então, podemos reescrever (3.33) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n) + (1 + \lambda V(x))u_n \psi_\beta u_n] dx - L_{n,\beta} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) \psi_\beta u_n dx. \quad (3.34)$$

Sem dificuldades, é possível mostrar

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\beta} \right) = 0. \quad (3.35)$$

Realizando todas as etapas feitas na demonstração da Afirmação 3.2.10 garantimos que  $\nu_j = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Consequentemente,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^{2^*}(\mathbb{R}^N). \quad (3.36)$$

Uma vez provado os limites (3.27) e (3.28), de (3.26) concluímos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = o_n(1)$$

o que demonstra o lema. ■

Observe que

$$\langle P(u_n), w - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(w), w - u_n \rangle \leq 0$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Então, escolhendo  $v = w - u_n$  e substituindo em (3.21), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (w - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (w - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) (w - u_n) dx \quad (3.37)$$

Pelo Lema 3.2.13, tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  em (3.37) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (w - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) (w - u) dx \quad (3.38)$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Com isso mostramos que o Problema (3.5) tem uma solução não negativa.

### 3.2.3 Demonstração do Teorema 3.1.1

Na seção anterior conseguimos uma solução  $u_\lambda$  para a desigualdade variacional modificada (3.5). Nosso objetivo é que a mesma verifique

$$u(x)_\lambda \leq a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \quad (3.39)$$

pois pela Observação 3.2.1, segue que  $u_\lambda$  é uma solução da desigualdade variacional (3.1) e com isso finalizamos a demonstração do Teorema 3.1.1.

Daqui para frente, consideremos  $u_n \in E_{\lambda_n}$  e  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Cada  $u_n \in \mathbb{K}$  e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x)) u_n (v - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) (v - u_n) dx \quad (3.40)$$

para todo  $v \in \mathbb{K}$ .

O próximo resultado foi motivado pela Proposição 1.3.10, vejamos

**Proposição 3.2.15** *Seja  $(u_n)$  uma sequência soluções de (3.40). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u (v - u) dx, \quad (3.41)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Demonstração.** Sem dificuldades, é possível mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \frac{2qc}{q-2}, \quad (3.42)$$

implicando que  $(\|u_n\|_{\lambda_n})$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Sendo

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \geq \|u_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$(u_n)$  é também limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , e assim, existe uma subsequência de  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Vamos mostrar (ii), pois para justificar (i) utilizaremos os mesmos passos dados na demonstração da Proposição 1.3.10. Primeiro de tudo, temos

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_{\lambda_n} = \langle u_n, u_n - u \rangle_{\lambda_n} - \langle u, u_n - u \rangle_{\lambda_n}. \quad (3.43)$$

Observe,

$$\langle u, u_n - u \rangle_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla(u_n - u) + (1 + \lambda_n V(x))u(u_n - u)] dx$$

mas por (i) deduzimos

$$\langle u, u_n - u \rangle_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla(u_n - u) + (1 + \lambda_n V(x))u(u_n - u)] dx = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla(u_n - u) + u(u_n - u)] dx.$$

Assim, podemos concluir

$$\langle u, u_n - u \rangle_{\lambda_n} = o_n(1),$$

pois  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Dessa última informação, reescrevemos (3.43) da seguinte forma

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \langle u_n, u_n - u \rangle_{\lambda_n} + o_n(1). \quad (3.44)$$

Como sabemos que  $u_n \geq \varphi$  q.t.p. em  $\Omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $u \geq \varphi$  q.t.p. em  $\Omega$  e, conseqüentemente  $u \in \mathbb{K}$ . Agora, substituindo  $u$  por  $v$  em (3.40) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x))u_n(u - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u - u_n) dx \quad (3.45)$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_n - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x))u_n(u_n - u) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u) dx \quad (3.46)$$

ou melhor,

$$\langle u_n, u_n - u \rangle_{\lambda_n} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u) dx. \quad (3.47)$$

Combinando (3.44) e (3.47) concluimos

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u) dx + o_n(1). \quad (3.48)$$

Para concluimos a demonstração de (ii) precisamos, mais uma vez, dos seguintes limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)u dx \quad (3.49)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.50)$$

Na verdade, precisamos deste resultado

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^{2^*}(\mathbb{R}^N) \quad (3.51)$$

e também que a sequência de soluções  $(u_n)$  da desigualdade variacional (3.40) verifique os mesmos resultados dados pelo Lema 3.2.8: dado  $\delta > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) \, dx \right) < \delta. \quad (3.52)$$

Como vimos na demonstração da Proposição 3.1, esses resultados (3.51) e (3.52) são fundamentais para justificar os limites (3.49) e (3.50). Para justificarmos (3.52) procedemos de forma análoga os passos dados na demonstração do Lema 3.2.8. A dificuldade de justificar (3.51) é justamente provar que  $\nu_i = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Precisamos escolher uma função teste adequada para substituímos em (3.40), e com isso estabelecer uma desigualdade semelhante a (3.33). Para isso, novamente, consideremos  $\psi_\beta = \psi((x - x_j)/\beta)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e para todo  $\beta > 0$ , onde  $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$  tal que  $\psi = 1$  em  $B_1(0)$ ,  $\psi = 0$  sobre  $B_2^c(0)$  e  $|\nabla \psi| \leq 2$ , com  $0 \leq \psi \leq 1$ . Afirmamos

**Afirmção 3.2.16** *Seja  $v_n = u_n - \psi_\beta(u_n - \varphi^+) \in \mathbb{K}$ .*

De fato, sabemos que  $u_n \geq \varphi^+ \geq \varphi$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que  $\psi_\beta = 0$ , temos  $v_n = u_n$  e conseqüentemente  $v_n \in \mathbb{K}$ . Da mesma forma, se  $\psi_\beta = 1$  temos  $v_n = \varphi^+$  e logo  $v_n \in \mathbb{K}$ . Agora, suponha  $0 < \psi_\beta < 1$  e observe

$$u_n - \psi_\beta u_n = u_n(1 - \psi_\beta) \geq \varphi^+(1 - \psi_\beta) = \varphi^+ - \varphi^+ \psi_\beta,$$

assim,

$$v_n = u_n - \psi_\beta u_n + \varphi^+ \psi_\beta \geq \varphi^+.$$

isso mostra que  $v_n \in \mathbb{K}$  e, portanto, justificamos a Afirmção 3.2.16.

Pela Afirmção 3.2.16 podemos substituir  $v_n$  por  $v$  em (3.40), então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla (\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) + (1 + \lambda_n V(x)) u_n (\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+)] \, dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) (\psi_\beta u_n - \psi_\beta \varphi^+) \, dx. \end{aligned} \quad (3.53)$$



Observe que a desigualdade acima é idêntica a (3.33). Então realizando as mesmas etapas exploradas na demonstração da Afirmação 3.2.10 garantimos que  $\nu_j = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$  e conseqüentemente concluímos (3.51). Portanto, usando (3.52) e (3.51) como na demonstração do Lema 3.2.13, podemos concluir

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = o_n(1)$$

e conseqüentemente está mostrado o item (ii).

Para demonstrar (iii), note que

$$\|u_n - u\|^2 \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n - u|^2 dx \leq C \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2$$

o que implica, pelo item (ii), em

$$\|u_n - u\|^2 \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) |u_n|^2 dx \rightarrow 0.$$

Falta mostrar (iv), ou seja, que  $u$  é solução do problema (3.41). Escolhendo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , arbitrária, e substituindo em (3.40) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n v - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x)) u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) (v - u_n) dx$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  e usando (i) – (iii), concluímos que

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla (v - u) + u(v - u)] dx \geq \int_{\Omega} g(x, u) (v - u) dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

Recordando a definição da função  $g$ , segue

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla (v - u) + u(v - u)] dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u (v - u) dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}.$$

Portanto, a proposição está provada. ■

**Demonstração do Teorema 3.1.1** Nesta demonstração, usamos o método de Iteração de Moser [51] baseado no trabalho de Gongbao [32] e adaptamos argumentos contidos em Alves [1] e Figueiredo [26].

Sabemos que cada  $u_n$  verifica (3.40). Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e para  $L \geq 1$ , definimos

$$u_{n,L}(x) = \begin{cases} u_n, & \text{se } u_n \leq L \\ L, & \text{se } u_n \geq L \end{cases}$$

Considere  $d = \text{distância}(\bar{\Omega}, \partial\Omega')$  e seja  $0 < R < d$ . Dado  $x_0 \in \bar{\Omega}'^c$ , fixamos uma sequência  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $R < r_j < d$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  e  $r_j \downarrow R$ .

Considere também,

$$v_{n,L}(x) = v_{n,L,j}(x) = \left( u_n - u_n \eta^2 \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)} \right)(x),$$

onde,  $\eta = \eta_j \in C^\infty(\mathbb{R})$  verificando  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $|\nabla \eta| \leq \frac{1}{r_j}$  e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{r_{j+1}}(x_0) \\ 0, & \text{se } x \in B_{r_j}^c(x_0) \end{cases}$$

e o número  $\beta > 1$  a ser fixado.

**Afirmção 3.2.17** A função  $v_{n,L} \geq \varphi$  em  $\mathbb{R}^N$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

De fato, no conjunto  $B_{r_j}^c(x_0)$  temos  $\eta = \eta_j = 0$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$  então

$$v_{n,L} = u_n \geq \varphi.$$

Recordemos que em  $\Theta^c$  temos  $\varphi \leq 0$ . Como  $B_{r_j}^c(x_0) \subset \Theta^c$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$  segue que  $\varphi \leq 0$  em  $B_{r_j}^c(x_0)$ .

Observe que

$$-u_n \eta^2 \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)} \geq -u_n \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)},$$

pois  $u_{n,L}, u_{n,L}^{\beta-1} > 0$  e  $-\eta^2 \geq -1$ , assim

$$v_{n,L} = u_n - u_n \eta^2 \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)} \geq u_n \left[ 1 - \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)} \right] \geq 0,$$

donde segue que  $v_{n,L} \geq 0 \geq \varphi$  em  $B_{r_j}^c(x_0)$ . Portanto,  $v_{n,L} \in \mathbb{K}$ .

Pela Afirmação 3.2.17, segue que  $v_{n,L} \in \mathbb{K}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Substituindo a função  $v_{n,L}$  como função teste obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^{2(\beta-1)}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) dx \right) &+ \frac{1}{L^{2(\beta-1)}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{L^{2(\beta-1)}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \right) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) dx &\leq - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sabemos que  $\lambda_n V(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx. \quad (3.55)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &+ 2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1} dx. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Note também que

$$2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1} dx = 2(\beta-1) \int_{u_n \leq L} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \geq 0. \quad (3.57)$$

Substituindo (3.56) em (3.55) e usando a igualdade (3.57)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \end{aligned} \quad (3.58)$$

Da condição de crescimento da função  $g$  dada em  $(g_3)$  a última desigualdade fica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx &\leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &+ (\mu\beta - 1) \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

Fixando  $0 < \beta < 1/\mu$  temos  $\mu\beta - 1 < 0$  e conseqüentemente a última expressão fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx, \quad (3.60)$$

onde  $C$  constante positiva a qual mudaremos sempre que necessário. Recordando a definição da função  $\eta$  temos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx, \quad (3.61)$$

Agora definimos a função

$$U_{n,L} = u_n \eta u_{n,L}^{\beta-1},$$

onde a função  $\eta$  é a mesma que foi definida anteriormente. Desde que

$$\begin{aligned} \nabla U_{n,L} &= \nabla(\eta u_n u_{n,L}^{\beta-1}) \\ &= \nabla \eta u_n u_{n,L}^{\beta-1} + \nabla u_n \eta u_{n,L}^{\beta-1} + (\beta-1) \eta u_n u_{n,L}^{\beta-2} \nabla u_n, \end{aligned} \quad (3.62)$$

tem-se

$$\begin{aligned} |\nabla U_{n,L}|^2 &= |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \\ &\quad + (\beta-1)^2 \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-2)} |\nabla u_n|^2 \\ &\quad + 2(\beta-1) \eta u_n^2 u_{n,L}^{2\beta-3} \nabla u_n \nabla \eta \\ &\quad + 2(\beta-1) \eta^2 u_n u_{n,L}^{2\beta-3} \nabla u_n \nabla u_n \\ &\quad + 2 \eta u_n u_{n,L}^{2(\beta-1)} \nabla u_n \nabla \eta. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Percebemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 &\leq \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &\quad + 6\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo (3.61) em (3.64) obtemos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \right). \quad (3.65)$$

Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, ver [33], tem-se

$$|U_{n,L}|_{L^{2^*}(B_{r_j}(x_0))}^2 \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 dx.$$

Assim, por (3.65) segue que

$$|U_{n,L}|_{L^{2^*}(B_{r_j}(x_0))}^2 \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C \beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \\ &+ C \beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder para expoentes  $2^*/2$  e  $2^*/(2^* - 2)$ , obtemos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \leq \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} dx \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \quad (3.67)$$

Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $1 - \epsilon^{\frac{2^*-2}{2^*}} C \beta^2 > 0$ . Como sabemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega^\epsilon)} = 0,$$

pela Proposição 3.2.15, então para cada  $j \in \mathbb{N}$  existe  $K_j$  tal que

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} dx < \epsilon, \quad \forall n \geq K_j.$$

Sendo  $r_{j+1} < r_j$ , sem perda de generalidade  $K_j = K_1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Substituindo (3.67) em (3.66), usando a última desigualdade e fazendo uma reindexação na variável  $n$  se necessário temos

$$\left( \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\beta-1)} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx.$$

Tomando  $\beta = \frac{2^*}{2}$  e usando o fato que  $|\nabla \eta| < \frac{1}{R}$  da última desigualdade obtemos

$$\left( \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\frac{2^*}{2}-1)} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}$$

Sabendo que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  e usando as imersões contínuas de Sobolev segue da última desigualdade que

$$\left( \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\frac{2^*}{2}-1)} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C < +\infty, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema de Fatou na variável  $L$  segue

$$\left( \int_{B_{r_j}(x_0)} \eta^{2^*} u_n^{\frac{2^*2}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C < +\infty, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}. \quad (3.68)$$

**Afirmção 3.2.18** *Vale a seguinte fórmula*

$$\|u_n\|_{L^{\chi^{k+1s}}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C \chi^{\frac{1}{\chi^k} + \dots + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi^k} + \dots + \frac{1}{\chi}} \|u_n\|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

onde  $C$  independe de  $n$  e

$$\chi = \frac{2^*(t-1)}{2t}, \quad s = \frac{2t}{t-1}, \quad t = \frac{2^{*2}}{2(2^*-2)}.$$

De fato, utilizando (3.66) com  $\beta = \chi$  e  $j = 1$  temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))$$

e

$$\left( \int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2\beta} dx + \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2} \eta^{2(\frac{2^*-2}{2^*})} u_n^{2\beta} dx \right). \quad (3.70)$$

Agora utilizando Hölder na segunda parcela do segundo membro da desigualdade acima com expoentes  $t$  e  $\frac{t}{t-1}$  segue

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2} \eta^{2\frac{2^*-2}{2^*}} u_n^{2\beta} dx \leq \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} \eta^{2t(\frac{2^*-2}{2^*})} u_n^{(2^*-2)t} dx \right)^{\frac{1}{t}} \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}} dx \right)^{\frac{t-1}{t}}.$$

Por (3.68) segue que

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2} \eta^{2\frac{2^*-2}{2^*}} u_n^{2\beta} dx \leq C \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}} dx \right)^{\frac{t-1}{t}}.$$

Da mesma forma usando Hölder na primeira parcela temos

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2\beta} dx \leq \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}} dx \right)^{\frac{t-1}{t}} |B_{r_1}(x_0)|^{\frac{1}{t}}$$

Assim, a desigualdade (3.70) fica

$$\left( \int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}} dx \right)^{\frac{t-1}{t}}, \quad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$|u_{n,L}|_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta} \leq \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

e

$$\left( \int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}} dx \right)^{\frac{t-1}{t}} = C\beta^2 |u_n|_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}^{2\beta}.$$

Consequentemente,

$$|u_{n,L}|_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando o Lema de Fatou na variável  $L$  na última desigualdade segue

$$|u_n|_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\beta = \chi$  e  $2^* = \chi s$  então

$$|u_n|_{L^{\chi^{2s}}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

isto implica

$$|u_n|_{L^{\chi^{2s}}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.71)$$

isso mostra que a fórmula (3.69) é válida para  $k = 1$ .

Agora mostraremos que a mesma é válida para  $k = 2$ . Em (3.66) consideremos  $\beta = \chi^2$  e  $j = 2$  temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_2}(x_0)).$$

Repetindo os cálculos anteriores obtemos

$$|u_n|_{L^{2^*\beta}(B_{r_3}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo  $\beta = \chi^2$  e  $2^* = \chi s$  segue

$$|u_n|_{L^{\chi^{3s}}(B_{r_3}(x_0))}^{2\beta} \leq C(\chi^2)^2 |u_n|_{L^{\chi^{2s}}(B_{r_2}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando

$$|u_n|_{L^{\chi^{3s}}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}} \chi^{\frac{2}{\chi^2}} |u_n|_{L^{\chi^{2s}}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando (3.71) a última desigualdade fica

$$|u_n|_{L^{\chi^{3s}}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2} + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{2}{\chi^2} + \frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.72)$$

mostrando a validade da fórmula (3.69) para  $k = 2$ .

Suponhamos que a fórmula (3.69) seja verdadeira para algum  $k \geq 1$ . Mais uma vez usando (3.66) com  $\beta = \chi^{k+1}$  e  $j = k + 1$ , temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_{k+1}}(x_0)).$$

Repetindo o mesmo procedimentos de cálculos anteriormente, obtemos

$$|u_n|_{L^{2^*\beta}(B_{r_{k+2}}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_{k+1}}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\beta = \chi^{k+1}$  e  $2^* = \chi s$  então

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2s}}(B_{r_{k+2}}(x_0))}^{2\beta} \leq C(\chi^{k+1})^2 |u_n|_{L^{\chi^{k+1s}}(B_{r_{k+1}}(x_0))}^{2\beta}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C \chi^{\frac{1}{\chi^{k+1}}} \chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}} |u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela hipótese de indução segue que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C \chi^{\frac{1}{\chi^{k+1}} + \dots + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}} + \dots + \frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

portanto, a fórmula (3.69) é válida.

Observe as séries que aparecem na fórmula (3.69)

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\chi^i} = \frac{1}{\chi - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^k \frac{i}{\chi^i} = \frac{\chi^2}{(\chi - 1)^2}$$

são ambas convergentes, assim, existe  $C > 0$  independente de  $n$  tal que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição da sequência  $(r_j)$  deduzimos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_R(x_0))} \leq |u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Assim,  $u_n \in L^p(B_R(x_0))$ , para todo  $p \geq \chi^k s$  por interpolação. Nesse momento, precisamos do seguinte lema.

**Lema 3.2.19** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^N$  um aberto qualquer,  $p \geq 1$  e  $u \in L^s(A)$ ,  $\forall s \in [p, +\infty)$ . Se existe  $C > 0$  tal que*

$$|u|_s \leq C, \quad \forall s \in [p, +\infty),$$

então  $u \in L^\infty(A)$  e

$$|u|_\infty \leq C.$$

**Demonstração.** Iniciamos fixando  $\delta > 0$  arbitrário e consideramos o conjunto

$$\Sigma = \{x \in A; |u(x)| \geq C + \delta\}.$$

Nosso objetivo é provar que

$$|\Sigma| = 0.$$



Primeiramente, note que  $|\Sigma| < \infty$ . De fato,

$$(C + \delta)^s |\Sigma| \leq \int_{\Sigma} |u|^s dx \leq |u|_s^s \leq C^s < +\infty.$$

Deduzimos da expressão acima

$$(C + \delta)|\Sigma|^{\frac{1}{s}} \leq C.$$

Se  $|\Sigma| > 0$ , passando ao limite quando  $s \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima, obtemos

$$C + \delta = \lim_{s \rightarrow +\infty} (C + \delta)|\Sigma|^{\frac{1}{s}} \leq C,$$

ou seja,

$$C + \delta \leq C,$$

o que um absurdo. Logo,

$$|\Sigma| = 0.$$

■

Utilizando o Lema 3.2.19 concluimos que  $u_n \in L^\infty(B_R(x_0))$  e

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.73)$$

onde  $C$  independe de  $n$ . Temos também,

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(\Omega^c)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pois  $B_{r_1}(x_0) \subset \Omega^c$ . Agora, usamos fato que

$$u_n = u_{n,\lambda_n} \rightarrow 0 \text{ em } H^1(\Omega^c) \text{ quando } \lambda_n \rightarrow +\infty$$

e a imersão contínua de Sobolev dado  $\kappa > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} < \kappa, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Como tomamos  $x_0 \in \Omega^c$  arbitrário então

$$|u_n|_{L^\infty(\Omega^c)} < \kappa.$$

Portanto, do estudo feito até aqui podemos concluir que existe  $\lambda^* > 0$  de maneira que a solução  $u_\lambda$  verifica

$$u_\lambda(x) \leq a, \forall x \in \Omega^c \text{ e } \lambda \geq \lambda^*.$$

Temos, por (3.38)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Então para  $\lambda \geq \lambda^*$  e pela Observação 3.2.1 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.74)$$

A proposição a seguir completa a demonstração do Teorema 3.1.1.

**Proposição 3.2.20** *Seja  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $(u_n)$  uma solução de (3.74). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla(v-u) dx + \int_{\Omega} u(v-u) dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v-u) dx, \quad (3.75)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

A demonstração segue os mesmos passos dados na demonstração da Proposição 3.2.15, por este motivo omitimos.

### 3.3 Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N = 2$

Seguiremos a mesma metodologia abordada na subseção 3.1.1. Neste sentido, tomamos  $k' = \max\{\theta/(\theta - 2), 2\}$  e  $a' > 0$  verificando  $f(a') = a'/k'$ .

Definimos as seguintes funções

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq a \\ \frac{t}{k}, & t \geq a \end{cases}$$

e

$$\tilde{H}(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Seja  $\Omega'$  um aberto conexo limitado com fronteira suave contendo  $\bar{\Omega}$ . Definimos as seguintes funções  $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{G} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\tilde{g}(x, t) = \chi_{\Omega'}(x)\tilde{f}(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

e

$$\tilde{G}(x, t) = \chi_{\Omega'}(x)\tilde{F}(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))H(t),$$

onde

$$\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{f}(s) ds.$$

O objetivo, agora, é estabelecer a existência de solução para a seguinte desigualdade variacional modificado: encontrar  $u \in \mathbb{K}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla (v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda V(x)) u (v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u) (v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \quad (3.76)$$

O problema (3.76) está intimamente relacionado com (3.1), pois se  $u_\lambda$  é uma solução de (3.76) verificando

$$u(x) \leq a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$$

então  $u$  é uma solução da desigualdade variacional original (3.1), como vimos na Observação 3.2.1.

Aqui relacionamos algumas propriedades da função  $\tilde{g}$ . Sendo  $a' > 0$ , então segue

$$(\tilde{g}_1) \quad \tilde{g}(x, t) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t \leq 0;$$

( $\tilde{g}_2$ )  $\frac{\tilde{g}(x, t)}{t} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , uniformemente em  $x \in \mathbb{R}^2$ ;

( $\tilde{g}_3$ ) Fixados  $\kappa > 0$ ,  $l \geq 0$  e  $\alpha \geq \alpha_0$  existe  $C_\kappa > 0$  tal que

$$|\tilde{g}(x, t)| \leq \kappa|t| + C_\kappa|t|^l \left( e^{\alpha|t|^2-1} \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

( $\tilde{g}_4$ ) Para todo  $x \in \Omega'$  e  $t > 0$  tem-se

$$0 < \theta \tilde{G}(x, t) \leq \tilde{g}(x, t)t;$$

( $\tilde{g}_5$ ) Para todo  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$  e  $t > 0$  tem-se

$$0 < 2\tilde{G}(x, t) \leq \tilde{g}(x, t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Mais uma vez, utilizaremos o método de penalização, ou seja, procuramos soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \tilde{g}(x, u), \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad (3.77)$$

As soluções fracas do problema (3.77) são pontos críticos do funcional  $I_{\lambda, \epsilon} : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{G}(x, u) dx$$

o qual está bem definido e é de classe  $C^1$  sobre o espaço  $E_\lambda$  (o mesmo do Capítulo 2) com

$$I'_{\lambda, \epsilon}(u)v = \langle u, v \rangle_\lambda - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u)^+ v dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u)v dx,$$

$\forall u, v \in E_\lambda$ , ou equivalente,

$$I'_{\lambda, \epsilon}(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv] dx - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u)^+ v dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u)v dx$$

$\forall u, v \in E_\lambda$ .

Nesse momento, enunciaremos alguns lemas os quais omitiremos suas demonstrações. Isto deve-se ao fato que as mesmas seguem com argumentos explorados em demonstrações anteriores apresentadas aqui.

**Lema 3.3.1** *O funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$  verifica a geometria do passo da montanha.*

**Lema 3.3.2** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então  $(u_n)$  é limitada.*

**Observação 3.3.3** *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  dada pelo Lema 3.3.2 pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas e que cumpre*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \left(\frac{2\theta}{\theta-2}\right) c_{\lambda,\epsilon}.$$

**Lema 3.3.4** *Se  $(u_n)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$ , então dado  $\delta > 0$  existe  $R > 0$  tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \delta$$

**Lema 3.3.5** *Seja  $c_{\lambda,\epsilon}$  o nível do passo da montanha para  $I_{\lambda,\epsilon}$ . Então existe uma constante  $A > 0$ , independente de  $\nu$ , de maneira que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}}.$$

O próximo lema que enunciaremos a seguir é uma consequência da Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (2.52).

**Lema 3.3.6** *Seja  $(u_n)$  uma família em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|u_n\|^2\} \leq m < 4\pi$ . Para cada  $\alpha > \alpha_0$  e  $q > 1$  verificando  $q\alpha < 4\pi$ , existe uma constante  $C = C(q, m, \alpha) > 0$  tal que  $b_\alpha(u_n) = (e^{\alpha u_n^2} - 1)$  pertence a  $L^q(\mathbb{R}^2)$  e*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |b_\alpha(u_n)|_q \} < \infty.$$

**Demonstração.** Sabemos que  $\|u_n\| \leq m$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escolhendo  $\alpha > \alpha_0$  e  $q > 1$  verificando  $q\alpha < 4\pi$  é possível encontrar  $q' > q$  e suficientemente próximo de  $q$  tal que  $q'\alpha < 4\pi$  e, desta forma, pela a desigualdade (2.51) garantimos

$$\begin{aligned} |b_\alpha(u_n)|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^2} |b_\alpha(u_n)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^q dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha|u_n|^2} - 1) dx \\ &= C_2 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha\|u_n\|_\lambda \left(\frac{\|u_n\|_\lambda}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2} - 1) dx \\ &\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha m \left(\frac{\|u_n\|_\lambda}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2} - 1) dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devido a Cao [17] existe  $C = C(q, m, \alpha) > 0$  tal que

$$|b_\alpha(u_n)|_q^q = \int_{\mathbb{R}^2} |b_\alpha(u_n)|^q dx \leq C$$

donde segue a demonstração. ■

**Proposição 3.3.7** *Para  $\lambda \geq 1$ , toda  $(u_n)$  sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{2(\theta - 2)\pi}{\theta\alpha_0}$$

*admite uma subsequência convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$  para o funcional  $I_{\lambda,\epsilon}$  verificando a hipótese da proposição acima. Sabemos que  $(u_n)$  é uma sequência limitada, logo, existe  $u \in E_\lambda$  e a menos de subsequência tem-se

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{Loc}^s(\mathbb{R}^2), \forall s \geq 2.$$

Observe que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = \|u_n\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1).$$

Sabemos que

$$\|u_n\|_\lambda^2 = I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n dx$$

e

$$-\langle u_n, u \rangle_\lambda = -I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u dx.$$

Repetindo os argumentos explorados na justificativa da afirmação (2.3.5) garantimos

$$\int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u_n dx - \int_{\Omega} (\varphi - u_n)^+ u dx = o_n(1).$$

Assim, reescrevemos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u dx + o_n(1).$$

**Afirmação 3.3.8** *Vale os seguintes limites:*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g}(x, u) u dx;$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) v dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g}(x, u) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Vamos iniciar justificando por (i). Temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u) u dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |g(x, u_n) u_n - g(x, u) u| dx.$$

Dado  $\delta > 0$ , considere  $R > 0$  como no Lema 3.3.4 e

$$I_{n,1} = \int_{B_R(0)} |\tilde{g}(x, u_n) u_n - \tilde{g}(x, u) u| dx \quad \text{e} \quad I_{n,2} = \int_{B_R^c(0)} |\tilde{g}(x, u_n) u_n - \tilde{g}(x, u) u| dx.$$

De  $(\tilde{g}_5)$  tem-se

$$|\tilde{g}(x, u_n)| \leq |u_n|^2 + C|u_n|b_\alpha(u_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nosso objetivo inicialmente é mostrar que  $I_{n,1} \rightarrow 0$ . Para isso, definimos definimos as seguintes funções

$$w_n := |u_n|^2 + C|u_n|b_\alpha(u_n) \quad \text{e} \quad w := |u|^2 + C|u|b_\alpha(u)$$

Como

$$u_n(x) \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2;$$

então

$$\tilde{g}(x, u_n) \rightarrow \tilde{g}(x, u) \text{ q.t.p. em } B_R(0)$$

e

$$w_n(x) \rightarrow w(x) \text{ q.t.p. em } B_R(0).$$

Podemos observar que para concluir nosso objetivo falta mostrar

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Sabemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \frac{4\pi}{\alpha_0},$$

então fixemos  $0 < m < 4\pi/\alpha_0$  de tal maneira que

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leq m.$$

De acordo com a escolha de  $m$  temos  $m\alpha_0 < 4\pi$ . Logo, para  $\alpha > \alpha_0$  e  $q > 1$  suficientemente próximo de  $\alpha_0$  e  $q$  próximo de 1, respectivamente, devemos ter  $qm\alpha < 4\pi$ . Pelo Lema 3.3.6 existe  $C > 0$  tal que  $b_\alpha(u_n) = (e^{\alpha u_n^2} - 1)$  pertence a  $L^q(\mathbb{R}^2)$  e

$$|b_\alpha(u_n)|_q \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, concluímos que a sequência  $(b_\alpha(u_n))$  é limitada em  $L^q(B_R(0))$ . Pelo Lema de Brézis & Lieb temos

$$b_\alpha(u_n) \rightharpoonup b_\alpha(u) \text{ em } L^q(B_R(0)).$$

Como

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{q'}(B_R(0)), \quad \text{onde } 1/q + 1/q' = 1$$

então

$$u_n b_\alpha(u_n) \rightarrow u b_\alpha(u) \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Consequentemente, garantimos

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Portanto, Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,1} = 0. \tag{3.78}$$

Por outro lado, sendo  $\Omega' \subset B_R(0)$ , deduzimos

$$|\tilde{g}(x, t)t| \leq \frac{1}{k}|t|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^2 dx + \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx + \frac{1}{k} \int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , então para  $R$  suficientemente grande, garantimos

$$\int_{B_R^c(0)} |u|^2 dx < \frac{\delta}{2k}.$$

Pelo Lema 3.3.4, tomando o limite superior quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \frac{\delta}{2k}.$$



Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,2} < \delta, \quad \forall \delta > 0.$$

isto implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,2} = 0. \quad (3.79)$$

De (3.78) e (3.79),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g}(x, u) u dx.$$

A justificativa de (ii) segue os mesmos passos anteriores. ■

Agora vamos mostrar que o problema penalizado (3.77) possui solução não trivial. Seja  $c_{\lambda, \epsilon}$  o nível do passo da montanha. Pelo Lema 3.3.5 existe  $\nu_* > 0$  tal que

$$0 < c_{\lambda, \epsilon} < \frac{(\theta - 2)4\pi}{2\theta\alpha_0}, \quad \text{para } \nu \geq \nu_*, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall \epsilon > 0.$$

Pela Proposição 3.3.7 o funcional  $I_{\lambda, \epsilon}$  verifica a condição  $(PS)_{c_{\lambda, \epsilon}}$ . Usando o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], podemos concluir que existe  $u \in E_\lambda$  tal que

$$I_{\lambda, \epsilon}(u) = c_{\lambda, \epsilon} > 0 \text{ e } I'_{\lambda, \epsilon}(u) = 0$$

### 3.3.1 Existência de solução para a desigualdade variacional modificada

Do estudo feito na seção anterior, obtemos uma solução  $u_\epsilon \in E_\lambda$  não trivial do problema (3.77), ou seja,  $u_\epsilon$  verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_\epsilon v] dx + \frac{1}{\epsilon} \langle P(u_\epsilon), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_\epsilon) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Como sempre, faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda, \epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde  $c_n = c_{\lambda, \epsilon}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  sabemos que existe  $u_n \in E_\lambda$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_n v] dx + n \langle P(u_n), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) v dx, \quad \forall v \in E_\lambda. \quad (3.80)$$

De forma análoga que foi feito anteriormente, podemos supor que a sequência  $(u_n)$  de soluções verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

de onde segue que  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Assim, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

e

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2), \quad s \geq 2.$$

Repetindo os argumentos explorados no Lema 2.3.10 é possível mostrar que  $P(u) = 0$ , ou seja,  $u \in \mathbb{K}$ . Com isso, garantimos  $u$  é não nula.

**Lema 3.3.9** *A seguinte convergência é válida*

$$u_n \rightarrow u \text{ em } E_\lambda.$$

**Demonstração.** Inicialmente, percebemos que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = \|u_n\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1), \quad (3.81)$$

ou ainda,

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = n \langle P(u_n), u - u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u \, dx + o_n(1), \quad (3.82)$$

pois

$$\|u_n\|_\lambda^2 = I'_n(u_n) u_n - n \langle P(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \, dx \quad (3.83)$$

e

$$-\langle u_n, u \rangle_\lambda = -I'_n(u_n) u + n \langle P(u_n), u \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u \, dx. \quad (3.84)$$

Observe que

$$\langle P(u_n), u - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(u), u - u_n \rangle \leq 0.$$

Da observação acima e da expressão (3.82) obtemos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u \, dx + o_n(1). \quad (3.85)$$

Mais uma vez, precisamos seguintes limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u) u dx \quad (3.86)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) v dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u) v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.87)$$

para finalizarmos a demonstração. Observando as ideias explorada na demonstração da Proposição 3.3.7, percebemos que as mesmas podem ser aplicadas na justificativa dos limites acima, com pequenos ajustes. A sequência  $(u_n)$  verifica o mesmo resultado do Lema 3.3.4, isto é, dado  $\delta > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \right) < \delta.$$

Usando a Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devido a Cao [17], podemos mostrar que  $b_\alpha(u_n) = (e^{\alpha u_n^2} - 1)$  pertence a  $L^q(\mathbb{R}^2)$  e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |b_\alpha(u_n)|_q \} < \infty$$

este resultado é descrito pelo Lema 3.3.4. Agora, é realizar as mesmas manipulações algébricas descritas na demonstração da Proposição 3.3.7 para justificarmos tais limites. ■

Relembrando as propriedades do operador de penalização obtemos

$$\langle P(u_n), w - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(w), w - u_n \rangle \leq 0$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Fixando  $v = w - u_n$  e substituindo em (3.80), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (w - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda V(x)) u_n (w - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) (w - u_n) dx \quad (3.88)$$

Pelo Lema 3.3.9, passando ao limite quando  $n \rightarrow +\infty$  em (3.88) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla (w - u) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda V(x)) u (w - u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u) (w - u) dx \quad (3.89)$$

para todo  $w \in \mathbb{K}$ . Com isso mostramos que o Problema (3.76) tem uma solução não trivial e não negativa.

### 3.3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1

Nesta seção mostraremos que as soluções que encontramos para o Problema (3.76) são também soluções de (3.1), para  $\lambda$  suficientemente grande. Seja  $u_n \in E_{\lambda_n}$  e  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Sabemos que cada  $u_n \in \mathbb{K}$  e verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (v - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda_n V(x)) u_n (v - u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) (v - u_n) dx \quad (3.90)$$

para todo  $v \in \mathbb{K}$ .

A próxima proposição refere ao comportamento da sequências  $(u_n)$  de soluções da desigualdade (3.90).

**Proposição 3.3.10** *Seja  $(u_n)$  uma sequência de soluções de (3.90). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da desigualdade variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u) (v - u) dx, \quad (3.91)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

A dificuldade de provar a Proposição 3.3.10 aparece no item (ii), pois precisamos que a sequência  $(u_n)$  verifique os resultados dos Lemas 3.3.4 e 3.3.6. No entanto, analisando todo estudo feito neste seção, percebemos que asseguramos estes resultados

e com isso garantimos (ii). O item (i) segue mesmos passos dados na demonstração da Proposição 1.3.10 e os itens restantes (iii) e (iv) é uma consequência imediata do item (i) como podemos ver na demonstração da Proposição 3.2.15. Por esta razão, omitimos a demonstração.

### Finalização da demonstração do Teorema 3.1.1

Agora mostraremos que existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $\lambda \geq \lambda^*$  uma solução  $u_\lambda$  do Problema (3.76) satisfaz

$$u(x)_\lambda \leq a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \quad (3.92)$$

então, segue que  $u_\lambda$  é uma solução do problema da desigualdade variacional (3.1). Este resultado é fundamental para finalizarmos a demonstração do Teorema 3.1.1. Nesta demonstração, usamos o método de Iteração de Moser [51] baseado no trabalho de Gongbao [32] e adaptamos as idéias contidas em Alves & Souto [9] e ver também Alves & Pereira [7].

Iniciamos, da mesma forma como começamos na demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso  $N \geq 3$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e para  $L \geq 1$ , definimos

$$u_{n,L}(x) = \begin{cases} u_n, & \text{se } u_n \leq L \\ L, & \text{se } u_n \geq L \end{cases}$$

Considere  $d = \text{distância}(\bar{\Omega}, \partial\Omega')$  e seja  $0 < R < d$ . Dado  $x_0 \in \Omega'^c$ , fixamos uma sequência  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $R < r_j < d$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  e  $r_j \downarrow R$ .

Considere também,

$$v_{n,L}(x) = v_{n,L,j}(x) = \left( u_n - u_n \eta^2 \left( \frac{u_{n,L}}{L} \right)^{2(\beta-1)} \right)(x),$$

e

$$U_{n,L}(x) = U_{n,L,j}(x) = u_n \eta u_{n,L}^{\beta-1}(x)$$

onde,  $\eta = \eta_j \in C^\infty(\mathbb{R})$  verificando  $0 \leq \eta_j \leq 1$ ,  $|\nabla \eta_j| \leq \frac{1}{r_j}$  e

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{r_{j+1}}(x_0) \\ 0, & \text{se } x \in B_{r_j}^c(x_0) \end{cases}$$

e o número  $\beta > 1$  a ser fixado.

Sem dificuldade, é possível mostrar como foi feito na Afirmação 3.2.17 que  $v_{n,L} \in \mathbb{K}$  para cada  $n \in \mathbb{K}$ . Substituindo a função  $v_{n,L}$  como função teste em (3.90) deduzimos

$$\frac{1}{L^{2(\beta-1)}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \right\} \leq \frac{1}{L^{2(\beta-1)}} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Desde que  $\lambda_n V(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &+ 2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Observe que

$$2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1} = 2(\beta-1) \int_{u_n \leq L} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \geq 0. \quad (3.96)$$

Substituindo (3.95) e (3.94) e usando a informação da igualdade (3.96) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Recordemos que a função  $\tilde{g}$  verifica  $(\tilde{g}_3)$ , ou seja, fixado  $\alpha \geq \alpha_0$  existe  $C > 0$  tal que

$$|\tilde{g}(x, t)| \leq |t| + C|t|b_\alpha(t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

Logo, podemos reescrever (3.97) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \leq C \int_{\mathbb{R}^2} b_\alpha(u_n) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}, \quad (3.98)$$

onde  $C$  mudaremos sempre que necessário. Recordando a função  $\eta$  temos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n) \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \quad (3.99)$$

Por outro lado, pelas imersões contínuas de Sobolev temos

$$|U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))}^2 \leq C_\gamma \int_{B_{r_j}(x_0)} (|\nabla U_{n,L}|^2 + |U_{n,L}|^2) dx \quad (3.100)$$

para qualquer  $\gamma \geq 2$ . Note que

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 \leq & \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ & + 6\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo (3.99) em (3.101)

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 dx \leq \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n) \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx.$$

Usando as propriedades de  $\eta$  segue que

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 dx \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n) \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx.$$

ou ainda,

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 dx \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n) \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \quad (3.102)$$

Substituindo (3.102) em (3.100) e realizando algumas manipulações algébricas obtemos

$$|U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))}^2 \leq C\beta^2 \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n) \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} dx \right] \quad (3.103)$$

Sabemos pelo Lema 3.3.6 que  $b_\alpha(u_n) \in L^q(\mathbb{R}^2)$  para algum  $q > 1$  e  $q \approx 1$ . Ademais, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|b_\alpha(u_n)|_q^q \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com essa informação, utilizaremos a desigualdade de Hölder em (3.103) com expoentes  $q$  e  $q'$  para concluirmos que

$$\begin{aligned} |U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} & \leq C\beta^2 \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})^{q'} dx \right]^{1/q'} |B_{r_j}(x_0)|^{1/q} \\ & + C\beta^2 \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} (b_\alpha(u_n))^q dx \right]^{1/q} \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})^{q'} dx \right]^{1/q'} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Sendo  $r_{j+1} < r_{j+1} < \dots < r_1$  para todo  $\forall j \in \mathbb{N}$  e pela informação sobre  $b_\alpha(u_n)$  temos

$$|U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} \leq C\beta^2 \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'} u_{n,L}^{2q'(\beta-1)} dx \right]^{1/q'} \quad (3.105)$$

Conseqüentemente,

$$\left( \int_{B_{r_{j+1}}(x_0)} u_{n,L}^{\gamma\beta} dx \right)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \left[ \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'} u_{n,L}^{2q'(\beta-1)} dx \right]^{1/q'}, \quad (3.106)$$

ou seja,

$$\left( \int_{B_{r_{j+1}}(x_0)} u_{n,L}^{\gamma\beta} dx \right)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \left( \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'\beta} dx \right)^{1/q'}. \quad (3.107)$$

Logo,

$$|u_{n,L}|_{L^{\gamma\beta}(B_{r_{j+1}}(x_0))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_n|_{L^{2q'\beta}(B_{r_j}(x_0))}^{2\beta} < \infty \quad (3.108)$$

pois  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Utilizando o Lema de Fatou em (3.108) na variável  $L$  deduzimos

$$|u_n|_{L^{\gamma\beta}(B_{r_{j+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_n|_{L^{2q'\beta}(B_{r_j}(x_0))} \quad (3.109)$$

para todo  $j, n \in \mathbb{N}$  e  $C$  depende de  $\gamma$ .

**Afirmção 3.3.11** *Vale a seguinte fórmula*

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^k} + \dots + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi} + \dots + \frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.110)$$

onde  $C$  independe de  $n$  e

$$\chi = \frac{\gamma}{2q'}$$

com  $\gamma > 2q'$  fixado.

Com efeito, utilizando (3.109) com  $\beta = \chi = \frac{\gamma}{2q'}$  e  $j = 1$  temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_1}(x_0))$$

e

$$|u_n|_{L^{\gamma\beta}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_n|_{L^{2q'\beta}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.111)$$

ou ainda,

$$|u_n|_{L^{\chi^{2q'}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.112)$$

De (3.112) garantimos

$$u_n^{\chi^2} \in L^{2q'}(B_{r_2}(x_0)). \quad (3.113)$$



O próximo passo é considerar  $\beta = \chi^2$  e  $j = 1$ , por (3.113) temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_2}(x_0)).$$

Usando (3.109) segue que

$$|u_n|_{L^{\chi^{3 \cdot 2q'}}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}} (\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}} |u_n|_{L^{\chi^{2 \cdot 2q'}}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.114)$$

Agora substituindo (3.112) em (3.114) obtemos

$$|u_n|_{L^{\chi^{3 \cdot 2q'}}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}} (\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}} C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.115)$$

ou melhor,

$$|u_n|_{L^{\chi^{3 \cdot 2q'}}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} \chi^{\frac{1}{\chi} + \frac{2}{\chi^2}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.116)$$

Segue de (3.116)

$$u_n^{\chi^3} \in L^{2q'}(B_{r_3}(x_0)). \quad (3.117)$$

Agora suponhamos que a fórmula (3.3.11) é válida para algum  $k > 1$  e queremos mostrar que é válida para  $k + 1$ . Para isso, considerando  $\beta = (\gamma/2q')^{k+1}$  e  $j = k + 1$ . Como supomos válida para  $k$ , temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0)).$$

Substituindo  $\beta = \chi^{k+1}$  e  $j = k + 1$  em (3.109) deduzimos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2 \cdot 2q'}}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}} (\chi^{k+1})^{\frac{1}{\chi^{k+1}}} |u_n|_{L^{\chi^{k+1 \cdot 2q'}}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.118)$$

Pela hipótese de indução temos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1 \cdot 2q'}}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^k} + \dots + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi^k} + \dots + \frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.119)$$

Substituindo (3.119) em (3.118) concluímos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2 \cdot 2q'}}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}} + \dots + \frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}} + \dots + \frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.120)$$

Portanto, pelo princípio de indução finita podemos concluir que a Afirmação 3.3.11 é válida.

Observe que as séries que aparecem em (3.3.11) são convergentes

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\chi^i} = \frac{1}{\chi - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^k \frac{i}{\chi^i} = \frac{\chi^2}{(\chi-1)^2}$$

assim, existe  $C > 0$  tal que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo  $R < r_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$  então

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_R(x_0))} \leq |u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

É possível mostrar que  $u_n \in L^p(B_R(x_0))$ , para todo  $p \geq \chi^k 2q'$  por interpolação. Utilizando o Lema 3.2.19 concluímos que  $u_n \in L^\infty(B_R(x_0))$  e

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.121)$$

onde  $C$  independe de  $n$ . Note que  $B_{r_1}(x_0) \subset \Omega^c$  e portanto

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^\gamma(\Omega^c)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.122)$$

Usando a Proposição 3.3.10 temos que

$$u_n = u_{n,\lambda_n} \rightarrow 0 \text{ em } H^1(\Omega^c) \text{ quando } \lambda_n \rightarrow +\infty$$

e a imersão contínua de Sobolev dado  $\kappa > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} < \kappa, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Sendo  $x_0 \in \Omega^c$  arbitrário então

$$|u_n|_{L^\infty(\Omega^c)} < \kappa.$$

Dessa forma, garantimos a existência de um  $\lambda^* > 0$  tal que a solução  $u_\lambda$  verifica

$$u_\lambda(x) \leq a, \quad \forall x \in \Omega^c \text{ e } \lambda \geq \lambda^*.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla(v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(x, u)(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Então para  $\lambda \geq \lambda^*$  e pela Observação 3.92 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla(v-u) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda V(x))u(v-u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} f(u)(v-u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.123)$$

Para finalizarmos a demonstração do Teorema 3.1.1 precisamos mostrar a seguinte proposição.

**Proposição 3.3.12** *Seja  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $(u_n)$  uma solução de (3.123). Então, existe uma subsequência  $(u_n)$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

*Além disso,*

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ .

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

(iii) Quando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \\ \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \|u_n\|_{\lambda_n}^2 &\rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(iv) Temos que  $u$  é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(u)(v - u) dx, \quad (3.124)$$

para todo  $v \in \tilde{\mathbb{K}}$ , onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Conforme omitimos a demonstração da Proposição 3.3.10, aqui segue a mesma justificativa de tal omissão.



# Referências Bibliográficas

- [1] C.O. Alves, *Existência de solução do tipo multi-bump para uma classe de problemas quasilineares em  $\mathbb{R}^N$* , Tese de Professor Titular (2005).
- [2] C.O. Alves and L.M. Barros, *Existence and multiplicity of solutions for a class of elliptic problem with critical growth*, to appear in Monatsh.Math.
- [3] C.O. Alves and F.J.S.A. Córrea, *Multiplicity of positive solutions for an obstacle problem in  $\mathbb{R}$* , Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol.**85** (2010), 23-28.
- [4] C.O. Alves, D.C. De Moraes Filho and M.A.S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in  $\mathbb{R}^N$* , Proc. Edinb. Math. Soc. **52** (2009), 1-21.
- [5] C.O. Alves and Y.H. Ding, *Multiplicity of positive solutions to a  $p$ -Laplacian equation involving critical nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003) 508-521.
- [6] C.O. Alves, A.B. Nóbrega and M. Yang, *Multi-bump solutions for Choquard equation with deepening potential well*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), 28 pp.
- [7] C.O. Alves and D.S. Pereira, *Multiplicity of Multi-Bump type nodal solutions for a class of elliptic problems with exponential critical growth in  $\mathbb{R}^2$* , Proc. Edinb. Math. Soc. (2), v. 60, p. 273-297, 2017.
- [8] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

- [9] C.O. Alves and M.A.S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in  $\mathbb{R}^2$* , J. Differential Equations, 244 1502-1520, 2008.
- [10] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Academiei. Bucarest and Nordhoff, Leyden, 1976.
- [11] T. Bartsch, A. Pankov and Z.Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well*, Commun. Contemp. Math. **3** (2001), 549-569.
- [12] T. Bartsch and Z. Tang, *Multibump solutions of nonlinear Schrödinger equations with steep potential well and indefinite potential*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 7-26.
- [13] T. Bartsch and Z-Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), 1725-1741.
- [14] T. Bartsch and Z-Q. Wang, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Z. Angew. Math. Phys. **51** (2000), 366-384.
- [15] A. Bensoussan and K. Chandrasekharan, J. Turi, *Optimal control of variational inequalities*, Commun. Inf. Syst., 10 (2010), 203-220.
- [16] A. Bensoussan and J-L. Lions, *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, Paris, 1978.
- [17] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in  $\mathbb{R}^2$* , Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 407-435.
- [18] S. Carl, V.K. Le and D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities, comparison principles and applications*, Springer, New York (2007).
- [19] M. Chipot and K. Yeressian, *On Some Variational Inequalities in Unbounded Domains*, Boll. del UMI, (9), V, (2012), 243-262.
- [20] M. Clapp and Y.H. Ding, *Positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity*, Z. Angew. Math. Phys. **55** (2004), 592-605.

- [21] M. Del Pino and P.L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. 4(1996), 121-137.
- [22] Y.H. Ding and K.Tanaka, *Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation*, Manuscripta Math. **112** (2003), 109-135.
- [23] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 1, 1979, 443-474.
- [24] M. Fang, *Degenerate elliptic inequalities with critical growth*, J. Differential Equations 232 (2007), no. 2, 441-467.
- [25] G. Fichera, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*. Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 34, 138-142 (1963).
- [26] G.M. Figueiredo, *Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2004.
- [27] G.M. Figueiredo, M. Furtado and M. Montenegro *An obstacle problem in a plane domain with two solutions*, Adv. Nonlinear Stud. 14 (2014), 327-337.
- [28] D.G. Figueiredo, O.H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$  with nonlinearity in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), 139-153.
- [29] A. Friedman, *Free Boundary Problems in Science and Techonology*. Notice of the AMS, 2000.
- [30] L.R. Freitas, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares com crescimento crítico exponencial*, in: Tese de doutorado USP-São Carlos, 2010.
- [31] O. Frites, T. Moussaoui and D. ÓRegan, *Existence of solutions for a variational inequality on the half-line*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 43 (2017), No. 1, pp. 223-237.

- [32] L. Gongbao, *Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equations*, Annales Academiæ Scientiarum Fennica, Serie A, Vol. 14, (1989), 27-36.
- [33] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.
- [34] C. Gui, *Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational methods*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 787-820.
- [35] Y. Guo and Z. Tang, *Multi-bump solutions for Schrödinger equation involving critical growth and potential wells*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **35** (2015), 3393-3415.
- [36] Y. Jianfu, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*, Nonlinear Anal. , Vol. 25, N. 12, (1995), 1283-1306.
- [37] Y. Jianfu, *Positive solution of an obstacle problems*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 6<sup>ème</sup> Série, tome. 4, N. 2, 339-366 (1995).
- [38] O. Kavian, *Introduction à la théorie de points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [39] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [40] P.L. Lions, *The concentration–compactness principle in the calculus of variations, the limit case, I*, Rev. Mat. Ibero. 1 (1985), 46-20.
- [41] P.L. Lions, *The concentration–compactness principle in the calculus of variations, the limit case, II*, Rev. Mat. Ibero. 1 (1985), 145-201.
- [42] P.L. Lions, *La méthode de concentration–compacité en calculs des variations*, (ICTP, Trieste, 1988).
- [43] G. Mancini and R. Musina, *Holes and obstacles*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Section C, tome 5, N. 4 (1988) 323-345.



- [44] P. Magrone and R. Servadei, *A stability result for mountain pass type solutions of semilinear elliptic variational inequalities*, Adv. Nonlinear Stud. 9 (4) (2002), 387-405.
- [45] M. Matzeu and R. Servadei, *A Linking type method to solve a class of semilinear elliptic variational inequalities*, Adv. Nonlinear Stud. 2 (1) (2002) 1-17
- [46] M. Matzeu and R. Servadei, *Semilinear elliptic variational inequalities with dependence on the gradient via mountain pass techniques*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 4347-4359.
- [47] M. Matzeu and R. Servadei, *Stability for semilinear elliptic variational inequalities depending on the gradient*, Nonlinear Anal., 74, (2011) 5161-5170.
- [48] O.H. Miyagaki, *On a class of semilinear elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$  with critical growth*, Nonl. Anal. TMA 29 (1997) 773-781.
- [49] R. Monneau. *A brief overview on the obstacle problem*. In European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), volume 202 of Progr. Math., pages 303-312. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [50] J.A. Moser, *Sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.
- [51] J.A. Moser, *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Partial Differential Equations, 13 (1960), 457-468.
- [52] J.F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics*, Mathematics Studies 134, Elsevier, 1987.
- [53] X. Ros-Oton, *Obstacle problems and free boundaries: an overview*, 2017.
- [54] G. Stampacchia, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér L Math. 258 (1964) 4413-4416.
- [55] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, vol. 3, 1986, 77-109.

- [56] K.H. Teka, *The obstacle problem for second order elliptic operators in nondivergence form*, Thesis(Ph.D.)-Kansas States University, 2012.
- [57] G.M. Troianiello, *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, The University Series in Mathematics, Springer, 1987.
- [58] N. Trudinger, *On imbedding into Orlicz space and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-484.
- [59] Z-Q. Wang, *Existence and symmetry of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Differential Equations, 159 (1999), 102-137.
- [60] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, 1996.